

PROJECT 3
TWO-DIMENSIONAL RANDOM WALKS
FIRST PASSAGE TIME AND SURVIVAL
PROBABILITY
LÉVY FLIGHTS

Vasco Costa - 97746

4 de Maio 2023

Part 1 - Two-dimensional Random Walks

Com esta parte do trabalho pretende-se analisar e simular *Random Walks* clássicas a duas dimensões com probabilidades de salto em qualquer uma das direções, cima, baixo, esquerda e direita, iguais a $1/4$.

A sua simulação pode ser relevante e é utilizada em diversos casos da vida real, tendo sido já utilizada para simular comportamentos em estuários bem misturados para retratar o transporte de partículas [6]. Este processo estocástico também já se tornou num conceito central na área da física estatística sendo aplicado a fenómenos como a propagação do calor e do som ou na difusão de luz [2, 10].

Task 1.1

Com esta tarefa pretendem-se visualizar trajetórias aleatórias que podem ser efetuadas por uma partícula a duas dimensões. Na Figura 1 são apresentadas duas vistas das mesmas 3 trajetórias, numa forma plana, 1a, e em função de cada salto, 1b. Destas figuras visualizam-se os percursos aleatórios de 100 saltos, distinguidos pelas suas cores. Constata-se que as partículas por vezes andam numa direção e depois voltam atrás. Não aparentando que nenhuma das partículas tenha terminado na posição de origem, $(x, y) = (0, 0)$.

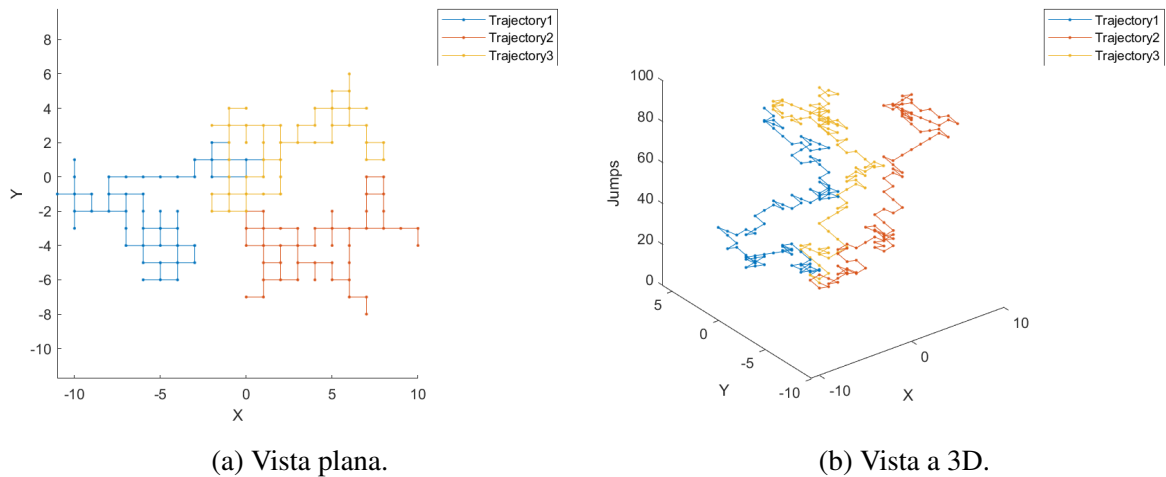


Figura 1 – Trajetórias de partículas a seguirem uma *Random Walk* a duas dimensões de 100 saltos iniciando-se no ponto $(0,0)$.

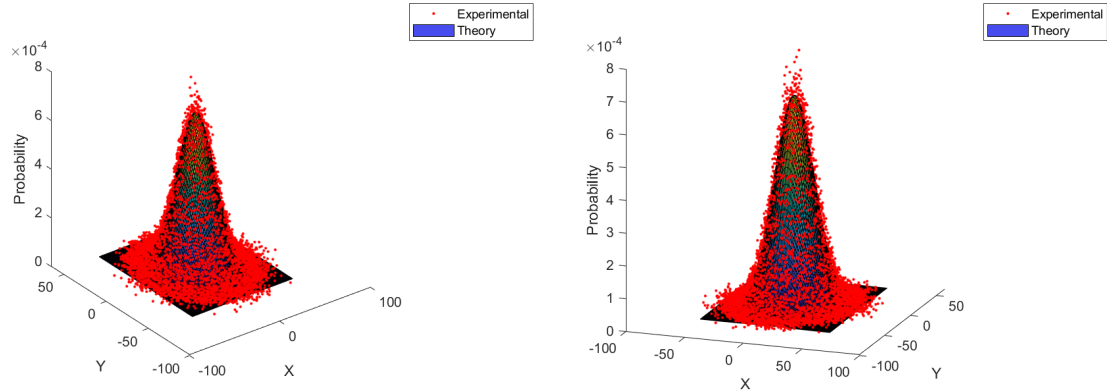
Task 1.2

Neste ponto o pretendido é o cálculo da probabilidade $P(x, y; t)$, ou seja, a probabilidade de encontrar a partícula após t saltos. No instante inicial, $t = 0$, esta encontra-se na posição $(x, y) = (0, 0)$.

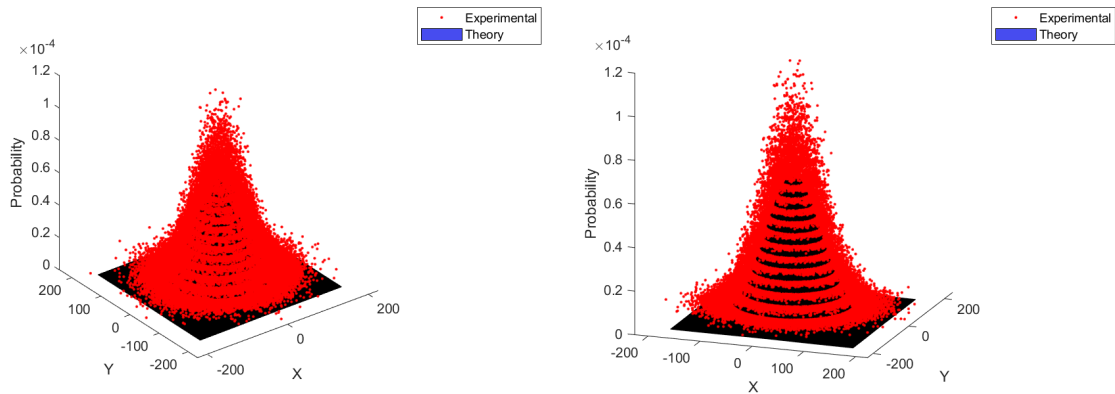
Na Figura 2 são apresentados os gráficos de probabilidade para diferentes valores de t fazendo 100.000 repetições tanto para as vezes pares como ímpares para efetuar a média dos

mesmos. A vermelho são apresentados os resultados obtidos e por de baixo, com diferentes cores, 2a, e a preto, 2b e 2c, a superfície teórica que se obtém através da equação 1.

