



Perfil de uma membrana fina e métodos numéricos

12/06/2021

Tiago Alvim 95584 e Vasco Costa 97746, PL7

Sumário

Com este trabalho pretendia-se representar o perfil de uma membrana fina com uma força central aplicada utilizando diferentes métodos numéricos iterativos, Jacobi, Gauss-Seidel e sobre-relaxação sucessiva, estudando a complexidade computacional do método de Gauss-Seidel, calculando a área da membrana. E verificando de que forma a membrana se modificava com uma alteração das condições iniciais. Para se poder fazer a análise pretendida fez-se um conjunto de programas em *Matlab* que pretendem executar os métodos computacionalmente aplicados à equação de Poisson que descreve a membrana.

Analisando os resultados obtidos verificamos que se obtiveram resultados concordantes entre si, um valor plausível para a área da membrana assim como o perfil modificado pela introdução de um suporte na posição central. Não obtendo o resultado previsto no que diz respeito à complexidade do método de Gauss-Seidel. No entanto, julgamos ter alcançado o sucesso na nossa solução.

Introdução

Pretende-se estudar de que forma uma membrana fixa se comporta quando está tem-lhe aplicada uma força central, este comportamento pode ser descrito pela equação de Poisson.

Atendendo à equação de Poisson, $\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y)$, pode-se utilizar a discretização com diferenças finitas centradas, em que $\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{z(x+1,y) - 2z(x,y) + z(x-1,y)}{(\Delta x)^2}$, o que também se realiza de forma análoga para a segunda derivada segundo y , em que tomando-se o limite se verifica que a aproximação toma a expressão, dependendo assim a aproximação do passo tomado. Utilizando uma grelha com espaçamento igual e substituindo na equação de Poisson é possível obter-se a expressão de $z(x+1,y) - 4z(x,y) + z(x-1,y) + z(x,y+1) + z(x,y-1) = h^2 f(x,y)$, em que h será o espaçamento, ao longo de todo o trabalho inclusive. Desta equação chega-se ao método iterativo de Jacobi em que $z^{k+1}(x,y) = z^k(x+1,y) - 4z^k(x,y) + z^k(x-1,y) + z^k(x,y+1) + z^k(x,y-1) - h^2 f(x,y)$, com k , a indicar a iteração. Repetindo-se até se alcançar uma dada tolerância.

A forma de calcular a tolerância foi comum a todos os métodos e situações, fazendo-se a raiz da soma dos quadrados das diferenças entre o resultado obtido na iteração atual com a anterior, dividindo pela raiz da soma dos quadrados dos valores da iteração atual. Assim consegue-se verificar se as alterações provocadas de uma iteração para a outra são relativamente grandes. Não sendo aplicável para quando o valor na soma dos quadrados dos valores atuais é 0, perto deste valor ou esperado que assim seja, nessa situação não seria de recomendar a utilização desta forma, mas sim o uso de valores médios.

O método de Gauss-Seidel difere do método de Jacobi na forma em que utiliza os pontos da mesma iteração que já tenham sido calculados, ou seja, $k+1$, para o cálculo dos restantes pontos, tendo-se então a fórmula de $z^{k+1}(x,y) = z^{k+1}(x+1,y) - 4z^{k+1}(x,y) +$

$z^{k+1}(x-1, y) + z^{k+1}(x, y+1) + z^{k+1}(x, y-1) - h^2 f(x, y)$. Sendo assim obrigatório, ao contrário de Jacobi, a inicialização da segunda iteração ser igual à inicial.

Um melhoramento ao método de Gauss-Seidel será o método da sobre-relaxação sucessiva. Que faz uso dos pontos já calculados na iteração atual e dos pontos da iteração anterior atendendo à sua variação, multiplicando por uma constante levando a que $z^{k+1} = z^k + \alpha d$, em que d representa $d = z^{k+1} - z^k$. Assim podemos chegar a $z^{k+1}(x, y) = (1 - \alpha)z^k(x, y) + \frac{\alpha}{4}(z^{k+1}(x+1, y) + z^{k+1}(x-1, y) + z^{k+1}(x, y+1) + z^{k+1}(x, y-1) - h^2 f(x, y))$.

