Θ2.04: Θεωρία Αναπαραστάσεων και Συνδυαστική

Βασίλης Διονύσης Μουστάκας
Πανεπιστήμιο Κρήτης

3. Λήμμα του Schur και εφαρμογές

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι

- G είναι μια πεπερασμένη ομάδα,
- $\mathbb{F}$ είναι ένα αυθαίρετο σώμα, και
- όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένοι.

Ορισμός 3.1. Έστω (ρ, V) και (σ, W) δυο αναπαραστάσεις της G. Ομομορφισμός αναπαραστάσεων (ή G-ομομορφισμός) ονομάζεται μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : V \to W$ η οποία *διατηρεί* την δράση της G, δηλαδή

$$\varphi(\rho(g)(v)) = \sigma(g)(\phi(v)) \tag{3.1}$$

για κάθε $g \in G$ και $v \in V$, ή ισοδύναμα αν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & W \\ V \arrow[u, "\rho(g)"] \arrow[r, "\varphi"'] & W \arrow[u, "\sigma(g)"'] \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επιπλέον, αν η φ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε ονομάζεται ισομορφισμός αναπαραστάσεων (ή G-ισομορφισμός) και στην περίπτωση αυτή γράφουμε $V \cong_G W$ (ή απλά $V \cong W$).

Αν έχουμε έναν G-ισομορφισμό $\varphi : V \to W$ με πίνακα T (ως προς κάποια βάση της V), τότε η Ταυτότητα (3.1) γίνεται

$$\rho(g) = T^{-1}\sigma(g)T.$$

Με άλλα λόγια, δυο αναπαραστάσεις είναι ισόμορφες όταν “διαφέρουν” κατά μια αλλαγή βάσης.

Στον τρέχον παράδειγμα, όπου αναπαριστούμε την συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_3$ ως ομάδα συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου Δ έχουμε δει διάφορες εκδοχές της ίδιας αναπαράστασης στις ακόλουθες βάσεις του $\mathbb{R}^3$:

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$
- $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\}$
- $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Ημερομηνία: 9 Οκτωβρίου 2025.

Γενικότερα, η δράση αυτή της $\mathfrak{S}_n$ στον $\mathbb{R}^n$ δίνεται από

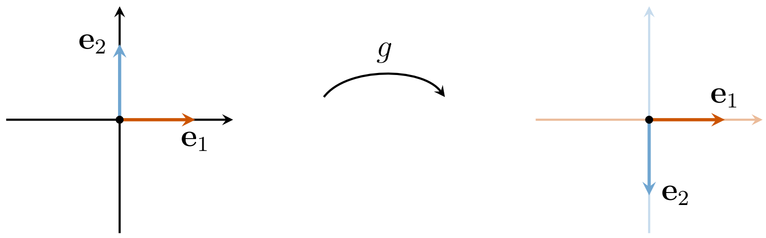
$$\pi \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) \coloneqq (v_{\pi_1^{-1}}, v_{\pi_2^{-1}}, \ldots, v_{\pi_n^{-1}})$$

για κάθε $\pi \in \mathfrak{S}_n$ και $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ (βλ. Άσκηση (1.2)). Η αναπαράσταση αυτή είναι ισόμορφη με την αναπαράσταση καθορισμού της $\mathfrak{S}_n$, με τον ισομορφισμό να δίνεται από

$$\mathbf{e}_i \mapsto i,$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$ και ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο ταυτοτικός.

