

Θ2.04: Θεωρία Αναπαράστασεων και Συνδυαστική Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Σε ότι ακολουθεί n είναι ένα θετικός ακέραιος και όπου δεν αναφέρεται διαφορετικά οι διανυσματικοί χώροι είναι υπέρ ενός αυθαίρετου σώματος \mathbb{F} .

Άσκηση 1.1. (Διεδρική ομάδα)

Έστω D_{2n} η διεδρική ομάδα, δηλαδή η ομάδα συμμετρίας του κανονικού n -γώνου, με παράσταση

$$D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = \epsilon, rsr = s \rangle,$$

όπου ϵ είναι το ταυτοτικό στοιχείο και έστω $\theta = 2\pi/n$. Να δείξετε τα εξής.

- (1) Η στροφή κατά θ ως προς την αρχή των αξόνων, με τη φορά του ρολογιού στη συνήθη βάση του \mathbb{R}^2 δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- (2) Το ζεύγος (ρ, \mathbb{R}^2) , όπου $\rho : D_{2n} \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ ορίζεται θέτοντας

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι αναπαράσταση της D_{2n} .

- (3) Η αναπαράσταση του Ερωτήματος (2) είναι πιστή, δηλαδή η ρ είναι 1-1 ή ισοδύναμα

$$\text{Ker}(\rho) := \left\{ g \in D_{2n} : \rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\epsilon\}.$$

- (4) Η αναπαράσταση του Ερωτήματος (2) είναι ανάγωγη για κάθε $n \geq 3$, είτε πάνω από το \mathbb{R} , είτε πάνω από το \mathbb{C} .

Υπόδειξη: Λύστε την άσκηση πρώτα για $n = 4$, όπου $\theta = \pi/2$ και D_8 είναι η ομάδα συμμετρίας του τετραγώνου και έπειτα γενικεύστε. Για το Ερώτημα (4), ποιές είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα του Ερωτήματος (1); Τι κάνει η δράση στους αντίστοιχους ιδιόχωρους;

Άσκηση 1.2. (Αριστερές vs δεξιές δράσεις)

Έστω \mathfrak{S}_n η συμμετρική ομάδα του $[n]$. Να δείξετε τα εξής.

- (1) Η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από

$$\pi \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_{\pi_1}, v_{\pi_2}, \dots, v_{\pi_n}),$$

για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$ και $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ δεν είναι δράση της \mathfrak{S}_n στον \mathbb{R}^n . Πιο συγκεκριμένα, να δείξετε ότι $\pi \cdot (\sigma \cdot v) = (\pi\sigma) \cdot v$, για κάθε $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ και $v \in \mathbb{R}^n$.

(2) Η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από

$$\pi \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_{\pi_1^{-1}}, v_{\pi_2^{-1}}, \dots, v_{\pi_n^{-1}}),$$

για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$ και $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι δράση της \mathfrak{S}_n στον \mathbb{R}^n .

Υπόδειξη: Θυμηθείτε πως πολλαπλασιάζουμε τις μεταθέσεις: από το δεξιά προς τα αριστερά.

Άσκηση 1.3. (Το Θεώρημα του **Maschke** παύει να ισχύει για άπειρες ομάδες)
Να δείξετε ότι η αναπαράσταση (ρ, \mathbb{R}^2) της \mathbb{Z} με $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ που ορίζεται θέτοντας

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δεν είναι πλήρως αναγωγική.

Υπόδειξη: Υπάρχει ένας \mathbb{Z} -ανάλλοιωτος υπόχωρος διάστασης 1 (ποιός;). Μπορεί να υπάρξει και άλλος; Επιχειρηματολογήστε με εις άτοπο απαγωγή.

Άσκηση 1.4. (Ομομορφισμοί μεταξύ προτύπων)

Έστω G μια ομάδα, V, W δυο G -πρότυπα και $\text{Hom}(V, W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $V \rightarrow W$. Να δείξετε τα εξής.

(1) Η G δρα στο $\text{Hom}(V, W)$ θέτοντας

$$(g \cdot \varphi)(v) := g\varphi(g^{-1}v)$$

για κάθε $g \in G$, $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ και $v \in V$, μετατρέποντάς το σε G -πρότυπο.

(2) Ισχύει ότι

$$\text{Hom}_G(V, W) = \text{Hom}(V, W)^G := \{\varphi \in \text{Hom}(V, W) : g \cdot \varphi = \varphi\}.$$

Άσκηση 1.5. Έστω G ομάδα, \mathbb{F} ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και

$$Z(G) := \{g \in G : gh = hg, \text{ για κάθε } h \in G\}$$

το κέντρο της G . Αν (ρ, V) είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση του G και $g \in Z(G)$, να δείξετε ότι

$$\rho(g) = c \text{id}_V,$$

για κάποιο $c \in \mathbb{F}$, όπου $\text{id}_V : V \rightarrow V$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Schur.

Άσκηση 1.6. (Ανάγωγες αναπαραστάσεις της κυκλικής ομάδας)

Έστω C_n η κυκλική ομάδα τάξης n που παράγεται από το g , δηλαδή $C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, όπου e είναι το ταυτοτικό στοιχείο.

(1) Να δείξετε ότι το ζεύγος (ρ, \mathbb{C}) , όπου η $\rho : \mathbb{Z}_n \rightarrow \text{GL}_1(\mathbb{C})$ ορίζεται θέτοντας

$$\rho(g) = \zeta,$$

όπου ζ είναι μια n -οστή ρίζα της μονάδας, είναι αναπαράσταση της C_n .

(2) Να δείξετε ότι κάθε αναπαράσταση της C_n διάστασης 1, και κατά συνέπεια κάθε ανάγωγη αναπαραστάση, είναι της μορφής του Ερωτήματος (1).

(3) Πόσες μη ισομορφες ανάγωγες αναπαραστάσεις της C_n υπάρχουν;

(4) Υπολογίστε την ισοτυπική διάσπαση της κανονικής αναπαράστασης της C_n .