Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Η δράση συζυγίας

Έστω G ομάδα. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.3 (2), η G δρα στον εαυτό της με *συζυγία*:

$$g \cdot x = gxg^{-1}.$$

Οι τροχιές αυτής της δράσης

$$\mathcal{O}_x := \{g \cdot x : g \in G\} = \{gxg^{-1} : g \in G\}$$

ονομάζονται *κλάσεις συζυγίας*. Δυο στοιχεία που ανήκουν στην ίδια τροχιά της δράσης συζυγίας ονομάζονται *συζυγή*. Πιο συγκεκριμένα, αν $y \in \mathcal{O}_x$, τότε

$$y = gxg^{-1}$$

για κάποιο $g \in G$.

Παρατηρήσεις.

(1) Αν $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ είναι η γενική γραμμική ομάδα, δηλαδή η ομάδα των αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{F}$, τότε η συζυγία μεταξύ πινάκων δεν είναι τίποτα άλλο παρά η έννοια της *ομοιότητας*.

(2) Αν η G είναι αβελιανή, τότε

$$gxg^{-1} = x$$

για κάθε $g, x \in G$. Στην περίπτωση αυτή η δράση συζυγίας είναι η *τετριμμένη* δράση. Επιπλέον, κάθε τροχιά της G αποτελείται από ένα και μόνο στοιχείο, δηλαδή

$$\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} : g \in G\} = \{x\}.$$

(3) Η δράση συζυγίας δεν είναι *μεταβατική*. Πράγματι,

$$\mathcal{O}_\epsilon = \{g\epsilon g^{-1} : g \in G\} = \{\epsilon\}$$

και γι' αυτό αν $|G| > 1$, τότε η G έχει τουλάχιστον δυο τροχιές.

(4) Σε μια όχι απαραίτητα αβελιανή ομάδα, αν $\mathcal{O}_x = \{x\}$, τότε $gxg^{-1} = x$, για κάθε $g \in G$. Το σύνολο των στοιχείων που έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή που μετατίθενται με όλα τα στοιχεία της ομάδας, ονομάζεται *κέντρο* της G.

Παράδειγμα. (Κλάσεις συζυγίας της $\mathfrak{S}_3$) Στην $\mathfrak{S}_3$,

π	(1)(2)(3)	(1 2)(3)	(1 3)(2)	(2 3)(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
π^{-1}	(1)(2)(3)	(1 2)(3)	(1 3)(2)	(2 3)(1)	(1 3 2)	(1 2 3)

.

Ημερομηνία: 15 Οκτωβρίου 2025.

Οπότε, υπολογίζουμε

π	$(1)(2)(3)$	$(1\ 2)(3)$	$(1\ 3)(2)$	$(2\ 3)(1)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$\pi(1\ 2\ 3)\pi^{-1}$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$

.

Συνεπώς,

$$\mathcal{O}_{(1\ 2\ 3)} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Ομοίως, υπολογίζουμε

$$\mathcal{O}_{(1\ 2)(3)} = \{(1\ 2)(3), (1\ 3)(2), (2\ 3)(1)\}.$$

Συνεπώς η $\mathfrak{S}_3$ έχει τρεις κλάσεις συζυγίας με 1, 2 και 3 στοιχεία αντίστοιχα και το κέντρο της είναι τετριμμένο, δηλαδή $\mathrm{Z}(\mathfrak{S}_3) = \{\epsilon\}$. Αν δούμε την $\mathfrak{S}_3$ ως ομάδα συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου, τότε οι μη-τετριμμένες κλάσεις συζυγίας απαρτίζονται από τις στροφές και τις ανακλάσεις. Πως το ερμηνεύετε αυτό γεωμετρικά;

Παράδειγμα. (Κλάσεις συζυγίας της D_8) Θυμίζουμε μια παράσταση της διεδρικής ομάδας

$$\mathrm{D}_8 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = \epsilon, rsr = s\rangle.$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα, η οποία υποδεικνύει πως μετατίθεται το s με δυνάμεις του r, είναι

$$r^i s = s r^{-i},$$

για κάθε $1 \leq i \leq n-1$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ταυτότητα, υπολογίζουμε

g	ϵ	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
g^{-1}	ϵ	r^3	r^2	r	s	sr	sr^2	sr^3

.

Οπότε,

g	ϵ	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
grg^{-1}	r	r	r	r	r^3	r^3	r^3	r^3

και γι' αυτό

$$\mathcal{O}_r = \{r, r^3\}.$$

Ομοίως, υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες κλάσεις συζυγίας

$$\mathcal{O}_s = \{s, sr^2\},\ \mathcal{O}_{sr} = \{sr, sr^3\}.$$

Συνεπώς, η D_8 έχει πέντε κλάσεις συζυγίας με 1, 1, 2, 2, και 2 στοιχεία αντίστοιχα και το κέντρο της είναι

$$\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8) = \{\epsilon, r^2\}.$$

Πως το ερμηνεύετε αυτό γεωμετρικά κοιτάζοντας τις συμμετρίες του τετραγώνου;

Υποθέτουμε ότι η G είναι πεπερασμένη. Πόσα στοιχεία έχει μια κλάση συζυγίας της G; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα θυμηθούμε την Ταυτότητα (1.1) (*ταυτότητα απαρίθμησης τροχιών*). Αν η G δρα σε ένα σύνολο S, τότε

$$|\mathcal{O}_s| = \frac{|G|}{|G_s|}, \tag{1}$$

όπου $G_s \coloneqq \{g \cdot s : g \in G\}$ είναι ο σταθεροποητής του s στην G. Ο σταθεροποιητής είναι υποομάδα της G. Πράγματι,

$$(gx) \cdot s = g \cdot (x \cdot s) = g \cdot s = s,$$

για κάθε $g, x \in G_s$ και γι' αυτό $gx \in G_s$.

