

Projeto 3

Estatística Computacional e Simulação – 41165

2022/2023

Docente: Professora Doutora Isabel Pereira

Gonçalo Freitas - 98012

Tiago Alvim - 95584

Vasco Costa – 97746



universidade
de aveiro

Exercício 1

Pretenderam-se efetuar estudos relativos a questões de estimação relacionadas com o modelo $X_t = \gamma + \rho X_{t-1} + Y_t, t \geq 1$ onde $\gamma \geq 0, 0 \leq \rho < 1$. Considerando as distribuições condicionais completas:

- $h(\alpha|x, \gamma, \rho) \sim Ga(n, S_0 - \rho S_1 - (n-1)\gamma)$
- $h(\gamma|x, \alpha, \rho) \sim Exp_{esq}((n-1)\alpha, \gamma^*)$, onde $\gamma^* = \min(x_t - \rho x_{t-1})$
- $h(\rho|x, \alpha, \gamma) \sim Exp_{esq}(\alpha S_1, \rho^*)$, onde $\rho^* = \min(1, \frac{x_t - \gamma}{x_{t-1}})$

onde $S_0 = \sum_{t=2}^n x_t, S_1 = \sum_{t=2}^n x_{t-1}$ e $f(x) \sim Exp_{esq}(\beta, \delta)$, ou seja, $f(x) = \frac{\beta e^{-\beta(\delta-x)}}{1-e^{-\beta\delta}}, 0 < x < \delta$. Para este problema, foram utilizados os valores apresentados no enunciado relativos ao teor de oxigénio dissolvido na ponte de Angeja de junho a novembro de 1991. Na Figura 1 encontra-se o histograma com os valores destes dados.

Este exercício tem como objetivo estimar os parâmetros e caracterizar as distribuições de $\alpha|x, \gamma|x$ e de $\rho|x$, utilizando o algoritmo de Gibbs e o pacote CODA, para verificar a convergência, na amostra fornecida.

O algoritmo de Gibbs foi introduzido por J. Willard Gibbs e é um caso especial do método de Metropolis-Hastings para gerar funções de densidade de probabilidade condicionadas, com maior uso para casos multivariados, fazendo uso de simulações de Monte Carlo através de Cadeias de Markov, também conhecidas como MCMC, com a distribuição estacionária pretendida. O pacote CODA é uma ferramenta disponibilizada no R para análise de métodos MCMC, para, tal com referido em cima, o diagnóstico da sua convergência.

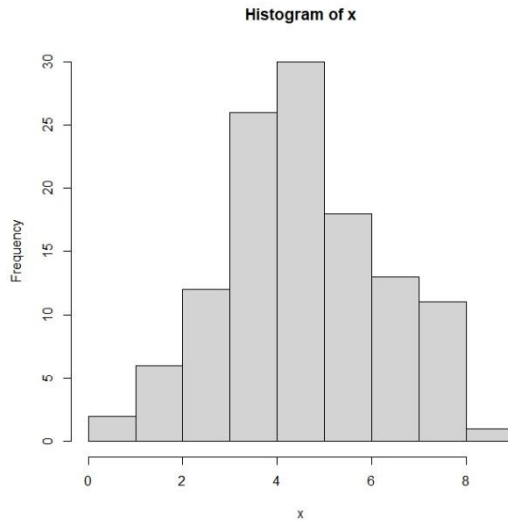


Figura 1 - Histograma com os valores de x fornecidos.

