Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στην παράγραφο 7, λίγο αργότερα, θα αποδείξουμε τα εξής:

- Δυο αναπαραστάσεις είναι ισόμορφες αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο χαρακτήρα.
- Το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων μιας ομάδας ισούται με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της.

Ας υπολογίσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_5$, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που έχουμε αναπτύξει έως τώρα.

Παράδειγμα. (Πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_5$)
Η $\mathfrak{S}_5$ έχει επτά κλάσεις συζυγίας

	K_{11111}	K_{2111}	K_{221}	K_{311}	K_{32}	K_{41}	K_{5}
αντιπρόσωπος	ϵ	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)(4\ 5)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$
πληθάριθμος	1	10	15	20	20	30	24

Στην Παράγραφο 9, θα βρούμε έναν τύπο για το πληθάριθμο μιας αυθαίρετης κλάσης συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$.

Έχουμε συναντήσει τρεις ανάγωγους χαρακτήρες της $\mathfrak{S}_5$, τους χαρακτήρες της τετριμμένης αναπαράστασης, της αναπαράστασης προσήμου και της συνήθους αναπαράστασης. Στον υπολογισμό του πίνακα χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_4$, είδαμε ότι και το γινόμενο των δυο τελευταίων χαρακτήρων είναι και αυτός ανάγωγος χαρακτήρας. Οπότε

	K_{11111}	K_{2111}	K_{221}	K_{311}	K_{32}	K_{41}	K_{5}
χ^{triv}	1	1	1	1	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ^{std}	4	2	0	1	-1	0	-1
$\chi^{\mathrm{std}}\chi^{\mathrm{sign}}$	4	-2	0	1	1	0	-1

Ψάχνουμε τρεις ακόμα, έστω χ_5, χ_6 και χ_7. Αν a, b και c είναι οι διαστάσεις τους, ο τύπος διάστασης

$$120 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 4^2 + a^2 + b^2 + c^2 \ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 86.$$

μας πληροφορεί ότι υπάρχουν τρεις επιλογές $(1, 2, 9), (1, 6, 7)$ και $(5, 5, 6)$. Μπορεί η $\mathfrak{S}_5$ να έχει και άλλη ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης 1;

Ημερομηνία: 29 Οκτωβρίου 2025.

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα σκεφτόμαστε ως εξής. Ένας χαρακτήρας διάστασης 1 είναι ουσιαστικά ίδιος με την αντίστοιχη αναπαράσταση, καθώς $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν χ είναι ένα χαρακτήρας διάστασης 1, τότε

$$\chi(gx) = \chi(g)\chi(x) = \chi(x)\chi(g) = \chi(xg),$$

για κάθε $x, g \in G$, όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από την μεταθετικότητα στον $\mathbb{C}$. Με άλλα λόγια, ο χ δεν "βλέπει" την μη μεταθετικότητα στην G. Αν λοιπόν G^{ab} ήταν η ομάδα που προκύπτει από την G εξαναγκάζοντας *όλα* τα στοιχεία της να μετατίθενται, δηλαδή

$$gx \equiv xg$$

για κάθε $x, g \in G$, τότε έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\{\text{χαρακτήρες διάστασης 1 της } G^{ab}\} \longrightarrow \{\text{χαρακτήρες διάστασης 1 της } G\}.$$

Παρέκβαση Θεωρίας Ομάδων. Πιο συγκεκριμένα, έστω $[G, G]$ η υποομάδα της G που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$$gxg^{-1}x^{-1},$$

για κάθε $g, x \in G$. Η $[G, G]$ ονομάζεται *υποομάδα μεταθετών* (commutator subgroup) της G και είναι παράδειγμα *κανονικής υποομάδας*[1] της G. Η ομάδα G^{ab} ορίζεται να είναι η *ομάδα πηλίκο*[2] $G/[G, G]$ και ονομάζεται *αβελιανοποίηση* (abelianization) της G. Η ζητούμενη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία δίνεται από

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(G/[G, G], \mathbb{C} \setminus \{0\}) &\to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \\ f &\mapsto f \circ \mathrm{proj}, \end{aligned}$$

όπου $\mathrm{proj} : G \to G/[G, G]$ είναι η (κανονική) προβολή[3] της G στο $G/[G, G]$.

