Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

15. Η άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων (Συνέχεια)

Για $\lambda, \mu \vdash n$, έστω $\varphi^\lambda(\mu)$ η τιμή του χαρακτήρα του προτύπου Young M^λ στην κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση μ.

Θεώρημα 15.12. Αν $\lambda \vdash n$, τότε

$$p_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} \varphi^\mu(\lambda) m_\mu.$$

Απόδειξη. Έστω $\ell(\lambda) = \ell$ και $\ell(\mu) = k$. Ο συντελεστής του $\boldsymbol{x}^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_k^{\mu_k}$ στο ανάπτυγμα του δεξιού μέλους της

$$p_\lambda(\boldsymbol{x}) = \left(x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + \cdots\right)\left(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + \cdots\right) \cdots \left(x_1^{\lambda_\ell} + x_2^{\lambda_\ell} + \cdots\right)$$

ισούται με το πλήθος των παραγοντοποιήσεων του $\boldsymbol{x}^\mu$ ως $x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \cdots x_{i_\ell}^{\lambda_\ell}$. Για παράδειγμα, για $\lambda = (2,1,1,1)$ και $\mu = (3,2)$, έχουμε τις τέσσερις παραγοντοποιήσεις

$$x_1^3 x_2^2 = x_1^2 x_1 x_2 x_2 = x_1^2 x_2 x_1 x_2 = x_1^2 x_2 x_2 x_1 = x_2^2 x_1 x_1 x_1.$$

Αναπαριστούμε κάθε τέτοια παραγοντοποίηση με ένα *ταμπλοειδές* σχήματος μ έτσι ώστε οι αριθμοί

$$[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{j-1} + 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j]$$

να βρίσκονται στην i_j-οστή γραμμή, για κάθε $1 \le j \le \ell$. Με άλλα λόγια, οι γραμμές του ταμπλοειδούς αντιστοιχούν στις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_k$, ενώ τα στοιχεία του ταμπλοειδούς αντιστοιχούν στη θέση που καταλαμβάνει κάθε μεταβλητή στο ανάπτυγμα. Τα ταμπλοειδή που αντιστοιχούν στις παραγοντοποιήσεις του παραδείγματος είναι

$$\begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array}\,, \quad \begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array}\,, \quad \begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array}\,, \quad \begin{array}{ccc} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & \\ \cline{1-2} \end{array}\,,$$

αντίστοιχα.

Τα ταμπλοειδή που αντιστοιχούν στις παραγοντοποιήσεις αυτές είναι ακριβώς τα ταμπλοειδή σχήματος μ που μένουν σταθερά από τη δράση της μετάθεσης

$$(1\ 2\ \cdots\ \lambda_1)(\lambda_1 + 1\ \lambda_1 + 2\ \cdots\ \lambda_1 + \lambda_2) \cdots (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{\ell-1} + 1\ \cdots\ n),$$

η οποία έχει κυκλικό τύπο λ (γιατί;). Άρα, ο συντελεστής του $\boldsymbol{x}^\mu$ στο p_λ ισούται με $\varphi^\lambda(\mu)$. Τέλος, από το Πρόταση 11.11, αν $\varphi^\lambda(\mu) \neq 0$, τότε $\mu \trianglerighteq \lambda$ και το ζητούμενο έπεται. $\square$

Ημερομηνία: 9 Δεκεμβρίου 2025.

Πόρισμα 15.13. Αν $\lambda \vdash n$, τότε

$$\varphi^{\lambda}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} m_i!,$$

όπου m_i είναι η πολλαπλότητα εμφάνισης του i στα μέρη της λ. Ειδικότερα, το σύνολο $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ αποτελεί βάση του Sym_n και ο Sym παράγεται ως δακτύλιος από τα $p_1, p_2, \ldots$.

Απόδειξη. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 15.12, προκύπτει ότι η τιμή του $\varphi^{\lambda}(\lambda)$ ισούται με το πλήθος των ταμπλοειδών σχήματος λ των οποίων η i-οστή γραμμή περιέχει τους αριθμούς

$$[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i]$$

για κάθε $i \geq 1$ (γιατί;) και ο πρώτος ισχυρισμός έπεται (γιατί;). Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο Πόρισμα 15.7.

