

2º Trabalho Computacional

Análise Numérica (2 a 16/12 de 2020)

Notas Gerais:

O relatório deve ser apresentado num único ficheiro PDF (≤ 6 páginas), que submetem no Fenix. O ficheiro deve ser nomeado **T2-GNN.pdf** onde NN é o número do grupo ($NN=00$ para o Grupo 0). Esse relatório deve conter o texto com a programação necessária para correr os resultados apresentados. Rotinas pré-existentes, não são consideradas como programação vossa.

Considere \mathbf{G} o seu número de grupo e \mathbf{g} o seu número mecanográfico.

Questão 1:

Considere a matriz $M \in [0, 255]^{m \times n}$ associada ao mapa (preto-branco) que usou no 1º trabalho computacional. Calcule uma decomposição SVD, pelos passos seguintes:

- Implemente, por Gram-Schmidt modificado, o método QR;
- Efectue uma decomposição $M^T M = Q^T D^2 Q$;
- Defina $M = U D Q$ com $U = M Q^T D^{-1}$; e considere $M_s = U_{m \times s} D_{s \times s} Q_{s \times n}$.

a) Explícite $E_s = \frac{1}{mn} \|M - M_s\|_\infty$ em função de s num gráfico.

b) Apresente figuras dadas por M_s para três valores de s , que considere pertinentes, e comente, tendo em conta a) e o factor

$$\phi = \frac{(m+n+1)s}{mn}$$

Questão 2:

Considere a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias resultante do modelo SIR (percentagem de Susceptíveis-Infectados-Recuperados) na propagação de uma epidemia.¹

Use $\beta = 1$ (ou outro valor).

$$\begin{cases} s'(t) = -s(t) i(t) \beta, \\ R_0 i'(t) = (R_0 s(t) - 1) i(t) \beta, \\ R_0 r'(t) = i(t) \beta \end{cases}$$

onde R_0 é o número básico de reprodução, aqui razão entre a taxa de infecção β e a taxa de recuperação. Neste caso a população total é p , com $s(t) + i(t) + r(t) = 1$. Assuma que a percentagem de susceptíveis inicial é $s(0) = 1 - i(0)$, pois no dia inicial a percentagem de infectados foi $i(0)$.

a) Simule o resultado para $p = \mathbf{g}$ e $R_0 = 1 + \mathbf{G}/15$, implementando o método de Adams-Bashforth de ordem 4, com inicialização por Runge-Kutta.

Apresente um gráfico ilustrativo do número de infectados em função do tempo.

Analise experimentalmente numa tabela, a ordem de convergência do método.

b) Identificando o número de infectados ao número de internados, que usou no 1º trabalho:

(i) Fixo p por si, qual o valor de R_0 que melhor se ajusta (norma ℓ_2) aos valores dos primeiros 100 dias, após o início dos internamentos em Portugal?

(ii) O mesmo que em (i) mas **agora variando β** e também R_0 .

(iii) Calcule também (ii) para os últimos 100 dias, antes de Dezembro.

Nos casos anteriores descreva o processo que usou, e apresente os gráficos comparativos entre o modelo e o registado. Comente os valores e o modelo.

¹Y. Okabe, A. Shudo (2020) [A Mathematical Model of Epidemics - A Tutorial for Students](#), *Mathematics* (8) 7, 1174.