# Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

## 10. Πρότυπα Young (Συνέχεια)

Ας υπολογίσουμε τον χαρακτήρα $\psi^{(2,1)}$ του προτύπου Young

$$\mathrm{M}^{(2,1)} = \mathbb{C}\left[\begin{array}{cc}1&2\\3&\end{array}, \begin{array}{cc}1&3\\2&\end{array}, \begin{array}{cc}2&3\\3&\end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στην διαμέριση $\lambda = (2,1)$ του $n = 3$. Έχουμε

| | $\mathrm{K}_{111}$ | $\mathrm{K}_{21}$ | $\mathrm{K}_{3}$ |
|---|---|---|---|
| αντιπρόσωπος | $\epsilon$ | $(1\ 2)$ | $(1\ 2\ 3)$ |
| $\begin{array}{cc}1&2\\3&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}1&2\\3&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}1&2\\3&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}2&3\\3&\end{array}$ |
| $\begin{array}{cc}1&3\\2&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}1&3\\2&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}2&3\\3&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}1&2\\3&\end{array}$ |
| $\begin{array}{cc}2&3\\3&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}2&3\\3&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}1&3\\2&\end{array}$ | $\begin{array}{cc}1&3\\2&\end{array}$ |
| $\psi^{(2,1)}$ | 3 | 1 | 0 |

Τι σας θυμίζει;

**Πρόταση 10.4.** Για κάθε $\lambda \vdash n$,

$$\mathrm{M}^{\lambda} \cong_{\mathfrak{S}_n} V^{\mathrm{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}, \tag{10.1}$$

όπου $V^{\mathrm{triv}}$ είναι το τετριμμένο $\mathfrak{S}_\lambda$-πρότυπο. Ειδικότερα,

$$\dim(\mathrm{M}^{\lambda}) = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_{\ell(\lambda)}!}.$$

---

Ημερομηνία: 19 Νοεμβρίου 2025.

*Απόδειξη.* Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται άμεσα απαριθμώντας το πλήθος των ταμπλοειδών σχήματος $\lambda$ (γιατί;). Εναλλακτικά, υπολογίζοντας τις διαστάσεις και στα δυο μέλη του ισομορφισμού 10.1, έπεται ότι

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{M}^\lambda) &= \dim\left(V^{\mathrm{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}\right)\\ &= \chi^{\mathrm{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} (\epsilon)\\ &= \frac{|\{\pi \in \mathfrak{S}_n : \pi^{-1}\epsilon\pi \in \mathfrak{S}_n\}|}{|\mathfrak{S}_\lambda|}\\ &= \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_{\ell(\lambda)}!},\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το Πόρισμα 8.6.

Για τον πρώτο ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathrm{M}^\lambda$ είναι ισόμορφο με την αναπαράσταση συμπλόκου της $\mathfrak{S}_\lambda$ στην $\mathfrak{S}_n$ (γιατί;). Πράγματι, θεωρούμε την αντιστοιχία που στέλνει το σύμπλοκο $\epsilon\mathfrak{S}_\lambda$ στο "σύνηθες" ταμπλοειδές

$$[T] \;=\; \begin{array}{llll} \hline 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \cdots & \lambda_1+\lambda_2 \\ \hline \vdots & \vdots & & \\ \hline \lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(\lambda)-1}+1 & \lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(\lambda)-1}+2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}$$

και κατά συνέπεια το σύμπλοκο $\pi\mathfrak{S}_n$ στο ταμπλοειδές $\pi[T]$. Η αντιστοιχεία αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $\pi\mathfrak{S}_\lambda = \sigma\mathfrak{S}_\lambda$, τότε $\pi = \sigma\tau$ για κάποια $\tau \in \mathfrak{S}_\lambda$ ή ισοδύναμα για κάποια $\tau \in \mathrm{R}(T)$. Όμως,

$$\pi = \left(\sigma\tau\sigma^{-1}\right)\sigma$$

όπου $\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathrm{R}(\sigma T)$. Συνεπώς, $\pi = w\sigma$, για κάποια $w \in \mathrm{R}(\sigma T)$ και γι αυτό $\pi[T] = \sigma[T]$, όπως θέλαμε. Επεκτείνοντας γραμμικά προκύπτει ο ζητούμενος $\mathfrak{S}_n$-ισομορφισμός (γιατί;). □

