Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

11. Πρότυπα Specht (Συνέχεια)

Απόδειξη του Θεωρήματος 11.5. Έστω λ μια διαμέριση ακεραίου και U ένα υποπρότυπο του M^λ. Το Λήμμα 11.7 (4) μας πληροφορεί ότι για κάθε $u \in U$ και κάθε ταμπλώ T σχήματος λ ισχύει ότι $\nabla_T^- u = c\,\mathbf{e}_T$, για κάποιο $c \in \mathbb{C}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

Αν για κάθε $u \in U$ και κάθε ταμπλώ T σχήματος λ ισχύει ότι $c = 0$, τότε

$$(u, \mathbf{e}_T) = (u, \nabla_T^-[T]) = (\nabla_T^- u, [T]) = (0, [T]) = 0,$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το Λήμμα 11.7 (1) και γι αυτό $u \in (\mathcal{S}^\lambda)^\perp$. Άρα, $U \subseteq (\mathcal{S}^\lambda)^\perp$.

Διαφορετικά, υπάρχει κάποιο $u \in U$ και κάποιο ταμπλώ T σχήματος λ για τα οποία $c \neq 0$. Τότε

$$\mathbf{e}_T = \frac{1}{c} \nabla_T^- u \ \in U,$$

διότι το U είναι υποπρότυπο του M^λ. Άρα, $\mathcal{S}^\lambda \subseteq U$ λόγω της κυκλικότητας του $\mathcal{S}^\lambda$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Στην απόδειξη του Λήμματος 11.7 (3) είδαμε ότι αν δυο ταμπλώ T, Q ίδιου σχήματος έχουν την ιδιότητα ότι κάθε δυο στοιχεία που ανήκουν στην ίδια γραμμή του Q δεν μπορούν να ανήκουν στην ίδια στήλη του T, τότε υπάρχει μια μετάθεση $\pi \in \mathrm{C}(T)$ τέτοια ώστε $[\pi T] = [Q]$. Τι γίνεται αν τα T και Q έχουν διαφορετικό σχήμα;

Για παράδειγμα, έστω

$$T = \begin{ytableau} 3 & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 \end{ytableau}\,, \quad \text{και} \quad Q = \begin{ytableau} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{ytableau}$$

δυο ταμπλώ σχήματος $\lambda = (4,3,1)$ και $\mu = (3,2,1,1,1)$ και περιεχομένου $[8]$. Κάνοντας την ίδια διακασία, όπως στην απόδειξη του Λήμματος 11.7 (3), επειδή $\lambda \neq \mu$, δεν μπορούμε να μεταθέσουμε τα στοιχεία κάθε στήλης του T με σκοπό να βρεθούν στην αντίστοιχη θέση που έχουν στις γραμμές του Q, αλλά μπορούμε να τα μεταθέσουμε ώστε να βρεθούν στην

Ημερομηνία: 25 Νοεμβρίου 2025.

ίδια *σχετική* σειρά στις γραμμές του T με αυτή που έχουν στις γραμμές του του Q. Στο παράδειγμα, στην πρώτη στήλη

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 7 & 8 & 6 \\ \hline 1 & 5 & 2 \\ \cline{1-3} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

και γι αυτό δρούμε με την $(1\ 4\ 3)$. Έπειτα, για τη δεύτερη στήλη

$$(1\ 4\ 3)T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 7 & 8 & 6 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ \cline{1-3} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

και γι αυτό δρούμε με την $(5\ 7)$. Τέλος, για την τρίτη στήλη

$$(5\ 7)(1\ 4\ 3)T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 8 & 6 \\ \hline 4 & 7 & 2 \\ \cline{1-3} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

και γι αυτό δρούμε με την $(2\ 8)$, για να προκύψουν τα ταμπλώ

$$(2\ 8)(5\ 7)(1\ 4\ 3)T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 2 & 6 \\ \hline 4 & 7 & 8 \\ \cline{1-3} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Συμπερασματικά, προκύπτει το παρακάτω, το οποίο είναι γνωστό ως το λήμμα κυριαρχίας (dominance lemma) για διαμερίσεις ακεραίων.

Πρόταση 11.8. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ και $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ δυο διαμερίσεις ακεραίων. Αν T και Q είναι ταμπλώ σχήματος λ και μ, αντίστοιχα, με την ιδιότητα κάθε δυο στοιχεία που ανήκουν στην ίδια γραμμή του Q δεν μπορούν να ανήκουν στην ίδια στήλη του T, τότε

(1) υπάρχει μετάθεση $\pi \in \mathrm{C}(T)$ τέτοια ώστε κάθε στοιχείο της i-οστής γραμμής του Q να βρίσκεται στις πρώτες i γραμμές του πT
(2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$

για κάθε $i \geq 1$, μέχρι να εξαντληθούν οι γραμμές της διαμέρισης με το μεγαλύτερο μήκος[1].

