

## Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας  
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στην παράγραφο 7, λίγο αργότερα, θα αποδείξουμε τα εξής:

- Δυο αναπαραστάσεις είναι ισόμορφες αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο χαρακτήρα.
- Το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων μιας ομάδας ισούται με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της.

Ας υπολογίσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της  $S_4$ , χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που έχουμε αναπτύξει έως τώρα.

**Παράδειγμα.** (Πίνακας χαρακτήρων της  $S_4$ ) Η  $S_4$  έχει πέντε κλάσεις συζυγίας

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
αντιπρόσωπος	$\epsilon$	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
πληθάριθμος	1	6	3	8	6

Στην Παράγραφο 9, θα βρούμε έναν τύπο για το πληθάριθμο μιας αυθαίρετης κλάσης συζυγίας της  $S_n$ .

Έχουμε συναντήσει τρεις ανάγωγους χαρακτήρες της  $S_4$ , τους χαρακτήρες της τετριμμένης αναπαράστασης, της αναπαράστασης προσήμου και της συνήθους αναπαράστασης

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
$\chi^{\text{triv}}$	1	1	1	1	1
$\chi^{\text{sign}}$	1	-1	1	1	-1
$\chi^{\text{std}}$	3	1	-1	0	-1

Ψάχνουμε δύο ακόμα, έστω  $\chi_4$  και  $\chi_5$ . Αν  $a$  και  $b$  είναι οι διαστάσεις τους, ο τύπος διάστασης

$$24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$$

μας πληροφορεί ότι  $a = 3$  και  $b = 2$ .

Πως θα μπορούσαμε να βρούμε έναν χαρακτήρα διάστασης 3; Από την Πρόταση 6.6 γνωρίζουμε ότι το γινόμενο δυο χαρακτήρων είναι και αυτός χαρακτήρας. Προφανώς, ο πολλαπλασιασμός με τον τετριμμένο χαρακτήρα δεν προσφέρει κάτι καινούργιο (γιατί;). Όμως,

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
$\chi^{\text{std}} \chi^{\text{sign}}$	3	-1	-1	0	1

Θα μπορούσε να είναι ανάγωγος; Υπολογίζουμε

$$(\chi^{\text{std}} \chi^{\text{sign}}, \chi^{\text{std}} \chi^{\text{sign}}) = \frac{1}{24}(3^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1.$$

Συνεπώς, από το Πόρισμα 7.5, ο  $\chi^{\text{std}} \chi^{\text{sign}}$  είναι ανάγωγος και κατά συνέπεια βρήκαμε τον  $\chi_4$ .

Για να βρούμε τον  $\chi_4$ , παρατηρήσαμε ότι πολλαπλασιάζοντας έναν ανάγωγο χαρακτήρα με έναν χαρακτήρα διάστασης 1 προέκυψε ένας ακόμη ανάγωγος χαρακτήρας. Αυτό ισχύει γενικότερα.

**Άσκηση.** Έστω  $G$  πεπερασμένη ομάδα. Αν  $\chi$  είναι ένας ανάγωγος χαρακτήρας της  $G$  και  $\psi$  είναι ένας χαρακτήρας διάστασης 1 της  $G$ , τότε ο  $\chi\psi$  είναι ανάγωγος χαρακτήρας.

**Λύση.** Έχουμε

$$(\chi\psi, \chi\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g)\overline{\chi(g)\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} \left( \psi(g)\overline{\psi(g)} \right).$$

Αφού όμως  $\psi(\epsilon) = 1$ , έπεται ότι

$$\psi(g)\overline{\psi(g)} = \psi(g)\psi(g^{-1}) = \psi(gg^{-1}) = \psi(\epsilon) = 1,$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την Άσκηση 2.2 (2) και η δεύτερη ισότητα έπεται από το ότι ο χαρακτήρας μια αναπαράστασης διάστασης 1 είναι ουσιαστικά το ίδιο με την αντίστοιχη αναπαράσταση. Συνεπώς,

$$(\chi\psi, \chi\psi) = \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = (\chi, \chi) = 1,$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το Πόρισμα 7.5.

**Παράδειγμα.** (Πίνακας χαρακτήρων της  $\mathfrak{S}_4$ , συνέχεια) Συνεχίζοντας, για να βρούμε τον τελευταίο χαρακτήρα, το Πόρισμα 4.2 μας πληροφορεί ότι ο  $\chi_5$  εμφανίζεται στην ισοτυπική διάσπαση του χαρακτήρα της κανονικής αναπαράστασης της  $\mathfrak{S}_4$

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
$\chi^{\text{reg}}$	6	0	0	0	0

Από το Πόρισμα 7.5, έπεται ότι

$$\chi^{\text{reg}} = \chi^{\text{triv}} + \chi^{\text{sign}} + 3\chi^{\text{std}} + 3\chi_4 + 2\chi_5 \Rightarrow \chi_5 = (\chi^{\text{reg}} - \chi^{\text{triv}} - \chi^{\text{sign}} - 3\chi^{\text{std}} - 3\chi_4) / 2$$

