

## Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας  
Πανεπιστήμιο Κρήτης

### 13. Κανόνες διακλάδωσης

Στο Παράδειγμα 8.7 είδαμε ότι

$$\mathcal{S}^{(n-1)} \uparrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \cong_{\mathfrak{S}_n} V^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \cong_{\mathfrak{S}_n} V^{\text{def}} \cong_{\mathfrak{S}_n} V^{\text{triv}} \oplus V^{\text{std}} \cong_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{S}^{(n)} \oplus \mathcal{S}^{(n-1,1)},$$

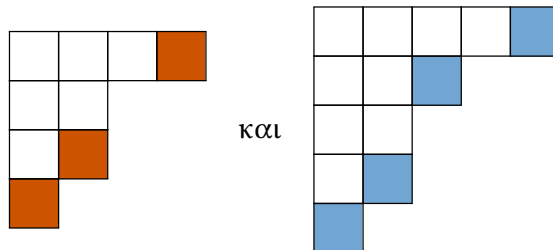
όπου ο τελευταίος ισομορφισμός έπεται από το Παράδειγμα 11.3 (1) και με  $V^{\text{triv}}$ ,  $V^{\text{def}}$  και  $V^{\text{std}}$  συμβολίζουμε το πρότυπο της τετριμμένης αναπαράστασης, της αναπαράστασης καθορισμού και της συνήθους αναπαράστασης, αντίστοιχα, για την κατάλληλη συμμετρική ομάδα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ισοτυπική διάσπαση της επαγωγής του προτύπου Specht που αντιστοιχεί στην διαμέριση  $(n-1)$  στην  $\mathfrak{S}_n$  προκύπτει “επεκτείνοντας” την  $(n-1)$  σε διαμέριση του  $n$  με όλους τους πιθανούς τρόπους. Συνεπώς, είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς το εξής.

**Ερώτημα.** Για  $\lambda \vdash n$ , υπάρχει κάποιος απλός, κατά προτίμηση συνδυαστικός, κανόνας για να υπολογίσουμε τις ισοτυπικές διασπάσεις της επαγωγής και του περιορισμού του  $\mathcal{S}^\lambda$  στην  $\mathfrak{S}_{n+1}$  και  $\mathfrak{S}_{n-1}$ , αντίστοιχα;

Για ακόμα μια φορά, η απάντηση είναι αναπάντεχα απλή. Διαισθητικά, η επαγωγή και ο περιορισμός ενός προτύπου Specht αντιστοιχούν σε προσθαφαίρεση τετραγώνων στο διάγραμμα Young της αντίστοιχης διαμέρισης.

**Ορισμός 13.1.** Για  $\lambda \vdash n$ , έστω  $\mathcal{P}^-(\lambda)$  (αντ.  $\mathcal{P}^+(\lambda)$ ) το σύνολο των διαμερίσεων του  $n-1$  (αντ.  $n+1$ ) των οποίων το διάγραμμα Young προκύπτει από το  $Y_\lambda$  αφαιρώντας (αντ. προσθέτοντας) ακριβώς ένα τετράγωνο, το οποίο ονομάζεται **εσωτερική** (αντ. **εξωτερική**) **γωνία** της  $\lambda$ .

Για παράδειγμα, οι εσωτερικές και εξωτερικές γωνίες της διαμέρισης  $(4, 2, 2, 1)$  είναι



αντίστοιχα, και γι αυτό

$$\mathcal{P}^-(4, 2, 2, 1) = \{(3, 2, 2, 1), (4, 2, 1, 1), (4, 2, 2)\} \subseteq \text{Par}_8$$

$$\mathcal{P}^+(4, 2, 2, 1) = \{(5, 2, 2, 1), (4, 3, 2, 1), (4, 2, 2, 2), (4, 2, 2, 1, 1)\} \subseteq \text{Par}_{10}.$$

