

Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

8. Περιορισμός, επαγωγή και ο νόμος αντιστροφής Frobenius

Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H υποομάδα της G .

Ερώτημα. Αν γνωρίζουμε τις αναπαραστάσεις της H , τι μπορούμε να πούμε για τις αναπαραστάσεις της G και αντίστροφα;

Αν (ρ, V) είναι μια αναπαράσταση της G , τότε “περιορίζοντας” τη δράση στην H παίρνουμε μια αναπαράσταση της H . Για παράδειγμα, αν $G = \mathfrak{S}_3$ και $H = \{\epsilon, (2\ 3)\}$ είναι η υποομάδα της \mathfrak{S}_3 που παράγεται από το $(2\ 3)$, τότε η αναπαράσταση καθορισμού $(\rho^{\text{def}}, \mathbb{C}[1, 2, 3])$ της \mathfrak{S}_3 “περιορισμένη” στην H

$$\rho^{\text{def}}(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^{\text{def}}((2\ 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

δίνει μια αναπαράσταση της H διάστασης 3.

Ορισμός 8.1. Η αναπαράσταση $(\rho \downarrow_H^G, V)$, όπου $\rho \downarrow_H^G: H \rightarrow \text{GL}(V)$ ορίζεται θέτοντας

$$\rho \downarrow_H^G(h) = \rho(h)$$

για κάθε $h \in H$ ονομάζεται **περιορισμός** (restriction) της (ρ, V) στην H . Ο χαρακτήρας της συμβολίζεται με $\chi^{\rho, V} \downarrow_H^G$ και ικανοποιεί

$$\chi^{\rho, V} \downarrow_H^G(h) = \chi^{\rho, V}(h)$$

για κάθε $h \in H$.

Παρόλο που περιορίζοντας μια αναπαράσταση δεν αλλάζει ο χαρακτήρας της, πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός, καθώς

- ο περιορισμός μιας ανάγωγης αναπαράστασης δεν είναι κατ’ ανάγκη ανάγωγη αναπαράσταση της H
- δυο συζυγή στοιχεία στην G δεν είναι κατ’ ανάγκη συζυγή στοιχεία στην H .

Για παράδειγμα, έστω $G = \mathfrak{S}_3$ και $H = A_3 = \{\epsilon, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ η εναλλάσσουσα υποομάδα. Επειδή $A_3 \cong C_3$, ο περιορισμός της συνήθους αναπαράστασης $\rho^{\text{std}} \downarrow_{A_3}^{\mathfrak{S}_3}$ δεν μπορεί

Ημερομηνία: 4 Νοεμβρίου 2025.

να είναι ανάγωγη (γιατί;). Επίσης, η κλάση συζυγίας $K_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ της \mathfrak{S}_3 “σπάει” σε δύο κλάσεις συζυγίας στην A_3 , η οποία ως κυκλική ομάδα έχει πίνακα χαρακτήρων

	$\{\epsilon\}$	$\{(1\ 2\ 3)\}$	$\{(1\ 3\ 2)\}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	ζ^2	ζ

όπου ζ είναι μια τρίτη ρίζα της μονάδας. Από τον Ορισμό 8.1, έπειτα οτι

	$\{\epsilon\}$	$\{(1\ 2\ 3)\}$	$\{(1\ 3\ 2)\}$
$\chi^{\text{std}} \downarrow_{A_3}^{\mathfrak{S}_3}$	2	-1	-1

και γι αυτό έχουμε την ισοτυπική διάσπαση

$$\chi^{\text{std}} \downarrow_{A_3}^{\mathfrak{S}_3} = \chi_2 + \chi_3,$$

λόγω της σχέσης $\zeta + \zeta^2 = -1$ (γιατί;).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι (σ, W) είναι μια αναπαράσταση της H . Ένας τρόπος να επεκτείνουμε την αναπαράσταση αυτή σε ολόκληρη την G είναι με το να θεωρήσουμε “αντίτυπα” της δράσης της σ σε κάθε συζυγές υποσύνολο¹ της H στην G .

