## Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

### 17. Η χαρακτηριστική απεικόνιση Frobenius (Συνέχεια)

Ας δούμε μια σειρά από συνέπειες του Θεωρήματος 17.3.

**Πόρισμα 17.5.** Για κάθε $\lambda \vdash n$,

$$\mathrm{ch}_n(\varphi^\lambda) = h_\lambda. \tag{17.3}$$

Ειδικότερα,

$$h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\mu} \varphi^\lambda(\mu) p_\mu. \tag{17.4}$$

*Απόδειξη.* Η Ταυτότητα (17.4) έπεται άμεσα από την (17.3). Για την τελευταία, αν $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, τότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_n(\varphi^\lambda) &= \mathrm{ch}_n\left(\chi^{\mathrm{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}\right) \\
&= \mathrm{ch}_n\left(\left(\chi^{(\lambda_1)} \times \chi^{(\lambda_2)} \times \cdots \times \chi^{(\lambda_k)}\right) \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}\right) \\
&= \mathrm{ch}_n\left(\chi^{(\lambda_1)} \circ \chi^{(\lambda_2)} \circ \cdots \circ \chi^{(\lambda_k)}\right) \\
&= \mathrm{ch}_{\lambda_1}\left(\chi^{(\lambda_1)}\right) \mathrm{ch}_{\lambda_2}\left(\chi^{(\lambda_2)}\right) \cdots \mathrm{ch}_{\lambda_k}\left(\chi^{(\lambda_k)}\right) \\
&= s_{(\lambda_1)} s_{(\lambda_2)} \cdots s_{(\lambda_k)} \\
&= h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_k} \\
&= h_\lambda,
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την Ταυτότητα (10.1), η τέταρτη ισότητα έπεται από το Θεώρημα 17.3 και η πέμπτη ισότητα από την Ταυτότητα (17.2). □

**Πόρισμα 17.6.** Για κάθε $\mu \vdash n$,

$$h_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} \mathrm{K}_{\lambda\mu} s_\lambda. \tag{17.5}$$

Ειδικότερα,

$$(s_\lambda, h_\mu) = \mathrm{K}_{\lambda\mu}$$

για διαμερίσεις $\lambda$ και $\mu$ του ίδιου ακεραίου.

*Απόδειξη.* Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται άμεσα από την Ταυτότητα (17.5), η οποία με τη σειρά της έπεται από την Ταυτότητα (17.3) και τον κανόνα του Young. □

---

Ημερομηνία: 16 Δεκεμβρίου 2025.

Το επόμενο πόρισμα μας πληροφορεί ότι οι βάσεις των μονωνυμικών και των πλήρως ομογενών συμμετρικών συναρτήσεων είναι δυϊκές ως προς το εσωτερικό γινόμενο Hall[1].

**Πόρισμα 17.7.** Για διαμερίσεις $\lambda$ και $\mu$,

$$(m_\lambda, h_\mu) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda = \mu \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Από τα Πορίσματα 16.6 και 17.6 έπεται ότι

$$\mathrm{K}_{\lambda\mu} = (s_\lambda, h_\mu) = \sum_{\nu \trianglelefteq \lambda} \mathrm{K}_{\lambda\nu} \, (m_\nu, h_\mu) \, .$$

Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι ο πίνακας με στοιχεία τους αριθμούς Kostka είναι αντιστρέψιμος (γιατί;). □

Για $\lambda \vdash n$, έστω $\psi^\lambda := \chi^{\mathrm{sign}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}$. Το επόμενο πόρισμα αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο με το Πόρισμα 17.5.

**Πόρισμα 17.8.** Για κάθε $\lambda \vdash n$,

$$\mathrm{ch}_n(\psi^\lambda) = e_\lambda. \tag{17.6}$$

Ειδικότερα,

$$e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\mathrm{sign}(\mu)}{\mathrm{z}_\mu} \phi^\lambda(\mu) p_\mu. \tag{17.7}$$

Τα επόμενα αποτελέσματα δεν αποτελούν άμεσα πορίσματα του Θεωρήματος 17.3, αλλά συμπεριλαμβάνονται σε αυτή την ενότητα λόγω της σημασίας τους, καθώς ολοκληρώνουν την εικόνα που αναπτύσσουμε για τις σχέσεις που έχουν οι διάφορες βάσεις του χώρου των συμμετρικών συναρτήσεων μεταξύ τους.

