Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Exame Prático de Recurso

Física Computacional — 2016/2017

11 de julho de 2017

Duração: 3 horas

Justifique as suas respostas às perguntas.
Note que os símbolos a **negrito** representam vetores.
Deve ser criada uma pasta no *desktop* contendo os ficheiros .m e eventuais figuras.

1. (3.5 + 3.0 val.) A equação

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t^3} = -0.3\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t} - Bx + \text{sign}(x)$$

descreve o comportamento de um circuito simples. Esta equação diferencial de terceira ordem pode ser expressa como um sistema de 3 ODE de primeira ordem acopladas:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = a, \qquad \frac{\partial a}{\partial t} = -0.3a - v - Bx + \text{sign}(x).$$

Neste problema, use sempre as condições iniciais $x(0) = 0.1$, $v(0) = 0.1$ e $a(0) = 0$.

a) Use a função `ode45` do MATLAB para estudar a evolução do circuito ao longo do tempo quando $B = 0.3$. Represente graficamente v em função de x. Caracterize a solução. Verifique se existe um ciclo limite e, caso exista, represente-o.

b) Repita a alínea anterior para $B = 0.4$, $B = 0.6$ e $B = 0.72$. Caracterize as soluções. Para os casos em que existe um ciclo limite, determine o período desse ciclo. Se não conseguiu resolver a alínea anterior, pode usar aqui o método de Runge–Kutta de segunda ordem com um passo fixo $h = 0.002$.

2. (3.0 + 4.0 val.) A resolução do sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\cos\theta}{W}, \qquad \frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{\sin\theta}{W},$$

com

$$W = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(X + \frac{h}{a}\right) - \frac{\sin\theta}{Q}$$

e

$$Q = \frac{a}{l^2}\left(X + \frac{h}{a}\right) - \frac{\sin\theta}{aS}.$$

permite determinar a altura h do menisco num tubo cilíndrico de raio $a = 0.0025$ m, quando são satisfeitas as condições

$$S(0) = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad S(\theta_{\text{max}}) = 1.$$

Nestas expressões, $l = 0.0027$ m é o comprimento capilar e $\theta_{\text{max}} = \pi/2 - \alpha$, onde $\alpha = \pi/4$ é o ângulo de contacto.

a) Use o método de Euler para determinar o valor de $S(\theta_{\text{max}})$ quando se usa um valor de teste $h = 0.002$ m. Note que Q não está definido em $\theta = 0$, pelo que nesse ponto se tem de usar

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} = \frac{2l^2}{ah}, \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} = 0.$$

b) Use o método de shooting para determinar uma estimativa do verdadeiro valor de h.

3. (3,0 + 3.5 val.) Uma vareta fina de urânio 235 tem uma dada concentração inicial de neutrões livres

$$\rho(x, 0) = 2\sin(\pi x/L).$$

Todos os neutrões que atingem uma das extremidades da vareta escapam. Assim, as condições fronteira são

$$\rho(0, t) = 0, \qquad \rho(L, t) = 0.$$

Tanto as unidades de tempo como as de comprimento são reduzidas.

a) Vamos começar por considerar a situação simplificada em que não há criação de neutrões na barra. A equação de difusão é

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2},$$

com $D = 1$. Use o método de Crank–Nicolson para determinar a evolução com o tempo da concentração dos neutrões ao longo de uma vareta de comprimento $L = 2$. Represente graficamente os seus resultados.

b) Na realidade, é preciso levar em conta que há uma taxa não nula de criação de neutrões. A equação de difusão que vamos passar a usar é

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + C\rho(x, t),$$

onde $C = 1$. Repita a alínea anterior, continuando a usar o método de Crank-Nicolson (com as modificações necessárias). Compare criticamente os resultados para $L = 2$ e para $L = 4$.