Πιο συγκεκριμένα, έστω $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων των αριστερών κλάσεων της H στην G , δηλαδή

$$G = x_1 H \biguplus x_2 H \biguplus \cdots \biguplus x_k H.$$

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο

$$(\mathbb{C}[x_1] \otimes W) \oplus (\mathbb{C}[x_2] \otimes W) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{C}[x_k] \otimes W), \quad (8.1)$$

όπου $\mathbb{C}[x_i]$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος της κανονικής αναπαράστασης της G που παράγεται από το στοιχείο x_i , για κάθε $1 \leq i \leq k$. Με άλλα λόγια, θεωρήσαμε το ευθύ άθροισμα k “αντίτυπων” της W , ένα για κάθε αντιπρόσωπο των αριστερών κλάσεων της H στην G . Αν $g \in G$, τότε για κάθε $1 \leq j \leq k$, υπάρχει (μοναδικό) $1 \leq i \leq k$ τέτοιο ώστε $gx_j \in x_i H$ και γι αυτό $gx_j = x_i h$ για κάποιο $h \in H$. Δίνουμε στον χώρο (8.1) τη δομή G -προτύπου θέτοντας

$$g \cdot (x_j \otimes w) := x_i \otimes (\sigma(h)(w))$$

για κάθε $g \in G$, $1 \leq j \leq k$ και $w \in W$. Με άλλα λόγια, το g δρα στον προσθεταίο $\mathbb{C}[x_j] \otimes W$ “στέλνοντάς” τον στο $\mathbb{C}[x_i] \otimes W$ και δρώντας στο W με την $\sigma(h)$.

Παράδειγμα 8.2. Ας δούμε την παραπάνω κατασκευή για $G = \mathfrak{S}_3$ και $H = \{\epsilon, (2\ 3)\}$ την υποομάδα που παράγεται από το $(2\ 3)$. Έχουμε την διαμέριση

$$\mathfrak{S}_3 = \underbrace{\mathbb{C}H}_{=\{\epsilon, (2\ 3)\}} \biguplus \underbrace{(1\ 2)H}_{=\{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}} \biguplus \underbrace{(1\ 3)H}_{=\{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}} .$$

¹Τα υποσύνολα της G που είναι συζυγή ως προς την H έχουν την μορφή $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\}$ για κάθε $x \in G$.

Έστω (σ, W) μια ανοιπαράσταση της H . Για κάθε $g \in S_3$, θα υπολογίσουμε τον πίνακα της δράσης του g στον χώρο

$$(\mathbb{C}[\epsilon] \otimes W) \oplus (\mathbb{C}[(1\ 2)] \otimes W) \oplus (\mathbb{C}[(1\ 3)] \otimes W).$$

Τους πίνακες αυτούς θα τους εκφράσουμε ως (3×3) -μπλοκ πίνακες, των οποίων οι γραμμές και οι στήλες καθορίζονται από το τι κάνει το g στον προσθεταίο $\mathbb{C}[x] \otimes W$, για κάθε $x \in \{\epsilon, (1\ 2), (1\ 3)\}$.

Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις $gx_j = x_i h$, ως προς $1 \leq i \leq 3$ και $h \in H$. Έχουμε

g	$g\epsilon$	x_i	h	$g(1\ 2)$	x_i	h	$g(1\ 3)$	x_i	h
ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	ϵ	$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	ϵ
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	ϵ	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$	ϵ	ϵ	ϵ
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	ϵ	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	ϵ	$(2\ 3)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	ϵ	$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	ϵ
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	ϵ	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$

