universidade de aveiro theoria poiesis praxis

Simulação & Modelação

(2014-2015)

Proposta de Resolução do 1.º Teste

30 de abril de 2015

Turma P8 **Versão C**

Cotações:

Questão	1	2	**Total**
Pontos	85	115	200

1. **EXCEL**

Uma bóia pentagonal flutua sobre a superfície de um líquido em $x = 0$ m. O líquido é percorrido por uma onda com perfil gaussiano do tipo $f(x) = 5\exp(-\frac{x^2}{20})$, que se move da esquerda para a direita com velocidade $v = 1$ m/s.

Use o Excel para:

30 (a) Produzir a animação do movimento do impulso gaussiano, desde $x = -30$ m até $x = 30$ m e com intervalos de $\Delta t = 1$ s. Faça com que o máximo da onda esteja em $x = -30$ m em $t = 0$ s e que em $t = 60$ s, a animação seja reiniciada.

(a) **T01C30828.xlsx ! Onda**

30 (b) Representar um pentágono regular, em que todos os lados têm comprimento igual a 0.5 m.

(b) **T01C30828.xlsx ! Boia**

25 (c) Adicionar o pentágono à animação da superfície da onda, fazendo com que o centro do pentágono se mova de acordo com a posição do ponto em $x = 0$ m da onda.

(c) **T01C30828.xlsx ! Animação**

2. **MATLAB**

Larga-se uma bola de $y = 50$ m. Pretende-se determinar quando esta embate num oscilador harmónico, que descreve um movimento que obdece à equação:

$$y(t) = A\sin(\omega t)$$

onde $A = 2$ m e $\omega = 0.1$ rad/s.

40 (a) Usando o método do Ponto Fixo determine o instante em que os osciladores colidem.

(a) **T01C30828.m ! 1–20**

15 (b) Explique porque é que o Método do Ponto Fixo tem o seu nome, e como deve escolher o parâmetro λ.

Resposta:
O Método Iterativo do Ponto Fixo permite, como o próprio nome indica, encontrar um ponto fixo de uma qualquer função $g(x)$. Isto é, permite encontrar um ponto no domínio da função $g(x)$ de tal modo que $g(c) = c$.
Para aplicar o método anterior na determinação de raizes, é necessário reescrever $f(x) = 0$ sob a forma de $x = g(x)$. A possibilidade abordada nas aulas foi $g(x) = x - \lambda f(x)$.
Para o Método Iterativo do Ponto Fixo convergir $|g'(x)| < 1 \Rightarrow |1 - \lambda f'(x)| < 1$, assim a escolha de λ deve ter em conta que:

$$0 < \overset{\text{o sinal é importante!}}{\lambda} \; f'(x) < 2 \tag{1}$$

Como nem sempre conhecemos a derivada da função, a determinação do intervalo de convergência (λ) é dificil, logo o método é aplicado geralmente de forma empirica. Esta análise é válida quando estamos suficientemente perto do ponto fixo.

25 (c) Desenvolva uma animação do sistema. O oscilador e a bola devem ser representados a cores diferentes, e o solo a preto.

(c) **T01C30828.m ! 21–34**

20 (d) Escreva a fórmula de recorrência do método de Newton.

Resposta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

15 (e) Explique porque é que o método de Newton pode ser visto como um caso especial do método do Ponto Fixo.

Resposta:
Se quisermos determinar $f(x) = 0$ [1], para usar o Método do Ponto Fixo teriamos que reescrever [1] sob a forma de $x = g(x)$, em que x seria um ponto fixo da função $g(x)$. Aplicar-se-ia então o Método Iterativo do Ponto Fixo para determinar o ponto fixo x de $g(x)$ que é raiz de $f(x)$. Se considerarmos um caso particular em que $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, que é a iteração de Newton, então o Método do Ponto Fixo fica $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (alínea (d)). Se convergir para o ponto fixo x então $x = g(x)$, $\frac{f(x)}{f'(x)} = 0$ e x é raiz de $f(x)$. Demostra-se assim que o Método de Newton e um caso particular do Método Iterativo do Ponto Fixo.