

## Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας  
Πανεπιστήμιο Κρήτης

### 12. Συνήθη Young ταμπλώ και το θεώρημα βάσης

Από τον Ορισμό 11.2 δεν μπορούμε να αποφανθούμε ποιά είναι η διάσταση ενός προτύπου Specht, καθώς εν γένει υπάρχουν γραμμικές σχέσεις που ικανοποιούνται από πολυταμπλοειδή ίδιου σχήματος. Συνεπώς, είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς το εξής.

**Ερώτημα.** Ποιά πολυταμπλοειδή αποτελούν βάση ενός προτύπου Specht και πόσα είναι αυτά;

Για  $\lambda = (2, 1) \vdash 3$ , στο Παράδειγμα 11.3 (1), είδαμε ότι το

$$\mathcal{S}^{(2,1)} = \mathbb{C}[e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}, e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}}]$$

είναι ισόμορφο με την συνήθη αναπαράσταση της  $\mathfrak{S}_3$  και γι αυτό  $\dim(\mathcal{S}^{(2,1)}) = 2$ . Οι γραμμικές σχέσεις που ικανοποιούν τα υπόλοιπα τέσσερα πολυταμπλοειδή είναι

$$\begin{aligned} e_{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}} &= e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} - e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} \\ e_{\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}} &= e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} - e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} \\ e_{\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{smallmatrix}} &= -e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} \\ e_{\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} &= -e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} \end{aligned}$$

(γιατί;).

**Ορισμός 12.1.** Έστω  $\lambda \vdash n$ . Ένα Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$  ονομάζεται **σύνηθες** (standard) αν

- τα στοιχεία της κάθε γραμμής του αυξάνουν από αριστερά προς τα δεξιά<sup>1</sup>, και
- τα στοιχεία της κάθε στήλης του αυξάνουν από πάνω προς τα κάτω<sup>2</sup>.

Έστω  $\text{SYT}(\lambda)$  το σύνολο των συνήθων Young ταμπλώ σχήματος  $\lambda$ .

---

Ημερομηνία: 26 Νοεμβρίου 2025.

<sup>1</sup>Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ταμπλώ είναι *row-standard*.

<sup>2</sup>Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ταμπλώ είναι *column-standard*.

Ένα παράδειγμα συνήθους ταμπλώ σχήματος  $(4, 2, 2, 1)$  είναι

1	3	7	8
2	5		
4	9		
6			

**Παράδειγμα 12.2.** Έστω  $f^\lambda := |\text{SYT}(\lambda)|$ .

- (1) Προφανώς,  $f^{(n)} = f^{(1^n)} = 1$ .
- (2) Έχουμε  $f^{(n-1,1)} = n - 1$ , διότι από την πρώτη συνθήκη του Ορισμού 12.1, η επιλογή του στοιχείου της δεύτερης γραμμής καθορίζει ένα σύνηθες ταμπλώ σχήματος  $(n - 1, 1)$  (γιατί;). Γενικότερα<sup>3</sup>

$$f^{(n-k, 1^k)} = \binom{n-1}{k}$$

(βλ. Φυλλάδιο Ασκήσεων 4).

- (3) Τα συνήθη ταμπλώ σχήματος  $(3, 3)$  είναι

1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	3	4	1	3	5
4	5	6	3	5	6	3	4	6	2	5	6	2	4	6

και γι αυτό  $f^{(3,3)} = 5$ . Γενικότερα<sup>4</sup>,

$$f^{(n,n)} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

**Θεώρημα 12.3.** (Θεώρημα βάσης) Έστω  $\lambda \vdash n$ . Το σύνολο

$$\{e_T : T \in \text{SYT}(\lambda)\}$$

αποτελεί βάση του προτύπου Specht  $\mathcal{S}^\lambda$ . Ειδικότερα,

$$\dim(\mathcal{S}^\lambda) = f^\lambda.$$

Για να προετοιμαστούμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 12.3 χρειαζόμαστε μια διάταξη στο σύνολο των ταμπλιδών ίδιου σχήματος.

**Ορισμός 12.4.** Έστω  $T$  και  $Q$  δυο ταμπλώ ίδιου σχήματος. Γράφουμε  $[T] < [Q]$  αν

- υπάρχει  $i \in [n]$ , τέτοιο ώστε  $r_T(i) \neq r_Q(i)$
- για το μεγαλύτερο τέτοιο  $i$  ισχύει ότι  $r_T(i) < r_Q(i)$ .

<sup>3</sup>Με  $\binom{n}{k}$  συμβολίζουμε το πλήθος των υποσυνόλων του  $[n]$  με  $k$  στοιχεία. Οι ακέραιοι  $\binom{n}{k}$  ονομάζονται **διωνυμικοί συντελεστές**.

<sup>4</sup>Ο αριθμός  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  ονομάζεται  $n$ -οστός **αριθμός Catalan**.