Para a implementação deste algoritmo é necessário conseguirem-se gerar os valores das distribuições condicionais completas. Sendo uma delas a Gamma, já implementada no R e a distribuição de uma exponencial à esquerda. Como esta última não é de acesso direto, pode-se usar o método da transformada inversa, apresentado em seguida.

$$\text{Sabendo que } F_X = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{\beta e^{-\beta(\delta-t)}}{1-e^{-\beta\delta}} dt = \frac{\beta}{1-e^{-\beta\delta}} \int_0^x e^{-\beta(\delta-t)} dt = \frac{\beta}{1-e^{-\beta\delta}} \left[\frac{e^{-\beta(\delta-t)}}{-\beta} \right]_0^x = \frac{e^{-\beta(\delta-x)} - e^{-\beta\delta}}{1-e^{-\beta\delta}} = \frac{e^{-\beta\delta} e^{\beta x} - e^{-\beta\delta}}{1-e^{-\beta\delta}} = \frac{e^{\beta x} - 1}{(1-e^{-\beta\delta})e^{\beta\delta}} = \frac{e^{\beta x} - 1}{e^{\beta\delta} - 1}$$

Daqui, calcula-se a inversa, $u = \frac{e^{\beta x} - 1}{e^{\beta\delta} - 1} \Leftrightarrow e^{\beta x} - 1 = u(e^{\beta\delta} - 1) \Leftrightarrow e^{\beta x} = u(e^{\beta\delta} - 1) + 1 \Leftrightarrow \beta x = \log(u(e^{\beta\delta} - 1) + 1) \Leftrightarrow x = \frac{\log(u(e^{\beta\delta} - 1) + 1)}{\beta}$. Chegando-se assim ao resultado que já era apresentado pela docência.

Assim, para a implementação do método, começa-se por se obterem o valor das constantes, S_0 e S_1 , e de inicializar a cadeia. De seguida cria-se um ciclo com o tamanho da

cadeia que se pretende, de preferência, um valor grande, para que exista convergência. Neste ciclo, obtém-se primeiramente um dos valores de uma das distribuições condicionais com base nos parâmetros do passo anterior. Calculando os valores novos de γ^* e ρ^* antes de obter os novos valores nesta iteração, utilizando os já obtidos nesta para o cálculo da condicional seguinte, armazenando sempre os valores obtidos das distribuições. Dado que apenas alguns valores da distribuição exponencial são desejados, existe a possibilidade de o valor introduzido da distribuição uniforme levar a uma rejeição, pelo que se poderiam gerar vários valores da distribuição uniforme e esperar que algum dê um valor da exponencial que se deseja, ou então, tomar um processo iterativo até se obter um valor possível, como foi feito.

Seguidamente apresenta-se o pseudocódigo para a resolução do problema:

1. Definir $\alpha_0 = \rho_0 = 0.25$ e $\gamma_0 = 0.05$
2. Calcular $S_0 = \sum_{t=2}^n x_t$ e $S_1 = \sum_{t=2}^n x_{t-1}$, em que x representa o conjunto dos dados fornecidos
3. Inicialização da cadeia, M , que, neste caso, se pode traduzir numa matriz (N,3) onde N representa o número total de simulações, definido pelo utilizador.
4. Definir a primeira linha como $(\alpha_0, \gamma_0, \rho_0)$, isto é, $M(1,1) = \alpha_0$; $M(1,2) = \gamma_0$; $M(1,3) = \rho_0$
5. Inicializar o ciclo *for* de 2 até N:
 - 5.1. Obtenção de um dos valores (válidos¹) de uma das distribuições condicionais com base nos parâmetros do passo anterior, armazenando-o na respetiva coluna de M , tendo calculado os novos parâmetros nesta iteração de γ^* e de ρ^*
 - 5.2. São usados estes valores para as restantes distribuições, armazenando os novos valores (válidos) nas respetivas colunas de M
6. Fim do ciclo *for*
7. Calcular a média de cada uma das colunas de M de forma a obter a estimativa para o respetivo parâmetro (coluna 1 – estimativa de α , coluna 2 - estimativa de γ , coluna 3 - estimativa de ρ).
8. Visualização gráfica