**Πρόταση 13.2.** Για κάθε  $\lambda \vdash n$ ,

$$f^\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}^-(\lambda)} f^\mu. \quad (13.1)$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι σε κάθε σύνθετες ταμπλώ περιεχομένου  $[n]$ , το στοιχείο  $n$  καταλαμβάνει μια εσωτερική γωνία του  $\lambda$  (γιατί:). Για παράδειγμα, για  $\lambda = (4, 2, 2, 1) \vdash 9 = n$ , έχουμε

Diagram illustrating the decomposition of the tensor product of two Young diagrams. The first Young diagram (left) has rows of length 4, 2, 2, and 1. The second Young diagram (middle) has rows of length 3, 2, 2, and 1. The resulting Young diagrams (right) are shown, with the first having rows of length 6, 3, 2, and 1, and the second having rows of length 5, 3, 2, and 1. The symbol  $\eta$  is placed between the first and second resulting diagrams.

Αν  $r_1, r_2, \dots, r_k$  είναι οι πιθανές εσωτερικές γωνίες της  $\lambda$ , με τις αντίστοιχες διαμερίσεις του  $\mathcal{P}^-(\lambda)$  να είναι  $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k$ , τότε αφαιρώντας κάθε εσωτερική γωνία που κατέχει το στοιχείο  $n$  και απαριθμώντας τα συνήθη ταμπλώ περιεχομένου  $[n-1]$  που προκύπτουν έπεται ότι

$$f^\lambda = f^{\mu^1} + f^{\mu^2} + \dots + f^{\mu^k}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. Στο παράδειγμα,

$$f^{(4,2,2,1)} = f^{(3,2,2,1)} + f^{(4,2,1,1)} + f^{(4,2,2)}.$$

**Θεώρημα 13.3.** (Κανόνες διακλάδωσης) Για κάθε  $\lambda \vdash n$ ,

$$\mathcal{S}^\lambda \downarrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}^-(\lambda)} \mathcal{S}^\mu \quad (13.2)$$

$$\mathcal{S}^\lambda \uparrow_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} \cong_{\mathfrak{S}_{n+1}} \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}^+(\lambda)} \mathcal{S}^\mu. \quad (13.3)$$

Για την διαμέριση του τρέχοντος παραδείγματος, οι κανόνες διακλάδωσης μας πληροφορούν ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(4,2,2,1)} \downarrow_{\mathfrak{S}_8} &\cong_{\mathfrak{S}_8} \mathcal{S}^{(3,2,2,1)} \oplus \mathcal{S}^{(4,2,1,1)} \oplus \mathcal{S}^{(4,2,2)} \\ \mathcal{S}^{(4,2,2,1)} \uparrow_{\mathfrak{S}_9}^{\mathfrak{S}_{10}} &\cong_{\mathfrak{S}_{10}} \mathcal{S}^{(5,2,2,1)} \oplus \mathcal{S}^{(4,3,2,1)} \oplus \mathcal{S}^{(4,2,2,2)} \oplus \mathcal{S}^{(4,2,2,1,1)}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη που θα δούμε έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη από το σώμα πάνω από το οποίο δουλεύουμε.

Απόδειξη του Θεωρήματος 13.3 (Peel 1975). Αρχικά, ο νόμος αντιστροφής Frobenius και οι σχέσεις ορθογωνιότητας I μας επιτρέπουν να αποδείξουμε την μία από τις δύο ταυτότητες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η Ταυτότητα (13.2). Αν  $\chi^\lambda$  είναι ο χαρακτήρας του  $\mathcal{S}^\lambda$ , τότε για κάθε  $\nu \vdash n+1$

