Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

11. Πρότυπα Specht (Συνέχεια)

Παράδειγμα 11.3.

(1) Έστω $\lambda = (2,1) \vdash 3$. Για κάθε ένα από τα έξι ταμπλώ σχήματος λ

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

παίρνουμε ένα πολυταμπλοειδές. Για διαφορετικούς αριθμούς $a, b, c \in [3]$, έχουμε

$$\mathbf{e}_{\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}} = \nabla^-_{\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}} \begin{array}{cc}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} = (\epsilon - (a\ c))\ \begin{array}{cc}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{cc}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{cc}\hline c & b \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό $\mathrm{M}^{(2,1)} \cong \mathbb{C}[1,2,3]$ που είδαμε στην αρχή της παραγράφου προκύπτει

$$\mathbf{e}_{\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}} \mapsto c - a.$$

Με άλλα λόγια, το πρότυπο Specht $\mathcal{S}^{(2,1)}$ παράγεται από όλες τις διαφορές $c - a$ για κάθε $c \neq a$ στο $\mathrm{M}^{(2,1)}$. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 6.7, αυτό δεν είναι άλλο από την συνήθη αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_3$ και γι αυτό

$$\mathcal{S}^{(2,1)} = \mathbb{C}[\,\mathbf{e}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}}, \mathbf{e}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}}\,].$$

Γενικότερα, το $\mathcal{S}^{(n-1,1)}$ είναι ένα ανάγωγο υποπρότυπο του $\mathrm{M}^{(n-1,1)}$ ισόμορφο με τη συνήθη αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_n$.

(2) Αν $\lambda = (n)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα ταμπλώ σχήματος (n) και γι αυτό

$$\mathbf{e}_{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}} = \nabla^-_{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}} \begin{array}{cccc}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array} = \begin{array}{cccc}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}\,.$$

Με άλλα λόγια, το $\mathcal{S}^{(n)} = \mathrm{M}^{(n)}$.

(3) Αν $\lambda = (1^n)$, τότε για κάθε ταμπλώ T σχήματος (1^n) έχουμε $\mathrm{C}(T) = \mathfrak{S}_n$ (γιατί;) και γι αυτό

$$\nabla^-_T = \sum_{\pi \in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\pi)\pi = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\pi)\pi \coloneqq \nabla^-_n.$$

Ημερομηνία: 20 Νοεμβρίου 2025.

Συνεπώς, για ένα αυθαίρετο πολυταμπλοειδές

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\begin{array}{|c|}\hline \pi_1\\\hline \pi_2\\\hline \vdots\\\hline \pi_n\\\hline\end{array}} &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\sigma \begin{array}{c}\hline \pi_1\\\hline \pi_2\\\hline \vdots\\\hline \pi_n\\\hline\end{array}\\
&\mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)\sigma\pi\\
&= \operatorname{sign}(\pi^{-1}) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma\pi)\sigma\pi\\
&= \operatorname{sign}(\pi) \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\tau)\tau\\
&= \operatorname{sign}(\pi)\nabla_n^-,
\end{aligned}
$$

όπου στη δεύτερη γραμμή χρησιμοποιήσαμε τον ισομορφισμό $M^{(1^n)} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ και η δεύτερη και τρίτη ισότητα έπονται από την Άσκηση 3.6 (4).

Άρα, το πρότυπο Specht που αντιστοιχεί στην διαμέριση (1^n) είναι ισόμορφο με το υποπρότυπο $\mathbb{C}[\nabla_n^+]$ της κανονικής αναπαράστασης με τη δράση να δίνεται από το πρόσημο μιας μετάθεσης. Αυτό δεν είναι άλλο από το πρότυπο της αναπαράστασης προσήμου της $\mathfrak{S}_n$.

Οι υπολογισμοί του Παραδείγματος 11.3 δείχνουν ότι "βαδίζουμε" στο σωστό μονοπάτι αναφορικά με τον στόχο μας να βρούμε τα ανάγωγα $\mathfrak{S}_n$-πρότυπα. Η επόμενη πρόταση εξερευνεί ορισμένες ιδιότητες των προτύπων Specht. Η απόδειξη, αν και τεχνική, δεν παρουσιάζει δυσκολίες και είναι μια καλή ευκαιρία να ελέγξει κανείς την κατανόηση των ορισμών.

