Universidade de Aveiro
Departamento de Física

# Exame Prático de Recurso — Parte 3

## Física Computacional — 2018/2019

9 de julho de 2019

Duração: 2 horas

- Crie no *desktop* uma pasta com nome dado pelo seu número mecanográfico seguido da sua turma prática (98765P4, por exemplo). Guarde os seus *scripts* nessa pasta, **um por alínea**.
- Quando tiver terminado, chame o professor vigilante para recolher o teste. Em nenhum momento pode fazer login com outra conta. Não apague o seu teste do *desktop*, mesmo depois de o professor o ter recolhido.

**1.**[12.0 v.] Neste exercício, vamos estudar um problema a duas dimensões descrito pela equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Considere que o domínio espacial se encontra entre $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. Discretize o domínio de tal forma que o número de pontos segundo a direção $x$ é igual ao número de pontos segundo a direção $y$: $M_x = M_y = M$. Use como estimativa inicial $V(x, y) = 0$ para todos os pontos interiores do domínio e use como critério de paragem

$$\frac{\sqrt{\sum_{i,j}(V^{(k)}(i,j) - V^{(k-1)}(i,j))^2}}{\sqrt{\sum_{i,j}(V^{(k)}(i,j))^2}} < \delta,$$

com $\delta = 10^{-7}$. Nas arestas $x = -1$ e $x = 1$, $V = 1 - y^2$. Nas arestas $y = -1$ e $y = 1$, $V = -1 + x^2$. A função $f$ é dada por

$$f(x, y) = -16 \cdot \Big[1 - \max(|x|, |y|)\Big].$$

a)[6.0 v.] Aplique o método de relaxação de sobre-relaxação sucessiva (SRS), com o valor recomendado

$$\alpha = 2 - \frac{2\pi}{M},$$

para obter uma solução numérica do problema.

b)[2.0 v.] Escolha o ponto mais próximo de $x = 1/2, y = 1/3$. Calcule uma estimativa de

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - f(x, y)$$

nesse ponto e comente o resultado.

c)[2.0 v.] Nesta alínea vai programar uma sequência alternativa da atualização dos valores de $V(i, j)$. Se imaginar o domínio discretizado como um tabuleiro de xadrez (com casas a mais), a ideia é, em cada iteração, atualizar primeiro todas as casas pretas e depois todas as casas brancas (ou vice-versa). Usando um $M$ par, pode programar esta alteração varrendo o domínio duas vezes em cada iteração: da primeira vez atualiza os pontos com $i + j$ par e da segunda vez atualiza os outros.

d)[2.0 v.] Aplique o método para os valores de $M$ obtidos no MATLAB através de `70:20:150`, usando

$$\alpha = 2 - \frac{2\pi}{M}.$$

Determine o número de iterações necessárias para atingir o mesmo nível de convergência. Represente graficamente o logaritmo desse número em função do logaritmo de $M$. Determine o declive da reta média e discuta os resultados.

**2.**[8.0 v.]

a)[2.0 v.] Usando o método de Monte Carlo, calcule uma estimativa numérica do seguinte integral:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 x\, y\, (x - y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

b)[2.0 v.] Considere agora o integral multidimensional

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1 \cdots x_n \prod_{1 \le j < k \le n} \left(x_j - x_k\right)^2 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Escreva um programa que permita calcular estimativas do integral para um qualquer $n$. Note que o valor do integral diminui rapidamente com $n$.

c)[2.0 v.] Para um $n$ entre 4 e 6, à sua escolha, e usando uma única simulação com $N = 10^5$, estime o valor do erro.

d)[2.0 v.] Para $n = 6$ compare com o valor analítico:

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\left[(j+1)!\right]^2 j!}{(n+j+1)!}.$$

Comente.