Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

5. Χαρακτήρες ομάδων: Εισαγωγή (συνέχεια)

Ορισμός 5.3. Μια απεικόνιση $\alpha : G \to \mathbb{C}$ η οποία έχει σταθερή τιμή στις κλάσεις συζυγίας της G, δηλαδή

$$\alpha(g) = \alpha(xgx^{-1})$$

για κάθε $x \in G$ και $g \in G$ ονομάζεται συνάρτηση κλάσης (class function).

Η Πρόταση 5.2 (2) μας πληροφορεί ότι κάθε χαρακτήρας της G είναι συνάρτηση κλάσης. Το σύνολο $\mathrm{CF}_{\mathbb{C}}(G)$ (ή πιο απλά $\mathrm{CF}(G)$) όλων των συναρτήσεων κλάσης της G αποτελεί διανυσματικό χώρο με πράξη την πρόσθεση συναρτήσεων

$$(\alpha + \beta)(g) \coloneqq \alpha(g) + \beta(g)$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathrm{CF}(G)$ και $g \in G$ (γιατί;). Μια προφανής βάση του χώρου αυτού αποτελείται από τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις στις κλάσεις συζυγίας K της G, δηλαδή

$$1_K(g) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{αν } g \in K \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\dim\left(\mathrm{CF}(G)\right) = \text{ πλήθος των κλάσεων συζυγίας της } G. \tag{5.1}$$

Ορισμός 5.4. Ο πίνακας

	κλάσεις συζυγίας της G
ανάγωγοι χαρακτήρες μη ισόμορφων αναπαραστάσεων της G	$\vdots$ $\cdots\ \chi(K)\ \cdots$ $\vdots$

ονομάζεται πίνακας χαρακτήρων (character table) της G. Στην πρώτη στήλη θα αναγράφεται πάντα η κλάση συζυγίας του ταυτοτικού στοιχείου και στην πρώτη γραμμή ο χαρακτήρας της τετριμμένης αναπαράστασης.

Ημερομηνία: 14 Οκτωβρίου 2025.

Ας (προσπαθήσουμε) να υπολογίσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_3$. Οι κλάσεις συζυγίας της $\mathfrak{S}_3$ είναι

$$\begin{aligned} K_{111} &= \{(1)(2)(3)\} \\ K_{21} &= \{(1\ 2)(3), (1\ 3)(2), (2\ 3)(1)\} \\ K_3 &= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}. \end{aligned}$$

Στην Παράγραφο 4 είδαμε ότι η $\mathfrak{S}_3$ έχει τρεις διαφορετικές ανάγωγες αναπαραστάσεις:

- την τετριμμένη αναπαράσταση,
- την αναπαράσταση προσήμου,

των οποίων τους χαρακτήρες συμβολίζουμε με χ^{def} και χ^{sign}, αντίστοιχα και

- μια ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης 2.

Συνεπώς, ο πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_3$ έχει την εξής μορφή

	K_{111}	K_{21}	K_3
χ^{triv}	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1
$\chi^{;}$	2	;	;

Ποιός είναι ο ανάγωγος χαρακτήρας που λείπει;

Ας κάνουμε το ίδιο για την κυκλική ομάδας $\mathrm{C}_3 = \{\epsilon, g, g^2\}$ τάξης 3. Αφού η C_3 είναι αβελιανή ομάδα, κάθε στοιχείο της σχηματίζει τη δική του κλάση συζυγίας. Στην Άσκηση 1.6 είδαμε ότι η C_3 έχει τρεις ανάγωγες αναπαραστάσεις με χαρακτήρες[1]

$$\chi_1(g) = 1, \quad \chi_2(g) = \zeta, \quad \chi_3(g) = \zeta^2,$$

όπου ζ είναι μια τρίτη ρίζα της μονάδας. Συνεπώς, ο πίνακας χαρακτήρων της C_3 είναι

	$\{\epsilon\}$	$\{g\}$	$\{g^2\}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	ζ^2	ζ

Ομοίως, ο πίνακας χαρακτήρων της κυκλικής ομάδας τάξης 4 είναι

	$\{\epsilon\}$	$\{g\}$	$\{g^2\}$	$\{g^3\}$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	i	-1	$-i$
χ_4	1	$-i$	-1	i

(γιατί;).