Λήμμα 11.4. Αν T είναι ταμπλώ περιεχομένου $[n]$ και $\pi \in \mathfrak{S}_n$, τότε ισχύουν τα εξής

(1) $\mathrm{C}(\pi T) = \pi \mathrm{C}(T)\pi^{-1}$
(2) $\nabla_{\pi T}^- = \pi\nabla_T^-\pi^{-1}$
(3) $\mathbf{e}_{\pi T} = \pi\mathbf{e}_T$
(4) Αν επιπλεόν $\pi \in \mathrm{C}(T)$, τότε $\mathbf{e}_{\pi T} = \operatorname{sign}(\pi)\mathbf{e}_T$.

Απόδειξη. Για το (1), έχουμε $\sigma \in \mathrm{C}(\pi T)$ αν και μόνο αν για κάθε $i \in [n]$, τα $\sigma(i)$ και i βρίσκονται στην ίδια στήλη του πT. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν για κάθε $j \in [n]$, τα $\sigma(\pi(j))$ και $\pi(j)$ βρίσκονται στην ίδια στήλη του πT, καθώς η π είναι μετάθεση. Με τη σειρά του, αυτό είναι ισόδυναμο με το να βρίσκονται τα $\pi^{-1}(\sigma(\pi(j)))$ και j στην ίδια στήλη του T, για κάθε $j \in [n]$ (γιατί;), δηλαδή με το $\pi^{-1}\sigma\pi \in \mathrm{C}(T)$ και γι αυτό $\sigma \in \pi\mathrm{C}(T)\pi^{-1}$.

Για το (2), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\pi\nabla_T^-\pi^{-1} &= \sum_{\sigma\in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\sigma)\pi\sigma\pi^{-1} \\
&= \sum_{\sigma\in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\pi\sigma\pi^{-1})\pi\sigma\pi^{-1} \\
&= \sum_{\tau\in \pi\mathrm{C}(T)\pi^{-1}} \mathrm{sign}(\tau)\tau \\
&= \sum_{\tau\in \mathrm{C}(\pi T)} \mathrm{sign}(\tau)\tau \\
&= \nabla_{\pi T}^-,
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα έπεται από το (1).

Για το (3), έχουμε

$$\mathbf{e}_{\pi T} = \nabla_{\pi T}^-[\pi T] = \pi\nabla_T^-\pi^{-1}[\pi T] = \pi\nabla_T^-[T] = \pi\mathbf{e}_T,$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το (2).

Τέλος, για το (4), έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\pi T} &= \nabla_{\pi T}^-[\pi T] \\
&= \sum_{\sigma\in \mathrm{C}(\pi T)} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma[\pi T] \\
&= \sum_{\sigma\in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma[\pi T] \\
&= \mathrm{sign}(\pi^{-1}) \sum_{\sigma\in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\sigma\pi)\sigma\pi[T] \\
&= \mathrm{sign}(\pi) \sum_{\tau\in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\tau)\tau[T] \\
&= \mathrm{sign}(\pi)\nabla_T^-[T] \\
&= \mathrm{sign}(\pi)\mathbf{e}_T,
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το (1) και το γεγονός ότι $\pi \in \mathrm{C}(T)$ και η πέμπτη ισότητα έπεται από το ότι η αντιστοιχία $\sigma \mapsto \sigma\pi$ είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathrm{C}(T)$, καθώς $\pi \in \mathrm{C}(T)$. □

Μια σημαντική συνέπεια του Λήμματος 11.4 (3) είναι ότι το πρότυπο Specht είναι υποπρότυπο του προτύπου Young. Πράγματι, για κάθε $\lambda \vdash n$ αν $v \in \mathcal{S}^\lambda$, τότε

$$v = \sum_T c_T\, \mathbf{e}_T$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλα τα ταμπλώ σχήματος λ, και $c_T \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\pi v = \pi \left(\sum_T c_T \, \mathbf{e}_T \right) = \sum_T c_T \, (\pi \mathbf{e}_T) = \sum_T c_T \, \mathbf{e}_{\pi T} \ \in \ \mathcal{S}^\lambda,$$

για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

Για την ακρίβεια, μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω. Τα πρότυπα Young και Specht έχουν την ιδιότητα ένα αυθαίρετο στοιχείο τους να έχει την μορφή

$$\left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} c_\pi \pi \right) [T] \quad \text{και} \quad \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} c_\pi \pi \right) \mathbf{e}_T$$

για οποιοδήποτε ταμπλοειδές $[T]$ και πολυταμπλοειδές $\mathbf{e}_T$, αντίστοιχα (γιατί;). Ορισμένες φορές πρότυπα με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται *κυκλικά*.