$$\begin{aligned} (\chi^\lambda \uparrow_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}, \chi^\nu)_{\mathfrak{S}_{n+1}} &= (\chi^\lambda, \chi^\nu \downarrow_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}})_{\mathfrak{S}_n} \\ &= \left( \chi^\lambda, \sum_{\mu \in \mathcal{P}^-(\nu)} \chi^\mu \right)_{\mathfrak{S}_n} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda \in \mathcal{P}^-(\nu) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } \nu \in \mathcal{P}^+(\lambda) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από το Θεώρημα 8.8, η δεύτερη ισότητα από την Ταυτότητα (13.2) και η τρίτη ισότητα από το Θεώρημα 7.4. Με άλλα λόγια, το ανάγωγο  $\mathfrak{S}_{n+1}$ -πρότυπο που αντιστοιχεί στην διαμέριση  $\nu$  εμφανίζεται στην ισοτυπική διάσπαση του  $\mathcal{S}^\lambda \uparrow_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}$  αν και μόνο αν  $\nu \in \mathcal{P}^+(\lambda)$  και στην περίπτωση αυτή με πολλαπλότητα 1. Το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 7.5.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την Ταυτότητα (13.2). Γι αυτό τον σκοπό υποθέτουμε ότι οι εσωτερικές γωνίες της  $\lambda$  βρίσκονται στις γραμμές  $r_1, r_2, \dots, r_k$  και έστω  $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k \in \mathcal{P}^-(\lambda)$  οι αντίστοιχες διαμερίσεις του  $n-1$  που προκύπτουν αφαιρώντας τες. Η βασική ιδέα είναι ότι αρκεί να βρούμε μια ακολουθία

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_k = \mathcal{S}^\lambda$$

υποπρότυπων του  $\mathcal{S}^\lambda$ , τα οποία είναι  $\mathfrak{S}_{n-1}$ -πρότυπα τέτοια ώστε τα διαδοχικά πηλίκά τους να ικανοποιούν

$$V_i/V_{i-1} \cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mathcal{S}^{\mu^i},$$

για κάθε  $1 \leq i \leq k$ . Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, από την Άσκηση 3.1 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\lambda &\cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} V_{k-1} \oplus \underbrace{(V_k/V_{k-1})}_{\cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mathcal{S}^{\mu^k}} \\ &\cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} V_{k-2} \oplus \underbrace{(V_{k-1}/V_{k-2})}_{\cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mathcal{S}^{\mu^{k-1}}} \oplus \mathcal{S}^{\mu^k} \\ &\vdots \\ &\cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mathcal{S}^{\mu^1} \oplus \dots \oplus \mathcal{S}^{\mu^{k-1}} \oplus \mathcal{S}^{\mu^k}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Προς αυτή την κατεύθυνση, για κάθε  $1 \leq i \leq k$ , θεωρούμε τον υπόχωρο  $V_i$  του  $\mathcal{S}^\lambda$  που παράγεται από τα πολυταμπλοειδή  $e_T$  για κάθε σύννηθες ταμπλώ σχήματος  $\lambda$  με  $r_T(n) \in \{r_1, r_2, \dots, r_i\}$ . Προφανώς,

- $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_k = \mathcal{S}^\lambda$ , και
- κάθε  $V_i$  είναι  $\mathfrak{S}_{n-1}$ -αναλλοίωτο.

Για κάθε  $1 \leq i \leq k$ , θεωρούμε την απεικόνιση  $\vartheta_i : M^\lambda \rightarrow M^{\mu^i}$  η οποία ορίζεται θέτοντας

$$\vartheta_i([T]) = \begin{cases} [T] \setminus n, & \text{αν } r_T(n) = r_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

όπου με  $[T] \setminus n$  συμβολίζουμε το ταμπλοειδές σχήματος  $\mu^i$  που προκύπτει από το  $[T]$  διαγράφοντας το  $n$ . Επεκτείνοντας γραμμικά κάθε  $\vartheta_i$  προκύπτει ένας καλά ορισμένος  $\mathfrak{S}_{n-1}$ -ομομορφισμός, για κάθε  $1 \leq i \leq k$ . Διαισθητικά, η  $\vartheta_i$  μετατρέπει κάθε ταμπλοειδές σχήματος  $\lambda$  σε ένα ταμπλοειδές σχήματος  $\mu^i$  “κοιτώντας” αν το  $n$  “κάθεται” στην γραμμή  $r_i$ , ενώ διαφορετικά το “σκοτώνει”.

