Universidade de Aveiro
Departamento de Física

3º Teste Prático de Avaliação Discreta

Física Computacional — 2015/2016

2 de junho de 2016 — Salas 11.2.7 e 11.2.8

Duração: 2 horas

Justifique as suas respostas às perguntas.
Note que os símbolos a **negrito** representam vetores.
Deve ser criada uma pasta no *desktop* contendo os ficheiros .m e eventuais figuras.

1.[10.0 val.] Considere uma caixa cúbica metálica de paredes muito finas, de lado $4R$, com $R = 1$. As paredes da caixa são mantidas a um potencial elétrico constante $V = 0$. Defina x, y e z de forma a que o centro da caixa esteja na origem das coordenadas. Dentro da caixa e concêntrica com ela está uma esfera de raio R, uniformemente carregada com uma densidade de carga $\rho = 2$. Não há cargas fora da esfera, todas as grandezas estão em unidades reduzidas e $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$ em todo o interior da caixa.

Considere a equação de Poisson a que obedece o potencial elétrico:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Use a generalização para 3 dimensões da expressão para os métodos de relaxação:

$$\begin{aligned} V(i,j,k) = \frac{1}{6}\Big[& V(i+1,j,k) + V(i-1,j,k) + V(i,j+1,k) \\ & + V(i,j-1,k) + V(i,j,k+1) + V(i,j,k-1) - h^2 f(i,j,k)\Big]. \end{aligned}$$

a)[7.0 val.] Use o método de sobre-relaxação sucessiva para determinar o potencial em todos os pontos. Lembre-se que $V = 0$ em todos os pontos da fronteira do cubo. Sugere-se $\alpha = 1.73$ e $h = 0.2$.

b)[1.0 val.] Represente (com a função `mesh`) o potencial no plano $z = 0$.

c)[1.0 val.] Represente (com a função `quiver`) o campo elétrico no plano $z = 0$.

d)[1.0 val.] Faça o gráfico, em função de x, do módulo do campo elétrico ao longo da linha $y = 0$, $z = 0$.

2.[10.0 val.] Considere a seguinte equação de condução de calor

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + f(x),$$

onde $f(x)$ representa uma fonte de calor. Considere ainda uma barra de cobre de comprimento $L = 50\,\text{cm}$ que inicialmente apresenta um gradiente de temperatura desde 0°, numa extremidade, até 20°, na outra extremidade. A fonte de calor a que está sujeita tem um máximo no centro da barra e é da forma $f(x) = 2\exp\left[-(x-L/2)^2\right]$. As extremidades permanecem a 0°e 20°, como inicialmente, para todos os tempos. Os restantes parâmetros são dados por $k = 0.93\,\text{cal}/(\text{s cm °C})$, $c = 0.094\,\text{cal}/(\text{g °C})$, $\rho = 8.9\,\text{g/cm}^3$. A equação discretizada é, neste caso, dada por

$$\begin{aligned} -T(i+1,n+1) + \left(\frac{2}{\eta}+2\right)T(i,n+1) - T(i-1,n+1) \\ = T(i+1,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right)T(i,n) + T(i-1,n) + \frac{\Delta t}{\eta}f(i) \end{aligned}$$

com $\eta = \dfrac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$.

a)[8.0 val.] Use o método de Crank–Nicolson para determinar a evolução da temperatura da barra ao longo do tempo até $t = 500\,\text{s}$. Represente graficamente a evolução da temperatura na barra usando as funções `mesh` e `contourf`.

b)[2.0 val.] Suponha agora que os parâmetros do material dependem da temperatura de tal forma que

$$\eta(T) = \left(\frac{k}{c\rho} + 0.1T\right)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Altere o programa de forma a que η seja diferente para cada posição x, de acordo com a expressão acima e assumindo que a temperatura nesse x é a do passo anterior.