Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

6. Χαρακτήρες ομάδων: Κατασκευές προτύπων (Συνέχεια)

Απόδειξη Πρότασης 6.6. Έστω (ρ, V) και (σ, W) οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις της G και έστω $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ βάσεις των V και W, αντίστοιχα. Για την Ταυτότητα (6.2), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας της δράσης του g στο $V \oplus W$ έχει την μορφή

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \sigma(g) \end{pmatrix}$$

(γιατί;).

Για την Ταυτότητα (6.3), από το Θεώρημα 6.5 το σύνολο $\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ αποτελεί βάση του $V \otimes W$. Πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα του $\rho(g)$ ως προς αυτή τη βάση. Αν

$$\rho(g) = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{και} \quad \sigma(g) = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$$

τότε

$$\begin{aligned} g \cdot (v_i \otimes w_j) &= \rho(g)(v_i) \otimes \sigma(g)(w_j) \\ &= (\alpha_{1i} v_1 + \cdots + \alpha_{ni} v_n) \otimes (\beta_{1j} w_1 + \cdots + \beta_{mj} w_m) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq m}} \alpha_{ki} \beta_{\ell j}\, v_k \otimes w_\ell, \end{aligned}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$. Με άλλα λόγια, ο πίνακας της δράσης του g στο $V \otimes W$ είναι το γινόμενο Kronecker των $\rho(g)$ και $\sigma(g)$ και γι' αυτό

$$\begin{aligned} \chi^{V \otimes W}(g) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ii} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{jj} \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{jj} \right) \\ &= \mathrm{tr}(\rho(g)) \mathrm{tr}(\sigma(g)) \\ &= \chi^{V}(g) \chi^{W}(g), \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται.

Ημερομηνία: 23 Οκτωβρίου 2025.

Για την Ταυτότητα (6.4), πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα του $\rho(g)$ ως προς αυτή τη δυϊκή βάση $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$. Υποθέτουμε ότι

$$\rho(g^{-1}) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

για $g \in G$ και γι αυτό

$$\rho(g^{-1})(v_i) = \gamma_{1i}v_1 + \gamma_{2i}v_2 + \cdots + \gamma_{ni}v_n.$$

Συνεπώς,

$$\left(g \cdot v_j^*\right)(v_i) = v_j^*\left(\rho(g^{-1})(v_i)\right) = v_j^*(\gamma_{1i}v_1 + \gamma_{2i}v_2 + \cdots + \gamma_{ni}v_n) = \gamma_{ji}$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Με άλλα λόγια ο πίνακας της δράσης του g στο V^* είναι ο ανάστροφος του $\rho(g^{-1})$ και γι αυτό

$$\chi^{V^*}(g) = \operatorname{tr}\left(\rho(g^{-1})^\top\right) = \chi^V(g^{-1}) = \overline{\chi^V(g)},$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από την Άσκηση 2.2 (2).

Τέλος, η Ταυτότητα (6.5) έπεται από τις Ταυτότητες (6.3) και (6.4), σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.5 και την Πρόταση 5.2 (3). □

Οι πρώτες δυο ταυτότητες της Πρότασης 6.6 μας πληροφορούν ότι το άθροισμα και το γινόμενο δυο χαρακτήρων είναι και αυτοί χαρακτήρες κάποιων αναπαραστάσεων, γεγονός το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές εκ των προτέρων.

Παράδειγμα 6.7. Από την συζήτηση της Πραγράφου 2, έπεται ότι η αναπαράσταση καθορισμού V^{def} της $\mathfrak{S}_n$ διασπάται ως

