

## Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας  
Πανεπιστήμιο Κρήτης

### 10. Πρότυπα Young (Συνέχεια)

Ας υπολογίσουμε τον χαρακτήρα  $\psi^{(2,1)}$  του προτύπου Young

$$M^{(2,1)} = \mathbb{C} \left[ \frac{\overline{1\ 2}}{\underline{3}}, \frac{\overline{1\ 3}}{\underline{2}}, \frac{\overline{2\ 3}}{\underline{3}} \right]$$

που αντιστοιχεί στην διαμέριση  $\lambda = (2, 1)$  του  $n = 3$ . Έχουμε

	$K_{111}$	$K_{21}$	$K_3$
αντιπρόσωπος	$\epsilon$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
$\frac{\overline{1\ 2}}{\underline{3}}$	$\frac{\overline{1\ 2}}{\underline{3}}$	$\frac{\overline{1\ 2}}{\underline{3}}$	$\frac{\overline{2\ 3}}{\underline{3}}$
$\frac{\overline{1\ 3}}{\underline{2}}$	$\frac{\overline{1\ 3}}{\underline{2}}$	$\frac{\overline{2\ 3}}{\underline{3}}$	$\frac{\overline{1\ 2}}{\underline{3}}$
$\frac{\overline{2\ 3}}{\underline{3}}$	$\frac{\overline{2\ 3}}{\underline{3}}$	$\frac{\overline{1\ 3}}{\underline{2}}$	$\frac{\overline{1\ 3}}{\underline{2}}$
$\psi^{(2,1)}$	3	1	0

Τι σας θυμίζει;

**Πρόταση 10.4.** Για κάθε  $\lambda \vdash n$ ,

$$M^\lambda \cong_{\mathfrak{S}_n} V^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}, \quad (10.1)$$

όπου  $V^{\text{triv}}$  είναι το τετριμμένο  $\mathfrak{S}_\lambda$ -πρότυπο. Ειδικότερα,

$$\dim(M^\lambda) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_{\ell(\lambda)}!}.$$

*Απόδειξη.* Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται άμεσα απαριθμώντας το πλήθος των ταμπλοειδών σχήματος  $\lambda$  (γιατί;). Εναλλακτικά, υπολογίζοντας τις διαστάσεις και στα δυο μέλη του ισομορφισμού 10.1, έπεται ότι

$$\begin{aligned} \dim(M^\lambda) &= \dim(V^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}) \\ &= \chi^{\text{triv}} \uparrow_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}(\epsilon) \\ &= \frac{|\{\pi \in \mathfrak{S}_n : \pi^{-1}\epsilon\pi \in \mathfrak{S}_\lambda\}|}{|\mathfrak{S}_\lambda|} \\ &= \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_{\ell(\lambda)}!}, \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το Πόρισμα 8.6.

Για τον πρώτο ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι το  $M^\lambda$  είναι ισόμορφο με την αναπαράσταση συμπλόκου της  $\mathfrak{S}_\lambda$  στην  $\mathfrak{S}_n$  (γιατί;). Πράγματι, θεωρούμε την αντιστοιχία που στέλνει το σύμπλοκο  $\epsilon\mathfrak{S}_\lambda$  στο “σύνηθες” ταμπλοειδές

$$[T] = \begin{array}{cccc} \hline 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \cdots & \lambda_1+\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ \hline \lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(\lambda)-1}+1 & \lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(\lambda)-1}+2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}$$

και κατά συνέπεια το σύμπλοκο  $\pi\mathfrak{S}_n$  στο ταμπλοειδές  $\pi[T]$ . Η αντιστοιχία αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν  $\pi\mathfrak{S}_\lambda = \sigma\mathfrak{S}_\lambda$ , τότε  $\pi = \sigma\tau$  για κάποια  $\tau \in \mathfrak{S}_\lambda$  ή ισοδύναμα για κάποια  $\tau \in R(T)$ . Όμως,

$$\pi = (\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma$$

όπου  $\sigma\tau\sigma^{-1} \in R(\sigma T)$ . Συνεπώς,  $\pi = w\sigma$ , για κάποια  $w \in R(\sigma T)$  και γι αυτό  $\pi[T] = \sigma[T]$ , όπως θέλαμε. Επεκτείνοντας γραμμικά προκύπτει ο ζητούμενος  $\mathfrak{S}_n$ -ισομορφισμός (γιατί;).  $\square$

