Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

9. Στοιχεία αλγεβρικής συνδυαστικής: Μεταθέσεις, διαμερίσεις, συνθέσεις και μερικές διατάξεις (Συνέχεια)

Μια διαμέριση $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ του n μπορεί να παρασταθεί με ένα διάγραμμα Young Y_λ, δηλαδή μια διάταξη (μοναδιαίων) τετραγώνων παρατεταγμένων σε κ γραμμές, όπου η i-οστή γραμμή έχει λ_i τετράγωνα, ξεκινώντας από αριστερά από την ίδια κατακόρυφο. Για παράδειγμα, το διάγραμμα Young της $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ είναι

$$\mathrm{Y}_{(4,2,2,1)} = \ydiagram{4,2,2,1} .$$

Αν αντί για $\square$ έχουμε $\bullet$, τότε το Y_λ συνήθως ονομάζεται διάγραμμα Ferrers. Στο παράδειγμα,

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \end{array}$$

είναι το διάγραμμα Ferrers της $(4, 2, 2, 1)$.

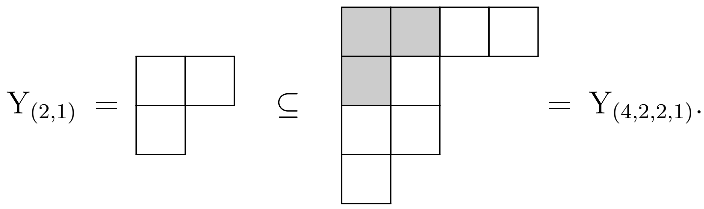
Ορισμός 9.6. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ μια διαμέριση του n. Η διαμέριση $\lambda^\top$, της οποίας το διάγραμμα Young είναι το ανάστροφο του Y_λ ονομάζεται συζυγής (ή ανάστροφη) της λ.

Το i-οστό μέρος της $\lambda^\top$ ισούται με το πλήθος των $1 \leq j \leq k$ τέτοια ώστε $\lambda_j \geq i$. Για παράδειγμα, αν $\lambda = (4, 2, 2, 1)$, τότε $\lambda^\top = (4, 3, 1, 1)$ διότι

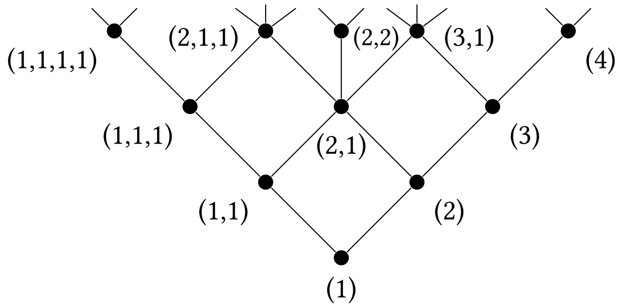
$$\mathrm{Y}_\lambda^\top = \ydiagram{4,3,1,1} .$$

Ημερομηνία: 18 Νοεμβρίου 2025.

Για δυο διαμερίσεις λ, μ, όχι απαραίτητα του ίδιου ακεραίου, γράφουμε $\lambda \subseteq \mu$ αν το Y_λ περιέχεται στο Y_μ με τον προφανή τρόπο. Για παράδειγμα, $(2,1) \subseteq (4,2,2,1)$, διότι



Το σύνολο $\cup_{n\geq 1}\mathrm{Par}(n)$ όλων των διαμερίσεων με τη σχέση $\subseteq$ είναι παράδειγμα μερικής διάταξης που ονομάζεται διάταξη Young