Έστω C_2 η κυκλική ομάδα τάξης 2, η οποία παράγεται από ένα στοιχείο g, δηλαδή $\mathrm{C}_2 = \{\epsilon, g\}$. Θεωρούμε τη δράση της C_2 στον $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως εξής:



Ισοδύναμα, έχουμε την αναπαράσταση $\sigma : \mathrm{C}_2 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ με

$$\sigma(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \sigma(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Αυτή είναι ισόμορφη με την απαράσταση $(\rho, \mathbb{R}^2)$ της Παραγράφου 2. Πράγματι, τα ιδιοδιανύσματα του $\rho(g)$ είναι

- $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, και
- $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1

(γιατί;) και γι' αυτό

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \rho(g) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \sigma(g).$$

Στην καινούργια βάση, μας είναι πιο εύκολο να "ξεχωρίσουμε" τις ανάγωγες υποαναπαραστάσεις. Κοιτώντας τον πίνακα $\sigma(g)$, προκύπτει η διάσπαση

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}[\mathbf{e}_1] \oplus \mathbb{R}[\mathbf{e}_2],$$

όπου

$$\sigma(g)\,(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$$
$$\sigma(g)\,(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2$$

και κατά συνέπεια το $\mathbb{R}[\mathbf{e}_1]$ είναι ισόμορφο με την τετριμμένη αναπαράσταση και το $\mathbb{R}[-\mathbf{e}_2]$ είναι ισόμορφο με την αναπαράσταση προσήμου (γιατί;).

Δοθείσης μια γραμμικής απεικόνισης $\varphi : V \to W$, οι υπόχωροι

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \coloneqq \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$$
$$\mathrm{Im}(\varphi) \coloneqq \{w \in W : \varphi(v) = w, \text{ για κάποιο } v \in V\}$$

ονομάζονται πυρήνας και εικόνα της φ. Αν η φ είναι G-ομομορφισμός, τότε ο πυρήνας και η εικόνα είναι υποπρότυπα του V και W, αντίστοιχα (γιατί;). Το επόμενο αποτέλεσμα, γνωστό ως *Λήμμα του Schur*, χαρακτηρίζει τους G-ομομορφισμούς μεταξύ ανάγωγων αναπαραστάσεων και (παρά την απλή του απόδειξη) έχει πολύ σημαντικές συνέπειες, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.2. (I. Schur 1905) Έστω V και W δυο ανάγωγα G-πρότυπα και $\varphi : V \to W$ είναι ένας G-ομομορφισμός.

(1) Ο φ είναι είτε η μηδενική απεικόνιση, είτε είναι ισομορφισμός.
(2) Αν το $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα, τότε ο φ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού ομομορφισμού.

Απόδειξη.

(1) Αφού τα V και W είναι ανάγωγα, έπεται ότι το υποπρότυπο $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (αντ. $\mathrm{Im}(\varphi)$) είναι είτε $\{0\}$, είτε V (αντ. W). Αν $\mathrm{Ker}(\varphi) = V$, τότε η φ είναι η μηδενική απεικόνιση.
Διαφορετικά, έστω $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Αν $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \{0\}$, τότε $V = \{0\}$, τ' οποίο είναι αδύνατο (γιατί;). Συνεπώς, $\mathrm{Im}(\varphi) = W$ και γι' αυτό η φ είναι ισομορφισμός.
(2) Αφού το $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικά κλειστό, ο φ (ως γραμμική απεικόνιση) έχει κάποια ιδιοτιμή $c \in \mathbb{F}$. Συνεπώς, ο ομομορφισμός
$$\varphi - c\,\mathrm{id}$$
όπου id είναι η ταυτοτική επεικόνιση, έχει μη-τετριμμένο πυρήνα. Άρα, δεν μπορεί να είναι (γραμμικός) ισομορφισμός και γι' αυτό από το (1) έπεται ότι είναι η μηδενική απεικόνιση. Με άλλα λόγια
$$\varphi = c\,\mathrm{id}$$
που είναι το ζητούμενο.

□

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι το $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα (για παράδειγμα, το $\mathbb{C}$). Για δυο G-πρότυπα V και W, θέτουμε[1]
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(V,W) &\coloneqq \{\varphi : V \to W : \ \varphi \text{ είναι γραμμική}\}\\ \mathrm{Hom}_G(V,W) &\coloneqq \{\varphi : V \to W : \ \varphi \text{ είναι } G\text{-ομομορφισμός}\}\\ \mathrm{End}_G(V) &\coloneqq \mathrm{Hom}_G(V,V).\end{aligned}$$
Το $\mathrm{Hom}(V,W)$ έχει και αυτό τη δομή διανυσματικού χώρου. Στην Άσκηση (1.4), βλέπουμε ότι υπάρχει μια δράση της G η οποία του δίνει την δομή G-προτύπου. Σε αυτή την περίπτωση, το $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ ταυτίζεται με το σύνολο των σταθερών σημείων αυτής της δράσης. Το Λήμμα του Schur μας πληροφορεί ότι
$$\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{F}, \tag{3.2}$$
ως διανυσματικοί χώροι.

