Instituto Superior Técnico

Laboratório 1

Processamento Digital de Sinais

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Autores

90803 - João Silva
90817 - Vasco Araújo

Ano Letivo 2020/2021

Introdução

Este laboratório foi o primeiro no âmbito da cadeira de Processamento Digital de Sinais. Esta sessão era focada em conseguir implementar em Matlab a amostragem de um sinal, bem como observar o seu espectrograma. Foi também verificado o fenómeno de *aliasing*, bem como a solução para este problema, filtros *anti-aliasing*.

1

Como seria de esperar com um sinal *chirp*, isto é, um sinal cuja frequência varia monotonamente com o tempo, o sinal que se ouve é um sinal em que a frequência vai sempre aumentando. O sinal começa num tom mais grave (ou de frequência baixa) e vai subindo o tom para tons mais agudos.

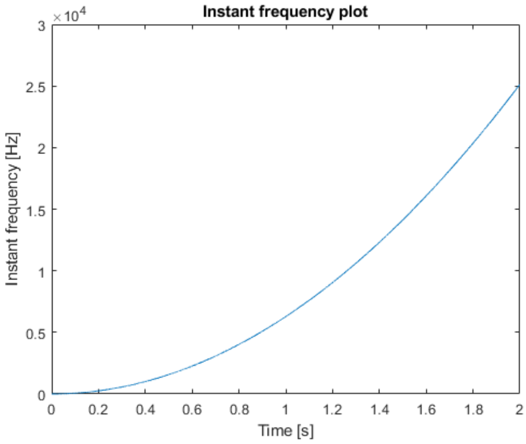

Figura 1: Frequência instantânea do sinal $x_c(t)$

2

Quanto maior for o comprimento da Janela de Hanning melhor a resolução da frequência mas pior a resolução temporal. Logo, é uma questão de escolher o melhor *trade-off*. Heuristicamente, verificou-se que N=60 produzia um espectrograma nítido, como se pode verificar na Figura 2

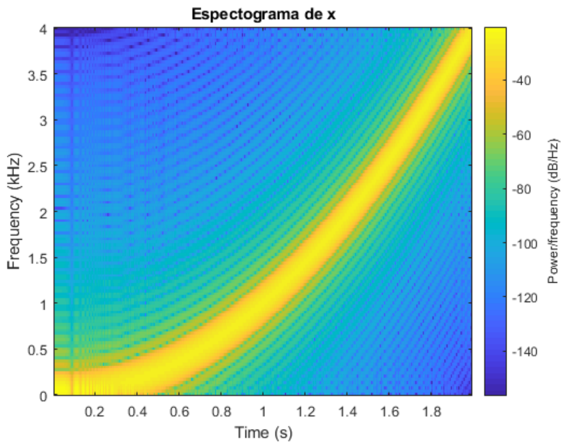

Figura 2: Espectrograma do sinal x

Um espectrograma é uma forma de representar a variação de frequências de um sinal com o tempo, e obtém-se com a Transformada de Fourier. Quanto maior for a intensidade da frequência mais "quente"será a cor no espectrograma, e como seria de esperar, as frequências mais intensas da Figura 2 seguem o gráfico da Figura 1. O espectrograma demonstra que apesar de um sinal ter uma certa gama de frequências dominantes, para cada instante de tempo as restantes frequências também existem, apenas têm uma intensidade tão baixa que não se ouvem.

3

3.1

A frequência de amostragem do sinal y(n) é de $\frac{8000}{2}Hz = 4000Hz$, pois o sinal tem a mesma duração do sinal x(n) mas metade das amostras. Como a frequência de amostragem é metade da original, é chamada de frequência de Nyquist.

3.2

À semelhança do sinal na 1, este sinal começa num tom grave e cresce para tons mais agudo. No entanto, como o sinal não cumpre o Teorema da Amostragem, que afirma que um sinal contínuo preserva toda a informação se a frequência de amostragem for superior a metade de Fs, que neste caso é 4000 Hz. Logo, aos 2000 Hz ocorre o fenómeno de Aliasing, o que faz com que as frequências seguintes sejam "espelhadas"e que começem a decrescer até zero. Este fenómeno repete-se 4 vezes durante todo o sinal como se pode ver na Figura 3, e é por isso que ouve-se o sinal a subir e descer de tons constantemente.