Απόδειξη. Το (2) έπεται άμεσα από το (1). Πράγματι, για κάθε $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i = {} & \text{ πλήθος των αριθμών στις πρώτες } i \text{ γραμμές του } Q \\ \leq {} & \text{ πλήθος των αριθμών στις πρώτες } i \text{ γραμμές του } \pi T \\ = {} & \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i,\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα έπεται από το (1).

Για το (1), έστω $r_Q(k)$ η γραμμή του Q στην οποία βρίσκεται το k. Στο παράδειγμα,

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$r_Q(k)$	1	2	4	2	1	1	5	3

Αναδιατάσσουμε τα στοιχεία κάθε στήλης του T (ξεχωριστά) σε αύξουσα σειρά, από πάνω προς τα κάτω, ανάλογα με την ποσότητα $r_Q(\text{-})$. Το ταμπλώ που προκύπτει είναι της μορφής πT για κάποια $\mathrm{C}(T)$ και ικανοποιεί

$$r_{\pi T}(k) \leq r_Q(k)$$

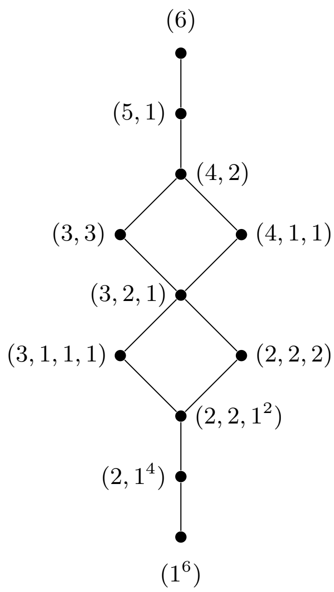
για κάθε $k \in [n]$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο (γιατί;). $\square$

Ορισμός 11.9. Για δυο διαμερίσεις λ και μ του n, γράφουμε $\lambda \trianglerighteq \mu$ και λέμε ότι η λ κυριαρχεί (dominates) την μ αν

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$$

για κάθε $i \geq 1$.

Το ζεύγος $(\mathrm{Par}(n), \trianglelefteq)$ είναι μερική διάταξη. Για παράδειγμα, για $n = 6$, έχουμε



[1]Επεκτείνουμε τη διαμέριση με το μικρότερο μήκος με μηδενικά, μέχρι να φτάσει το μήκος της άλλης. Στο παράδειγμα, επειδή $\ell(\mu) = 5$, θέτουμε $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

Ορισμός 11.10. Για δυο (διαφορετικές) διαμερίσεις λ και μ του n, γράφουμε $\lambda >_{\mathrm{lex}} \mu$ και λέμε ότι η λ είναι λεξικογραφικά μεγαλύτερη της μ αν για το μικρότερο $i \geq 1$ για το οποίο $\lambda_i \neq \mu_i$ ισχύει ότι $\lambda_i > \mu_i$.

Το ζεύγος $(\mathrm{Par}(n), <_{\mathrm{lex}})$ είναι μια ολική διάταξη η οποία επεκτείνει[2] την διάταξη κυριαρχίας, δηλαδή

$$\lambda \rhd \mu \;\Rightarrow\; \lambda >_{\mathrm{lex}} \mu,$$

για κάθε δυο διαμερίσεις $\lambda, \mu \in \mathrm{Par}(n)$ (γιατί;). Στο παράδειγμα, για $n = 6$ έχουμε

$$(1^6) <_{\mathrm{lex}} \cdots <_{\mathrm{lex}} (2,2,2) <_{\mathrm{lex}} (3,1^3) <_{\mathrm{lex}} (3,2,1) <_{\mathrm{lex}} (3,3) <_{\mathrm{lex}} (4,1,1) <_{\mathrm{lex}} \cdots <_{\mathrm{lex}} (6).$$

Η Πρόταση 11.8 μας πληροφορεί ότι αν T και Q είναι ταμπλώ σχήματος λ και μ τέτοια ώστε $\nabla_T^-[Q] \neq 0$, τότε $\lambda \trianglerighteq \mu$. Αυτό έχει ως συνέπεια το εξής.

Πρόταση 11.11. Έστω $\lambda, \mu \vdash n$. Αν $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{S}^\lambda, \mathrm{M}^\mu)$ είναι μη μηδενική, τότε $\lambda \trianglerighteq \mu$. Ειδικότερα, αν $\lambda = \mu$, τότε $\varphi = c\,\mathrm{id}$, για κάποιο $c \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Αν $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{S}^\lambda, \mathrm{M}^\mu)$ είναι μη μηδενική, τότε υπάρχει ταμπλώ T σχήματος λ τέτοιο ώστε $\varphi(\mathbf{e}_T) \neq 0$. Επεκτείνουμε την φ σε ολόκληρο το $\mathrm{M}^\lambda = \mathcal{S}^\lambda \oplus (\mathcal{S}^\lambda)^\perp$, θέτοντας $\varphi((\mathcal{S}^\lambda)^\perp) = 0$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\varphi([T]) = c_1[Q_1] + c_2[Q_2] + \cdots + c_k[Q_k],$$