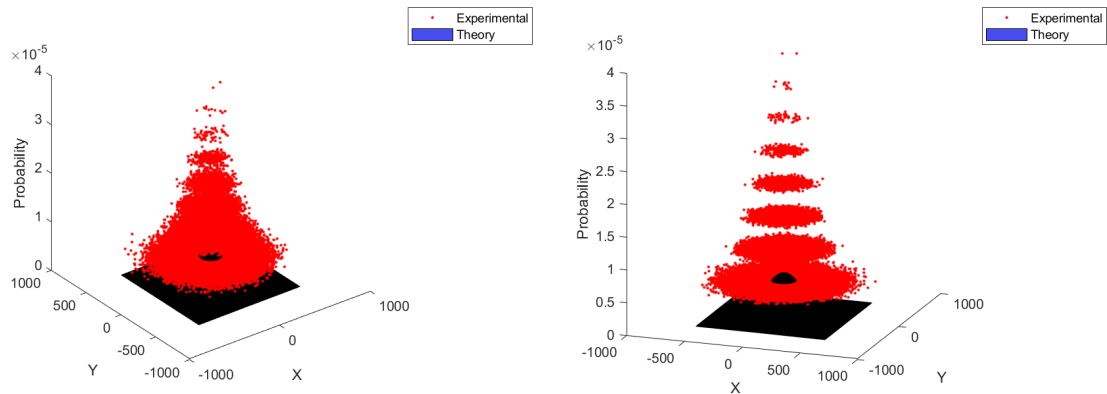
$$P(x, y; t) = \frac{1}{\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{t}} \quad (1)$$



(a) $t = 500$ e $t = 501$.



(b) $t = 5.000$ e $t = 5.001$.



(c) $t = 50.000$ e $t = 50.001$.

Figura 2 – Duas vistas da superfície representativa do valor da probabilidade $P(x, y; t)$ para diferentes valores de t . A vermelho os valores obtidos experimentalmente e o restante como sendo o esperado teoricamente, equação 1.

Através de uma análise gráfica é possível afirmar que os resultados experimentais seguem a forma da distribuição teórica, uma gaussiana a duas dimensões, expandindo-se para todos os lados a igual ritmo ao afastar-se do ponto de origem, mesma probabilidade de salto em qualquer uma das direções. É também visível que os valores obtidos são numericamente superiores, algo que seria expectável uma vez que a probabilidade obtida experimentalmente é calculada na amostra, conjunto finito de pontos que não explora o espaço de fase todo, e a teórica é no espaço todo. Logo para obedecer às condições de normalização é necessário que os pontos da amostra tomem um peso superior por falta de pontos do restante espaço.

Com o aumentar de t torna-se claro que existem mais possibilidades para os pontos, o espaço de fase aumenta, logo seria também necessário que ocorressem mais repetições, mais que as 100.000 feitas, para que este pudesse ser todo explorado. Para um t menor, 2a, como este consegue quase todo ser explorado verifica-se uma maior proximidade entre os resultados obtidos e o expectável teoricamente.

Da análise da fórmula da função de densidade de probabilidade, equação 1, é possível chegar às condições de normalização, $\sum_{x,y} \bar{P}(x, y; t) = 1$, à média das posições finais, $\sum_{x,y} x \bar{P}(x, y; t) = \sum_{x,y} y \bar{P}(x, y; t) = 0$, e à variância, $\sum_{x,y} (x^2 + y^2) \bar{P}(x, y; t) = t$. Na Tabela 1 apresentam-se os resultados que seriam esperados obter teoricamente, *Esperado*, e os que foram obtidos experimentalmente, *Obtido*.

Tabela 1 – Valores esperados e obtidos consoante o t número de saltos com 100.000 partículas para cada um dos par e ímpar valores.

t	Normalização		Posições médias finais(x,y)		Variância	
	Esperado	Obtido	Esperado	Obtido	Esperado	Obtido
500	1	1	(0, 0)	(0,05725, 0,06863)	[500 501]	501,0622
5.000	1	1	(0, 0)	(0,14725, -0,06223)	[5.000 5.001]	4.986,9621
50.000	1	1	(0, 0)	(-0,31951, 0,43148)	[50.000 50.001]	49.988,8747

Atentando aos valores obtidos e aos que seriam esperados numericamente verifica-se que os que foram obtidos não são exatamente iguais aos teoricamente esperados. Contudo, são próximos dos que seriam de esperar e repetindo as simulações verifica-se a mesma tendência pelo que em média o resultado seria muito próximo. Na Tabela 2 são apresentados os resultados médios com o desvio padrão respetivo da repetição de 50 simulações anteriores, código disponível em `task_1_2_extra.m`. Verificando-se que os resultados teóricos estão no intervalo do valor médio e do desvio.

Concluindo, considera-se que as simulações numéricas são representativas da fundamentação teórica. No entanto, para existir uma maior proximidade entre ambas as simulações irão requerer muitas repetições, mais que os casos possíveis. Não garantido que os casos mais raros, os pontos à distância t , sejam obtidos.