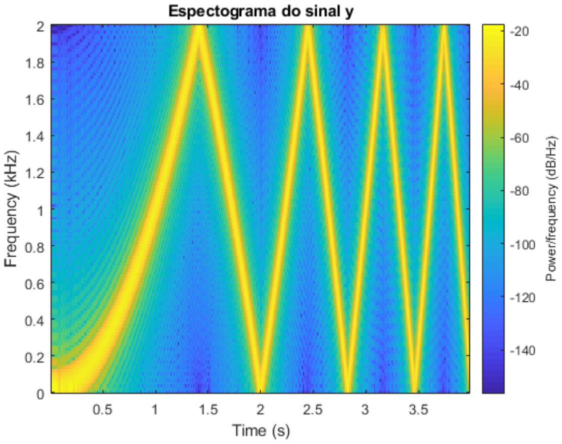

Figura 3: espectrograma do sinal y

3.3

Nesta questão irá-se demonstrar o Teorema da Amostragem, como explicado anteriormente. Espera-se que, como o Teorema indica, o cosseno seja totalmente preservado para frequências de amostragem maiores que o dobro das frequências do sinal. As frequências de amostragem serão 4, 8 e 20 kHz. De forma a ter uma boa representatividade de valores, escolheu-se para frequências de sinal 1, 4, 6 e 160 kHz.

Destes valores verifica-se que a única frequência que cumpre sempre o Teorema da Amostragem é a de 1 kHz, que como se pode verificar amostra o cosseno na totalidade, não havendo perda de informação. Apesar do gráfico não estar exactamente igual ao cosseno original, o que o Teorema da Amostragem prova é que toda a informação necessária para restaurar o sinal original está preservada. Escolheu-se esta frequência para demonstrar um caso em que o teorema da Amostragem é cumprido para todos os sinais.

A frequência de amostragem de 160 kHz não amostra de forma correcta nenhum sinal, apresentando um valor constante em todos os gráficos. Isto acontece pois esta frequência é múltipla das frequências de todos os sinais, e como tal, amostra o sinal apenas num ponto do período. Esta frequência de amostragem não cumpre o Teorema da Amostragem para nenhum sinal e como tal é impossível reconstruir o sinal original. Esta frequência foi escolhida para demonstrar um caso óbvio em que o teorema da Amostragem não é cumprido, uma vez que sinal sinusoidal claramente não pode ser reconstruído a partir de um só valor.

Estas duas frequências foram escolhidas por serem dois casos extremos. Para as restantes escolheram-se frequências intermédias que cumpram o Teorema da Amostragem parcialmente. A frequência de 4 kHz foi escolhida pois ilustra o Teorema de Amostragem, uma vez que o sinal de amostragem apenas pode ser reconstruído nas frequências de 8 e 20 kHz. A frequência de 6 kHz apresenta um caso semelhante mas em que o sinal apenas pode ser reconstruído para a frequência de 20 kHz.