Métodos e resultados

Alínea a)

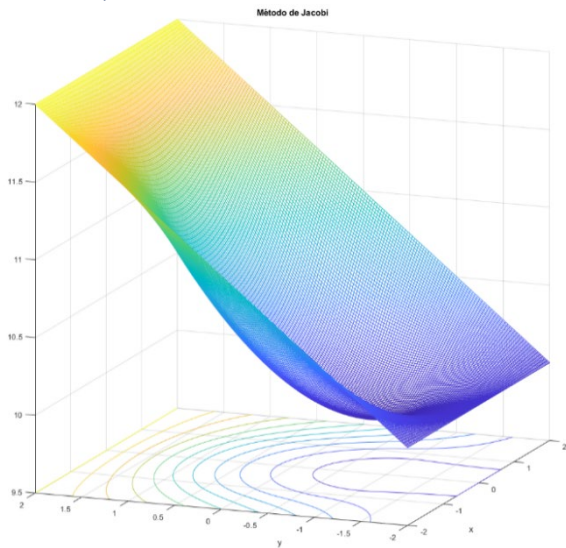


Gráfico 1 – Perfil da membrana, método de Jacobi.

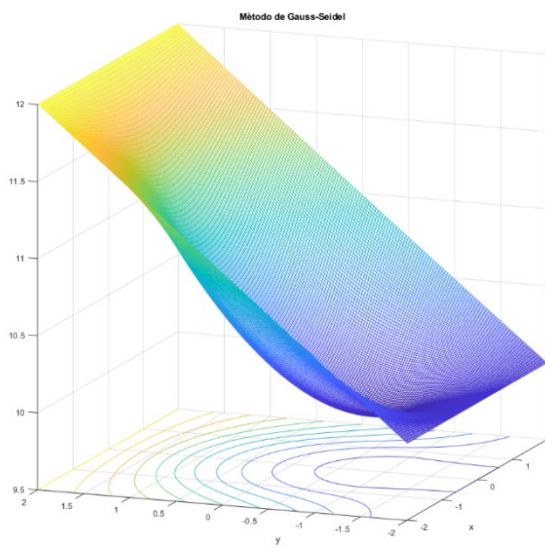


Gráfico 2 – Perfil da membrana, método de Gauss-Seidel.

Como se pode verificar graficamente os resultados obtidos são muito semelhantes, a membrana não é um plano, descaindo assim nos pontos centrais, sendo a única variação perceptível entre eles o número de iterações que variou significativamente de método para método, o que se verificou com uma alteração no tempo de execução. Em que o método com o maior número de iterações foi o de Jacobi, 38014 iterações, com cerca de quase metade teve-se o método de Gauss-Seidel, 20808 iterações, e com um número significativamente menor temos o método da sobre-relaxação com apenas 457 iterações, isto para uma tolerância com o valor de $1E-7$ e um h de 0,025.

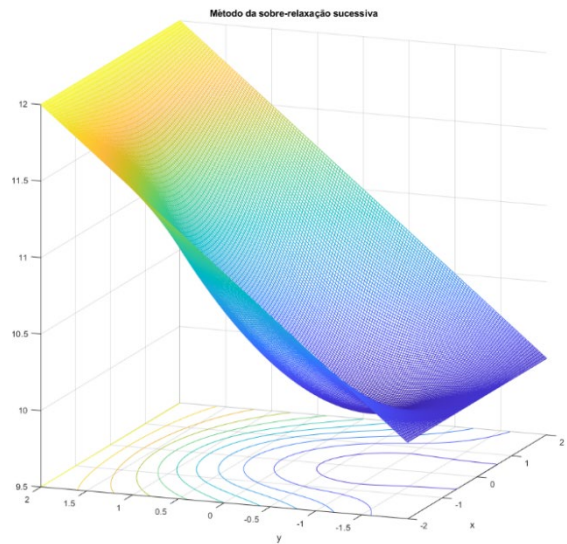


Gráfico 1 – Perfil da membrana, método da sobre-relaxação sucessiva.

