Trabalho Computacional
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL / LMAC
2º Sem. 20/21

I

Prazo de entrega: 6 de Junho. O relatório e os códigos deverão ser entregues, como habitualmente, através de um projecto no Fenix. Pretende-se aproximar uma função $f(t)$, no intervalo $[0,1]$, por um polinómio interpolador nos nós $t_i = i/n$, $i = 0, ..., n$. Para tal, consideram-se os polinómios $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)\}$, que formam uma base em $\mathcal{P}_n$ (conjunto dos polinómios de grau $\leq n$), procura-se o polinómio interpolador na forma

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(t)$$

e obtêm-se os coeficientes a_i resolvendo um sistema de equações lineares. No caso de se considerar a base canónica ($\phi_0(t) = 1$, $\phi_1(t) = t$, $\ldots, \phi_n(t) = t^n$) a matriz desse sistema é chamada a matriz de Vandermonde.

A par da base canónica, iremos neste problema considerar a base de *Bernstein*[1], constituída pelos polinómios $B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots B_{n,n}$),os quais são definidos pelas expressões

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k \, (1-t)^{n-k}, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \, (n-k)!}$$

designa um coeficiente binomial.

1. Escreva o programa que permite calcular a matriz de Vandermonde necessária para a construção do polinómio interpolador, de grau menor ou igual a n, assumindo que os nós de interpolação são $t_i = i/n$, $i = 0, ..., n$.O dado de entrada deverá ser valor de n.

2. Escreva o programa que permite calcular a matriz para construir o polinómio interpolador, quando se usa a base de Bernstein (os nós de interpolação são os mesmos que na alínea anterior).

3. Construa uma tabela com os números de condição das matrizes associadas aos problemas de interpolação considerados, com $n = 2, ..., 20$, comparando o caso da base canónica (matriz de Vandermonde) com o da base de Bernstein. Baseando-se nessa tabela, discuta as vantagens e desvantagens da utilização da base de Bernstein na interpolação polinomial.

4. Se em vez da base de Bernstein ou da canónica usasse uma base constituída pelos polinómios de Lagrange, qual seria a forma da matriz correspondente? Escreva a expressão do polinómio interpolador nesse caso.

5. Vamos agora aplicar os dois métodos (base canónica e base de Bernstein) à resolução de um problema concreto.

   O traçado de uma curva plana, representando um determinado trajecto entre um ponto inicial P_0 e um ponto final P_3 encontra-se na Figura **??** a seguir. Pretende-se determinar expressões analíticas para uma função $r : [0,1] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, tal que $r(t) = (x(t), y(t))$ represente a curva figurada, para qualquer valor do parâmetro $t \in [0,1]$. Para aproximar $x(t)$ e $y(t)$ vamos usar interpolação polinomial de grau adequado à tabela dada.

[1] Sergei Natanovich Bernstein, (1880–1968), matemático russo.

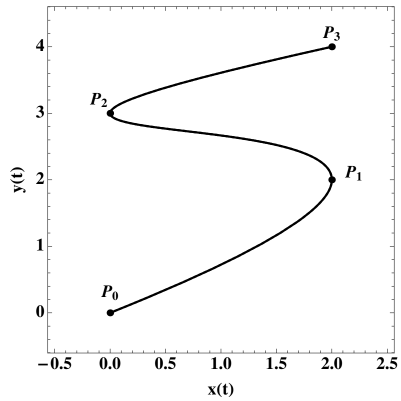

Figure 1: Curva $r(t)$, passando pelos pontos P_0 a P_3.

As coordenadas dos pontos figurados são as seguintes:

Valor do parâmetro t	Coordenadas
$t_0 = 0$	$P_0 = (0, 0)$
$t_1 = 1/3$	$P_1 = (2, 2)$
$t_2 = 2/3$	$P_2 = (0, 3)$
$t_3 = 1$	$P_3 = (2, 4)$

(2)

(a) Usando o programa construído na alínea 1, para o caso da base canónica, obtenha a matriz do sistema linear, com o valor de n adequado. Levando em consideração os dados (**??**), resolva os sistemas lineares que permitem calcular as funções $x(t)$ e $y(t)$, componentes da curva $r(t)$ da Figura **??**,

(b) Resolva o mesmo problema da alínea anterior, mas usando a base de Bernstein. Compare com o resultado anteriormente obtido.

(c) Mediante uma rotina gráfica do sistema computacional que utilizar, apresente um gráfico contendo os pontos da curva $r(t)$ que obteve, num gráfico análogo ao da Figura 1.

II

Considere o seguinte problema de valores iniciais:

$$y'(x) = \sin(\exp(y(x))), \quad y(0) = 0.$$

1. Escreva um programa que permita aproximar a solução $y(x)$ desta equação pelo método dos trapézios, num certo intervalo $[0, a]$, e com um certo passo h.

2. Sabendo que existe um único valor $z \in \mathbb{R}^+$, tal que $y(z) = 1$, pretende-se aproximar este valor, utilizando o programa da alínea interior e interpolação linear. Escolhendo o passo h adequado, obtenha uma aproximação de z com erro absoluto inferior a 10^{-3}. Justifique a escolha do passo h.