Tabela 2 – Valores médios com o desvio padrão em 50 repetições da simulação de 100.000 partículas para cada um dos par e ímpar valores de t em diferentes intervalos.

t	[500 501]		[5.000 5.001]		[50.000 50.001]	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
Normalização	1	1,07e-15	1	3,2232e-15	1	1,2488e-16
x médio	-0,00468	0,039458	-0,029795	0,1038	-0,014608	0,32083
y médio	0,004352	0,034215	-0,0024763	0,10739	0,030027	0,38076
Variância	500,3676	1,3495	4998,8058	9,0839	49998,7917	104,0828

Part 2 - First passage time and survival probability

Este tópico de análise baseia-se na probabilidade de sobrevivência de uma partícula a seguir uma *Random Walk* a duas dimensões. A sobrevivência de uma partícula depende do percurso que esta toma, ao chegar a um dado plano considera-se que esta fica presa.

Simulações como esta apresentam propósito em diversos contextos como na área da biologia molecular para a caracterização de micro-estruturas de uma forma não destrutiva. Alguns destes métodos para esse efeito fazem considerações de movimentos Brownianos que são limitados aleatoriamente por membranas, planos a $d - 1$ dimensões em d dimensões [9], como aqui se pretende estudar.

Task 2.1

Para esta análise considera-se uma barreira, x_b , em $x = -30$, em que as partículas ao chegarem a este plano ficam retidas e a *Random Walk* termina. Com 50.000 partículas que iniciam o percurso no ponto $(x, y) = (0, 0)$ efetuou-se a simulação, sendo os resultados apresentados na Figura 3. Considerando-se o limite de 50.000 saltos e sinalizando as que sobrevivem até esse número de saltos com o valor *NaN*. Os resultados foram de seguida colocados em intervalos de 10, $\Delta t = 10$. Calculando-se a probabilidade $F(t)$ de atingir a fronteira no intervalo $(t, t + \Delta t]$ após assim como a probabilidade de sobrevivência, $S(t)$, ou seja a probabilidade da partícula não atingir a barreira, em função de t . A partir da probabilidade F é possível calcular a probabilidade de sobrevivência, $S(t)$, uma vez que esta a cada intervalo pode ser vista como a soma da probabilidade de sobrevivência da partícula sobreviver aos 50.000 saltos mais a restante probabilidade de $F(t)$, ou seja, $S(t) = \sum_{i=t+\Delta t}^{\infty} F(i)$.

As predições teóricas levam à probabilidade $F(t) = \frac{|x_b - x_0|}{2\sqrt{\pi Dt^3}} \exp\left(-\frac{(x_b - x_0)^2}{4Dt}\right)$ que pode ainda ser aproximado a $F(t) \approx \frac{|x_b - x_0|}{2\sqrt{\pi Dt^3}}$ em que $x_0 = 0$ por ser o ponto inicial e $x_b = -30$ por ser a posição fronteira da barreira, sendo o coeficiente de difusão $D = 1/4$. Da mesma forma a probabilidade de sobrevivência $S(t)$ de uma partícula pode ser vista como $S(t) = \text{erf}\left(\frac{|x_b - x_0|}{2\sqrt{Dt}}\right)$ podendo ser aproximado como $S(t) \approx \frac{|x_b - x_0|}{\sqrt{\pi Dt}}$.

Analisando os resultados experimentalmente obtidos e aos que seriam esperados tanto te-

oricamente como as suas aproximações verifica-se que existe uma semelhança em relação aos resultados obtidos e os que seriam esperados, Figura 3. Sendo a tendência de ambos os gráficos iguais, F , crescente e depois decrescente, e S , monótona decrescente. Existindo uma variação na escala, 3a, como já seria expectável devido aos valores serem obtidos com a amostra, e não com o espaço todo como o teórico, que não é todo explorado. Uma maior proximidade pode ser obtida aumentando a amostragem. Ainda assim a probabilidade de sobrevivência S , 3b, segue a tendência teórica muito proximamente encontrando-se as linhas sobrepostas devido a ter-se somado a probabilidade restante de F , de serem necessários mais saltos que o limite imposto.

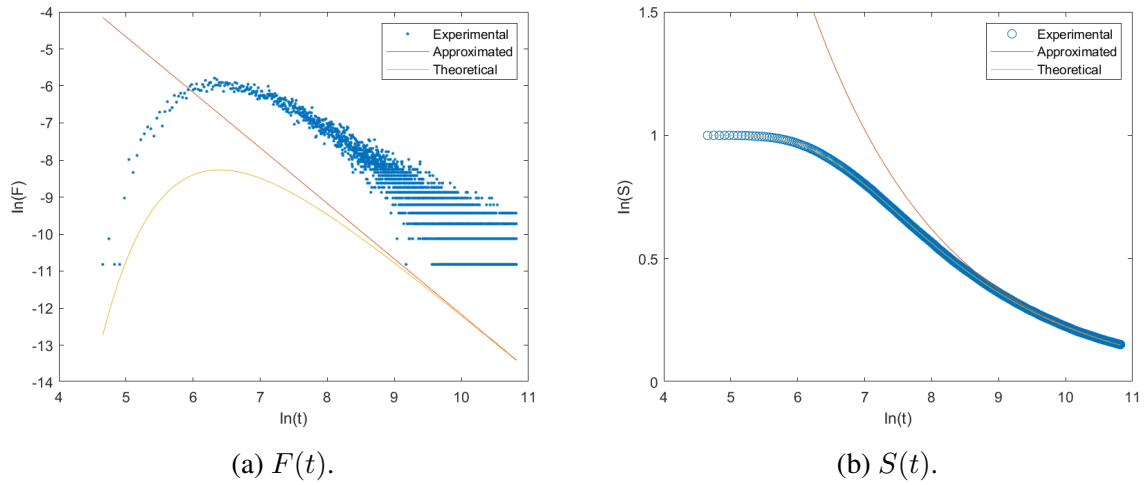


Figura 3 – Probabilidades tanto teóricas como obtidas experimentalmente: de atingir a barreira, $F(t)$, e de sobrevivência, $S(t)$, para a fronteira $x_b = -30$ para 50.000 partículas considerando 50.000 como o número de saltos limite.