## 10. Πρότυπα Specht

Όπως είδαμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου τα πρότυπα Young δεν είναι ανάγωγα για κάθε διαμέριση $\lambda$. Για την ακρίβεια, αν $\lambda = (n)$, τότε

$$\mathrm{M}^{(n)} = \mathbb{C}\left[\ \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}\ \right]$$

είναι το τετριμμένο $\mathfrak{S}_n$-πρότυπο. Αυτή είναι και η μόνη περίπτωση όπου το $\mathrm{M}^{\lambda}$ είναι ανάγωγο.

Αν $\lambda = (1^n)$ είναι η διαμέριση με $n$ μέρη ίσα με 1, τότε υπάρχουν $n!$ το πλήθος ταμπλοειδή σχήματος $(1^n)$ και κάθε τέτοιο αντιστοιχεί σε μια μετάθεση της $\mathfrak{S}_n$ ως εξής

$$\begin{array}{c}\hline \pi_1 \\ \hline \pi_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \pi_n \\ \hline\end{array} \ \mapsto\ \pi_1\pi_2\cdots\pi_n.$$

Συνεπώς, το $\mathrm{M}^{(1^n)}$ δεν είναι άλλο από το πρότυπο της κανονικής αναπαράστασης της $\mathfrak{S}_n$ (γιατί;).

Τέλος, αν $\lambda = (n-1,1)$, τότε υπάρχουν $n$ το πλήθος ταμπλοειδή σχήματος $(n-1,1)$ και κάθε ένα από αυτά αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του $[n]$ ως εξής

$$\begin{array}{cccc}\hline * & * & \cdots & * \\ \hline i & & & \\ \cline{1-1}\end{array} \ \mapsto\ i.$$

Συνεπώς, το $\mathrm{M}^{(n-1,1)}$ δεν είναι άλλο από το πρότυπο της αναπαράστασης καθορισμού της $\mathfrak{S}_n$ (γιατί;).

Επιστρέφοντας στον στόχο μας, δηλαδή να κατασκευάσουμε ένα ανάγωγο $\mathfrak{S}_n$-πρότυπο $\mathcal{S}^{\lambda}$ για κάθε $\lambda \vdash n$, συνδυάζοντας τους παραπάνω υπολογισμούς με αυτά που έχουμε δει σε προηγούμενες παραγράφους βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^{(3)} &\cong \mathcal{S}^{(3)} \\ \mathrm{M}^{(2,1)} &\cong \mathcal{S}^{(3)} \oplus \mathcal{S}^{(2,1)} \\ \mathrm{M}^{(1,1,1)} &\cong \mathcal{S}^{(3)} \oplus \left(\mathcal{S}^{(2,1)}\right)^2 \oplus \mathcal{S}^{(1,1,1)},\end{aligned}$$

όπου με $\mathcal{S}^{(3)}, \mathcal{S}^{(2,1)}$ και $\mathcal{S}^{(1,1,1)}$ συμβολίσαμε τα πρότυπα της τετριμμένης, της συνήθους και της αναπαράστασης προσήμου, αντίστοιχα.

Η παρατήρηση αυτή γεννάει την εξής ιδέα: Να βρούμε μια ολική διάταξη[1]

$$\lambda^{(1)} > \lambda^{(2)} > \cdots > \lambda^{(\mathrm{p}(n))}$$

στο σύνολο $\mathrm{Par}(n)$ των διαμερίσων του $n$ τέτοια ώστε το $\mathrm{M}^{\lambda^{(1)}}$ να είναι ανάγωγο, έστω $\mathcal{S}^{\lambda^{(1)}}$, το $\mathrm{M}^{\lambda^{(2)}}$ να αποτελείται από κάποια αντίγραφα του $\mathcal{S}^{\lambda^{(1)}}$ και *ακριβώς* ένα αντίγραφο ενός

[1] *Ολική διάταξη* ονομάζεται μια μερική διάταξη $(P, \leq)$ όπου για κάθε δυο στοιχεία $x, y \in P$ ισχύει ότι $x < y$ ή $y < x$.