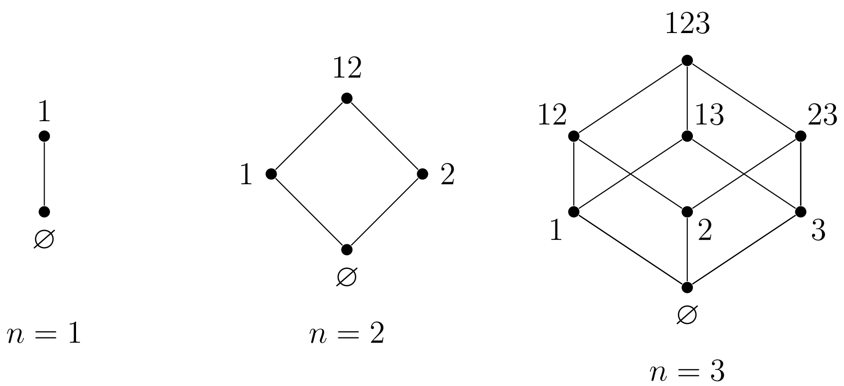


Ορισμός 9.7. Το ζεύγος $(P, \leq)$, όπου P είναι σύνολο και $\leq : P \times P \to P$ είναι μια σχέση η οποία είναι

- *αυτοπαθής*, δηλαδή $x \leq x$
- *αντισυμμετρική*, δηλαδή αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε $x = y$
- *μεταβατική*, δηλαδή αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$

για κάθε $x, y, z \in P$ ονομάζεται μερική διάταξη (poset[1]).

Ένα ακόμα παράδειγμα μερικής διάταξης είναι το ζεύγος $(2^{[n]}, \subseteq)$, όπου $2^{[n]}$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[n]$, η οποία ονομάζεται διάταξη Boole. Για παράδειγμα,



[1] Συντομογραφία του **p**artially **o**rdered **set**.

Ορισμός 9.8. Μια ακολουθία $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$$
ονομάζεται σύνθεση (composition) του n. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Comp}(n)$ το σύνολο όλων των συνθέσεων του n.

Για παράδειγμα, οι συνθέσεις του $n = 3$ είναι
$$(1,1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (3).$$
Σε αντίθεση με τις διαμερίσεις, το πλήθος των συνθέσεων υπολογίζεται αρκετά εύκολα.

Πρόταση 9.9. Η απεικόνιση $\mathrm{set} : \mathrm{Comp}(n) \to 2^{[n-1]}$ που ορίζεται θέτοντας
$$\mathrm{set}(\alpha) \coloneqq \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\}$$
για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathrm{Comp}(n)$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Ειδικότερα,
$$|\mathrm{Comp}(n)| = 2^{n-1}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\mathrm{comp} : 2^{[n-1]} \to \mathrm{Comp}(n)$ που ορίζεται θέτοντας
$$\mathrm{comp}(S) \coloneqq (s_1, s_2 - s_1, \dots, s_k - s_{k-1}, n - s_k)$$
όπου $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq [n-1]$ έτσι ώστε $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$. Για παράδειγμα,

S	$\varnothing$	1	2	3	12	13	23	123
$\mathrm{comp}(S)$	(4)	$(1,3)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,1)$	$(2,1,1)$	$(1,1,1,1)$

Η απεικόνιση comp είναι η αντίστροφη της set (γιατί;) και το ζητούμενο έπεται. □

10. Πρότυπα Young

Στο Πόρισμα 9.4 είδαμε ότι το σύνολο των ανάγωγων χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_n$ παραμετρικοποιείται από τις διαμερίσεις του n. Στόχος μας στις επόμενες παραγράφους είναι δοθείσης μια διαμέρισης $\lambda \vdash n$, να κατασκευάσουμε ένα ανάγωγο $\mathfrak{S}_n$-πρότυπο $\mathcal{S}^\lambda$, έτσι ώστε το

$$\{\mathcal{S}^\lambda : \lambda \vdash n\}$$

να αποτελεί ένα σύνολο ανά δύο μη ισόμορφων ανάγωγων $\mathfrak{S}_n$-προτύπων.

Παρόλο που δεν υπάρχει κάποιος προφανής τρόπος να γίνει αυτό, μπορούμε, ξεκινώντας από μια διαμέριση λ της n, να κατασκευάσουμε μια υποομάδα $\mathfrak{S}_\lambda$ που της αντιστοιχεί με "φυσικό" τρόπο και να μελετήσουμε τα πρότυπα της μορφής

$$V^{\mathrm{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n},$$

όπου V^{triv} είναι το τετριμμένο $\mathfrak{S}_\lambda$-πρότυπο.

