

Sistemas de Visão e Percepção Industrial

Geometria e Imagem

Parte 1 - Transformações Geométricas

- 1 Transformações no plano
- 2 Coordenadas homogêneas
- 3 Combinações de transformações
- 4 Generalização para 3D

- Pontos no plano e no espaço
 - Vetores a duas e três coordenadas
 - $p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y]^T$
 - $q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \ y \ z]^T$
- Transformações geométricas no plano
 - Alteração das coordenadas dos pontos
 - $p_0 \rightarrow p_1$
- Transformações comuns
 - Translações
 - Rotações
 - Simetrias (axial e radial ou central)
 - Escala

Transformações no plano

Transformações no plano

- "Transformar" significa alterar as coordenadas de um ou mais pontos.
- As transformações lineares ou afins (*affine transformations*)
 - As novas coordenadas dependem linearmente das coordenadas originais

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + t_x \\ y_1 = cx + dy + t_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

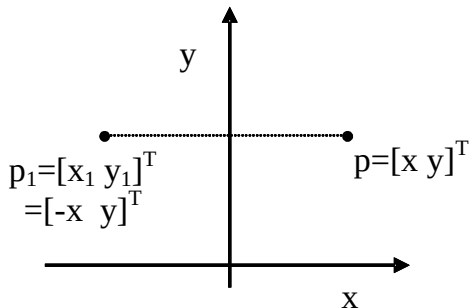
$$\vec{p}_1 = \mathbf{T}\vec{p} + \vec{t}$$

Transformações no plano

- Casos particulares – a simetria axial

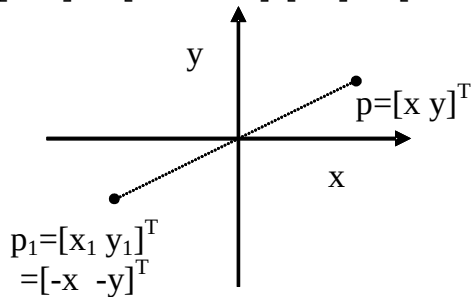
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



- Casos particulares – a simetria central

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

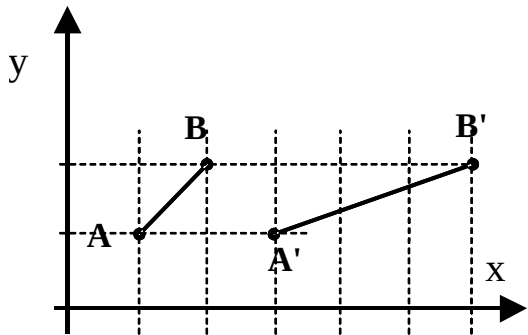


Transformações no plano

- Casos particulares – fator de escala

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ y \end{bmatrix}$$

- Exemplo numérico: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T$



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

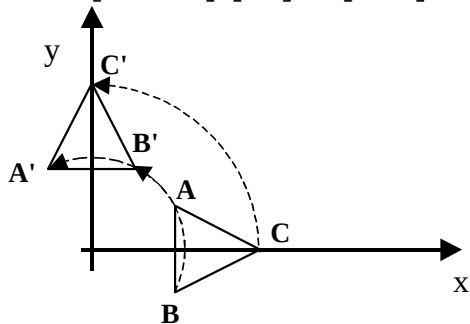
Transformações no plano

- Casos particulares – Rotação de 90°

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

- Exemplo numérico: $A = [2 \ 1]^\top$, $B = [2 \ -1]^\top$, $C = [4 \ 0]^\top$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$



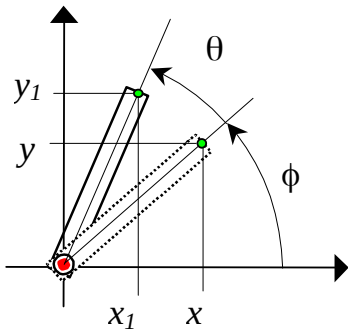
$$C' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Transformações no plano

- Rotação de um ângulo genérico θ

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x_1 = l \cos (\theta + \phi) = l (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) \\ y_1 = l \sin (\theta + \phi) = l (\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = l \cos \phi \\ y = l \sin \phi \end{cases}, \begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Coordenadas homogéneas

Transformações e coordenadas homogêneas

- A translação e a independência das coordenadas do ponto
- A transformação homogênea

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas homogêneas – caso geral

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, p_h = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ k \end{bmatrix}$$

Representação alternativa (não usada netsa UC!)

