

Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

7. Χαρακτήρες ομάδων: Σχέσεις ορθογωνιότητας (Συνέχεια)

Απόδειξη του Πορίσματος 7.5. Το (1) έπεται άμεσα από την Πρόταση 6.6 (1). Για το (2), υπολογίζουμε

$$(\chi^V, \chi^{V_i}) = \left(\left(\sum_{j=1}^n m_j \chi^{V_j} \right), \chi^{V_i} \right) = \sum_{j=1}^n m_j (\chi^{V_j}, \chi^{V_i}) = m_i$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το Πόρισμα 7.4. Για το (3), υπολογίζουμε

$$(\chi^V, \chi^V) = \left(\left(\sum_{i=1}^n m_i \chi^{V_i} \right), \left(\sum_{j=1}^n m_j \chi^{V_j} \right) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i \overline{m_j} (\chi^{V_i}, \chi^{V_j}) = \sum_{i=1}^n m_i^2,$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το Πόρισμα 7.4.

Τέλος, το V είναι ανάγωγο G -πρότυπο αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικό $1 \leq i \leq n$ για το οποίο $m_i = 1$ και $m_j = 0$ για κάθε $j \neq i$, ή ισοδύναμα, από το (3), αν και μόνο αν $(\chi^V, \chi^V) = 1$. \square

Το Πόρισμα 7.5 μας δίνει ένα ισχυρό κριτήριο για το πότε ένα G -πρότυπο είναι ανάγωγο. Για παράδειγμα, ξεχνώντας προσωρινά το Παράδειγμα 6.7, μπορούμε να δείξουμε ότι η συνήθης αναπαράσταση της \mathfrak{S}_3 είναι ανάγωγη υπολογίζοντας το $(\chi^{\text{std}}, \chi^{\text{std}})$. Πράγματι,

	K_{111}	K_{21}	K_3
χ^{std}	2	0	-1

και γι αυτό

$$(\chi^{\text{std}}, \chi^{\text{std}}) = \frac{1}{6}(2^2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)^2) = 1$$

όπως περιμέναμε. Τι γίνεται για μεγαλύτερα n (βλ. Άσκηση 2.4);

Ομοίως, για την αναπαράσταση ρ της Άσκησης 1.4, υπολογίζουμε

	$\{\epsilon\}$	$\{r^2\}$	$\{r, r^3\}$	$\{s, sr^2\}$	$\{sr, sr^3\}$
χ^ρ	2	-2	0	0	0

και γι αυτό

$$(\chi^\rho, \chi^\rho) = \frac{1}{8}(2^2 + (-2)^2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 1.$$

Για τον πίνακα χαρακτήρων της D_{2n} δείτε την Άσκηση 2.1.

Ημερομηνία: 30 Οκτωβρίου 2025.

Πόρισμα 7.6. Δυο αναπαραστάσεις είναι ισόμορφες αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο χαρακτήρα.

Proof. Την κατεύθυνση “ \Rightarrow ” την είδαμε στην Πρόταση 5.3 (3). Για την άλλη κατεύθυνση, αν δυο πρότυπα έχουν τον ίδιο χαρακτήρα, τότε από το Πόρισμα 7.5 έπεται ότι τα ανάγωγα πρότυπα που εμφανίζονται στην ισοτυπική τους διάσπαση έχουν τις ίδιες πολλαπλότητες. Το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 3.5. \square

Τα Πορίσματα 7.5 και 7.6 απαντάνε πλήρως στο Ερώτημα (3) της Παραγράφου 4. Το επόμενο αποτέλεσμα απαντάει στο Ερώτημα (1).

Θεώρημα 7.7. Το σύνολο

$$\{\chi^V : V \text{ είναι ανάγωγο } G\text{-πρότυπο}\}$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\text{CF}(G)$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(-, -)_G$. Ειδικότερα, το πλήθος των (διακεκριμένων) ανάγωγων G -προτύπων ισούται με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G .

Από τις σχέσεις ορθογωνιότητας I, γνωρίζουμε ότι το σύνολο όλων των χ^V για ανάγωγα G -πρότυπα V είναι ορθοκανονικό και κατά συνέπεια γραμμικώς ανεξάρτητο στο $\text{CF}(G)$ (γιατί;). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι παράγει τον $\text{CF}(G)$. Γι αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου που παράγει είναι τετριμμένο (γιατί;). Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το εξής.

Λήμμα 7.8. Έστω (ρ, V) μια αναπαράσταση της G και $\alpha \in \text{CF}(G)$.

