

Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Για $\lambda \vdash n$, έστω χ^λ ο χαρακτήρας του προτύπου Specht \mathcal{S}^λ .

Άσκηση 5.1. Να δείξετε τα εξής.

(1) Αν $\lambda \vdash n$ και $0 \leq k \leq n-1$, τότε

$$\chi^\lambda((n)) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{αν } \lambda = (n-k, 1^k) \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(2) Για κάθε $n \geq 1$,

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k s_{(n-k, 1^k)}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Murnaghan–Nakayama.

Άσκηση 5.2. (Εκτιμήσεις συμμετρικών συναρτήσεων)

Ο ομομορφισμός δακτύλιων $\text{ps}_n : \text{Sym} \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζεται θέτοντας

$$\text{ps}_n(f) = f(1^n) = f(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ το πλήθος}}, 0, 0, \dots)$$

για κάθε $f \in \text{Sym}$ ονομάζεται **πρωταρχική εκτίμηση** τάξης n . Αν λ είναι διαμέριση ακέραιου, να υπολογίσετε το $\text{ps}_n(f_\lambda)$, για κάθε $f \in \{e, h, p\}$.

Σημείωση: Για την περίπτωση της πλήρους ομογενούς συμμετρικής συνάρτησης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε γνωστή πρόταση από τα Διακριτά Μαθηματικά.

Άσκηση 5.3. Για $\lambda \vdash n$, να δείξετε ότι

$$\omega(p_\lambda) = \text{sign}(\lambda) p_\lambda \tag{1}$$

$$\mathcal{S}^{\lambda^\top} \cong_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{S}^\lambda \otimes \mathcal{S}^{(1^n)}, \tag{2}$$

όπου $\text{sign}(\lambda) = (-1)^{n-\ell(\lambda)}$.

Υπόδειξη: Για το (2) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (1) και το ανάπτυγμα των power sum συμμετρικών συναρτήσεων στην βάση των συναρτήσεων Schur.