Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

1. Δράσεις ομάδων και αναπαραστάσεις

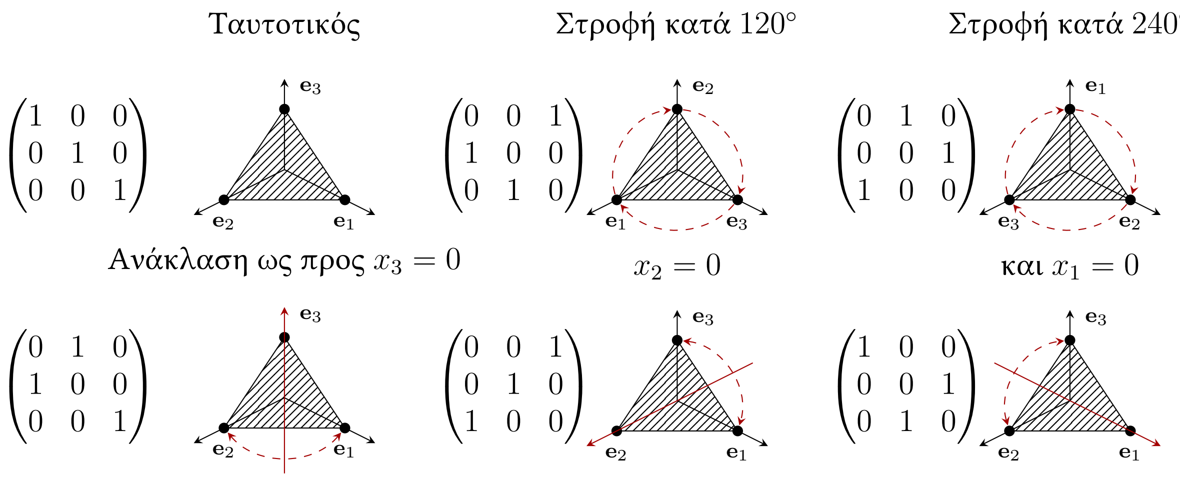
Ομάδα ονομάζεται ένα ζεύγος $(G, *)$, όπου G είναι ένα σύνολο και $* : G \times G \to G$ είναι μια απεικόνιση έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

- Η πράξη $*$ είναι *προσεταιριστική*, δηλαδή $g*(h*f) = (g*h)*f$, για κάθε $g, h, f \in G$.
- Υπάρχει (μοναδικό) στοιχείο $\epsilon \in G$, το οποίο ονομάζεται *ουδέτερο*, τέτοιο ώστε $g*\epsilon = \epsilon * g = g$, για κάθε $g \in G$.
- Για κάθε $g \in G$, υπάρχει (μοναδικό) στοιχείο της G το οποίο συμβολίζουμε με g^{-1} και αποκαλούμε το *αντίστροφο* του g, τέτοιο ώστε $g * g^{-1} = g^{-1} * g = \epsilon$.

Συχνά, οι ομάδες προκύπτουν ως *συμμετρίες* γεωμετρικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, έστω Δ το ισόπλευρο τρίγωνο στον $\mathbb{R}^3$ με κορυφές

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0) \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1).$$

Ποιές *ισομετρίες*, δηλαδή γραμμικοί μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^3$ που διατηρούν τις αποστάσεις, αφήνουν το Δ αναλλοίωτο;



Το σύνολο αυτών των έξι μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση (γιατί;), η οποία ονομάζεται ομάδα συμμετρίας του Δ. Οι ομάδες συμμετρίας τριγώνων μεγαλύτερης διάστασης θα είναι οι πρωταγωνιστές αυτού του μαθήματος.

Ημερομηνία: 30 Σεπτεμβρίου 2025.

Ορισμός 1.1. Έστω S ένα σύνολο. Μετάθεση του S ονομάζεται κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $S \to S$. Το σύνολο $\mathfrak{S}(S)$ όλων των μεταθέσεων του S με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων αποτελεί ομάδα, η οποία ονομάζεται συμμετρική ομάδα του S. Στην περίπτωση όπου S είναι το σύνολο[1] $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε γράφουμε $\mathfrak{S}_n$.

