Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Exame Prático de Recurso — Parte 1

Física Computacional — 2017/2018

3 de julho de 2018

Duração: 2 horas

Justifique as suas respostas às perguntas.
Note que os símbolos a **negrito** representam vetores.
Deve ser criada uma pasta no *desktop* contendo os ficheiros .m e eventuais figuras.

1. (5.6 + 2.2 + 2.2 val.) Um pêndulo de Wilberforce é constituído por uma massa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$, com momento de inércia $I = 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$, suspensa de uma mola helicoidal de constante longitudinal $K = 5\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ e constante torsional $\delta = 10^{-3}\,\mathrm{N\,m}$. O pêndulo tem modos de oscilação longitudinal (z varia) e torsional (θ varia). A constante de acoplamento entre os modos é $\epsilon = 10^{-2}\,\mathrm{N}$. As equações diferenciais que descrevem o sistema são

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -Kz - \frac{1}{2}\epsilon\theta.$$
$$I\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{2}\epsilon z - \delta\theta.$$

Definindo

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \text{e} \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

a aplicação do método de Crank–Nicolson resulta em

$$v_i - \frac{hK}{2m}z_i - \frac{h\epsilon}{4m}\theta_i = v_{i+1} + \frac{hK}{2m}z_{i+1} + \frac{h\epsilon}{4m}\theta_{i+1},$$
$$z_i + \frac{h}{2}v_i = z_{i+1} - \frac{h}{2}v_{i+1},$$
$$\omega_i - \frac{h\epsilon}{4I}z_i - \frac{h\delta}{2I}\theta_i = \omega_{i+1} + \frac{h\epsilon}{4I}z_{i+1} + \frac{h\delta}{2I}\theta_{i+1},$$
$$\theta_i + \frac{h}{2}\omega_i = \theta_{i+1} - \frac{h}{2}\omega_{i+1}.$$

a) Usando o método de Crank–Nicolson, estude a evolução do sistema até $t = 100\,\mathrm{s}$, dadas as condições iniciais $z(0) = 0.1\,\mathrm{m}$, $v(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ e $\omega(0) = 0$.

b) Determine a frequência de oscilação de z.

c) Em intervalos de tempo fixos, o sistema muda de oscilações puramente longitudinais para oscilações puramente torsionais. Calcule e represente graficamente em função do tempo a quantidade

$$\frac{1}{2}Kz^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

e estime esse intervalo de tempo.

2. (5.0 + 5.0 val.) Considere as seguintes equações que modelam as populações de um predador e de uma presa:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-x) - \frac{axy}{x+y},$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{bxy}{x+y} - cy.$$

Considere $a = 2$, $b = 0.74$, $c = 0.5$, $x(0) = 0.8$ e $y(0) = 0.3$. Estude a evolução de x e de y durante os primeiros 100 segundos, usando

a) o método de Runge–Kutta de 4ª ordem que aprendeu nas aulas;

b) um método de Runge–Kutta de passo adaptativo (`ODE45`).