Παράδειγμα. (Πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_5$, συνέχεια)
Σύμφωνα με τη παραπάνω συζήτηση, για να βρούμε το πλήθος των αναπαραστάσεων διάστασης 1 της $\mathfrak{S}_5$ αρκεί να καθορίσουμε την $\mathfrak{S}^{\mathrm{ab}}$. Στην Παράγραφο 9, θα δούμε ότι κάθε μετάθεση της $\mathfrak{S}_n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων της μορφής

$$(1\ 2),\ (2\ 3),\ \ldots,\ (n-1\ n).$$

Αρκεί λοιπόν να καταλάβουμε τι συμβαίνει αν απαιτήσουμε αυτές να μετατίθενται.

Στην $\mathfrak{S}_5$, οι $(1\ 2)$ και $(2\ 3)$ ικανοποιούν την σχέση

$$(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3).$$

Αν $(1\ 2)(2\ 3) \equiv (2\ 3)(1\ 2)$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$(1\ 2)^2(2\ 3) \equiv (1\ 2)(2\ 3)^2 \ \Rightarrow (1\ 2) \equiv (2\ 3).$$

---

[1]Μεταξύ διάφορων ισοδύναμων διατυπώσεων, μια υποομάδα της G ονομάζεται κανονική αν προκύπτει ως ο πυρήνας κάποιου ομομορφισμού.

[2]Αν N είναι μια κανονική υποομάδα της G, τότε το σύνολο G/N των αριστερών κλάσεων της N στην G με πράξη $xN * yN = xyN$ αποτελεί ομάδα, η οποία ονομάζεται ομάδα πηλίκο.

[3]Αν N είναι μια κανονική υποομάδα της G, τότε η απεικόνιση $\mathrm{proj} : G \to G/N$ με $\mathrm{proj}(g) = gN$ έχει πυρήνα ακριβώς το N.

Ομοίως, βλέπουμε ότι

$$(1\ 2) \equiv (2\ 3) \equiv (3\ 4) \equiv (4\ 5)$$

στην $\mathfrak{S}^{\mathrm{ab}}$. Με άλλα λόγια, παιρνόντας από την $\mathfrak{S}_5$ στην $\mathfrak{S}_5^{\mathrm{ab}}$ από τους τέσσερις γεννήτορες μένει μόνο ένας, έστω t, ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη $t^2 = \epsilon$. Άρα,

$$\mathfrak{S}_5 \cong \mathrm{C}_2.$$

Όμως, η κυκλική ομάδα τάξης 2 έχει δύο διαφορετικές ανάγωγες αναπαραστάσεις διάστασης 1 και κατά συνέπεια, η μοναδική τριάδα που μπορεί να υπάρξει για τις διαστάσεις των χ_5, χ_6 και χ_7 είναι η $(5, 5, 6)$.

Παρέκβαση Θεωρίας Ομάδων. (Συνέχεια) Το ίδιο επιχείρημα δουλεύει για κάθε n και γι αυτό η αβελιανοποίηση της συμμετρικής ομάδας είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα τάξης 2. Αν αντί για t χρησιμοποιούσαμε το σύμβολο -1 και κατά συνέπεια κάθε αντιμετάθεση ήταν ισοδύναμη με το -1 στην $\mathfrak{S}_n^{\mathrm{ab}}$, τότε η προβολή $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n^{\mathrm{ab}}$ της προηγούμενης συζήτησης δεν είναι άλλη από τον ομομορφισμό *πρόσημο*

$$\begin{aligned} \mathrm{sign} : \mathfrak{S}_n &\to \{\pm 1\} \\ \pi &\mapsto \mathrm{sign}(\pi). \end{aligned}$$

Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού

$$\ker(\mathrm{sign}) = \{\pi \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{sign}(\pi) = 1\} := \mathrm{A}_n$$

αποτελείται από όλες τις *άρτιες* μεταθέσεις[4], δηλαδή τις μεταθέσεις που γράφονται ως γινόμενο άρτιου πλήθους δυο αντιμεταθέσεων, ονομάζεται *εναλλάσσουσα* (alternating) υποομάδα της $\mathfrak{S}_n$.

Παράδειγμα. (Πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_5$, συνέχεια)
Ψάχνουμε λοιπόν έναν ανάγωγο χαρακτήρα διάστασης 5. Ας θεωρήσουμε τη δράση της $\mathfrak{S}_5$ στο σύνολο

$$\binom{[5]}{2} := \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$$

όλων των υποσυνόλων του $[5]$ με δυο στοιχεία, που επάγεται από τη δράση καθορισμού της $\mathfrak{S}_5$ στο $[5]$. Αν χ είναι ο χαρακτήρας της αντίστοιχης αναπαράστασης μεταθέσεων, τότε από την Άσκηση 2.3 (1) υπολογίζουμε

π	ϵ	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)(4\ 5)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$
$\binom{[5]}{2}^\pi$	$\binom{[5]}{2}$	$\{12, 34, 35, 45\}$	$\{12, 34\}$	$\{45\}$	$\{45\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
χ	10	4	2	1	1	0	0

και γι αυτό

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{120}(10^2 + 10 \cdot 4^2 + 15 \cdot 2^2 + 20 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1^2 + 30 \cdot 0 + 24 \cdot 0) = 3.$$

[4] Στην $\mathfrak{S}_n^{\mathrm{ab}}$ οι άρτιες μεταθέσεις είναι *όλες* ισοδύναμες με το +1, ενώ οι περιττές με το -1. Αυτό είναι που "ξεχωρίζει" ο ομομορφισμός sign.