Aumentando o número de simulações e do limite de saltos de 50.000 para 500.000 obtém-se a Figura 4. As diferenças para a anterior são pouco significativas. Constatando-se uma aproximação dos valores da probabilidade F à linha teórica e aumentando a amostragem para os casos mais à esquerda antes de se atingir o máximo, ocorrendo este no mesmo local que em 3a.

Alterando a barreira x_b para $x = -50$ obtém-se os resultados da Figura 5. Nesta foram feitas 50.000 repetições e limitado o número de saltos para 50.000. Assim estes resultados podem-se comparar aos da Figura 3. Daqui consegue-se ter a percepção que o máximo se desloca para a direita do eixo dos xx com o aumentar da distância da barreira à origem, 3a. Verificando-se com as simulações que para as posições diferentes da barreira o valor máximo da probabilidade $F(t)$ acontece quando $t = 1665$ para $x_b = -50$ e $t = 605$ para $x_b = -30$.

Em resposta a uma das questões propostas no enunciado: Este máximo pode-se presumir que aconteça onde acontece devido à posição inicial da partícula, x_0 , ao coeficiente de difusão D e ao local da barreira, x_b . Como verificado, ao ter a barreira mais longe, mais tarde, a um t superior, este máximo se dá, como se poderia intuir uma vez que também só é possível atingir a barreira a um t mais avançado. A posição inicial x_0 também é então influente uma vez que o t número de saltos necessários para a alcançar também altera, ou seja, a distância entre a barreira

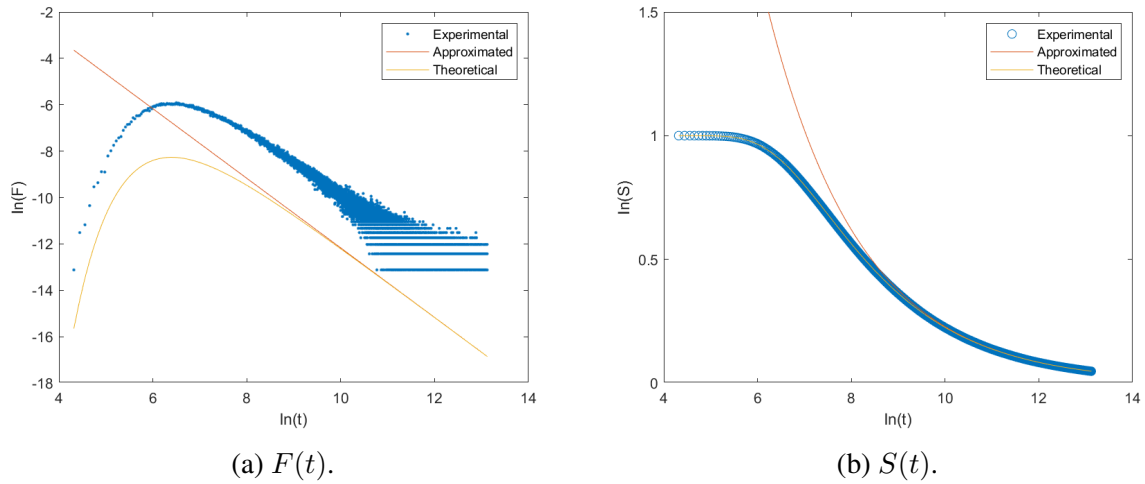


Figura 4 – Probabilidades tanto teóricas como obtidas experimentalmente: de atingir a barreira, $F(t)$, e de sobrevivência, $S(t)$, para a fronteira $x_b = -30$ para 500.000 partículas considerando 500.000 como o número de saltos limite.

e a posição inicial. Da mesma forma o coeficiente de difusão D leva a que o pico aconteça mais cedo se este for maior ou mais tarde se for inferior.

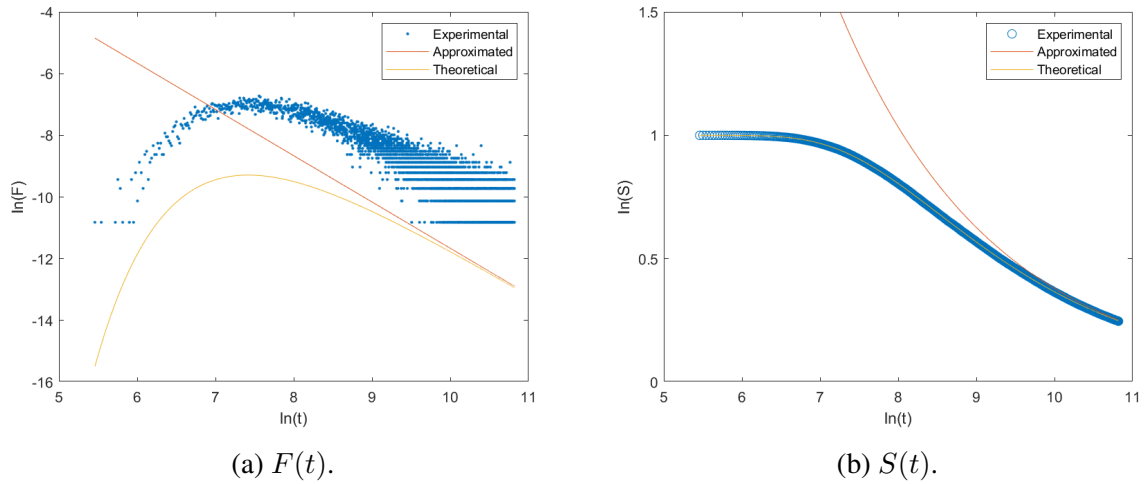


Figura 5 – Probabilidades tanto teóricas como obtidas experimentalmente: de atingir a barreira, $F(t)$, e de sobrevivência, $S(t)$, para a fronteira $x_b = -50$ para 50.000 partículas considerando 50.000 como o número de saltos limite.

Em resposta à outra questão do enunciado: Pretendendo-se identificar onde se encontra a barreira estando na posição inicial, $(0, 0)$. A sugestão seria de se apenas medirem as partículas que terminam nesta coordenada, ou seja, com o mesmo valor de t e distinguindo-as em relação à orientação de onde estas chegam, se a posição anterior era em cima, em baixo, à esquerda ou à direita.