Na Figura 2 retrata-se como estes valores variam ao longo das iterações assim como a função de densidade obtida para cada um dos parâmetros, com toda a cadeia, onde *var1* corresponde ao parâmetro α , *var2* corresponde ao parâmetro γ e *var3* corresponde ao parâmetro ρ . Como se pode visualizar a distribuição de $\alpha|x$ é semelhante a uma distribuição normal de média 0.22. Já em

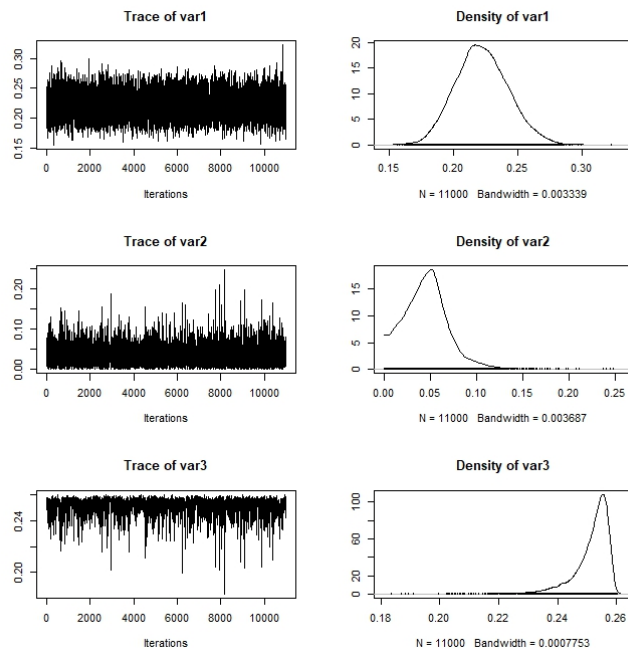


Figura 2 – Representação dos valores obtidos para cada um dos parâmetros, com *var1* a ser α , *var2* γ e *var3* ρ , ao longo das iterações, acompanhado com o gráfico de densidade de probabilidade de cada uma, *plot(mcmc(M))*.

¹ Para verificar a validação dos valores, isto é, se não são *NaN*, é utilizado um ciclo *while* que repete o cálculo do novo parâmetro até este ser válido

relação à distribuição de $\gamma|x$ reparamos que, tal como a distribuição $\rho|x$, segue uma exponencial, como seria de esperar.

Na Figura 3, apresenta-se o gráfico de evolução dos quantis para cada uma das variáveis e deste modo é possível verificar como os quantis alteram em função das iterações. Daqui verifica-se que, a partir de um certo número de iterações, cerca das 3000 o valor estabiliza, a cadeia de Markov estabiliza.

Analizando os valores de *geweke*, da comparação das médias, obtiveram-se os valores de 1.4269, 0.3675 e -0.2709 para α , γ e ρ , respetivamente. Expondo-se na Figura 4, o *geweke.plot* desta cadeia. Daqui conclui-se que de facto é relevante extrair a parte inicial da cadeia de Markov.

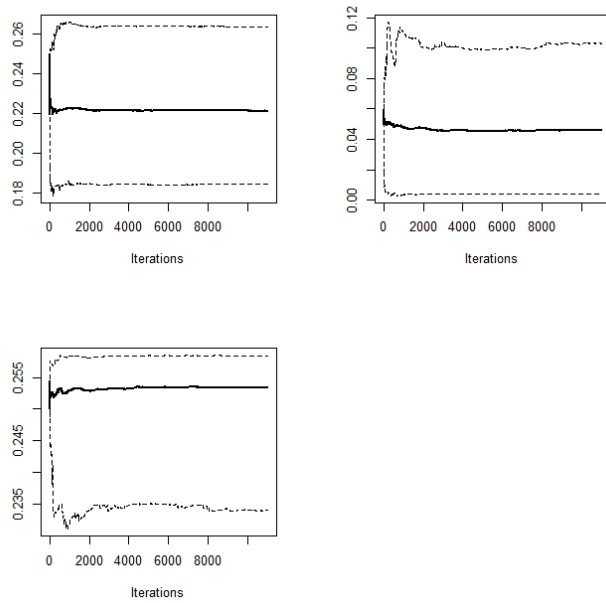


Figura 3 – Gráficos dos *cumuplot* para a evolução dos quantis em função das iterações, no canto superior esquerdo para α , canto superior direito para γ e canto inferior esquerdo para ρ .

