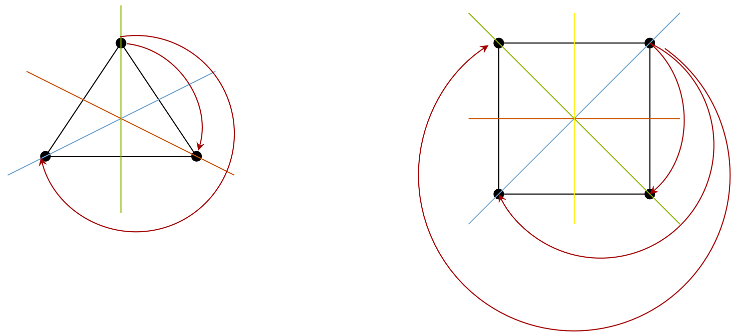
Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Παραδείγματα ομάδων, δράσεων και αναπαραστάσεων

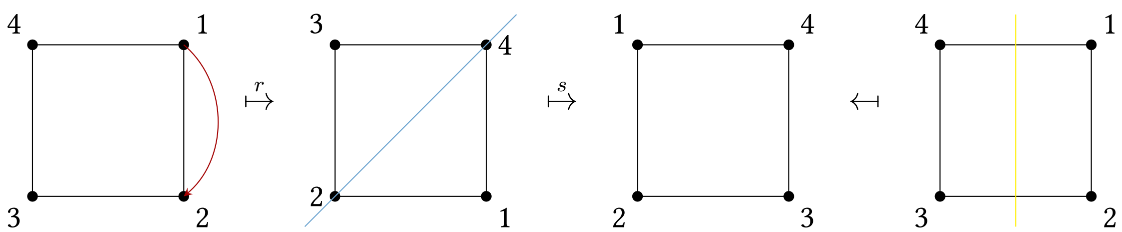
Έστω D_{2n} η ομάδα συμμετρίας ενός κανονικού n-γώνου, η οποία ονομάζεται διεδρική ομάδα, και έχει τάξη $2n$. Για $n = 3$ και $n = 4$ έχουμε τις εξής συμμετρίες:



Αν συμβολίσουμε με r την στροφή κατά την φορά του ρολογιού κατά $2\pi/n$, και s την ανάκλαση ως προς την ευθεία που περνάει από την βαρύκεντρο και μια κορυφή του κανονικού n-γώνου, την οποία έχουμε σταθεροποιήσει[1], τότε παρατηρούμε ότι

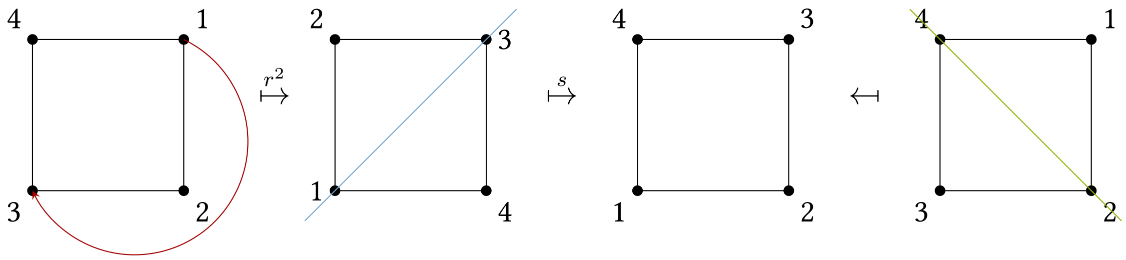
- τα $\epsilon, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ είναι διαφορετικά
- $sr^i \neq sr^j$, για κάθε $1 \leq i \neq j \leq n-1$
- $r^n = s^2 = \epsilon$
- $rsr = s$.