Παρέκβαση Άλγεβρας. Γενικότερα, αν G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, τότε η κανονική αναπαράσταση $\mathbb{F}[G]$, εκτός από δομή διανυσματικού χώρου έχει και τη δομή *δακτύλιου*, με τον πολλαπλασιασμό να κληρονομείται από την πράξη στην G. Πιο συγκεκριμένα,

$$\left(\sum_{g \in G} c_g g \right) \left(\sum_{x \in G} c_x x \right) \ \coloneqq \ \sum_{h \in G} \left(\sum_{\substack{g, x \in G \\ h = gx}} c_g c_x \right) h.$$

Αυτό ονομάζεται *ομαδοδακτύλιος* (group ring).

Έχοντας αυτό κατά νου, αυτά που ονομάζουμε G-πρότυπα μέχρι στιγμής, δεν είναι τίποτα άλλο παρά (αριστερά) $\mathbb{F}[G]$-πρότυπα. Διαισθητικά, ένα πρότυπο πάνω από έναν δακτύλιο R είσαι σαν ένα "διανυσματικό χώρο", μόνο που τώρα ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δίνεται από τα στοιχεία του R, αντί για τα στοιχεία κάποιου σώματος $\mathbb{F}$.

Πιο συγκεκριμένα, ένα (*αριστερό*) R-*πρότυπο* (left R-module) είναι μια αβελιανή ομάδα M εφοδιασμένη με μια πράξη $R \times M \to M$, την οποία συμβολίζουμε με $(r, m) \mapsto r \cdot m$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} 1 \cdot m &= m \\ r \cdot (m + m') &= r \cdot m + r \cdot m' \\ (r + r') \cdot m &= r \cdot m + r' \cdot m \\ (rr') \cdot m &= r \cdot (r' \cdot (m)) \end{aligned}$$

για κάθε $r, r' \in R$ και $m, m' \in M$. Συγκρίνοντας αυτά τα αξιώματα με τα αντίστοιχα ενός G-προτύπου, τι παρατηρείτε; Ποια είναι τα $\mathbb{F}$-πρότυπα; Ποιά ειναι τα $\mathbb{Z}$-πρότυπα;

Σε αυτό το πλαίσιο, ένα R-πρότυπο M ονομάζεται *κυκλικό* αν $M = Rm$, δηλαδή

$$M = \{rm : r \in R\}$$

για οποιοδήποτε (μη μηδενικό) $m \in M$. Η έννοια του κυκλικού $\mathbb{F}[G]$-προτύπου δεν είναι ακριβώς ίδια με την παραπάνω που έχουν τα πρότυπα Young και Specht. Ειδικότερα, τα πρότυπα Young παράγονται από οποιοδήποτε ταμπλοειδές, αλλά όχι οποιοδήποτε *γραμμικό* *συνδυασμό ταμπλειδών*, που είναι και ένα αυθαίρετο στοιχείο του M^λ. Από την άλλη μεριά όμως, θα δείξουμε ότι τα πρότυπα Specht είναι ανάγωγα και ως τέτοια είναι κυκλικά *και* με τις δυο έννοιες[1].

Θα δείξουμε τώρα ότι τα πρότυπα Specht είναι ανάγωγα. Γι αυτό θεωρούμε το (μοναδικό) εσωτερικό γινόμενο $(\text{-}, \text{-})$ στο M^λ που ορίζεται κάνοντας την βάση των ταμπλοειδών σχήματος λ ορθοκανονική, δηλαδή

$$([T],[Q]) = \begin{cases} 1, & \text{αν } [T]=[Q] \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το $(\text{-}, \text{-})$ είναι $\mathfrak{S}_n$-αναλλοίωτο (γιατί;).

Θεώρημα 11.5. (Submodule theorem, James 1976) Έστω $\lambda \vdash n$. Αν U είναι υποπρότυπο του M^λ, τότε είτε $U \supseteq \mathcal{S}^\lambda$, είτε $U \subseteq (\mathcal{S}^\lambda)^\perp$, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\text{-}, \text{-})$.

Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια το παρακάτω.

Πόρισμα 11.6. Τα πρότυπα Specht είναι ανάγωγα.

