Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

16. Οι συναρτήσεις Schur (Συνέχεια)

Πόρισμα 16.6. Αν $\lambda \vdash n$, τότε

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} \mathrm{K}_{\lambda\mu} m_\mu. \tag{16.2}$$

Ειδικότερα, το σύνολο $\{s_\lambda : \lambda \vdash n\}$ αποτελεί βάση του Sym_n.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 16.5 έπεται ότι

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \mathrm{K}_{\lambda\mu} m_\mu.$$

Το ζητούμενο έπεται από τον Κανόνα του Young και το Πόρισμα 11.13. □

Για $\lambda, \mu \vdash n$, έστω $\chi^\lambda(\mu)$ η τιμή του χαρακτήρα του προτύπου Specht $\mathcal{S}^\lambda$ στην κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση μ.

Θεώρημα 16.7. Αν $\lambda \vdash n$, τότε

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\mu} \chi^\lambda(\mu) p_\mu = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\pi) p_{\mathrm{ct}(\pi)}, \tag{16.3}$$

όπου $\mathrm{ct}(\pi)$ είναι ο κυκλικός τύπος της π.

Απόδειξη. Η δεύτερη ισότητα έπεται από την Πρόταση 9.5. Για την πρώτη ισότητα, από τον Κανόνα του Young έπεται ότι

$$\mathrm{K}_{\lambda\mu} = (\varphi^\mu, \chi^\lambda) = \sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\nu} \varphi^\mu(\nu) \chi^\lambda(\nu), \tag{16.4}$$

Ημερομηνία: 11 Δεκεμβρίου 2025.

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από την Ταυτότητα (7.3) και το γεγονός ότι μια μετάθεση και η αντίστροφή της έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο (γιατί;). Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \sum_{\mu \vdash n} \mathrm{K}_{\lambda\mu} m_\mu \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \left(\sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\nu} \varphi^\mu(\nu) \chi^\lambda(\nu) \right) m_\mu \\ &= \sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\nu} \chi^\lambda(\nu) \left(\sum_{\mu \vdash n} \varphi^\mu(\nu) m_\mu \right) \\ &= \sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\nu} \chi^\lambda(\nu) p_\nu, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και δεύτερη ισότητα έπονται από τις Ταυτότητες (16.2) και (16.4), αντίστοιχα, ενώ η τελευταία ισότητα έπεται από το Θεώρημα 15.12. □

Το Θεώρημα 16.7 μετατρέπει το πρόβλημα υπολογισμού του χαρακτήρα μιας ανάγωγης αναπαράστασης της $\mathfrak{S}_n$ σε πρόβλημα εξαγωγής συντελεστών του αναπτύγματος των συναρτήσεων Schur στην βάση των power sum συμμετρικών συναρτήσεων. Το παρακάτω αποτέλεσμα έπεται άμεσα από την Ταυτότητα (16.3) και το Παράδειγμα 16.4 (1).

Πόρισμα 16.8. Ισχύουν οι εξής ταυτότητες

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\mu} p_\mu \\ e_n &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{\mathrm{sign}(\mu)}{\mathrm{z}_\mu} p_\mu, \end{aligned}$$

όπου $\mathrm{sign}(\mu) \coloneqq (-1)^{n-\ell(\mu)}$.

17. Η χαρακτηριστική απεικόνιση Frobenius

Η συζήτηση των προηγούμενων παραγράφων υποδεικνύει ότι υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας και των συμμετρικών συναρτήσεων. Αυτή παίρνει μορφή μέσω της παρακάτω απεικόνισης. Έστω $\mathrm{CF}_n \coloneqq \mathrm{CF}(\mathfrak{S}_n)$.

Ορισμός 17.1. Η απεικόνιση[1] $\mathrm{ch}_n : \mathrm{CF}_n \to \mathrm{Sym}_n$ που ορίζεται θέτοντας

$$\mathrm{ch}_n(f) \coloneqq \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} f(\pi) p_{\mathrm{ct}(\pi)} = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} f(\mu) p_\mu, \tag{17.1}$$

για κάθε $f \in \mathrm{CF}_n$, όπου $f(\mu)$ είναι η τιμή της f στην κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στην μ, ονομάζεται χαρακτηριστική Frobenius.

