2020/2021

Algoritmos de ordenação

Algoritmos e Estruturas de Dados (40437)



Trabalho realizado por:

Tiago Alvim 95584 49%

Vasco Costa 97746 51%

# Introdução

A ordenação de informação foi desde sempre um assunto muito relevante na computação sendo uma das suas tarefas primordiais. Foi algo que sempre apelou a muitos investigadores uma vez que é uma matéria complexa e interessante. Sendo que é também uma temática muito importante e indispensável nos dias em que nos encontramos.

Existem diferentes meios de classificação que são relevantes consoante o meio em que se pretende utilizar, a complexidade computacional do mesmo, em relação ao melhor, pior caso e à situação média. Havendo algoritmos cuja complexidade varia consoante a situação e outros que são garantidamente sempre da mesma forma, tanto no melhor como no pior caso, esta situação é relevante quando se pretende estabilidade de computação, o que garante segurança pois não é preciso ter em conta qualquer variância. No entanto, existem algoritmos que necessitam de estruturas secundárias de dados o que torna necessário ter em atenção quando se pretendem arrumar grandes volumes de dados, dado que irá relacionar-se diretamente com o *hardware* utilizado uma vez que poderá não haver espaço suficiente ou até perder muito desempenho quando não é possível encaixar-se tudo na cache do processador ou em *RAM*, levando a uma velocidade de acesso muito mais lenta o que se irá notar no desempenho. Também poderá ser relevante se o algoritmo apresentado é estável ou instável, o que se torna importante quando a organização consecutiva por parâmetros é necessária.

Nos dias de hoje com a possibilidade de se terem mais *cores* de forma acessível, a paralelização de computação é cada vez mais relevante havendo algoritmos que conseguem tirar proveito do mesmo tornando-se excelentes. Sendo que no espaço empresarial, servidores, a utilização de placas gráficas permite ainda maior paralelização, aumentando assim o desempenho e reduzindo custos.

# Métodos extra

Após termos procurado alguns métodos que aproveitassem mais que um *thread* no computador, não conseguimos implementar nenhum devido à nossa falta de conhecimento na área. No entanto, encontrámos um código bastante interessante[[1]](#footnote-2) que acreditamos que bem implementado seria de extrema relevância.

## *Bogo\_sort*

Estando curiosos como seria um método muito mau decidimos dar uma abordagem a este método em que a ideia é muito simples, se a lista estiver ordenada então já está feito, se não estiver, reordena-se à sorte até que esteja. Assim sendo, este é um método muito ineficiente pior ainda que *bubble\_sort* e qualquer outro método de sendo que poderá ser interessante fazer-se o estudo para o caso médio, como veremos mais à frente.

## *Tree\_sort*

Decidimos também implementar esta estratégia adicional devido a julgarmos que esta era interessante e apesar da necessidade de se recorrer a uma estrutura extra, ou seja, maior uso de memória, se usada como base no armazenamento de dados permite uma busca e uma inserção muito eficiente. Este método como o nome indica consiste em usar-se uma árvore binária, optou-se por escolher o primeiro número do *array* desorganizado para ser a raiz, mas servindo qualquer outro elemento, os que são menores vão para a esquerda do nó e se forem maiores serão colocados à direita, após fazerem-se as comparações e encontrado um lugar vazio cria-se um nó nesse local com esse valor. Este método permite então inserção em ordem na melhor situação. E tendo elementos obtém-se para a criação e ordenação. Posteriormente é feito mais um processo de ordem com o intuito de se ler a árvore na totalidade e de se colocar no *array* inicial os dados ordenados, mas como ordem é menor que ordem este torna-se irrelevante segundo a notação assintótica.

# Análise[[2]](#footnote-3)

Tabela 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Algoritmo | Melhor | Médio | Pior | Comentários |
| Bubble sort |  |  |  |  |
| Shaker sort |  |  |  |  |
| Insertion sort |  |  |  |  |
| Shell sort |  |  |  |  |
| Quicksort |  |  |  |  |
| Mergesort |  |  |  | Requer extra espaço |
| Heapsort |  |  |  |  |
| Rank sort |  |  |  | Requer extra espaço |
| Selection sort |  |  |  |  |
| Tree sort |  |  |  | Requer extra espaço |
| Bogo sort |  |  |  |  |

Excluindo os últimos dois métodos a justificação encontra-se no material de aula fornecido. Para *tree\_sort* afirmamos que este apresenta ordem no melhor e médio caso como explicado anteriormente. E para o pior caso justificamos que é pois se a lista já estiver ordenada leva à criação de uma árvore não balanceada na nossa versão, pelo que a inserção será feita em ordem . Uma *AVL* *tree* não iria levar a este problema, no entanto a sua implementação é mais complexa e para uma ocorrência tão rara poderá não se justificar.

Para *bogo\_sort* apresentamos como melhor situação este já estar ordenado em que temos ordem mas caso não esteja, então uma permutação terá que ser calculada e com o método que se implementou poderá ainda ser pior pois existe sempre a possibilidade de se repetir uma anterior. Este método é pendente maioritariamente da sorte de acertar exatamente na permutação em que temos todos os números ordenados e como tal pode nunca acontecer pelo que o pior caso vai tender para infinito.

Para a obtenção dos dados primeiramente verificámos os nossos métodos compilando e usando *-test* e posteriormente realizámos com a opção *-measure*. Para se tentar descobrir as constantes associadas aos polinómios que poderão descrever o tempo em função do número de elementos utilizou-se o *matlab* com o comando *cftool*. Nesta ferramenta escolheu-se quando se esperava um polinómio quadrado a opção polinomial e ordem quadrada tendo a robustez desligada. Quando nos deparámos na situação em que se esperava ordem optou-se pela opção de equação à medida, introduzindo-se a forma do polinómio que se esperava . Podendo-se erradamente estar a esquecer algum termo de ordem , a opção de se ter deixado na predefinição em vez da escolha do algoritmo de *Levenberg-Marquardt* e à mesma a opção da robustez desligada levar a algum erro da nossa parte.

## *Bubble\_sort* e *shaker\_sort*

Devido a estes métodos terem uma natureza muito semelhante sendo que o segundo tem apenas o acréscimo de se fazerem passagens no sentindo inverso. Achou-se pertinente comparar estes dois métodos e de que forma diferem.