A partir desta implementação foi possível conseguir as estimativas de 0.22187831, 0.04622161 e 0.25151311 para os valores médios de α , γ e ρ , respetivamente, tendo em conta toda a cadeia. Contudo, verificando apenas quando esta é estacionária, a partir de cerca dos 3000 como se verifica na Figura 3, obtém-se os valores de 0.22185617, 0.04635645 e 0.25153379 para o valor médio para os mesmos parâmetros, com um desvio padrão de associado de 0.02018598, 0.02508855 e 0.006772574 para estes, respetivamente. Sendo também possível analisar a matriz de covariância entre as variáveis, encontrando-se apenas no *script* o *output* desta análise.

Desta forma alcança-se uma representação das distribuições que se pretendiam estudar, obtendo assim características das distribuições condicionais, como se pretendia.

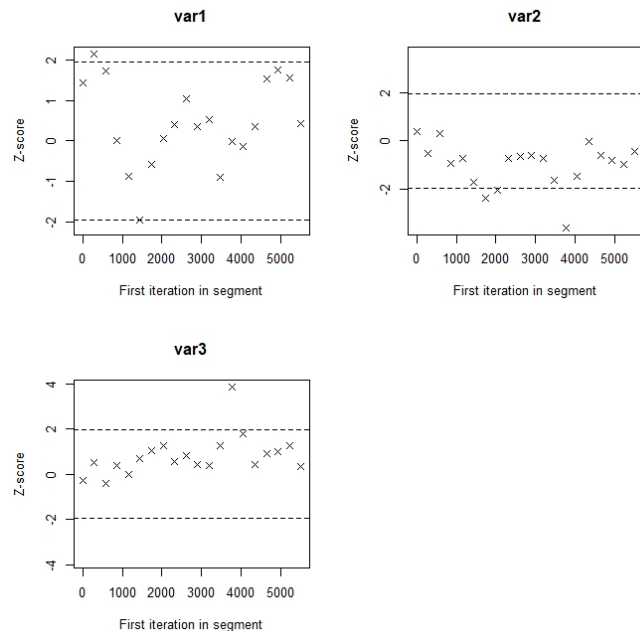


Figura 4 – Gráficos de *geweke.plot* da cadeia de Markov com $frac1=0.1$, $frac2=0.5$. Onde *var1* representa α , *var2* γ e *var3* ρ .

Exercício 2

Considerando a distribuição de Gumbel, $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)$, $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$ pretende-se analisar os caudais máximos registados do rio Ocmulgee entre os anos de 1949 e de 1984 na estação hidrológica de Hawkinsville. O histograma destes valores encontra-se na Figura 5.

- a) A verosimilhança é um método para efetuar uma estimação de parâmetros de uma distribuição $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$.

Dado uma amostra $x = (x_1, \dots, x_n)$ este método calcula o valor do parâmetro que maximiza a verosimilhança $L(\theta|x)$. Em que $L(\theta|x) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta)$. O seu máximo será $\hat{\theta} = \arg \max (L(\theta|x))$, em que $L(\hat{\theta}|x) = \max L(\theta|x)$, $\theta \in \Theta$.