Για παράδειγμα, αν $\lambda = (2, 1, 1, 1)$, τότε έχουμε τα εξής ταμπλοειδή της παραπάνω μορφής

$$\begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} 4 & \\ \cline{1-1} 5 & \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} 5 & \\ \cline{1-1} 4 & \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1} 3 & \\ \cline{1-1} 5 & \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1} 5 & \\ \cline{1-1} 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 5 & \\ \cline{1-1} 3 & \\ \cline{1-1} 4 & \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{cc}\hline 1 & 2 \\ \hline 5 & \\ \cline{1-1} 4 & \\ \cline{1-1} 3 & \\ \cline{1-1}\end{array},$$

και γι αυτό $\varphi^{\lambda}(\lambda) = 6$. (Ποιές είναι οι αντίστοιχες παραγοντοποιήσεις του $x_1^2 x_2 x_3 x_4$;) □

Για $n = 3$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} p_{(1,1,1)} &= 6m_{(1,1,1)} + 3m_{(2,1)} + m_{(3)} \\ p_{(2,1)} &= m_{(2,1)} + m_{(3)} \\ p_{(3)} &= m_{(3)}. \end{aligned}$$

Σε αντίθεση με την βάση των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων, όπου στην κύρια διαγώνιο είχαμε 1, εδώ οι πίνακες μετάβασης είναι αντιστρέψιμοι πάνω από το $\mathbb{Q}$. Για παράδειγμα,

$$m_{(1,1)} = \frac{1}{2}(p_{(1,1)} + p_{(2)}).$$

16. Οι συναρτήσεις Schur

Στην Παράγραφο 15 είδαμε τέσσερις βάσεις του χώρου των συμμετρικών συναρτήσεων: την μονωνυμική, την στοιχειώδη, την πλήρως ομογενή και την power sum. Η πρώτη από αυτές προέκυψε με φυσικό τρόπο από τη διαδικασία συμμετρικοποίησης ενός μονωνύμου. Οι υπόλοιπες τρεις σχετίζονται με την μονωνυμική και αποτελούν παραδείγματα πολλαπλασιαστικών συμμετρικών συναρτήσεων.

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ένα ακόμα παράδειγμα, ίσως το πιο σημαντικό, βάσης του χώρου των συμμετρικών συναρτήσεων. Η βάση αυτή θα προκύψει[1] ως η "γεννήτρια συνάρτηση" μιας οικογένειας συνδυαστικών αντικειμένων με κάποιο κατάλληλο "βάρος".

Ορισμός 16.1. Έστω λ μια διαμέριση ακεραίου. Ημισύνηθες Young ταμπλώ (semistandard Young tableau) σχήματος λ ονομάζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του συνόλου των τετραγώνων του Y_λ και του $\mathbb{Z}_{>0}$, τέτοια ώστε

- τα στοιχεία κάθε γραμμής να αυξάνουν *ασθενώς* από τα αριστερά προς τα δεξιά
- τα στοιχεία κάθε στήλης να αυξάνουν *αυστηρά* από πάνω προς τα κάτω.

Το σύνολο όλων των ημισυνήθων ταμπλώ σχήματος λ συμβολίζεται με $\mathrm{SSYT}(\lambda)$.

Ένα παράδειγμα ημισυνήθους ταμπλώ σχήματος $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ είναι το εξής

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} 3 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

Για $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$, έστω $\mathrm{cont}(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, όπου α_i είναι η πολλαπλότητα εμφάνισης του ακεραίου i στο T. Το $\mathrm{cont}(T)$ ονομάζεται τύπος του T. Ο τύπος του ημισυνήθους ταμπλώ του παραδείγματος είναι

$$(2, 2, 3, 1, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

Παρατηρούμε ότι $2+2+3+1+0+1+0+\cdots = 9$, δηλαδή το πλήθος των τετραγώνων του $\mathrm{Y}_{(4,2,2,1)}$ ή ισοδύναμα το $|\lambda| = 9$. Αν $\lambda \vdash n$, τότε ο τύπος ενός ημισυνήθους ταμπλώ σχήματος λ είναι παράδειγμα *ασθενούς σύνθεσης*[2] του n. Σε κάθε ομογενή τυπική δυναμοσειρά βαθμού n, η ακολουθία των εκθετών είναι επίσης παράδειγμα ασθενούς σύνθεσης του n.