[1]Ομομορφισμός μεταξύ διανυσματικών χώρων δεν είναι τίποτα άλλα παρά μια γραμμική απεικόνιση και μια γραμμική απεικόνιση του ίδιου χώρου ονομάζεται και ενδομορφισμός. Αυτό εξηγεί τα σύμβολα Hom και End.

Πόρισμα 3.3. Αν V και W είναι δυο ανάγωγα G-πρότυπα, τότε

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1, & \text{αν } V \cong_G W \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Απόδειξη. Αν τα V και W δεν είναι ισόμορφα, τότε από το Λήμμα του Schur έπεται ότι $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{0\}$. Στην περίπτωση αυτή

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 0.$$

Διαφορετικά, έστω $\varphi, \vartheta : V \to W$ δυο μη-μηδενικοί G-ομομορφισμοί. Πάλι από το Λήμμα του Schur, έπεται ότι αυτοί είναι ισομορφισμοί και γι' αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε το $\vartheta^{-1} \circ \varphi \in \mathrm{End}_G(V)$. Από την Ταυτότητα (3.2), έπεται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\vartheta^{-1} \circ \varphi = c\,\mathrm{id}$ ή ισοδύναμα $\varphi = c\,\vartheta$. Με άλλα λόγια, κάθε δυο στοιχεία του $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ είναι συγγραμμικά και γι΄αυτό

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 1.$$

□

Πόρισμα 3.4. Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση μιας αβελιανής ομάδας είναι έχει διάσταση 1.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η G είναι αβελιανή και θεωρούμε μια ανάγωγη αναπαράστασή της (ρ, V). Για κάθε $g \in G$, παρατηρούμε ότι $\rho(g) \in \mathrm{End}_G(V)$. Πράγματι, για κάθε $h \in G$ και $v \in V$,

$$\rho(g)\left(\rho(h)(v)\right) = \rho(gh)(v) = \rho(hg)(v) = \rho(h)\left(\rho(g)(v)\right)$$

όπου η πρώτη και τρίτη ισότητα έπονται από το ότι η ρ είναι ομομορφισμός ομάδων και η δεύτερη από το ότι η G είναι αβελιανή.

Επομένως, εφαρμόζωντας το Λήμμα του Schur σε κάθε $\rho(g)$ έπεται ότι η δράση κάθε στοιχείου της ομάδας G δίνεται από κάποιο πολλαπλάσιο της ταυτοτικής και κατά συνέπεια όλοι οι υπόχωροι της V θα είναι αναγκαστικά G-αναλλοίωτοι (γιατί;). Καθώς η V είναι ανάγωγη, αυτό αφήνει μόνο μια περίπτωση για τη διάστασής της (γιατί;), δηλαδή $\dim(V) = 1$. □

Στην ΄Ασκηση (1.6) χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 3.4 για να καθορίσουμε *όλες* τις ανάγωγες αναπαραστάσεις μιας κυκλικής ομάδας όταν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο αυτή με μια ακόμα σημαντική εφαρμογή του Λήμματος του Schur.

Στο τέλος της Παραγράφου 2, είδαμε ότι ένα πλήρως αναγωγικό G-πρότυπο V μπορεί να γραφεί ως

$$V \cong_G V_1^{m_1} \oplus V_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus V_n^{m_n}, \tag{3.3}$$

για κάποια συλλογή $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ανά δύο *μη-ισόμορφων* αναπαραστάσεων της G και μη αρνητικούς ακέραιους $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Η ΄Εκφραση (3.3) ονομάζεται ισοτυπική διάσπαση της V και κάθε m_i ονομάζεται πολλαπλότητα εμφάνισης του V_i στο V. Το παρακάτω αποτέλεσμα ολοκληρώνει τον παραλληλισμό που κάναμε με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής.