Esta simulação foi efetuada com o ficheiro, também entregue, `task_2_1_extra.m`. Na Figura 6 são apresentadas a média de 50 contagens/simulações com as respetivas barras de erro para o caso sem barreira, 6a, e para os casos com a barreira em $x_b = -5$ e $x_b = 5$, 6b e 6c,

respetivamente, feita para os t de 500 e 501 com 100.000 partículas em cada simulação.

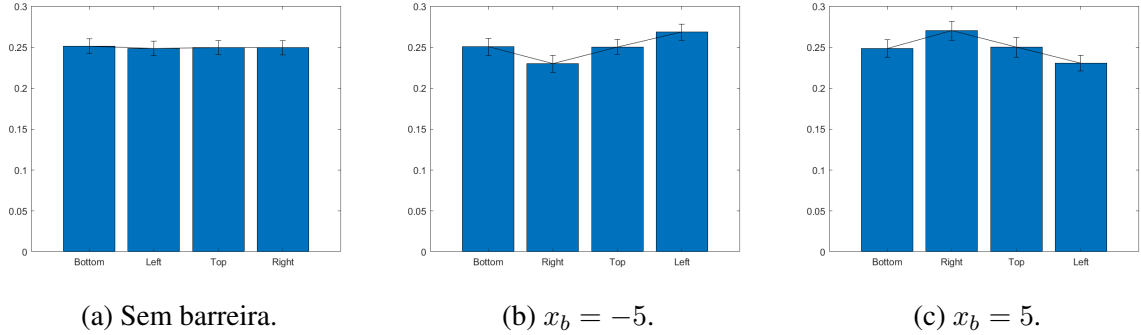


Figura 6 – Proporção das contagens médias da direção de onde as partículas vieram para a origem $(0, 0)$ para os $t = 500$ e $t = 501$ para 100.000 partículas, repetindo-se a simulação 50 vezes e introduzindo as respetivas barras de erro consoante não ter barreira ou a posição x_b a que esta se encontra.

Daqui verifica-se que existe alguma diferença média entre todos os casos. No caso em que não existe barreira, 6a, é equiprovável que a partícula venha de qualquer um dos lados. O mesmo não se verifica para os restantes casos analisados, caso a barreira esteja para o lado direito, $x_b = -5$, 6b, em média menos partículas vindas do lado direito se verificam e a mesma situação ocorre quando esta é colocada à esquerda, $x_b = 5$, 6c.

Para verificar que este não era uma situação particular aumentou-se o estudo para os t de 5.000 e 5.001 e mudou-se a barreira para as posições de $x_b = -10$ e $x_b = 10$. Sendo estes resultados apresentados em 7. Estes aqui já são muito mais próximos mas ainda mostram, em média, alguma diferença. Resultando em que este método seria mais difícil de utilizar para perceber a direção da barreira em algumas situações. Ainda assim, esta técnica com um grande número de simulações mostrar-se-ia como sendo funcional como se tendo verificado em 6.

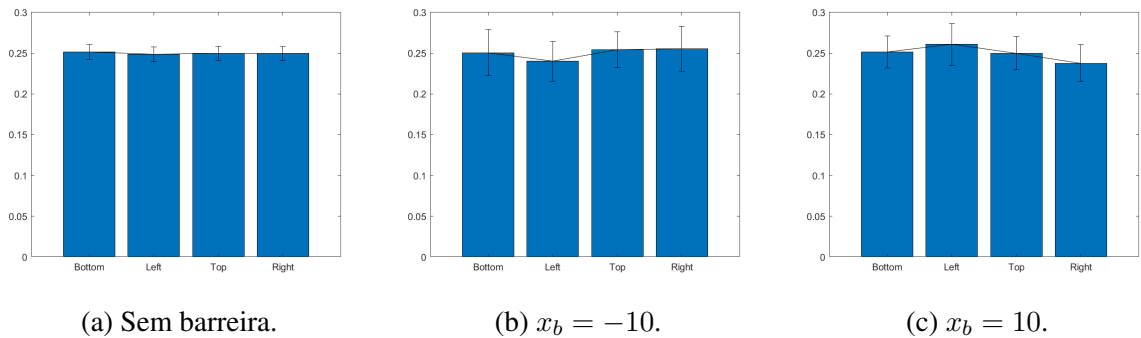


Figura 7 – Proporção das contagens médias da direção de onde as partículas vieram para a origem $(0, 0)$ para os $t = 5.000$ e $t = 5.001$ para 100.000 partículas, repetindo-se a simulação 50 vezes e introduzindo as respetivas barras de erro consoante não ter barreira ou a posição x_b a que esta se encontra.

Part 3 - Lévy flights

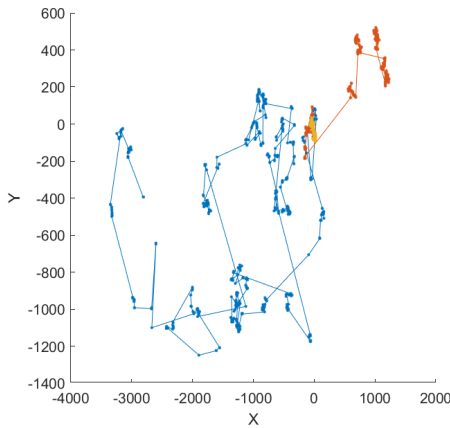
Esta secção é dedicada ao estudo dos *Lévy flights* que serão também denominados por saltos de Lévy. Este é um tipo de *Random Walk* a duas dimensões que apresenta variação no comprimento do salto por oposição aos dos pontos anteriores que eram de comprimento unitário [2]. Variando também na direção que não necessita de ser estritamente para cima, baixo, esquerda ou direita como em Part 2, sendo a direção e o comprimento do salto independentes entre si, isotrópicos.

O comprimento dos saltos segue a distribuição de Lévy em que $P(l) = Cl^{-\mu}$ onde C é a constante de normalização para $l_{min} < l < l_{max}$, se $l_{min} = 1$, $C = \frac{\mu-1}{1-l_{max}^{1-\mu}}$.