- Alguns autores (e.g. Gonzalez) usam uma representação transposta para as transformações
- Os pontos são vetores linha e não vetores coluna

$$p_1 = \mathbf{T}p \Leftrightarrow p_1^\top = (\mathbf{T}p)^\top \Leftrightarrow p_1^\top = p^\top \mathbf{T}^\top$$

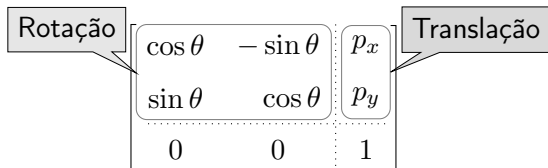
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

Embora igualmente correto, não é o formato mais usual e **NÃO** será o adotado na disciplina!

A matriz de transformação

- Caso geral



The diagram shows a 3x3 matrix representing a general transformation. The first two columns are grouped by a callout labeled "Rotação" (Rotation), and the last column is grouped by a callout labeled "Translação" (Translation). The matrix is:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotação e translação pura

$$\text{Rot}(\theta) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{Trans}(t_x, t_y) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Combinações de transformações

- A associação de transformações é possível.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}_N (\cdots (\mathbf{T}_3 \cdot (\mathbf{T}_2 \cdot (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{p})))) = (\mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1) \mathbf{p} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}$$

- Porém, a multiplicação de transformações, em geral, não é comutativa exceto em alguns casos, como:
 - Translações
 - Rotações no plano
- Mas não é comutativa entre rotações e translações.

Sucessão de translações

- As translações são comutativas

$$\mathbf{T}_1 = \text{Trans}(a_x, a_y) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T}_2 = \text{Trans}(b_x, b_y) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x + b_x \\ 0 & 1 & a_y + b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \end{aligned}$$

Sucessão de rotações no plano (2D)

- As rotações no plano são comutativas

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 = \text{Rot}(\theta_1) &= \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], & \mathbf{T}_2 = \text{Rot}(\theta_2) &= \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= \left[\begin{array}{cc|c} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - S\theta_1 C\theta_2 & 0 \\ S\theta_1 C\theta_2 + C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 + C\theta_1 C\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Sucessão de rotações e translações

- As rotações e translações **NÃO** são comutativas

$$\mathbf{T}_1 = \text{Trans}(t_x, t_y) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{T}_2 = \text{Rot}(\theta) = \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \neq \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= \text{Trans}(t_x, t_y) \text{Rot}(\theta) = \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 &= \text{Rot}(\theta) \text{Trans}(t_x, t_y) = \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & t_x \cos \theta - t_y \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & t_x \sin \theta + t_y \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Generalização para 3D

Generalização para 3D

- Coordenadas homogêneas

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \\ k \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_h}{k}$$

- Matriz de transformação homogênea

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Definidas em torno de três eixos possíveis

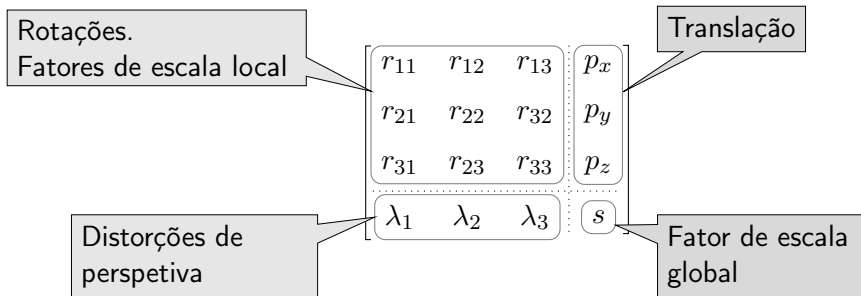
$$\text{Rot}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainda sobre a transformação a 3D

- Generalização usada em contextos mais gerais (como, por exemplo, transformações de homografia)



- As distorções de perspectiva ficam reservadas para os casos de transformações de homografia que não serão abordadas e, portanto, no presente contexto serão sempre (0,0,0), tal como o fator de escala global que se manterá sempre a 1.