Συνεπώς, οι ζητούμενοι πίνακες είναι

$$\begin{aligned} \epsilon &\mapsto \begin{pmatrix} \epsilon \otimes W & (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \\ (\epsilon \otimes W) \begin{pmatrix} \sigma(\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(\epsilon) \end{pmatrix} \\ (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \end{pmatrix} \\ (1\ 2) &\mapsto \begin{pmatrix} \epsilon \otimes W & (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \\ (\epsilon \otimes W) \begin{pmatrix} 0 & \sigma(\epsilon) & 0 \\ \sigma(\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma((2\ 3)) \end{pmatrix} \\ (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \end{pmatrix} \\ (1\ 3) &\mapsto \begin{pmatrix} \epsilon \otimes W & (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \\ (\epsilon \otimes W) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma(\epsilon) \\ 0 & \sigma((2\ 3)) & 0 \\ \sigma(\epsilon) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \end{pmatrix} \\ (2\ 3) &\mapsto \begin{pmatrix} \epsilon \otimes W & (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \\ (\epsilon \otimes W) \begin{pmatrix} \sigma((2\ 3)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(\epsilon) \\ 0 & \sigma((2\ 3)) & 0 \end{pmatrix} \\ (1\ 2) \otimes W & (1\ 3) \otimes W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(1 \ 2 \ 3) \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon \otimes W & (1 \ 2) \otimes W & (1 \ 3) \otimes W \\ (1 \ 2) \otimes W & 0 & 0 \\ (1 \ 3) \otimes W & \sigma((2 \ 3)) & \sigma(\epsilon) \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 3 \ 2) \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon \otimes W & (1 \ 2) \otimes W & (1 \ 3) \otimes W \\ (1 \ 2) \otimes W & 0 & 0 \\ (1 \ 3) \otimes W & \sigma((2 \ 3)) & \sigma((2 \ 3)) \end{pmatrix}$$

Οι παραπάνω πίνακες είναι όλοι γινόμενα Kronecker (βλ. Παράδειγμα 6.6). Η διάστασή τους είναι $(3 \dim(W))^2$. Τι παρατηρείται; Τι σας θυμίζουν;

Ορισμός 8.3. Το ζεύγος $(\sigma \uparrow_H^G, V)$, όπου V είναι ο διανυσματικός χώρος (8.1) και η απεικόνιση $\sigma \uparrow_H^G: G \rightarrow \text{GL}(V)$ ορίζεται θέτοντας το (i, j) -μπλοκ του $\sigma \uparrow_H^G(g)$ να είναι ίσο με

$$\begin{cases} \sigma(h), & \text{αν } gx_j = x_i h \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} \sigma(x_i^{-1}gx_j), & \text{αν } x_i^{-1}gx_j \in H \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ονομάζεται *επαγωγή* (induction) της (σ, W) στην G .

Πρόταση 8.4. Η επαγωγή της (σ, W) στην G είναι αναπαράσταση της G διάστασης $\frac{|G|}{|H|} \dim(W)$.

Απόδειξη. Αρχικά, η απεικόνιση $\sigma \uparrow_H^G$ είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή

$$\sigma \uparrow_H^G(g) \in \text{GL}(V)$$

για κάθε $g \in G$. Αυτό έπειται από το ότι κάθε $\sigma \uparrow_H^G(g)$ είναι μπλοκ-πίνακας μετάθεσης (γιατί;). Πράγματι, από την διαμέριση

$$G = x_1 H \biguplus x_2 H \biguplus \cdots \biguplus x_k H$$

η εξίσωση $gx_j = x_i h$ για σταθερό j έχει μοναδική λύση για κάποιο $1 \leq i \leq k$ και $h \in H$. Συνεπώς, κάθε στήλη του $\sigma \uparrow_H^G(g)$ έχει μοναδικό μη μηδενικό μπλοκ. Ομοίως, για τις γραμμές και το ζητούμενο έπειται.