Η χαρακτηριστική απεικόνιση Frobenius είναι προφανώς γραμμική και από το Θεώρημα 16.7 έπεται ότι

$$\mathrm{ch}_n(\chi^\lambda) = s_\lambda \tag{17.2}$$

για κάθε $\lambda \vdash n$. Με άλλα λόγια, απεικονίζει την βάση των ανάγωγων χαρακτήρων του CF_n στην βάση των συναρτήσεων Schur του Sym_n και γι αυτό είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ειδικότερα,

$$\mathrm{ch}_n(\chi^{\mathrm{triv}}) = h_n \quad \text{και} \quad \mathrm{ch}_n(\chi^{\mathrm{sign}}) = e_n,$$

όπου χ^{triv} και χ^{sign} είναι οι χαρακτήρες της τετριμμένης αναπαράστασης και της αναπαράστασης προσήμου της $\mathfrak{S}_n$, αντίστοιχα.

Επιπλέον, θεωρώντας το (μοναδικό) εσωτερικό γινόμενο[2] $(-,-) : \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n \to \mathbb{C}$ για το οποίο

$$(s_\lambda, s_\mu) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda = \mu \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και επεκτείνοντας γραμμικά ως προς την πρώτη μεταβλητή και συζυγώς-γραμμικά ως προς την δεύτερη, τότε η χαρακτηριστική απεικόνιση Frobenius είναι ισομετρία (γιατί;).

Παράδειγμα 17.2. Για $\lambda \vdash n$, θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση 1_λ της κλάσης συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στην λ, δηλαδή

$$1_\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda = \mu \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(βλ. συζύτηση πριν τον Ορισμό 5.4). Τότε

$$\mathrm{ch}_n(1_\lambda) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} 1_\lambda(\mu) p_\mu = \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda.$$

[1] Συχνά συμβολίζεται και ως Frob.

[2] Αυτό συνήθως ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο Hall.

Συνεπώς, για κάθε $\lambda, \mu \vdash n$,

$$\begin{aligned}(p_\lambda, p_\mu)_{\mathrm{Sym}_n} &= (\mathrm{z}_\lambda \mathrm{ch}_n(1_\lambda), \mathrm{z}_\mu \mathrm{ch}_n(1_\mu))_{\mathrm{Sym}_n} \\ &= \mathrm{z}_\lambda \mathrm{z}_\mu \left(\mathrm{ch}_n(1_\lambda), \mathrm{ch}_n(1_\mu)\right)_{\mathrm{Sym}_n} \\ &= \mathrm{z}_\lambda \mathrm{z}_\mu \left(1_\lambda, 1_\mu\right)_{\mathrm{CF}_n} \\ &= \mathrm{z}_\lambda \mathrm{z}_\mu \sum_{\nu \vdash n} \frac{1}{\mathrm{z}_\nu} 1_\lambda(\nu) 1_\mu(\nu) \\ &= \begin{cases} \mathrm{z}_\lambda, & \text{αν } \lambda = \mu \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το ότι η χαρακτηριστική Frobenius είναι ισομετρία. Άρα, το σύνολο των power sum συμμετρικών συναρτήσεων αποτελεί *ορθογώνια* βάση του Sym_n ως προς το εσωτερικό γινόμενο Hall.