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{def}} &= \mathbb{C}[\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n] \oplus \left(\mathbb{C}[\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n]\right)^\perp \\ &= \underbrace{\mathbb{C}[\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n]}_{\cong V^{\mathrm{triv}}} \oplus \underbrace{\mathbb{C}[\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_n]}_{:= V^{\mathrm{std}}}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Η αναπαράσταση V^{std} ονομάζεται συνήθης (standard) αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_n$ και έχει διάσταση $n-1$. Από την Πρόταση 6.6 (1), ο χαρακτήρας της είναι

$$\chi^{\mathrm{std}}(\pi) = \mathrm{fix}(\pi) - 1,$$

για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

Η αναπαράσταση αυτή είναι *ανάγωγη* και κατά συνέπεια, η Διάσπαση (6.1) είναι η ισοτυπική διάσπαση της αναπαράστασης καθορισμού. Έστω $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^{\mathrm{std}}$ τέτοιο ώστε $v \neq 0$. Θα δείξουμε ότι ο υπόχωρος που παράγεται από την τροχιά του v περιέχει τα στοιχεία $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_n$ και κατά συνέπεια ολόκληρο τον V^{std}. Με άλλα λόγια, ο V^{std} δεν περιέχει γνήσιους $\mathfrak{S}_n$-αναλλοίωτους υπόχωρους διαφορετικούς από το $\{0\}$.

Πράγματι, αφού $v \neq 0$ έπεται ότι $v_i \neq v_{i+1}$ για κάποιο $1 \leq i \leq n-1$ (γιατί;). Αν $s_j := (j\ j+1)$ είναι η αντιμετάθεση που εναλλάσει τα j και $j+1$ και αφήνει όλα τα άλλα σταθερά για κάθε $1 \leq j \leq n-1$, τότε

$$s_i \cdot v = (v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_n)$$

(γιατί;) και γι' αυτό

$$\begin{aligned} v - s_i \cdot v &= (0, \ldots, \underbrace{v_i - v_{i+1}}_{i\text{-οστή θέση}}, \underbrace{v_{i+1} - v_i}_{(i+1)\text{-οστή θέση}}, \ldots, 0) \\ &= \underbrace{(v_i - v_{i+1})}_{\neq 0}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}). \end{aligned}$$

Άρα, $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1} \in \mathbb{C}[\mathcal{O}_v]$ και κατά συνέπεια

$$\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{i+1} = (s_1 s_2 \cdots s_{i-1}) \cdot \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1} \in \mathcal{O}_v$$

(γιατί;) και

$$\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_k = \begin{cases} (s_k s_{k+1} \cdots s_i)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{i+1}), & \text{αν } 2 \leq k \leq i \\ (s_k s_{k+1} \cdots s_{i+1})(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{i+1}), & \text{αν } i+1 \leq k \leq n \end{cases} \in \mathcal{O}_v,$$

που ήταν το ζητούμενο. Τώρα, μπορούμε να ολοκληρώσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_3$

	K_1	K_2	K_3
χ^{triv}	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1
χ^{std}	2	0	-1

.

7. Χαρακτήρες ομάδων: Σχέσεις ορθογωνιότητας

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων για να απαντήσουμε στα δυο από τα τρία ερωτήματα που τέθηκαν στην Παράγραφο 4. Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$.

Ας θυμιθούμε τον πίνακα χαρακτήρων της C_3

	$\{\epsilon\}$	$\{g\}$	$\{g^2\}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	ζ^2	ζ

,

όπου ζ είναι μια τρίτη ρίζα της μονάδας. Αν φανταστούμε τους ανάγωγους χαρακτήρες της C_3 ως διανύσματα του $\mathbb{C}^3$, δηλαδή

$$\chi_1 = (1,1,1), \chi_2 = (1, \zeta, \zeta^2), \text{ και } \chi_3 = (1, \zeta^2, \zeta),$$

και υπολογίσουμε το εσωτερικό τους γινόμενο, τότε παρατηρούμε ότι

$$\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_1 \cdot \chi_3 = \chi_2 \cdot \chi_3 = 0$$
$$\chi_1 \cdot \chi_1 = \chi_2 \cdot \chi_2 = \chi_3 \cdot \chi_3 = 3.$$

Με άλλα λόγια, το σύνολο $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ είναι ορθογώνιο ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^3$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στον να ορίσουμε το εξής.

Ορισμός 7.1. Για δυο συναρτήσεις $\alpha, \beta : G \to \mathbb{C}$ (όχι απαραίτητα χαρακτήρες της G), θέτουμε

$$(\alpha, \beta)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}, \tag{7.2}$$

ή απλούστερα (α, β).