Με άλλα λόγια,  $[T] < [Q]$  αν και μόνο αν το μεγαλύτερο στοιχείο που εμφανίζεται σε διαφορετικές γραμμές των  $T$  και  $Q$  βρίσκεται βορειότερα στο  $[T]$  από ότι στο  $[Q]$ . Για παράδειγμα,

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & 3 & 7 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & \end{array} < \begin{array}{c|c|c} 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline 2 & 6 & \end{array}.$$

Η σχέση  $<$  αποτελεί ολική διάταξη στο σύνολο των ταμπλιδών ίδιου σχήματος. Το ταμπλοειδές που βρίσκεται χαμηλότερα σε αυτή τη διάταξη, έχει τα μεγαλύτερα στοιχεία του συγκεντρωμένα σε υψηλότερες γραμμές. Για παράδειγμα, για  $\lambda = (2, 2)$  έχουμε

$$\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array} < \begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array} < \begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array} < \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \end{array} < \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \end{array} < \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}.$$

**Λήμμα 12.5.** Αν  $T$  είναι ταμπλώ σχήματος  $\lambda \vdash n$ , τέτοιο ώστε τα στοιχεία της κάθε στήλης του  $T$  να αυξάνουν από πάνω προς τα κάτω, τότε

- (1) υπάρχει μια μετάθεση  $\pi \in C(T)$  με  $\pi \neq \epsilon$  για την οποία  $[\pi T] < [T]$ , και
- (2)  $e_T = [T] + (\text{γραμμικός συνδυασμός ταμπλοειδών } [Q] \text{ σχήματος } \lambda \text{ με } [Q] < [T])$ .

*Απόδειξη.* Το (2) έπεται άμεσα από το (1), διότι

$$e_T = \nabla_T^-[T] = \sum_{\pi \in C(T)} \text{sign}(\pi)[\pi T] = [T] + \sum_{\substack{\pi \in C(T) \\ \pi \neq \epsilon}} \text{sign}(\pi) \underbrace{[\pi T]}_{< [T]}.$$

Για το (1), έστω  $\pi \in C(T)$  με  $\pi \neq \epsilon$ . Θεωρούμε τον μεγαλύτερο ακέραιο  $k \in [n]$  τέτοιο ώστε  $\pi(k) \neq k$ . Κάθε στοιχείο νότια του  $k$  στο  $T$  μένει σταθερό στο  $\pi T$  και το  $k$  μετατίθεται βορειότερα (γιατί;). Άρα,  $[\pi T] < [T]$ .

Για παράδειγμα, για

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 6 & 7 & \\ \hline 9 & 8 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{και} \quad \pi = (3 \ 6)$$

με  $k = 6$ , έχουμε

$$\pi T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 7 & \\ \hline 9 & 8 & & \\ \hline \end{array}$$

και γι αυτό

$$[\pi T] = \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 7 & \\ \hline 9 & 8 & & \end{array} < \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 6 & 7 & \\ \hline 9 & 8 & & \end{array} = [T].$$

□

θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 12.5 για να αποδείξουμε το θεώρημα βάσης.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 12.3.* Θα δείξουμε ότι το σύνολο  $\{e_T : T \in \text{SYT}(\lambda)\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του  $M^\lambda$ . Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι

$$c_{T_1}e_{T_1} + c_{T_2}e_{T_2} + \cdots + c_{T_k}e_{T_k} = 0 \quad \text{στο } M^\lambda,$$

για κάποια  $c_{T_1}, c_{T_2}, \dots, c_{T_k} \neq 0$  και  $T_1, T_2, \dots, T_k \in \text{SYT}(\lambda)$ . Έστω  $T_{\max}$  το σύννηθες ταμπλώ εκ των  $T_1, T_2, \dots, T_k$  του οποίου το αντίστοιχο ταμπλειδές είναι το μεγαλύτερο ως προς τη διάταξη του Ορισμού 12.4.

**Ισχυρισμός.** Για κάθε  $1 \leq i \leq k$ , αν

$$e_{T_i} = \sum_{[Q]} a_{[Q]}^i [Q],$$

όπου στο άθροισμα το  $[Q]$  διατρέχει όλα τα ταμπλοειδή σχήματος  $\lambda$ , για κάποια  $a_{[Q]}^i \in \mathbb{C}$ , τότε

$$a_{[T_{\max}]}^i = \begin{cases} 1, & \text{αν } T_i = T_{\max} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Ο ισχυρισμός έπεται άμεσα από το Λήμμα 12.5. Πράγματι, το (2) του λήμματος μας πληροφορεί ότι

$$e_{T_i} = [T_i] + (\text{γραμμικός συνδυασμός ταμπλοειδών } [Q] \text{ σχήματος } \lambda \text{ με } [Q] < [T_i])$$

Συνεπώς, το  $[T_{\max}]$  θα εμφανιστεί στο ανάπτυγμα κάποιου  $e_{T_i}$  μόνο αν  $T_i = T_{\max}$  και σε αυτή την περίπτωση με συντελεστή 1 (γιατί;).

