Física Computacional

Resolução do Exercício 1 do

2º Teste Teórico de Avaliação Discreta de 2017/2018

1.

a) O primeiro passo é aplicar a aproximação de diferenças finitas centradas ,

$$y''(x) = \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}\big((\Delta x)^2\big),$$

à segunda derivada em ordem à variável independente x:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = D\frac{u(x-\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x, t)}{(\Delta x)^2}.$$

Obtivemos uma equação diferencial ordinária em ordem à variável independente t. Aplicando o método de Crank–Nicolson, dado por

$$y_{n+1} = y_n + \Big[f(y_{n+1}) + f(y_n)\Big]\frac{h}{2},$$

para um problema do tipo $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = f(y)$, ao nosso problema concreto de valor inicial segundo t, chega-se a

$$\begin{aligned} u(i,n+1) = u(i,n) + \frac{D\Delta t}{2(\Delta x)^2}\Big[&u(i-1,n+1) - 2u(i,n+1) + u(i+1,n+1) \\ &+ u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n)\Big], \end{aligned} \tag{1}$$

onde i é o índice do valor discretizado de x e n é o índice do valor discretizado de t.

b) A análise da tabela mostra que $u(1,1) = 0$, $u(2,1) = 1$, $u(3,1) = 1$, $u(4,1) = 1$, $u(1,2) = 0$ e $u(4,1) = 1$. O que nos é pedido é que determinemos $u(2,2)$ e $u(3,2)$. A equação (1), escrita para $i = 2$ e $n = 1$, (levando em conta que $D = 1$, $\Delta t = 1$ e $\Delta x = 1$) é

$$u(2,2) = 1 + \frac{1}{2}\Big[0 - 2u(2,2) + u(3,2) + 0 - 2\cdot 1 + 1\Big].$$

Repetindo para $i = 3$ e $n = 1$, vem

$$u(3,2) = 1 + \frac{1}{2}\Big[u(2,2) - 2u(3,2) + 1 + 1 - 2\cdot 1 + 1\Big].$$

Temos que resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} u(2,2) = 1 + \frac{1}{2}\Big[-2u(2,2) + u(3,2) - 1\Big] \\ u(3,2) = 1 + \frac{1}{2}\Big[u(2,2) - 2u(3,2) + 1\Big] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u(2,2) = 2 - 2u(2,2) + u(3,2) - 1 \\ 2u(3,2) = 2 + u(2,2) - 2u(3,2) + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u(2,2) - u(3,2) = 1 \\ -u(2,2) + 4u(3,2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(3,2) = 4u(2,2) - 1 \\ -u(2,2) + 4\big[4u(2,2) - 1\big] = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 15u(2,2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(3,2) = 28/15 - 1 = 13/15, \\ u(2,2) = 7/15. \end{cases}$$

c) Aplicando o método de Euler, dado por

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n)\,h,$$

para um problema do tipo $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = f(y)$, ao nosso problema concreto de valor inicial segundo t, chega-se a

$$u(i,n+1) = u(i,n) + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n)\Big], \tag{2}$$

onde, de novo, i é o índice do valor discretizado de x e n é o índice do valor discretizado de t. A equação (2), escrita para $i = 2$ e $n = 1$, permite-nos calcular diretamente $u(2,2)$:

$$u(2,2) = 1 + 1 \cdot (+0 - 2 \cdot 1 + 1) = 0.$$

Repetindo para $i = 3$ e $n = 1$, vem

$$u(3,2) = 1 + 1 \cdot (1 - 2 \cdot 1 + 1) = 1.$$