Ορισμός 10.1. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$. Το σύνολο $\mathfrak{S}_\lambda$ όλων των μεταθέσεων της $\mathfrak{S}_n$ που σταθεροποιούν[2] τα σύνολα

$$[\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \cdots + +\lambda_{i-1} + \lambda_i]$$

για κάθε $1 \leq i \leq k$, όπου $\lambda_0 := 0$ και $[a, b] := \{a, a+1, \ldots, b\}$ για $a \leq b$ ονομάζεται υποομάδα Young που αντιστοιχεί στην λ.

Με άλλα λόγια, ένα στοιχείο της $\mathfrak{S}_\lambda$ μεταθέτει μεταξύ τους τους πρώτους λ_1 αριθμούς, τους επόμενους λ_2 αριθμούς κ.ο.κ. Για παράδειγμα, αν $n = 5$ και $\lambda = (2, 2, 1)$, τότε η $\mathfrak{S}_\lambda$ περιέχει όλες τις μεταθέσεις της $\mathfrak{S}_5$ οι οποίες σταθεροποιούν τα σύνολα

$$\{1, 2\},\ \{3, 4\},\ \{5\},$$

και γι αυτό

$$\mathfrak{S}_{(2,2,1)} = \{\epsilon,\ (1\ 2),\ (3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4)\}$$

Παρατήρηση. Αν G και H είναι δυο ομάδες, τότε το $G \times H$ έχει και αυτό δομή ομάδας θέτοντας

$$(g, h) * (g', h') := (gg', hh')$$

για κάθε $g, g' \in G$ και $h, h' \in H$. Η τάξη της ομάδας αυτής ισούται με $|G||H|$. Ομοίως, αν έχουμε ένα αυθαίρετο (πεπερασμένο) πλήθος ομάδων και θεωρήσουμε το καρτεσιανό τους γινόμενο.

Με την παρατήρηση αυτή κατά νου, η υποομάδα Young είναι όντως υποομάδα της $\mathfrak{S}_n$, διότι

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_\lambda &\cong \mathfrak{S}([\lambda_1]) \times \mathfrak{S}([\lambda_1 + 1, \lambda_1 + \lambda_2]) \times \cdots \times \mathfrak{S}([\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1, n]) \\ &\cong \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k},\end{aligned}$$

[2]Μια μετάθεση $\pi \in \mathfrak{S}_n$ σταθεροποιεί το $S \subseteq [n]$ αν $\pi(S) = S$.

όπου ο δεύτερος ισομορφισμός έπεται από το γεγονός ότι $\mathfrak{S}(S) \cong \mathfrak{S}(T)$ αν και μόνο αν $|S| = |T|$ (γιατί;). Στο τρέχον παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}([1,2]) \times \mathfrak{S}([3,4]) \times \mathfrak{S}([5,5]) &= \{12, 21\} \times \{34, 43\} \times \{5\} \\ &= \{(12, 34, 5), (21, 34, 5), (12, 43, 5), (21, 43, 5)\} \\ &\cong \{12345, 21345, 12435, 21435\} \\ &= \{\epsilon, (1\ 2), (3\ 4), (12)(3\ 4)\} \\ &= \mathfrak{S}_{(2,2,1)}.\end{aligned}$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, το πρότυπο

$$V^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}$$

έχει μια αρκετά απλή μορφή ως αναπαράσταση μεταθέσεων για μια δράση της συμμετρικής ομάδας στα εξής (συνδυαστικά) αντικείμενα.

Ορισμός 10.2. Young ταμπλώ (Young tableau), ή απλούστερα ταμπλώ, σχήματος $\lambda \vdash n$ και περιεχομένου $[n]$ ονομάζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των τετραγώνων του διαγράμματος Young της λ και του $[n]$.