Το παρακάτω αποτέλεσμα, η απόδειξη του οποίου παραλλείπεται, παρέχει μια συνδυαστική ερμηνεία των αριθμών Kostka, δηλαδή των πολλαπλοτήτων εμφάνισης των ανάγωγων αναπαραστάσεων στην ισοτυπική διάσπαση του προτύπου Young, που αφορά ημισυνήθη ταμπλώ.

---

[1] Υπάρχουν διάφοροι ισοδύναμοι τρόποι να εισαγάγει κανείς τις συναρτήσεις Schur. Εδώ παρουσιάζεται ο πιο συνδυαστικός.

[2] Μια ακολουθία $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ μη αρνητικών ακεραίων τέτοια ώστε $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = n$ ονομάζεται ασθενής σύνθεση (weak composition) του n (συγκρίνετε με τον Ορισμό 9.8).

Θεώρημα 16.2. (Κανόνας του Young) Για κάθε $\mu \vdash n$,

$$\mathrm{M}^{\mu} \cong_{\mathfrak{S}_n} \bigoplus_{\lambda \vdash n} (\mathcal{S}^{\lambda})^{\mathrm{K}_{\lambda\mu}}, \tag{16.1}$$

όπου

$$\mathrm{K}_{\lambda\mu} = |\{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda) : \mathrm{cont}(\lambda) = \mu\}|.$$

Για παράδειγμα, από το Πόρισμα 11.13, για $\mu = (2,2,1) \vdash 5$, γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{M}^{(2,2,1)} \cong_{\mathfrak{S}_5} (\mathcal{S}^{(5)})^a \oplus (\mathcal{S}^{(4,1)})^b \oplus (\mathcal{S}^{(3,2)})^c \oplus (\mathcal{S}^{(3,1,1)})^d \oplus \mathcal{S}^{(2,2,1)}.$$

για κάποια $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Όμως,

λ	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1,1)	(2,2,1)
T	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&1&2&2&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1&1&2\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1&1&3\\\hline 2&2\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1&1&2\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$

και από τον Κανόνα του Young βρίσκουμε

$$\mathrm{M}^{(2,2,1)} \cong_{\mathfrak{S}_5} \mathcal{S}^{(5)} \oplus (\mathcal{S}^{(4,1)})^2 \oplus (\mathcal{S}^{(3,2)})^2 \oplus \mathcal{S}^{(3,1,1)} \oplus \mathcal{S}^{(2,2,1)}.$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- $\mathrm{K}_{\mu\mu} = 1$, για κάθε $\mu \vdash n$, σε συμφωνία με τον ισχυρισμό του Πορίσματος 11.13.
- $\mathrm{K}_{(n)\mu} = 1$, για κάθε $\mu \vdash n$, σε συμφωνία με το γεγονός ότι η αναπαράσταση συμπλόκου της υποομάδας Young $\mathfrak{S}_\mu$ περιέχει ακριβώς ένα αντίγραφο της τετριμμένης αναπαράστασης της $\mathfrak{S}_n$.
- Ένα ημισύνηθες ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου (1^n) δεν είναι άλλο παρά ένα σύνηθες ταμπλώ (γιατί;) και γι αυτό $\mathrm{K}_{\lambda(1^n)} = f^\lambda$, για κάθε $\lambda \vdash n$. Συνεπώς, από τον Κανόνα του Young, έπεται ότι

  $$\mathrm{M}^{(1^n)} \cong_{\mathfrak{S}_n} \bigoplus_{\lambda \vdash n} (\mathcal{S}^{\lambda})^{f^\lambda},$$

  σε συμφωνία με τον υπολογισμό στην αρχή της Παραγράφου 11.