Η απεικόνιση $(-,-)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον χώρο των συναρτήσεων κλάσης $\mathrm{CF}(G)$ (γιατί;). Από την Άσκηση 2.2 (2), αν χ και ψ είναι δυο χαρακτήρες της G, τότε

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}). \tag{7.3}$$

Αν ορίζαμε το $(-,-)$ από το δεξί μέλος της Ταυτότητας (7.3), αντί γι αυτό της Ταυτότητας (7.2), τότε θα είχαμε μια διγραμμική απεικόνιση $\mathrm{CF}(G) \times \mathrm{CF}(G) \to \mathbb{C}$, αντί για εσωτερικό γινόμενο. Παρόλα αυτά, στους χαρακτήρες της G οι δυο τύποι συμφωνούν.

Θεώρημα 7.2. Αν V, W είναι δυο G-πρότυπα, τότε

$$(\chi^V, \chi^W) = \dim\left(\mathrm{Hom}_G(W, V)\right) = \dim\left(\mathrm{Hom}_G(V, W)\right). \tag{7.4}$$

Η Ταυτότητα (7.4) εξηγεί την συμμετρία που παρατηρήσαμε μετά το Λήμμα 3.6. Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.2 βασίζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα, την βασική ιδέα του οποία συναντήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 2.3.

Λήμμα 7.3. Έστω (ρ, V) μια αναπαράσταση της G και

$$V^G := \{v \in V : \rho(g)(v) = v, \text{ για κάθε } g \in G\}.$$

(1) Το V^G είναι υποαναπαράσταση της V.
(2) Η απεικόνιση $\tilde{\rho} : V \to V$ που ορίζεται θέτοντας

$$\tilde{\rho}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v)$$

για κάθε $v \in V$ είναι G-ομομορφισμός.
(3) Ισχύει ότι $\mathrm{Im}(\tilde{\rho}) = V^G$.
(4) Ισχύει ότι

$$\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{\rho, V}(g).$$

Proof. Για το (1), αν $x \in G$ και $v \in V^G$, τότε για κάθε $g \in G$

$$\rho(g)\left(\rho(x)(v)\right) = \rho(gx)(v) = v,$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από το ότι η ρ είναι ομομορφισμός ομάδων και η δεύτερη ισότητα από το ότι $v \in V^G$. Συνεπώς, το V^G είναι G-αναλλοίωτο.

Για το (2), η γραμμικότητα της $\tilde{\rho}$ έπεται άμεσα από την γραμμικότητα της ρ. Για να δείξουμε ότι είναι G-ομομορφισμός, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\tilde{\rho}\left(\rho(x)(v)\right) = \rho(x)\left(\tilde{\rho}(v)\right)$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\rho(x^{-1})\left(\tilde{\rho}\left(\rho(x)(v)\right)\right) = \tilde{\rho}(v)$$

για κάθε $x \in G$ και $v \in V$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\rho(x^{-1})\left(\tilde{\rho}\left(\rho(x)(v)\right)\right) &= \rho(x^{-1})\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\left(\rho(x)(v)\right)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(x^{-1})\left(\rho(g)\left(\rho(x)(v)\right)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(x^{-1}gx)(v) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)(v) \\
&= \tilde{\rho}(v),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη (αντ. τρίτη) ισότητα έπεται από το ότι η ρ είναι γραμμική απεικόνιση (αντ. ομομορφισμός ομάδων) και η τέταρτη από αλλαγή μεταβλητής $h \to x^{-1}gx$ στο άθροισμα.