Για παράδειγμα, ένα ταμπλώ σχήματος $(4, 2, 2, 1)$ και περιεχομένου $[9]$ είναι

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 7 & 3 & 8 & 2 \\ \hline 1 & 5 \\ \cline{1-2} 4 & 9 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Τα ταμπλώ σχήματος $(2, 1)$ είναι

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}.$$

Η δράση καθορισμού της $\mathfrak{S}_n$ στο $[n]$ επάγει μια δράση στο σύνολο όλων των ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου $[n]$ με τον προφανή τρόπο. Για παράδειγμα, αν $n = 9$, $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ και $\pi = (1\ 3\ 9\ 8)(2\ 7\ 6\ 5\ 4) \in \mathfrak{S}_9$, τότε

$$\pi T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & 9 & 1 & 7 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 2 & 8 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Δοθέντος ενός ταμπλώ T, θεωρούμε τις υποομάδες $\mathrm{R}(T)$ και $\mathrm{C}(T)$ της $\mathfrak{S}_n$ που περιέχουν τις μεταθέσεις που σταθεροποιούν τα στοιχεία των γραμμών και των στηλών του T, αντίστοιχα. Στο τρέχον παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(T) &\cong \mathfrak{S}(\{2,3,7,8\}) \times \mathfrak{S}(\{1,5\}) \times \mathfrak{S}(\{4,9\}) \times \mathfrak{S}(\{6\})\\ \mathrm{C}(T) &\cong \mathfrak{S}(\{1,4,6,7\}) \times \mathfrak{S}(\{3,5,9\}) \times \mathfrak{S}(\{8\}) \times \mathfrak{S}(\{2\}).\end{aligned}$$

Ορισμός 10.3. Έστω T ένα ταμπλώ σχήματος λ. Η τροχιά του T στη δράση της $\mathrm{R}(T)$ ονομάζεται ταμπλοειδές (tabloid) σχήματος λ και συμβολίζεται με $[T]$.

Με άλλα λόγια, η $[T]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το ταμπλώ T, όπου δύο ταμπλώ ίδιου σχήματος θεωρούνται ισοδύναμα αν και μόνο αν σε κάθε γραμμή έχουν το ίδιο σύνολο στοιχείων. Για παράδειγμα, υπάρχουν τρία ταμπλοειδή σχήματος $(2,1)$

$$\begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\; \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cc}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\; \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cc}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\; \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}.$$

Στην πράξη, όταν γράφουμε ένα ταμπλοειδές θα "ξεχνάμε" τις κάθετες γραμμές στο διάγραμμα Young για να υποδείξουμε ότι μπορούμε ελεύθερα να μεταθέσουμε τα στοιχεία κάθε γραμμής και να προκύψει το ίδιο ταμπλοειδές.

Η παραπάνω δράση της $\mathfrak{S}_n$ στα ταμπλώ περιεχομένου $[n]$ επεκτείνεται και στο σύνολο των ταμπλοειδών περιεχομένου $[n]$ θέτοντας

$$\pi \cdot [T] := [\pi T]$$

για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$ και κάθε ταμπλώ T περιεχομένου $[n]$.

Η δράση αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $[T] = [Q]$, τότε, από τον Ορισμό 10.3, $Q = \pi T$ για κάποια $\pi \in \mathrm{R}(T)$. Συνεπώς, για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ έχουμε

$$\sigma Q = \sigma \pi T = (\sigma \pi \sigma^{-1}) \sigma T,$$

όπου $\sigma\pi\sigma^{-1} \in \mathrm{R}(\sigma T)$ (γιατί;[3]) και γι αυτό, πάλι από τον Ορισμό 10.3, $[\sigma T] = [\sigma Q]$ ή ισοδύναμα $\sigma \cdot [T] = \sigma \cdot [Q]$, όπως θέλαμε.

Ορισμός 10.4. Η αναπαράσταση μεταθέσεων που επάγεται από τη δράση της $\mathfrak{S}_n$ στο σύνολο όλων των ταμπλοειδών σχήματος λ ονομάζεται πρότυπο Young (Young module) και συμβολίζεται με M^λ.

[3] Για την ακρίβεια, παρατηρήστε ότι $\mathrm{R}(\sigma T) = \sigma \mathrm{R}(T) \sigma^{-1}$ για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ και κάθε ταμπλώ T περιεχομένου $[n]$.