Απόδειξη. Έστω λ μια διαμέριση ακεραίου. Αν $U \neq \{0\}$ είναι υποπρότυπο του $\mathcal{S}^\lambda$, τότε από το Θεώρημα 11.5 έπεται ότι

- είτε $U \supseteq \mathcal{S}^\lambda$ και γι αυτό $U = \mathcal{S}^\lambda$,
- είτε $U \subseteq (\mathcal{S}^\lambda)^\perp$ και γι αυτό $U \subseteq \mathcal{S}^\lambda \cap (\mathcal{S}^\lambda)^\perp = \{0\}$, το οποίο είναι αδύνατο καθώς $U \neq \{0\}$.

Με άλλα λόγια, το $\mathcal{S}^\lambda$ δεν έχει γνήσια υποπρότυπα διαφορετικά του $\{0\}$ και κατά συνέπεια είναι ανάγωγο. □

Η απόδειξη του Θεωρήματος 11.5 βασίζεται στο παρακάτω τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 11.7. Έστω $\lambda \vdash n$ και T, Q δύο ταμπλώ σχήματος λ.

(1) Για κάθε $v, u \in \mathrm{M}^\lambda$, ισχύει ότι
$$(\nabla_T^- v, u) = (v, \nabla_T^- u).$$
(2) Αν $(i\ j) \in \mathrm{R}(Q) \cap \mathrm{C}(T)$, τότε $\nabla_T^-[Q] = 0$.
(3) Αν $\nabla_T^-[Q] \neq 0$, τότε $\nabla_T^-[Q] = \pm \mathbf{e}_T$.
(4) Αν $v \in \mathrm{M}^\lambda$, τότε
$$\nabla_T^- v = c\,\mathbf{e}_T$$
για κάποιο $c \in \mathbb{C}$.

[1] Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι ένα μη-τετριμμένο $\mathbb{F}[G]$-πρότυπο είναι ανάγωγο αν και μόνο αν είναι κυκλικό ως $\mathbb{F}[G]$-πρότυπο.

Απόδειξη. Για το (1), υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
(\nabla_T^- v, u) &= \left(\sum_{\pi\in \mathrm{C}(T)} \operatorname{sign}(\pi)\pi v, u\right) \\
&= \sum_{\pi\in \mathrm{C}(T)} \operatorname{sign}(\pi)\,(\pi v, u) \\
&= \sum_{\pi\in \mathrm{C}(T)} \operatorname{sign}(\pi)\,\left(v, \pi^{-1} u\right) \\
&= \left(v, \sum_{\pi\in \mathrm{C}(T)} \operatorname{sign}(\pi)\pi^{-1} u\right) \\
&= \left(v, \sum_{\pi\in \mathrm{C}(T)} \operatorname{sign}(\pi^{-1})\pi^{-1} u\right) \\
&= \left(v, \nabla_T^- u\right),
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι το $(\text{-}, \text{-})$ είναι $\mathfrak{S}_n$-αναλλοίωτο (γιατί;).

Για το (2), αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\nabla_T^- = x(\epsilon - (i\ j)), \tag{11.1}$$

για κάποιο $x \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Πράγματι, έστω H η υποομάδα της $\mathrm{C}(T)$ που παράγεται από το $(i\ j)$, το οποίο εξ υποθέσεως είναι στοιχείο της $\mathrm{C}(T)$, και $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων των αριστερών κλάσεων της H στην $\mathrm{C}(T)$. Τότε

$$\mathrm{C}(T) = x_1 H \uplus x_2 H \uplus \cdots \uplus x_k H$$

και γι αυτό

$$
\begin{aligned}
\nabla_T^- &= \sum_{\pi\in \mathrm{C}(T)} \operatorname{sign}(\pi)\pi \\
&= \sum_{i=r}^{k} \left(\operatorname{sign}(x_r)x_r + \operatorname{sign}(x_r(i\ j))x_r(i\ j)\right) \\
&= \left(\underbrace{\sum_{r=1}^{k} \operatorname{sign}(x_r)x_r}_{=\,x}\right)(\epsilon - (i\ j)).
\end{aligned}
$$

Τώρα, εφαρμόζοντας της Ταυτότητα (11.1) παίρνουμε

$$\nabla_T^-[Q] = x(\epsilon - (i\ j))[Q] = x([Q] - (i\ j)[Q]) = x([Q] - [Q]) = 0,$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από την υπόθεση $(i\ j) \in \mathrm{R}(Q)$.

