Física Computacional

2020/2021

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Folha de Revisões

Problema FR.1: BVP – método do Shooting

Considere um oscilador não harmónico de massa m = 1.5 kg e K = 2 N/m cuja força restauradora é da forma,

$$F_x(x) = -K\,x\left(1+\frac{3}{2}\alpha x\right)$$

A oscilação deste oscilador tem amplitudes diferentes para valores de x positivos e negativos. Considere que em t = 0, x = 1.9 m e v = 0 m / s e, usando o método de shooting (que, por sua vez, deve utilizar a função **`ode45`** do Matlab), ajuste o valor de α (~ -0.2) para que a amplitude negativa seja igual a -1.5 m.

Problema FR.2: BVP – Transformadas de Fourier discretas

O ficheiro `data.txt` que se encontra na pasta dos trabalhos práticos tem um sinal temporal composto por várias frequências e ruído gaussiano de média zero. A frequência de amostragem foi de 1000 Hz.

a) Use as rotinas de Fast Fourier Transform do Matlab para encontrar as frequências (em Hz) presentes no sinal.
b) Determine o valor médio da densidade espetral do ruído.

Problema FR.3: Crank-Nicolson

A equação que descreve a propagação de feixes de luz num meio homogéneo dentro da aproximação paraxial tem uma forma adimensional dada por,

$$\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}^2} = 0$$

Neste trabalho vamos considerar a seguinte equação paraxial

$$\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{g}(x)\phi = 0$$

que resulta da adição de um termo que descreve a variação do índice de refração com a variável transversal x. A função g(x) é proporcional à variação do índice de refração relativamente a um valor médio. Aqui usaremos a seguinte expressão:

$$\mathrm{g}(x) = -\alpha x^2,$$

que, com α positivo, descreve um meio cujo índice de refração diminui à medida que nos afastamos de x = 0. Use inicialmente $\alpha = 0.2$, mas pode variar ligeiramente este valor e verificar as diferenças no resultado final. Considere um feixe gaussiano como condição inicial:

$$\phi(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

com x entre -20 a 20 e z desde 0 a 16. Considere ϕ igual a zero com x = -20 e x = 20.

a) Escreva a equação acima de forma a usar o método de Crank-Nicolson. Escreva a matriz **A** e o vetor **b** do sistema de equações**,**

$$\boldsymbol{A\phi} = \boldsymbol{b},$$

b) Encontre $\phi(x,z)$ usando o método de Crank-Nicolson. Represente graficamente $|\phi(x,z)|$ usando as rotinas do Matlab **`mesh`** e **`contourf`**.

Nota: O método de Euler aplicado a esta equação seria sempre instável porque os valores próprios da matriz são imaginários.

Nota de apoio - Problema FR2.3

$$\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{g}(x)\phi = 0$$

$$\mathrm{g}(x) = -\alpha x^2.$$

Condição inicial:

$$\phi(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Condição fronteira: ϕ igual a zero em x = -20 e x = 20.

$$\begin{aligned}\phi(j,n+1) = \phi(j,n) &+ \frac{i\,\Delta z}{4}\Bigg[\frac{\phi(j-1,n) - 2\phi(j,n) + \phi(j+1,n) + \phi(j-1,n+1)}{(\Delta x)^2} \\ &- 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n) + \frac{\phi(j-1,n+1) - 2\phi(j,n+1) + \phi(j+1,n+1)}{(\Delta x)^2} \\ &- 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n+1)\Bigg]\end{aligned}$$

Divide-se tudo por $\eta = \frac{i\,\Delta z}{4(\Delta x)^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\phi(j,n+1)}{\eta} = \frac{\phi(j,n)}{\eta} &+ [\phi(j-1,n) - 2\phi(j,n) + \phi(j+1,n) + \phi(j-1,n+1) \\ &- 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n)] \\ &+[\phi(j-1,n+1) - 2\phi(j,n+1) + \phi(j+1,n+1) \\ &- 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n+1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\phi(j-1,n+1) + \left(\frac{1}{\eta} + 2 + 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2\right)\phi(j,n+1) - \phi(j+1,n+1) \\ = \phi(j-1,n) + \left(\frac{1}{\eta} - 2 - 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2\right)\phi(j,n) + \phi(j+1,n)\end{aligned}$$

$$\xi = 2\alpha(\Delta x)^2$$

$$
\begin{bmatrix}
\left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(2)^2\right) & -1 & & & \\
-1 & \left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(3)^2\right) & -1 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & -1 & \left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(N_x-2)^2\right) & -1 \\
& & & -1 & \left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(N_x-1)^2\right)
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\phi(2,n+1) \\
\phi(3,n+1) \\
\vdots \\
\phi(N_x-2,n+1) \\
\phi(N_x-1,n+1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\phi(1,n+1)+\phi(1,n)+\left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(2)^2\right)\phi(2,n)+\phi(3,n) \\
\phi(2,n)+\left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(3)^2\right)\phi(3,n)+\phi(4,n) \\
\vdots \\
\phi(N_x-3,n)+\left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(N_x-2)^2\right)\phi(N_x-2,n)+\phi(N_x-1,n) \\
\phi(N_x-2,n)+\left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(N_x-1)^2\right)\phi(N_x-1,n)+\phi(N_x,n)+\phi(N_x,n+1)
\end{bmatrix}
$$