Θεωρούμε τον (διαβαθμισμένο) διανυσματικό χώρο

$$\mathrm{CF} \coloneqq \mathbb{C} \oplus \mathrm{CF}_1 \oplus \mathrm{CF}_2 \oplus \cdots .$$

Επεκτείνοντας την χαρακτηριστική Frobenius στο CF με το να θέσουμε

$$\mathrm{ch}(f_0 + f_1 + f_2 + \cdots) \coloneqq f_0 + \mathrm{ch}_1(f_1) + \mathrm{ch}_2(f_2) + \cdots$$

για κάθε $f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots \in \mathrm{CF}$, προκύπτει ένας γραμμικός ισομορφισμός $\mathrm{ch} : \mathrm{CF} \to \mathrm{Sym}$. Επεκτείνοντας και το εσωτερικό γινόμενο Hall στο CF, θέτοντας $(f, g) = 0$ αν $f \in \mathrm{CF}_n$ και $g \in \mathrm{CF}_m$ με $n \neq m$, τότε η ch είναι ισομετρία.

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 15, ο χώρος των συμμετρικών συναρτήσεων Sym διαθέτει έναν "φυσικό" πολλαπλασιασμό που τον καθιστά δακτύλιο. Πως θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε δυο $f \in \mathrm{CF}_n$ και $g \in \mathrm{CF}_m$ έτσι ώστε το γινόμενό τους να είναι ένα στοιχείο $f \circ g \in \mathrm{CF}_{n+m}$;

Παρέκβαση Άλγεβρας. Έστω G και G' δυο πεπερασμένες ομάδες. Αν V και V' είναι G- και G'-πρότυπα αντίστοιχα, τότε το τανυστικό τους γινόμενο $V \otimes V'$ γίνεται $G \times G'$-πρότυπο θέτοντας

$$(g, g') \cdot v \otimes v' \coloneqq gv \otimes g'v'$$

(γιατί;). Σε αντίθεση με την καταστασκευή της Παραγράφου 6, εδώ το $V \otimes V'$ δέχεται δομή προτύπου από δυο διαφορετικές ομάδες. Γι αυτό τον λόγο συχνά ονομάζεται *εξωτερικό τανυστικό γινόμενο* (outer tensor product). Γι αυτά τα πρότυπα ισχύουν τα παρακάτω.

- $\chi^{V \otimes V'}(g, g') = \chi^V(g) \chi^{V'}(g')$
- $\left(\chi^{V_1 \otimes V_1'}, \chi^{V_2 \otimes V_2'}\right)_{G \times G'} = \left(\chi^{V_1}, \chi^{V_2}\right)_G \left(\chi^{V_1'}, \chi^{V_2'}\right)_{G'}$
- Αν $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ και $\{V_1', V_2', \ldots, V_m'\}$ είναι σύνολα ανά δύο διακεκριμένων ανάγωγων προτύπων της G και G', αντίστοιχα, τότε το

  $$\{V_i \otimes V_j' : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

  είναι ένα σύνολο ανά δύο μη ισόμορφων ανάγωγων $G \times G'$-προτύπων.

Έστω χ και ψ (ανάγωγοι) χαρακτήρες της $\mathfrak{S}_n$ και $\mathfrak{S}_m$, αντίστοιχα. Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι η απεικόνιση $\chi \times \psi : \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \to \mathbb{C}$ που ορίζεται θέτοντας

$$\chi \times \psi(\pi, \sigma) \coloneqq \chi(\pi)\psi(\sigma)$$

για κάθε $(\pi, \sigma) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ είναι χαρακτήρας της $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$. Τώρα, μπορούμε να "ανέβουμε" στην $\mathfrak{S}_{n+m}$ θεωρώντας την επαγωγή αυτού του χαρακτήρα:

$$\chi \circ \psi \coloneqq (\chi \times \psi) \uparrow_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} .$$

Αυτό ονομάζεται γινόμενο επαγωγής (induction product) των χ και ψ. Επεκτείνοντας διγραμμικά το $\circ$ σε ολόκληρο το CF αυτό παίρνει τη δομή δακτύλιου.

Θεώρημα 17.3. Η χαρακτηριστική απεικόνιση Frobenius $\mathrm{ch} : \mathrm{CF} \to \mathrm{Sym}$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 17.3 χρειαζόμαστε μια γενικότερη μορφή του νόμου αντιστροφής Frobenius (βλ. Θεωρήμα 8.8), η οποία αποδεικνύεται ουσιαστικά με τον ίδιο τρόπο.