Απόδειξη Ταυτότητας (1.1). Αρχικά παρατηρούμε ότι[1] το δεξί μέλος απαριθμεί το πλήθος των αριστερών κλάσεων του σταθεροποιητή του s στην G. Πράγματι, έστω k το πλήθος των αριστερών κλάσεων του G_s στην G. Η απεικόνιση

$$\begin{aligned} G_s &\to gG_s \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη (γιατί;) και γι' αυτό κάθε αριστερό σύμπλοκο του G_s στην G έχει $|G_s|$ στοιχεία. Αφού το σύνολο των αριστερών κλάσεων του G_s διαμερίζει την G, έπεται ότι

$$|G| = |G_s|k \;\Leftrightarrow k = \frac{|G|}{|G_s|}.$$

Συνεπώς, για να αποδείξουμε την Ταυτότητα (1.1), αρκεί να βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ϕ μεταξύ της τροχιάς του s και του συνόλου των αριστερών κλάσεων του G_s στην G. Αν $x \in \mathcal{O}_s$, τότε $x = g \cdot s$ για κάποιο $g \in G$ και θέτουμε

$$\phi(x) = gG_s.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη (γιατί;). Για το ένα-προς-ένα, έστω $x, y \in G_s$ με $x = g \cdot s$ και $y = g' \cdot s$, για κάποια $g, g' \in G$ και υποθέτουμε ότι $\phi(x) = \phi(y)$. Τότε

$$gG_s = g'G_s \;\Leftrightarrow\; (g')^{-1}g \in G_s \;\Leftrightarrow\; (g')^{-1}g = h \;\Leftrightarrow\; g = g'h,$$

για κάποιο $h \in G_s$. Άρα,

$$x = g \cdot s = (g'h) \cdot s = g' \cdot h \cdot s = g' \cdot s = y,$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από τις ιδιότητες της δράσης και η τέταρτη ισότητα έπεται από το ότι $h \in G_s$. Ομοίως αποδεικνύεται και το επί. □

Πίσω στη δράση συζυγίας, ο σταθεροποιητής ενός $x \in G$

$$\mathcal{O}_x = \{g \in G : gxg^{-1} = x\}$$

ονομάζεται *κεντρικοποιητής* του x στην G και συχνά συμβολίζεται με Z_x. Επομένως, αν $x_1, x_2, \ldots, x_r$ είναι αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G που *δεν* ανήκουν στο κέντρο, τότε

$$G = \mathrm{Z}(G) \uplus \mathcal{O}_{x_1} \uplus \mathcal{O}_{x_2} \uplus \cdots \uplus \mathcal{O}_{x_r}$$

και παίρνοντας πληθαρίθμους και στα δυο μέλη προκύπτει η *ταυτότητα κλάσης*

$$|G| = |\mathrm{Z}(G)| + \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|\mathrm{Z}_{x_i}|}. \tag{2}$$

[1] Αυτό είναι γνωστό ως Θεώρημα του Lagrange.

Για την $\mathfrak{S}_3$ και την D_8, η ταυτότητα κλάσης μας πληροφορεί ότι $6 = 1 + 3 + 2$ και $8 = 2+2+2+2$, αντίστοιχα, σε συμφωνία με τους υπολογισμούς που κάναμε στα παραδείγματα.

Πρόβλημα. Ποια είναι η εξίσωση κλάσης για την διεδρική ομάδα D_{2n}; Ποιές είναι οι κλάσεις συζυγίας της; Ποιό είναι το κέντρο της;

Παραμένοντας στο παράδειγμα της D_8, είδαμε ότι έχει 5 κλάσεις συζυγίας, καθώς και 5 μη ισόμορφους ανάγωγους χαρακτήρες. Από αυτούς, οι τέσσερις είναι διάστασης 1 και ορίζονται θέτοντας

$$\begin{aligned} \chi_{11}(r) &= 1, & \chi_{11}(s) &= 1, \\ \chi_{\bar{1}1}(r) &= -1, & \chi_{\bar{1}1}(s) &= 1, \\ \chi_{1\bar{1}}(r) &= 1, & \chi_{1\bar{1}}(s) &= -1, \\ \chi_{\bar{1}\bar{1}}(r) &= -1, & \chi_{\bar{1}\bar{1}}(s) &= -1. \end{aligned}$$

Στην Άσκηση 1.1, υπολογίσαμε τον ανάγωγο χαρακτήρα, έστω χ, διάστασης δυο. Ποιοί ήταν οι πίκανες της αντίστοιχης αναπαράστασης; Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, ο πίνακας χαρακτήρων της D_8 είναι

	$\{\epsilon\}$	$\{r^2\}$	$\{r, r^3\}$	$\{s, sr^2\}$	$\{sr, sr^3\}$
χ_{11}	1	1	1	1	1
$\chi_{\bar{1}1}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_{1\bar{1}}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\bar{1}\bar{1}}$	1	1	-1	-1	1
χ	2	-2	0	0	0

.