

Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

5. Χαρακτήρες ομάδων: Εισαγωγή (συνέχεια)

Ορισμός 5.3. Μια απεικόνιση $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ η οποία έχει σταθερή τιμή στις κλάσεις συζυγίας της G , δηλαδή

$$\alpha(g) = \alpha(xgx^{-1})$$

για κάθε $x \in G$ και $g \in G$ ονομάζεται **συνάρτηση κλάσης** (class function).

Η Πρόταση 5.2 (2) μας πληροφορεί ότι κάθε χαρακτήρας της G είναι συνάρτηση κλάσης. Το σύνολο $\text{CF}_{\mathbb{C}}(G)$ (ή πιο απλά $\text{CF}(G)$) όλων των συναρτήσεων κλάσης της G αποτελεί διανυσματικό χώρο με πράξη την πρόσθεση συναρτήσεων

$$(\alpha + \beta)(g) := \alpha(g) + \beta(g)$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \text{CF}(G)$ και $g \in G$ (γιατί;). Μια προφανής βάση του χώρου αυτού αποτελείται από τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις στις κλάσεις συζυγίας K της G , δηλαδή

$$1_K(g) := \begin{cases} 1, & \text{αν } g \in K \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\dim(\text{CF}(G)) = \text{πλήθος των κλάσεων συζυγίας της } G. \quad (5.1)$$

Ορισμός 5.4. Ο πίνακας

	κλάσεις συζυγίας της G
ανάγωγοι	
χαρακτήρες	\vdots
μη ισόμορφων	$\cdots \chi(K) \cdots$
αναπαραστάσεων	\vdots
της G	

ονομάζεται **πίνακας χαρακτήρων** (character table) της G . Στην πρώτη στήλη θα αναγράφεται πάντα η κλάση συζυγίας του ταυτοτικού στοιχείου και στην πρώτη γραμμή ο χαρακτήρας της τετριμμένης αναπαράστασης.

Ας (προσπαθήσουμε) να υπολογίσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της συμμετρικής ομάδας \mathfrak{S}_3 . Οι κλάσεις συζυγίας της \mathfrak{S}_3 είναι

$$K_1 = \{(1)(2)(3)\}, K_2 = \{(1\ 2)(3), (1\ 3)(2), (2\ 3)(1)\}, \text{ και } K_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Στην Παράγραφο 4 είδαμε ότι η \mathfrak{S}_3 έχει τρεις διαφορετικές ανάγωγες αναπαράστασεις:

- την τετριμμένη αναπαράσταση,
- την αναπαράσταση προσήμου,

των οποίων τους χαρακτήρες συμβολίζουμε με χ^{def} και χ^{sign} , αντίστοιχα και

- μια ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης 2.

Συνεπώς, ο πίνακας χαρακτήρων της \mathfrak{S}_3 έχει την εξής μορφή

	K_1	K_2	K_3
χ^{triv}	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1
χ^{\cdot}	2	;	;

Ποιός είναι ο ανάγωγος χαρακτήρας που λείπει;

Ας κάνουμε το ίδιο για την κυκλική ομάδα $C_3 = \{\epsilon, g, g^2\}$ τάξης 3. Αφού η C_3 είναι αβελιανή ομάδα, κάθε στοιχείο της σχηματίζει τη δική του κλάση συζυγίας. Στην Άσκηση 1.6 είδαμε ότι η C_3 έχει τρεις ανάγωγες αναπαράστασεις με χαρακτήρες¹

$$\chi_1(g) = 1, \quad \chi_2(g) = \zeta, \quad \chi_3(g) = \zeta^2,$$

όπου ζ είναι μια τρίτη ρίζα της μονάδας. Συνεπώς, ο πίνακας χαρακτήρων της C_3 είναι

	$\{\epsilon\}$	$\{g\}$	$\{g^2\}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	ζ^2	ζ

Ομοίως, ο πίνακας χαρακτήρων της κυκλικής ομάδας τάξης 4 είναι

	$\{\epsilon\}$	$\{g\}$	$\{g^2\}$	$\{g^3\}$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	i	-1	$-i$
χ_4	1	$-i$	-1	i

(γιατί;).