Tabela 2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Bubble sort | | | Shaker sort | | |
| n | min time | max time | avg time | min time | max time | avg time |
| 10 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,61E-07 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,58E-07 |
| 13 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,55E-07 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,23E-07 |
| 16 | 3,00E-07 | 5,00E-07 | 3,84E-07 | 2,00E-07 | 4,00E-07 | 3,15E-07 |
| 20 | 5,00E-07 | 7,00E-07 | 5,84E-07 | 4,00E-07 | 5,00E-07 | 4,53E-07 |
| 25 | 7,00E-07 | 1,00E-06 | 8,82E-07 | 6,00E-07 | 8,00E-07 | 6,94E-07 |
| 32 | 1,20E-06 | 1,50E-06 | 1,37E-06 | 9,00E-07 | 1,20E-06 | 1,07E-06 |
| 40 | 1,80E-06 | 2,30E-06 | 2,06E-06 | 1,40E-06 | 1,80E-06 | 1,61E-06 |
| 50 | 2,80E-06 | 3,40E-06 | 3,07E-06 | 2,10E-06 | 2,70E-06 | 2,41E-06 |
| 63 | 4,30E-06 | 5,10E-06 | 4,70E-06 | 3,30E-06 | 4,10E-06 | 3,67E-06 |
| 79 | 6,50E-06 | 7,70E-06 | 7,11E-06 | 5,00E-06 | 6,00E-06 | 5,50E-06 |
| 100 | 1,01E-05 | 1,18E-05 | 1,09E-05 | 7,70E-06 | 9,10E-06 | 8,39E-06 |
| 126 | 1,51E-05 | 1,76E-05 | 1,64E-05 | 1,17E-05 | 1,36E-05 | 1,26E-05 |
| 158 | 2,32E-05 | 2,64E-05 | 2,48E-05 | 1,77E-05 | 2,03E-05 | 1,89E-05 |
| 200 | 3,43E-05 | 3,86E-05 | 3,63E-05 | 2,69E-05 | 3,05E-05 | 2,85E-05 |
| 251 | 5,02E-05 | 5,51E-05 | 5,25E-05 | 4,01E-05 | 4,59E-05 | 4,24E-05 |
| 316 | 7,52E-05 | 8,63E-05 | 7,78E-05 | 6,04E-05 | 6,70E-05 | 6,36E-05 |
| 398 | 1,13E-04 | 1,24E-04 | 1,16E-04 | 9,15E-05 | 1,00E-04 | 9,53E-05 |
| 501 | 1,71E-04 | 1,87E-04 | 1,76E-04 | 1,39E-04 | 1,50E-04 | 1,44E-04 |
| 631 | 2,63E-04 | 2,81E-04 | 2,72E-04 | 2,11E-04 | 2,57E-04 | 2,18E-04 |
| 794 | 3,98E-04 | 4,38E-04 | 4,12E-04 | 3,21E-04 | 3,91E-04 | 3,33E-04 |
| 1000 | 6,14E-04 | 6,82E-04 | 6,34E-04 | 4,95E-04 | 5,80E-04 | 5,13E-04 |
| 1259 | 9,39E-04 | 1,07E-03 | 9,83E-04 | 7,69E-04 | 8,59E-04 | 8,03E-04 |
| 1585 | 1,47E-03 | 1,72E-03 | 1,54E-03 | 1,20E-03 | 1,33E-03 | 1,24E-03 |
| 1995 | 2,34E-03 | 2,72E-03 | 2,45E-03 | 1,89E-03 | 2,04E-03 | 1,95E-03 |
| 2512 | 3,83E-03 | 4,35E-03 | 3,99E-03 | 3,02E-03 | 3,23E-03 | 3,11E-03 |
| 3162 | 6,48E-03 | 7,13E-03 | 6,68E-03 | 4,92E-03 | 5,33E-03 | 5,03E-03 |
| 3981 | 1,13E-02 | 1,25E-02 | 1,17E-02 | 8,25E-03 | 8,71E-03 | 8,42E-03 |
| 5012 | 2,02E-02 | 2,18E-02 | 2,07E-02 | 1,41E-02 | 1,52E-02 | 1,44E-02 |
| 6310 | 3,56E-02 | 3,78E-02 | 3,63E-02 | 2,46E-02 | 2,80E-02 | 2,51E-02 |
| 7943 | 6,18E-02 | 6,51E-02 | 6,28E-02 | 4,28E-02 | 4,55E-02 | 4,37E-02 |
| 10000 | 1,06E-01 | 1,09E-01 | 1,07E-01 | 7,39E-02 | 7,71E-02 | 7,51E-02 |
| 12589 | ND | ND | ND | 1,26E-01 | 1,72E-01 | 1,28E-01 |

Para o *bubble\_sort* conseguiu-se uma aproximação polinomial a e para o *shaker\_sort* um polinómio de . Deste modo podemos esperar que o *shaker\_sort* cresça muito mais lentamente. Apresentam uma ordem de grandeza de diferença no termo de maior grau que para mais elevados se deverá notar.

Como podemos verificar graficamente *bubble\_sort* é relativamente mais lento que o outro método. Melhoria que não se esperava tão percetível pois a única diferença é ir colocando o elemento mais pequeno no início. Em que se reduz o tamanho do *array* alternadamente em cada um dos lados. Este método tem uma implementação mais complexa por essa mesma passagem no sentido inverso.

Gráfico 1

## *Insertion\_sort* e *Shell\_sort*

Dado que o *Shell\_sort* é uma implementação de *insertion\_sort* mas com uma variação que passa por em vez de se fazerem comparações com elementos adjacentes, faz-se com uns mais separados. Levando a fazerem-se cálculos prévios para a escolha do aumentando as linhas de código e complicando a sua interpretação, mas como se pode verificar este é um método bem melhor.