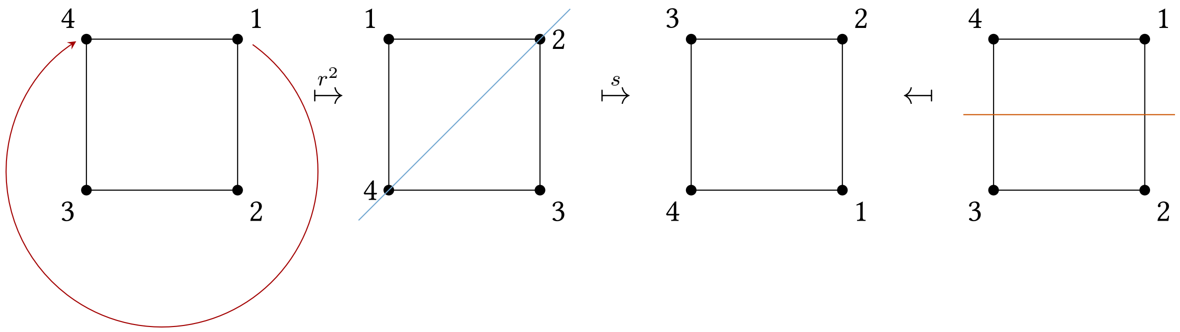
Για παράδειγμα, για $n = 4$ οι συμμετρίες sr, sr^2 και sr^3 σχηματικά δίνονται από:



Ημερομηνία: 8 Οκτωβρίου 2025.

[1] Αν ο n είναι περιττός, τότε αυτή περνάει από το μέσο της απέναντι πλευράς, ενώ αν ο n είναι άρτιος, τότε περνάει από την απέναντι κορυφή (γιατί;).





Με άλλα λόγια, βρήκαμε $2n$ συμμετρίες του κανονικού n-γώνου. Αποδεικνύεται ότι αυτές είναι όλες. Συνεπώς,

$$\mathrm{D}_{2n} = \{\epsilon, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = \epsilon, rsr = s\rangle.$$

Το δεξί μέλος ονομάζεται *παράσταση* της D_{2n} με *γεννήτορες* και *σχέσεις*.

Αν γνωρίζουμε την παράσταση μιας ομάδας

$$G = \langle S \mid R\rangle$$

με γεννήτορες στο σύνολο S και σχέσεις στο σύνολο R, τότε για να δείξουμε ότι ένα ζεύγος (ρ, V) είναι αναπαράσταση της G, τότε αρκεί να δείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $\rho(s)$ ικανοποιεί τις σχέσεις στο R, για κάθε $s \in S$. Με άλλα λόγια, δε χρειάζεται να ελέγξουμε ένα-ένα τα στοιχεία της ομάδας.

Όμως, χρειάζεται προσοχή όταν έχουμε να κάνουμε με παραστάσεις ομάδων, καθώς μια (αυθαίρετη) ομάδα μπορεί να έχει *πολλές διαφορετικές* παραστάσεις. Επίσης, δοθείσης μιας παράστασης,

- δεν είναι σαφές ποιά είναι η τάξη της ομάδας
- μπορεί να "κρύβονται" και άλλες σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων.

Παρόλα αυτά, οι παραστάσεις χρησιμεύουν ιδιαίτερα όταν έχουμε να κάνουμε με ομάδες μικρής τάξης.

Μια ακόμα οικογένεια ομάδων είναι η κυκλική ομάδα τάξης n, με παράσταση

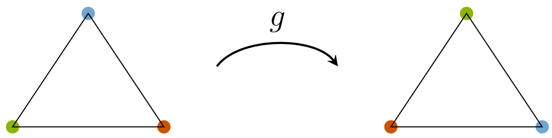
$$\mathrm{C}_n := \{\epsilon, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\} = \langle g \mid g^n = \epsilon\rangle.$$

Οι κυκλικές ομάδες εμφανίζονται και αυτές ως συμμετρίες κάποιων γεωμετρικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, η διεδρική ομάδα περιέχει

- μια υποομάδα ισόμορφη με την C_n:
$$\langle r \rangle = \{\epsilon, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\},$$
- διάφορες υποομάδες ισόμορφες με την C_2:
$$\langle s \rangle = \{\epsilon, s\}, \langle sr \rangle = \{\epsilon, sr\}, \cdots, \langle sr^{n-1} \rangle = \{\epsilon, sr^{n-1}\}.$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα δράσεων ομάδων μικρής τάξης.