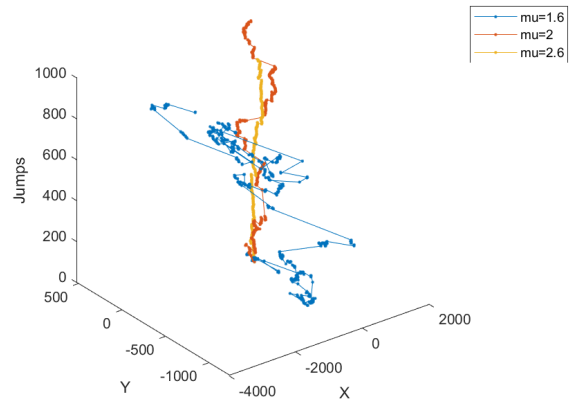
Estes são considerados por alguns como sendo uma das melhores estratégias para efetuar a procura aleatória em ambientes desconhecidos, já tendo sido verificado o seu uso por muitas espécies animais. O ser humano não é exceção e também adota estes comportamentos [1, 4]. Ou até eventos na natureza, como o comportamento de alguns terremotos [5].

Task 3.1

Simulando 1000 saltos de Lévy para os valores de $\mu = 1.6, 2$ e 2.6 , sendo $l_{max} = 1000$ é possível obter a Figura 8. Nesta apresentam-se 3 trajetórias de saltos de Lévy com estas condições apresentadas, 8a e 8b, tanto numa vista plana como em relação a cada salto, respetivamente. Daqui é possível verificar que consoante o valor de μ saltos de maior ou menor comprimento acontecem.



(a) Vista no plano.



(b) Trajetória em função dos saltos.

Figura 8 – Trajetórias de 1000 saltos de Lévy com $l_{max} = 1000$ para diferentes valores de μ .

Comparando estes saltos de Lévy com as *Random Walk* a duas dimensões, considerando o mesmo número de saltos, 1000, obtém-se a Figura 9. Daqui verifica-se que existe uma grande diferença numérica. Em particular em 9b tem-se uma maior perceção da separação que $\mu = 1.6$ tem da linha central vertical que as restantes trajetórias seguem.

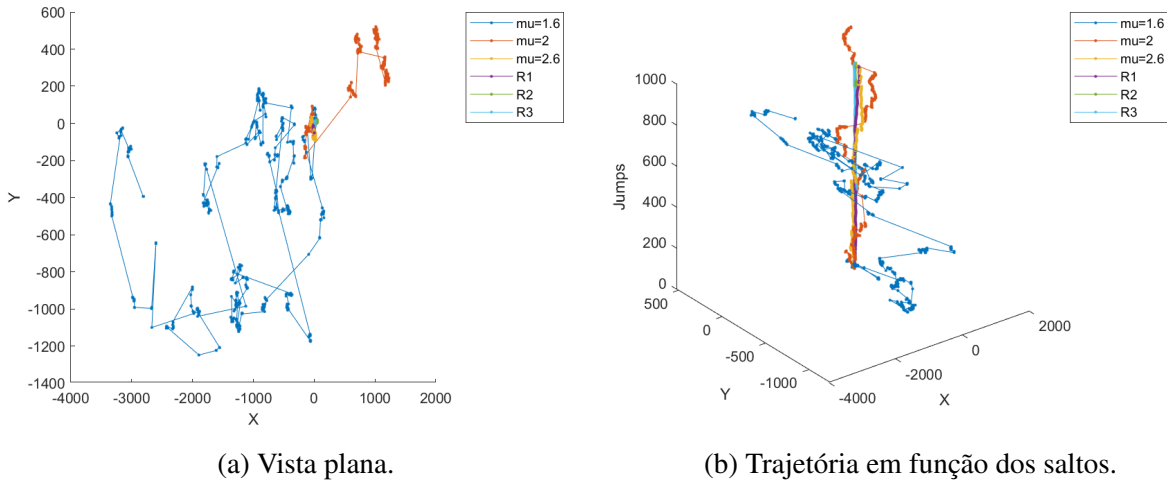


Figura 9 – Trajetórias de 1000 saltos de Lévy com $l_{max} = 1000$ para diferentes valores de μ com 3 trajetórias R de *Random Walks* de também 1000 saltos.

Devido às grandes diferenças que se verificam entre os dois tipos de trajetórias e dado que um valor de μ inferior leva a saltos de maior dimensão apresenta-se na Figura 10. A trajetória de maior valor de μ , 2.6, e as trajetórias das *Random Walk*. Isto é apresentado para se conseguirem comparar melhor os dois tipos sem que a escala numérica fosse tão impeditiva.

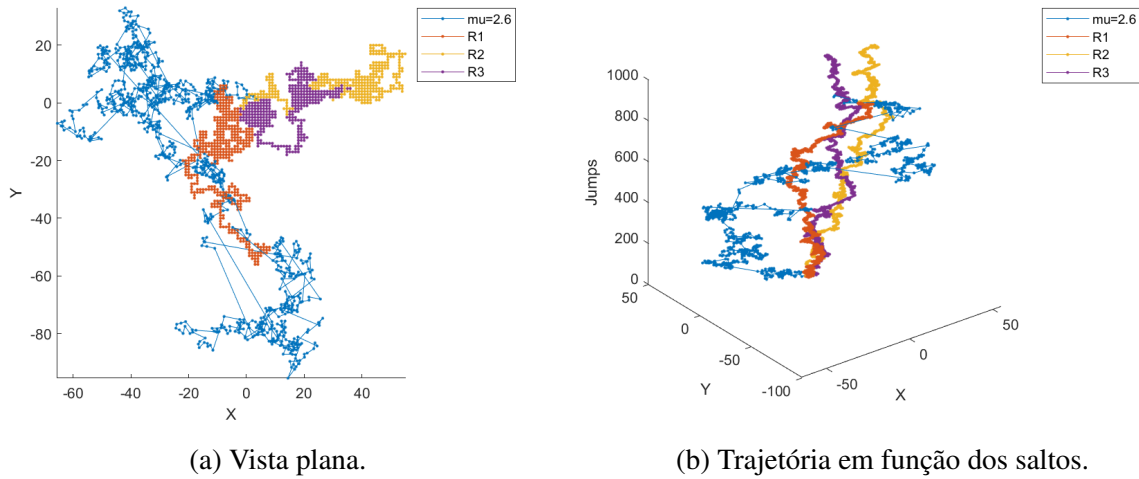


Figura 10 – Trajetórias de 1000 saltos de Lévy com $l_{max} = 1000$ para o valor de $\mu = 2.6$ com 3 trajetórias R de *Random Walks* de também 1000 saltos.