Πόρισμα 3.5. Η ισοτυπική διάσπαση ενός πλήρως αναγωγικού προτύπου είναι μοναδική ως προς ισομορφισμούς και αναδιατάξεις των μερών της.

Η απόδειξη του Πορίσματος 3.5 βασίζεται στην εξής παρατήρηση, η οποία με τη σειρά της είναι μια ακόμη εφαρμογή του Λήμματος του Schur.

Λήμμα 3.6. Έστω V ένα πλήρως αναγωγικό G-πρότυπο. Η πολλαπλότητα ενός ανάγωγου G-προτύπου W στην ισοτυπική διάσπαση του V ισούται με

$$\dim \operatorname{Hom}_G(W, V).$$

Απόδειξη. Έστω

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

η ανάλυση σε ανάγωγα υποπρότυπα του V. Τότε

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_G(W, V) &= \operatorname{Hom}_G(W, W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k)\\ &\cong \operatorname{Hom}_G(W, W_1) \oplus \operatorname{Hom}_G(W, W_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Hom}_G(W, W_k)\\ &\cong \mathbb{F}^{|\{1 \le i \le k : W_i \cong W\}|},\end{aligned}$$

όπου ο τρίτος ισομορφισμός έπεται από το Πόρισμα 3.3. Για τον δεύτερο ισομορφισμό δείτε την παρατήρηση μετά το τέλος της απόδειξης. Συνεπώς,

$$\dim \operatorname{Hom}_G(W, V) \; = \; |\{1 \le i \le k : W_i \cong W\}|,$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Παρατήρηση. (Γραμμικής ΄Αλγεβρας) Έστω V, V_1, V_2, W, W_1 και W_2 διανυσματικοί χώροι. Υπάρχουν *φυσικοί* ισομορφισμοί

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(V, W_1 \oplus W_2) &\cong \operatorname{Hom}(V, W_1) \oplus \operatorname{Hom}(V, W_2)\\ \operatorname{Hom}(V_1 \oplus V_2, W) &\cong \operatorname{Hom}(V_1, W) \oplus \operatorname{Hom}(V_2, W),\end{aligned}$$

οι οποίοι δίνονται από

$$\begin{aligned}\varphi &\mapsto (\mathrm{proj}_1 \circ \varphi, \mathrm{proj}_2 \circ \varphi)\\ \varphi &\mapsto (\varphi \circ \iota_1, \varphi \circ \iota_2),\end{aligned}$$

αντίστοιχα, όπου $\mathrm{proj}_i : W_1 \oplus W_2 \to W_i$ είναι η φυσική προβολή και $\iota_i : V_i \to V_1 \oplus V_2$ είναι ο φυσικός εγκλεισμός (γιατί;). Ομοίως, για κάθε πεπερασμένο αριθμό διανυσματικών χώρων. Αυτό εξηγεί τον δεύτερο ισομορφισμό στην απόδειξη του Πορίσματος 3.6.

Αυτό έχει ως συνέπεια, η "ίδια" απόδειξη να μας πληροφορεί ότι η πολλαπλότητα ενός ανάγωγου G-προτύπου W στην ισοτυπική διάσπαση του V ισούται και με

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W)$$

(γιατί;). Αυτή η συμμετρία θα εξηγεί σε επόμενες παραγράφους, όταν μιλήσουμε για χαρακτήρες ομάδων.

Ουσιαστικά το Λήμμα 3.6 μας πληροφορεί ότι η πολλαπλότητα της W στην ισοτυπική διάσπαση της V εξαρτάται *μόνο* από τα πρότυπα V και W και *όχι* από την εκάστοτε διάσπαση. Τώρα, μπορεί κανείς να αποδείξει το Πόρισμα 3.5, η απόδειξη του οποίου αφήνεται ως άσκηση.