### 11. Πρότυπα Specht

Όπως είδαμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου τα πρότυπα Young δεν είναι ανάγωγα για κάθε διαμέριση  $\lambda$ . Για την ακρίβεια, αν  $\lambda = (n)$ , τότε

$$M^{(n)} = \mathbb{C} \left[ \overline{1 \quad 2 \quad \cdots \quad n} \right]$$

είναι το τετριμμένο  $\mathfrak{S}_n$ -πρότυπο. Αυτή είναι και η μόνη περίπτωση όπου το  $M^\lambda$  είναι ανάγωγο.

Αν  $\lambda = (1^n)$  είναι η διαμέριση με  $n$  μέρη ίσα με 1, τότε υπάρχουν  $n!$  το πλήθος ταμπλοειδή σχήματος  $(1^n)$  και κάθε τέτοιο αντιστοιχεί σε μια μετάθεση της  $\mathfrak{S}_n$  ως εξής

$$\begin{array}{c} \overline{\pi_1} \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \overline{\pi_n} \end{array} \mapsto \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n.$$

Συνεπώς, το  $M^{(1^n)}$  δεν είναι άλλο από το πρότυπο της κανονικής αναπαράστασης της  $\mathfrak{S}_n$  (γιατί;).

Τέλος, αν  $\lambda = (n-1, 1)$ , τότε υπάρχουν  $n$  το πλήθος ταμπλοειδή σχήματος  $(n-1, 1)$  και κάθε ένα από αυτά αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του  $[n]$  ως εξής

$$\begin{array}{c} \overline{* \quad * \quad \cdots \quad *} \\ i \end{array} \mapsto i.$$

Συνεπώς, το  $M^{(n-1,1)}$  δεν είναι άλλο από το πρότυπο της αναπαράστασης καθορισμού της  $\mathfrak{S}_n$  (γιατί;).

Επιστρέφοντας στον στόχο μας, δηλαδή να κατασκευάσουμε ένα ανάγωγο  $\mathfrak{S}_n$ -πρότυπο  $\mathcal{S}^\lambda$  για κάθε  $\lambda \vdash n$ , συνδυάζοντας τους παραπάνω υπολογισμούς με αυτά που έχουμε δει σε προηγούμενες παραγράφους βρίσκουμε

$$\begin{aligned} M^{(3)} &\cong \mathcal{S}^{(3)} \\ M^{(2,1)} &\cong \mathcal{S}^{(3)} \oplus \mathcal{S}^{(2,1)} \\ M^{(1,1,1)} &\cong \mathcal{S}^{(3)} \oplus (\mathcal{S}^{(2,1)})^2 \oplus \mathcal{S}^{(1,1,1)}, \end{aligned}$$

όπου με  $\mathcal{S}^{(3)}$ ,  $\mathcal{S}^{(2,1)}$  και  $\mathcal{S}^{(1,1,1)}$  συμβολίσαμε τα πρότυπα της τετριμμένης, της συνήθους και της αναπαράστασης προσήμου, αντίστοιχα.

Η παρατήρηση αυτή γεννάει την εξής ιδέα: Να βρούμε μια ολική διάταξη<sup>1</sup>

$$\lambda^{(1)} > \lambda^{(2)} > \cdots > \lambda^{(p(n))}$$

στο σύνολο  $\text{Par}(n)$  των διαμερίσεων του  $n$  τέτοια ώστε το  $M^{\lambda^{(1)}}$  να είναι ανάγωγο, έστω  $\mathcal{S}^{\lambda^{(1)}}$ , το  $M^{\lambda^{(2)}}$  να αποτελείται από κάποια αντίγραφα του  $\mathcal{S}^{\lambda^{(1)}}$  και ακριβώς ένα αντίγραφο ενός

<sup>1</sup>Ολική διάταξη ονομάζεται μια μερική διάταξη  $(P, \leq)$  όπου για κάθε δυο στοιχεία  $x, y \in P$  ισχύει ότι  $x < y$  ή  $y < x$ .