[1]Στην περίπτωση όπου η αναπαράσταση έχει διάσταση 1, τότε η έννοια του χαρακτήρα και της αναπαράστασης ταυτίζονται.

6. Χαρακτήρες ομάδων: Κατασκευές προτύπων

Το ευθύ άρθοισμα $V \oplus W$ δυο διανυσματικών χώρων V και W γίνεται G-πρότυπο[2] με τη *διαγώνια δράση*:

$$g \cdot (v, w) := (gv, gw).$$

Το ευθύ άθροισμα είναι μια κατασκευή μεταξύ διανυσματικών χώρων όπου τα στοιχεία του δεν "ανακατεύονται". Για παράδειγμα,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, ο χαρακτήρας του ευθέως αθροίσματος ισούται με το *άθροισμα* των χαρακτήρων των αντίστοιχων προτύπων.

Πώς θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα πρότυπο του οποίου τα στοιχεία θα "ανακατεύονται" (ή *πολλαπλασιάζονται*) και σε επίπεδο χαρακτήρων αυτό να μεταφράζεται σε *πολλαπλασιασμό*; Για παράδειγμα, θα θέλαμε

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \text{“}\times\text{”} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} \text{“}=\text{”} \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Όπως και στο ευθύ άθροισμα, ξεκινάμε με το $V \times W$. Στο $V \oplus W$ όμως, η πρόσθεση ορίζεται κατά συντεταγμένες. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$((1,0) + (0,1), (1,2)) = ((1,1), (1,2)).$$

Στον δικό μας χώρο όμως, θα θέλαμε ο "πολλαπλασιασμός" να είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση:

$$(v + v') \text{ “}\times\text{” } w = v \text{ “}\times\text{” } w + v' \text{ “}\times\text{” } w,$$

το οποίο δε συμβαίνει στο $V \oplus W$. Στο παράδειγμα,

$$((1,0), (1,2)) + ((0,1), (1,2)) = ((1,1), (2,4)) \neq ((1,1), (1,2)).$$

Για να "λύσουμε" αυτό το πρόβλημα, κατασκευάζουμε έναν χώρο, όπου *εξαναγκάζουμε* τα στοιχεία του να ικανοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα.

Ορισμός 6.1. Έστω V και W δυο διανυσματικοί χώρου. Ο χώρος πηλίκο

$$V \otimes W := \mathbb{F}[V \times W]/U,$$

όπου U είναι ο υπόχωρος που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

[2]Όπως είδαμε και στην περίπτωση του ευθέως αθροίσματος δυο υπόχωρων.

- $(v+v',w)-(v,w)-(v',w)$
- $(v,w+w')-(v,w)-(v,w')$
- $(cv,w)-c(v,w)$
- $(v,cw)-c(v,w)$,

για κάθε $v,v' \in V$, $w,w' \in W$ και $c \in \mathbb{F}$ ονομάζεται τανυστικό γινόμενο (tensor product) των V και W.

Παρατήρηση. Ο ορισμός του τανυστικού γινομένου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό πάνω από πιο σώμα το ορίζουμε. Γι αυτό συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $V \otimes_{\mathbb{F}} W$. Για παράδειγμα, ως διανυσματικοί χώροι $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \not\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, καθώς ο πρώτος έχει διάσταση 1 (βλ. Παράδειγμα 6.4 (1)), ενώ ο δεύτερος έχει διάσταση 2 (βλ. Θεώρημα ??), αλλά τέτοιες περιπτώσεις δε θα μας απασχολήσουν σε αυτό το μάθημα.

Το τανυστικό γινόμενο αποτελείται από όλους γραμμικούς συνδυασμούς

$$\sum_{(v,w)\in V\times W} c_{v,w}(v,w)$$

όπου όλα τα $c_{v,w}=0$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος που είναι μη μηδενικά, modulo τις σχέσεις του U. Την κλάση ενός στοιχείου (v,w) τη συμβολίζουμε με $v\otimes w$ και ονομάζεται στοιχειώδης τανυστής (simple tensor).

Πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός όταν δουλεύει με στοιχείωδεις τανυστές καθώς μπορεί να έχουν πολλές "διαφορετικές" μορφές. Για παράδειγμα,

$$(2\mathbf{e}_1)\otimes\mathbf{e}_2 = 2(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\otimes(2\mathbf{e}_2) = 4(\mathbf{e}_1\otimes(\frac{1}{2}\mathbf{e}_2)) = \cdots .$$

Το τανυστικό γινόμενο μας επιτρέπει να "πολλαπλασιάσουμε" στοιχεία διανυσματικών χώρων όπου εκ των προτέρων δεν υπάρχει κάποιος προφανής "πολλαπλασιασμός". Για παράδειγμα[3], στο $\mathbb{R}[t]\otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(1+2t)\otimes\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix} &= 1\otimes\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}+2t\otimes\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\\ &= 1\otimes\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}+t\otimes\begin{pmatrix}0&2\\4&0\end{pmatrix}\\ &= \cdots\end{aligned}$$

Σε κάποιες περιπτώσεις όμως που υπάρχει ένας προφανής "πολλαπλασιασμός", παίρνουμε διαφορετικά στοιχεία από αυτά που περιμέναμε. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}[t]\otimes\mathbb{R}[t]$,

$$1\otimes t^2 \neq t\otimes t \neq t^2\otimes 1.$$

[3]Με $\mathbb{F}[t]$ και $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ συμβολίζουμε τον χώρο των πολυωνύμων στο t με συντελεστές στο $\mathbb{F}$ και τον χώρο των $(n\times n)$-πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, αντίστοιχα.

Ορισμός 6.2. Έστω V, W και U διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : V \times W \to U$ ονομάζεται διγραμμική αν

$$\begin{aligned} f(c_1v_1 + c_2v_2, w) &= c_1f(v_1, w) + c_2f(v_2, w) \\ f(v, cw_1 + dw_2) &= c_1f(v, w_1) + c_2f(v, w_2) \end{aligned}$$

για κάθε $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$.

Οι σχέσεις που "επιβάλλαμε" στο $\mathbb{F}[V \times W]$ στον Ορισμό 6.1 έχουν ως συνέπεια η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathrm{proj} : V \times W &\to V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w \end{aligned}$$

να είναι διγραμμική (γιατί;). Το επόμενο αποτέλεσμα εκφράζει την *καθολική ιδιότητα* του τανυστικού γινομένου ως προς τις διγραμμικές απεικονίσης.

Θεώρημα 6.3. Έστω V, W και U διανυσματικοί χώροι. Για κάθε διγραμμική απεικόνιση $f : V \times W \to U$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\overline{f} : V \otimes W \to U$, τέτοια ώστε

$$f = \overline{f} \circ \mathrm{proj}$$

ή ισοδύναμα το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{proj}"'] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Ειδικότερα, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{διγραμμικές απεικονίσεις} \\ V \times W \to U \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{γραμμικές απεικονίσεις} \\ V \otimes W \to U \end{array} \right\}.$$

Το Θεώρημα 6.3, η απόδειξη του οποίου παραλλείπεται, μας επιτρέπει να "αναγνωρίσουμε" τανυστικά γινόμενα ως εξής: αν θέλουμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $V \otimes W \to U$, αρκεί να βρούμε μια διγραμμική απεικόνιση $V \times W \to U$.

Παράδειγμα 6.4.

(1) Για κάθε διανυσματικό χώρο V, ισχύει ότι $\mathbb{F} \otimes V \cong V$. Πράγματι, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \times V &\to V \\ (c, v) &\mapsto cv \end{aligned}$$

είναι διγραμμική (γιατί;) και από το Θεώρημα 6.3 επάγεται μια γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \otimes V &\to V \\ c \otimes v &\mapsto cv. \end{aligned}$$

Η αντίστροφή της δίνεται από $v \mapsto 1 \otimes v$ (γιατί;).

(2) Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα το οποίο περιέχει το $\mathbb{F}$. Το τανυστικό γινόμενο $\mathbb{K} \otimes V$ (πάνω από το $\mathbb{F}$) γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ θέτοντας

$$c \cdot \left(\sum_i a_i \otimes v \right) := \sum_i (ca_i) \otimes v,$$

για κάθε $c \in \mathbb{K}$. Η κατασκευή αυτή ονομάζεται *επέκταση βαθμωτών* από το $\mathbb{F}$ στο $\mathbb{K}$.

Για παράδειγμα, αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ και $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, τότε το τανυστικό γινόμενο $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}$ ως διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ισόμορφος με το ίδιο το $\mathbb{C}$, μέσω της ταύτισης

$$a + ib \; \mapsto \; 1 \otimes a + i \otimes b$$

(γιατί;).