Universidade de Aveiro
Departamento de Física

2º Teste Teórico

Física Computacional — 2015/2016

15 de junho de 2016 — Duração: 1h30

1. (13 val) Considere a seguinte equação de condução de calor

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + f(x),$$

onde $f(x)$ representa uma fonte de calor.

Integração da equação no domínio de Fourier:

a) Aplique a toda a equação a transformada de Fourier associada à variável x, transformando-a num sistema de equações diferenciais ordinárias (ODE).

b) Escreva o ciclo de Euler adequado à integração das ODEs que obteve na alínea anterior.

Integração da equação usando diferenças finitas:

c) Use diferenças finitas centradas para aproximar a segunda derivada em ordem a x, e apresente as ODEs resultantes.

d) Suponha que se pretende integrar as equações obtidas na alínea anterior pelo método de Crank–Nicolson. A matriz e o vetor de elementos independentes podem ser retirados da equação abaixo. Demonstre este resultado e escreva a matriz e o vetor dos elementos independentes.

$$\begin{aligned} &- T(i+1,n+1) + \left(\frac{2}{\eta}+2\right) T(i,n+1) - T(i-1,n+1) \\ &\qquad = T(i+1,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right) T(i,n) + T(i-1,n) + \frac{2\Delta t}{\eta} f(i), \end{aligned}$$

com $\eta = \dfrac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$.

e) Considere agora $f(x) = 0$ e escreva o ciclo que permitiria integrar as ODEs da alínea c) usando o método de Runge–Kutta de 2ª ordem.

2. (7 val) Considere o seguinte sistema linear de 2 equações a 2 incógnitas

$$\begin{cases} 5x_1 & +2x_2 & = & 2 \\ x_1 & -4x_2 & = & 1. \end{cases}$$

a) Encontre a matriz T e o vetor $\mathbf{c}$ tal que se possa aplicar o método de Jacobi pela expressão

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}.$$

b) Usando os resultados da alínea anterior, prove que o método de Jacobi aplicado a esta equação é convergente.

c) A matriz T e o vetor $\mathbf{c}$ do método de Gauss–Seidel aplicado ao sistema acima são

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{20} \end{bmatrix}$$

O método de Gauss–Seidel aplicado a este sistema converge? Se sim, qual dos dois converge mais rápido?

Formulário:

Equação diferencial $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = f(y,t)$

Euler	$y_{k+1} = y_k + f(y_k, t_k)h$
Euler implícito	$y_{k+1} = y_k + f(y_{k+1}, t_{k+1})h$
Crank-Nicolson	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(y_{k+1}, t_{k+1}) + f(y_k, t_k)\right]$
Runge–Kutta de 2ª ordem	$r_1 = f(t_k, y_k)$
	$r_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}r_1)$
	$y_{k+1} = y_k + r_2 h$

Transformada de Fourier da derivada:

$g(t) = f^{(n)}(t), \quad G(\omega) = (i\omega)^n F(\omega)$