Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

6. Χαρακτήρες ομάδων: Κατασκευές προτύπων (Συνέχεια)

Θεώρημα 6.5. Αν $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ είναι βάσεις των διανυσματικών χώρων V και W αντίστοιχα, τότε το

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$$

αποτελεί βάση του $V \otimes W$.

Παράδειγμα 6.6. (Συνέχεια)

(3) Ισχύει ότι $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{F}) \otimes \mathrm{Mat}_{k\times \ell}(\mathbb{F}) \cong \mathrm{Mat}_{nk\times m\ell}(\mathbb{F})$. Ειδικότερα, $\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m \cong \mathbb{F}^{nm}$, όπως ελπίζαμε στην αρχή της παραγράφου. Πράγματι, η απεικόνιση

$$(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

όπου $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ και στο δεξί μέλος έχουμε τον μπλόκ-πίνακα[1] του οποίου το (i, j)-μπλοκ είναι ο πίνακας $a_{ij}B$, είναι διγραμμική απεικόνιση (γιατί;). Από το Θεώρημα 6.3, επάγεται μια γραμμική απεικόνιση

$$\phi : \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{F}) \otimes \mathrm{Mat}_{k\times \ell}(\mathbb{F}) \to \mathrm{Mat}_{nk\times m\ell}(\mathbb{F}).$$

Από το Θεώρημα 6.5, το σύνολο

$$\{E_{ij} \otimes E_{rs} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq \ell\}$$

όπου E_{ij} είναι ο στοιχειώδης πίνακας που έχει 1 στη θέση (i, j) και 0 οπουδήποτε αλλού αποτελεί βάση του $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{F}) \otimes \mathrm{Mat}_{k\times \ell}(\mathbb{F})$. Ποιά είναι η εικόνα της βάσης αυτής μέσω της ϕ;

Ένας ακόμη διανυσματικός χώρος που έχει διάσταση $\dim(V)\dim(W)$ είναι ο $\mathrm{Hom}(V, W)$. Πράγματι, αν $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ είναι βάσεις των V και W αντίστοιχα, τότε το σύνολο $\{\varphi_{ij} : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$, όπου

$$\varphi_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_j, & \text{αν } i = k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ημερομηνία: 22 Οκτωβρίου 2025.

[1] Ο πίνακας $A \otimes B$ ονομάζεται γινόμενο Kronecker των A και B.

αποτελεί βάση του $\mathrm{Hom}(V, W)$ (γιατί;). Στην Άσκηση 1.4 είδαμε ότι αυτός ο χώρος γίνεται G-πρότυπο θέτοντας

$$(g\cdot\varphi)(v) := \underbrace{g\cdot\left(\varphi(\underbrace{g^{-1}\cdot v}_{\text{δράση της } G \text{ στο } V})\right)}_{\text{δραση της } G \text{ στο } W} \tag{6.1}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $W = \mathbb{F}$ και η δράση της G είναι η τετριμμένη, τότε η Ταυτότητα (6.1) παίρνει την μορφή

$$(g\cdot\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}\cdot v).$$

Το τανυστικό γινόμενο $V\otimes W$ γίνεται και αυτό G-πρότυπο με τη διαγώνια δράση

$$g\cdot v\otimes w := gv\otimes gw.$$

Είναι λογικό λοιπόν να αναρρωτηθούμε αν τα δυο αυτά G-πρότυπα είναι ισόμορφα.

Θεώρημα 6.6. Η απεικόνιση $\Gamma : V^*\otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, όπου

$$\begin{aligned}\Gamma(f\otimes w) : V &\to W\\ v &\mapsto f(v)w\end{aligned}$$

για κάθε $f\in V^*$ και $w\in W$ είναι G-ισομορφισμός.

Πριν την απόδειξη του Θεωρήματος 6.6, ας θυμηθούμε τον δυϊκό χώρο.

