Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Exame Teórico de Recurso

Física Computacional — 2015/2016

5 de julho de 2016 — Duração: 2:30 horas

Justifique as suas respostas às perguntas.
Note que os símbolos a **negrito** representam vetores.

1. (5 val) Considere os seguintes problemas e diga qual o método numérico que usaria para os resolver. Note que em alguns dos casos pode aplicar-se mais que um método. Indique apenas um deles e dê uma justificação sucinta.

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -L < x < L, \quad u(x,0) = f(x), \quad u(-L,t) = a, \quad u(L,t) = b$

b) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} = -\dfrac{1}{(1+\epsilon y)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

c) $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = g(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$

$T(0,y) = T(1,y) = T_a, \quad T(x,0) = T_b, \quad \dfrac{\partial T}{\partial y}(x,1) = 0$

d) $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \alpha\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \beta u = f(x), \quad u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L$

e) $\dfrac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}z^2} + \left(ax - \dfrac{F^2}{1+F^2}\right)F = 0, \quad F(\pm L) = 0,$

e a desconhecido.

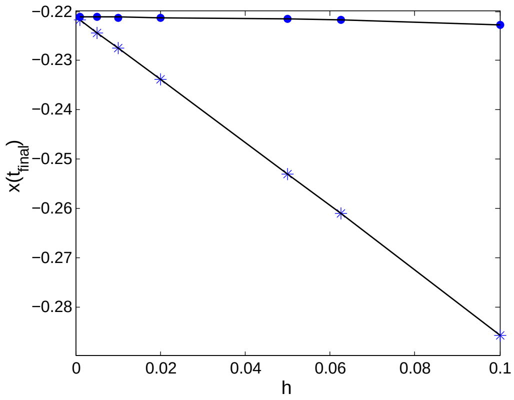
2. (4 val) A equação seguinte modela a distribuição de temperatura $T(r)$ numa resistência elétrica cilíndrica de raio R

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} + \frac{Q}{\lambda} = 0\,.$$

a) Derive a expressão da aproximação da 2ª derivada usando diferenças finitas centradas, de forma a reconhecer a ordem da mesma.

b) Por uma questão de simetria, sabe-se que a derivada da temperatura em ordem a r é nula para $r = 0$. Num caso particular, sabe-se que a temperatura na superfície da resistência é $T(R) = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Aproxime a equação acima usando diferenças finitas centradas e diga qual a matriz e o vetor de elementos independentes associados a essa aproximação.

3. (2.5 val) Foram utilizados dois métodos de ordens diferentes para resolver um problema de valor inicial. O valor de $x(t_{\text{final}})$ em função do passo, para cada cada método, está representado no gráfico ao lado. Diga, justificando, qual o método de maior ordem.



4. (4.5 val) Considere a equação de Laplace aplicada a um domínio quadrado discretizado numa matriz 5×5. A tabela seguinte representa essa matriz com os valores fronteira no exterior e estimativas iniciais nulas nos pontos interiores.

1	0.75	0.5	0.25	0
0.75	0	0	0	0.25
0.5	0	0	0	0.5
0.25	0	0	0	0.75
0	0.25	0.5	0.75	1

a) Determine os valores do potencial nos pontos interiores após a primeira iteração de Jacobi. Pode apenas enunciar os cálculos.

b) Determine os valores do potencial nos pontos interiores após a primeira iteração de Gauss–Seidel. Mais uma vez, pode apenas enunciar os cálculos.

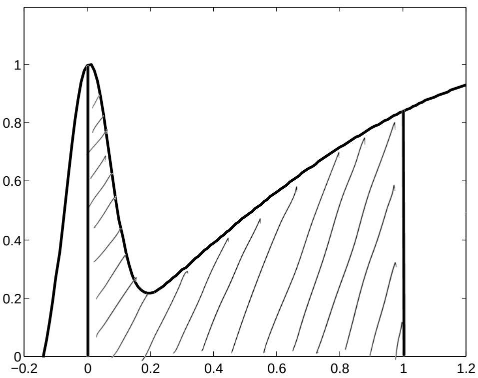
c) Porque é que nestes métodos nunca alteramos os valores na fronteira do domínio?

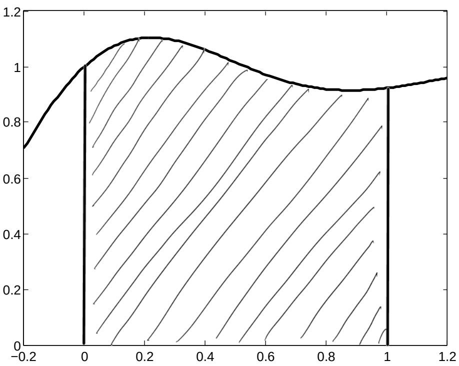
5. (4 val) O erro associado ao cálculo de integrais usando o método de Monte Carlo estudado nas aulas é dado por

$$e = D\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

onde σ é o desvio padrão da função, D é o domínio de integração e N é o número usado de pontos do domínio.

a) Considere os gráficos abaixo de duas áreas a determinar. Se usar o método de Monte Carlo para calcular as áreas usando o mesmo número de pontos, qual dos integrais apresentará maior erro? Porquê?





b) Para a mesma função obtivemos os seguintes valores para o seu integral no mesmo domínio, mas usando um número de pontos diferente, N_1 e N_2. Determine a relação entre N_1 e N_2

N	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	$\bar{I}$	σ_I
N_1	0.846	0.897	0.906	0.814	0.841	0.872	0.850	0.880	0.885	0.819	0.861	0.03
N_2	0.863	0.844	0.876	0.859	0.853	0.862	0.851	0.865	0.859	0.887	0.862	0.01

Formulário:

Discretização da equação de Laplace

$$V(i, j) = \frac{1}{4}\Big[V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1)\Big]$$