Μια μετάθεση $\pi \in \mathfrak{S}_n$ συνήθως γράφεται στην μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

όπου $\pi_i := \pi(i)$, για κάθε $i \in [n]$, ή ως *λέξη*

$$\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n,$$

ή στην *κυκλική μορφή* ως γινόμενο ξένων κύκλων. Για παράδειγμα,

$$\pi \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \ = \ 341652 \ = \ (1\,3)(2\,4\,6)(5) \ \in \mathfrak{S}_6.$$

Θα δούμε περισσότερα για τις μεταθέσεις και την συμμετρική ομάδα σε επόμενες παραγράφους. Οι μεταθέσεις μπορούν να "αναπαρασταθούν" με πολλούς διαφορετικούς τρόπους κι αυτό τις καθιστά ένα πολύ πλούσιο αντικείμενο μελέτης στην *αλγεβρική συνδυαστική*.

Ένα από τα στοιχεία που κάνουν τις ομάδες ενδιαφέρουσες είναι ότι δρουν σε διάφορα μαθηματικά αντικείμενα.

Ορισμός 1.2. Έστω G μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο ϵ και S ένα σύνολο. Δράση της G πάνω στο S ονομάζεται μια απεικόνιση[2] $\cdot : G \times S \to S$ τέτοια ώστε

- $g \cdot (h \cdot s) = (gh) \cdot s$
- $\epsilon \cdot s = s$

για κάθε $g, h \in G$ και $s \in S$. Στην περίπτωση αυτή το S ονομάζεται G-σύνολο.

Αν S είναι ένα G-σύνολο, τότε η δράση κάθε στοιχείου $g \in G$ στο S μεταθέτει τα στοιχεία του. Πιο συγκεκριμένα, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \sigma_g : S &\to S \\ s &\mapsto gs \end{aligned}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη (γιατί;).

Ένα G-σύνολο επάγει μια *διαμέριση* της S *ταυτίζοντας* όλα εκείνα τα στοιχεία του S τα οποία μπορούν να προκύψουν έπειτα από διαδοχικές εφαρμογές στοιχείων της G. Κάθε τέτοιο υποσύνολο του S

$$\mathcal{O}_s := \{gs : g \in G\}$$

ονομάζεται τροχιά του s. Αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε

$$|\mathcal{O}_s| = \frac{|G|}{|G_s|}, \tag{1.1}$$

[1] Το σύμβολο $:=$ σημαίνει "εξ' ορισμού".

[2] Όπως και με την πράξη της ομάδας, έτσι και εδώ, συχνά θα παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$.

όπου G_s είναι το σύνολο όλων των $g \in G$ τα οποία *σταθεροποιούν* το s, δηλαδή $gs = s$ (γιατί;).

Για παράδειγμα, η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_n$ δρα στο $[n]$ με τον προφανή τρόπο:

$$\pi \cdot i \coloneqq \pi_i.$$

Η δράση αυτή έχει μόνο *μια* τροχιά και κατά συνέπεια $|\mathcal{O}_i| = n$, για κάθε $i \in [n]$. Τέτοιες δράσεις ονομάζονται μεταβατικές. Η Ταυτότητα (1.1) μας πληροφορεί ότι

$$|(\mathfrak{S}_n)_i| = (n-1)!,$$

για κάθε $i \in [n]$. Πράγματι, ο σταθεροποιητής οποιουδήποτε στοιχείου του $[n]$ είναι ένα "αντίγραφο" της $\mathfrak{S}_{n-1}$ (γιατί;).

Δεν είναι όμως όλες οι δράσεις μεταβατικές. Για παράδειγμα, για $n = 5$, θεωρούμε την υποομάδα της $\mathfrak{S}_5$ που παράγεται από τις αντιμεταθέσεις $(1\ 3)$ και $(2\ 5)$. Η δράση αυτή έχει 3 τροχιές (γιατί;) και η επαγόμενη διαμέριση είναι[3]

$$[5] \ = \ \{1,3\} \uplus \{4\} \uplus \{2,5\}.$$

Παράδειγμα 1.3. Έστω G μια ομάδα. Ας δούμε δυο σημαντικά παραδείγματα δράσεων ομάδων.