Παρέκβαση Γραμμικής Άλγεβρας. Ας σκεφτούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Κάθε τέτοια καθορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της συνήθους βάσης $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Συνεπώς, ο πίνακας της f είναι

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n)\end{pmatrix}.$$

Τι γίνεται αν υπολογίσουμε το $f(v)$ για ένα αυθαίρετο $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$; Λόγω γραμμικότητας,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots v_n\mathbf{e}_n)\\ &= v_1 f(\mathbf{e}_1) + v_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + v_n f(\mathbf{e}_n)\\ &= \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι τίποτα άλλο παρά το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ και προβλέπει μια σύνδεση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα. (Riesz 1907) Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \to \mathbb{F}$, υπάρχει μοναδικό $v_0 \in V$ τέτοιο ώστε

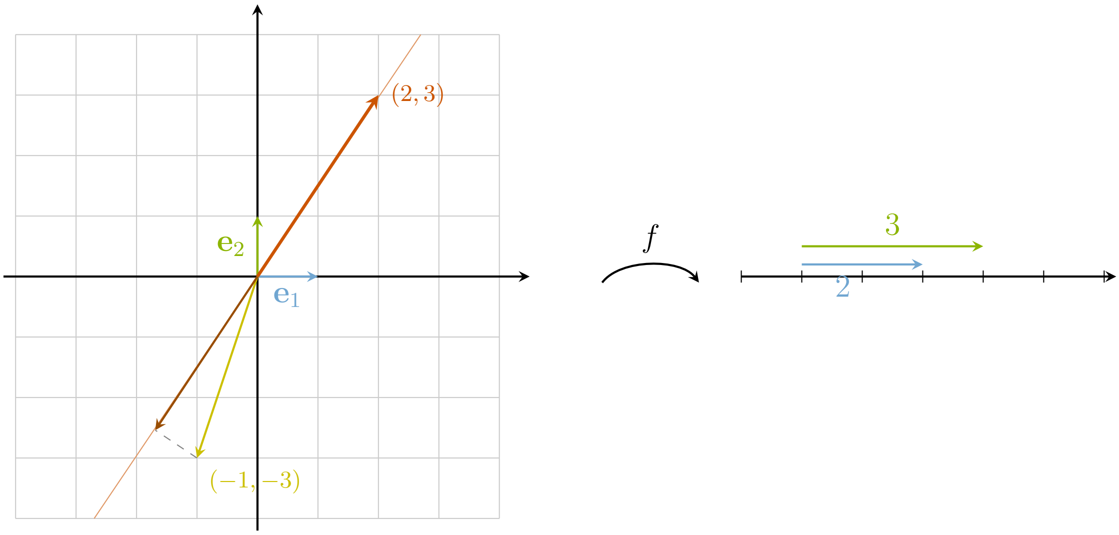
$$f(v) = v_0\cdot v,$$

όπου με $\cdot$ συμβολίζουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{F}$.

Για παράδειγμα, αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbf{e}_1) = 3$ και $f(\mathbf{e}_2) = 2$, τότε

$$f(-1,-3) = (-1,-3)\cdot(2,3) = -11.$$

Η εμφάνιση του εσωτερικού γινομένου, γεωμετρικά, εξηγείται στο παρακάτω σχήμα:



Το $f(-1,-3)$ ισούται με το μήκος του $(2,3)$ πολλαπλασιασμένο με το μήκος της προβολής του $(-1,-3)$ στην ευθεία που παράγεται από το $(2,3)$. Με άλλα λόγια, το εσωτερικό τους γινόμενο.

Το σύνολο $V^* := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$ ονομάζεται δυϊκός χώρος του V. Το Θεώρημα του Riesz μας πληροφορεί ότι αν το $\mathbb{F}$ είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, τότε η απεικόνιση

$$\begin{aligned} V &\to V^* \\ v &\mapsto - \cdot v \end{aligned}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Στην περίπτωση όπου $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, τότε η γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έχει ως συνέπεια η απεικόνιση αυτή να είναι γραμμικός ισομορφισμός και γι' αυτό $V \cong V^*$. Στην περίπτωση όπου $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ θέλει μια προσοχή, καθώς το εσωτερικό γινόμενο είνια *συζυγές γραμμικό* ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και γι' αυτό ο δυϊκός χώρος είναι (ουσιαστικά) το V, αλλά με διαφορετική δομή γραμμικότητας. Σε γενικότερες περιπτώσεις, αυτές οι δυο ταυτίσεις παύουν να ισχύουν, αλλά $V \cong (V^*)^*$.