Για το (3), αν $v \in \mathrm{Im}(\tilde{\rho})$, τότε $v = \tilde{\rho}(v_0)$, για κάποιο $v_0 \in V$ και γι αυτό

$$\begin{aligned}
\rho(x)(\tilde{\rho}(v_0)) &= \rho(x)\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v_0)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(x)\left(\rho(g)(v_0)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(xg)(v_0) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)(v_0) \\
&= \tilde{\rho}(v_0)
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in G$, όπου η δεύτερη (αντ. τρίτη) ισότητα έπεται από το ότι η ρ είναι γραμμική απεικόνιση (αντ. ομομορφισμός ομάδων) και η τέταρτη από αλλαγή μεταβλητής $h \to xg$

στο άθροισμα. Άρα, $v \in V^G$ και γι' αυτό $\mathrm{Im}(\tilde{\rho}) \subseteq V^G$. Για τον άλλο εγκλεισμό, αν $v \in V^G$, τότε

$$\tilde{\rho}(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} v = v$$

που σημαίνει ότι $v \in \mathrm{Im}(\tilde{\rho})$ και γι αυτό $V^G \subseteq \mathrm{Im}(\tilde{\rho})$.

Τέλος, για το (4), παρατηρούμε ότι η $\tilde{\rho}$ είναι *προβολή*, δηλαδή $\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho} = \tilde{\rho}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}\left(\tilde{\rho}(v)\right) &= \tilde{\rho}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v)\right)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\tilde{\rho}\left(\rho(g)(v)\right)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\left(\tilde{\rho}(v)\right)\\ &= \tilde{\rho}(v),\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από την γραμμικότητα της $\tilde{\rho}$ και η τρίτη (αντ. τέταρτη) ισότητα έπεται από το (2) (αντ. (3)). Αυτό έχει ως συνέπεια[1],

$$V = \mathrm{Im}(\tilde{\rho}) \oplus \mathrm{Ker}(\tilde{\rho}),$$

και γι αυτό ο πίνακας του $(\tilde{\rho})$ έχει την εξής μορφή

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\dim(\mathrm{Im}(\tilde{\rho}))} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου I_k είναι ο ταυτοτικός $(k\times k)$-πίνακας. Υπολογίζοντας το ίχνος του έπεται ότι

$$\dim(V^G) = \dim(\mathrm{Im}(\tilde{\rho})) = \mathrm{tr}\left(\tilde{\rho}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\left(\rho(g)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{\rho,V}(g),$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από το (3), και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.2. Για την πρώτη ισότητα της Ταυτότητας 7.4,

$$\begin{aligned}(\chi^V, \chi^W) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^V(g)\overline{\chi^W(g)}\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{\mathrm{Hom}(W,V)}(g)\\ &= \dim\left(\mathrm{Hom}(W,V)^G\right)\\ &= \dim\left(\mathrm{Hom}_G(W,V)\right),\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από την Ταυτότητα (6.5), η τρίτη ισότητα έπεται από το Λήμμα 7.3 και η τέταρτη ισότητα από την Άσκηση 1.4 (2).

[1] Γενικότερα, αν έχουμε μια προβολή $p : V \to V$ σε ένα διανυσματικό χώρο V, τότε $V = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

Για την δεύτερη ισότητα της Ταυτότητας 7.4,

$$(\chi^V, \chi^W) = \overline{(\chi^V, \chi^W)} = (\chi^W, \chi^V) = \dim\left(\mathrm{Hom}_G(V, W)\right),$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την συζυγή συμμετρία του εσωτερικού γινομένου. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 7.2 και το Πόρισμα 3.3 προκύπτει ότι το σύνολο των ανάγωγων χαρακτήρων της G είναι ορθοκανονικό ως προς το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε.

Θεώρημα 7.4. (Σχέσεις ορθογωνιότητας I) Αν V και W είναι ανάγωγα G-πρότυπα, τότε

$$(\chi^V, \chi^W) = \begin{cases} 1, & \text{αν } V \cong_G W \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Πόρισμα 7.5. Αν V είναι G-πρότυπο με ισοτυπική διάσπαση

$$V = V_1^{m_1} \oplus V_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus V_n^{m_n},$$

όπου $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ είναι ένα σύνολο ανά δυο μη ισόμορφων G-προτύπων, τότε

(1) $\chi^V = m_1\chi^{V_1} + m_2\chi^{V_2} + \cdots + m_n\chi^{V_n}$,

(2) $(\chi^V, \chi^{V_i}) = m_i$, για κάθε $1 \leq i \leq n$,

(3) $(\chi^V, \chi^V) = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2$.

Ειδικότερα, το V είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $(\chi^V, \chi^V) = 1$.