Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική
Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Σε ότι ακολουθεί n είναι ένας θετικός ακέραιος, G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$.

Άσκηση 3.1. (Χώρος πηλίκο ως αναπαράσταση)
Έστω V ένα G-πρότυπο και W ένα υποπρότυπο του V. Να δείξετε τα εξής.

(1) Ο (διανυσματικός) χώρος πηλίκο V/W γίνεται G-πρότυπο θέτοντας

$$g \cdot (v + W) = gv + W$$

για κάθε $g \in G$ και $v \in V$.

(2) Έχουμε $V \cong_G W \oplus (V/W)$ (ως G-πρότυπα).

Υπόδειξη: Για το (2), μπορείτε να μιμηθείτε την απόδειξη του Λήμματος 7.3 ώστε να βρείτε μια G-αναλλοίωτη προβολή του V με εικόνα W και πυρήνα ισόμορφο με το V/W.

Άσκηση 3.2. (Ορίζουσα του πίνακα χαρακτήρων)
Έστω $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_r$ οι κλάσεις συζυγίας της G. Αν $X = (\chi(\mathrm{K}_j))_{\chi, j}$ είναι ο πίνακας χαρακτήρων της G, όπου το χ διατρέχει όλους τους διαφορετικούς ανάγωγους χαρακτήρες της G και $1 \leq j \leq r$, τότε να δείξετε ότι

$$|\det(X)|^2 = \frac{|G|^r}{|\mathrm{K}_1||\mathrm{K}_2| \cdots |\mathrm{K}_r|}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ και τις σχέσεις ορθογωνιότητας ΙΙ (βλ. Θεώρημα 7.9).

Άσκηση 3.3. (Εναλλαγή περιορισμού και επαγωγής)
Έστω H μια υποομάδα της G και χ (αντ. ψ) ένας χαρακτήρας της G (αντ. H). Να δείξετε ότι

$$(\psi\ (\chi \downarrow_H)) \uparrow^G = \psi \uparrow^G \chi.$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο καθενός από τα δυο μέλη με έναν αυθαίρετο ανάγωγο χαρακτήρα της G και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Αντιστροφής του Frobenius (βλ. Θεώρημα 8.8).

Άσκηση 3.4. Έστω χ ένας χαρακτήρας του κέντρου $\mathrm{Z}(G)$ της G και $m = \frac{|G|}{|\mathrm{Z}(G)|}$. Να δείξετε ότι

$$\chi \uparrow_{\mathrm{Z}(G)}^{G} (g) = \begin{cases} m\chi(g), & \text{αν } g \in \mathrm{Z}(G) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $g \in G$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 8.5.

Ημερομηνία: 13 Νοεμβρίου 2025.

Άσκηση 3.5. (Σχέσεις Coxeter)
Έστω $s_i := (i\ i+1)$, για κάθε $1 \leq i \leq n-1$ και ϵ η ταυτοτική μετάθεση. Να δείξετε τα εξής.

(1) Το σύνολο $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ παράγει την $\mathfrak{S}_n$.
(2) Οι γειτονικές αντιμεταθέσεις ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} s_i^2 &= \epsilon, && \text{για κάθε } 1 \leq i \leq n-1 \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, && \text{για κάθε } 1 \leq i \leq n-2 \\ s_i s_j &= s_j s_i, && \text{για κάθε } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Για το (1), χρησιμοποιήστε την Πρόταση 9.2 και το γεγονός ότι η $\mathfrak{S}_n$ παράγεται από όλες τις αντιμεταθέσεις. Για παράδειγμα, ποιό είναι το $s_2 s_1 s_2^{-1}$;

Άσκηση 3.6. (Αντιστροφές και πρόσημο)
Για $\pi \in \mathfrak{S}_n$, το ζεύγος (i, j) με $1 \leq i < j \leq n$ τέτοια ώστε $\pi(i) > \pi(j)$ ονομάζεται *αντιστροφή* (inversion) της π. Έστω $\mathrm{Inv}(\pi)$ το σύνολο όλων των αντιστροφών της π και $\mathrm{inv}(\pi) := |\mathrm{Inv}(\pi)|$. Να δείξετε τα εξής.

(1) Αν s_i όπως στην Άσκηση 3.5, τότε

$$\mathrm{inv}(\pi s_i) = \begin{cases} \mathrm{inv}(\pi) + 1, & \text{αν } \pi_i < \pi_{i+1} \\ \mathrm{inv}(\pi) - 1, & \text{αν } \pi_i > \pi_{i+1} \end{cases}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n-1$ και $\pi \in \mathfrak{S}_n$.
(2) Κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $\mathrm{inv}(\pi)$ το πλήθος γειτονικών αντιμεταθέσεων.
(3) Για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$,

$$\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)}.$$

(4) Για κάθε $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}(\pi\sigma) &= \mathrm{sign}(\pi)\mathrm{sign}(\sigma) \\ \mathrm{sign}(\pi^{-1}) &= \mathrm{sign}(\pi). \end{aligned}$$

(5) Ένας k-κύκλος είναι άρτιος αν και μόνο αν το k είναι περιττός.

Υπόδειξη: Για το (1), παρατηρήστε ότι η πs_i είναι η μετάθεση που προκύπτει από την $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$ εναλλάσσοντας τα π_i και π_j.