Από τον ισχυρισμό, ο συντελεστής του  $[T_{\max}]$  στο ανάπτυγμα του

$$c_{T_1}e_{T_1} + c_{T_2}e_{T_2} + \cdots + c_{T_k}e_{T_k} \in M^\lambda$$

στην βάση των ταμπλοειδών σχήματος  $\lambda$  ισούται με

$$\sum_{i=1}^k c_{T_i} a_{[T_{\max}]}^i = c_{T_{\max}} \neq 0.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι

$$c_{T_1}e_{T_1} + c_{T_2}e_{T_2} + \cdots + c_{T_k}e_{T_k} = 0.$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μένει να δείξουμε ότι το σύνολο  $\{e_T : T \in \text{SYT}(\lambda)\}$  παράγει το  $\mathcal{S}^\lambda$ . Από τον τύπο διάστασης (βλ. Πρόταση 4.2), έχουμε

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} \dim(\mathcal{S}^\lambda)^2 \geq \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2,$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από την γραμμική ανεξαρτησία του  $\{e_T : T \in \text{SYT}(\lambda)\}$ . Το ζητούμενο, δηλαδή ότι  $\dim(\mathcal{S}^\lambda) = f^\lambda$ , έπεται από το επόμενο αποτέλεσμα<sup>5</sup>.  $\square$

<sup>5</sup>Για μια κατασκευαστική απόδειξη, θα έπρεπε να ξεκινήσουμε με ένα πολυταμπλοειδές  $e_T$  για κάποιο ταμπλώ  $T$  και να δείξουμε ότι μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός πολυταμπλοειδών  $e_Q$  για συνήθη

Η αντιστοιχία του ακόλουθου θεωρήματος ονομάζεται *αντιστοιχία Robinson–Schensted* και δίνει μια συνδυαστική απόδειξη του τύπου διάστασης για την συμμετρική ομάδα (συγκρίνετε με την συζήτηση των τελευταίων παραγράφων της Παραγράφου 4).

**Θεώρημα 12.6.** (Robinson 1936, Schensted 1961) Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των μεταθέσεων της  $\mathfrak{S}_n$  και ζευγών συνήθων Young ταμπλώ ίδιου σχήματος και περιεχομένου  $[n]$ . Ειδικότερα,

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2.$$

Ολοκληρώνουμε την παρούσα παράγραφο, διατυπώνοντας έναν τύπο για την διάσταση του προτύπου Specht.

**Ορισμός 12.7.** Έστω  $\lambda \vdash n$ . Για ένα τετράγωνο  $x$  του  $Y_\lambda$ , το οποίο συμβολικά γράφουμε  $x \in Y_\lambda$ , το σύνολο  $H(x)$  των τετραγώνων που βρίσκονται ασθενώς ανατολικά ή ασθενώς νότια του  $x$  στο  $Y_\lambda$  ονομάζεται **γάντζος** (hook) του  $x$ . Θέτουμε  $h(x) := |H(x)|$ .

Για παράδειγμα, για  $\lambda = (4, 2, 2, 1)$  ο γάντζος του τετραγώνου  $x$

$$Y_{(4,2,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & x & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

που βρίσκεται στη θέση (1,2) είναι

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ \hline & \text{■} & & \\ \hline & \text{■} & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

και γι αυτό  $h(x) = 5$ .

Το επόμενο αποτέλεσμα, γνωστό ως *hook length formula*, δίνει έναν αναπάντεχα απλό<sup>6</sup> τύπο για το πλήθος των συνήθων ταμπλώ δοσμένου σχήματος, και κατ' επέκταση τη διάσταση του προτύπου Specht.

**Θεώρημα 12.8.** (Frame–Robinson–Thrall 1954) Για  $\lambda \vdash n$ ,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in Y_\lambda} h(x)}. \quad (12.1)$$

ταμπλώ  $Q$ . Μια τέτοια απόδειξη δόθηκε από τον Garnir το 1950, επινοώντας έναν αλγόριθμο για να το κάνει αυτό, ο οποίος σήμερα ονομάζεται *straightening algorithm*.

<sup>6</sup>Δεν υπάρχει κανένας προφανής λόγος που να εξηγεί το ότι ο αριθμός στο δεξί μέλος της Ταυτότητας (12.1) είναι ακέραιος.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το πλήθος των συνήθων ταμπλώ σχήματος  $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ . Γεμίζουμε τα τετράγωνα του διαγράμματος Young της  $\lambda$  με τα μήκη κάθε γάντζου του αντίστοιχου τετραγώνου ως εξής

7	5	2	1
4	2		
3	1		
1			

Τότε, η Ταυτότητα (12.1) μας πληροφορεί ότι

$$f^{(4,2,2,1)} = \frac{9!}{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} = 108.$$