Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική
Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1.1. (Διεδρική ομάδα)
Θεωρούμε το τετράγωνο T στον $\mathbb{R}^2$ με κορυφές $(1,1), (1,-1), (-1,-1)$ και $(-1,1)$.

(1) Υπολογίστε την ομάδα συμμετρίας του T, την οποία συμβολίζουμε με D_8.
(2) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\rho : \mathrm{D}_8 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ που ορίζεται από

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου με r και s συμβολίζουμε την περιστροφή (με τη φορά του ρολογιού) κατά $\pi/2$ και την ανάκλαση ως προς την ευθεία $x_1 = x_2$ είναι ομομορφισμός ομάδων.
(3) Έστω η αναπαράσταση $(\rho, \mathbb{R}^2)$ της D_8 του προηγούμενου ερωτήματος. Υπολογίστε τους πίνακες $\rho(g)$, για κάθε $g \in \mathrm{D}_8$.
(4) Η αναπαράσταση $(\rho, \mathbb{R}^2)$ είναι ανάγωγη;

Άσκηση 1.2.

(1) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από

$$\pi \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, \ldots, x_{\pi_n})$$

δεν είναι δράση της $\mathfrak{S}_n$ στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, δείξτε ότι

$$\pi \cdot (\sigma \cdot \boldsymbol{x}) = (\sigma\pi) \cdot \boldsymbol{x},$$

για κάθε $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ και $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
(2) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από

$$\pi \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\pi_1^{-1}}, x_{\pi_2^{-1}}, \ldots, x_{\pi_n^{-1}})$$

είναι δράση της $\mathfrak{S}_n$ στον $\mathbb{R}^n$.
(3) Δείξτε ότι η δράση του (2) δίνει στον $\mathbb{R}^n$ την δομή $\mathfrak{S}_n$-προτύπου.

Άσκηση 1.3. (Το Θεώρημα του Maschke παύει να ισχύει για άπειρες ομάδες)
Να δείξετε ότι η αναπαράσταση $(\rho, \mathbb{R}^2)$ της $\mathbb{Z}$ με $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ που ορίζεται από

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ δεν είναι πλήρως αναγώγιμη.

Άσκηση 1.4. (Ομομορφισμοί μεταξύ προτύπων)
Έστω G μια ομάδα και V, W δυο G-πρότυπα.

(1) Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ είναι βάσεις των V και W, αντίστοιχα, να δείξετε ότι το σύνολο $\{\varphi_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, όπου

$$\varphi_{ij}(v_k) \coloneqq \begin{cases} w_j, & \text{αν } i = k \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

αποτελεί βάση του $\mathrm{Hom}(V, W)$. Ειδικότερα, συνάγετε ότι

$$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim(V)\dim(W).$$

(2) Να δείξετε ότι η G δρα στο $\mathrm{Hom}(V, W)$ με

$$g \cdot \varphi(v) \coloneqq g\varphi(g^{-1}v)$$

για κάθε $g \in G$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ και $v \in V$ μετατρέποντάς το σε G-πρότυπο.

(3) Να δείξετε ότι

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)^G \coloneqq \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W) : g \cdot \varphi = \varphi\}.$$

Άσκηση 1.5. Έστω G ομάδα και $\mathbb{F}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Το σύνολο

$$\mathrm{Z}(G) \coloneqq \{g \in G : gh = hg, \text{ για κάθε } h \in G\}$$

ονομάζεται κέντρο της G. Αν (ρ, V) είναι ένα ανάγωγο G-πρότυπο και $g \in \mathrm{Z}(G)$, χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Schur για να δείξετε ότι

$$\rho(g) = c\mathrm{id}$$

για κάποιο $c \in \mathbb{F}$.

Άσκηση 1.6. (*Ανάγωγες αναπαραστάσεις της κυκλικής ομάδας*)
Έστω C_n η κυκλική ομάδα τάξης n με γεννήτορα x.

(1) Αν ζ είναι μια n-οστή ρίζα της μονάδας, τότε να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$\rho : \mathbb{Z}_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$$
$$g^i \mapsto \zeta^i$$

για κάθε $1 \leq i \leq n-1$ είναι μια αναπαράσταση της C_n.

(2) Να δείξετε ότι κάθε άλλη μονοδιάστατη αναπαράσταση της C_n είναι της μορφής (1).

(3) Πόσες κλάσεις ισομορφισμού μονοδιάστασων αναπραστάσεων της C_n (πάνω από το $\mathbb{C}$) υπάρχουν;

(4) Να δείξετε ότι αυτές είναι *όλες* οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της C_n.

Άσκηση 1.7. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και V, W δύο G-πρότυπα.

(1) Αν $W_1, W_2, \dots, W_k$ είναι μια συλλογή από G-πρότυπα, να δείξετε ότι

$$\mathrm{Hom}_G(V, W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k) \cong \mathrm{Hom}_G(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_G(V, W_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_G(V, W_k).$$

(2) Αν $V_1, V_2, \dots, W_\ell$ είναι μια συλλογή από G-πρότυπα, να δείξετε ότι

$$\mathrm{Hom}_G(V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell, W) \cong \mathrm{Hom}(V_1, W) \oplus \mathrm{Hom}(V_2, W) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}(V_\ell, W).$$