# Física Computacional

2020/2021

**Universidade de Aveiro**

**Departamento de Física**

## Trabalho Prático 4

Aplicação de Métodos de Runge–Kutta — Dinâmica não linear

### Problema 4.1: Oscilador de van der Pol — Runge–Kutta de 3ª ordem

Considere a equação que caracteriza o oscilador de van der Pol:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon(y^2 - 1)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

**a)** Integre-a numericamente, usando o método de Runge Kutta apresentado na seguinte tabela de Butcher:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | 1 | | |
| 1/2 | 1/4 | 1/4 | |
| | 1/6 | 1/6 | 2/3 |

$$r_1 = f(t_k, y_k)$$

$$r_2 = f(t_k + h, y_k + r_1 * h)$$

$$r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 * \frac{h}{4} + r_2 * \frac{h}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\,(r_1 + r_2 + 4 * r_3) * h}$$

Considere para o tempo final de integração, $t_{fin}$= 100s, e h= 0.01s. Assuma os seguintes valores dos parametros ε=0.1 e ε=1, e v(0) =0.7 e y(0) =0.2.

Use funções anónimas.

**b)** Repita os cálculos para v(0) =7 e y(0) =2.

**Problema 4.2: <u>Oscilador de van der Pol — Runge–Kutta de 4ª ordem</u>**

Considere agora que o oscilador de van der Pol é forçado, com uma força sinusoidal:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon(y^2 - 1)\frac{dy}{dt} + y = F_0 \cos(1.7t)$$

**a)** Caracterize as soluções para $F_0 = 1.0$ . Considere que as condições iniciais são v(0) =2 e y(0) =0.

Para a integração numérica use o método de RK 4, apresentado na seguinte tabela de Butcher:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| 1/3 | 1/3 | 0 | | |
| 2/3 | -1/3 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | -1 | 1 | 0 |
| | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

$$\boldsymbol{r_1 = f(t_k, y_k)}$$

$$\boldsymbol{r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{3}, y_k + r_1 * \frac{h}{3}\right)}$$

$$\boldsymbol{r_3 = f\left(t_k + \frac{2}{3} * h, y_k - r_1 * \frac{h}{3} + r_2 * h\right)}$$

$$\boldsymbol{r_4 = f(t_k + h, y_k + r_1 * h - r_2 * h + r_3 * h)}$$

$$\boldsymbol{y_{k+1} = y_k + \frac{1}{8}\,(r_1 + 3 * r_2 + 3 * r_3 +} r_4\boldsymbol{) * h}$$

**b)** Repita para $F_0 = 1.5$ .

**Problema 4.3<u>: Oscilador de van der Pol — *ode45*</u>**

Considere a equação do oscilador de van der Pol apresentada no problema **4.1**

Determine numericamente, usando a rotina **ode45**, as soluções do oscilador de van der Pol para três condições iniciais diferentes.

Num único gráfico, trace as trajetórias no espaço de fases ($y$, $v$). Verifique sempre se existe um ciclo limite e, caso exista, represente-o. Considere os casos $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 1$.

Se necessário aumente o tempo de cálculo.