νέου ανάγωγου προτύπου, έστω  $\mathcal{S}^{\lambda^{(2)}}$  κ.ο.κ. μέχρι να εξαντλήσουμε όλες τις διαμερίσεις του  $n$ . Για  $n = 3$ , η ζητούμενη ολική διάταξη είναι

$$(3) > (2, 1) > (1, 1, 1).$$

Προς αυτή την κατεύθυνση, θα εξερευνήσουμε τις συμμετρίες των Young ταμπλώ.

**Ορισμός 11.1.** Έστω  $T$  ταμπλώ σχήματος  $\lambda \vdash n$ . Τα στοιχεία

$$\begin{aligned}\nabla_T^+ &:= \sum_{\pi \in R(T)} \pi \\ \nabla_T^- &:= \sum_{\pi \in C(T)} \text{sign}(\pi) \pi\end{aligned}$$

του  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  ονομάζονται **συμμετριοποιητής γραμμών** (row symmetrizer) και **αντισυμμετριοποιητής στηλών** (column antisymmetrizer) του  $T$ , αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

τότε

$$\begin{aligned}R(T) &= \mathfrak{S}(\{1, 3, 4\}) \times \mathfrak{S}(\{2, 5\}) \\ C(T) &= \mathfrak{S}(\{3, 5\}) \times \mathfrak{S}(\{1, 2\}) \times \mathfrak{S}(\{4\})\end{aligned}$$

και γι αυτό

$$\begin{aligned}\nabla_T^+ &= (\epsilon + (1\ 3) + (3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3))(\epsilon + (2\ 5)) \\ \nabla_T^- &= \epsilon - (3\ 5) - (1\ 2) + (3\ 5)(1\ 2).\end{aligned}$$

**Ορισμός 11.2.** Έστω  $T$  ένα ταμπλώ σχήματος  $\lambda \vdash n$ . Το

$$\mathbf{e}_T := \nabla_T^-[T] \in M^\lambda$$

ονομάζεται **πολυταμπλοειδές** (polytabloid) και ο υπόχωρος  $\mathcal{S}^\lambda$  που παράγεται από όλα τα  $\mathbf{e}_T$ , καθώς το  $T$  διατρέχει τα ταμπλώ σχήματος  $\lambda$  ονομάζεται **πρότυπο Specht** (Specht module).

Κάθε ταμπλοειδές είναι ουσιαστικά γραμμικός συνδυασμός (με συντελεστές στο  $\mathbb{Z}$ ) ταμπλοειδών εντός του αντίστοιχου προτύπου Young. Στο παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
 e_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline \end{array}} &= (\epsilon - (3\ 5) - (1\ 2) + (3\ 5)(1\ 2)) \frac{\overline{3\ 1\ 4}}{\overline{5\ 2}} \\
 &= \frac{\overline{3\ 1\ 4}}{\overline{5\ 2}} - \frac{\overline{5\ 1\ 4}}{\overline{3\ 2}} - \frac{\overline{3\ 2\ 4}}{\overline{5\ 1}} + \frac{\overline{5\ 2\ 4}}{\overline{3\ 1}} \\
 &= \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}} - \frac{\overline{1\ 4\ 5}}{\overline{2\ 3}} - \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{\overline{1\ 5}} + \frac{\overline{2\ 4\ 5}}{\overline{1\ 3}} \in M^{(3,2)}.
 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι κάθε πολυταμπλοειδές εξαρτάται από το ταμπλώ  $T$  και όχι από το ταμπλοειδές  $[T]$  με αντιπρόσωπο  $T$ . Ποιό είναι, για παράδειγμα, το πολυταμπλοειδές

$$e_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline \end{array}};$$

Επίσης, από τον Ορισμό 11.2 δεν έπεται ότι το πρότυπο Specht είναι όντως  $\mathfrak{S}_n$ -πρότυπο.