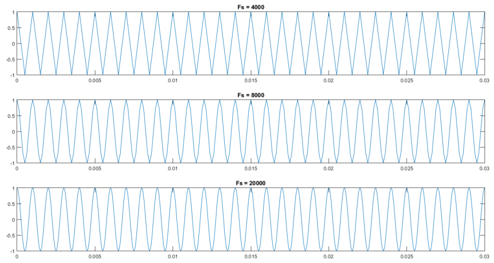

Figura 4: Sinal de frequência 1 kHz amostrado a 4, 8 e 20 kHz

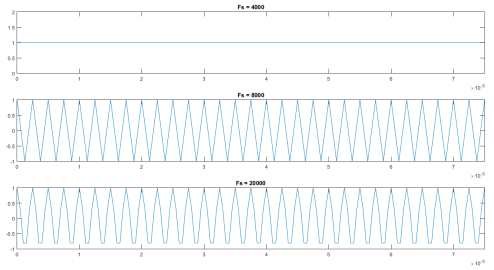

Figura 5: Sinal de frequência 4 kHz amostrado a 4, 8 e 20 kHz

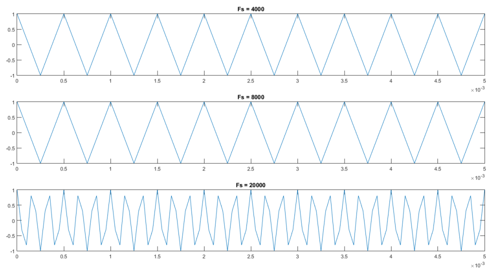

Figura 6: Sinal de frequência 6 kHz amostrado a 4, 8 e 20 kHz

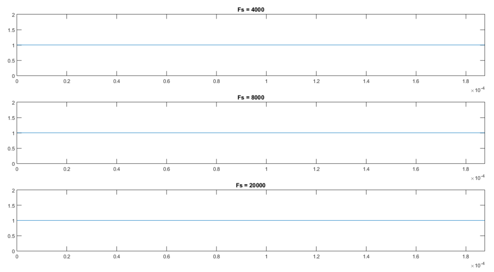

Figura 7: Sinal de frequência 160 kHz amostrado a 4, 8 e 20 kHz

4

Nesta secção era necessário trabalhar com um ficheiro *.wav*. Fazendo load deste ficheiro no Matlab é possível descobrir a frequência de amostragem, $F_s = 44100Hz$. Para determinar qual o valor de N, isto é, qual o comprimento da janela de Hanning que leva a melhores resultados no que toca ao espectrograma, foram feitos vários espectrogramas com diferentes valores de N.