Λήμμα 17.4. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H υποομάδα της. Αν A είναι μια άλγεβρα πάνω από το $\mathbb{C}$ και $\chi : G \to A$ μια συνάρτηση η οποία έχει σταθερή τιμή στις κλάσεις συζυγίας της G, τότε

$$\left(\psi \uparrow_H^G, \chi\right)'_G = \left(\psi, \chi \downarrow_H^G\right)'_H$$

για κάθε $\psi : H \to A$, όπου

- για κάθε $h \in H$, $\chi \downarrow_H^G (h) \coloneqq \chi(h)$,
- για κάθε $g \in G$, $\psi \uparrow_H^G (g) \coloneqq \frac{1}{|H|} \sum_{x^{-1}gx \in H} \psi(x^{-1}gx)$
- για κάθε $\alpha, \beta : G \to A$, $(\alpha, \beta)' \coloneqq \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 17.3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ch είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Γι αυτό, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_n(\chi) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \chi(\pi) p_{\mathrm{ct}(\pi)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \chi(\pi^{-1}) p_{\mathrm{ct}(\pi^{-1})} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \overline{\chi(\pi)} p_{\mathrm{ct}(\pi)} \\
&= (\chi, P)'_{\mathfrak{S}_n},
\end{aligned}$$

όπου $P : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{Sym}$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται θέτοντας $P(\pi) \coloneqq p_{\mathrm{ct}(\pi)}$. Προφανώς, η συνάρτηση P έχει σταθερή τιμή στις κλάσεις συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$. Συνεπώς, για $f \in \mathrm{CF}_n$ και

$g \in \mathrm{CF}_m$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(f \circ g) &= \mathrm{ch}_{n+m}((f \times g) \uparrow_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}}) \\
&= \left((f \times g) \uparrow_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}}, P \right)'_{\mathfrak{S}_{n+m}} \\
&= \left(f \times g, P \downarrow_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} \right)'_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} \\
&= \frac{1}{n!m!} \sum_{(\pi,\sigma) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} \overline{f \times g(\pi, \sigma)} P(\pi, \sigma) \\
&= \frac{1}{n!m!} \sum_{(\pi,\sigma) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} \overline{f(\pi) g(\sigma)} p_{\mathrm{ct}(\pi,\sigma)} \\
&= \left(\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \overline{f(\pi)} p_{\mathrm{ct}(\pi)} \right) \left(\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \overline{g(\sigma)} p_{\mathrm{ct}(\sigma)} \right) \\
&= \mathrm{ch}_n(f) \mathrm{ch}_m(g),
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το Λήμμα 17.4 και η προτελευταία ισότητα έπεται από την πολλαπλασιαστικότητα των power sum συμμετρικών συναρτήσεων και το γεγονός ότι ο κυκλικός τύπος του στοιχείου (π, σ) όταν το βλέπουμε ως μετάθεση της $\mathfrak{S}_{n+m}$ είναι ουσιαστικά[3] η "ένωση" των κυκλικών τύπων της π και της σ. □

[3]Για παράδειγμα, αν $\pi = (1\ 2)(3) \in \mathfrak{S}([3]) \cong \mathfrak{S}_3$ με κυκλικό τύπο $(2,1)$ και $\sigma = (4\ 5) \in \mathfrak{S}([4,5]) \cong \mathfrak{S}_2$ με κυκλικό τύπο (2), τότε το στοιχείο (π, σ) ταυτίζεται με την μετάθεση $(1\ 2)(3)(4\ 5)$ στην $\mathfrak{S}_5$ και γι αυτό έχει κυκλικό τύπο $(2, 2, 1)$. Συνεπώς, $p_{\mathrm{ct}(\pi,\sigma)} = p_{(2,2,1)} = p_2 p_2 p_1 = p_{(2,1)} p_{(2)} = p_{\mathrm{ct}(\pi)} p_{\mathrm{ct}(\sigma)}$.