Uma vez que a função logarítmica é monótona esta é, normalmente, usada na prática por ajudar na simplificação dos cálculos, uma vez que, a presença de termos exponenciais é frequente como é o caso. Assim efetua-se a procura do θ que maximiza a função de logverosimilhança, $\hat{\theta} = \arg \max (\log^2 L(\theta|x))$. Calculando a função de verosimilhança, considerando que $\theta = (\mu, \sigma)$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} L(\theta|x) &= \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right), \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo, calculando a função de logverosimilhança ir-se-á obter:

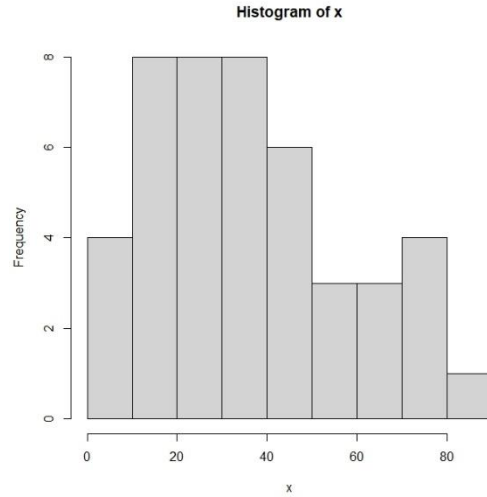


Figura 5 – Histograma com os valores dos caudais máximos.

² Apesar do logaritmo estar a ser apresentado em base decimal tomou-se a notação usual da estatística em que este representa o logaritmo na base neperiana.

$$\begin{aligned}
L^* = \log L(\theta|x) &= -n \log \sigma + \log \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\
&= -n \log \sigma + \sum_{i=1}^n \log \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\
&= -n \log \sigma + \sum_{i=1}^n -\frac{x_i - \mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \\
&= -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma} + \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right), \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Como se queria demonstrar.

- b) Como este caso não é univariado é necessário efetuar o cálculo das duas derivadas, em ordem a μ e a σ , para o cálculo do valor máximo. Por segurança, às vezes pode-se calcular a segunda derivada para verificar se o zero da derivada é de facto um máximo ou um mínimo, sendo a representação visual algo que pode ajudar.

Temos então, relativamente à derivada em ordem de μ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu} L^* = 0 &\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^n -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\mu}{\sigma} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{\mu}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow n = \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\mu}{\sigma} = \log \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right)} \Leftrightarrow \mu = \sigma \log \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right)}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Como se queria demonstrar.

Quanto à derivada em ordem de σ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} L^* = 0 &\Leftrightarrow -\frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n -\frac{x_i - \mu}{\sigma^2} + \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{\sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} - \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \\
&\sigma = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) (1 - \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right))}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Assim, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} L^* = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} L^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \sigma \log \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right)} \\ \sigma = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)} \end{cases}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

c) Analisando o sistema de equações apresentado na alínea anterior, b), verifica-se que este problema se trata de uma questão a duas variáveis. Contudo, é possível aplicar alguns dos métodos sugeridos no enunciado, sendo, em alguns, necessário considerar a situação de um problema univariado. Esta transformação pode-se efetuar substituindo μ pela sua expressão na equação de baixo no sistema anteriormente apresentado. Obtendo-se assim a seguinte equação que apenas depende de uma variável.

$$\sigma = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \left(\sigma \log \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right)} \right)}{\sigma^2} \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{x_i - \left(\sigma \log \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right)} \right)}{\sigma} \right) \right) \right)}$$

Como esta equação depende agora apenas de um parâmetro, podemos aplicar o comando *uniroot*, calculando assim a estimativa para o parâmetro σ , denotada por $\hat{\sigma}$, e, posteriormente calculando a estimativa para o parâmetro μ , denotada por $\hat{\mu}$, a partir de:

$$\hat{\mu} = \hat{\sigma} \log \frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\sigma}}\right)}$$