(1) Έστω H μια υποομάδα της G. Για $g \in G$, το σύνολο

$$gH \coloneqq \{gh : h \in H\}$$

ονομάζεται αριστερό σύμπλοκο της H στην G. Το σύνολο των αριστερών συμπλόκων της H επάγει μια διαμέριση της G, δηλαδή

$$G = t_1 H \biguplus t_2 H \biguplus \cdots \biguplus t_m H$$

για κάποια[4] $t_1, t_2, \ldots, t_m \in G$, με φυσικό τρόπο, ταυτίζοντας δυο αριστερά σύμπλοκα $gH = xH$ αν και μόνο αν $x^{-1}g \in H$.

Για παράδειγμα, αν $G = \mathfrak{S}_3$ και H είναι η υποομάδα που παράγεται από την μετάθεση $(2\ 3)$, τότε έχουμε τη διαμέριση

$$\mathfrak{S}_3 = H \uplus (1\ 2)H \uplus (1\ 3)H.$$

Παρατηρούμε ότι $(1\ 2)H = (1\ 2\ 3)H$ αφού

$$(1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 2) = (1\ 3\ 2)(1\ 2) = (2\ 3) \ \in H.$$

Ομοίως για το $(1\ 3)H = (1\ 3\ 2)H$.

Η G δρα (μεταβατικά) στο σύνολο των αριστερών συμπλόκων της H θέτοντας

$$x \cdot gH = xgH,$$

για κάθε $x, g \in G$. Στην περίπτωση όπου $H = \{\epsilon\}$ είναι η τετριμμένη υποομάδα, τότε η G δρα στον εαυτό της με αριστερό πολλαπλασιασμό.

[3]Το σύμβολο $\uplus$ σημαίνει ξένη ένωση.

[4]Το σύνολο $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ συνήθως ονομάζεται *σύστημα αντιπροσώπων* των αριστερών συμπλόκων της H.

(2) Η G δρα στον εαυτό της με συζυγία, θέτοντας

$$g \cdot x = gxg^{-1}$$

για κάθε $x, g \in G$. Οι τροχιές αυτής της δράσης ονομάζονται κλάσεις συζυγίας. Δυο στοιχεία $t, x \in G$ που ανήκουν στην ίδια τροχιά, δηλαδή αν $x = gtg^{-1}$, για κάποιο $g \in G$ ονομάζονται συζυγή.

Στην περίπτωση όπου η G είναι πεπερασμένη, το πλήθος των στοιχείων μιας κλάσης συζυγίας μπορεί να υπολογιστεί από την Ταυτότητα (1.1). Το να έχει μια κλάση συζυγίας ένα μόνο στοιχείο x σημαίνει ότι $x = gxg^{-1}$, *για κάθε* $g \in G$. Το σύνολο όλων των στοιχείων της G με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται κέντρο της G και συμβολίζεται με $\mathrm{Z}(G)$.

Για παράδειγμα, η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_3$ έχει τρεις κλάσεις συζυγίας:

$$\mathfrak{S}_3 = \{(1\ 2\ 3)\} \uplus \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\} \uplus \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Αργότερα, θα μελετήσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια τις κλάσεις συζυγίας της συμμετρικής ομάδας.

Στην περίπτωση όπου έχουμε ένα G-σύνολο S, μπορούμε να “αναπαραστήσουμε” την G ως υποομάδα της ομάδας συμμετρίας του S. Πιο συγκεκριμένα, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \sigma : G &\to \mathfrak{S}(S) \\ g &\mapsto \sigma_g \end{aligned}$$

είναι *ομομορφισμός ομάδων*, δηλαδή ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sigma(\epsilon) &= \mathrm{id}_S \\ \sigma(gx) &= \sigma_g \sigma_x \end{aligned}$$

για κάθε $g, x \in G$, οπου id_S είναι η ταυτοτική απεικόνιση του S (γιατί;).