**Θεώρημα 17.9.** (Ορίζουσες Jacobi–Trudi) Αν $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, τότε

$$s_\lambda = \det\left( (h_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^k \right) = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+k-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{\lambda_k-k+1} & h_{\lambda_k-k+2} & \cdots & h_{\lambda_k} \end{vmatrix} \tag{17.8}$$

$$s_{\lambda^\top} = \det\left( (e_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^k \right) = \begin{vmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \cdots & e_{\lambda_1+k-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \cdots & e_{\lambda_2+k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{\lambda_k-k+1} & e_{\lambda_k-k+2} & \cdots & e_{\lambda_k} \end{vmatrix}, \tag{17.9}$$

όπου $h_0 = e_0 = 1$ και $h_i = e_i = 0$ για κάθε $i < 0$.

[1]Συχνά, το εσωτερικό γινόμενο Hall ορίζεται με αυτόν τον τρόπο.

Για παράδειγμα, για $\lambda = (4,2,2,1)$ η Ταυτότητα (17.8) γίνεται[2]

$$s_{4221} = \begin{vmatrix} h_4 & h_5 & h_6 & h_7 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \end{vmatrix}$$
$$= h_{4421} - h_{443} - h_{5321} - h_{533} - h_{5411} + h_{551} + h_{6311} - h_{65} - h_{731} + h_{74}.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι για $\lambda = (1^n)$ η Ταυτότητα (17.8) παίρνει την μορφή

$$e_n = s_{(1^n)} = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{n-1} & h_n \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{n-3} & h_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h_1. \end{vmatrix}$$

Υπολογίζοντας την τελευταία ορίζουσα (αναπτύσσοντας, για παράδειγμα, ως προς την πρώτη στήλη) προκύπτει η Ταυτότητα (15.4), γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία της.

Εφαρμόζωντας την απεικόνιση $\omega$ στις ορίζουσες Jacobi–Trudi προκύπτει άμεσα ότι

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^\top} \tag{17.10}$$

για κάθε διαμέριση $\lambda$, το οποίο με τη σειρά του έχει ως αποτέλεσμα το εξής.

**Πόρισμα 17.10.** Η απεικόνιση $\omega$ είναι ισομετρία ως προς το εσωτερικό γινόμενο Hall.

*Απόδειξη.* Αρκεί να το αποδείξουμε για τις συναρτήσεις Schur (γιατί;). Πράγματι,

$$\begin{aligned} (\omega(s_\lambda), \omega(s_\mu)) &= \left(s_{\lambda^\top}, s_{\mu^\top}\right) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda^\top = \mu^\top \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda = \mu \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\ &= (s_\lambda, s_\mu), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την Ταυτότητα (17.10). □

Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί ότι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την βάση των power sum συμμετρικών συναρτήσεων στην βάση των συναρτήσεων Schur είναι ακριβώς ο πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_n$.

**Πρόταση 17.11.** (Τύπος Frobenius) Για κάθε $\mu \vdash n$,

$$p_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda(\mu) s_\lambda. \tag{17.11}$$

[2]Χάριν εξοικονόμισης χώρου, στους υποδείκτες δεν γράφουμε τις παρενθέσεις και τα κώματα.

Ειδικότερα,

$$(x_1 + x_2 + \cdots)^n = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda s_\lambda.$$

*Απόδειξη.* Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται από την Ταυτότητα (17.11) για $\mu = (n)$. Για την τελευταία, υπολογίζουμε

$$(s_\lambda, p_\mu) = \sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{z_\nu} \chi^\lambda(\nu)(p_\nu, p_\mu) = \chi^\lambda(\mu),$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την Ταυτότητα (16.4) και η τελευταία έπεται από το Παράδειγμα 17.2. □

Παρατηρούμε ότι εξισώνοντας τον συντελεστή του $x_1 x_2 \cdots x_n$ και στα δύο μέλη της ταυτότητας του δεύτερου ισχυρισμού προκύπτει για ακόμη μία φορά ο τύπος διάστασης της $\mathfrak{S}_n$ (γιατί;).