Tabela 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Insertion sort | | | Shell sort | | |
| n | min time | max time | avg time | min time | max time | avg time |
| 10 | 0,00E+00 | 1,00E-07 | 9,47E-08 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,44E-07 |
| 13 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,14E-07 | 1,00E-07 | 3,00E-07 | 1,95E-07 |
| 16 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,66E-07 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,70E-07 |
| 20 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,06E-07 | 3,00E-07 | 4,00E-07 | 3,66E-07 |
| 25 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,75E-07 | 4,00E-07 | 6,00E-07 | 5,01E-07 |
| 32 | 3,00E-07 | 4,00E-07 | 3,80E-07 | 6,00E-07 | 8,00E-07 | 6,84E-07 |
| 40 | 4,00E-07 | 6,00E-07 | 5,13E-07 | 8,00E-07 | 1,00E-06 | 9,05E-07 |
| 50 | 6,00E-07 | 8,00E-07 | 7,07E-07 | 1,10E-06 | 1,40E-06 | 1,25E-06 |
| 63 | 9,00E-07 | 1,10E-06 | 9,93E-07 | 1,50E-06 | 1,80E-06 | 1,63E-06 |
| 79 | 1,30E-06 | 1,50E-06 | 1,42E-06 | 2,00E-06 | 2,40E-06 | 2,18E-06 |
| 100 | 1,90E-06 | 2,20E-06 | 2,07E-06 | 2,70E-06 | 3,10E-06 | 2,92E-06 |
| 126 | 2,80E-06 | 3,20E-06 | 3,03E-06 | 3,70E-06 | 4,10E-06 | 3,90E-06 |
| 158 | 4,10E-06 | 4,70E-06 | 4,43E-06 | 5,00E-06 | 5,50E-06 | 5,25E-06 |
| 200 | 6,30E-06 | 7,10E-06 | 6,66E-06 | 6,80E-06 | 7,40E-06 | 7,06E-06 |
| 251 | 9,40E-06 | 1,06E-05 | 9,94E-06 | 9,00E-06 | 9,80E-06 | 9,39E-06 |
| 316 | 1,43E-05 | 1,59E-05 | 1,51E-05 | 1,21E-05 | 1,29E-05 | 1,25E-05 |
| 398 | 2,19E-05 | 2,45E-05 | 2,30E-05 | 1,58E-05 | 1,71E-05 | 1,65E-05 |
| 501 | 3,38E-05 | 3,69E-05 | 3,53E-05 | 2,08E-05 | 2,22E-05 | 2,14E-05 |
| 631 | 5,25E-05 | 5,73E-05 | 5,46E-05 | 2,75E-05 | 3,80E-05 | 3,11E-05 |
| 794 | 8,13E-05 | 8,86E-05 | 8,46E-05 | 3,58E-05 | 4,38E-05 | 3,69E-05 |
| 1000 | 1,27E-04 | 1,37E-04 | 1,31E-04 | 4,58E-05 | 4,94E-05 | 4,77E-05 |
| 1259 | 1,99E-04 | 2,42E-04 | 2,07E-04 | 5,99E-05 | 6,62E-05 | 6,14E-05 |
| 1585 | 3,13E-04 | 3,78E-04 | 3,24E-04 | 7,88E-05 | 9,24E-05 | 8,08E-05 |
| 1995 | 4,92E-04 | 5,67E-04 | 5,09E-04 | 1,03E-04 | 1,16E-04 | 1,05E-04 |
| 2512 | 7,77E-04 | 8,62E-04 | 8,02E-04 | 1,34E-04 | 1,59E-04 | 1,38E-04 |
| 3162 | 1,23E-03 | 1,32E-03 | 1,26E-03 | 1,74E-04 | 2,00E-04 | 1,78E-04 |
| 3981 | 1,94E-03 | 2,08E-03 | 2,00E-03 | 2,29E-04 | 2,61E-04 | 2,34E-04 |
| 5012 | 3,08E-03 | 3,29E-03 | 3,16E-03 | 2,99E-04 | 3,43E-04 | 3,07E-04 |
| 6310 | 4,87E-03 | 5,11E-03 | 4,97E-03 | 3,89E-04 | 4,45E-04 | 4,06E-04 |
| 7943 | 7,77E-03 | 8,27E-03 | 7,95E-03 | 5,06E-04 | 5,78E-04 | 5,29E-04 |
| 10000 | 1,27E-02 | 3,48E-02 | 2,01E-02 | 6,54E-04 | 7,37E-04 | 6,76E-04 |
| 12589 | 2,68E-02 | 3,51E-02 | 2,78E-02 | 8,55E-04 | 9,71E-04 | 8,85E-04 |
| 15849 | 3,12E-02 | 4,40E-02 | 3,67E-02 | 1,11E-03 | 1,24E-03 | 1,15E-03 |
| 19953 | 4,93E-02 | 5,29E-02 | 5,02E-02 | 1,44E-03 | 1,59E-03 | 1,49E-03 |
| 25119 | 7,83E-02 | 1,09E-01 | 8,81E-02 | 1,88E-03 | 2,04E-03 | 1,94E-03 |
| 31623 | 1,24E-01 | 1,71E-01 | 1,34E-01 | 2,43E-03 | 2,64E-03 | 2,52E-03 |
| 39811 | ND | ND | ND | 3,17E-03 | 3,40E-03 | 3,26E-03 |
| 50119 | ND | ND | ND | 4,13E-03 | 4,46E-03 | 4,26E-03 |
| 63096 | ND | ND | ND | 5,34E-03 | 5,69E-03 | 5,48E-03 |
| 79433 | ND | ND | ND | 6,91E-03 | 7,34E-03 | 7,09E-03 |
| 100000 | ND | ND | ND | 8,94E-03 | 9,49E-03 | 9,16E-03 |
| 125893 | ND | ND | ND | 1,16E-02 | 1,23E-02 | 1,18E-02 |
| 158489 | ND | ND | ND | 1,50E-02 | 1,62E-02 | 1,54E-02 |
| 199526 | ND | ND | ND | 1,93E-02 | 2,16E-02 | 1,99E-02 |
| 251189 | ND | ND | ND | 2,47E-02 | 2,63E-02 | 2,53E-02 |
| 316228 | ND | ND | ND | 3,18E-02 | 3,37E-02 | 3,26E-02 |
| 398107 | ND | ND | ND | 4,11E-02 | 4,36E-02 | 4,21E-02 |
| 501187 | ND | ND | ND | 5,29E-02 | 5,60E-02 | 5,42E-02 |
| 630957 | ND | ND | ND | 6,83E-02 | 9,42E-02 | 7,07E-02 |
| 794328 | ND | ND | ND | 8,76E-02 | 1,00E-01 | 9,00E-02 |

Na aproximação de *insertion\_sort* obteve-se um polinómio . Sendo que para *Shell\_sort* nem se fez aproximação a nenhum polinómio pois não se sabe qual o tipo de polinómio melhor aproxima.

