Breve introdução aos Métodos de Runge-Kutta

OBS: Não perder de vista que os métodos dados até ao momento, nomeadamente, os Métodos de Euler, Euler-Cromer, Euler Implícito, Crank-Nicolson, têm como objectivo a integração numérica de equações diferenciais ordinárias!

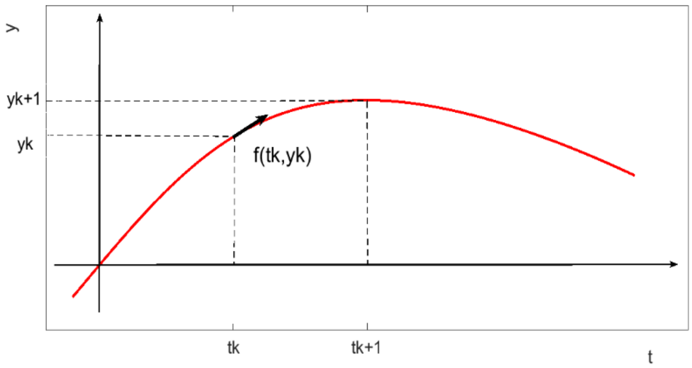
Como ponto de partida considerou-se uma ODE do tipo

$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = f(t, y)}$, com uma CI (condição inicial) conhecida.

Introdução Breve

►Recordemos o Método de Euler…

$$y_{k+1} = y_k + f\left(t_k, y_k\right) * h \qquad para \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-2$$



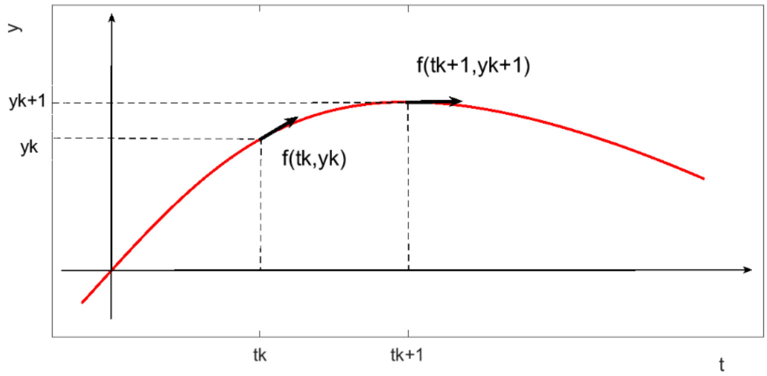
Pela figura podemos verificar que na iteração k, entre os intantes t_k e t_{k+1}, a função incremento,

f(t_k, y_k), (a derivada), é calculada no ponto inicial do intervalo (t_k, y_k). Já vimos que essa aproximação vai introduzir erros.

ERRO GLOBAL do método de EULER ► O(h) !

►E recordemos também o <u>Método de Crank-Nicolson</u>...

$$y_{k+1} = y_k + \left[f\left(t_{k,} y_k\right) + f\left(t_{k+1,} y_{k+1}\right)\right] * \frac{h}{2} \quad O(h^\wedge 2)$$



Neste caso, em cada iteração, a função incremento, **f(t_k, y_k)**, (a derivada), é calculada em dois pontos, no ponto inicial (t_k, y_k) e no ponto final (t_{k+1}, y_{k+1}) do intervalo. No algoritmo é considerada uma média destes dois valores.

Consequência prática ► ERRO GLOBAL do método de Crank-Nicolson é O(h^2) !

A precisão aumentou!

<u>E porque não usar a expansão em série de Taylor?</u>

➨ $y_{k+1} = y_k + h * y_k' + \frac{h^2}{2!} * y_k'' + \frac{h^3}{3!} * y_k''' + O(h^4)$

Mas o cálculo das derivadas de ordem superior é normalmente complexo!

E em alternativa, porque não calcular a função incremento, (a derivada), em vários pontos intermédios? Será que se ganha mais precisão, como no método de Crank-Nicolson?