Nas diferenças entre métodos é de notar a necessidade de especificar o parâmetro α que minimiza o número de iterações depende do problema em consideração e das suas dimensões e condições para o método da sobre-relaxação. No entanto, para a equação de

Poisson num domínio retangular é

$\alpha_{opt} = 2 - \frac{2\pi}{M}$, em que M representa o número de pontos segundo uma direção sendo igual em ambas.

Utilizando *verificar_alfa.m* obtém-se um gráfico do número de iterações necessárias para a mesma tolerância, $1E - 7$, em função da variação de α às milésimas, podendo-se reparar que apresenta um mínimo bastante próximo do valor considerado ótimo teórico. Sendo este aqui obtido experimentalmente que não seria possível sem se ter qualquer noção do valor ótimo. Este valor ótimo é calculado tendo em atenção o maior valor próprio associado, que corresponde então ao raio espectral, ρ . E que para o método de Jacobi é aproximadamente $\rho = 1 - \frac{\pi^2}{2M^2}$, para o método de Gauss-Seidel é aproximadamente $\rho = 1 - \frac{\pi^2}{M^2}$, levando a que a convergência seja da mesma complexidade, quadrática para o crescimento de M , mas necessitando de apenas cerca de metade das iterações. Enquanto que para o método da sobre-relaxação sucessiva se verifica que $\rho = 1 - \frac{\pi}{M}$ para α_{opt} , ou seja, ordem 1 pelo que será muito mais eficiente na sua convergência.

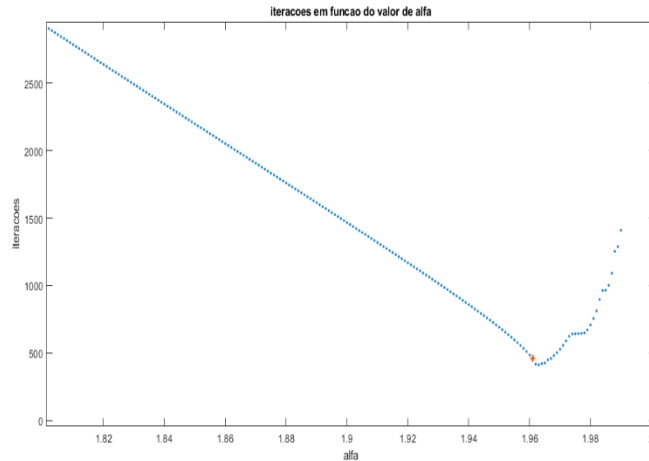


Gráfico 2 - Número de iterações em função de valores de alfa, com o ponto a vermelho a valer α_{opt}

Alínea b)

Para se verificar de que forma a complexidade computacional evoluía tomou-se uma abordagem prática calculando para diferentes tamanhos de matrizes o número de iterações e o tempo de execução do método para a mesma tolerância. A diminuição do espaçamento de pontos, ou seja, o h , leva a existirem obrigatoriamente mais pontos para comprimentos iguais, pelo que se fizeram reduções de h sucessivas retirando os valores do número de iterações que foram necessárias para uma dada tolerância, consistente com todo o estudo desta alínea, com o valor de $1E - 6$ assim como dos tempos, estes foram retirados com as instruções *tic* e *toc*.

Assumindo que $y = \beta * x^\alpha$, podem-se tomar os logaritmos e chega-se a $\ln(y) = \ln(\beta) + \alpha * \ln(x)$, assim podemos utilizar y como sendo o tempo/número de iterações e x o

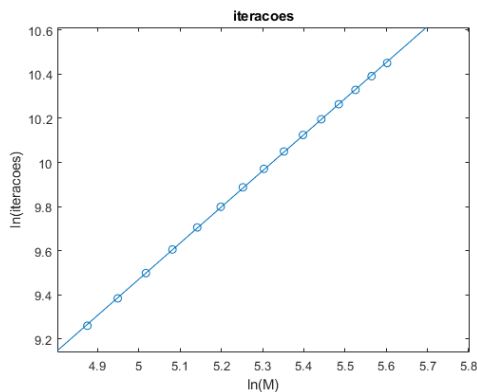


Gráfico 5 – Número de iterações em função do tamanho da matriz, h (15)