Gráfico 2

Pela análise do gráfico verificamos que o método do *insertion\_sort* é melhor que o método do *Shell\_sort* para valores até cerca dos 251 onde não se justifica a utilização do método mais complicado. No entanto, a partir daí verifica-se uma melhoria muito, mas muito significativa. Sendo que qualquer um destes métodos é bem melhor que os apresentados no ponto anterior.

O mais complicado para explicar será talvez o incremento súbito em *insertion\_sort* quando este alcançou os 10.000 poderá dever-se à diminuição do *boost* do processador devido ao aumento de temperatura ou então a algum processo do *Windows* que tenha consumido mais recursos.

## *Quicksort, Mergesort e Heapsort*

Decidiram-se comparar estes métodos em conjunto pois apresentavam todos a mesma notação assintótica.

Tabela 4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Quick sort | | | Merge sort | | | Heap sort | | |
| n | min time | max time | avg time | min time | max time | avg time | min time | max time | avg time |
| 10 | 0,00E+00 | 1,00E-07 | 9,63E-08 | 0,00E+00 | 1,00E-07 | 9,61E-08 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,50E-07 |
| 13 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,19E-07 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,20E-07 | 1,00E-07 | 3,00E-07 | 2,06E-07 |
| 16 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,68E-07 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,83E-07 | 2,00E-07 | 4,00E-07 | 2,87E-07 |
| 20 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,46E-07 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,12E-07 | 3,00E-07 | 5,00E-07 | 3,91E-07 |
| 25 | 3,00E-07 | 4,00E-07 | 3,33E-07 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,82E-07 | 5,00E-07 | 6,00E-07 | 5,40E-07 |
| 32 | 4,00E-07 | 5,00E-07 | 4,69E-07 | 3,00E-07 | 4,00E-07 | 3,88E-07 | 7,00E-07 | 8,00E-07 | 7,60E-07 |
| 40 | 6,00E-07 | 7,00E-07 | 6,31E-07 | 7,00E-07 | 9,00E-07 | 7,93E-07 | 9,00E-07 | 1,10E-06 | 1,01E-06 |
| 50 | 7,00E-07 | 9,00E-07 | 8,43E-07 | 9,00E-07 | 1,00E-06 | 9,76E-07 | 1,30E-06 | 1,50E-06 | 1,35E-06 |
| 63 | 1,00E-06 | 1,20E-06 | 1,13E-06 | 1,20E-06 | 1,30E-06 | 1,24E-06 | 1,70E-06 | 2,00E-06 | 1,83E-06 |
| 79 | 1,40E-06 | 1,70E-06 | 1,52E-06 | 1,70E-06 | 1,90E-06 | 1,84E-06 | 2,30E-06 | 2,60E-06 | 2,43E-06 |
| 100 | 1,90E-06 | 2,20E-06 | 2,04E-06 | 2,30E-06 | 2,70E-06 | 2,49E-06 | 3,10E-06 | 3,40E-06 | 3,23E-06 |
| 126 | 2,50E-06 | 2,90E-06 | 2,73E-06 | 3,00E-06 | 3,40E-06 | 3,16E-06 | 4,20E-06 | 4,50E-06 | 4,34E-06 |
| 158 | 3,40E-06 | 3,80E-06 | 3,59E-06 | 4,30E-06 | 4,70E-06 | 4,44E-06 | 5,50E-06 | 5,90E-06 | 5,71E-06 |
| 200 | 4,60E-06 | 5,00E-06 | 4,79E-06 | 5,70E-06 | 6,40E-06 | 5,97E-06 | 7,30E-06 | 8,00E-06 | 7,58E-06 |
| 251 | 6,00E-06 | 6,60E-06 | 6,32E-06 | 7,30E-06 | 7,80E-06 | 7,52E-06 | 9,70E-06 | 1,03E-05 | 9,99E-06 |
| 316 | 8,10E-06 | 9,00E-06 | 8,55E-06 | 9,90E-06 | 1,05E-05 | 1,02E-05 | 1,28E-05 | 1,34E-05 | 1,31E-05 |
| 398 | 1,08E-05 | 1,42E-05 | 1,13E-05 | 1,31E-05 | 1,38E-05 | 1,35E-05 | 1,70E-05 | 1,80E-05 | 1,76E-05 |
| 501 | 1,45E-05 | 1,59E-05 | 1,51E-05 | 1,65E-05 | 1,74E-05 | 1,69E-05 | 2,29E-05 | 2,40E-05 | 2,33E-05 |
| 631 | 1,93E-05 | 2,65E-05 | 2,04E-05 | 2,22E-05 | 2,31E-05 | 2,27E-05 | 2,91E-05 | 3,05E-05 | 2,96E-05 |
| 794 | 2,45E-05 | 3,33E-05 | 2,57E-05 | 2,99E-05 | 3,17E-05 | 3,06E-05 | 3,83E-05 | 4,92E-05 | 3,93E-05 |
| 1000 | 3,13E-05 | 3,36E-05 | 3,23E-05 | 3,74E-05 | 3,98E-05 | 3,86E-05 | 5,03E-05 | 5,36E-05 | 5,16E-05 |
| 1259 | 4,10E-05 | 4,34E-05 | 4,22E-05 | 5,01E-05 | 5,27E-05 | 5,15E-05 | 6,52E-05 | 7,55E-05 | 6,62E-05 |