¹Στην περίπτωση όπου η αναπαράσταση έχει διάσταση 1, τότε η έννοια του χαρακτήρα και της αναπαράστασης ταυτίζονται.

6. Χαρακτήρες ομάδων: Κατασκευές προτύπων

Το ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ δυο διανυσματικών χώρων V και W γίνεται G -πρότυπο² με τη διαγώνια δράση:

$$g \cdot (v, w) := (gv, gw).$$

Το ευθύ άθροισμα είναι μια κατασκευή μεταξύ διανυσματικών χώρων όπου τα στοιχεία του δεν “ανακατεύονται”. Για παράδειγμα,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, ο χαρακτήρας του ευθέως αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των χαρακτήρων των αντίστοιχων προτύπων.

Πώς θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα πρότυπο του οποίου τα στοιχεία θα “ανακατεύονται” (ή πολλαπλασιάζονται) και σε επίπεδο χαρακτήρων αυτό να μεταφράζεται σε πολλαπλασιασμό; Για παράδειγμα, θα θέλαμε

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \text{ “}\times\text{” } \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} \text{ “}=\text{” } \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Όπως και στο ευθύ άθροισμα, ξεκινάμε με το $V \times W$. Στο $V \oplus W$ όμως, η πρόσθεση ορίζεται κατά συντεταγμένες. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$((1, 0) + (0, 1), (1, 2)) = ((1, 1), (1, 2)).$$

Στον δικό μας χώρο όμως, θα θέλαμε ο “πολλαπλασιασμός” να είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση:

$$(v + v') \text{ “}\times\text{” } w = v \text{ “}\times\text{” } w + v' \text{ “}\times\text{” } w,$$

το οποίο δε συμβαίνει στο $V \oplus W$. Στο παράδειγμα,

$$((1, 0), (1, 2)) + ((0, 1), (1, 2)) = ((1, 1), (2, 4)) \neq ((1, 1), (1, 2)).$$

Για να “λύσουμε” αυτό το πρόβλημα, κατασκευάζουμε έναν χώρο, όπου εξαναγκάζουμε τα στοιχεία του να ικανοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα.

Ορισμός 6.1. Έστω V και W δυο διανυσματικοί χώροι. Ο χώρος πηλίκου

$$V \otimes W := \mathbb{F}[V \times W]/U,$$

όπου U είναι ο υπόχωρος που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

²Όπως είδαμε και στην περίπτωση του ευθέως αθροίσματος δυο υπόχωρων.

- $(v + v', w) - (v, w) - (v', w)$
- $(v, w + w') - (v, w) - (v, w')$
- $(cv, w) - c(v, w)$
- $(v, cw) - c(v, w),$

για κάθε $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ και $c \in \mathbb{F}$ ονομάζεται **τανυστικό γινόμενο** (tensor product) των V και W .

Παρατήρηση. Ο ορισμός του τανυστικού γινομένου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό πάνω από πιο σώμα το ορίζουμε. Γι αυτό συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $V \otimes_{\mathbb{F}} W$. Για παράδειγμα, ως διανυσματικοί χώροι $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \not\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, καθώς ο πρώτος έχει διάσταση 1 (βλ. Παράδειγμα 6.4 (1)), ενώ ο δεύτερος έχει διάσταση 2 (βλ. Θεώρημα ??), αλλά τέτοιες περιπτώσεις δε θα μας απασχολήσουν σε αυτό το μάθημα.

Το τανυστικό γινόμενο αποτελείται από όλους γραμμικούς συνδυασμούς

$$\sum_{(v,w) \in V \times W} c_{v,w}(v, w)$$

όπου όλα τα $c_{v,w} = 0$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος που είναι μη μηδενικά, modulo τις σχέσεις του U . Την κλάση ενός στοιχείου (v, w) τη συμβολίζουμε με $v \otimes w$ και ονομάζεται **στοιχειώδης τανυστής** (simple tensor).

Πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός όταν δουλεύει με στοιχειώδεις τανυστές καθώς μπορεί να έχουν πολλές “διαφορετικές” μορφές. Για παράδειγμα,

$$(2\mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_2 = 2(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \otimes (2\mathbf{e}_2) = 4(\mathbf{e}_1 \otimes (\frac{1}{2}\mathbf{e}_2)) = \dots$$

Το τανυστικό γινόμενο μας επιτρέπει να “πολλαπλασιάσουμε” στοιχεία διανυσματικών χώρων όπου εκ των προτέρων δεν υπάρχει κάποιος προφανής “πολλαπλασιασμός”. Για παράδειγμα³, στο $\mathbb{R}[t] \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (1 + 2t) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2t \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + t \otimes \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Σε κάποιες περιπτώσεις όμως που υπάρχει ένας προφανής “πολλαπλασιασμός”, παίρνουμε διαφορετικά στοιχεία από αυτά που περιμέναμε. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}[t] \otimes \mathbb{R}[t]$,

$$1 \otimes t^2 \neq t \otimes t \neq t^2 \otimes 1.$$

³Με $\mathbb{F}[t]$ και $\text{Mat}_n(\mathbb{F})$ συμβολίζουμε τον χώρο των πολυωνύμων στο t με συντελεστές στο \mathbb{F} και τον χώρο των $(n \times n)$ -πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{F} , αντίστοιχα.

Ορισμός 6.2. Έστω V, W και U διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : V \times W \rightarrow U$ ονομάζεται **διγραμμική** αν

$$\begin{aligned} f(c_1 v_1 + c_2 v_2, w) &= c_1 f(v_1, w) + c_2 f(v_2, w) \\ f(v, c w_1 + d w_2) &= c_1 f(v, w_1) + c_2 f(v, w_2) \end{aligned}$$

για κάθε $v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$.

Οι σχέσεις που “επιβάλλαμε” στο $\mathbb{F}[V \times W]$ στον Ορισμό 6.1 έχουν ως συνέπεια η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \text{proj} : V \times W &\rightarrow V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w \end{aligned}$$

να είναι διγραμμική (γιατί;). Το επόμενο αποτέλεσμα εκφράζει την *καθολική ιδιότητα* του τανυστικού γινομένου ως προς τις διγραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα 6.3. Έστω V, W και U διανυσματικοί χώροι. Για κάθε διγραμμική απεικόνιση $f : V \times W \rightarrow U$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\bar{f} : V \otimes W \rightarrow U$, τέτοια ώστε

$$f = \bar{f} \circ \text{proj}$$

ή ισοδύναμα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f} & U \\ \text{proj} \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Ειδικότερα, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{διγραμμικές απεικονίσεις} \\ V \times W \rightarrow U \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{γραμμικές απεικονίσεις} \\ V \otimes W \rightarrow U \end{array} \right\}.$$

Το Θεώρημα 6.3, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται, μας επιτρέπει να “αναγνωρίσουμε” τανυστικά γινόμενα ως εξής: αν θέλουμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $V \otimes W \rightarrow U$, αρκεί να βρούμε μια διγραμμική απεικόνιση $V \times W \rightarrow U$.

Παράδειγμα 6.4.

(1) Για κάθε διανυσματικό χώρο V , ισχύει ότι $\mathbb{F} \otimes V \cong V$. Πράγματι, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \times V &\rightarrow V \\ (c, v) &\mapsto cv \end{aligned}$$

είναι διγραμμική (γιατί;) και από το Θεώρημα 6.3 επάγεται μια γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \otimes V &\rightarrow V \\ c \otimes v &\mapsto cv. \end{aligned}$$

Η αντίστροφη της δίνεται από $v \mapsto 1 \otimes v$ (γιατί;).

- (2) Έστω \mathbb{K} ένα σώμα το οποίο περιέχει το \mathbb{F} . Το τανυστικό γινόμενο $\mathbb{K} \otimes V$ (πάνω από το \mathbb{F}) γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} θέτοντας

$$c \cdot \left(\sum_i a_i \otimes v \right) := \sum_i (ca_i) \otimes v,$$

για κάθε $c \in \mathbb{K}$. Η κατασκευή αυτή ονομάζεται *επέκταση βαθμωτών* από το \mathbb{F} στο \mathbb{K} .

Για παράδειγμα, αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ και $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, τότε το τανυστικό γινόμενο $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}$ ως διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{C} είναι ισόμορφος με το ίδιο το \mathbb{C} , μέσω της ταύτισης

$$a + ib \mapsto 1 \otimes a + i \otimes b$$

(γιατί;).