Universidade de Aveiro
Departamento de Física

# 2º Teste Prático de Avaliação Discreta

## Física Computacional — 2017/2018

18 de maio de 2018

Duração: 2 horas

Justifique as suas respostas às perguntas.
Note que os símbolos a **negrito** representam vetores.
Deve ser criada uma pasta no *desktop* contendo os ficheiros .m e eventuais figuras.

**1.** (3.0 + 3.0 + 2.5 val.) A equação

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + m\,u(x,t)\Big[1 - u(x,t)\Big]$$

modela a propagação da mutação de um gene ao longo de parte de uma linha de costa que, em unidades reduzidas, é definida por $0 \leq x \leq L$, com $L = 1$. A concentração $u$ representa a fração dos indivíduos com o gene mutado. Considere que o coeficiente de difusão é $D = 0.02$ e que o parâmetro de seleção em favor do gene mutante é dado por $m = 5$.

a) Use o método de Euler para estudar a evolução com o tempo de $u$ ao longo da linha de costa. Não se pode usar diretamente o método de Crank–Nicolson porque a equação não é linear. Nesta alínea, as condições fronteira são $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$ (os indivíduos com o gene mutado não podem sobreviver em $x \leq 0$ ou em $x \geq L$). A concentração inicial é $u(x,0) = 0.5$ para $0.6 \leq x \leq 0.8$ e 0 para os outros valores de $x$. Represente graficamente os resultados. Escolha um $t$ final que permita observar o estado estacionário do sistema.

b) Repita a alínea anterior alterando a condição fronteira em $x \geq L$, que passa a ser dada por $u(L,t) = 1$ (não se pode sobreviver em $x \geq L$ sem a mutação) e a condição inicial, que passa a ser $u(x,0) = 0$ para todos os pontos exceto $x = L$. Olhando para a sua representação gráfica é possível observar que num dado intervalo de tempo o ponto com uma concentração 0.1 se desloca com uma velocidade aproximadamente constante ao longo da linha de costa. Determine essa velocidade e compare o seu valor absoluto com $2\sqrt{mD}$.

c) Repita a alínea anterior, excetuando a parte final de observação e cálculo da velocidade, alterando a condição fronteira em $x = 0$: nesse ponto, a derivada $\partial u/\partial x$ é agora nula (a linha de costa começa em $x = 0$). Usando, como habitual, um ponto fictício, a aplicação do método de Euler à condição fronteira de Neumann fica

$$u(1,n+1) = u(1,n) + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[-2u(1,n) + 2u(2,n)\Big] + m\Delta t\Big\{u(1,n)[1 - u(1,n)]\Big\}.$$

Note que nesta alínea é preciso ir alterando os valores de $u(0,t)$. Use $u(x,0) = 0$ como condição inicial para todos os pontos exceto $x = L$. Qual é a principal diferença em relação aos resultados da alínea anterior?

**2.** (2.5 + 3.0 + 2.5 + 3.5 val.) Considere uma corda sob tensão, que, num dado sistema de unidades reduzidas, tem comprimento $L = 2.00$. A velocidade de propagação de ondas transversais na corda é $c = 1.50$. Ambas as extremidades da corda estão fixas: em todos os instantes, $y(0,t) = y(L,t) = 0$. O perfil inicial da corda é $p(x) = y(x,0) = 0$ para todos os valores de $x$. Os valores iniciais das derivadas de $y$ em ordem a $t$ são:

$$p_{\mathrm{d}}(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x,t=0} = a\, x(L-x)\,,$$

com $a = 1{,}00 \times 10^{-3}$. Estas condições aplicam-se a todas as alíneas deste exercício. Use sempre $C = 1$.

a) Obtenha e represente graficamente a solução numérica. Escolha um $t$ final que lhe permita observar algumas (poucas) oscilações completas.

b) Repita a alínea anterior no caso em que a corda é forçada, em todos os pontos e em todos os instantes, por

$$f(x,t) = a[2c^2 - x(L-x)]\sin t,$$

A equação de onda passa a ser dada por

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

e é necessário alterar o método que usou nas aulas práticas. Agora,

$$y(i,n+1) = -y(i,n-1) + 2y(i,n) + C^2\Big[y(i-1,n) - 2y(i,n) + y(i+1,n)\Big] + (\Delta t)^2 f(i,n),$$
$$y(i,2) = y(i,1) + \frac{C^2}{2}\Big[y(i-1,1) - 2y(i,1) + y(i+1,1)\Big] + p_{\mathrm{d}}(i)\Delta t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 f(i,1).$$

c) A solução exata na situação da alínea anterior é dada por

$$y(x,t) = a\,x(L-x)\sin t.$$

Usando $\Delta x = 0.2$, represente num só gráfico as soluções numérica e exata para o perfil da corda em $t = 7.2$. Nesta alínea, faça apenas esta representação gráfica, para que o programa seja mais rápido. Calcule o erro máximo, definido como o valor máximo de $|y_{\text{numérico}} - y_{\text{exato}}|$, em $t = 7.2$.

d) Calcule o erro máximo em $t = 7.2$ para os seguintes valores de $\Delta x$: `[0.400 0.200 0.100 0.050 0.025]`. Para cada $\Delta x$, tenha o cuidado de alterar o valor de $\Delta t$, de forma a garantir que $C$ se mantém igual a 1. Represente graficamente o logaritmo do erro máximo em função do logaritmo de $\Delta x$ e discuta qualitativa e quantitativamente os seus resultados.