universidade de aveiro theoria poiesis praxis

Simulação & Modelação

(2014-2015)

Proposta de Resolução do 1.º Teste

30 de abril de 2015

Turma P8 **Versão D**

Cotações:

Questão	1	2	**Total**
Pontos	85	115	200

1. **EXCEL**

   Uma bóia pentagonal flutua sobre a superfície de um líquido em $x = 0$ m. O líquido é percorrido por uma onda com perfil gaussiano do tipo $f(x) = 5\exp(-\frac{x^2}{20})$, que se move da direita para a esquerda com velocidade $v = 1$ m/s.

   Use o Excel para:

30 (a) Produzir a animação do movimento do impulso gaussiano, desde $x = -30$ m até $x = 30$ m e com intervalos de $\Delta t = 1$ s. Faça com que o máximo da onda esteja em $x = 30$ m em $t = 0$ s e que em $t = 60$ s, a animação seja reiniciada.

(a) **T01D30828.xlsx ! Onda**

30 (b) Representar um pentágono regular, em que todos os lados têm comprimento igual a 0.6 m.

(b) **T01D30828.xlsx ! Boia**

25 (c) Adicionar o pentágono à animação da superfície da onda, fazendo com que o centro do pentágono se mova de acordo com a posição do ponto em $x = 0$ m da onda.

(c) **T01D30828.xlsx ! Animação**

2. **MATLAB**

   Larga-se uma bola de $y = 55$ m. Pretende-se determinar quando esta embate num oscilador harmónico, que descreve um movimento que obdece à equação:

$$y(t) = A\sin(\omega t)$$

   onde $A = 1.9$ m e $\omega = 0.15$ rad/s.

40 (a) Usando o método do Ponto Fixo determine o instante em que os osciladores colidem.

(a) **T01D30828.m ! 1–20**

15 (b) Explique porque é que o método do Ponto Fixo tem o seu nome, e como deve escolher o parâmetro λ.

Resposta:

O Método Iterativo do Ponto Fixo permite, como o próprio nome indica, encontrar um ponto fixo de uma qualquer função $g(x)$. Isto é, permite encontrar um ponto no domínio da função $g(x)$ de tal modo que $g(c) = c$.

Para aplicar o método anterior na determinação de raizes, é necessário reescrever $f(x) = 0$ sob a forma de $x = g(x)$. A possibilidade abordada nas aulas foi $g(x) = x - \lambda f(x)$.

Para o Método Iterativo do Ponto Fixo convergir $|g'(x)| < 1 \Rightarrow |1 - \lambda f'(x)| < 1$, assim a escolha de λ deve ter em conta que:

$$0 < \overset{\text{o sinal é importante!}}{\lambda} f'(x) < 2 \tag{1}$$

Como nem sempre conhecemos a derivada da função, a determinação do intervalo de convergência (λ) é dificil, logo o método é aplicado geralmente de forma empirica. Esta análise é válida quando estamos suficientemente perto do ponto fixo.

25 (c) Desenvolva uma animação do sistema. O oscilador e a bola devem ser representados a cores diferentes, e o solo a preto.

(c) **T01D30828.m ! 11–34**

20 (d) Escreva a fórmula de recorrência do método de Newton.

Resposta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

15 (e) Discuta quanto à ordem de convergência dos métodos do Ponto Fixo e de Newton. Serão semelhantes? Justifique.

Resposta:
Ordem de Convergência *Definição:* Se uma sequência de números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ converge para um valor r, existindo os valores reais $\lambda > 0$ a $\alpha \geq 1$ de tal modo que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^\alpha} = \lambda \tag{3}$$

então dizemos que α é a ordem de convergência da sequência.

Método do Ponto Fixo

Seja r um ponto fixo da formula recursiva $x_{n+1} = g(x_n)$, usando a expansão em série de Taylor, em torno do ponto fixo:

$$g(x) = g(r) + g'(r)(x - r) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - r)^2 \tag{4}$$

onde ξ é algum valor entre x e r. Avaliando a função em x_n, sabendo que $x_{n+1} = g(x_n)$ e $g(r) = r$ obtem-se

$$x_{n+1} = r + g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(\xi)}{2}(x_n - r)^2\ . \tag{5}$$

Subtraindo r de ambos os lados e dividindo por $x_n - r$ resulta

$$\frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = g'(r) + \frac{g''(\xi)}{2}(x_n - r) \tag{6}$$

que para $n \to \infty$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|} = |g'(r)| \ . \tag{7}$$

Comparando com a Eq. 3, tem-se que $\lambda = |g(r)|$ e $\alpha = 1$, indicando que o Método do Ponto Fixo converge linearmente.

Método de Newton

Embora o Método de Newton seja um caso particular do Método do Ponto Fixo, apresenta a particularidade de $g'(r) = 0$. Assumindo que $g''(r) \neq 0$, aplica-se de forma semelhante a expansão em série de Taylor em torno do ponto fixo, agora incluindo mais um termo:

$$g(x) = g(r) + g'(r)(x - r) + \frac{g''(r)}{2}(x - r)^2 + \frac{g'''(\xi)}{6}(x - r)^3 \ . \tag{8}$$

Tal como anteriormente, substitui-se x_n por x e damos uso às igualdades $x_{n+1} = g(x_n)$, $g(r) = r$, e $g'(r) = 0$, obtendo

$$x_{n+1} = r + \frac{g''(r)}{2}(x_n - r)^2 + \frac{g'''(\xi)}{6}(x_n - r)^3 \ . \tag{9}$$

Subtraindo r de ambos os lados e dividindo por $(x_n - r)^2$ resulta

$$\frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)^2} = \frac{g''(r)}{2} + \frac{g'''(\xi)}{6}(x_n - r) \tag{10}$$

que para $n \to \infty$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = \frac{|g''(r)|}{2} \ . \tag{11}$$

Comparando com a Eq. 3, tem-se que $\lambda = \frac{|g''(r)|}{2}$ e $\alpha = 2$, indicando que o Método de Newton converge quadraticamente.

Uma análise mais extensiva, para os casos particulares em que $g''(r) = 0$, $g'''(r) = 0$, $g^{(4)}(r) = 0$, $\cdots$, poderimos concluir que nestes casos particulares, o Método de Newton teria uma convergência de ordem $\alpha = 3, 4, 5, \cdots$, daí ser habitual dizer-se que o Método de Newton tem convergência pelo menos quadrática.