Universidade de Aveiro
Departamento de Física

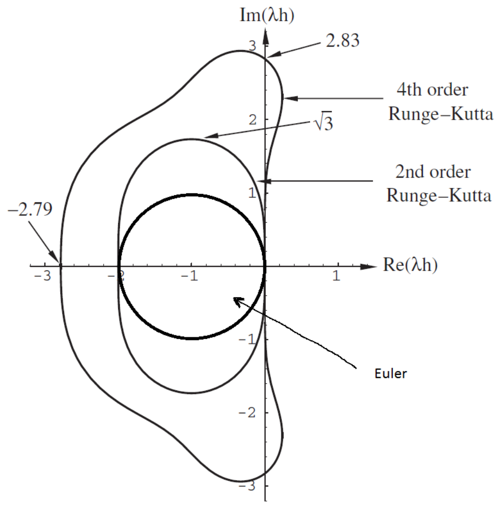
1º Teste Teórico

Física Computacional — 2015/2016

16 de maio de 2016 — Duração: 1h30

1. (7 val) Considere o seguinte sistema de equações diferenciais e uma figura que mostra a região de estabilidade dos métodos de Euler, Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem no espaço $(\lambda_r h, \lambda_i h)$

$$\begin{cases} \dfrac{dR_T}{dz} = i\sigma R_T + 2ik_{1b}S \\[2ex] \dfrac{dR_C}{dz} = i\sigma R_C + i\dfrac{k_{cb}}{2}S \\[2ex] \dfrac{dS}{dz} = i\dfrac{k_{1b}}{2}R_T + i\dfrac{k_{cb}}{2}R_C - i\sigma S\,, \end{cases}$$

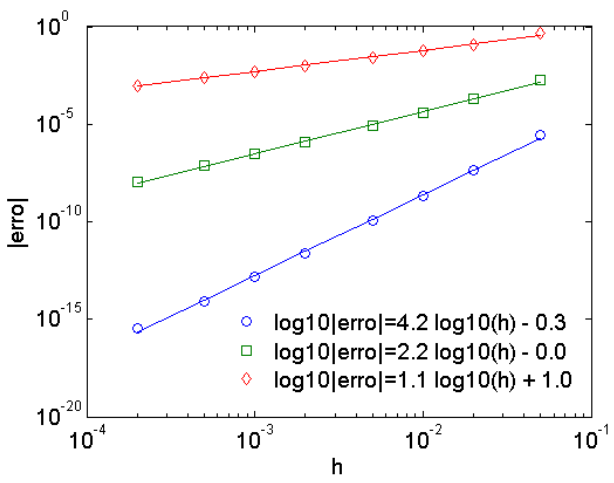


com σ, k_{1b} e k_{cb} reais e positivos.

a) Mostre que $i\sigma$ e $\pm i\xi/2$ com $\xi = \sqrt{4k_{1b}^2 + k_{cb}^2 + 4\sigma^2}$ são os valores próprios associados ao sistema.

b) Quais dos métodos referidos na figura apresentam estabilidade numérica quando aplicados a este sistema? Nos casos afirmativos, diga para que h's a estabilidade se verifica. Encontre a(s) expressão(ões) para h sem efetuar os cálculos finais.

2. (7 val) Considere o gráfico loglog do erro versus passo para três métodos diferentes aplicados à mesma equação diferencial. A legenda tem as expressões das retas de ajuste.



a) Distinga erro local de erro global.

b) Usando a informação presente no gráfico, o que pode dizer quanto à ordem de cada método? Justifique.

c) Se pretendessemos um erro máximo de 10^{-6}, qual o h máximo que deveríamos usar em cada método? Faça leituras no gráfico ou encontre as expressões para h sem efetuar os cálculos finais.

3. (6 val) Considere a equação diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0,$$

com l inteiro. Para l ímpar, as condições fronteira são $y(-1) = -1$ e $y(1) = 1$.

a) Deduza a expressão para a aproximação da primeira derivada por diferenças finitas centradas e prove que é uma aproximação de 2ª ordem.

b) Escreva a matriz e vetor dos elementos independentes da equação acima para l ímpar usando diferenças finitas centradas para ambas as derivadas.

Formulário:

Condições de estabilidade

Euler	$\lvert 1 + \lambda h\rvert^2 \leq 1$
Runge–Kutta 2ª ordem	$\left\lvert 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right\rvert^2 \leq 1$
Runge–Kutta 4ª ordem	$\left\lvert 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6} + \frac{\lambda^4 h^4}{24}\right\rvert^2 \leq 1$