Física Computacional
[redacted]
2020/2021

Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Trabalho Prático 1

Método de Euler

Movimento de corpos a 1, 2 e 3 dimensões

Problema 1.1: Movimento a uma dimensão de um volante de badminton

As forças que atuam sobre um volante de badminton são a força gravítica e a força de arrasto. Esta última é razoavelmente descrita por

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{D}} = -\alpha v \boldsymbol{v}\,,$$

onde v é o módulo da velocidade e $\boldsymbol{v}$ é o vetor velocidade. Dito de outra forma, a força de resistência do ar tem a direção da velocidade, o sentido oposto, e um módulo dado por αv^2. No caso do movimento a uma dimensão, ao longo do eixo dos zz, é fácil de verificar que a força é dada por

$$F_{\mathrm{D},z} = -\alpha \left|v_z\right| v_z\,.$$

Também é fácil obter uma relação entre o valor de α, considerado constante, e a velocidade limite v_{lim}:

$$\alpha = \frac{mg}{v_{\mathrm{lim}}^2}\,,$$

onde m é a massa do volante e g é a aceleração da gravidade. Para tornar mais fácil a comparação das soluções numéricas dos problemas, sugere-se que passe a considerar sempre $g = 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$. Um valor tipicamente medido para os volantes de badminton é $v_{\mathrm{lim}} = 6.8\,\mathrm{ms}^{-1}$.

a) Um volante é largado (com velocidade inicial nula) de uma altura muito grande. Vamos considerar que o sentido positivo do eixo vertical (dos zz) aponta para cima. A equação diferencial que resulta da aplicação da segunda lei de Newton tem como solução analítica para a velocidade

$$v_z(t) = -v_{\mathrm{lim}} \tanh\left(\frac{g}{v_{\mathrm{lim}}} t\right)\,.$$

Use o método de Euler para obter uma estimativa numérica da velocidade entre $t_0 = 0$ e $t_{\mathrm{f}} = 2\,\mathrm{s}$. Represente graficamente e compare com a solução analítica. Escolha vários valores de $h = t_{k+1} - t_k$ e observe graficamente o que acontece.

b) Continue a considerar o lançamento da alínea anterior. Escreva um programa que calcule o módulo da diferença entre o valor analítico de v_z em $t = 0.5\,\mathrm{s}$ (passe a usar este valor como o instante final) e a estimativa numérica dessa velocidade obtida para vários valores de h entre 10^{-1} s e 10^{-4} s. Note que a sua escolha deve ser feita de tal forma que 0.5 s seja um múltiplo inteiro de todos os valores de h. Faça um gráfico do logaritmo do módulo do erro em função do logaritmo de h. Confirme que os pontos se aproximam de uma reta média (que pode ser traçada usando o comando `lsline` do MATLAB), ou seja, que o erro é aproximadamente proporcional a uma potência de h. Use a função `polyfit` do MATLAB para determinar o valor aproximado do expoente. O resultado será discutido nas aulas teóricas.

c) O mesmo volante é lançado verticalmente para cima, no instante $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, de uma altura inicial $z_0 = 1\,\mathrm{m}$, com uma velocidade inicial $v_{z,0} = 16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Use o método de Euler e a forma dinâmica para as ODE e represente graficamente a estimativa numérica da altura instantânea do volante em função do tempo. O ciclo `for` deve ser interrompido logo que z toma valores negativos. Obtenha uma estimativa numérica do instante em que o volante cai no chão (use a função `interp1` do MATLAB).

