Física Computacional
2020/2021

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Trabalho Prático 8

Métodos iterativos para sistemas de equações lineares

Resolução da equação de Laplace

Problema 8.1 Resolução de um sistema de equações lineares

Considere o sistema de 8 equações e 8 incógnitas obtido como condição de equilíbrio estático de uma armação metálica sujeita a 8 forças. As incógnitas são os módulos das forças.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontre soluções que satisfaçam a condição:

$$\frac{max\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|}{max\left|x_i^{(k)}\right|} < 10^{-7}$$

Usando como estimativa inicial de um vetor $x^{(0)}$ cujas componentes são todas igual 1, pelos métodos de

a) Jacobi;

b) Gauss-Seidel;

c) Sobre-relaxação sucessiva com $\alpha = 1.25$.

Registe o número de iterações usadas em cada método. Os algoritmos a usar encontram-se nos slides 7, 9 e 14 da Apresentação 8.

Problema 8.2 <u>Resolução da equação de Laplace</u>

O objetivo deste trabalho é determinar numericamente o potencial e o campo elétrico de um condensador constituído por duas superfícies condutoras que são muito compridas segundo a direção z. As duas superfícies são prismas quadrangulares ocos, de lados L e $2L$. Os eixos de ambos os prismas coincidem com o eixo dos zz. O potencial na superfície interior é $V = 1$ e na exterior é $V = 0$. Se as superfícies fossem cilíndricas, poderíamos fazer um cálculo muito simples, usando a lei de Gauss, mas com esta geometria isso não é possível.

Para simplificar, vamos considerar $L = 1$. É preciso criar uma matriz quadrada Vold com os valores do potencial em cada ponto de uma grelha regular. Como fazemos a aproximação de que o condensador tem um comprimento infinito, não temos que nos preocupar com a direção z. Numa fase inicial, sugere-se que use $h = \Delta x = \Delta y = 0.25$, para ser mais fácil verificar que a matriz foi bem construída e que as condições fronteira estão corretas. Para aplicar os métodos, baixe h. Não se esqueça que $L/2$ tem que ser sempre um múltiplo de h.

a) Aplique o método de relaxação de Jacobi (algoritmo no slide 25 da Apresentação 8). Para o critério de paragem, use um idêntico ao do problema anterior ou, preferencialmente,

$$\frac{\sqrt{\sum_{i,j}\left(V^{(k)}(i,j) - V^{(k-1)}(i,j)\right)^2}}{\sqrt{\sum_{i,j}\left(V^{(k)}(i,j)\right)^2}} < 10^{-7}$$

É muito importante que os pontos nas fronteiras mantenham sempre o seu valor fixo de potencial. Verifique que isso acontece no seu programa.

b) Use o método de Gauss–Seidel (algoritmo no slide 26 da Apresentação 8). Confirme que o número de iterações necessárias para atingir a convergência se reduz a aproximadamente
metade.

c) Use o método de sobre-relaxação sucessiva (algoritmo no slide 27 da Apresentação 5). Confirme que o número de iterações necessárias para atingir a convergência é mínimo para valores de α próximos de

$$\alpha = \frac{2}{1 + \pi/M}$$

Note que como os $V(i, j)$ da região interior não são atualizados, a matriz T é diferente da matriz T para qual se apresentou o raio espetral nas aulas teóricas. Neste caso, o α ótimo deve estar próximo mas será ainda um pouco diferente do aí apresentado. Encontre o valor ótimo de α (até às centésimas).

Problema 8.3 <u>Cálculo do campo elétrico e da capacidade do condensador do problema 8.2</u>

Sabemos que

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, V.$$

Pode usar a função **`gradient`** do MATLAB:

```
[Ex,Ey]=gradient(Vnew,h,h);

Ex=-Ex;

Ey=-Ey;

figure(3)

quiver(X,Y,Ex,Ey)
```

O resultado vai estar correto, com exceção dos pontos sobre a parede do condutor interno, onde a derivada do potencial é descontínua.

Para simplificar o cálculo da capacidade, vamos trabalhar em unidades reduzidas, em que $\varepsilon_0 = 1$. Sabemos que a capacidade por unidade de comprimento de um condensador cilíndrico oco muito comprido de diâmetro interno L e diâmetro externo $2L$ é $C_\lambda = 2\pi/\ln 2$

($C_\lambda \approx 9{,}065$). A capacidade por unidade de comprimento do nosso condensador não deve ser muito diferente. Uma maneira de a calcular é obter a carga por unidade de comprimento nas 4 paredes exteriores:

$$Q_\lambda = 4 \int_{1\,parede} \sigma \, dl \tag{1}$$

Se soubermos a carga nas paredes, poderemos calcular a capacidade:

$$C_\lambda = \frac{Q_\lambda}{\Delta V}$$

onde ΔV é a diferença de potencial entre as paredes do condensador. Só podemos calcular o integral se soubermos a densidade superficial de carga, mas ela pode ser facilmente obtida, pois numa interface condutor/dielétrico o campo no dielétrico está relacionado com a densidade superficial de carga no condutor através da relação

$$\sigma = \varepsilon_0 \, E \tag{2}$$

Como já calculou o campo elétrico, pode agora calcular Q_λ usando (2) e a rotina do Matlab **`trapz`** para fazer a integração em (1). Uma maneira alternativa de obter a capacidade é calcular o integral de volume do quadrado do campo elétrico e usar a relação

$$\frac{1}{2} \, C \, (\Delta V)^2 = \int_{vol} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \, E^2 \, dv$$

que nos dá a capacidade por unidade de comprimento na forma

$$C_\lambda = \frac{1}{(\Delta V)^2} \int_{area} \varepsilon_0 \, E^2 \, dA$$