Universidade de Aveiro
Departamento de Física

2º Teste Prático de Avaliação Discreta

Física Computacional — 2016/2017

5 de maio de 2017

Duração: 2 horas

Justifique as suas respostas às perguntas.
Note que os símbolos a **negrito** representam vetores.
Deve ser criada uma pasta no *desktop* contendo os ficheiros .m e eventuais figuras.

1. (6.0 + 2.0 + 1.5 val.) A solução da seguinte equação diferencial:

$$\epsilon \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \gamma,$$

descreve o estado estacionário de um problema de advecção/difusão. T é a temperatura em função da posição x de um líquido que percorre um tubo com uma dada velocidade constante. γ é um termo de aquecimento/arrefecimento através das paredes do tubo. O parâmetro ϵ é tanto maior quanto maior é a razão entre o coeficiente de condução de calor e a velocidade do fluido. Aplicando aproximações de diferenças finitas centradas de segunda ordem, obtém-se

$$(2\epsilon + h)\, T_{k-1} - 4\epsilon T_k + (2\epsilon - h)\, T_{k+1} = 2h^2\gamma.$$

Vamos estudar um problema em que as extremidades do tubo estão em $x = 0$ e $x = L = 5$ e em que $\gamma = -1.5$. As condições fronteira são $T(0) = 20$ e $T(L) = 50$.

a) Escreva o sistema de equações na forma matricial e determine a sua solução para $\epsilon = 2$. Represente graficamente a solução T em função de x.

b) A solução analítica da equação diferencial é

$$T(0) - \gamma x + \Big(T(L) - T(0) + \gamma L\Big)\left(\frac{\mathrm{e}^{x/\epsilon} - 1}{\mathrm{e}^{L/\epsilon} - 1}\right).$$

Calcule a solução analítica para valores de x entre 0 e L, com um espaçamento de 0.01. Adicione a solução analítica ao gráfico da alínea anterior.

c) Obtenha as soluções numéricas para $\epsilon = 0.1$, usando $h = 0.5$, $h = 0.25$ e $h = 0.01$. Compare graficamente com a solução analítica (calculada nos mesmos pontos que na alínea anterior). Comente.

2. (5.0 + 2.5 + 3.0 val.) Considere a função

$$y = \cos(50.0\, t) - 2\sin(90.1\, t + \pi/3)\,.$$

Pretende-se obter a transformada de Fourier discreta desta função usando um valor de $\Delta\omega$ exatamente igual a 0.1.

a) Conhecido o valor de $\Delta\omega$, a frequência de Nyquist, $\omega_{\max}$, pode ser determinada a partir do número de pontos N da amostragem da função y. Vamos considerar apenas valores de N que sejam potências inteiras de 2. Para $p = 5, 6, 7, \ldots, 14, 15$, determine os valores de $\omega_{\max}$ correspondentes a cada $N = 2^p$. Represente graficamente $\log_{10}(\omega_{\max})$ em função do valor de p. Selecione o menor valor de p (e consequente valor de N) que garante uma frequência de Nyquist superior a 100. Com $\Delta\omega$ e N determinados, calcule Δt e escreva os vetores t e ω, bem como o vetor dos y calculados nos valores t.

Se não concluiu a alínea anterior, resolva as seguintes partindo de $\Delta t = 0.025$ e $N = 2^{13}$.

b) Calcule a transformada de Fourier $Y(\omega)$ usando a rotina `fft` do MATLAB. Use `fftshift` para rearranjar a saída da `fft` de forma que a frequência zero esteja no centro. Faça o gráfico da densidade espetral, calculada a partir de $(\Delta t\, |Y(\omega)|)^2$, em função de ω.

c) Calcule sucessivamente a transformada de Fourier $Y(\omega)$ de $y(t)$ e a transformada de Fourier inversa de $Y(\omega)$. Represente graficamente, em função de t, a diferença entre o vetor y original e o reconstruido. Comente