| 1585 | 5,34E-05 | 5,64E-05 | 5,49E-05 | 6,63E-05 | 7,09E-05 | 6,71E-05 | 8,47E-05 | 9,06E-05 | 8,59E-05 |
| 1995 | 6,97E-05 | 7,37E-05 | 7,15E-05 | 8,44E-05 | 9,00E-05 | 8,63E-05 | 1,11E-04 | 1,18E-04 | 1,14E-04 |
| 2512 | 9,06E-05 | 9,52E-05 | 9,29E-05 | 1,10E-04 | 1,13E-04 | 1,11E-04 | 1,43E-04 | 1,64E-04 | 1,45E-04 |
| 3162 | 1,18E-04 | 1,42E-04 | 1,22E-04 | 1,48E-04 | 1,76E-04 | 1,53E-04 | 1,84E-04 | 2,09E-04 | 1,90E-04 |
| 3981 | 1,54E-04 | 1,74E-04 | 1,59E-04 | 1,87E-04 | 2,06E-04 | 1,91E-04 | 2,40E-04 | 2,87E-04 | 2,45E-04 |
| 5012 | 1,99E-04 | 2,29E-04 | 2,05E-04 | 2,42E-04 | 2,82E-04 | 2,47E-04 | 3,09E-04 | 3,46E-04 | 3,14E-04 |
| 6310 | 2,57E-04 | 3,05E-04 | 2,65E-04 | 3,25E-04 | 3,65E-04 | 3,32E-04 | 4,00E-04 | 4,47E-04 | 4,06E-04 |
| 7943 | 3,33E-04 | 3,81E-04 | 3,44E-04 | 4,11E-04 | 4,61E-04 | 4,18E-04 | 5,17E-04 | 5,72E-04 | 5,24E-04 |
| 10000 | 4,31E-04 | 4,88E-04 | 4,46E-04 | 5,26E-04 | 5,92E-04 | 5,35E-04 | 6,67E-04 | 7,35E-04 | 6,79E-04 |
| 12589 | 5,57E-04 | 6,20E-04 | 5,76E-04 | 7,09E-04 | 7,70E-04 | 7,19E-04 | 8,63E-04 | 9,38E-04 | 8,79E-04 |
| 15849 | 7,18E-04 | 8,04E-04 | 7,41E-04 | 8,96E-04 | 9,79E-04 | 9,14E-04 | 1,12E-03 | 1,20E-03 | 1,14E-03 |
| 19953 | 9,26E-04 | 1,02E-03 | 9,55E-04 | 1,14E-03 | 1,23E-03 | 1,16E-03 | 1,44E-03 | 1,54E-03 | 1,48E-03 |
| 25119 | 1,20E-03 | 1,30E-03 | 1,24E-03 | 1,53E-03 | 1,64E-03 | 1,56E-03 | 1,86E-03 | 2,04E-03 | 1,90E-03 |
| 31623 | 1,54E-03 | 1,68E-03 | 1,59E-03 | 1,94E-03 | 2,10E-03 | 2,00E-03 | 2,40E-03 | 2,54E-03 | 2,44E-03 |
| 39811 | 1,98E-03 | 2,14E-03 | 2,04E-03 | 2,46E-03 | 2,63E-03 | 2,51E-03 | 3,09E-03 | 3,30E-03 | 3,16E-03 |
| 50119 | 2,54E-03 | 2,71E-03 | 2,60E-03 | 3,30E-03 | 3,52E-03 | 3,37E-03 | 3,98E-03 | 4,21E-03 | 4,06E-03 |
| 63096 | 3,25E-03 | 3,48E-03 | 3,35E-03 | 4,17E-03 | 4,44E-03 | 4,26E-03 | 5,15E-03 | 5,49E-03 | 5,27E-03 |
| 79433 | 4,17E-03 | 4,49E-03 | 4,30E-03 | 5,31E-03 | 5,68E-03 | 5,41E-03 | 6,64E-03 | 6,99E-03 | 6,74E-03 |
| 100000 | 5,31E-03 | 5,62E-03 | 5,44E-03 | 7,07E-03 | 7,50E-03 | 7,21E-03 | 8,60E-03 | 9,09E-03 | 8,74E-03 |
| 125893 | 6,75E-03 | 7,23E-03 | 6,94E-03 | 9,16E-03 | 9,79E-03 | 9,38E-03 | 1,12E-02 | 1,18E-02 | 1,14E-02 |
| 158489 | 8,54E-03 | 9,05E-03 | 8,76E-03 | 1,15E-02 | 1,20E-02 | 1,17E-02 | 1,45E-02 | 1,53E-02 | 1,47E-02 |
| 199526 | 1,08E-02 | 1,14E-02 | 1,10E-02 | 1,56E-02 | 1,65E-02 | 1,59E-02 | 1,88E-02 | 1,98E-02 | 1,91E-02 |
| 251189 | 1,35E-02 | 1,44E-02 | 1,39E-02 | 1,96E-02 | 2,05E-02 | 1,99E-02 | 2,44E-02 | 2,56E-02 | 2,48E-02 |
| 316228 | 1,70E-02 | 1,80E-02 | 1,74E-02 | 2,42E-02 | 2,56E-02 | 2,46E-02 | 3,16E-02 | 3,32E-02 | 3,20E-02 |
| 398107 | 2,13E-02 | 2,28E-02 | 2,19E-02 | 3,26E-02 | 3,45E-02 | 3,32E-02 | 4,09E-02 | 4,29E-02 | 4,14E-02 |
| 501187 | 2,67E-02 | 2,83E-02 | 2,73E-02 | 4,09E-02 | 4,29E-02 | 4,14E-02 | 5,29E-02 | 5,51E-02 | 5,35E-02 |
| 630957 | 3,34E-02 | 3,55E-02 | 3,42E-02 | 5,05E-02 | 5,26E-02 | 5,11E-02 | 6,81E-02 | 7,11E-02 | 6,90E-02 |
| 794328 | 4,20E-02 | 4,45E-02 | 4,30E-02 | 6,79E-02 | 7,08E-02 | 6,88E-02 | 8,78E-02 | 9,18E-02 | 8,90E-02 |
| 1000000 | 5,26E-02 | 5,54E-02 | 5,37E-02 | 8,50E-02 | 8,82E-02 | 8,59E-02 | 1,14E-01 | 1,20E-01 | 1,15E-01 |
| 1258925 | 6,61E-02 | 6,97E-02 | 6,75E-02 | 1,05E-01 | 1,09E-01 | 1,06E-01 | ND | ND | ND |
| 1584893 | 8,30E-02 | 8,77E-02 | 8,48E-02 | ND | ND | ND | ND | ND | ND |
| 1995262 | 1,04E-01 | 1,10E-01 | 1,07E-01 | ND | ND | ND | ND | ND | ND |

No caso do *quick\_sort* verificamos que um bom polinómio é , para *merge\_sort* obteve-se e finalmente para *heap\_sort* teve-se .