Analisando assim as trajetórias aqui apresentadas, em particular em 10 conseguem-se verificar os diferentes padrões que os diferentes tipos de salto resultam. Com os saltos de Lévy a apresentarem pontos do espaço mais distantes com um menor número de saltos e que estes apresentam zonas de maior foco dispersas entre si, sendo as *Random Walk* mais agrupadas.

Task 3.2

Efetuada a simulação de 1.000.000 de l valores através da equação 2 em que x segue uma distribuição uniforme entre 0 e 1 para os valores de μ da Task 3.1 com o valor de $l_{max} = 1000$ é possível obter os histogramas apresentados na Figura 11. Efetuando a sobreposição, a vermelho, da distribuição P de saltos de Lévy, $P(l) = Cl^{-\mu}$, em que $C = \frac{\mu-1}{1-l_{max}^{1-\mu}}$, verifica-se que os resultados experimentais seguem a linha teórica.

$$l(x) = (1 - x(1 - l_{max}^{1-\mu}))^{\frac{1}{1-\mu}} \quad (2)$$

Analisando os gráficos conclui-se também o que já se conseguiu retirar de Task 3.1 que com o aumentar do valor de μ existe a tendência a ocorrerem mais saltos de menor comprimento. Existindo sempre uma tendência monótona decrescente no que toca ao comprimento do salto, ou seja, os saltos de maior comprimento são menos frequentes.

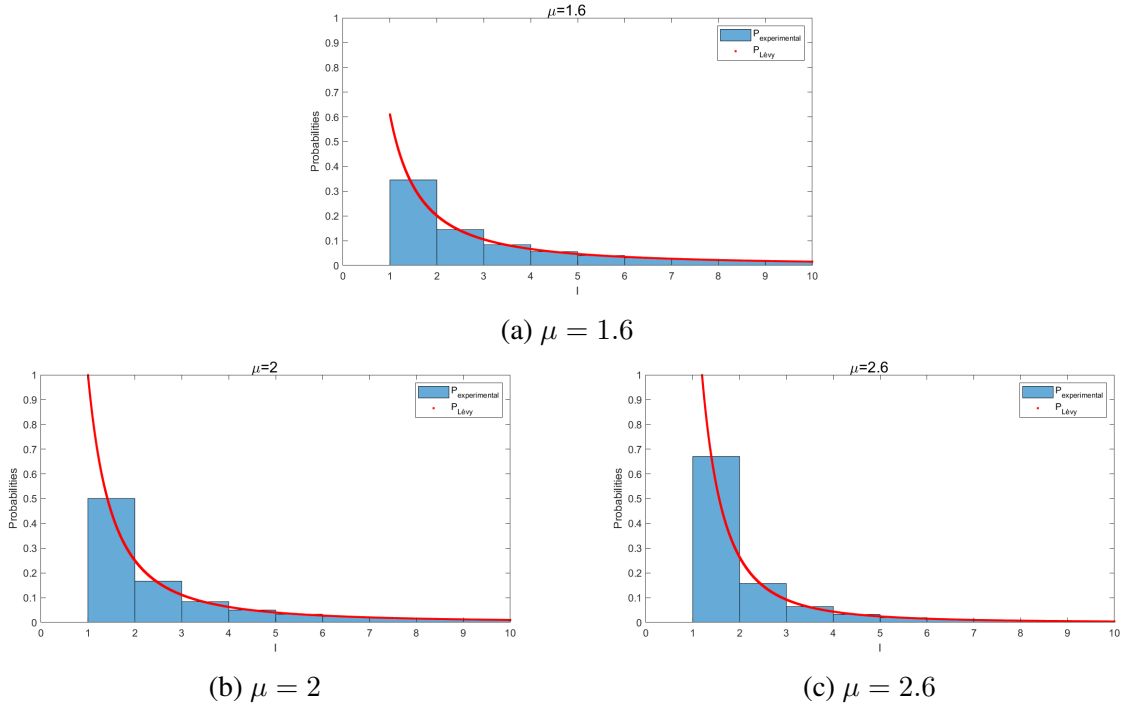


Figura 11 – Comparativo do histograma de 1.000.000 de l valores da equação 2 com a linha teórica esperada para a distribuição de saltos de Lévy para diferentes valores de μ com $l_{max} = 1000$.

Task 3.3

Transpondo as simulações aqui realizadas para uma aplicação no mundo real diversas situações podem ser consideradas como o comportamento animal. Um exemplo seria a procura de comida por um tubarão no oceano.

Caso o alimento se encontrasse espalhado homogeneamente por todo o espaço qualquer uma das estratégias iria apresentar sucesso para o fim desejado mas cada uma teria as suas vantagens

e desvantagens. Sendo seguida uma *Random Walk* de salto unitário a energia despendida seria menor e diversos pontos seriam visitados perto da origem com a posição final, ao instante t , a ter tendência a ser perto de onde iniciou o percurso. Na situação de ser tomada uma forma de saltos de Lévy esta iria levar a maiores comprimentos deslocados, pelo que mais energia seria usada e iria ignorar muito alimento pelo caminho, considerando que este não se alimenta entre saltos.

Na Figura 12 é apresentado o gráfico das probabilidades para as posições finais de 100.000 saltos de Lévy para 100.000 partículas arredondados às dezenas de $l_{max} = 1000$ e para diferentes valores de μ . Assim podem-se comparar estes com a Figura 2. Como se verifica, ao final do tempo as escalas são em ordens de grandeza diferentes para as posições finais.