για κάποια ταμπλοειδή $[Q_i]$ σχήματος μ και κάποια $c_i \in \mathbb{C}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{e}_T) &= \varphi(\nabla_T^-[T]) \\
&= \nabla_T^-\varphi([T]) \\
&= \nabla_T^-\left(c_1[Q_1] + c_2[Q_2] + \cdots + c_k[Q_k]\right) \\
&= c_1\nabla_T^-[Q_1] + c_2\nabla_T^-[Q_2] + \cdots + c_k\nabla_T^-[Q_k],
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το ότι η φ είναι $\mathfrak{S}_n$-ομομορφισμός. Επειδή $\varphi(\mathbf{e}_T) \neq 0$, υπάρχει κάποιο $1 \leq i \leq k$, για το οποίο $c_i\nabla_T^-[Q_i] \neq 0$ και κατά συνέπεια $\nabla_T^-[Q_i] \neq 0$. Από την συζήτηση πριν την Πρόταση 11.11 έπεται ότι $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Αν $\lambda = \mu$, τότε από το Λήμμα 11.7 (4) έπεται ότι

$$\varphi(\mathbf{e}_T) = c_1\nabla_T^-[Q_1] + c_2\nabla_T^-[Q_2] + \cdots + c_k\nabla_T^-[Q_k] = c\,\mathbf{e}_T$$

για κάποιο $c \in \mathbb{C}$. Το ζητούμενο έπεται από την κυκλικότητα του $\mathcal{S}^\lambda$. □

Θεώρημα 11.12. Το

$$\{\mathcal{S}^\lambda : \lambda \vdash n\}$$

αποτελεί ένα σύνολο αν δύο μη ισόμορφων ανάγωγων $\mathfrak{S}_n$-προτύπων.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 11.6 γνωρίζουμε ότι κάθε πρότυπο Specht είναι ανάγωγο. Επίσης, αν $\lambda \neq \mu$, τότε προφανώς $\mathcal{S}^\lambda \ncong_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{S}^\mu$. Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\mathcal{S}^\lambda \cong_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{S}^\mu$, τότε $\lambda = \mu$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 11.11.

Πράγματι, αν $\mathcal{S}^\lambda \cong_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{S}^\mu$, τότε $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{S}^\lambda, \mathcal{S}^\mu) \neq \{0\}$ και γι αυτό $\lambda \trianglerighteq \mu$. Επίσης, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{S}^\mu, \mathcal{S}^\lambda) \neq \{0\}$ και γι αυτό $\mu \trianglerighteq \lambda$. Άρα, $\lambda = \mu$. □

[2]Μια ολική διάταξη η οποία επεκτείνει μια μερική διάταξη ονομάζεται *γραμμική επέκταση* (linear extension).

Το Θεώρημα 11.12 μας πληροφορεί ότι η ολική διάταξη του $\mathrm{Par}(n)$ που ψάχναμε είναι η λεξικογραφική διάταξη (ή, πιο σωστά, η "ανάποδή" της). Έτσι ολοκληρώνεται το πρόγραμμα που ξεκινήσαμε στην αρχή της παραγράφου.

Πόρισμα 11.13. Για $\mu \vdash n$, η ισοτυπική διάσπαση του προτύπου Young δίνεται από

$$\mathrm{M}^\mu \cong_{\mathfrak{S}_n} \bigoplus_{\lambda \geq_{\mathrm{lex}} \mu} \left(\mathcal{S}^\lambda\right)^{m_{\lambda\mu}}, \tag{11.1}$$

όπου $m_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$ με $m_{\lambda\lambda} = 1$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 11.12 έπεται ότι

$$\mathrm{M}^\mu \cong_{\mathfrak{S}_n} \bigoplus_{\lambda \vdash n} \left(\mathcal{S}^\lambda\right)^{m_{\lambda\mu}},$$

όπου

$$m_{\lambda\mu} = \dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{S}^\lambda, \mathrm{M}^\mu)\right),$$

από το Λήμμα 3.6. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 11.11. □

Οι αριθμοί $m_{\lambda\mu}$ που εμφανίζονται στην Ταυτότητα (11.1) ονομάζονται αριθμοί Kostka. Είναι φυσικό να ρωτήσει κανείς τι απαριθμούν. Αργότερα, θα δούμε μια συνδυαστική τους ερμηνεία. Για την ώρα, χρησιμοποιώντας κανείς τον πίνακα χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_4$ μπορεί να υπολογίσει τον πίνακα $(m_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\vdash 4}$, ο οποίος είναι

	(4)	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1,1)$	$(1,1,1,1)$
(4)	1	0	0	0	0
$(3,1)$	1	1	0	0	0
$(2,2)$	1	2	1	0	0
$(2,1,1)$	1	2	1	1	0
$(1,1,1,1)$	1	3	2	3	1

Ποιός είναι ο αντίστοιχος πίνακας για $n = 5$;