Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική
Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 4.1. (Πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_4$ (ξανά))
Για $\lambda \vdash n$, έστω $\rho^\lambda : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_{f^\lambda}(\mathbb{C})$ η αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στο πρότυπο Specht $\mathcal{S}^\lambda$ και χ^λ ο χαρακτήρας της. Υποθέτουμε ότι $n = 4$.

(1) Για κάθε $\lambda \vdash 4$, να βρείτε τις τιμές του χαρακτήρα χ^λ υπολογίζοντας τους πίνακες $\rho^\lambda(\pi)$, για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_4$, στην βάση $\{\mathbf{e}_T : T \in \mathrm{SYT}(\lambda)\}$.
(2) Χρησιμοποιώντας το (1), γράψτε τον πίνακα χαρακτήρων της $\mathcal{S}_4$.

Υπόδειξη: Για κάθε διαμέριση λ, αρκεί να υπολογίσετε τους πίνακες ρ^λ για τις γειτονικές αντιμεταθέσεις και μετά να συνεχίσετε (γιατί;).

Άσκηση 4.2. Έστω Π_4 το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $[4]$. Να υπολογίσετε την ισοτυπική διάσπαση (σε πρότυπα Specht της $\mathfrak{S}_4$) της αναπαράστασης μεταθέσεων που επάγεται από τη δράση καθορισμού της $\mathfrak{S}_4$ στο Π_4.

Άσκηση 4.3. Έστω $1 \leq k \leq n/2$ και S το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία.

(1) Να δείξετε ότι το πρότυπο Young $\mathrm{M}^{(n-k,k)}$ είναι ισόμορφο με το πρότυπο της αναπαράστασης μεταθέσεων που επάγεται από τη δράση καθορισμού της $\mathfrak{S}_n$ στο S.
(2) Να υπολογίσετε το $f^{(n-k,k)}$, χωρίς να χρησιμοποιήσετε την hook-length formula.
(3) Συμπεράνετε ότι $f^{(n,n)} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Υπόδειξη: Για το (2), το Πόρισμα 11.13 (σε συνδυασμό με το (1)) μπορεί να φανεί χρήσιμο.

Άσκηση 4.4. (Μεταβατικότητα της επαγωγής και του περιορισμού)
Έστω G πεπερασμένη ομάδα, K μια υποομάδα της G και H μια υποομάδα της K.

(1) Αν χ είναι ένας χαρακτήρας της G, να δείξετε ότι

$$\left(\chi \downarrow_K^G\right)\downarrow_H^K = \chi \downarrow_H^G .$$

(2) Αν ψ είναι ένας χαρακτήρας της H, να δείξετε ότι

$$\left(\psi \uparrow_H^K\right)\uparrow_K^G = \psi \uparrow_H^G$$

χρησιμοποιώντας τον νόμο αντιστροφής Frobenius (βλ. Θεώρημα 8.8) και το (1).
(3) Για την διαμέριση $\lambda = (4,4,3,1) \vdash 12$, να υπολογίσετε την ισοτυπική διάσπαση των $\mathcal{S}^\lambda \downarrow_{\mathfrak{S}_9}^{\mathfrak{S}_{12}}$ και $\mathcal{S}^\lambda \uparrow_{\mathfrak{S}_{12}}^{\mathfrak{S}_{15}}$.

Ημερομηνία: 2 Δεκεμβρίου 2025.

Άσκηση 4.5. (Η Ταυτότητα `Frobenius-Young`)
Για κάθε $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$, να δείξετε ότι

$$f^{\lambda} = \frac{n!}{\ell_1!\ell_2 \cdots \ell_k!} \prod_{1 \le i < j \le k} (\ell_i - \ell_j),$$

όπου $\ell_i \coloneqq \lambda_i + k - i$, για κάθε $1 \le i \le k$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την hook-length formula (βλ. Θεώρημα 12.8).

Η επόμενη άσκηση είναι προεραιτική.

Άσκηση 4.6. (Στοιχεία `Jucys-Murphy`)
Για κάθε $1 \le k \le n$, έστω

$$\mathrm{m}_k \coloneqq (1\ k) + (2\ k) + \cdots + (k-1\ k) \ \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n],$$

όπου $\mathrm{m}_1 \coloneqq 0$ και

$$\nabla_{[k]} \coloneqq \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_n \\ \pi(i)=i,\ \text{για } i \notin [k]}} \pi \ \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n].$$

Τα $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots, \mathrm{m}_n$ ονομάζονται στοιχεία Jucys–Murphy του $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

(0) Γράψτε όλα τα m_k και $\nabla_{[k]}$ για $n = 3$ και $n = 4$.

(1) Για κάθε $1 \le k \le n$, να δείξετε ότι

$$\nabla_{[k]} = \nabla_{[k-1]} \left(\epsilon + \mathrm{m}_k\right).$$

(2) Να δείξετε ότι

$$\nabla_n \coloneqq (\epsilon + \mathrm{m}_1)(\epsilon + \mathrm{m}_2) \cdots (\epsilon + \mathrm{m}_n),$$

όπου $\nabla_n \coloneqq \nabla_{[n]} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \pi$.