Nesta situação a distinção já é mais difícil de se fazer visualmente sendo mais simples analisar os polinómios obtidos. No entanto, todos os métodos apresentam uma velocidade de desempenho relativamente próxima. Para números baixos reparamos que *merge\_sort* é melhor até cerca dos 40 elementos, depois disto o método *quick\_sort* é melhor. Do pior dos 3 métodos é sempre *heap\_sort*. Sendo que nem apresenta maior facilidade de implementação. No entanto, é de referir o uso de memória extra que o *merge\_sort* requer pelo que *heap\_sort* poderá até ser um método preferível devido a não fazer tal uso. Um pormenor que também é de referir é que o pior caso para *quick\_sort* apresenta ordem . Aspeto que não se conseguiu verificar neste gráfico mesmo comparando o tempo máximo de *quick\_sort* com os tempos médios dos outros.

Gráfico 3

## *Rank\_sort* e *Selection\_sort*

Como estas rotinas apresentam ordem fixa de n2 é curioso verificar-se como se comparam uma à outra. E de que forma o uso de memória extra requerido pelo *rank\_sort* é vantajoso.

Tabela 5

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Rank sort | | | Selection sort | | |
| n | min time | max time | avg time | min time | max time | avg time |
| 10 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,19E-07 | 1,00E-07 | 2,00E-07 | 1,55E-07 |
| 13 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,19E-07 | 2,00E-07 | 3,00E-07 | 2,43E-07 |
| 16 | 3,00E-07 | 6,00E-07 | 4,96E-07 | 3,00E-07 | 4,00E-07 | 3,88E-07 |
| 20 | 4,00E-07 | 6,00E-07 | 5,69E-07 | 5,00E-07 | 6,00E-07 | 5,88E-07 |
| 25 | 5,00E-07 | 8,00E-07 | 7,28E-07 | 9,00E-07 | 1,00E-06 | 9,01E-07 |
| 32 | 7,00E-07 | 1,00E-06 | 8,95E-07 | 1,40E-06 | 1,50E-06 | 1,47E-06 |
| 40 | 9,00E-07 | 1,10E-06 | 9,79E-07 | 2,20E-06 | 2,30E-06 | 2,26E-06 |
| 50 | 1,50E-06 | 1,70E-06 | 1,54E-06 | 3,40E-06 | 3,60E-06 | 3,49E-06 |
| 63 | 2,20E-06 | 2,40E-06 | 2,30E-06 | 5,40E-06 | 5,60E-06 | 5,51E-06 |
| 79 | 3,30E-06 | 3,70E-06 | 3,51E-06 | 8,40E-06 | 8,80E-06 | 8,60E-06 |
| 100 | 5,30E-06 | 6,40E-06 | 5,59E-06 | 1,34E-05 | 1,39E-05 | 1,37E-05 |
| 126 | 8,30E-06 | 9,10E-06 | 8,64E-06 | 2,13E-05 | 2,21E-05 | 2,17E-05 |
| 158 | 1,29E-05 | 1,41E-05 | 1,34E-05 | 3,45E-05 | 3,66E-05 | 3,52E-05 |
| 200 | 2,00E-05 | 2,16E-05 | 2,08E-05 | 5,40E-05 | 5,87E-05 | 5,47E-05 |
| 251 | 3,15E-05 | 3,38E-05 | 3,26E-05 | 8,52E-05 | 9,06E-05 | 8,67E-05 |
| 316 | 4,99E-05 | 5,43E-05 | 5,16E-05 | 1,36E-04 | 1,56E-04 | 1,38E-04 |
| 398 | 7,93E-05 | 8,40E-05 | 8,14E-05 | 2,16E-04 | 2,37E-04 | 2,18E-04 |
| 501 | 1,26E-04 | 1,33E-04 | 1,29E-04 | 3,43E-04 | 3,76E-04 | 3,47E-04 |
| 631 | 2,00E-04 | 2,25E-04 | 2,07E-04 | 5,45E-04 | 5,91E-04 | 5,50E-04 |
| 794 | 3,17E-04 | 3,59E-04 | 3,27E-04 | 8,66E-04 | 9,33E-04 | 8,78E-04 |
| 1000 | 5,03E-04 | 5,69E-04 | 5,17E-04 | 1,38E-03 | 1,47E-03 | 1,40E-03 |
| 1259 | 7,98E-04 | 8,88E-04 | 8,21E-04 | 2,19E-03 | 2,31E-03 | 2,22E-03 |
| 1585 | 1,27E-03 | 1,37E-03 | 1,30E-03 | 3,47E-03 | 3,83E-03 | 3,56E-03 |
| 1995 | 2,01E-03 | 2,15E-03 | 2,06E-03 | 5,51E-03 | 5,83E-03 | 5,61E-03 |
| 2512 | 3,20E-03 | 3,71E-03 | 3,31E-03 | 8,76E-03 | 9,13E-03 | 8,87E-03 |
| 3162 | 5,08E-03 | 5,56E-03 | 5,24E-03 | 1,39E-02 | 1,47E-02 | 1,41E-02 |
| 3981 | 8,07E-03 | 8,48E-03 | 8,23E-03 | 2,21E-02 | 2,30E-02 | 2,24E-02 |
| 5012 | 1,29E-02 | 1,34E-02 | 1,31E-02 | 3,51E-02 | 3,66E-02 | 3,55E-02 |
| 6310 | 2,04E-02 | 2,16E-02 | 2,08E-02 | 5,57E-02 | 5,81E-02 | 5,64E-02 |
| 7943 | 3,24E-02 | 3,38E-02 | 3,29E-02 | 8,84E-02 | 9,18E-02 | 8,94E-02 |
| 10000 | 5,15E-02 | 5,37E-02 | 5,22E-02 | 1,40E-01 | 1,46E-01 | 1,42E-01 |
| 12589 | 8,17E-02 | 8,52E-02 | 8,28E-02 | ND | ND | ND |
| 15849 | 1,30E-01 | 1,35E-01 | 1,31E-01 | ND | ND | ND |

Para *rank\_sort* obtivemos um polinómio excelente que apresentou um de 1 e tivemos como polinómio . E para *selection\_sort* também se teve um de 1 com o polinómio .