Παράδειγμα. (C_3-πρότυπα) Η C_3 δρα στο $[3] = \{1, 2, 3\}$, το οποίο σκεφτόμαστε ως το σύνολο κορυφών ενός ισοπλεύρου τριγώνου, όπου το g δρα ως στροφή κατά την φορά του ρολογιού κατά $2\pi/3$:



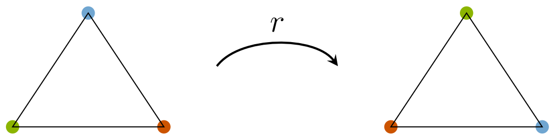
Με άλλα λόγια, το g δρα σαν την μετάθεση $(1\ 2\ 3)$ (γιατί;) και γι' αυτό έχει πίνακα
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η δράση αυτή είναι πιστή (γιατί;) και γι' αυτό η C_3 είναι ισόμορφη με την ακόλουθη υποομάδα της $GL_3(\mathbb{C})$:
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ποιός είναι ο πίνακας του στοιχείου g στην κανονική αναπαράσταση της C_3 ως προς την βάση $\{\epsilon, g, g^2\}$; Τι παρατηρείτε;

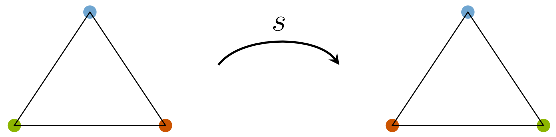
Παράδειγμα. (D_6-πρότυπα) Η D_6 δρα στο $[3] = \{1, 2, 3\}$ με τους ακόλουθους τρεις τρόπους:

(1) Σκεπτόμαστε τα στοιχεία του $[3]$ ως κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου όπως πριν:



με πίνακα
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

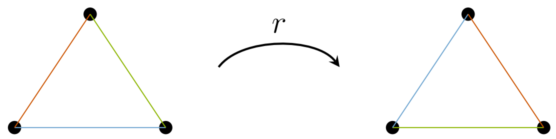
και



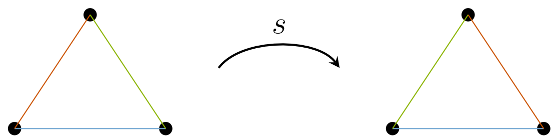
με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Σκεπτόμαστε τα στοιχεία του $[3]$ ως πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου:

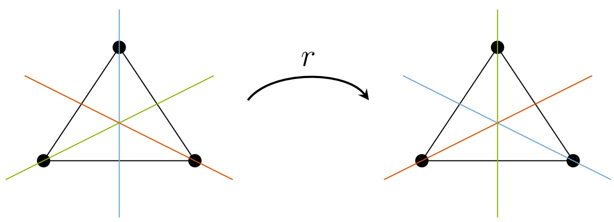


και

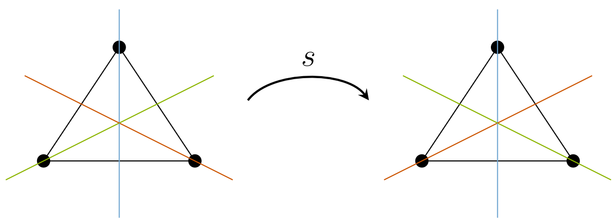


Ποιοί είναι οι αντίστοιχοι πίνακες; Τι παρατηρείτε;

(3) Σκεπτόμαστε τα στοιχεία του $[3]$ ως τις διαγώνιους ενός ισόπλευρου τριγώνου:



και

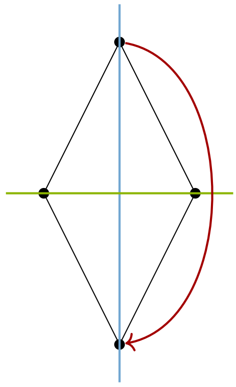


Ποιοί είναι οι αντίστοιχοι πίνακες; Τι παρατηρείτε;

Παράδειγμα. (V_4-πρότυπα) Έστω V_4 η 4-ομάδα του Klein με παράσταση

$$\mathrm{V}_4 := \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = \epsilon \rangle \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2.$$

Η V_4 είναι η μικρότερη μη-κυκλική ομάδα και προκύπτει ως ομάδα συμμετρίας του ρόμβου



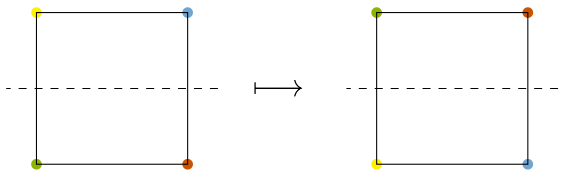
όπου

- a είναι η ανάκλαση ως προς τον οριζόντιο άξονα, και
- b είναι η ανάκλαση ως προς τον κάθετο άξονα.

