Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Exame Prático de Recurso — Completo

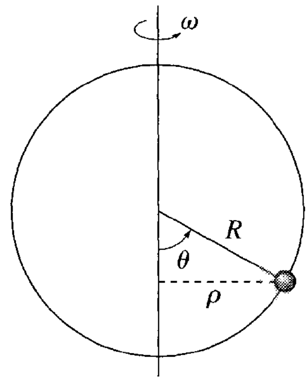
Física Computacional — 2018/2019

9 de julho de 2019

Duração: 3 horas

- Crie no *desktop* uma pasta com nome dado pelo seu número mecanográfico seguido da sua turma prática (98765P4, por exemplo). Guarde os seus *scripts* nessa pasta, **um por alínea**.
- Quando tiver terminado, chame o professor vigilante para recolher o teste. Em nenhum momento pode fazer login com outra conta. Não apague o seu teste do *desktop*, mesmo depois de o professor o ter recolhido.

1.[6.7 v.] Um arame circular fino de raio R é feito rodar com uma velocidade angular constante ω em torno do seu eixo vertical. Um conta de massa m pode deslizar sem atrito ao longo do arame. Note que $\omega \neq \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$.



A equação diferencial para a coordenada generalizada θ é

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\sin\theta.$$

Considere $R = 0.2\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

a)[2.8 v.] Use um método de Runge–Kutta de 4ª ordem para estimar e representar graficamente a evolução temporal de $\theta(t)$, quando

$$\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \qquad \theta(0) = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0.$$

Descreva o movimento. Verifique se a oscilação de θ é periódica e, caso o seja, calcule o período (usando interpolação).

b)[0.8 v.] Estime e represente graficamente a evolução temporal de $\theta(t)$, usando as mesmas condições iniciais, mas com $\omega = 8\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ e com $\omega = 9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Comente as diferenças do movimento.

c)[0.8 v.] Use agora

$$\omega = 9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \qquad \theta(0) = \operatorname{acos}\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right), \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0.$$

Descreva o movimento.

d)[2.3 v.] Repita a alínea anterior usando um método de Runge–Kutta de passo adaptativo (`ode45`).

2.[6.6 v.] Uma vareta fina de urânio 235 de comprimento $L = 2$ tem uma dada concentração inicial de neutrões livres

$$\rho(x, 0) = 2\cos(\pi x/L).$$

Todos os neutrões que atingem uma das extremidades da vareta escapam. Assim, as condições fronteira são

$$\rho(-L/2, t) = 0, \qquad \rho(L/2, t) = 0.$$

Tanto as unidades de tempo como as de comprimento são reduzidas. Para resolver as alíneas seguintes, use sempre o método de Euler progressivo.

a)[2.5 v.] Vamos começar por considerar a situação simplificada em que não há criação de neutrões na barra. A equação de difusão é

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2},$$

com $D = 1$. Determine a evolução com o tempo da concentração dos neutrões ao longo da vareta. Represente graficamente os seus resultados. Tenho cuidado na escolha de Δx e de Δt para garantir que está na região de estabilidade do método.

b)[2.7 v.] Na realidade, é preciso levar em conta que há uma taxa não nula de criação de neutrões. A equação de difusão que vamos passar a usar é

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} + C\rho(x,t).$$

Obtenha a solução para $C = 1$. Deve verificar que o número de neutrões na barra vai diminuir com o tempo. Use agora $C = 3$. Verifique que o comportamento se alterou (e ficou problemático).

c)[1.4 v.] Repita a alínea anterior, mas com condição fronteira de Neumann numa das extremidades:

$$\left.\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L/2,t} = 0.$$

A maneira mais fácil de programar esta condição fronteira é fazer com que o ponto em $x = L/2$ tenha sempre o mesmo valor de ρ que o ponto em $x = L/2 - \Delta x$. Verifique que o valor crítico de C é agora menor.

3.[6.7 v.] Neste exercício, vamos estudar um problema a duas dimensões descrito pela equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Considere que o domínio espacial se encontra entre $-1 \le x \le 1$ e $-1 \le y \le 1$. Discretize o domínio de tal forma que o número de pontos segundo a direção x é igual ao número de pontos segundo a direção y: $M_x = M_y = M$. Use como estimativa inicial $V(x, y) = 0$ para todos os pontos interiores do domínio e use como critério de paragem

$$\frac{\sqrt{\sum_{i,j}(V^{(k)}(i, j) - V^{(k-1)}(i, j))^2}}{\sqrt{\sum_{i,j}(V^{(k)}(i, j))^2}} < \delta,$$

com $\delta = 10^{-7}$. Nas arestas $x = -1$ e $x = 1$, $V = 1 - y^2$. Nas arestas $y = -1$ e $y = 1$, $V = -1 + x^2$. A função f é dada por

$$f(x, y) = -16 \cdot \Big[1 - \max(|x|, |y|)\Big].$$

a)[3.4 v.] Aplique o método de relaxação de sobre-relaxação sucessiva (SRS), com o valor recomendado

$$\alpha = 2 - \frac{2\pi}{M},$$

para obter uma solução numérica do problema.

b)[1.1 v.] Escolha o ponto mais próximo de $x = 1/2, y = 1/3$. Calcule uma estimativa de

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - f(x, y)$$

nesse ponto e comente o resultado.

c)[1.1 v.] Nesta alínea vai programar uma sequência alternativa da atualização dos valores de $V(i, j)$. Se imaginar o domínio discretizado como um tabuleiro de xadrez (com casas a mais), a ideia é, em cada iteração, atualizar primeiro todas as casas pretas e depois todas as casas brancas (ou vice-versa). Usando um M par, pode programar esta alteração varrendo o domínio duas vezes em cada iteração: da primeira vez atualiza os pontos com $i + j$ par e da segunda vez atualiza os outros.

d)[1.1 v.] Aplique o método para os valores de M obtidos no MATLAB através de `70:20:150`, usando

$$\alpha = 2 - \frac{2\pi}{M}.$$

Determine o número de iterações necessárias para atingir o mesmo nível de convergência. Represente graficamente o logaritmo desse número em função do logaritmo de M. Determine o declive da reta média e discuta os resultados.