Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

14. Στοιχεία αλγεβρικής συνδυαστικής: Γεννήτριες συναρτήσεις και τυπικές δυναμοσειρές

Στην Παράγραφο 9 είδαμε ότι δεν γνωρίζουμε ούτε κλειστό τύπο για το πλήθος $\mathrm{p}(n)$ των διαμερίσεων του n, αλλά ούτε και αναδρομικό τύπο. Τι μπορούμε να κάνουμε σε αυτή την περίπτωση; Μια ιδέα είναι αντί να ψάχνουμε κάθε $\mathrm{p}(1), \mathrm{p}(2), \mathrm{p}(3), \ldots$ ξεχωριστά, να "οργανώσουμε" όλους αυτούς τους (άπειρους το πλήθος) αριθμούς σε μια συνάρτηση.

Ορισμός 14.1. Έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ μια ακολουθία (μιγαδικών) αριθμών. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ονομάζεται γεννήτρια συνάρτηση (generating function) της ακολουθίας $(a_n)_{n\geq 0}$.

Για παράδειγμα, για κάποιο $n \geq 0$, έστω $a_k = \binom{n}{k}$, για κάθε $k \geq 0$. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(a_k)_{k\geq 0}$ δίνεται από

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n,$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι γνωστή ως *Διωνυμικό Θεώρημα.*

Για ένα ακόμα παράδειγμα, έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ η ακολουθία αριθμών[1] που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \tag{14.1}$$

Ημερομηνία: 2 Δεκεμβρίου 2025.

[1]Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται *αριθμοί Fibonacci.*

για κάθε $n \geq 2$, όπου $a_0 = a_1 = 1$. Αν συμβολίσουμε με $F(x)$ την γεννήτρια συνάρτηση της $(a_n)_{n\geq 0}$, τότε

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n\geq 2} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^n \\ &= 1 + x + x \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-2} \\ &= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x) \\ &= 1 + (x + x^2) F(x) \end{aligned}$$

και γι αυτό

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{x\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} + \frac{1}{1 - \overline{\varphi} x} \right),$$

όπου $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\overline{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Άρα,

$$F(x) = \frac{1}{x\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} (\varphi^n - \overline{\varphi}^n) x^n$$

και γι αυτό

$$a_n = \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Τι ακριβώς είναι μια γεννήτρια συνάρτηση; Μια γεννήτρια συνάρτηση δεν είναι δυναμοσειρά με την αναλυτική έννοια. Πρόκειται για μια "τυπική" δυναμοσειρά, δηλαδή μια έκφραση της μορφής

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

για κάποιους αριθμούς $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Συνεπώς, εξαρτάται από τους συντελεστές της και δεν είναι (απαραίτητα) ίση με την σειρά Taylor κάποιας συνάρτησης.

Ας το κάνουμε πιο συγκεκριμένο. Έστω $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ μια (αριθμήσιμα άπειρη) ακολουθία μεταβλητών που μετατίθενται. Αν $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων, τότε το

$$\boldsymbol{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

ονομάζεται μονώνυμο με εκθέτες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Ορισμός 14.2. Μια έκφραση της μορφής

$$\sum_{\alpha} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$$

για $c_\alpha \in \mathbb{C}$, όπου στο άθροισμα το α διατρέχει όλες τις ακολουθίες $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ μη αρνητικών ακεραίων, οι οποίοι είναι όλοι μηδέν, εκτός από το πολύ πεπερασμένο πλήθος αυτών, ονομάζεται τυπική δυναμοσειρά (formal power series).