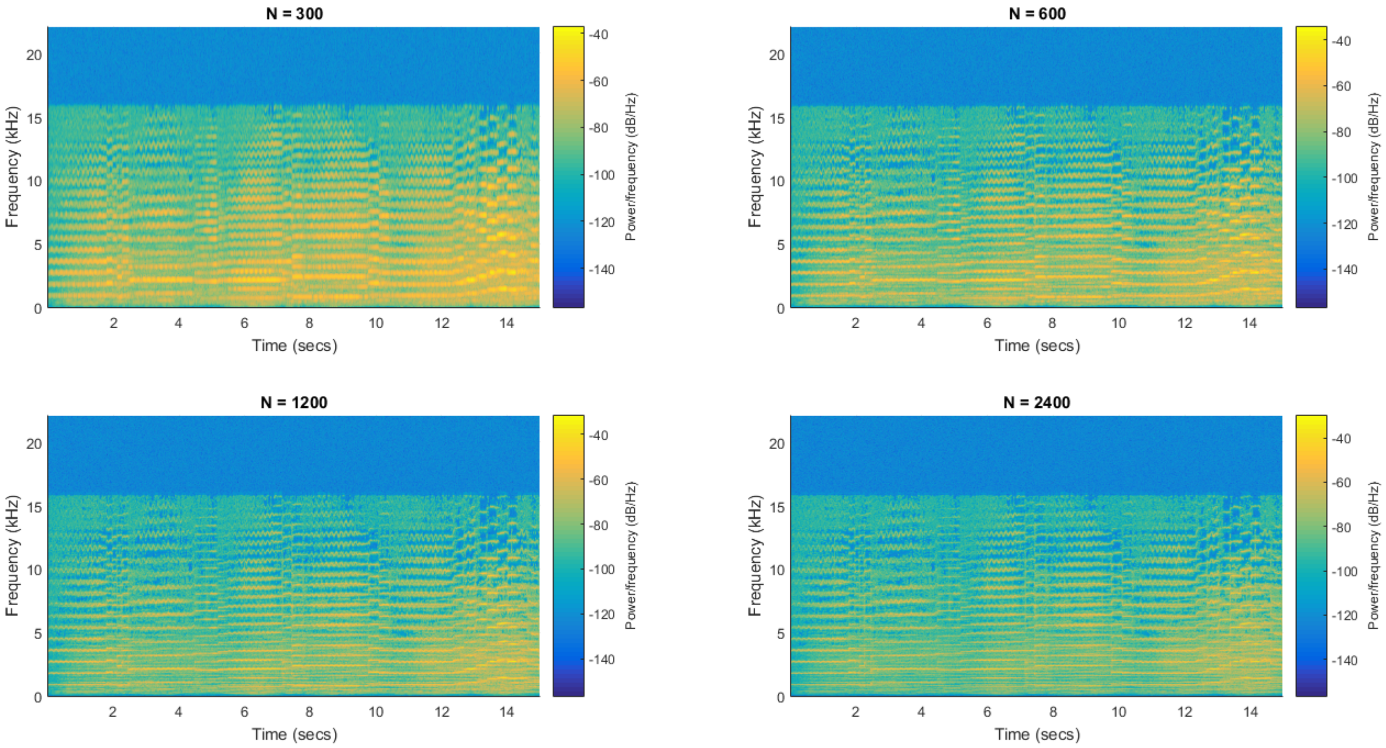

Figura 8: Espectrograma do sinal para diferentes valores de N

Como se pode ver na Figura 8, com o aumento de N observa-se um aumento na resolução no eixo da frequência, evidenciado pelo facto de se conseguir ver mais nitidamente a separação das várias linhas do espectrograma. Embora não sejam imediatamente visíveis as diferenças entre as últimas duas imagens, com o auxílio da Figura 9 é possível ver que enquanto que não há grande alteração no que toca à resolução no eixo da frequência, há uma degradação notável na resolução temporal quando se passa de N = 1200 para N = 2400. Sendo assim, foi utilizado N = 1200 daqui em diante.

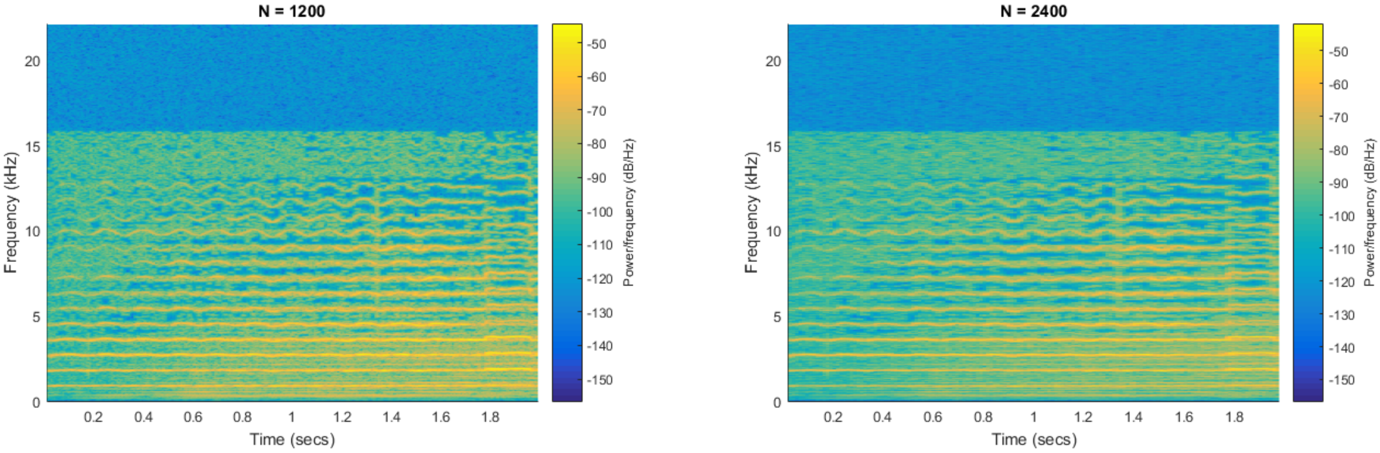

Figura 9: Zoom-in da Figura anterior

5

Nesta alínea era pedido que fosse feito sample do sinal da alínea anterior, mudando a frequência de amostragem Fs para Fs/5, ou seja $Fs = 8820Hz$. Conseguiu-se fazer este resample facilmente construindo um novo sinal que vai buscar o valor do sinal original a cada 5 instantes de tempo discreto, resultando assim um sinal equivalente ao sinal original amostrado com a frequência de amostragem pedida. Reproduzindo o sinal com o comando *soundsc* é imediatamente perceptível que este está distorcido, ou seja, alguma informação foi perdida devido à amostragem. Tal sucede uma vez que diminuindo a frequência de amostragem para um quinto da original, este sinal deixa de cumprir a condição necessária do Teorema da Amostragem (1).

$$f_m < \frac{f_s}{2} \tag{1}$$

Como é referido no guia do laboratório, este teorema dita que nenhuma informação é perdida se a frequência de amostragem for maior que duas vezes a frequência mais alta do sinal. Quando esta condição é violada, há perda de informação. Podemos ilustrar este fenómeno com um exemplo de um sinal cuja Transformada de Fourier é um sinal triangular, como se pode ver na Figura 10.

