

Tutorial 2 – Grover 010

Luís Paulo Santos, Dezembro, 2020

1 Enunciado

Usando o IBM Q Experience Composer desenvolva um circuito que, usando o algoritmo de Grover, amplifique a amplitude do estado 010 numa sobreposição uniforme de 8 estados ($N=8$, $n=3$).

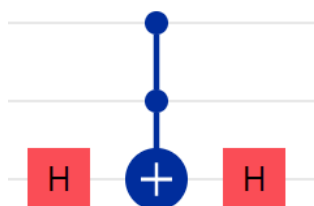
2 Grover: Circuitos fundamentais

O algoritmo de Grover (conforme apresentado na sessão teórica) necessita de 2 circuitos fundamentais: o operador de difusão e o oráculo. Ambos usam uma gate ccZ, pelo que começaremos por definir esta.

2.1. Gate ccZ

A gate Z faz uma rotação em redor do eixo Z de π radianos do estado base $|1\rangle$. Uma gate Z controlada por $n-1$ qubits aplica a mesma rotação ao estado $|1\rangle^{\otimes n}$. Na prática inverte o sinal da amplitude deste estado.

Uma gate de Hadamard corresponde a uma rotação de $\pi/2$ radianos sobre o eixo Y, convertendo o eixo Z no eixo X e vice versa. Logo uma gate Z pode ser obtida aplicando uma gate de Hadamard, depois a gate X (rotação de π radianos sobre o eixo X) e outra gate de Hadamard para reverter a rotação original:



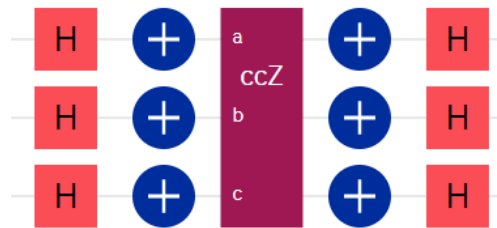
Circuito 1-ccZ gate

- Componha o Circuito 1 no Composer
- Usando o rato seleccione todas as gates do circuito
- Usando o botão direito do rato, seleccione a opção Group e crie um novo operador designado por ccZ - Note que este operador aparece na paleta de gates e operadores disponíveis para usar no Composer
- Agora que o operador ccZ está criado e disponível apague as gates do circuito.

(gravação desta secção em <https://euiiti.bbcollab.com/recording/3e3c124982174086bfd5ac7ffdb5064c>)

2.2. Operador de difusão

Operador de difusão de Grover faz uma reflexão à volta da média das amplitudes dos estados. O resultado prático é que aumenta a amplitude dos estados cuja amplitude tenha sinal contrário à média (e, claro, diminui a amplitude dos restantes estados: a soma do quadrado das amplitudes tem que ser sempre igual a 0). Para 3 qubits o circuito é:



Circuito 2- operador de difusão

- Componha o Circuito 2 no Composer
- Usando o rato seleccione todas as gates do circuito
- Usando o botão direito do rato, seleccione a opção Group e crie um novo operador designado por dD - Note que este operador aparece na paleta de gates e operadores disponíveis para usar no Composer
- Agora que o operador dD está criado e disponível apague as gates do circuito.

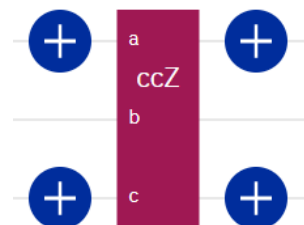
(gravação desta secção em <https://eu-lti.bbcollab.com/recording/b1cae7e248194660b47b41e4bf06a59f>)

2.3. Oráculo

O Oráculo aplica a gate ccZ ao estado relevante, cuja amplitude se pretende amplificar. No caso deste exercício trata-se do estado $|010\rangle$. Note que ao aplicar a gate ccZ a este estado inverte o sinal da amplitude do mesmo.

Note também que nada impede de que haja mais do que um estado relevante, caso em que o oráculo aplicaria uma gate ccZ a cada um desses estados (chamados de soluções).

No caso do nosso exemplo o circuito do oráculo é:



Circuito 3- Oráculo

- Componha o Circuito 3 no Composer
- Usando o rato seleccione todas as gates do circuito
- Usando o botão direito do rato, seleccione a opção Group e crie um novo operador designado por oO - Note que este operador aparece na paleta de gates e operadores disponíveis para usar no Composer
- Agora que o operador oO está criado e disponível apague as gates do circuito.

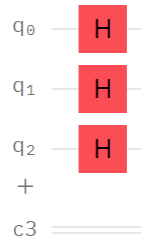
(gravação desta secção em <https://eu-lti.bbcollab.com/recording/cb93eeb058c24867878fab9a85147d11>)

3 Circuito: Algoritmo de Grover

Desenvolva o circuito que implementa o algoritmo de Grover que maximiza a amplitude do estado $|010\rangle$; utilize sempre que necessário os operadores definidos na secção anterior.