(1) Η απεικόνιση $\rho_\alpha : V \rightarrow V$ που ορίζεται θέτοντας

$$\rho_\alpha(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \rho(g)(v)$$

για κάθε $v \in V$, είναι G -ομομορφισμός.

(2) Αν η (ρ, V) είναι ανάγωγη, τότε

$$\rho_\alpha = \frac{(\chi^{\rho, V}, \alpha)}{\dim(V)} \text{id}_V. \quad (7.1)$$

Απόδειξη. Για το (1), η γραμμικότητα της ρ_α έπεται από την γραμμικότητα της ρ (γιατί;). Για να επαληθεύσουμε την Ταυτότητα (3.1) για την ρ_α παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \rho(x^{-1}) (\rho_\alpha(\rho(x)(v))) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \rho(x^{-1}gx)(v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(x^{-1}gx)} \rho(x^{-1}gx)(v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\alpha(h)} \rho(h)(v) \\ &= \rho_\alpha(v) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in G$ και $v \in V$, όπου η πρώτη ισότητα έπεται από το ότι η (ρ, V) είναι αναπαράσταση, η δεύτερη από το ότι η α είναι συνάρτηση κλάσης και η τρίτη ισότητα προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής $h \rightarrow x^{-1}gx$.

Για το (2), από το Λήμμα του Schur (βλ. Θεώρημα 3.2) υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\rho_\alpha = c \text{id}_V$. Υπολογίζοντας το ίχνος και στα δυο μέλη,

$$\begin{aligned} c \dim(V) &= \text{tr}(\rho_\alpha) \\ &= \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \rho(g)(v) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \chi^{\rho, V}(g) \\ &= (\chi^{\rho, V}, \alpha), \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.7. Έστω $\alpha \in \text{CF}(G)$ τέτοια ώστε $(\alpha, \chi^{\rho, V}) = 0$ ή ισοδύναμα $(\chi^{\rho, V}, \alpha) = 0$ για κάθε ανάγωγη ανάγωγη αναπαράσταση (ρ, V) της G . Από την Ταυτότητα (7.1) έπεται ότι

$$\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \rho(g)(v) = 0, \quad (7.2)$$

για κάθε $v \in V$, για κάθε ανάγωγη αναπαράσταση (ρ, V) της G . Αφού η Ταυτότητα (7.2) ισχύει για κάθε ανάγωγη αναπαράσταση, θα ισχύει και για κάθε αναπαράσταση της G (γιατί;).

Για την κανονική αναπαράσταση $(\rho^{\text{reg}}, \mathbb{C}[G])$, η Ταυτότητα (7.2) γίνεται¹

$$0 = \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \rho^{\text{reg}}(g)(h) = \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} gh$$

για κάθε $h \in G$. Για το ταυτοτικό στοιχείο e της G παίρνουμε

$$\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} g = 0$$

στον $\mathbb{C}[G]$. Εξ' ορισμού τα στοιχεία του G αποτελούν βάση του $\mathbb{C}[G]$ και γι αυτό έπεται ότι $\overline{\alpha(g)} = 0$ για κάθε $g \in G$ (γιατί;). Με άλλα λόγια, η α είναι η μηδενική απεικόνιση και η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Μια ακόμη συνέπεια του Θεωρήματος 7.7 είναι ότι ο πίνακας χαρακτήρων της G είναι τετραγωνικός. Η συζήτηση περί ορθογωνιότητας ξεκίνησε στην αρχή της παραγράφου όταν αποφασίσαμε να φανταστούμε τις γραμμές του πίνακα χαρακτήρων ως διανύσματα κάποιου \mathbb{C}^m και να υπολογίσουμε το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο τους. Τι γίνεται αν κάνουμε το ίδιο και για τις στήλες;

¹ Αυτή είναι μια ισότητα διανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{C}[G]$.

Ας θυμηθούμε τον πίνακα χαρακτήρων της \mathfrak{S}_3

	K_{111}	K_{21}	K_3
χ^{triv}	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1
χ^{std}	2	0	-1

Αν προσωρινά φανταστούμε

$$K_{111} = (1, 1, 2), K_{21} = (1, -1, 0), K_3 = (1, 1, -1),$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$K_{111} \cdot K_{111} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = \frac{|\mathfrak{S}_3|}{|K_{111}|}$$

$$K_{21} \cdot K_{21} = 1^2 + (-1)^2 + 0 = 2 = \frac{|\mathfrak{S}_3|}{|K_{21}|}$$

$$K_3 \cdot K_3 = 2^2 + 0 + (-1)^2 = 3 = \frac{|\mathfrak{S}_3|}{|K_3|}$$

$$K_{111} \cdot K_{21} = K_{111} \cdot K_3 = K_{21} \cdot K_3 = 0.$$

Με άλλα λόγια, το σύνολο $\{K_{111}, K_{21}, K_3\}$ είναι ορθογώνιο ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{C}^3 . Αυτό ισχύει γενικότερα.

