Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στην παράγραφο 7, λίγο αργότερα, θα αποδείξουμε τα εξής:

- Δυο αναπαραστάσεις είναι ισόμορφες αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο χαρακτήρα.
- Το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων μιας ομάδας ισούται με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της.

Ας υπολογίσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_4$, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που έχουμε αναπτύξει έως τώρα.

Παράδειγμα. (Πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_4$) Η $\mathfrak{S}_4$ έχει πέντε κλάσεις συζυγίας

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
αντιπρόσωπος	ϵ	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
πληθάριθμος	1	6	3	8	6

Στην Παράγραφο 9, θα βρούμε έναν τύπο για το πληθάριθμο μιας αυθαίρετης κλάσης συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$.

Έχουμε συναντήσει τρεις ανάγωγους χαρακτήρες της $\mathfrak{S}_4$, τους χαρακτήρες της τετριμμένης αναπαράστασης, της αναπαράστασης προσήμου και της συνήθους αναπαράστασης

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
χ^{triv}	1	1	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1	1	-1
χ^{std}	3	1	-1	0	-1

Ψάχνουμε δύο ακόμα, έστω χ_4 και χ_5. Αν a και b είναι οι διαστάσεις τους, ο τύπος διάστασης

$$24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + a^2 + b^2 \ \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$$

μας πληροφορεί ότι $a = 3$ και $b = 2$.

Πως θα μπορούσαμε να βρούμε έναν χαρακτήρα διάστασης 3; Από την Πρόταση 6.6 γνωρίζουμε ότι το γινόμενο δυο χαρακτήρων είναι και αυτός χαρακτήρας. Προφανώς, ο πολλαπλασιασμός με τον τετριμμένο χαρακτήρα δεν προσφέρει κάτι καινούργιο (γιατί;). Όμως,

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
$\chi^{\mathrm{std}}\chi^{\mathrm{sign}}$	3	-1	-1	0	1

Ημερομηνία: 24 Οκτωβρίου 2025.

Θα μπορούσε να είναι ανάγωγος; Υπολογίζουμε

$$(\chi^{\mathrm{std}}\chi^{\mathrm{sign}}, \chi^{\mathrm{std}}\chi^{\mathrm{sign}}) = \frac{1}{24}(3^2 + 6\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = 1.$$

Συνεπώς, από το Πόρισμα 7.5, ο $\chi^{\mathrm{std}}\chi^{\mathrm{sign}}$ είναι ανάγωγος και κατά συνέπεια βρήκαμε τον χ_4.

Για να βρούμε τον χ_4, παρατηρήσαμε ότι πολλαπλασιάζοντας έναν ανάγωγο χαρακτήρα με έναν χαρακτήρα διάστασης 1 προέκυψε ένας ακόμη ανάγωγος χαρακτήρας. Αυτό ισχύει γενικότερα.

Άσκηση. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Αν χ είναι ένας ανάγωγος χαρακτήρας της G και ψ είναι ένας χαρακτήρας διάστασης 1 της G, τότε ο $\chi\psi$ είναι ανάγωγος χαρακτήρας.

Λύση. Έχουμε

$$(\chi\psi, \chi\psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g)\overline{\chi(g)\psi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi(g)}\left(\psi(g)\overline{\psi(g)}\right).$$

Αφού όμως $\psi(\epsilon) = 1$, έπεται ότι

$$\psi(g)\overline{\psi(g)} = \psi(g)\psi(g^{-1}) = \psi(gg^{-1}) = \psi(\epsilon) = 1,$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την Άσκηση 2.2 (2) και η δεύτερη ισότητα έπεται από το ότι ο χαρακτήρας μια αναπαράστασης διάστασης 1 είναι ουσιαστικά το ίδιο με την αντίστοιχη αναπαράσταση. Συνεπώς,

$$(\chi\psi, \chi\psi) = \sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi(g)} = (\chi, \chi) = 1,$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το Πόρισμα 7.5.

Παράδειγμα. (Πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_4$, συνέχεια) Συνεχίζοντας, για να βρούμε τον τελευταίο χαρακτήρα, το Πόρισμα 4.2 μας πληροφορεί ότι ο χ_5 εμφανίζεται στην ισοτυπική διάσπαση του χαρακτήρα της κανονικής αναπαράστασης της $\mathfrak{S}_4$

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
χ^{reg}	24	0	0	0	0

Από το Πόρισμα 7.5, έπεται ότι

$$\chi^{\mathrm{reg}} = \chi^{\mathrm{triv}} + \chi^{\mathrm{sign}} + 3\chi^{\mathrm{std}} + 3\chi_4 + 2\chi_5 \;\Rightarrow\; \chi_5 = \left(\chi^{\mathrm{reg}} - \chi^{\mathrm{triv}} - \chi^{\mathrm{sign}} - 3\chi^{\mathrm{std}} - 3\chi_4\right)/2$$

και γι αυτό

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
χ_5	2	0	2	-1	0

Συμπερασματικά, ο πίνακας χαρακτήρων της $\mathfrak{S}_4$ είναι

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_{4}
χ^{triv}	1	1	1	1	1
χ^{sign}	1	-1	1	1	-1
χ^{std}	3	1	-1	0	-1
χ_4	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0

.

