Universidade de Aveiro
Departamento de Física

3º Teste Prático de Avaliação Discreta

Física Computacional — 2018/2019

21 de junho de 2019

Duração: 2 horas

- Crie no *desktop* uma pasta com nome dado pelo seu número mecanográfico seguido da sua turma prática (98765P4, por exemplo). Guarde os seus *scripts* nessa pasta, **um por alínea**.
- Quando tiver terminado, chame o professor vigilante para recolher o teste. Em nenhum momento pode fazer login com outra conta. Não apague o seu teste do *desktop*, mesmo depois de o professor o ter recolhido.

1.[12.0 v.] Uma membrana fina tem as suas arestas fixas a uma estrutura retangular de arame. Tanto a coordenada x como a coordenada y da membrana têm valores entre $-L/2$ e $+L/2$, com $L = 4$. A estrutura de arame impõe as seguintes condições fronteira:

$$z(-L/2, y) = 10, \quad z(L/2, y) = 12, \quad z(x, -L/2) = 11 + \frac{2}{L}x, \quad z(x, L/2) = 11 + \frac{2}{L}x,$$

Sobre a parte central da membrana atua uma força dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{para } x^2 + y^2 < L^2/9; \\ 0, & \text{para } x^2 + y^2 \geq L^2/9. \end{cases}$$

O perfil da membrana é a solução de

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y).$$

a)[7.0 v.] Determine o perfil da membrana usando o método direto de resolução da equação de Poisson. Represente-o graficamente usando a função `mesh`.

b)[2.5 v.] Sabe que cada elemento de área da membrana é dado aproximadamente por

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, h^2.$$

Tendo em atenção que as derivadas presentes nesta expressão são as componentes do gradiente de $z(x,y)$, some estes elementos para obter a área total da membrana.

c)[2.5 v.] Considere agora que uma vareta fina foi usada para elevar o ponto central da membrana, de tal forma que $z(0,0) = 11$. Determine o perfil da membrana usando o método direto de resolução da equação de Poisson. Represente-o graficamente usando a função `mesh`.

2.[8.0 v.] Considere o integral

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x_d \, (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2) \, .$$

a)[5.0 v.] Escreva um programa que permita obter uma estimativa numérica do seu valor, para qualquer d, usando um método de Monte Carlo.

b)[3.0 v.] O valor exato do integral é $d \cdot 2^d/3$. Para um d entre 5 e 7, à sua escolha, e usando uma única simulação com $N = 10^4$, estime o valor do erro. Obtenha 1000 estimativas do integral nas mesmas condições e calcule a fração destas estimativas que se encontram dentro do intervalo

$$[I_{\text{exato}} - \text{erro}(I), I_{\text{exato}} + \text{erro}(I)] \, .$$