Με άλλα λόγια, μια τυπική δυναμοσειρά είναι ένας γραμμικός συνδυασμός (άπειρων το πλήθος) μονωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{C}$. Το σύνολο $\mathbb{C}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ όλων των τυπικών δυναμοσειρών αποτελεί διανυσματικό χώρο με την προφανή πράξη της πρόσθεσης, δηλαδή

$$\left(\sum_{\alpha} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha\right) + \left(\sum_{\alpha} d_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha\right) = \sum_{\alpha} (c_\alpha + d_\alpha) \boldsymbol{x}^\alpha. \tag{14.2}$$

Επίσης, θέτοντας

$$\left(\sum_{\alpha} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha\right) + \left(\sum_{\beta} d_\beta \boldsymbol{x}^\beta\right) = \sum_{\gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha c_\beta\right) \boldsymbol{x}^\gamma, \tag{14.3}$$

όπου $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots)$ το $\mathbb{C}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ αποκτά την δομή *δακτύλιου.*

Για παράδειγμα, αν έχουμε μόνο μία μεταβλητή[2] x οι Ταυτότητες (14.2) και (14.3) γίνονται

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} d_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} (c_n + d_n) x^n$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n x^n\right) \left(\sum_{n\geq 0} d_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right) x^n.$$

Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι τυπικές δυναμοσειρές μια μεταβλητής με την έννοια του Ορισμού 14.2. Το πλεονέκτημα των τυπικών δυναμοσειρών έναντι των "αναλυτικών" είναι ότι δεν μας απασχολεί πότε ή που συγκλίνουν, αρκεί να είναι καλά ορισμένα στοιχεία του $\mathbb{C}[\![\boldsymbol{x}]\!]$.

Για παράδειγμα, μια (αναλυτική) συνάρτηση όπως η $\exp(-)$ μπορεί να θεωρηθεί ως τυπική δυναμοσειρά ορίζοντας

$$\exp(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Έτσι, η "συνάρτηση" $\exp(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(\frac{1}{n!})_{n\geq 0}$. Ομοίως και για άλλες γνωστές (αναλυτικές) συναρτήσεις.

Τέλος, θα θέλαμε να ισχύουν οι γνωστές ταυτότητες των (αναλυτικών) δυναμοσειρών όπως, για παράδειγμα, η

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{14.4}$$

[2] Για να κάνουμε τον διαχωρισμό ανάμεσα σε μια ακολουθία μεταβλητών $\boldsymbol{x}$ και σε μια μεμονωμένη μεταβλητή x χρησιμοποιούμε έντονη γραφή.

Παρόλα αυτά, το δεξί μέλος της Ταυτότητας (14.4) δεν έχει (από μόνο του) νόημα στον δακτύλιο $\mathbb{C}[\![x]\!]$. Όμως, παρατηρούμε ότι

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots) = 1+x+x^2+\cdots - x - x^2 - \cdots = 1.$$

Συνεπώς, το $1-x$ είναι αντιστρέψιμο στο $\mathbb{C}[\![x]\!]$ και το αντίστροφό του, το οποίο συμβολίζουμε με $\frac{1}{1-x}$, ισούται με το $\sum_{n\geq 0} x^n$.

Επιστρέφοντας στην αρχική συζήτηση αυτής τηε παραγράφου, η γεννήτρια συνάρτηση της $(\mathrm{p}(n))_{n\geq 0}$, όπου $\mathrm{p}(0) := 1$ έχει μια απροσδόκητα απλή μορφή.

Θεώρημα 14.3. (Euler 1748) Ισχύει ότι

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{p}(n) x^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x^i}. \tag{14.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το (άπειρο) σύνολο[3]

$$\mathrm{Par} := \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Par}(n).$$

Το αριστερό μέλος της Ταυτότητας (14.5) γράφεται ισοδύναμα

$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{p}(n) x^n = \sum_{\lambda\in \mathrm{Par}} x^{|\lambda|},$$

όπου με $|\lambda|$ συμβολίζουμε το άθροισμα των μερών της διαμέρισης λ. Για παράδειγμα, αν $\lambda = (4,2,2,1)$, τότε $|\lambda| = 4+2+2+1 = 9$.