Για το (3), παρατηρούμε ότι κάθε δυο στοιχεία i και j τα οποία ανήκουν στην ίδια γραμμή του Q *δεν μπορούν* να ανήκουν στην ίδια στήλη του T, διότι διαφορετικά $(i\ j) \in \mathrm{R}(Q) \cap \mathrm{C}(T)$ και από το (2) θα είχαμε $\nabla_T^-[Q] = 0$, το οποίο είναι αδύνατο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη μιας $\pi \in \mathrm{C}(T)$ τέτοια ώστε $[\pi T] = [Q]$.

Για παράδειγμα, αν $\lambda = (4,3,3,1)$ και

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 8 & 9 & 10 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 11 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ , \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 6 & 10 & 4 \\ \hline 2 & 7 & 11 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & 8 & 9 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

τότε "κοιτάμε" τα στοιχεία κάθε στήλης του T ξεχωριστά για το αν βρίσκονται στην αντίστοιχη γραμμή του Q. Αν όχι, τότε τα μεταθέτουμε με ένα στοιχείο της $\mathrm{C}(T)$ για να βρεθούν στην "σωστή" τους θέση. Στο παράδειγμα, στην πρώτη στήλη

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 8 & 9 & 10 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 11 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 6 & 10 & 4 \\ \hline 2 & 7 & 11 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & 8 & 9 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

και γι αυτό δρούμε με την $(5\ 11)$. Έπειτα, για τη δεύτερη στήλη

$$(5\ 11)T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 11 & 6 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 8 & 9 & 10 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 6 & 10 & 4 \\ \hline 2 & 7 & 11 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & 8 & 9 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

και γι αυτό δρούμε με την $(2\ 6)$. Τέλος, για την τρίτη στήλη

$$(2\ 6)(5\ 11)T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 6 & 3 & 4 \\ \hline 11 & 2 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 8 & 9 & 10 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{και} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 6 & 10 & 4 \\ \hline 2 & 7 & 11 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & 8 & 9 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

και γι αυτό δρούμε με την $(3\ 10)$, για να πάρουμε

$$[(3\ 10)(2\ 6)(5\ 11)T] = \begin{array}{cccc}\hline 1 & 6 & 10 & 4 \\ \hline 11 & 2 & 7 & \\ \cline{1-3} 8 & 9 & 3 & \\ \cline{1-3} 5 & & & \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{cccc}\hline 1 & 6 & 10 & 4 \\ \hline 2 & 7 & 11 & \\ \cline{1-3} 3 & 8 & 9 & \\ \cline{1-3} 5 & & & \\ \cline{1-1}\end{array} = [Q].$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\nabla_T^-[Q] &= \nabla_T^-[\pi T] \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma\pi[T] \\
&= \mathrm{sign}(\pi^{-1}) \sum_{\sigma \in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\sigma\pi)\sigma\pi[T] \\
&= \mathrm{sign}(\pi) \sum_{\tau \in \mathrm{C}(T)} \mathrm{sign}(\tau)\tau[T] \\
&= \mathrm{sign}(\pi)\mathbf{e}_T,
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα έπεται από το ότι η αντιστοιχία $\sigma \mapsto \sigma\pi$ είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathrm{C}(T)$, διότι $\pi \in \mathrm{C}(T)$.

Τέλος, αν $v \in \mathrm{M}^\lambda$, τότε

$$v = \sum_{[Q]} c_{[Q]}[Q],$$

όπου στο άθροισμα το $[Q]$ διατρέχει όλα τα ταμπλοειδή σχήματος λ και $c_{[Q]} \in \mathbb{C}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_T^- v &= \nabla_T^- \left(\sum_{[Q]} c_{[Q]}[Q] \right) \\
&= \sum_{[Q]} c_{[Q]} \nabla_T^-[Q] \\
&= \sum_{\substack{[Q] \\ \nabla_T^-[Q] \neq 0}} c_{[Q]} \nabla_T^-[Q] \\
&= \sum_{\substack{[Q] \\ \nabla_T^-[Q] \neq 0}} c_{[Q]} \left(\pm \mathbf{e}_T \right) \\
&= \left(\underbrace{\sum_{\substack{[Q] \\ \nabla_T^-[Q] \neq 0}} \pm c_{[Q]}}_{= c \, \in \, \mathbb{C}} \right) \mathbf{e}_T,
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα έπεται από το (3) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □