

Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

10. Πρότυπα Young (Συνέχεια)

Ας υπολογίσουμε τον χαρακτήρα $\psi^{(2,1)}$ του προτύπου Young

$$M^{(2,1)} = \mathbb{C} \left[\frac{\overline{1 \ 2}}{3}, \frac{\overline{1 \ 3}}{2}, \frac{\overline{2 \ 3}}{3} \right]$$

που αντιστοιχεί στην διαμέριση $\lambda = (2, 1)$ του $n = 3$. Έχουμε

	K_{111}	K_{21}	K_3
αντιπρόσωπος	ϵ	$(1 \ 2)$	$(1 \ 2 \ 3)$
$\frac{\overline{1 \ 2}}{3}$	$\frac{\overline{1 \ 2}}{3}$	$\frac{\overline{1 \ 2}}{3}$	$\frac{\overline{2 \ 3}}{3}$
$\frac{\overline{1 \ 3}}{2}$	$\frac{\overline{1 \ 3}}{2}$	$\frac{\overline{2 \ 3}}{3}$	$\frac{\overline{1 \ 2}}{3}$
$\frac{\overline{2 \ 3}}{3}$	$\frac{\overline{2 \ 3}}{3}$	$\frac{\overline{1 \ 3}}{2}$	$\frac{\overline{1 \ 3}}{2}$
$\psi^{(2,1)}$	3	1	0

Τι σας θυμίζει;

Πρόταση 10.4. Για κάθε $\lambda \vdash n$,

$$M^\lambda \cong_{\mathfrak{S}_n} V^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}, \quad (10.1)$$

όπου V^{triv} είναι το τετριμμένο \mathfrak{S}_λ -πρότυπο. Ειδικότερα,

$$\dim(M^\lambda) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_{\ell(\lambda)}!}.$$

Απόδειξη. Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται άμεσα απαριθμώντας το πλήθος των ταμπλοειδών σχήματος λ (γιατί;). Εναλλακτικά, υπολογίζοντας τις διαστάσεις και στα δυο μέλη του ισομορφισμού 10.1, έπεται ότι

$$\begin{aligned}\dim(M^\lambda) &= \dim(V^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}) \\ &= \chi^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}(\epsilon) \\ &= \frac{|\{\pi \in \mathfrak{S}_n : \pi^{-1}\epsilon\pi \in \mathfrak{S}_n\}|}{|\mathfrak{S}_\lambda|} \\ &= \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_{\ell(\lambda)}!},\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το Πόρισμα 8.6.

Για τον πρώτο ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι το M^λ είναι ισόμορφο με την αναπαράσταση συμπλόκου της \mathfrak{S}_λ στην \mathfrak{S}_n (γιατί;). Πράγματι, θεωρούμε την αντιστοιχία που στέλνει το σύμπλοκο $\epsilon\mathfrak{S}_\lambda$ στο “σύνηθες” ταμπλοειδές

$$[T] = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \cdots & \lambda_1+\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ \hline \lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(\lambda)-1}+1 & \lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(\lambda)-1}+2 & \cdots & n \end{array}$$

και κατά συνέπεια το σύμπλοκο $\pi\mathfrak{S}_n$ στο ταμπλοειδές $\pi[T]$. Η αντιστοιχία αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $\pi\mathfrak{S}_\lambda = \sigma\mathfrak{S}_\lambda$, τότε $\pi = \sigma\tau$ για κάποια $\tau \in \mathfrak{S}_\lambda$ ή ισοδύναμα για κάποια $\tau \in R(T)$. Όμως,

$$\pi = (\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma$$

όπου $\sigma\tau\sigma^{-1} \in R(\sigma T)$. Συνεπώς, $\pi = w\sigma$, για κάποια $w \in R(\sigma T)$ και για αυτό $\pi[T] = \sigma[T]$, όπως θέλαμε. Επεκτείνοντας γραμμικά προκύπτει ο ζητούμενος \mathfrak{S}_n -ισομορφισμός (γιατί;).

□

11. Πρότυπα Specht

Όπως είδαμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου τα πρότυπα Young δεν είναι ανάγωγα για κάθε διαμέριση λ . Για την ακρίβεια, αν $\lambda = (n)$, τότε

$$M^{(n)} = \mathbb{C} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \right]$$

είναι το τετριμένο S_n -πρότυπο. Αυτή είναι και η μόνη περίπτωση όπου το M^λ είναι ανάγωγο.

Αν $\lambda = (1^n)$ είναι η διαμέριση με n μέρη ίσα με 1, τότε υπάρχουν $n!$ το πλήθος ταμπλοειδή σχήματος (1^n) και κάθε τέτοιο αντιστοιχεί σε μια μετάθεση της S_n ως εξής

$$\begin{array}{c} \overline{\pi_1} \\ \overline{\pi_2} \\ \vdots \\ \overline{\pi_n} \end{array} \mapsto \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n.$$

Συνεπώς, το $M^{(1^n)}$ δεν είναι άλλο από το πρότυπο της κανονικής αναπαράστασης της S_n (γιατί;).

Τέλος, αν $\lambda = (n-1, 1)$, τότε υπάρχουν n το πλήθος ταμπλοειδή σχήματος $(n-1, 1)$ και κάθε ένα από αυτά αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του $[n]$ ως εξής

$$\begin{array}{cccc} * & * & \cdots & * \\ \hline i \end{array} \mapsto i.$$

Συνεπώς, το $M^{(n-1,1)}$ δεν είναι άλλο από το πρότυπο της αναπαράστασης καθορισμού της S_n (γιατί;).

Επιστρέφοντας στον στόχο μας, δηλαδή να κατασκευάσουμε ένα ανάγωγο S_n -πρότυπο S^λ για κάθε $\lambda \vdash n$, συνδυάζοντας τους παραπάνω υπολογισμούς με αυτά που έχουμε δει σε προηγούμενες παραγράφους βρίσκουμε

$$\begin{aligned} M^{(3)} &\cong S^{(3)} \\ M^{(2,1)} &\cong S^{(3)} \oplus S^{(2,1)} \\ M^{(1,1,1)} &\cong S^{(3)} \oplus (S^{(2,1)})^2 \oplus S^{(1,1,1)}, \end{aligned}$$

όπου με $S^{(3)}$, $S^{(2,1)}$ και $S^{(1,1,1)}$ συμβολίσαμε τα πρότυπα της τετριμένης, της συνήθους και της αναπαράστασης προσήμου, αντίστοιχα.

Η παρατήρηση αυτή γεννάει την εξής ιδέα: Να βρούμε μια ολική διάταξη¹

$$\lambda^{(1)} > \lambda^{(2)} > \cdots > \lambda^{(p(n))}$$

στο σύνολο $\text{Par}(n)$ των διαμερίσων του n τέτοια ώστε το $M^{\lambda^{(1)}}$ να είναι ανάγωγο, έστω $S^{\lambda^{(1)}}$, το $M^{\lambda^{(2)}}$ να αποτελείται από κάποια αντίγραφα του $S^{\lambda^{(1)}}$ και ακριβώς ένα αντίγραφο ενός

¹Ολική διάταξη ονομάζεται μια μερική διάταξη (P, \leq) όπου για κάθε δυο στοιχεία $x, y \in P$ ισχύει ότι $x < y$ ή $y < x$.

νέου ανάγωγου προτύπου, έστω $\mathcal{S}^{\lambda^{(2)}}$ κ.ο.κ. μέχρι να εξαντλήσουμε όλες τις διαμερίσεις του n . Για $n = 3$, η ζητούμενη ολική διάτοξη είναι

$$(3) > (2, 1) > (1, 1, 1).$$

Προς αυτή την κατεύθυνση, θα εξερευνήσουμε τις συμμετρίες των Young ταμπλώ.

Ορισμός 11.1. Έστω T ταμπλώ σχήματος $\lambda \vdash n$. Τα στοιχεία

$$\begin{aligned}\nabla_T^+ &:= \sum_{\pi \in R(T)} \pi \\ \nabla_T^- &:= \sum_{\pi \in C(T)} \text{sign}(\pi) \pi\end{aligned}$$

του $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ ονομάζονται [συμμετρικοποιητής γραμμών](#) (row symmetrizer) και [αντισυμμετρικοποιητής στηλών](#) (column antisymmetrizer) του T , αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

τότε

$$\begin{aligned}R(T) &= \mathfrak{S}(\{1, 3, 4\}) \times \mathfrak{S}(\{2, 5\}) \\ C(T) &= \mathfrak{S}(\{3, 5\}) \times \mathfrak{S}(\{1, 2\}) \times \mathfrak{S}(\{4\})\end{aligned}$$

και γι αυτό

$$\begin{aligned}\nabla_T^+ &= (\epsilon + (1\ 3) + (3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3))(\epsilon + (2\ 5)) \\ \nabla_T^- &= \epsilon - (3\ 5) - (1\ 2) + (3\ 5)(1\ 2).\end{aligned}$$

Ορισμός 11.2. Έστω T ένα ταμπλώ σχήματος $\lambda \vdash n$. Το

$$\mathbf{e}_T := \nabla_T^-[T] \in M^\lambda$$

ονομάζεται [πολυταμπλοειδές](#) (polytabloid) και ο υπόχωρος \mathcal{S}^λ που παράγεται από όλα τα \mathbf{e}_T , καθώς το T διατρέχει τα ταμπλώ σχήματος λ ονομάζεται [πρότυπο Specht](#) (Specht module).

Κάθε ταμπλοειδές είναι ουσιαστικά γραμμικός συνδυασμός (με συντελεστές στο \mathbb{Z}) ταμπλοειδών εντός του αντίστοιχου προτύπου Young. Στο παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
 e_{\boxed{3} \boxed{1} \boxed{4} \atop \boxed{5} \boxed{2}} &= (\epsilon - (3\ 5) - (1\ 2) + (3\ 5)(1\ 2)) \frac{\overline{\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 5 & 2 \end{matrix}}} \\
 &= \frac{\overline{\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 5 & 2 \end{matrix}}} - \frac{\overline{\begin{matrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 3 & 2 \end{matrix}}} - \frac{\overline{\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 5 & 1 \end{matrix}}} + \frac{\overline{\begin{matrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 3 & 1 \end{matrix}}} \\
 &= \frac{\overline{\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 2 & 5 \end{matrix}}} - \frac{\overline{\begin{matrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix}}} - \frac{\overline{\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 1 & 5 \end{matrix}}} + \frac{\overline{\begin{matrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix}}}{\overline{\begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix}}} \in M^{(3,2)}.
 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι κάθε πολυταμπλοειδές εξαρτάται από το ταμπλώ T και όχι από το ταμπλοειδές $[T]$ με αντιπρόσωπο T . Ποιό είναι, για παράδειγμα, το πολυταμπλοειδές

$$e_{\boxed{1} \boxed{3} \boxed{4} \atop \boxed{5} \boxed{2}};$$

Επίσης, από τον Ορισμό 11.2 δεν έπεται ότι το πρότυπο Specht είναι όντως \mathfrak{S}_n -πρότυπο.