Έχουμε δει ότι κάθε διαμέριση $\lambda \vdash n$ μπορεί να παρασταθεί από μία διατεταγμένη n-άδα της μορφής $(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n})$, όπου m_i είναι η πολλαπλότητα εμφάνισης του μέρους i στην λ, έτσι ώστε

$$x^{|\lambda|} = x^{m_1+2m_2+\cdots+nm_n}.$$

Η διαμέριση του παραδείγματος αντοιστοιχεί στην ακολουθία

$$(1^1, 2^2, 3^0, 4^1, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0, 9^0).$$

Γενικότερα, ένα στοιχείο του Par μπορεί να παρασταθεί ως $(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots)$ για κάποια $m_i \geq 0$, τα οποία είναι όλα μηδέν, εκτός από το πολύ πεπερασμένο πλήθος αυτών.

Με άλλα λόγια, έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του Par και του συνόλου

$$\left(\bigcup_{m_1\geq 0} (1^{m_1})\right) \times \left(\bigcup_{m_2\geq 0} (2^{m_2})\right) \times \cdots.$$

[3] Το συναντήσαμε ξανά στην Παράγραφο 9 ως διάταξη Young.

Σε επίπεδο γεννητριών συναρτήσεων το $\cup$ (αντ. $\times$) μεταφράζεται σε $\sum$ (αντ. $\prod$) και γι αυτό

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}} x^{|\lambda|} &= \prod_{i\geq 1}\left(\sum_{m_i\geq 0}(x^i)^{m_i}\right)\\ &= \prod_{i\geq 1}\left(1+x^i+(x^i)^2+\cdots\right)\\ &= \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από την Ταυτότητα (14.4). $\square$

Κάποιος που συναντά για πρώτη φορά τυπικές δυναμοσειρές θα πρέπει να είναι σκεπτικός για το αν το δεξί μέλος της Ταυτότητας (14.5) είναι καλώς ορισμένο στοιχείο του $\mathbb{C}[\![x]\!]$. Όμως, οι όροι $\frac{1}{1-x^i}$ του γινομένου με $i \geq n+1$ στην πραγματικότητα δε συνεισφέρουν στον συντελεστή του x^n και κατά συνέπεια στον υπολογισμό του $\mathrm{p}(n)$. Για παράδειγμα, ο συντελεστής του x^3 στο

$$\begin{aligned}\prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\cdots\\ &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots\end{aligned}$$

ισούται με 3 και γι αυτό $\mathrm{p}(3)=3$.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την βασική θεωρία των τυπικών δυναμοσειρών παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στο [1, Ενότητα 1.1.3].

15. Η άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων

Έστω $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$ μια (αριθμήσιμα άπειρη) ακολουθία μεταβλητών που μετατίθενται. Για ένα μονώνυμο $\boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}$, το $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ ονομάζεται βαθμός. Μια τυπική δυναμοσειρά $f \in \mathbb{C}[\![\boldsymbol{x}]\!]$ λέμε ότι είναι ομογενής βαθμού n αν κάθε μονώνυμο στο ανάπτυγμά της έχει βαθμό n. Για παράδειγμα, η

$$x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + \cdots + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + \cdots$$

είναι ομογενής βαθμού 3, ενώ η

$$x_1 x_2^4 + x_1^2 + x_3 x_4 x_7$$

δεν είναι ομογενής.

Ορισμός 15.1. Μια ομογενής τυπική δυναμοσειρά $f \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ ονομάζεται συμμετρική συνάρτηση αν

$$f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$$

για κάθε μετάθεση π των θετικών ακεραίων, η οποία αφήνει όλα τα στοιχεία σταθερά, εκτός από το πολύ πεπερασμένο πλήθος αυτών.