Métodos de Runge-Kutta

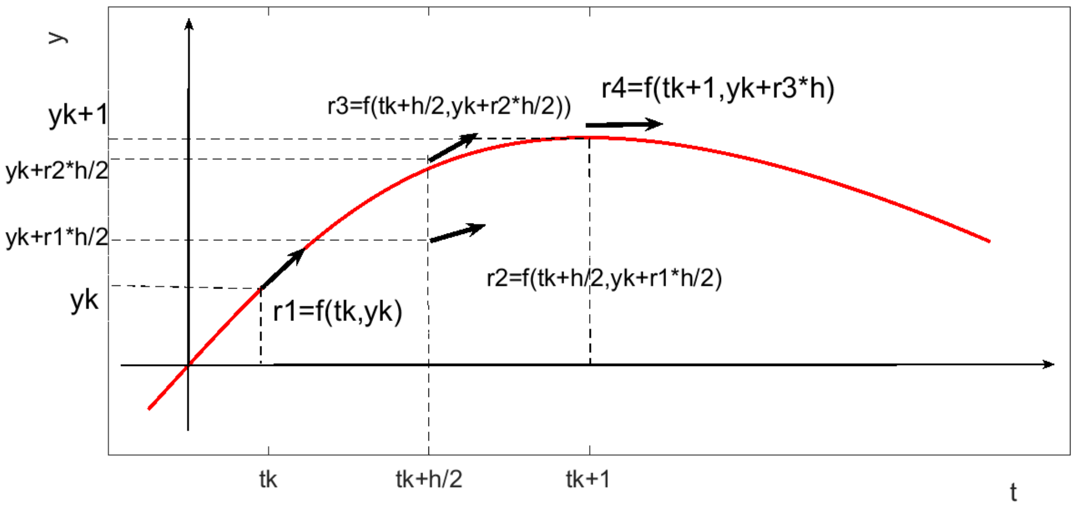
Os métodos de Runge-Kutta conseguem a precisão da série de Taylor, sem o cálculo de derivadas de ordem superior.

Como?

Considerando o cálculo da função incremento, f, em vários pontos do intervalo [t_k , t_{k+1}].

Como exemplo consideremos um método de Runge-Kutta de 4 ordem:

$$\boldsymbol{y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\,(r_1 + 2 * r_2 + 2 * r_3 + r_4) * h}$$



Neste caso, a função incremento é calculada em 4 pontos distintos:

1° ponto

P1 → (t_k , y_k)   e $r_1 = f(t_k, y_k)$ $(função\ incremento)$

À custa desta função incremento, r_1, encontram-se as coordenadas do 2° ponto,

2° ponto

P2 $\rightarrow$ $\left(\boldsymbol{t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 * \frac{h}{2}}\right)$ **e** $r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 * \frac{h}{2}\right)$

De modo semelhante, r_2, vai ser usado para calcular as coordenadas do 3° ponto,

3° ponto

P3 $\rightarrow$ $\left(\boldsymbol{t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 * \frac{h}{2}}\right)$ **e** $r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 * \frac{h}{2}\right)$

E r_3, vai ser usado para calcular as coordenadas do 4° ponto,

4° ponto

P4 $\rightarrow$ $(\boldsymbol{t_k + h, y_k + r_3 * h})$ **e** $r_4 = f(t_k + h, y_k + r_3 * h)$

A função incremento, obtida para um dado ponto, vai gerar a coordenada y do ponto seguinte, e assim sucessivamente.

A função incremento final é uma média ponderada das funções incremento (r1, r2, r3 e r4), (a derivada), obtida nos 4 pontos do intervalo. Repare que no instante $\boldsymbol{t_k + \frac{h}{2}}$, há dois valores para y.

E o ERRO GLOBAL é $O(h^4)$! E não foi necessário calcular derivadas de ordem superior!

Representação de BUTCHER-EXEMPLO

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{c} & A \\ \hline & \boldsymbol{b}^T \end{array}$$

Consulte os slides 7, 8, 9 e 10 da AULA3

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$r_1 = f(t_k, y_k)$$

$$r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 * \frac{h}{2}\right)$$

$$r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 * \frac{h}{2}\right)$$

$$r_4 = f(t_k + h, y_k + r_3 * h)$$

$$\boldsymbol{y_{k+1}} = \boldsymbol{y_k} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\,(\boldsymbol{r_1} + \mathbf{2} * \boldsymbol{r_2} + \mathbf{2} * \boldsymbol{r_3} + r_4) * \boldsymbol{h}$$

Coluna 1 c_i	
0	$t_k + 0 * h$
1/2	$t_k + 1/2 * h$
1/2	$t_k + 1/2 * h$
1	$t_k + 1 * h$

a_{ij} Matriz			Coordenada y
$1/2$			$y_k + r_1 * h * 1/2$
0	$1/2$		$y_k + r_1 * h * 0 + r_2 * h * 1/2$
0	0	1	$y_k + r_1 * h * 0 + r_2 * h * 0 + r_3 * h * 1$

Linha (Pêsos) b_s			
$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$
$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(1 * r_1 + 2 * r_2 + 2 * r_3 + 1 * r_4) * h$			