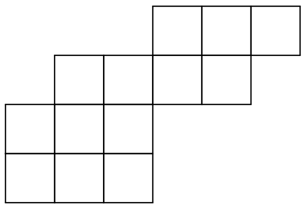
## 18. Ο κανόνας Murnaghan–Nakayama

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η χαρακτηριστική απεικόνιση Frobenius προσφέρει μια "γέφυρα" μεταξύ της θεωρίας αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας και της θεωρίας των συμμετρικών συναρτήσεων, μετατρέποντας το πρόβλημα υπολογισμού διάφορων χαρακτήρων σε πρόβλημα εξαγωγής συντελεστών από ταυτότητες που αφορούν συμμετρικές συναρτήσεις. Τίθεται λοιπόν το ακόλουθο φυσικό ερώτημα.

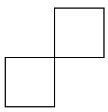
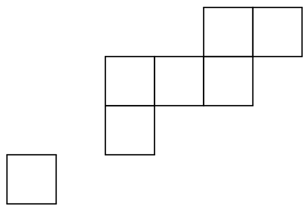
**Ερώτημα.** Μπορούμε να βρούμε έναν "απλό", κατά προτίμηση συνδυαστικό, τύπο για την τιμή του χαρακτήρα του προτύπου Specht;

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μια απάντηση σε αυτό το ερώτημα, η οποία θα προκύψει από έναν κανόνα για το πως να εκφράσουμε το γινόμενο μιας power sum συμμετρικής συνάρτησης και μιας συνάρτησης Schur στην βάση των συναρτήσεων Schur. Προς αυτή την κατεύθυνση, χρειαζόμαστε μια γενίκευση της έννοιας της διαμέρισης ενός ακεραίου.

Έστω $\lambda$ και $\mu$ διαμερίσεις ακεραίων τέτοιες ώστε $\mu \subseteq \lambda$. Το ζεύγος $(\lambda, \mu)$ ονομάζεται λοξή διαμέριση (skew shape) και συμβολίζεται με $\lambda/\mu$. Με $\mathrm{Y}_{\lambda/\mu}$ συμβολίζουμε το σύνολο των τετραγώνων του διαγράμματος Young της $\lambda$ που δεν ανήκουν σε εκείνο της $\mu$. Για παράδειγμα, για $\lambda = (6, 5, 3, 3)$ και $\mu = (3, 1)$, έχουμε

$\mathrm{Y}_{6533/31} =$  .

Μια λοξή διαμέριση ονομάζεται συνεκτική αν το (τοπολογικό) εσωτερικό της ένωσης των τετραγώνων του διαγράμματος Young αυτής είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Η λοξή διαμέριση του προηγούμενου παραδείγματος είναι συνεκτική, ενώ οι

$\mathrm{Y}_{21/1} =$  και $\mathrm{Y}_{6531/422} =$ 

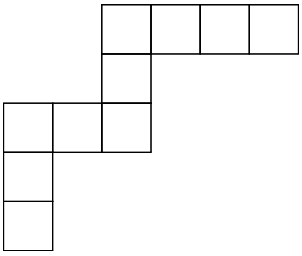
δεν είναι. Με άλλα λόγια, μια λοξή διαμέριση είναι συνεκτική αν κάθε δύο τετράγωνα του διαγράμματος Young αυτής μπορούν να ενωθούν με ένα "μονοπάτι" τετραγώνων που μοιράζονται μια κοινή πλευρά.