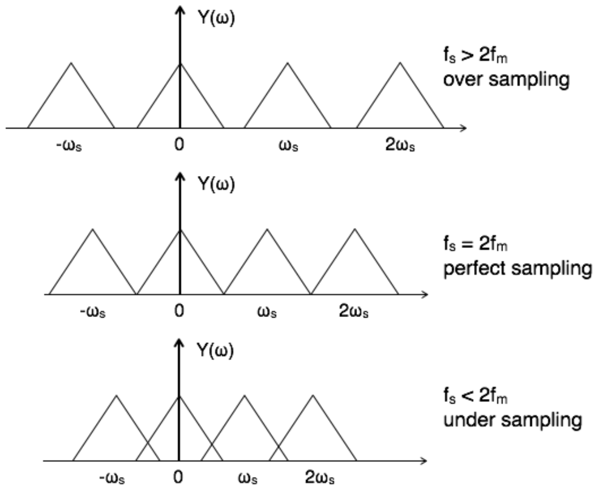

Figura 10: Ilustração do processo de amostragem

Quando a frequência máxima do sinal é inferior ao dobro da frequência de amostragem está-se na situação de sub-amostragem. A Figura ilustra o fenómeno de aliasing, em que as componentes de alta frequência foram sobrepostas às componentes de baixas frequências, resultando num sinal diferente do original. Esta distorção também pode ser verificada analisando o espectrograma. Como se pode ver na Figura 11 o espectrograma apresenta diferenças face ao da Figura 8. A sobreposição ilustrada na Figura 10 leva a que no eixo da frequência deixe de haver uma diferenciação das componentes das diversas frequências, deixando de haver as linhas facilmente distinguíveis.

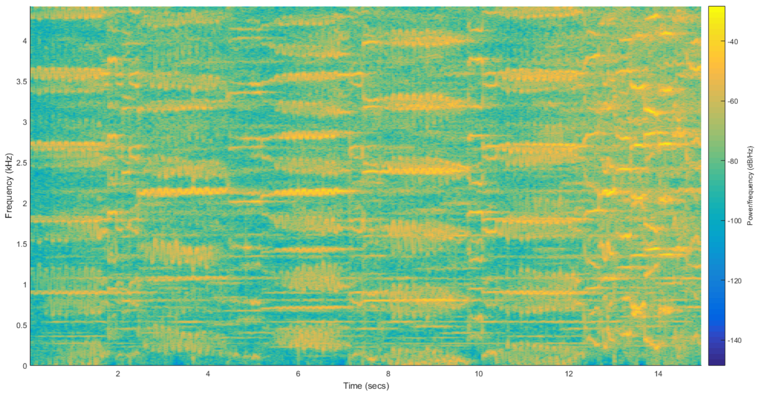

Figura 11: Espectrograma do sinal sub-amostrado

6

Esta secção segue a mesma direção da anterior, tendo apenas a diferença de primeiro passar o sinal por um filtro passa-baixo. No entanto esta pequena diferença é suficiente para permitir a reconstrução do sinal original, ainda que possamos perder alguma informação. Este filtro é também denominado filtro anti-aliasing, uma vez que passando o sinal por este filtro faz com que não haja aliasing.