Πίσω στο παράδειγμα του τριγώνου Δ, η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_3$ δρα στον $\mathbb{R}^3$, και κατά συνέπεια στο Δ, μεταθέτοντας τα στοιχεία της βάσης του (δηλαδή, τις κορυφές του Δ):

$$w \cdot \mathbf{e}_i := \mathbf{e}_{w_i},$$

για κάθε $w \in \mathfrak{S}_3$ και $1 \leq i \leq 3$. Κάθε $w \in \mathfrak{S}_3$ επάγει μια διαφορετική[5] μετάθεση $\sigma(w)$ (γιατί;). Συνεπώς, η σ είναι “πιστή αναπαράσταση” της $\mathfrak{S}_3$ στην ομάδα συμμετρίας του τριγώνου, η οποίες είναι *ισόμορφες*.

Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο $\mathbb{R}^3$ έχει την έξτρα δομή του *διανυσματικού χώρου* και κάθε μετάθεση $\sigma(w)$ είναι *γραμμικός μετασχηματισμός*. Υπολογίζοντας του πίνακες ως προς

[5]Οι δράσεις με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται πιστές.

τη συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ βρίσκουμε

$$\sigma((1)(2)(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma((1\ 3\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma((1\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma((2\ 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί λοιπόν είναι οι συμμετρίες του Δ που συναντήσαμε νωρίτερα! Αυτή είναι και η βασική ιδέα της αναπαράστασης μιας ομάδας.

Ορισμός 1.4. Έστω G μια ομάδα. Αναπαράσταση της G ονομάζεται ένα ζεύγος (ρ, V), όπου

- V είναι διανυσματικός χώρος
- $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων,

όπου με $\mathrm{GL}(V)$ συμβολίζουμε την ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών του V[6]. Η διάσταση του V ονομάζεται διάσταση (ή βαθμός) της αναπαράστασης.

Με άλλα λόγια, αναπαράσταση της G είναι ένα G-σύνολο V με δομή διανυσματικού χώρου, την οποία "σέβεται" η δράση. Συχνά, αντί για $\rho(g)(v)$ θα γράφουμε απλώς $g \cdot v$, ή ακόμα πιο απλά gv. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το V είναι ένα G-πρότυπο. Επίσης, όταν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση (που είναι και η περίπτωση ενδιαφέροντος για αυτό το μάθημα), τότε διαλέγοντας μια βάση του V μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $\rho(g)$ ως ένα αντιστρέψιμο πίνακα. Σε ότι ακολουθεί, θα εναλλάσσουμε μεταξύ πινάκων και γραμμικών μετασχηματισμών χωρίς να το αναφέρουμε, αλλά θα είναι κατανοητό από τα συμφραζόμενα.

Τι γίνεται όμως αν έχουμε μια δράση σ' ένα σύνολο που δεν έχει (απαραίτητα) τη δομή διανυσματικού χώρου? Κάθε δράση ομάδας επάγει μια αναπαράσταση ως εξής. Έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ ένα G-σύνολο και $\mathbb{F}[S]$ ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από το S[7]. Επεκτείνουμε γραμμικά την δράση στο $\mathbb{F}[S]$ θέτοντας

$$g\left(c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots + c_n s_n\right) \coloneqq c_1 g s_1 + c_2 g s_2 + \cdots + c_n g s_n$$

για κάθε $g \in G$ και $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, δίνοντας έτσι στο $\mathbb{F}[S]$ την δομή G-προτύπου.

Η αντίστοιχη αναπαράσταση ονομάζεται αναπαράσταση μεταθέσεων (permutation representation). Τέτοιου είδους αναπαραστάσεις είναι πολύ σημαντικές, διότι μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε μεθόδους συνδυαστικής για να μελετήσουμε την ομάδα.

[6] Αυτή ονομάζεται γενική γραμμική ομάδα του V.

[7] Στην πράξη θα γράφουμε $\mathbb{F}[s_1, s_2, \ldots, s_n]$ "ξεχνώντας" τις αγκύλες και θα αναφερόμαστε στο S ως τη συνήθη βάση του χώρου αυτού.