Formulário para Sistemas de Visão e Percepção Industrial

Universidade de Aveiro – Departamento de Engenharia Mecânica, 2023

Matrizes de câmaras

Matriz intrínseca (3×4)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Relação de coordenadas entre referenciais

$${}^{R}Q = {}^{R}T_C\,{}^{C}Q$$

Transformações geométricas a 3D

$$\operatorname{trans}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Medidas da Distância entre Pixels

$$D_E(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$
$$D_4(p, q) = |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$$
$$D_8(p, q) = \max(|p_x - q_x|, |p_y - q_y|)$$

Gradientes e deteção de "arestas"

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}^T$$
$$\left\|\tilde{\mathbf{G}}\right\| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \approx |G_x| + |G_y|$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$
$$L[f(x, y)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\operatorname{LoG}(x, y) = -\frac{1}{\pi\sigma^4}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Filtros comuns para deteção de "arestas"

Gradiente simples

$$G_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gradiente de Sobel:

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Morfologia

$$A_h = \left\{p \in \mathbb{Z}^2 : p = x + h, x \in A\right\}$$
$$A^C = \overline{A} = \left\{p \in \mathbb{Z}^2 : p \notin A\right\}$$
$$A \backslash B = A - B = A \cap B^C = \left\{p \in \mathbb{Z}^2 : (p \in A) \wedge (p \notin B)\right\}$$
$$C = A \oplus B = \left\{c \in \mathbb{Z}^2 : c = a + b, a \in A \wedge b \in B\right\}$$
$$C = A \oplus B = \bigcup_{h \in B} A_h$$
$$C = A \ominus B = \left\{c \in \mathbb{Z}^2 : c + b \in A, \forall b \in B\right\}$$
$$C = A \ominus B = \left\{c \in \mathbb{Z}^2 : B_c \subseteq A\right\} = \bigcap_{h \in B} A_{-h}$$
$$D = A \otimes (B, C) = (A \ominus B) \cap (A^C \ominus C)$$
$$D = A \otimes B = A \otimes (B, B^C)$$
$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$
$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$
$$\bigcup_i A \otimes (B_i, C_i) = \bigcup_i \left[(A \ominus B_i) \cap (A^C \ominus C_i)\right]$$
$$\operatorname{TopHat}(A, B) = A \backslash (A \circ B)$$

Reconstrução ou dilatação recursiva condicionada:

Reconstrução da semente A até à mascara B com o elemento estruturante C (dilatação recursiva condicionada):

$$D = A \oplus |_B C \text{ e equivale a: } \begin{cases} X_0 = A \\ X_i = (X_{i-1} \oplus C) \cap B \\ D = X_i \Leftarrow X_i = X_{i-1} \end{cases}$$

Morfologia em níveis de cinzento

$$(A \oplus B)(u, v) = \max_{(i,j) \in B} \{A(u + i, v + j) + B(i, j)\}$$
$$(A \ominus B)(u, v) = \min_{(i,j) \in B} \{A(u + i, v + j) - B(i, j)\}$$

Momentos de imagens

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x, y)$$
$$m_{01} = \sum_x \sum_y y \cdot f(x, y), \quad m_{10} = \sum_x \sum_y x \cdot f(x, y)$$

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x,y)$$
$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

Momentos invariantes de Hu (4 primeiros)

$$I_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$
$$I_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$
$$I_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$
$$I_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$
com $\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\left(1+\frac{p+q}{2}\right)}}, p+q \geq 2$

Expressões e momentos em histogramas

Histogramas contínuos

$$h(x) = \frac{H(x)}{\int_0^L H(s)ds}$$
$$\int_0^L h(x)\,dx = 1$$
$$\mu_n = \int_0^L (x-\mu_0)^n h(x)\,dx; \quad \mu_0 = \int_0^L x h(x)\,dx$$