Τι μας πληροφορεί ο Κανόνας του Young για την περίπτωση $\mu = (n-1, 1)$;

Επιστρέφοντας στον κόσμο των συμμετρικών συναρτήσεων, για $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$ τύπου $\mathrm{cont}(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ θεωρούμε το μονώνυμο

$$\boldsymbol{x}^T := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots .$$

Για παράδειγμα, το μονώνυμο που αντιστοιχεί στο ημισύνηθες ταμπλώ

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&3\\\hline 2&2\\\cline{1-2} 3&4\\\cline{1-2} 6\\\cline{1-1}\end{array} \quad \in \ \mathrm{SSYT}(4,2,2,1)$$

είναι

$$\boldsymbol{x}^T = x_1^2 x_2^2 x_3^3 x_4 x_6.$$

Ορισμός 16.3. Έστω $\lambda \vdash n$. Η τυπική δυναμοσειρά

$$s_\lambda = s_\lambda(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)} \boldsymbol{x}^T$$

ονομάζεται συνάρτηση Schur που αντιστοιχεί στην λ.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση Schur είναι η "γεννήτρια συνάρτηση" των ημισυνήθων Young ταμπλώ T ως προς το "βάρος" $\boldsymbol{x}^T$. Σε αντίθεση με όλα τα προηγούμενα παραδείγματα οικογενειών συμμετρικών συναρτήσεων που είδαμε μέχρι στιγμής, οι συναρτήσεις Schur δεν έχουν εκ των προτέρων κανένα λόγο να είναι συμμετρικές.

Για ασθενή σύνθεση α, έστω $\lambda(\alpha)$ η διαμέριση που προκύπτει από την α ξεχνώντας τα μηδενικά και αναδιατάσσοντας τα μέρη της σε (ασθενώς) αύξουσα σειρά.

Παράδειγμα 16.4.

(1) Έχουμε $s_{(n)} = h_n$ και $s_{(1^n)} = e_n$. Συνεπώς η συνάρτηση Schur παρεμβάλλεται μεταξύ της πλήρους ομογενούς και της στοιχειώδους συμμετρικής συνάρτησης.

(2) Έστω ότι

$$s_{(2,1)} = c_{(3)} m_{(3)} + c_{(2,1)} m_{(2,1)} + c_{(1,1,1)} m_{(1,1,1)}$$

για κάποια $c_\mu \in \mathbb{C}$. Ας υπολογίσουμε τα c_μ του παραπάνω αναπτύγματος.

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει ημισύνηθες ταμπλώ σχήματος $(2,1)$ και τύπου α με $\lambda(\alpha) = (3)$ (γιατί;) και γι αυτό $c_{(3)} = 0$. Αν $0 < a < b < c$, τότε υπάρχουν ακριβώς δυο διαφορετικά ημισυνήθη ταμπλώ σχήματος $(2,1)$ και τύπου α με $\lambda(\alpha) = (1,1,1)$:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

και γι αυτό $c_{(1,1,1)} = 2$. Τέλος, αν $a \neq b$ δυο θετικοί ακέραιοι, τότε υπάρχει ακριβώς ένα ημισύνηθες ταμπλώ $(2,1)$ και τύπου α με $\lambda(\alpha) = (2,1)$:

$$\begin{cases} \begin{array}{|c|c|}\hline a & a \\ \hline b & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, & \text{αν } a < b, \\[2em] \begin{array}{|c|c|}\hline b & b \\ \hline a & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, & \text{αν } b < a \end{cases}$$

και γι αυτό $c_{(2,1)} = 1$. Συμπερασματικά, λοιπόν, έχουμε

$$s_{(2,1)} = m_{(2,1)} + 2m_{(1,1,1)}$$

(3) Γενικεύοντας τον υπολογισμό του $c_{(2,1)}$ στο (2), ο συντελεστής του $x_1 x_2 \cdots x_n$ στην συνάρτηση Schur που αντιστοιχεί στην διαμέριση $\lambda \vdash n$ ισούται με f^λ (γιατί;).

Όπως υπονοεί το παράδειγμα 16.4, οι συναρτήσεις Schur είναι συμμετρικές και "γνωρίζουν" πολλά από αυτά που έχουμε δει μέχρι στιγμής.

Θεώρημα 16.5. Για κάθε $\lambda \vdash n$, $s_\lambda \in \mathrm{Sym}_n$.