Μένει λοιπόν, να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\sigma \uparrow_H^G$ είναι ομομορφισμός ομάδων, ή ισοδύναμα ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες

$$\begin{aligned} \epsilon \cdot (x_j \otimes w) &= x_j \otimes w \\ g \cdot (g' \cdot (x_j \otimes w)) &= (gg') \cdot (x_j \otimes w) \end{aligned}$$

για κάθε $g, g' \in G, 1 \leq j \leq k$ και $w \in W$. Η πρώτη ταυτότητα είναι προφανής (γιατί;). Για την δεύτερη, θεωρούμε (μοναδικά) $1 \leq i, i' \leq k$ και $h, h' \in H$ τέτοια ώστε

$$g'x_j = x_{i'}h' \quad (8.2)$$

$$gx_{i'} = x_ih. \quad (8.3)$$

Τότε, έχουμε

$$g \cdot (g' \cdot (x_j \otimes w)) = g \cdot (x_{i'} \otimes (h' \cdot w)) = x_i \otimes ((hh)' \cdot w).$$

Από την άλλη,

$$gg'x_j = gx_{i'}h' = x_ihh'$$

όπου η πρώτη (αντ. δεύτερη) ισότητα έπεται από την Ταυτότητα (8.2) (αντ. (8.3)) και γι αυτό

$$(gg') \cdot (x_j \otimes w) = x_i \otimes ((hh)' \cdot w)$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Αν (σ, W) είναι η τετριμμένη αναπαράσταση της H , τότε η επαγωγή της στην G δεν είναι παρά η αναπαράσταση συμπλόκου που συναντήσαμε στο Παράδειγμα 1.5 (γ). Πράγματι, στη θέση (i, j) ο πίνακας ενός $g \in G$ στην αναπαράσταση συμπλόκου έχει 1 αν και μόνο αν

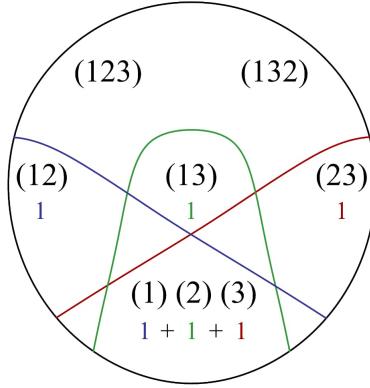
$$g \cdot x_j H = x_i H \Leftrightarrow x_i^{-1} g x_j \in H$$

και 0 διαφορετικά, το οποίο είναι ακριβώς η συνθήκη του Ορισμού 8.3.

Στην περίπτωση της επαγωγής της τετριμμένης αναπαράστασης της H , σε επίπεδο χαρακτήρων, η περιγραφή είναι αρκετά απλή: παίρνουμε ένα αντίγραφο του χ^{triv} για κάθε υποομάδα συζυγή με την H . Στο Παράδειγμα 8.2, έχουμε

	K ₁₁₁	K ₂₁	K ₁₁₁
$\chi^{\text{triv}} \uparrow_H^{\mathfrak{S}_3}$	3	1	1

η οποία δεν είναι άλλη από την αναπαράσταση καθρισμού της \mathfrak{S}_3 . Η εικόνα που έχουμε κατά νου είναι



Γενικότερα, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 8.5. Ο χαρακτήρας της επαγωγής της (σ, W) στην G δίνεται από

$$\chi^{\sigma, W} \uparrow_H^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \chi^{\sigma, W}(x^{-1}gx), \quad (8.4)$$

για κάθε $g \in G$. Ειδικότερα, η επαγωγή ενός H -προτύπου στην G δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπων των αριστερών κλάσεων H στην G .

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 8.3, έπειται ότι

$$\chi^{\sigma, W} \uparrow_H^G (g) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ x_i^{-1}gx_i \in H}} \chi^{\sigma, W}(x_i^{-1}gx_i).$$

Επειδή ο $\chi^{\sigma, W}$ είναι συνάρτηση κλάσης της H έχουμε

$$\chi^{\sigma, W}(x_i^{-1}gx_i) = \chi^{\sigma, W}(h^{-1}(x_i^{-1}gx_i)h),$$

για κάθε $h \in H$. Όμως,

$$h^{-1}(x_i^{-1}gx_i)h \in H \Leftrightarrow x_i^{-1}gx_i \in H$$

για κάθε $h \in H$ και γι αυτό

$$\begin{aligned}\chi^{\sigma,W} \uparrow_H^G(g) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ x_i^{-1}gx_i \in H}} \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi^{\sigma,W}(h^{-1}(x_i^{-1}gx_i)h) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ x_i^{-1}gx_i \in H}} \sum_{h \in H} \chi^{\sigma,W}((x_i h)^{-1}g(x_i h)) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \chi^{\sigma,W}(x^{-1}gx),\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο άθροισμα το $x = x_i h$ διατρέχει τα στοιχεία του G με τον ίδιο τρόπο όπου στα προηγούμενα δυο αθροίσματα τα i και h διατρέχουν το $[k]$ και H , αντίστοιχα. \square

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.5 στον χαρακτήρα της τετριμμένης αναπαράστασης προκύπτει το εξής.