**Ισχυρισμός.** Για κάθε  $1 \leq i \leq k$  και κάθε  $T \in \text{SYT}(\lambda)$  με  $r_T(n) = r_j$  έχουμε

$$\vartheta_i(e_T) = \begin{cases} e_{T \setminus n}, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i < j \end{cases},$$

όπου με  $T \setminus n$  συμβολίζουμε το σύννηθες ταμπλώ σχήματος  $\mu^j$  που προκύπτει από το  $T$  διαγράφοντας το  $n$ .

Ο ισχυρισμός έπεται άμεσα από τον ορισμό της  $\vartheta_i$  και το Λήμμα 12.5, το οποίο μας πληροφορεί ότι στα πολυταμπλοειδή του αναπτύγματος του  $e_T$  στην βάση των ταμπλοειδών του  $M^\lambda$ , το  $n$  βρίσκεται στην ίδια γραμμή ή βορειότερα απ’ ότι στο  $[T]$ .

Άμεση συνέπεια του ισχυρισμού είναι ότι

- (1)  $\vartheta_i(V_i) = S^{\mu^i}$
- (2)  $\vartheta_i(V_{i-1}) = \{0\}$  και γι αυτό<sup>1</sup>  $V_{i-1} \subseteq \text{Ker}(\vartheta_i)$

για κάθε  $1 \leq i \leq k$ . Συνεπώς, από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού και το (1) έπεται ότι

$$S^{\mu^i} \cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} V_i / (V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i)) \quad (13.4)$$

για κάθε  $1 \leq i \leq k$ . Από το (2) έπεται ότι μπορούμε να εκλεπτύνουμε την ακολουθία υποπροτύπων μας, προσθέτοντας του όρους  $V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i)$ , για κάθε  $1 \leq i \leq k$ , δηλαδή

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \cap \text{Ker}(\vartheta_1) \subseteq V_1 \subseteq V_2 \cap \text{Ker}(\vartheta_2) \subseteq \dots \subseteq V_{k-1} \cap \text{Ker}(\vartheta_{k-1}) \subseteq V_k = \mathcal{S}^\lambda.$$

**Ισχυρισμός.** Για κάθε  $1 \leq i \leq k$ ,

$$V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i) = V_{i-1}.$$

<sup>1</sup>Αυτό περιγράφει με σύμβολα αυτό που είπαμε με λόγια στη συζήτηση πριν την διατύπωση του ισχυρισμού.

Πράγματι, από την Πρόταση 13.2 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
 \dim(\mathcal{S}^\lambda) &= f^\lambda \\
 &= \sum_{i=1}^k f^{\mu^i} \\
 &= \sum_{i=1}^k \dim(\mathcal{S}^{\mu^i}) \\
 &= \sum_{i=1}^k \dim(V_i / (V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i))) \\
 &= \sum_{i=1}^k (\dim(V_i) - \dim(V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i))).
 \end{aligned}$$

Επομένως, το “βήμα” από το  $V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i)$  στο  $V_i$  “καλύπτει” όλη τη διαθέσιμη διάσταση αναγκάζοντας

$$\dim(V_{i-1}) - \dim(V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i)) = 0$$

και γι αυτό  $V_{i-1} = V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i)$ , για κάθε  $1 \leq i \leq k$ .

Από τον ισχυρισμό, η Ταυτότητα (13.4) γίνεται

$$\mathcal{S}^{\mu^i} \cong_{\mathfrak{S}_{n-1}} V_i / (V_i \cap \text{Ker}(\vartheta_i)) = V_i / V_{i-1}$$

για κάθε  $1 \leq i \leq k$  και η απόδειξη ολοκληρώνεται.