Nesta situação verifica-se que *rank\_sort* ao início oscila bastante ao contrário do outro método, sendo que o seu desempenho se torna difícil de medir e comparar, no entanto quando se passa de igual a 32 verifica-se que é um método mais rápido e a partir de igual a 40 não ocorrem tais desvios. É de mencionar que este método requer o uso de memória extra o que o pode tornar indesejável consoante a aplicação.

Gráfico 4

## *Tree\_sort*

Tabela 6

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Tree sort | | |
| n | min time | max time | avg time |
| 10 | 4,00E-07 | 6,00E-07 | 5,01E-07 |
| 13 | 6,00E-07 | 8,00E-07 | 6,58E-07 |
| 16 | 7,00E-07 | 1,00E-06 | 8,41E-07 |
| 20 | 1,00E-06 | 1,30E-06 | 1,09E-06 |
| 25 | 1,30E-06 | 1,60E-06 | 1,40E-06 |
| 32 | 1,70E-06 | 2,10E-06 | 1,87E-06 |
| 40 | 2,20E-06 | 2,70E-06 | 2,41E-06 |
| 50 | 2,90E-06 | 3,40E-06 | 3,11E-06 |
| 63 | 3,80E-06 | 4,50E-06 | 4,04E-06 |
| 79 | 4,90E-06 | 8,20E-06 | 5,21E-06 |
| 100 | 6,40E-06 | 3,45E-05 | 6,88E-06 |
| 126 | 8,30E-06 | 3,68E-05 | 9,33E-06 |
| 158 | 1,07E-05 | 3,96E-05 | 1,22E-05 |
| 200 | 1,39E-05 | 4,49E-05 | 1,61E-05 |
| 251 | 1,78E-05 | 4,87E-05 | 2,12E-05 |
| 316 | 2,30E-05 | 5,63E-05 | 2,76E-05 |
| 398 | 2,98E-05 | 6,30E-05 | 3,59E-05 |
| 501 | 3,83E-05 | 7,37E-05 | 4,66E-05 |
| 631 | 4,94E-05 | 8,75E-05 | 6,07E-05 |
| 794 | 6,39E-05 | 1,03E-04 | 7,76E-05 |
| 1000 | 8,30E-05 | 1,25E-04 | 1,00E-04 |
| 1259 | 1,07E-04 | 1,54E-04 | 1,30E-04 |
| 1585 | 1,40E-04 | 1,88E-04 | 1,67E-04 |
| 1995 | 1,87E-04 | 2,46E-04 | 2,18E-04 |
| 2512 | 2,64E-04 | 3,30E-04 | 2,81E-04 |
| 3162 | 3,35E-04 | 4,32E-04 | 3,66E-04 |
| 3981 | 4,37E-04 | 5,30E-04 | 4,75E-04 |
| 5012 | 5,77E-04 | 6,93E-04 | 6,15E-04 |
| 6310 | 7,55E-04 | 8,75E-04 | 7,99E-04 |
| 7943 | 9,86E-04 | 1,14E-03 | 1,05E-03 |
| 10000 | 1,32E-03 | 1,55E-03 | 1,39E-03 |
| 12589 | 1,75E-03 | 1,98E-03 | 1,83E-03 |
| 15849 | 2,31E-03 | 2,60E-03 | 2,43E-03 |
| 19953 | 3,07E-03 | 3,42E-03 | 3,21E-03 |
| 25119 | 4,07E-03 | 4,99E-03 | 4,26E-03 |
| 31623 | 5,38E-03 | 6,03E-03 | 5,59E-03 |
| 39811 | 7,15E-03 | 8,21E-03 | 7,46E-03 |
| 50119 | 9,60E-03 | 1,29E-02 | 1,02E-02 |
| 63096 | 1,28E-02 | 2,07E-02 | 1,45E-02 |
| 79433 | 1,69E-02 | 2,99E-02 | 1,92E-02 |
| 100000 | 2,26E-02 | 4,28E-02 | 2,62E-02 |
| 125893 | 3,07E-02 | 5,48E-02 | 3,53E-02 |
| 158489 | 4,30E-02 | 6,55E-02 | 4,92E-02 |
| 199526 | 6,27E-02 | 8,78E-02 | 7,05E-02 |
| 251189 | 9,71E-02 | 1,62E-01 | 1,10E-01 |

Neste caso esperávamos um bom polinómio de ajuste como sendo anteriormente dito de ordem mas verificámos que esta função não se enquadrou bem, um bastante mau, e fazendo um ajuste com um polinómio quadrático obtiveram-se melhores valores, pelo que concluímos que a inserção não ocorre em média em ordem e sim em ordem pelo que se fez a aproximação a um polinómio quadrado. Obtendo-se então .

Comparando com um método quadrático, *rank\_sort*, verifica-se que *tree\_sort* é melhor, mas que não chega a ser tão bom como os métodos .

Gráfico 5

## *Bogo\_sort*

Nesta situação devida à complexidade da função tivemos que fazer alterações à forma de como se faziam os testes, passando a fazer-se o estudo de 1 a 11 elementos com o incremento de 1, ao contrário dos outros métodos.

Tabela 7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Bogo sort | | |
| n | min time | max time | avg time |
| 1 | 0,00E+00 | 1,00E-07 | 9,40E-09 |
| 2 | 0,00E+00 | 2,00E-07 | 6,20E-08 |
| 3 | 0,00E+00 | 9,00E-07 | 2,76E-07 |
| 4 | 1,00E-07 | 5,60E-06 | 1,60E-06 |
| 5 | 5,00E-07 | 3,82E-05 | 1,09E-05 |
| 6 | 3,40E-06 | 2,44E-04 | 7,17E-05 |
| 7 | 2,61E-05 | 2,12E-03 | 5,89E-04 |
| 8 | 3,11E-04 | 2,56E-02 | 6,61E-03 |
| 9 | 3,96E-03 | 3,00E-01 | 7,92E-02 |
| 10 | 3,93E-02 | 3,15E+00 | 9,09E-01 |
| 11 | 4,52E-01 | 2,69E+01 | 8,11E+00 |

Tendo em conta a natureza da função não faz sentido encontrar polinómio que se aproxime, pois esperamos e uma função exponencial não lhe faz justiça.