Πόρισμα 8.6. Αν χ^{triv} είναι ο χαρακτήρας της τετριμμένης αναπαράστασης της H , τότε

$$\chi^{\text{triv}} \uparrow_H^G(g) = \frac{1}{|H|} |\{x \in G : x^{-1}gx \in H\}|$$

για κάθε $g \in G$.

Παράδειγμα 8.7. Έστω $(\mathfrak{S}_n)_n$ ο σταθεροποιητής του n στην δράση καθορισμού της \mathfrak{S}_n στο $[n]$. Όπως είδαμε στην Παράγραφο 1, $(\mathfrak{S}_n)_n \cong \mathfrak{S}_{n-1}$. Από το Πόρισμα 8.6,

$$\begin{aligned}\chi^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\pi) &= \frac{1}{(n-1)!} |\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^{-1}(\pi(\sigma(n))) = n\}| \\ &= \frac{1}{(n-1)!} |\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \pi(\sigma(n)) = \sigma(n)\}| \\ &= |\{i \in [n] : \pi(i) = i\}| \\ &= \text{fix}(\pi) \\ &= \chi^{\text{def}}(\pi),\end{aligned}$$

για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Άρα, η επαγωγή της τετριμμένης αναπαράστασης από την \mathfrak{S}_{n-1} στην \mathfrak{S}_n είναι ισόμορφη με την αναπαράσταση καθορισμού της \mathfrak{S}_n . Παρακάτω, θα υπολογίσουμε ταυτότητες για τους χαρακτήρες της επαγωγής της τετριμμένης αναπαράστασης από γενικότερες υποομάδες της \mathfrak{S}_n .

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο, και κατά συνέπεια, τη συζήτηση για την θεωρία χαρακτήρων μιας πεπερασμένης ομάδας με το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στο τρίτο μέρος του μαθήματος.

Θεώρημα 8.8. (Νόμος αντιστροφής Frobenius, 1898) Αν χ και ψ είναι χαρακτήρες της G και H , αντίστοιχα, τότε

$$(\psi \uparrow_H^G, \chi)_G = (\psi, \chi \downarrow_H^G)_H. \quad (8.5)$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 (\psi \uparrow_H^G, \chi)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi \uparrow_H^G(g) \chi(g^{-1}) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \psi(x^{-1}gx) \chi(g^{-1}) \\
 &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{\substack{g \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \psi(x^{-1}gx) \chi(g^{-1}) \\
 &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi(xy^{-1}x^{-1}) \\
 &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi(y^{-1}) \\
 &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi(y^{-1}) \\
 &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi \downarrow_H^G(y^{-1}) \\
 &= (\psi, \chi \downarrow_H^G)_H,
 \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα έπειται από την Ασκηση 2.2 (2), η δεύτερη ισότητα από την Πρόταση 8.5, η τέταρτη ισότητα από την αλλαγή μεταβλητών $y \rightarrow x^{-1}gx$ και η πέμπτη ισότητα από το ότι ο χ είναι συνάρτηση κλάσης. \square

Ο νόμος αντιστροφής Frobenius μας πληροφορεί ότι οι κατασκευές του περιορισμού και της επαγωγής συνδέονται από μια σχέση “δυϊκότητας”, η οποία μας θυμίζει τη σχέση που ικανοποιούν οι προσαρτημένοι πίνακες σε έναν διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Από αυτή την οπτική, η κατασκευή της επαγωγής μοιάζει “φυσική”.