O *uniroot* é uma ferramenta que encontra os zeros de uma função num intervalo estipulado. Assim a sua utilização é direta seguindo o Exemplo 1.2, estudado em aula. Na Figura 6 expõe-se o excerto do código que soluciona este problema. Obtendo primeiramente o valor de $\hat{\sigma}$ e, posteriormente, o uso deste se efetuar a estimação de $\hat{\mu}$.

```
obj = function(sigma,n,x){
  mu = sigma*log(n/sum(exp(-x/sigma)))
  return (-sum( -mu*exp((mu-x)/sigma)/sigma^2+x*exp((mu-x)/sigma)/sigma^2-(x-mu)/sigma^2 )-n/sigma )
}

n=length(x)
u = uniroot(obj,lower=5,upper=100,n=n,x=x)
iter = u$iter
# Cálculo das estimativas
sigma_hat = u$root
sigma_hat

mu_hat = sigma_hat*log(n/sum(exp(-x/sigma_hat)))
mu_hat
```

Figura 6 - Exemplificação do uso do comando *uniroot*

Quanto ao comando *optimize*, visto que este problema depende de dois parâmetros não é possível aplicar-se pelo que, se utiliza antes o comando *optim*, que se baseia em algoritmos de Nelder-Mead, quasi-Newton e dos gradientes conjugados. Este comando retorna o máximo de uma função pelo que em vez de se usar L^* , usa-se $-L^*$. Assim, este problema pode-se resolver seguindo o script apresentado na Figura 7, onde *sigma_i* e *mu_i* representam as estimativas iniciais e *x* os dados fornecidos. As estimativas iniciais são calculadas a partir do método dos momentos, fornecidos pela docência.

```
logL = function(par){# optim command minimizes a given function, so we need to consider -L* (slide 13)
  sigma = par[1]
  mu = par[2]
  var = (x-mu)/sigma
  Loglik = ( -length(x)*log(sigma) - sum( var + exp(- var ) ) )
  return( - Loglik)
}

optim(c(sigma_i,mu_i), logL)

# Cálculo das estimativas
sigma.hat = optim(c(sigma_i,mu_i), logL)$par[1]
sigma.hat

mu.hat = optim(c(sigma_i,mu_i), logL)$par[2]
mu.hat
```

Figura 7 - Exemplificação do comando *optim*

Usando então estes dois comandos foi possível obter as estimativas representadas na Tabela 1 assim como os seus respetivos erros, assumindo como os valores de σ e μ , que se pretende estimar, os valores obtidos através do método dos momentos, ou seja, $\sigma = \frac{\sqrt{6}}{\pi} s(x) = 16.48871$ e $\mu = \bar{x} - 0.5772\sigma = 26.6116$, em que x representa o conjunto de valores presente no ficheiro de texto fornecido, $s(x)$ a variância e \bar{x} o valor médio destes valores. O uso do método dos momentos é muito usual neste tipo de situações uma vez que é simples de aplicar e fornece um ponto de partida.

De notar que, ao contrário do comando *uniroot*, o comando *optim* permite o cálculo de um intervalo de confiança da estimativa. Os intervalos de 95% de confiança, respetivos à estimativa de cada parâmetro encontram-se também apresentados na Tabela 1.

Comando	$\hat{\sigma}$	$Er(\hat{\sigma})$ (%)	$Int(95\%)$	$\hat{\mu}$	$Er(\hat{\mu})$ (%)	$Int(95\%)$
<i>uniroot</i>	16.65789	1.026008	-	26.34149	1.015019	-
<i>optim</i>	16.65487	1.007686	[12.75423, 20.5555]	26.33968	1.021833	[21.2143, 31.46505]

Tabela 1 - Valor das estimativas e respetivo erro relativo e intervalos de confiança obtidos através do comando *optim*

A partir desta tabela podemos concluir que o valor estimado, por ambos os comandos *uniroot* e *optim*, se encontram bastante próximo dos valores que se pretendem estimar, $\sigma = 16.48871$ e $\mu = 26.6116$, como se pode ver pelos baixos erros percentuais. No entanto, se apenas fosse possível usar 1 destes comandos, para este problema, concluímos que a escolha deveria ser o comando *optim* visto apresentar, em média, um menor erro em comparação aos valores obtidos através do método dos momentos, e permitir também o cálculo do seu intervalo de confiança.