Gráfico 6

Passando a analisar o gráfico verificamos que nem o pior dos métodos apresentados anteriormente, *bubble\_sort*, é tão mau quanto *bogo\_sort* por isso é mesmo um método que para além de ter uma implementação mais complicada ainda apresenta um tempo de execução impraticável para qualquer uso. Por isso para facilidade de implementação *insertion\_sort* é melhor que ambos estes métodos.

## Geral

Gráfico 7

Gráfico 8

Comparando todos os métodos é possível verificar-se que *bogo\_sort* é mesmo para colocar de parte. E que para os números maiores *quick\_sort* acaba por ser a que demora menos tempo, pelo que poderá ser de facto a melhor rotina para números muito elevados.

Para valores de entre os 10 e os 100 verificamos que *tree\_sort* apresenta-se como sendo o pior e para valores reduzidos *merge\_sort*, *quick\_sort* e *insertion\_sort* apresentam valores exatamente iguais o que se esperava uma vez que estes dois primeiros métodos fazem recurso a *insertion\_sort* para valores baixos, 40 e 20, respetivamente. É possível analisar-se o crescimento mais elavado de *rank\_sort* em comparação a *heap\_sort* para superior a 50 e a proximidade que passa a ter com *Shell\_sort*.

Para valores de entre 100 e 1000 nota-se uma maior separação em que se pode verificar o crescimento quadrático para *selection\_sort*, *bubble\_sort*, *shaker\_sort* e *rank\_sort*, que se tornam mais lentos. Verificando-se que *tree\_sort* em igual a 794 tem um tempo igual a *insertion\_sort* passando a ter um desempenho superior a partir daí. É de referir que se verifica o desempenho inferior que *selection\_sort* passa a ter e também a separação dos métodos dos métodos quadráticos. Para valores de superiores não se apresentam diferenças substanciais que sejam de referir.

Gráfico 9

# Conclusão

Com a realização deste trabalho é possível fazer-se a escolha do algoritmo de ordenação a usar consoante o número de elementos esperado. Para valores menores que 100 provavelmente se iria escolher *insertion\_sort* devido à bastante fácil implementação, bom desempenho e não fazer uso de memória extra. Para valores de superiores a 100 *quick-sort* apresenta-se como sendo bastante bom. No entanto, é preciso ter atenção que o pior caso será ordem , mas também era preciso algum azar em escolher-se sempre o pior *pivot*, pelo que uma aposta mais segura poderá ser *heap\_sort* isto por não fazer uso de memória extra. Mas também *Shell\_sort* apresenta um muito bom desempenho, podendo vir a perder para números maiores, mas tal não se conseguiu verificar com os nossos estudos sendo necessário fazer testes para valores de maiores. Dizemos isto por se terem analisado alguns estudos que tentam obter um polinómio deste método, de forma exponencial pelo que é melhor.

Consideramos que este trabalho foi um bom momento de estudo para uma melhor programação futura de forma a se conseguir tomar boas decisões consoante o método a aplicar, tendo em conta os benefícios e desvantagens de cada um dos métodos e dos recursos disponíveis, devido à relevância do uso de microprocessadores atualmente e devido à pouca memória disponível é então muito relevante.

# Bibliografia

Material de aula disponibilizado no eLearning

<https://www.dcc.fc.up.pt/~ricroc/aulas/1516/cp/apontamentos/slides_sorting.pdf>

<https://software.intel.com/content/www/us/en/develop/articles/an-efficient-parallel-three-way-quicksort-using-intel-c-compiler-and-openmp-45-library.html>

# Código

## *Tree*\_sort

#include "sorting\_methods.h"

#include <stdlib.h>

struct tree\_node

{

struct tree\_node \*left;

T data;

struct tree\_node \*right;

};

void insert(struct tree\_node \*\*tr, T data)

{

if( \*tr == NULL)

{

(\*tr)=malloc(sizeof(struct tree\_node));

(\*tr)->left = NULL;

(\*tr)->right = NULL;

(\*tr)->data = data;

}

else

{

if(data < (\*tr)->data)

insert( &((\*tr)->left),data);

else

insert( &((\*tr)->right),data);

}

}

int counter\_insert;

void order(int \*data,struct tree\_node \*link)

{

if(link != NULL)

{

order(data,link->left);

data[counter\_insert++] = link->data;

order(data,link->right);

}

}

void tree\_sort(T \*data, int first, int one\_after\_last)

{

struct tree\_node \*root;

root = NULL;

for(int i=first; i<one\_after\_last;i++)

{

insert(&root,data[i]);

}

counter\_insert = first;

order(data,root);

}

## *Bogo\_sort*

#include "sorting\_methods.h"

#include <stdlib.h>

#include <stdio.h>

int sorted(T \*data, int first, int one\_after\_last)

{

for(int i = first; i < one\_after\_last-1;i++)

{

if(data[i] > data[i+1])

return -1;

}

return 1;

}

void shuffle(T \*data, int first, int one\_after\_last)

{

for(int i=first; i<one\_after\_last; i++)

{

int idx = rand()%(one\_after\_last-first) + first;

int tmp = data[i];

data[i] = data[idx];

data[idx] = tmp;

}

}

void bogo\_sort(T \*data, int first, int one\_after\_last)

{

while(sorted(data,first,one\_after\_last) == -1)

{

shuffle(data,first,one\_after\_last);

}

}

1. <https://github.com/karuto/Parallel-Sample-Sort/blob/master/main.c> [↑](#footnote-ref-2)
2. Os dados foram obtidos em *Intel® Core(TM) i7-4720HQ 2.60GHz* com *Turbo Boost ativado* com *12Gb* de *RAM* a *1600MHz* [↑](#footnote-ref-3)