**Ορισμός 18.1.** Μια συνεκτική λοξή διαμέριση $\lambda/\mu$ ονομάζεται λωρίδα (ribbon[3]) αν το $\mathrm{Y}_{\lambda\mu}$ δεν περιέχει κανένα $(2 \times 2)$ τετράγωνο. Το ύψος μια λωρίδας ορίζεται ως

$$\mathrm{ht}(\lambda/\mu) := \ell(\lambda/\mu) - 1.$$

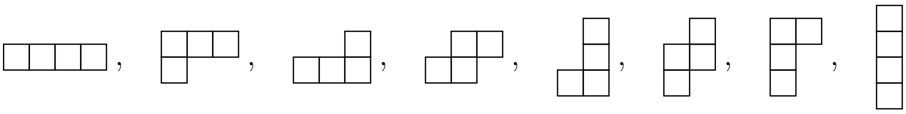
[3]Υπάρχουν διάφορες ονομασίες για τις λωρίδες στην βιβλιογραφία, όπως border strip, rim hook, zigzag shape.

Για παράδειγμα, η λοξή διαμέριση $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ δεν είναι λωρίδα, ενώ η

$\mathrm{Y}_{63311/22} =$ 

είναι λωρίδα ύψους 4.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν οκτώ λωρίδες με 4 τετράγωνα



Γενικότερα, πόσες λωρίδες με $n$ τετράγωνα υπάρχουν;

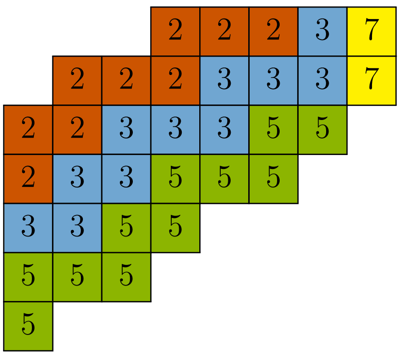
**Ορισμός 18.2.** Έστω $\lambda/\mu$ μια λοξή διαμέριση. Ταμπλώ λωρίδων (ribbon tableau) ονομάζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των τετραγώνων του $\mathrm{Y}_{\lambda\mu}$ και του $\mathbb{Z}_{>0}$ τέτοια ώστε

- τα στοιχεία κάθε γραμμής (αντ. στήλης) αυξάνουν ασθενώς από τα αριστερά προς τα δεξιά (αντ. από πάνω προς τα κάτω)
- για κάθε $i \geq 1$, το σύνολο των τετραγώνων που περιέχουν το $i$ αποτελεί (πιθανώς κενή) λωρίδα.

Το σύνολο όλων των ταμπλώ λωρίδων σχήματος $\lambda/\mu$ συμβολίζεται με $\mathrm{RT}(\lambda/\mu)$. Αν $T \in \mathrm{RT}(\lambda/\mu)$ περιέχει τις λωρίδες $R_1, R_2, \ldots$, τότε το ύψος του $T$ ορίζεται ως

$$\mathrm{ht}(T) \coloneqq \mathrm{ht}(R_1) + \mathrm{ht}(R_2) + \cdots .$$

Ο τύπος ενός ταμπλώ λωρίδων ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως ενός ημισυνήθους ταμπλώ. Για παράδειγμα, το




$\in \mathrm{RT}(8876431/31)$

έχει τύπο $(0, 9, 11, 0, 11, 0, 2, 0, 0, \ldots)$ και ύψος $3 + 4 + 4 + 1 = 12$.

**Θεώρημα 18.3.** (Κανόνας Murnaghan–Nakayama) Για κάθε $\lambda, \mu \vdash n$,

$$\chi^{\lambda}(\mu) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{RT}(\lambda) \\ \mathrm{cont}(T) = \mu}} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}. \tag{18.1}$$

Ειδικότερα, οι ανάγωγοι χαρακτήρες της συμμετρικής ομάδας παίρνουν ακέραιες τιμές.

Για παράδειγμα, για $n = 9, \lambda = (5, 3, 1)$ και $\mu = (4, 4, 1)$ έχουμε δυο ταμπλώ λεωρίδων

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \cline{1-3} 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \cline{1-3} 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

σχήματος $(5, 3, 1)$ και τύπου $(4, 4, 1)$ και γι αυτό ο κανόνας Murnaghan–Nakayama μας πληροφορεί ότι

$$\chi^{(5,3,1)}(4, 4, 1) = (-1)^{2+1+0} + (-1)^{0+1+0} = (-1)^3 + (-1)^1 = -2.$$