Θα δούμε δύο αποδείξεις του Θεωρήματος 16.5: μια αλγεβρική και μια συνδυαστική. Για την αλγεβρική, θυμίζουμε ότι το πρότυπο Young M^λ είναι ισόμορφο με την επαγωγή της τετριμμένης αναπαράστασης V^{triv} της υποομάδας Young $\mathfrak{S}_\lambda$ στην $\mathfrak{S}_n$ (βλ. Πρόταση 10.4). Όμως, $\mathfrak{S}_\alpha \cong \mathfrak{S}_{\lambda(\alpha)}$ για κάθε ασθενή σύνθεση α του n, όπου $\mathfrak{S}_0 := \{\epsilon\}$ και γι αυτό

$$V^{\mathrm{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \cong_{\mathfrak{S}_n} V^{\mathrm{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_{\lambda(\alpha)}}^{\mathfrak{S}_n} \cong_{\mathfrak{S}_n} \mathrm{M}^{\lambda(\alpha)}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 16.5 (Αλγεβρική). Από τον Ορισμό 16.3,

$$s_\lambda = \sum_\alpha \mathrm{K}_{\lambda\alpha} m_\alpha,$$

όπου στο άθροισμα το α διατρέχει όλες τις ασθενείς συνθέσεις του n. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι

$$\mathrm{K}_{\lambda\alpha} = \mathrm{K}_{\lambda\lambda(\alpha)}$$

για κάθε ασθενή σύνθεση α του n. Το ζητούμενο έπεται από την συζήτηση που προηγείται της απόδειξης, τον Κανόνα του Young και την μοναδικότητα της ισοτυπικής διάσπασης (γιατί;). □

Για την συνδυαστική απόδειξη, θα επαληθεύσουμε τον Ορισμό 15.1, δηλαδή θα δείξουμε ότι η συνάρτηση Schur είναι αναλλοίωτη από οποιαδήποτε μετάθεση των μεταβλητών της. Από την ΄Ασκηση 3.5 (1), αρκεί να εξετάσουμε την δράση κάθε γειτονικής αντιμεταθέσης $(i\ i+1)$ για $i \geq 1$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 16.5 (Συνδυαστική). Από την συζήτηση που προηγήθηκε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathrm{K}_{\lambda\alpha} = \mathrm{K}_{\lambda\hat{\alpha}},$$

όπου $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots,)$ για κάθε ασθενή σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ του n. Για τον λόγο αυτό αρκεί να βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

$$\{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda) : \mathrm{cont}(T) = \alpha\} \to \{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda) : \mathrm{cont}(T) = \hat{\alpha}\}.$$

Έστω $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)$ με τύπο α. Θεωρούμε τις εμφανίσεις των i και $i+1$ σε κάθε γραμμή του T, αγνοώντας εκείνες όπου τα i και $i+1$ βρίσκονται διαδοχικά στην ίδια στήλη, δηλαδή

$$\begin{array}{|c|}\hline i \\ \hline i{+}1 \\ \hline \end{array},$$

καθώς αυτά δεν μπορούν να εναλλαγούν (γιατί;). Για παράδειγμα, για $\lambda = (9,5,4,3,2)$ και $i = 5$ έχουμε

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \cline{1-5} 3 & 4 & 5 & 7 \\ \cline{1-4} 4 & 6 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 7 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

με $\mathrm{cont}(T) = (3, 2, 3, 3, 3 + 1, 5 + 1, 2)$.

Έστω $\phi(T)$ το ταμπλώ που προκύπτει από το T εναλλάσσοντας σε κάθε γραμμή το πλήθος των εμφανίσεων του i με το πλήθος των εμφανίσεων του $i+1$. Το $\phi(T)$ είναι ένα ημισύνηθες ταμπλώ σχήματος λ και τύπου $\hat{\alpha}$ (γιατί;) και η απεικόνιση ϕ είναι η ζητούμενη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (γιατί;). Στο παράδειγμα, έχουμε

$$\phi(T) = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & & & \\ 3 & 4 & 5 & 7 & & & & & \\ 4 & 5 & 6 & & & & & & \\ 6 & 7 & & & & & & & \end{array}$$

με $\mathrm{cont}(\phi(T)) = (3, 2, 3, 3, 5 + 1, 3 + 1, 2)$. $\square$