Histogramas discretos

$$h(i) = \frac{H(i)}{\sum_{j=0}^{L-1} H(j)}, \quad \sum_{i=0}^{L-1} h(i) = 1$$
$$\mu_n = \sum_{i=0}^{L-1} (i-\mu_0)^n h(i), \quad \mu_0 = \sum_{i=0}^{L-1} i h(i)$$

Contraste médio: $\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{L-1} (i-\mu_0)^2 h(i)}$

Suavidade: $R = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} = 1 - \frac{1}{1+\sigma^2}$

Uniformidade: $U = \sum_{i=0}^{L-1} h^2(i)$

Entropia: $H = -\sum_{i=0}^{L-1} h(i) \log h(i)$

Expansão do contraste:

$$g(x,y) = (L-1)\frac{f(x,y) - \min[f(x,y)]}{\max[f(x,y)] - \min[f(x,y)]}$$

Equalização de histograma:

$$g(x,y) = \text{floor}\left((L-1)\sum_{i=0}^{f(x,y)} h(i)\right)$$

Limiar de binarização por "isodados"

$$m_k^b = \frac{\sum_{i=0}^{T_{k-1}-1} i \cdot H(i)}{\sum_{i=0}^{T_{k-1}-1} H(i)}, \; m_k^f = \frac{\sum_{i=T_{k-1}}^{L-1} i \cdot H(i)}{\sum_{i=T_{k-1}}^{L-1} H(i)}, \; T_k = \frac{m_k{}^f + m_k^b}{2}$$

Distâncias entre imagem I e modelo R

$$d_A(r,s) = \sum_{(i,j)\in R} |I(r+i, s+j) - R(i,j)|$$
$$d_M(r,s) = \max_{(i,j)\in R} (|I(r+i, s+j) - R(i,j)|)$$
$$d_E(r,s) = \sqrt{\sum_{(i,j)\in R} [I(r+i, s+j) - R(i,j)]^2}$$

Correlação cruzada entre I e R

$$(I \circledast R)(r,s) = \sum_{(i,j)\in R} I(r+i, s+j) \cdot R(i,j)$$

Correlação cruzada normalizada entre I e R

$$C_N(r,s) = \frac{\sum_{(i,j)\in R} I(r+i,s+j) \cdot R(i,j)}{\sqrt{\sum_{(i,j)\in R} I^2(r+i,s+j)}\sqrt{\sum_{(i,j)\in R} R^2(i,j)}}$$

Correlação cruzada normalizada central

$$C_L(r,s) = \frac{\sum_{(i,j)\in R} I_\mu(r+i,s+j) \cdot R_\mu(i,j)}{\sqrt{\sum_{(i,j)\in R} I_\mu^2(r+i,s+j)}\sqrt{\sum_{(i,j)\in R} R_\mu^2(i,j)}}$$
onde se define genericamente:
$$X_\mu(i,j) = X(i,j) - \bar{X} = X(i,j) - \frac{1}{W \times H}\sum_{s=1}^{W}\sum_{r=1}^{H} X(s,r)$$

Distâncias entre os padrões x e μ_x

$$d_E(\mathbf{x}, \mu_\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mu_\mathbf{x})^T (\mathbf{x} - \mu_\mathbf{x})} = \|\mathbf{x} - \mu_\mathbf{x}\|$$
$$D_M(\mathbf{x}, \mu_\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mu_\mathbf{x})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_\mathbf{x})}$$
onde Σ é a matriz de co-variâncias das grandezas (descritores) dos padrões, com o seguinte exemplo para 3 variáveis:
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

Definição de co-variância e esperança

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$$
$$E(X) \triangleq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$
$$E(X \cdot Y) \triangleq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i y_i)$$

Equação polar da reta

$$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$$

Trigonometria da soma de ângulos

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Solução da equação: $k_1 \cos\theta + k_2 \sin\theta = k_3$

$$\theta = 2\text{atan2}\left(k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}, k_1 + k_3\right)$$