και γι αυτό

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
$\chi_5$	2	0	2	-1	0

Συμπερασματικά, ο πίνακας χαρακτήρων της  $\mathfrak{S}_4$  είναι

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
$\chi^{\text{triv}}$	1	1	1	1	1
$\chi^{\text{sign}}$	1	-1	1	1	-1
$\chi^{\text{std}}$	3	1	-1	0	-1
$\chi_4$	3	-1	-1	0	1
$\chi_5$	2	0	2	-1	0

Τι παρατηρείτε;

*Διαμέριση* του συνόλου  $[n]$  ονομάζεται μια συλλογή μη κενών υποσυνόλων  $S_1, S_2, \dots, S_k$  του  $[n]$ , τα οποία λέγονται *μέρη*, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του  $[n]$  να εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάποιο μέρος. Μια τέτοια διαμέριση τη συμβολίζουμε με  $S_1|S_2|\dots|S_k$ . Για παράδειγμα, για  $n = 4$

$k$	1	2	3	4
διαμέριση με $k$ μέρη	1234	1 234	12 3 4	1 2 3 4
		2 134	13 2 4	
		3 124	14 2 3	
		4 123	23 1 4	
		12 34	24 1 3	
		13 24	34 1 2	
		14 23		
πλήθος	1	7	6	1

Το πλήθος των διαμερίσεων του  $[n]$  με  $k$  μέρη συμβολίζεται με  $S(n, k)$  και ονομάζεται *αριθμός Stirling δευτέρου είδους*. Το πλήθος όλων των διαμερίσεων του  $[n]$  συμβολίζεται με  $B(n)$  και ονομάζεται *αριθμός Bell*. Οι δυο αυτές ακολουθίες αριθμών εμφανίζονται συχνά στα Διακριτά Μαθηματικά και σχετίζονται ως εξής

$$B(n) = S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n).$$

**Παράδειγμα.** Έστω  $S = \{12|34, 13|24, 14|23\}$  το σύνολο των διαμερίσεων του  $[4]$  με δύο και δύο μέρη. Η δράση καθορισμού της  $\mathfrak{S}_4$  στο  $[4]$  επάγει μια δράση στο  $S$  με τον προφανή τρόπο. Έστω  $\chi$  ο χαρακτήρας της αντίστοιχης αναπαράστασης μεταθέσεων. Χρησιμοποιώντας την

Άσκηση 2.3 (1) υπολογίζουμε

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
αντιπρόσωπος	$\epsilon$	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
12 34	12 34	12 34	12 34	14 23	14 23
13 24	13 24	14 23	13 24	12 34	13 24
14 23	14 23	13 24	14 23	13 24	12 34
$\chi$	3	1	3	0	1

Ας υπολογίσουμε την ισοτυπική διάσπαση του  $\chi$ . Έχουμε την εξής διάσπαση

$$\mathbb{C}[S] = \underbrace{\mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23]}_{\cong V^{\text{triv}}} \oplus (\mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23])^\perp,$$

όπως και κάθε αναπαράσταση μεταθέσεων. Αν  $\chi^\perp$  είναι ο χαρακτήρας του δεύτερου προσθεταίου της διάσπασης αυτής, τότε από την Πρόταση 6.6 υπολογίζουμε

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
$\chi^\perp$	2	0	2	-1	0

και γι αυτό

$$(\chi^\perp, \chi^\perp) = \frac{1}{24}(2^2 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 0) = 1.$$

Άρα, από το πόρισμα 7.5, ο  $\chi^\perp$  είναι ανάγωγος και η ισοτυπική του διάσπαση είναι

$$\chi = \chi^{\text{triv}} + \chi_5,$$

με τον συμβολισμό του προηγούμενου παραδείγματος.

Ας υπολογίσουμε το  $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_4}(\mathbb{C}[S], V^{\text{def}})$ , όπου  $V^{\text{def}}$  είναι η αναπαράσταση καθορισμού της  $\mathfrak{S}_4$ . Από το Θεώρημα 7.2 γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{S}_4}(\mathbb{C}[S], V^{\text{def}})) &= (\chi^{\text{def}}, \chi) \\ &= \frac{1}{24}(3 \cdot 4 + 6(2 \cdot 1) + 3(3 \cdot 0) + 8(0 \cdot 1) + 6(1 \cdot 0)) \\ &= 1, \end{aligned}$$

όπου  $\chi^{\text{def}}$  είναι ο χαρακτήρας του  $V^{\text{def}}$

	$K_{1111}$	$K_{211}$	$K_{22}$	$K_{31}$	$K_4$
$\chi^{\text{def}}$	4	2	0	1	0

Άρα, υπάρχει μοναδικός  $\mathfrak{S}_4$ -ομομορφισμός  $\mathbb{C}[S] \rightarrow V^{\text{def}}$  ως προς βαθμωτά πολλαπλάσια.

Ένας τέτοιος δίνεται από

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23] \oplus (\mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23])^\perp &\rightarrow V^{\text{triv}} \oplus V^{\text{std}} \\ (v, w) &\mapsto (v, 0) \end{aligned}$$

(γιατί;).