Τι παρατηρείτε;

Διαμέριση του συνόλου $[n]$ ονομάζεται μια συλλογή μη κενών υποσυνόλων $S_1, S_2, \ldots, S_k$ του $[n]$, τα οποία λέγονται *μέρη*, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του $[n]$ να εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάποιο μέρος. Μια τέτοια διαμέριση τη συμβολίζουμε με $S_1|S_2|\cdots|S_k$. Για παράδειγμα, για $n = 4$

k	1	2	3	4
διαμέριση με k μέρη	1234	1|234	12|3|4	1|2|3|4
		2|134	13|2|4	
		3|124	14|2|3	
		4|123	23|1|4	
		12|34	24|1|3	
		13|24	34|1|2	
		14|23		
πλήθος	1	7	6	1

.

Το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ με k μέρη συμβολίζεται με $\mathrm{S}(n, k)$ και ονομάζεται *αριθμός Stirling δευτέρου είδους*. Το πλήθος όλων των διαμερίσεων του $[n]$ συμβολίζεται με $\mathrm{B}(n)$ και ονομάζεται *αριθμός Bell*. Οι δυο αυτές ακολουθίες αριθμών εμφανίζονται συχνά στα Διακριτά Μαθηματικά και σχετίζονται ως εξής

$$\mathrm{B}(n) = \mathrm{S}(n, 1) + \mathrm{S}(n, 2) + \cdots + \mathrm{S}(n, n).$$

Παράδειγμα. Έστω $S = \{12|34, 13|24, 14|23\}$ το σύνολο των διαμερίσεων του $[4]$ με δύο και δύο μέρη. Η δράση καθορισμού της $\mathfrak{S}_4$ στο $[4]$ επάγει μια δράση στο S με τον προφανή τρόπο. Έστω χ ο χαρακτήρας της αντίστοιχης αναπαράστασης μεταθέσεων. Χρησιμοποιώντας την

Άσκηση 2.3 (1) υπολογίζουμε

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
αντιπρόσωπος	ϵ	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
12|34	12|34	12|34	12|34	14|23	14|23
13|24	13|24	14|23	13|24	12|34	13|24
14|23	14|23	13|24	14|23	13|24	12|34
χ	3	1	3	0	1

.

Ας υπολογίσουμε την ισοτυπική διάσπαση του χ. Έχουμε την εξής διάσπαση

$$\mathbb{C}[S] = \underbrace{\mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23]}_{\cong V^{\text{triv}}} \oplus \left(\mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23]\right)^{\perp},$$

όπως και κάθε αναπαράσταση μεταθέσεων. Αν $\chi^{\perp}$ είναι ο χαρακτήρας του δεύτερου προσθεταίου της διάσπασης αυτής, τότε από την Πρόταση 6.6 υπολογίζουμε

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
$\chi^{\perp}$	2	0	2	-1	0

και γι αυτό

$$(\chi^{\perp}, \chi^{\perp}) = \frac{1}{24}(2^2 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 0) = 1.$$

Άρα, από το πόρισμα 7.5, ο $\chi^{\perp}$ είναι ανάγωγος και η ισοτυπική του διάσπαση είναι

$$\chi = \chi^{\text{triv}} + \chi_5,$$

με τον συμβολισμό του προηγούμενου παραδείγματος.

Ας υπολογίσουμε το $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_4}\left(\mathbb{C}[S], V^{\text{def}}\right)$, όπου V^{def} είναι η αναπαράσταση καθορισμού της $\mathfrak{S}_4$. Από το Θεώρημα 7.2 γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_4}\left(\mathbb{C}[S], V^{\text{def}}\right)\right) &= (\chi^{\text{def}}, \chi)\\ &= \frac{1}{24}(3 \cdot 4 + 6(2 \cdot 1) + 3(3 \cdot 0) + 8(0 \cdot 1) + 6(1 \cdot 0))\\ &= 1,\end{aligned}$$

όπου χ^{def} είναι ο χαρακτήρας του V^{def}

	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4
χ^{def}	4	2	0	1	0

.

Άρα, υπάρχει μοναδικός $\mathfrak{S}_4$-ομομορφισμός $\mathbb{C}[S] \to V^{\text{def}}$ ως προς βαθμωτά πολλαπλάσια. Ένας τέτοιος δίνεται από

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23] \oplus \left(\mathbb{C}[12|34 + 13|24 + 14|23]\right)^{\perp} &\to V^{\text{triv}} \oplus V^{\text{std}}\\ (v, w) &\mapsto (v, 0)\end{aligned}$$

(γιατί;).