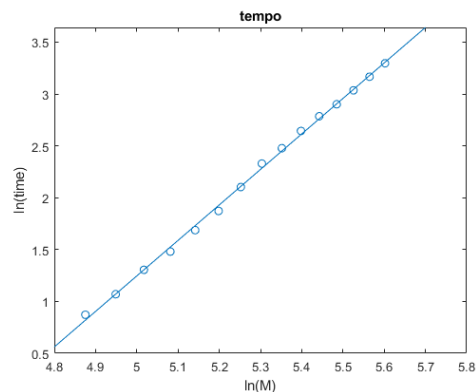


Gráfico 6 – Tempo em função do tamanho da matriz, h (15)

tamanho da matriz. Pelo que podemos verificar qual o polinómio de 1º grau que melhor se ajusta, no qual o declive representa a potência da variação.

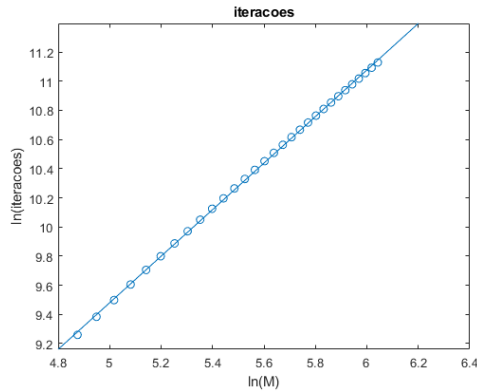


Gráfico 7 – Número de iterações em função do tamanho da matriz, h (30)

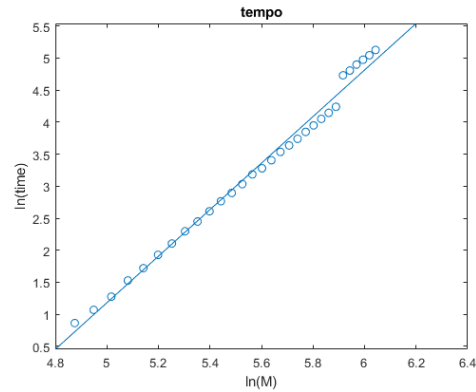


Gráfico 8 – Tempo em função do tamanho da matriz, h (30)

Optou-se por calcular h dividindo $\frac{L}{2}$ por números inteiros perto de 80 pois é um valor onde já se consegue uma grelha relativamente fina. Devido à volatilidade dos resultados obtidos optou-se por fazer com dois limites, tomando 15 números para h , obtiveram-se um $\alpha_{iterações} = 1,6378$ e um $\alpha_{tempo} = 3,4215$. Aumentando para 30 números de h , leva a um resultado de $\alpha_{iterações} = 1,5963$ e $\alpha_{tempo} = 3,6757$.

A escolha de h também poderá ter sido um contributo para o erro uma vez que o método utilizado, utilizando múltiplos de $\frac{L}{2}$, matematicamente correto, leva a erros de arredondamento e truncatura devido à precisão do computador pelo que não se tratam exatamente com os múltiplos, podendo levar a erros assim realizou-se também $h = [0,250 \ 0,100 \ 0,050 \ 0,025 \ 0,010 \ 0,0050 \ 0,0025]$ pois julgou-se ser então uma escolha mais segura. E utilizando estes valores chegaram-se aos resultados de $\alpha_{iterações} = 1,5898$ e $\alpha_{tempo} = 3,1327$.

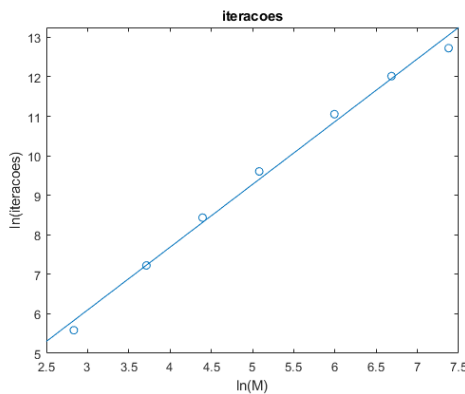


Gráfico 4 – Número de iterações em função do tamanho da matriz, h (sem arredondamento)

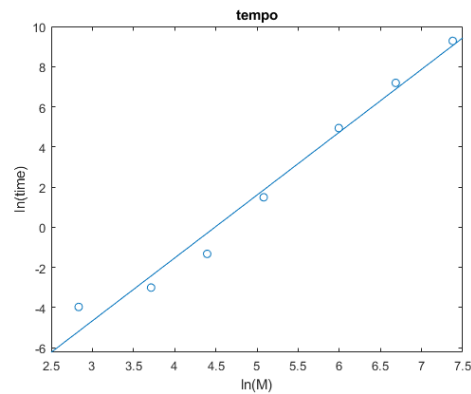


Gráfico 3 – Tempo em função do tamanho da matriz, h (sem arredondamento)

Com os resultados obtidos verificamos que apenas arredondando a um algarismo se obtém o esperado teoricamente, sendo que o mesmo não se verifica sempre. Sendo de notar que o logaritmo do número de iterações segue de forma mais linear o crescimento do logaritmo do tamanho da matriz, enquanto que o tempo não, algo que seria de esperar pois depende de fatores externos como o *boost* do processador que é variável. Não excedendo os valores previstos teoricamente.

Alínea c)¹

Verificamos que se obtém um valor para a área da superfície da membrana 19,54 unidades de área. Pela observação da figura concluímos que o valor obtido não é descabido, embora não seja possível calcular analiticamente olhando apenas para a figura, conseguimos ter uma estimativa de que intervalos de valor é que possa estar. Por exemplo a área é obrigatoriamente maior que a área do retângulo (superfície que se obteria sem forças aplicadas) que é aproximadamente 17,9 unidades de área. Por outro lado, podemos equiparar a uma superfície esférica, de raio 2. Sendo visivelmente algo que não é totalmente igual, mas que pode servir como comparação, pelo menos em termos de ordem de grandeza. E desta já é possível calcular-se a área da superfície, a esfera total apresenta 50,2 unidades de área e contabilizando apenas metade, a que se encontra abaixo do plano tem-se cerca de 25,1 unidades de área, não contabilizando o restante plano que se verifica visualmente existente.

É nos então possível concluir que o valor de 19,54 unidades de área é um valor plausível para a área da superfície da membrana pois encontra-se relativamente próximo dos valores que esperávamos encontrar.

Representando os gradientes verificamos uma grande afluência para o centro da figura. Isto vai de encontro com a definição de gradiente que diz que é um vetor no sentido e direção do deslocamento, sendo a força exercida no centro verificado como auxílio da figura, é óbvio que o deslocamento também terá o sentido da força que por sua vez tem como sentido e direção o centro da membrana. Sendo de notar que no sentido dos y positivos para a origem se verifica uma maior densidade enquanto que no sentido dos y negativos para a origem é menor. Fazendo sentido uma vez que a variação de altura, variação segundo o eixo vertical, é maior para os y maiores, descai mais para esses que para os y menores.

Alínea d)

Colocando uma vareta muito fina na posição central (0,0) e assumindo que aí fica colocada estaticamente verificamos que, como

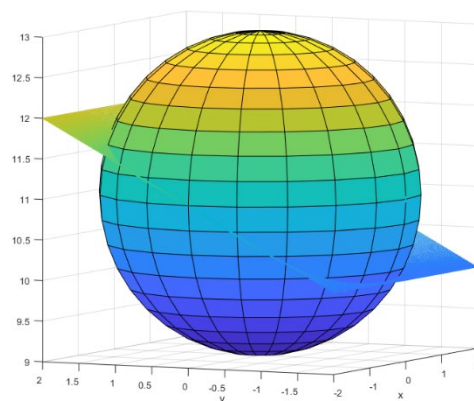


Gráfico 5 - Representação do perfil do plano da membrana obtido com uma esfera de raio 2 sobreposta

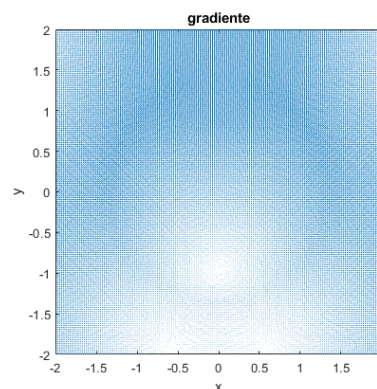


Gráfico 6 – Gradiente da membrana em função dos pontos, método da sobre-relaxação

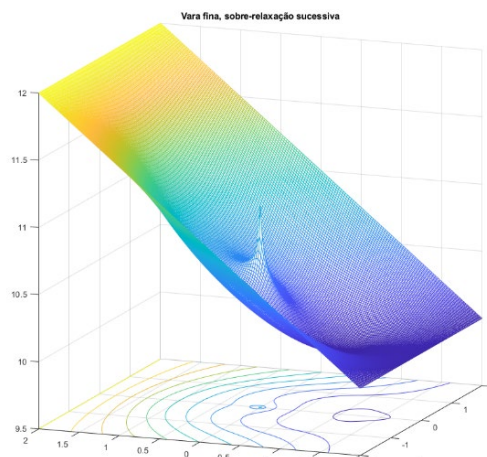


Gráfico 7 - Perfil da membrana em função dos pontos, método da sobre-relaxação

¹ Foi utilizado um h de 0,025 e uma tolerância de $1E - 7$

seria de esperar, se altera a forma que a superfície tem. Apresentando um pico no local da vareta, originando a que as posições laterais não descaiam tanto aquando sem a sua colocação.

Alínea e)²

Analisando o gradiente obtido nesta etapa com o obtido em que não se tinha a vareta verificamos que o gradiente apresenta maior incidência onde se encontra a vareta, já que o maior deslocamento é nessa área, ou seja, é aí que existe uma maior diferença relativa de alturas entre pontos. De forma semelhante apresenta-se uma menor densidade para y negativos pertos de $x = 0$ não sendo tão evidente como anteriormente.

Para uma melhor análise também se visualiza o gráfico do módulo do gradiente que comprova o dito anteriormente uma vez que apresenta um valor de maior módulo ao redor do local de contacto da vareta com a membrana, sendo que no próprio ponto como este é imposto como uma condição tem uma variação muito menor.

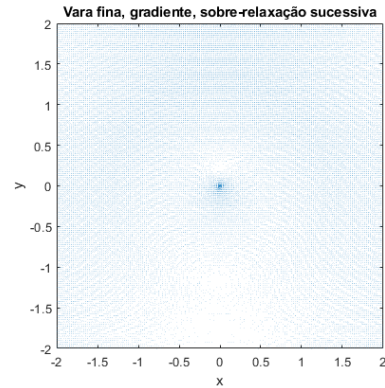


Gráfico 14 - Gradiente da membrana em função dos pontos com uma vareta na posição central, método da sobre-relaxação

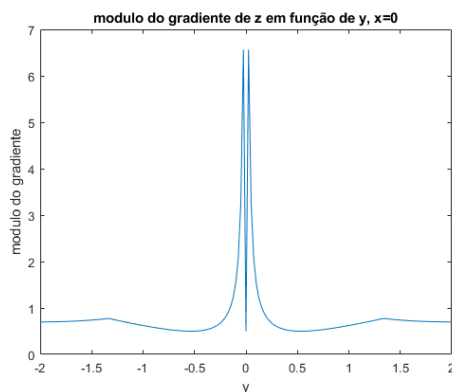


Gráfico 85 - Módulo do gradiente de z , com a vareta, em função de y com $x=0$

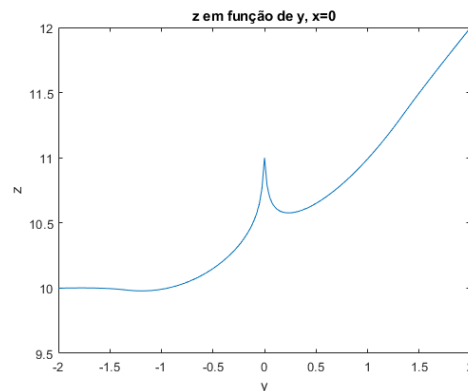


Gráfico 16 - Perfil vertical da membrana, z , com a vareta em função de y com $x=0$

Verificando a variação da altura, z , ao longo do eixo dos y , para a posição central de $x = 0$, visualiza-se o que se esperava, a membrana tem nas extremidades o perfil da estrutura de arame apresentando um ponto de maior elevação no local da vareta assim como o descaimento da membrana ao redor de $y = -1$ e a sua subida com a vareta assim como os restantes pontos.

Discussão e conclusão

Foi possível verificar-se que consoante o método utilizado se obtém soluções do problema equivalentes, convergentes, em que o melhor método é o da sobre-relaxação sucessiva pois convergia mais rapidamente com o valor de α_{opt} , e que mesmo que fosse utilizado outro perto desse valor se iria obter ainda assim um número de iterações menor,

² Foi utilizado um h de 0,025 e uma tolerância de $1E - 7$

(Gráfico 4). Sendo que para a nossa certeza de o resultado obtido estar correto foi as condições fronteira não se apresentarem diferentes no final do cálculo.

Em relação ao crescimento do número de iterações ou do tempo necessário para o cálculo em função do tamanho da matriz, não se obteve o que seria esperado pela teoria. Para $\alpha_{\text{iterações}}$ obteve-se um valor possível dentro do intervalo [1,5898 1,6378], valores insuficientes para uma melhor análise estatística e para α_{tempo} valores possíveis no intervalo [3,1327 3,6757], esperando-se obter 2 e 4, respetivamente, não correspondendo a um resultado exato. Sendo que se chegaram a valores inferiores, no entanto não se ultrapassou o valor teórico pelo que não podemos garantir experimentalmente que não excede esse número, mas tendo em atenção os raios espectrais mostrados em *Alinea a)* podemos verificar que o com os raios espectrais, fazendo aproximações, é de mostrar o limite máximo, ou seja, o pior caso. Um fator que pudesse ser aqui melhorado seria a o *boost* do processador se manter constante e a garantia de acesso sempre ao mesmo tipo de memória.

O valor da área de 19,54 unidades de área também se mostrou como sendo plausível em comparação com as superfícies apresentadas que são possíveis de calcular analiticamente. Não sendo uma abordagem para todas as situações pois nem sempre se consegue garantir que a superfície interior tem uma menor área, sendo um raciocínio mais útil para o cálculo de volumes, no entanto, para comparar ordens de grandeza poderá ser uma ajuda. No entanto, esta é apenas uma aproximação e tornando a grelha mais fina, ou seja, reduzindo h , iria-se obter um valor mais preciso pois é o maior contributo para o erro. Contudo, tornando o valor muito pequeno iria levar a uma maior necessidade de arredondamentos por parte do computador e a um tempo de cálculo superior.

A introdução de uma vareta permitiu a alteração do perfil da membrana verificando-se como esperado a alteração das forças a que esta era sujeita e a um maior valor mínimo de altura. Analisando os valores obtidos com o gradiente e o perfil verifica-se o que se esperava que se alterasse em relação à situação em que não existia.

Verifica-se que este problema tem a sua relevância nos dias de hoje pois pode descrever um toldo de um café ou equivalente responde à a acumulação de chuva ou até devido ao seu próprio peso, dependendo da espessura e do comprimento da mesma, em que a introdução de um suporte, a vareta, pode reduzir o *stress* a que o material está sujeito, força que se pode visualizar através do módulo do gradiente, verificando que caso a vara seja muito fina pode levar a que se rasgue o material. Sendo um importante tópico de estudo para a engenharia de materiais.

Desta forma concluímos que se conseguiu analisar o pretendido do problema sugerido com sucesso à exceção do pretendido na *Alínea b)*, no entanto, os valores obtidos não se mostraram uma realidade completamente diferente do esperado pela teórica. Assim sendo obtiveram-se resultados que aparentam descrever o pretendido.