Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική
Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Σε ότι ακολουθεί G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, n είναι ένας θετικός ακέραιος και όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$.

Άσκηση 2.1. (Πίνακας χαρακτήρων της διεδρικής ομάδας)
Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$. Έστω

$$\mathrm{D}_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = \epsilon, rsr = s \rangle$$

η διεδρική ομάδα τάξης $2n$. Να δείξετε τα εξής.

(1) Αν $n = 2k$, τότε οι κλάσεις συζυγίας της D_{2n} είναι

$$\{\epsilon\},\ \{r^k\},\ \{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\}, \ldots, \{r^{\pm(k-1)}\},\ \{s, sr^2, \ldots, sr^{2(k-1)}\},\ \{sr, sr^3, \ldots, sr^{2(k-1)+1}\},$$

ενώ αν $n = 2k + 1$, τότε οι κλάσεις συζυγίας της D_{2n} είναι

$$\{\epsilon\},\ \{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\}, \ldots, \{r^{\pm k}\},\ \{s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}.$$

(2) Για $1 \leq k \leq n-1$, η $\rho_k : \mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

$$\rho_k(r) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ -\sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \rho_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

είναι ανάγωγη αναπαράσταση της D_{2n}.

(3) Αν ο n είναι άρτιος (αντ. περιττός), τότε τα ζεύγη (ρ_k, ρ_{n-k}) είναι ισόμορφες αναπαραστάσεις για $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ (αντ. $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$).

(4) Αν ο n είναι άρτιος (αντ. περιττός), τότε το πλήθος των μη ισόμορφων αναπαραστάσεων διάστασης 1 είναι ίσο με τέσσερα (αντ. δύο). Ποιές είναι αυτές;

(5) Υπολογίστε τον πίνακα χαρακτήρων της D_{2n}.

Υπόδειξη: Λύστε την άσκηση πρώτα για $n = 4$ και $n = 5$ και έπειτα γενικεύστε.

Άσκηση 2.2. (Ιδιότητες χαρακτήρων)
Έστω χ ο χαρακτήρας μιας αναπαράστασης (ρ, V) της G. Να δείξετε τα εξής.

(1) Αν $g \in G$ και m ο ελάχιστος μη αρνητικός ακέραιος για τον οποίο $g^m = \epsilon$, τότε το $\chi(g)$ είναι άθροισμα m-οστών ριζών της μονάδας.

(2) Για κάθε $g \in G$, ισχύει ότι $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

(3) Αν g και g^{-1} είναι συζυγή στην G, τότε $\chi(g) \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Για το (1), θεωρήστε την υποομάδα που παράγεται από το g, η οποία είναι ισόμορφη με την C_m. Τι μπορείτε να πείτε για τον πίνακα $\rho(g)$ όταν "περιοριστούμε" σε αυτή τη δράση; Για το (2) (αντ. (3)), χρησιμοποιήστε το (1) (αντί. (2)).

Ημερομηνία: 24 Οκτωβρίου 2025.

Άσκηση 2.3. (Ο χαρακτήρας της αναπαράστασης μεταθέσεων και το Λήμμα του `Burnside`)
Υποθέτουμε ότι η G δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο S και έστω χ ο χαρακτήρας της επαγόμενης αναπαράσταση μεταθέσεων. Να δείξετε τα εξής.

(1) Για κάθε $g \in G$, ισχύει ότι $\chi(g) = |S^g|$, όπου $S^g := \{s \in S : g \cdot s = s\}$.
(2) Η διάσταση του $\mathbb{C}[S]^G$ ισούται με το πλήθος των τροχιών της δράσης της G στο S.
(3) Το πλήθος των τροχιών της δράσης της G στο S ισούται με
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S^g|.$$
(4) Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου χρησιμοποιώντας 3 χρώματα, ως προς κυκλική συμμετρία; Δηλαδή, δυο χρωματισμοί θεωρούνται "ίδιοι" αν διαφέρουν κατά μια στροφή ως προς το κέντρο του εξαγώνου.

Υπόδειξη: Για το (1), δείξτε ότι ο πίνακας του $\rho(g)$ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{C}[S]$ είναι πίνακας μετάθεσης. Για το (2), σκεφτείτε τι σημαίνει για ένα στοιχείο του $\mathbb{C}[S]$ να είναι σταθερό από τη δράση της G. Για το (4), εξετάστε τη δράση της C_6 στο σύνολο όλων των πιθανών χρωματισμών.

Άσκηση 2.4. (Αναμενώμενος αριθμός σταθερών σημείων μιας τυχαίας μετάθεσης)
Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα
$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{fix}(\pi) \quad \text{και} \quad \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{fix}(\pi)^2,$$
όπου $\mathrm{fix}(\pi) := |\{i \in [n] : \pi_i = i\}|$. Ποιός είναι ο αναμενώμενος αριθμός των σταθερών σημείων μιας τυχαίας μετάθεσης;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις ορθογωνιώτητας και την ισοτυπική διάσπαση της αναπαράστασης καθορισμού της $\mathfrak{S}_n$.

Άσκηση 2.5. (Αθροίσματα γραμμών του πίνακα χαρακτήρων)
Έστω ψ_G ο χαρακτήρας της αναπαράστασης μεταθέσεων που επάγεται από τη δράση της G στον εαυτό της με συζυγία. Να δείξετε τα εξής.

(1) Έχουμε
$$\psi_G = \sum_{\chi} \chi\bar{\chi},$$
όπου στο άθροισμα το χ διατρέχει όλους τους ανάγωγους χαρακτήρες της G.
(2) Αν χ είναι ένας ανάγωγος χαρακτήρας της G, τότε
$$\langle \psi_G, \chi \rangle = \sum_{K} \chi(K),$$
όπου στο άθροισμα το K διατρέχει όλες τις κλάσεις συζυγίας της G.
(3) Τα αθροίσματα των στοιχείων των γραμμών του πίνακα χαρακτήρων της G είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Υπόδειξη: Για το (1), χρησιμοποιήστε τις σχέσεις ορθογωνιώτητας και τον την Άσκηση 2.3 (1). Για το (2), χρησιμοποιήστε το (1). Για το (3), χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 7.5.