Problema 1.2: Lançamento de uma bola de ténis — *topspin* e *backspin*

Usando bolas de ténis novas e um túnel de vento, os coeficientes aerodinâmicos foram medidos por Stepanék (1988) para velocidades entre 13.6 e 28 m/s e rotações entre 800 e 3250 rpm. Um ajuste não linear das expressão das forças aerodinâmicas aos valores experimentais produz as seguinte parametrizações:

$$\begin{cases} C_\mathrm{D} = 0.508 + \left(22.503 + 4.196\, S^{-2.5}\right)^{-0.4}, & S = \dfrac{R\omega}{v}, \\ \boldsymbol{F}_\mathbf{D} = -\dfrac{1}{2} C_\mathrm{D}\, \rho A v^2 \hat{\boldsymbol{v}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_\mathrm{L} = \left(2.022 + 0.981\, S^{-1}\right)^{-1}, & S = \dfrac{R\omega}{v}, \\ \boldsymbol{F}_\mathbf{L} = \dfrac{1}{2} C_\mathrm{L}\, \rho A v^2 \left(\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{v}}\right), \end{cases}$$

onde v e ω são os valores absolutos da velocidade e da velocidade angular, respetivamente, R é o raio da bola e A é a área da sua secção transversal ($A = \pi R^2$). Uma bola de ténis nova, de massa 57 g e de diâmetro 67 mm, é batida à altura de 0.7 m com uma velocidade inicial de 20 m/s que faz um ângulo de 5º com a horizontal. Considere que a massa volúmica do ar é $\rho = 1.225\,\mathrm{kg/m^3}$. Analise a trajetória da bola, calculando a altura máxima e o alcance, nas seguintes condições:

a) Sem rotação.

b) Com *topspin* constante de 3000 rpm.

c) Com *backspin* constante de 3000 rpm.

Use z para o eixo vertical e considere que a trajetória define o plano xz. Nestas condições, o vetor velocidade angular só tem uma componente diferente de zero, ω_y, que é positiva quando a bola é batida com *topspin* (assumindo $v_x > 0$). Para obter um valor interpolado da altura máxima, comece por localizar o valor mais elevado do vetor z e o seu índice:

```
[z_max,ind]=max(z);
```

Está disponível no moodle um ficheiro `lagr.m` que usa a interpolação de Lagrange para determinar o valor máximo de uma parábola que passa pelo valor mais elevado de um vetor e pelos seus dois vizinhos mais próximos. Para usar a função nele definida, escreva

```
aux=lagr(x(ind-1:ind+1),z(ind-1:ind+1));
```

A altura máxima interpolada é dada por `aux(2)` e o valor correspondente de x por `aux(1)`. Também pode usar

```
aux=lagr(t(ind-1:ind+1),z(ind-1:ind+1));
```

A diferença é que `aux(1)` passa a ser o instante em que é atingida a altura máxima.

Problema 1.3: Bola de futebol — desvios laterais

Num dia sem chuva e num campo sem lama, uma bola de futebol é chutada com uma velocidade inicial de 80 km/h, fazendo um ângulo de 10º com a horizontal. A rotação é de 600 rpm, e, vista de cima, a bola roda no sentido direto. A bola seca e sem lama tem uma massa de 450 g e um perímetro de 70 cm. Use a expressão da força de arrasto parametrizada por Vítor Torres:

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{D}} = \begin{cases} -(0.015v^2)\hat{\boldsymbol{v}} & \text{para} \quad v \le 9\text{m/s}, \\ -(0.25147 + 0.17431v - 0.01384v^2 + 0.00054v^3)\hat{\boldsymbol{v}} & \text{para} \quad 9\text{m/s} < v \le 20\text{m/s}, \\ -(-4.025 + 0.323v)\hat{\boldsymbol{v}} & \text{para} \quad v > 20\text{m/s}, \end{cases}$$

e a força de Magnus proposta por Watts e Bahill:

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} C_{\mathrm{M}} \rho A R \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}\right) \quad \text{com} \quad C_{\mathrm{M}} = 1.$$

Use o método de Euler para obter uma solução numérica para a trajetória. Considere que a velocidade angular de rotação se mantém constante ao longo do voo. A massa volúmica do ar é $\rho = 1.225\,\mathrm{kg/m^3}$. Nestas condições, observar-se-á um desvio lateral? Para que lado? Qual o seu valor numérico?

[redacted]