Με άλλα λόγια, η f είναι συμμετρική συνάρτηση αν και μόνο αν ο συντελεστής του

$$x_{i_1}^{\lambda_{i_1}} x_{i_2}^{\lambda_{i_2}} \cdots x_{i_k}^{\lambda_{i_k}}$$

στην f είναι ο ίδιος για κάθε διακεκριμένους $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ και αυθαίρετους εκθέτες $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_k}$ (γιατί;). Για μονώνυμο $\boldsymbol{x}^\alpha$, θα γράφουμε $[\boldsymbol{x}^\alpha] f(\boldsymbol{x})$ για τον συντελεστή του $\boldsymbol{x}^\alpha$ στην $f(\boldsymbol{x})$.

Παράδειγμα 15.2.

(1) Ένα παράδειγμα συμμετρικής συνάρτησης βαθμού 1 είναι η

$$\sum_{i \geq 1} x_i = x_1 + x_2 + \cdots .$$

(2) Παραδείγματα συμμετρικών συναρτήσεων βαθμού 2 αποτελούν οι

$$\sum_{i \geq 1} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots$$

$$\sum_{1 \leq i < j} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \cdots .$$

(3) Η τυπική δυναμοσειρά

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + \cdots + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + \cdots$$

που συναντήσαμε στην αρχή της παραγράφου, δεν είναι συμμετρική συνάρτηση, καθώς, για παράδειγμα, αν $\pi = (1\ 2)$, τότε

$$[x_{\pi(1)} x_{\pi(2)}^2] f(\boldsymbol{x}) = [x_2 x_1^2] f(\boldsymbol{x}) = 0 \neq 1 = [x_1 x_2^2] f(\boldsymbol{x}).$$

Ποιά ομογενής τυπική δυναμοσειρά βαθμού 2 "λείπει" από την $f(\boldsymbol{x})$ ώστε να γίνει συμμετρική συνάρτηση;

Έχοντας την παρατήρηση μετά τον Ορισμό 15.1 κατά νου, ο πιο φυσικός τρόπος να κατασκευάσουμε μια συμμετρική συνάρτηση βαθμού n είναι ο εξής: Θεωρούμε μη αρνητικούς ακεραίους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, έτσι ώστε $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k = n$ και συμμετρικοποιούμε το μονώνυμο

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_k^{\lambda_k}$$

με εκθέτες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, δηλαδή παίρνουμε το άθροισμα όλων των διακεκριμένων μονωνύμων με αυτούς τους εκθέτες. Για την ακολουθία των εκθετών μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ (γιατί;). Η διαδικασία αυτή οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 15.3. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$. Το στοιχείο

$$m_\lambda = m_\lambda(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum x_{i_1}^{\lambda_{i_1}} x_{i_2}^{\lambda_{i_2}} \cdots x_{i_k}^{\lambda_{i_k}},$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλα τα διακεκριμένα μονώνυμα με εκθέτες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ονομάζεται μονωνυμική συμμετρική συνάρτηση (monomial symmetric functions) που αντιστοιχεί στην λ.

Στα Παραδείγματα 15.2 (1) και (2), είδαμε τα στοιχεία $m_{(1)}, m_{(2)}$ και $m_{(1,1)}$, αντίστοιχα. Για $n = 3$, έχουμε

$$\begin{aligned}
m_{(3)}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i\geq 1} x_i^3 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots \\
m_{(2,1)}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i\neq j} x_i^2 x_j \\
&= \sum_{i<j} x_i^2 x_j + \sum_{i<j} x_i x_j^2 \\
&= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots + x_2^2x_3 + x_2^2x_4 + \cdots \\
&\quad + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + \cdots + x_2x_3^2 + x_2x_4^2 + \cdots \\
m_{(1,1,1)}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k \\
&= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + \cdots + x_2x_3x_4 + \cdots
\end{aligned}$$

(γιατί;).

Βιβλιογραφία

[1] Χ. Α. Αθανασιάδης, *Αλγεβρική και Απαριθμητική Συνδυαστική*, Σημειώσεις, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών. (διαθέσιμο εδώ)