Universidade de Aveiro
Departamento de Física

1º Teste Prático de Avaliação Discreta

Física Computacional — 2017/2018

6 de abril de 2018

Duração: 2 horas

Justifique as suas respostas às perguntas.
Note que os símbolos a **negrito** representam vetores.
Deve ser criada uma pasta no *desktop* contendo os ficheiros .m e eventuais figuras.

1. (6 + 4 + 4 + 6 val.) Neste problema vamos estudar um cabo inextensível, de peso por unidade de comprimento $w = 4\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ (o peso atua no sentido negativo do eixo dos yy), suspenso pelas suas duas extremidades nos pontos $(x = 0, y = 0)$ e $(x = x_{\mathrm{ext}}, y = 0)$. Analisando as forças que atuam sobre cada segmento do cabo, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,.$$

Nesta equação, $a = T\sin(\theta)/w$, onde T é a tensão em cada segmento do cabo e θ é o ângulo que cada segmento faz com a vertical. Apesar de T e θ variarem, a componente horizontal da tensão, $T\sin\theta$ é uniforme, pelo que a é uma constante que pode ser calculada no ponto $(x = 0, y = 0)$:

$$a = \frac{T_{x=0}\sin(\theta_{x=0})}{w}\,.$$

a) Estude o caso em que $\theta_{x=0} = 1.1$ rad e $T_{x=0} = 200\,\mathrm{N}$. Note que

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = -\cot(\theta_{x=0})\,.$$

Use o método de Runge–Kutta de 4ª ordem com a seguinte tabela de Butcher:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Determine uma estimativa mais rigorosa de $(x = x_{\mathrm{ext}})$ fazendo uso da função `interp1` do MATLAB. Represente graficamente $y(x)$ em função de x. A curva tem o nome de catenária.

b) Para verificar se não cometeu erros na escrita do seu programa, calcule $y(x = 24\,\text{m})$ para os seguintes valores de h: $0.8\,\text{m}$, $1.0\,\text{m}$, $1.2\,\text{m}$, $1.5\,\text{m}$ e $1.6\,\text{m}$ e represente graficamente as estimativas numéricas de $y(x = 24\,\text{m})$ em função de h^4. Discuta o gráfico e apresente a melhor estimativa que ele lhe pode fornecer para $y(x = 24\,\text{m})$.

Se, nas alíneas anteriores, não conseguiu programar o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, pode, na resolução das alíneas seguintes, usar um outro método adequado a problemas de valor inicial.

c) Continuando a usar a solução da alínea a), calcule o valor mínimo de y (que vamos representar como y_{min}) e o valor de x para o qual ele acontece, x_{ymin}, usando a interpolação de Lagrange. Represente no mesmo gráfico a sua solução numérica para $y(x)$ e a solução analítica, que é dada por

$$y(x) = y_{\text{min}} + a\left[\cosh\left(\frac{x - x_{\text{ymin}}}{a}\right) - 1\right] .$$

d) Nesta alínea vamos considerar que o cabo tem um comprimento $L = 50\,\text{m}$. Queremos saber qual é o valor de θ_0 quando a distância entre os dois postes nos quais o cabo está suspenso (ou seja, x_{ext}) é igual a $47\,\text{m}$. Note que como a componente vertical da tensão em cada poste tem que ser igual em módulo a metade do peso do cabo, podemos escrever

$$T_{x=0} = \frac{wL}{2\cos(\theta_{x=0})} .$$

Para resolver esta alínea, deve usar o método de shooting para encontrar o valor de $\theta_{x=0}$ (e correspondente $T_{x=0}$) que faz com que x_{ext} tenha um valor suficientemente próximo do pretendido, $47\,\text{m}$.