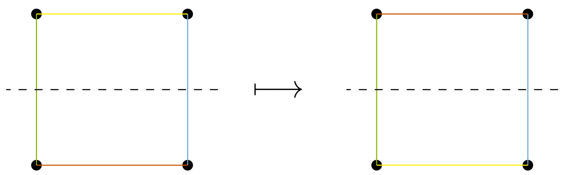
Συνεπώς, ab είναι η στροφή κατά τη φορά του ρολογιού κατά π (γιατί;). Πως επαληθεύονται σχηματικά οι σχέσεις;

Όπως και στην περίπτωση των D_6-προτύπων η V_4 δρα στο σύνολο $[4]$, το οποίο μπορούμε να σκεφτούμε ως τις κορυφές, τις πλευρές και τις διαγώνιους του ρόμβου. Ποιοί είναι οι αντίστοιχοι πίνακες; Ποιές είναι αντίστοιχες αναπαραστάσεις μεταθέσεων; Προκύπτουν ισόμορφα πρότυπα ή μη;

Παράδειγμα. (D_8-πρότυπα) Όμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα, η D_8 δρα στο $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$ το οποίο μπορούμε να σκεφτούμε ως τις κορυφές, τις πλευρές και τις διαγώνιους του ρόμβου. Στην περίπτωση αυτή όμως, οι επαγώμενες αναπαραστάσεις μεταθέσεων *δεν* είναι ισόμορφες. Για παράδειγμα, η δράση της απεικονιζόμενης ανάκλασης στις κορυφές



δεν έχει σταθερά σημεία, ενώ η αντίστοιχη στις ακμές



αφήνει σταθερά τα στοιχεία $\{1, 3\}$. Έχει σημασία πως θα χρωματίσουμε τα στοιχεία του $[4]$; Ποιά είναι η δράση του D_8 στις διαγώνιους τους τετραγώνου; Είναι πιστή; Τι παρατηρείτε;

Η D_8 έχει τέσσερις *διαφορετικές* αναπαραστάσεις διάστασης 1, οι οποίες προκύπτουν από τις εξείς δράσεις στους γεννήτορες:

$$\begin{aligned} r &\mapsto 1, & s &\mapsto 1 \\ r &\mapsto 1, & s &\mapsto -1 \\ r &\mapsto -1, & s &\mapsto 1 \\ r &\mapsto -1, & s &\mapsto -1 \end{aligned}$$

(γιατί;) Η D_6, η οποία είναι ισόμορφη με την $\mathfrak{S}_3$, είδαμε ότι έχει δυο, την τετριμμένη και την αναπαράσταση προσήμου:

$$\begin{aligned} r &\mapsto 1, & s &\mapsto 1 \\ r &\mapsto 1, & s &\mapsto -1 \end{aligned}$$

(γιατί;). Πως γενικεύεται αυτό για αυθαίρετο n;

Ιντερλούδιο Συνδυαστικής. Το σύνολο των διαγωνίων (ως ευθείες) του τριγώνου και του τετραγώνου στο επίπεδο είναι παράδειγμα παρατάγματος υπερεπιπέδου. Γενικότερα, παράταγμα υπερεπιπέδου (hyperplane arrangement) ονομάζεται ένα σύνολο *υπερεπιπέδων* στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή υπόχωρων της μορφής

$$\{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot \alpha = 0\},$$

όπου α είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα και $\cdot$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

Δοθέντος ενός παρατάγματος επιπέδου $\mathcal{A}$, έχει νόημα να κοιτάξουμε το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}$ και να αναρωτηθούμε ποιό είναι το πλήθος των συννεκτικών συνιστοσών του. Στην περίπτωση του τριγώνου έχουμε 6 συνεκτικές συνιστώσες, όσα και τα στοιχεία της $\mathfrak{S}_3$ (της ομάδας συμμετρίας του τριγώνου αυτού)!

Τα παρατάγματα υπερεπιπέδων αποτελούν βασικό αντικείμενο μελέτης της απαριθμητικής και γεωμετρικής συνδυαστικής.