Θεώρημα 7.9. (Σχέσεις ορθογωνιότητας II) Αν K και L είναι δύο κλάσεις συζυγίας της G , τότε

$$\sum_{\chi} \chi(K) \overline{\chi(L)} = \begin{cases} \frac{|G|}{|K|}, & \text{αν } K = L \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (7.3)$$

όπου το χ στο άθροισμα διατρέχει όλους τους (διακεκριμένους) ανάγωγους χαρακτήρες της G .

Απόδειξη. Η Ταυτότητα (7.3) είναι ισοδύναμη με το να έχει ο (κανονικοποιημένος) πίνακας χαρακτήρων

$$\left(\sqrt{\frac{|K|}{|G|}} \chi(K) \right)_{\chi, K}$$

ορθοκανονικές στήλες, όπου το χ διατρέχει τους (διακεκριμένους) ανάγωγους χαρακτήρες της G (γραμμές του πίνακα) και το K διατρέχει τις κλάσεις συζυγίας της G (στήλες του πίνακα) (γιατί;). Αυτό είναι ισοδύναμο με το να έχει ο πίνακας αυτός ορθοκανονικές γραμμές (βλ. παρέκβαση Γραμμικής Άλγεβρας μετά το τέλος της απόδειξης). Αν χ και ψ είναι δυο ανάγωγοι χαρακτήρες της G , τότε αυτό είναι ισοδύναμο με την ταυτότητα

$$\sum_K |K| \chi(K) \overline{\psi(K)} = \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} = \begin{cases} |G|, & \text{αν } \chi = \psi \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (7.4)$$

όπου το K στο άθροισμα διατρέχει όλες τις κλάσεις συζυγίας της G (γιατί;). Όμως, αυτές είναι ακριβώς οι σχέσεις ορθογωνιότητας I (γιατί;) και η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Παρέκβαση Γραμμικής Άλγεβρας. Αν θεωρήσουμε τα στοιχεία του \mathbb{C}^n ως πίνακες-στήλη, τότε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο παίρνει την μορφή

$$v \cdot w = w^* v,$$

όπου $w^* := \overline{w}^\top$, ενώ αν τα θεωρήσουμε ως πίνακες-γραμμή, τότε παίρνει την μορφή

$$v \cdot w = v w^*.$$

Έχοντας αυτό κατά νου, ένας $(n \times n)$ -πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

έχει ορθοκανονικές στήλες αν και μόνο αν

$$v_j^* v_i = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$, ή ισοδύναμα αν

$$A^* A = I_n$$

όπου $A^* := \overline{A}^\top$ είναι ο προσηρτημένος του A (έννοια, την οποία συναντήσαμε και στην Παράγραφο 2). Αυτό με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το

$$A A^* = I_n,$$

καθώς ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο A^* (γιατί;). Αν

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} & w_1 & \text{---} \\ \text{---} & w_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & w_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

τότε η συνθήκη $A A^* = I_n$ είναι ισοδύναμη με το

$$w_i w_j^* = \delta_{ij}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$, δηλαδή αν και μόνο αν ο A έχει ορθοκανονικές γραμμές.

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας II στην πρώτη στήλη του πίνακα χαρακτήρων προκύπτει ο τύπος διάστασης (βλ. Ταυτότητα 4.1). Γενικά, οι σχέσεις ορθογωνιότητας μας

βοηθούν να συμπληρώσουμε πίνακες χαρακτήρων ομάδων των οποίων λείπουν ορισμένα στοιχεία. Για παράδειγμα, αν G είναι ομάδα τάξης 12 με πίνακα χαρακτήρων

	K_1	K_2	K_3	K_4
	1	3	4	4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ	ζ^2
χ_3	1	1	ζ^2	ζ
χ_4	a	b	c	d

με τέσσερις κλάσεις συζυγίας με 1, 3, 4 και 4 στοιχεία αντίστοιχα, τότε από τις σχέσεις ορθογωνιότητας στην πρώτη στήλη προκύπτει ότι $a = 3$ (γιατί;), ενώ στην πρώτη και τη δεύτερη στήλη προκύπτει ότι $b = -1$ (γιατί;) κ.ο.κ. Ποιά είναι τα c και d ;