Assim o tubarão ao fazer este tipo de percurso irá percorrer muito mais espaço e assim não irá esgotar o alimento ao redor da sua posição inicial. Algo que poderia acontecer com uma *Random Walk* típica de deslocamento unitário, ao não se considerar a deslocação do alimento para o pé deste. Contudo, a distância que é percorrida de cada vez pode ser energeticamente ineficiente e acabar por ser mais rentável tomar-se uma *Random Walk* clássica.

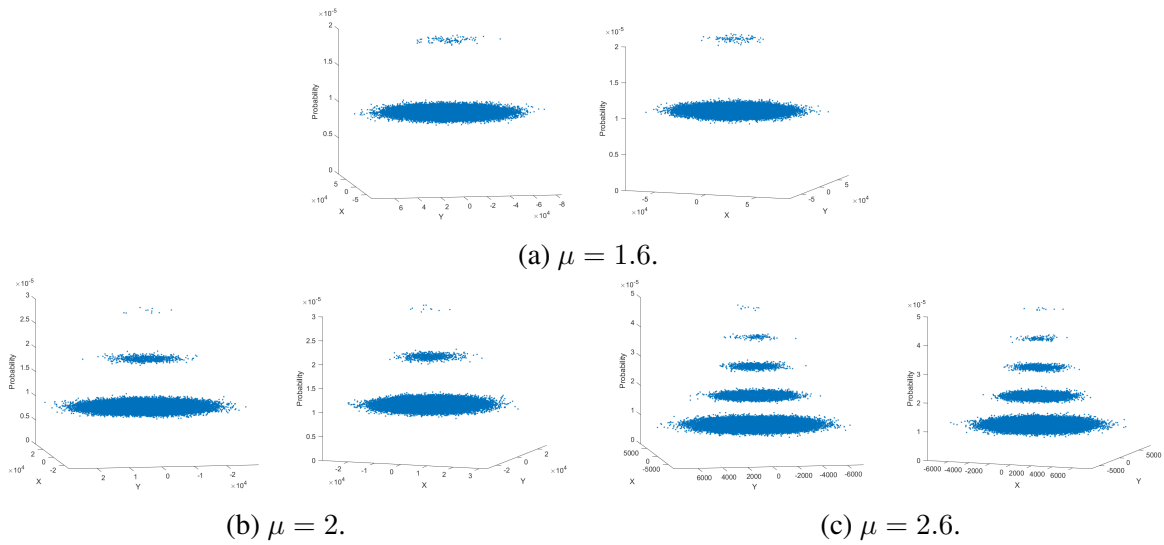


Figura 12 – Duas vistas de cada uma das probabilidades de posição após 100.000 saltos de Lévy de 100.000 partículas $l_{max} = 1.000$ para diferentes valores de μ , sendo as posições arredondadas às dezenas.

Contudo, caso a situação fosse da existência de cardumes a melhor solução iria acabar por ser a dos saltos de Lévy uma vez que ao realizar uma *Random Walk* este iria estar a tomar uma abordagem de ficar à espera pelo alimento em vez de ir atrás dele devido à pouca extensão que é percorrida. Inclusive, o percurso seguido nas Figuras 8, 9 e 10 pelos saltos de Lévy segue a ideologia de efetuar um salto grande, procurar nas redondezas do ponto alcançado e voltar a efetuar uma grande deslocação, sendo assim uma melhor estratégia para encontrar e alimentar-se de diversos cardumes. Uma *Random Walk* clássica é apenas eficaz para o movimento de alimentação já dentro de um cardume e não para efetuar a procura do mesmo.

Este facto é ainda mais evidenciado na natureza em que é algo que acontece mesmo, já tendo sido estudado [8]. Contudo, outros estudos discordam relativamente à eficiência do mesmo em comparação a movimentos Brownianos. Isto por se ter o ambiente envolvente em consideração e pela dificuldade que é reconhecer os padrões de cada [3]. Com estudos estatísticos a invalidarem conclusões anteriores que afirmam que o que se pensava que eram saltos de Lévy são outras distribuições [7].

Referências

- [1] Andrea Baronchelli e Filippo Radicchi. “Lévy flights in human behavior and cognition”. Em: *Chaos, Solitons & Fractals* 56 (2013). Collective Behavior and Evolutionary Games, pp. 101–105. ISSN: 0960-0779. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2013.07.013>.
- [2] Pierre Barthelemy, Jacopo Bertolotti e Diederik S. Wiersma. “A Lévy flight for light”. Em: *Nature* 453.7194 (mai. de 2008), pp. 495–498. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/nature06948](https://doi.org/10.1038/nature06948).
- [3] Simon Benhamou. “HOW MANY ANIMALS REALLY DO THE LÉVY WALK?” Em: *Ecology* 88.8 (2007), pp. 1962–1969. DOI: <https://doi.org/10.1890/06-1769.1>.
- [4] Dirk Brockmann, Lars Hufnagel e Theo Geisel. “The scaling laws of human travel”. Em: *Nature* 439.7075 (2006), pp. 462–465.
- [5] Alvaro Corral. “Universal earthquake-occurrence jumps, correlations with time, and anomalous diffusion”. Em: *Physical review letters* 97.17 (2006), p. 178501.
- [6] Konstantina Dimou. “Simulation of estuary mixing using a two-dimensional random walk model”. Tese de dout. Massachusetts Institute of Technology, 1989.
- [7] Andrew M. Edwards. “Overturning conclusions of Lévy flight movement patterns by fishing boats and foraging animals”. Em: *Ecology* 92.6 (2011), pp. 1247–1257. DOI: <https://doi.org/10.1890/10-1182.1>.
- [8] Andrea Kölzsch et al. “Experimental evidence for inherent Lévy search behaviour in foraging animals”. Em: *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 282.1807 (2015), p. 20150424. DOI: [10.1098/rspb.2015.0424](https://doi.org/10.1098/rspb.2015.0424).
- [9] Dmitry S. Novikov et al. “Random walks with barriers”. Em: *Nature Physics* 7.6 (jun. de 2011), pp. 508–514. ISSN: 1745-2481. DOI: [10.1038/nphys1936](https://doi.org/10.1038/nphys1936).
- [10] Morikazu Toda et al. *Statistical physics II: nonequilibrium statistical mechanics*. Vol. 2. Springer Science & Business Media, 1991.