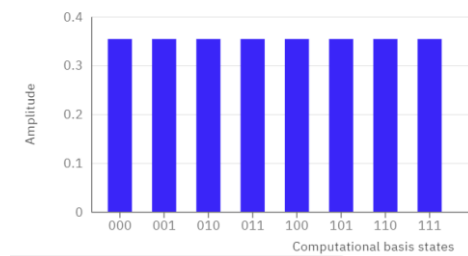
1) Preparação da sobreposição uniforme

Utilizar gates Hadamard para preparar esta sobreposição:



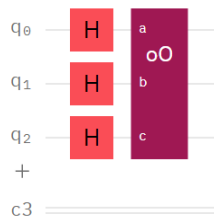
Circuito 4-Preparação da sobreposição uniforme

Verifique que todos os 8 estados têm a mesma amplitude ($\frac{1}{\sqrt{8}}$) usando o StateVector viewer:

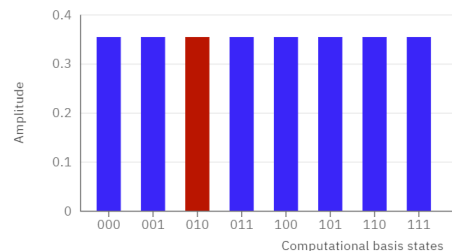


2) Oráculo

Introduza o oráculo, que vai trocar o sinal da amplitude do estado $|010\rangle$:



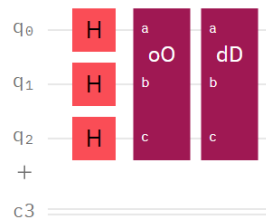
Verifique o statevector:



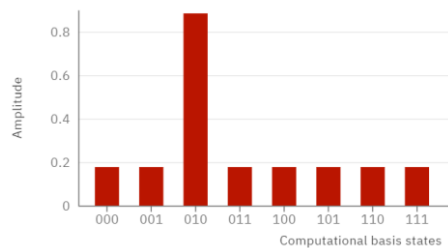
A cor vermelha na coluna do estado 010 indica que tem uma fase de π radianos; basicamente, o sinal da amplitude é negativo.

3) Difusão

Acrescente agora o operador de difusão, dD, para amplificar a amplitude dos estados cuja amplitude tem sinal contrário à média:



Verifique o statevector:



Confirma que a amplitude do estado alvo foi amplificada?

Note que todas as amplitudes têm sinal negativo, mas isso é irrelevante pois a probabilidade é o quadrado da amplitude.

4) qQ: operador de Grover

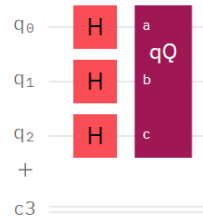
Será que a amplitude conseguida é a maior possível? Sabemos que se o número de estados, N , for bastante maior do que 1 então o par Oráculo-Difusão deve ser aplicado repetidamente r vezes, sendo $r = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{t}} \right\rceil$, onde t é o número de soluções. Quando N é pequeno esta fórmula não se aplica. Podemos ver o valor de iterações Oráculo-Difusão na seguinte tabela:

$\frac{N}{t}$	r
4	1
8	2
16	3
32	4

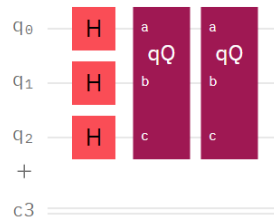
Ou seja, no caso deste exercício devem ser efectuadas 2 iterações.

Vamos construir o operador de Grover, designado por qQ, que consiste no par Oráculo-Difusão:

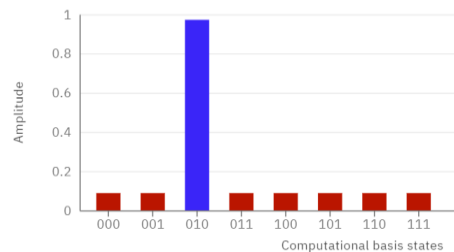
- Usando o rato seleccione no circuito os operadores oO e dD
- Usando o botão direito do rato, seleccione a opção Group e crie um novo operador designado por qQ - Note que este operador aparece na paleta de gates e operadores disponíveis para usar no Composer; adicionalmente, o circuito muda o seu aspecto, passando a apresentar o operador qQ onde antes se viam os operadores oO e dD:



Aplique um segundo operador de Grover:



Verifique o statevector:

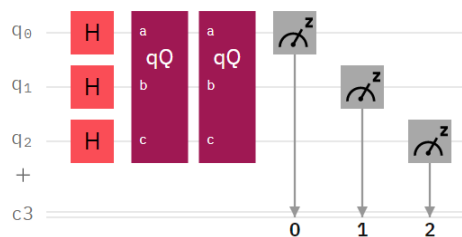


Note que a amplitude do estado 010 é agora maior, conseqüentemente é também maior a probabilidade de esse estado ser medido quando da execução do programa numa máquina real. O que aconteceria se em vez de 2 operadores de Grover aplicarmos mais? Experimente para 3 operadores. Constatará que a amplitude do estado alvo diminuiu. Trata-se na verdade de uma função periódica, com a amplitude do estado alvo a oscilar com o número de iterações de Grover.

(gravação desta secção em <https://eu-lti.bbcollab.com/recording/dfad0c03a01540878b845a4abe51b337>)

4 Execução numa máquina real

Para que o circuito possa ser executado numa máquina real e obtenhamos resultados vamos acrescentar as gates de medição, uma para cada qubit:



Usando o menu “Run Settings” mande executar na máquina ibmqx2 usando 1024 shots. Observe os resultados. Estão de acordo com o previsto pelo statevector? Porque não?

(gravação desta secção em <https://eu-lti.bbcollab.com/recording/0f276fd131db4a1bb20a2f9a10516fde>)