- d) Com o caso particular da distribuição Gumble, referida anteriormente, pretende-se estimar μ utilizando a metodologia bayesiana. Para isso admitiu-se que μ é uma variável aleatória e $\mu \sim U(0,100)$. Para o cálculo desta estimativa, vai-se gerar valores usando o algoritmo de Metropolis-Hasting. Este é um método que parte de uma distribuição proponente q para obter os valores da distribuição alvo, f , fazendo uso de cadeias de Markov em que a amostra, ao depender do valor imediatamente anterior, se torna necessário quebrar esta dependência. Neste caso assumimos que a distribuição proponente segue uma qui-quadrado com $|X_t|$ graus de liberdade.

Seguidamente apresenta-se o pseudocódigo para a resolução do problema:

1. Definir o tamanho da cadeia, $m = 20000$, e o período de aquecimento, $b = m/4$
2. Inicializar a variável que irá contar o número de rejeições, $k = 0$
3. Calcular o parâmetro σ , $\sigma = \frac{\sqrt{6}}{\pi} * sd(caudais)$, em que *caudais* representa os dados fornecidos e *sd(caudais)* a variância destes
4. Inicializar o vetor x que vai ser usado para posteriormente calcular a média que representa a estimativa de μ .
5. Definir o primeiro valor deste vetor, $x[1]$, como um valor gerado de uma distribuição $U(0,100)$
6. Gerar m valores de uma distribuição $U(0,1)$, que irão servir com parâmetro de aceitação, e guardá-los no vetor u
7. Inicializar um ciclo *for* de 2 até m (*for i in 2:m*):
 - 7.1. Definir x_T como o valor de x anterior, $x[i - 1]$
 - 7.2. Obter um valor da função proponente de x_{T+1} , sy , que segue uma distribuição qui-quadrado com x_T graus de liberdade
 - 7.3. Calcular $\alpha(x_T, y)$, usando f como a função de verosimilhança e q uma distribuição qui-quadrado
 - 7.4. Comparar $\alpha(x_T, y)$ com o valor atual do vetor u , isto é, $u[i]$
 - 7.4.1. Se o valor de u for inferior ou igual ao valor de $\alpha(x_T, y)$, o valor atual de x , $x[i]$, é atualizado com o valor da proponente y .
 - 7.4.2. Caso contrário, rejeita-se o valor da proponente y e o valor atual de x , $x[i]$, é atualizado com o valor de x_T , incrementado por 1 o contador de rejeições, $k = k + 1$.
8. Fim do ciclo *for*
9. Calcular a percentagem de rejeições, $(k/m) \times 100$
10. Calcular a média dos valores de x , considerando um período de aquecimento, $\mu[b:m]$, de forma a obter a estimativa para o parâmetro μ

De referir que $\alpha(x_T, y) = \left\{ \min \left(1, \frac{f(y)q(x_T)}{f(x_T)q(y)} \right) \right\}$ representa a probabilidade de aceitação do método.

Quanto aos resultados, foi obtida uma percentagem de 62.98% de rejeições e um valor de estimativa de 26.04936 para μ , que traduz num erro relativo, $Er(\%) = \frac{|26.04936 - \mu|}{\mu} \times 100 = 2.112 \%$, onde μ representa o valor que se pretende estimar e toma o valor de 26.6116, obtido através do método dos momentos. Este valor de rejeições é superior a 50% levando assim à independência dos valores na cadeia, sendo assim um processo ligeiramente ineficiente.

Posto isto, é possível concluir que, visto a estimativa de máxima verosimilhança ter apresentado valores estimados mais próximos do valor obtido a partir do método dos

momentos para μ , usando ambos os comandos (*uniroot* e *optim*), esta abordagem, para este problema em específico, é melhor do que a abordagem em que é usado o algoritmo de *Metropolis-Hastings*.