Άρα ο χ δεν είναι ανάγωγος, πράγμα το οποίο γνωρίζαμε ήδη (γιατί;), αλλά ο υπολογισμός αυτός σε συνδυασμό με το Πόρισμα 7.5 μας πληροφορεί ότι η ισοτυπική του διάσπαση περιέχει ακριβώς τρεις ανάγωγους χαρακτήρες με πολλαπλότητα ένα ο καθένας. Παρατηρούμε ότι

$$(\chi, \chi^{\mathrm{triv}}) = (\chi, \chi^{\mathrm{std}}) = 1.$$

Συνεπώς, αν ψ είναι ο τρίτος ανάγωγος, τότε

$$\chi = \chi^{\mathrm{triv}} + \chi^{\mathrm{std}} + \psi \;\Rightarrow\; \psi = \chi - \chi^{\mathrm{triv}} - \chi^{\mathrm{std}}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από την Πρόταση 6.6. Υπολογίζουμε

	K_{11111}	K_{2111}	K_{221}	K_{311}	K_{32}	K_{41}	K_{5}
ψ	5	1	1	-1	1	-1	0

και γι αυτό

$$(\psi, \psi) = \frac{1}{120}(5^2 + 10 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1^2 + 20 \cdot (-1)^2 + 20 \cdot 1^2 + 30 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot 0) = 1.$$

Επομένως, ο ψ είναι ο ένας από τους δυο ανάγωγους χαρακτήρες διάστασης 5 που ψάχναμε. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι είναι ο χ_5. Τότε ο $\chi_5\chi^{\mathrm{sign}}$ είναι ο χ_6 (γιατί;) και κατά συνέπεια μπορούμε να προσθέσουμε δυο ακόμα γραμμές στον πίνακα χαρακτήρων

	K_{11111}	K_{2111}	K_{221}	K_{311}	K_{32}	K_{41}	K_{5}
χ_5	5	1	1	-1	1	-1	0
χ_6	5	-1	1	-1	-1	1	0

.

Τέλος, όπως και στην περίπτωση της $\mathfrak{S}_4$, έτσι και εδώ για να βρούμε τον τελευταίο χαρακτήρα μπορούμε να κοιτάξουμε στον χαρακτήρα της κανονικής αναπαράστασης της $\mathfrak{S}_5$

	K_{11111}	K_{2111}	K_{221}	K_{311}	K_{32}	K_{41}	K_{5}
χ_5	120	0	0	0	0	0	0

.

Από το Πόρισμα 7.5, έπεται ότι

$$\begin{aligned}\chi^{\mathrm{reg}} &= \chi^{\mathrm{triv}} + \chi^{\mathrm{sign}} + 4\chi^{\mathrm{std}} + 4\chi^{\mathrm{std}}\chi^{\mathrm{sign}} + 5\chi_5 + 5\chi_6 + 6\chi_7 \;\Rightarrow \\ \chi_7 &= \left(\chi^{\mathrm{reg}} - \chi^{\mathrm{triv}} - \chi^{\mathrm{sign}} - 4\chi^{\mathrm{std}} - 4\chi^{\mathrm{std}}\chi^{\mathrm{sign}} - 5\chi_5 - 5\chi_6\right)/6\end{aligned}$$

και γι αυτό

	K_{11111}	K_{2111}	K_{221}	K_{311}	K_{32}	K_{41}	K_{5}
χ_7	6	0	-2	0	0	0	1

.

Συμπερασματικά, ο πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_5$ είναι

	K_{11111}	K_{2111}	K_{221}	K_{311}	K_{32}	K_{41}	K_5
χ^{triv}	1	1	1	1	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ^{std}	4	2	0	1	-1	0	-1
$\chi^{\text{std}}\chi^{\text{sign}}$	4	-2	0	1	1	0	-1
χ_5	5	1	1	-1	1	-1	0
χ_6	5	-1	1	-1	-1	1	0
χ_7	6	0	-2	0	0	0	1

Τι παρατηρείτε;