Από την παραπάνω συζήτηση, δοθήσεις μια βάσης $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του V προκύπτει μια φυσική βάση του δυϊκού χώρου. Αυτή αποτελείται από τις *προβολές* στην ευθεία που παράγεται από το v_i. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ όπου

$$\begin{aligned} v_i^* : V &\to \mathbb{R} \\ v_j &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$ αποτελεί βάση του V^* (γιατί;) η οποία ονομάζεται *δυϊκή βάση* της $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.6. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ που ορίζεται θέτοντας

$$(f, w)(v) \mapsto f(v)w$$

για κάθε $v \in V, f \in V^*$ και $w \in W$ είναι διγραμμική και γι' αυτό από το Θεώρημα 6.3 επάγεται η γραμμική απεικόνιση Γ. Θα δείξουμε ότι η Γ είναι γραμμικός ισομορφισμός και G-ομομορφισμός.

Για το πρώτο, αρκεί να δείξουμε ότι η Γ στέλνει μια βάση του $V^* \otimes W$ σε μια βάση του $\mathrm{Hom}(V, W)$. Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ βάσεις των V και W, αντίστοιχα. Από το Θεώρημα 6.5, το σύνολο

$$\{v_i^* \otimes w_j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$$

αποτελεί βάση του $V^* \otimes W$ (γιατί;). Η εικόνα ενός αυθαίρετου στοιχείου της μέσω της Γ είναι

$$\Gamma(v_i^* \otimes w_j)(v_k) = v_i^*(v_j)w_k = \begin{cases} w_j, & \text{αν } i = k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

το οποίο δεν είναι άλλο από εκείνη την γραμμική απεικόνιση φ_{ij} που συναντήσαμε πριν το Θεώρημα 6.6 και το ζητούμενο έπεται.

Για το δεύτερο, αρκεί να επαληθεύσουμε τον Ορισμό 3.1, δηλαδή

$$\Gamma\left(\underbrace{g \cdot (f \otimes w)}_{\text{δράση της } G \text{ στο } V^* \otimes W}\right) = \underbrace{g \cdot \Gamma(f \otimes w)}_{\text{δράση της } G \text{ στο } \mathrm{Hom}(V,W)},$$

για κάθε $g \in G, f \in V^*$ και $w \in W$. Πράγματι, για κάθε $v \in V$,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(g \cdot (f \otimes w)\right)(v) &= \Gamma\left(\underbrace{g \cdot f}_{\text{δράση της } G \text{ στο } V^*} \otimes \underbrace{g \cdot w}_{\text{δράση της } G \text{ στο } W}\right)(v) \\ &= (g \cdot f)(v) g \cdot w \\ &= f(g^{-1}v)\, gw. \end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} \left(g \cdot \Gamma(f \otimes w)\right)(v) &= \underbrace{g \cdot \left(\Gamma(f \otimes w)(\underbrace{g^{-1}v}_{\text{δράση της } G \text{ στο } V})\right)}_{\text{δράση της } G \text{ στο } W} \\ &= g \cdot \big(f(g^{-1}v)\, w\big) \\ &= f(g^{-1}v)\, gw, \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Συνεπώς, ξεκινώντας από δυο διανυσματικούς χώρους, έχουμε κατασκευάσει τα εξής G-πρότυπα

$$V \oplus W,\ V \otimes W,\ \mathrm{Hom}(V, W),\ \text{ και } V^*.$$

Ας υπολογίσουμε τους χαρακτήρων τους και πως σχετίζονται με αυτούς των V και W.

Πρόταση 6.7. Αν V και W είναι δυο G-πρότυπα πεπερασμένης διάστασης, τότε

$$\chi^{V \oplus W} = \chi^V + \chi^W \tag{6.2}$$

$$\chi^{V \otimes W} = \chi^V \chi^W \tag{6.3}$$

$$\chi^{V^*} = \overline{\chi^V} \tag{6.4}$$

$$\chi^{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi^V} \chi^W, \tag{6.5}$$

όπου $\overline{\chi^V} : G \to \mathbb{C}$ ορίζεται θέτοντας $\overline{\chi^V}(g) = \overline{\chi^V(g)}$ για κάθε $g \in G$.