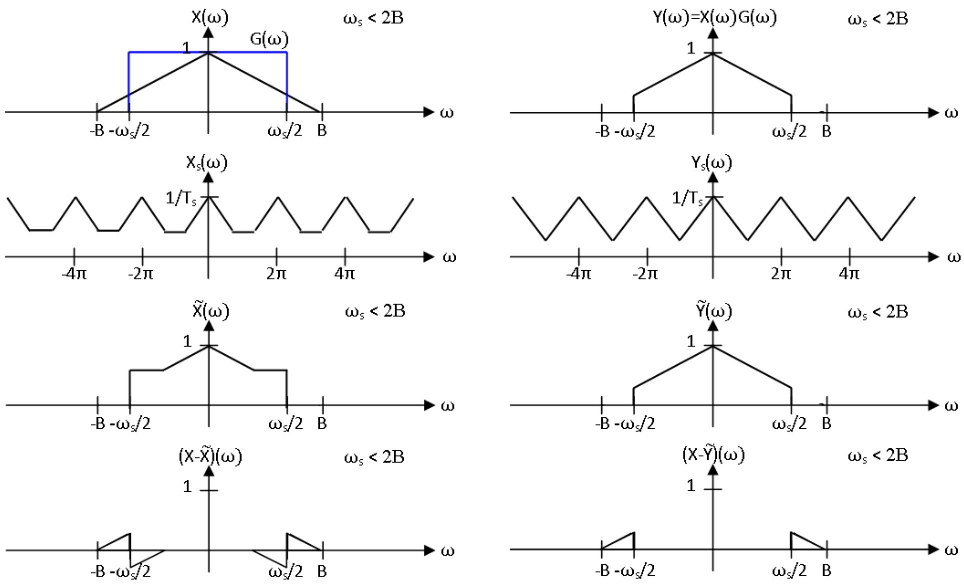

Figura 12: Funcionamento do filtro anti-aliasing

Comparando a Figura 10 com a Figura 12 ([3]) é possível ver que ao passar o sinal pelo filtro passa-baixo impedimos que haja sobreposição de componentes de frequências diferentes. Isto é, as zonas onde havia sobreposição foram as ”cortadas”pelo filtro. Resulta assim um sinal que tem menos informação do que o sinal original, mas não tem nenhuma informação incorrecta. Ao reproduzir o sinal através do comando *soundsc* pode-se facilmente verificar que este processo está a funcionar, uma vez que o som já não está distorcido, como acontecia na alínea anterior. No entanto observa-se também a perda de informação, uma vez que se consegue notar que o som não tem a mesma qualidade, devido ao facto das componentes nas altas frequências estarem a faltar. Analisando o espectrograma é possível verificar que, ao contrário do que sucedeu na secção anterior (Figura 11), já não há a distorção no eixo da frequência. No entanto também há diferenças em relação ao espectrograma do sinal original (Figura 8). O espectrograma tem menos informação, devido às componentes das frequênciais altas terem sido cortadas pelo filtro passa-baixo.

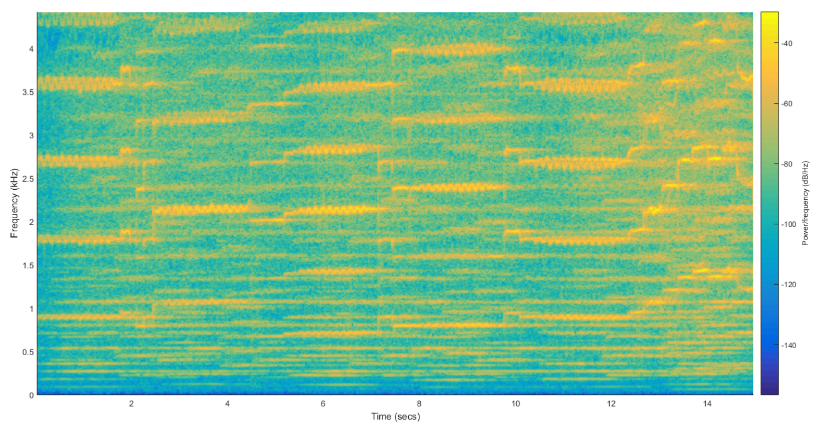

Figura 13: Espectrograma do sinal com anti-aliasing.

Referências

[1] https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1126518382278717/DSP_Slides.pdf

[2] https://www.tutorialspoint.com/signals_and_systems/signals_sampling_theorem.htm

[3] Richard Baraniuk. *Signals and Systems*. University Press of Florida, 2009