νέου ανάγωγου προτύπου, έστω $\mathcal{S}^{\lambda^{(2)}}$ κ.ο.κ. μέχρι να εξαντλήσουμε όλες τις διαμερίσεις του $n$. Για $n = 3$, η ζητούμενη ολική διάταξη είναι

$$(3) > (2,1) > (1,1,1).$$

Προς αυτή την κατεύθυνση, θα εξερευνήσουμε τις συμμετρίες των Young ταμπλώ.

**Ορισμός 11.1.** Έστω $T$ ταμπλώ σχήματος $\lambda \vdash n$. Τα στοιχεία

$$\nabla_T^+ \coloneqq \sum_{\pi \in \mathrm{R}(T)} \pi$$
$$\nabla_T^- \coloneqq \sum_{\pi \in \mathrm{C}(T)} \operatorname{sign}(\pi)\pi$$

του $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ ονομάζονται συμμετρικοποιητής γραμμών (row symmetrizer) και αντισυμμετρικοποιητής στηλών (column antisymmetrizer) του $T$, αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 5 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

τότε

$$\mathrm{R}(T) = \mathfrak{S}(\{1,3,4\}) \times \mathfrak{S}(\{2,5\})$$
$$\mathrm{C}(T) = \mathfrak{S}(\{3,5\}) \times \mathfrak{S}(\{1,2\}) \times \mathfrak{S}(\{4\})$$

και γι αυτό

$$\nabla_T^+ = (\epsilon + (1\ 3) + (3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3))(\epsilon + (2\ 5))$$
$$\nabla_T^- = \epsilon - (3\ 5) - (1\ 2) + (3\ 5)(1\ 2).$$

**Ορισμός 11.2.** Έστω $T$ ένα ταμπλώ σχήματος $\lambda \vdash n$. Το

$$\mathbf{e}_T \coloneqq \nabla_T^-[T] \ \in \ \mathrm{M}^\lambda$$

ονομάζεται πολυταμπλοειδές (polytabloid) και ο υπόχωρος $\mathcal{S}^\lambda$ που παράγεται από όλα τα $\mathbf{e}_T$, καθώς το $T$ διατρέχει τα ταμπλώ σχήματος $\lambda$ ονομάζεται πρότυπο Specht (Specht module).

Κάθε ταμπλοειδές είναι ουσιαστικά γραμμικός συνδυασμός (με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$) ταμπλοειδών εντός του αντίστοιχου προτύπου Young. Στο παράδειγμα,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&4\\\hline 5&2\\\cline{1-2}\end{array}} &= (\epsilon - (3\ 5) - (1\ 2) + (3\ 5)(1\ 2))\,\begin{array}{ccc}\hline 3&1&4\\\hline 5&2\\\cline{1-2}\end{array}\\
&= \begin{array}{ccc}\hline 3&1&4\\\hline 5&2\\\cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{ccc}\hline 5&1&4\\\hline 3&2\\\cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{ccc}\hline 3&2&4\\\hline 5&1\\\cline{1-2}\end{array} + \begin{array}{ccc}\hline 5&2&4\\\hline 3&1\\\cline{1-2}\end{array}\\
&= \begin{array}{ccc}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{ccc}\hline 1&4&5\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{ccc}\hline 2&3&4\\\hline 1&5\\\cline{1-2}\end{array} + \begin{array}{ccc}\hline 2&4&5\\\hline 1&3\\\cline{1-2}\end{array} \in \mathrm{M}^{(3,2)}.
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι κάθε πολυταμπλοειδές εξαρτάται από το ταμπλώ $T$ και όχι από το ταμπλοειδές $[T]$ με αντιπρόσωπο $T$. Ποιό είναι, για παράδειγμα, το πολυταμπλοειδές

$$\mathbf{e}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 5&2\\\cline{1-2}\end{array}}\,;$$

Επίσης, από τον Ορισμό 11.2 δεν έπεται ότι το πρότυπο Specht είναι όντως $\mathfrak{S}_n$-πρότυπο.