GUÍA DE APRENDIZAJE PARA CONCURSANTES ICPC Y IOI: PROBABILIDADES

1. Introducción

Las probabilidades son una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar la posibilidad de que ocurran ciertos eventos. En términos simples, las probabilidades nos permiten cuantificar la incertidumbre y evaluar la chance de que un evento específico suceda. Existen un grupo de ejercicios de la programación competitiva que abordan esta temática es por eso ue vamos en la presente guía a abordar los principales aspectos de este tema.

2. Conocimientos previos

2.1. Teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta básica que permite formular de cualquier otra teoría matemática. En ella se define unas operaciones básicas que permiten manipular los conjuntos y sus elementos, similares a las operaciones aritméticas, constituyendo el álgebra de conjuntos entre dichas operaciones podemos mencionar la unión, complemento, intersección.

2.2. Conjuntos disjuntos

En teoría de conjuntos, dos conjuntos son disjuntos o ajenos si no tienen ningún elemento en común. En otras palabras, dos conjuntos son disjuntos si su intersección es vacía. Por ejemplo $\{1, 2, 3\}$ y $\{7, 6, 10\}$ son conjuntos disjuntos.

2.3. Conjuntos exhaustivos

En el ámbito de la lógica y de la teoría de la probabilidad son dos proposiciones (o eventos, conjuntos) que son mutuamente excluyentes o disjuntos si ambos no pueden ser verdaderos (o suceder simultáneamente), Un ejemplo de ello es el resultado de arrojar una vez una moneda, el cual solo puede ser cara o cruz, pero no ambos.

3. Desarrollo

Una probabilidad es un número real entre 0 y 1 que indica qué tan probable es un evento. Si es seguro que ocurrirá un evento, su probabilidad es 1, y si es imposible, su probabilidad es 0. La probabilidad de un evento se denota $P(\ldots)$ donde los tres puntos describen el evento.

Por ejemplo, al lanzar un dado, el resultado es un número entero entre 1 y 6 y la probabilidad de cada resultado es 1/6. Por ejemplo, podemos calcular las siguientes probabilidades:

- P(el resultado es 4) = 1/6
- P(el resultado no es 6) = 5/6

- P(el resultado es par) = 1/2

3.1. Cálculo

Para calcular la probabilidad de un evento, podemos usar combinatoria o simular el proceso que genera el evento. Como ejemplo, calculemos la probabilidad de sacar tres cartas del mismo valor de una baraja de cartas barajadas (por ejemplo ♠8, ♣8 y ♢8).

3.1.1. Método 1

Podemos calcular la probabilidad usando la fórmula.

$$\frac{\text{número de resultados deseados}}{\text{número total de resultados}}$$

En este problema, los resultados deseados son aquellos en los que el valor de cada carta es el mismo. Hay $13\frac{4}{3}$ de esos resultados, porque hay 13 posibilidades por el valor de las cartas y $\frac{4}{3}$ formas de elegir 3 palos entre 4 palos posibles.

Hay un total de $\frac{52}{3}$ resultados, porque elegimos 3 cartas de 52 cartas. Por tanto, la probabilidad del evento es

$$\frac{13\frac{4}{3}}{\frac{52}{3}} = \frac{1}{425}$$

3.1.2. Método 2

Otra forma de calcular la probabilidad es simular el proceso que genera el evento. En este ejemplo, robamos tres cartas, por lo que el proceso consta de tres pasos. Requerimos que cada paso del proceso sea exitoso.

Sin duda, sacar la primera carta es un éxito, porque no hay restricciones. El segundo paso tiene éxito con probabilidad 3/51, porque quedan 51 cartas. y 3 de ellas tienen el mismo valor que la primera carta. De manera similar, el tercero el paso tiene éxito con una probabilidad de 2/50.

La probabilidad de que todo el proceso tenga éxito es:

$$1 \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} = \frac{1}{425}$$

3.2. Eventos

Un evento en la teoría de la probabilidad se puede representar como un conjunto.

$$A \subset X$$

donde X contiene todos los resultados posibles y A es un subconjunto de resultados. Por ejemplo, al tirar un dado, los resultados son:

$$X = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Ahora, por ejemplo, el evento **el resultado es par** corresponde al conjunto

$$A = \{\ 2,\ 4,\ 6\}$$

A cada resultado x se le asigna una probabilidad $p(x)$. Entonces, la probabilidad $P(A)$ de un evento A se puede calcular como una suma de probabilidades de resultados usando la fórmula

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

Por ejemplo, al lanzar un dado, $p(x) = \dfrac{1}{6}$ para cada resultado x, por lo que la probabilidad del evento **el resultado es par** es

$$p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{2}$$

La probabilidad total de los resultados en X debe ser 1, es decir, $P(X) = 1$.

Dado que los eventos en la teoría de la probabilidad son conjuntos, podemos manipularlos usando operaciones de conjunto

3.2.1. Complemento

El complemento $\bar{A}$ significa **A no sucede**. Por ejemplo, cuando al lanzar un dado, el complemento de $A = \{\ 2,\ 4,\ 6\}$ es $\bar{A} = \{\ 1,\ 3,\ 5\}$. La probabilidad del complemento $\bar{A}$ se calcula mediante la fórmula:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

A veces, podemos resolver un problema fácilmente usando complementos resolviendo el problema opuesto. Por ejemplo, la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar un dado diez veces es:

$$1 - \frac{5}{6} \times 10$$

Aquí $\frac{5}{6}$ es la probabilidad de que el resultado de un solo lanzamiento no sea seis, y $\frac{5}{6} \times 10$ es la probabilidad de que ninguno de los diez lanzamientos sea seis. El complemento de esto es la respuesta al problema.

3.2.2. Union

La unión $A \cup B$ significa **A o B suceden**. Por ejemplo, la unión de $A = \{\,2,\ 5\}$ y $B = \{\,4,\ 5,\ 6\}$ es $A \cup B = \{\,2,\ 4,\ 5,\ 6\}$. La probabilidad de la unión $A \cup B$ se calcula mediante la fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por ejemplo, al lanzar un dado, la unión de los eventos $A =$ el resultado es par y $B =$ el resultado es inferior a 4 es $A \cup B =$ el resultado es par o menor que 4 y su probabilidad es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Si los eventos A y B son disjuntos, es decir, $A \cap B$ está vacío, la probabilidad del evento $A \cup B$ es simplemente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3.2.3. La probabilidad condicional

La probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

es la probabilidad de que A suponga que B sucede. Por lo tanto, al calcular la probabilidad de A, solo consideramos los resultados que también pertenecen a B.

Usando los conjuntos anteriores $P(A|B) = \frac{1}{3}$ porque los resultados de B son $\{\,1,\ 2,\ 3\}$ y uno de ellos es par. Esta es la probabilidad de un resultado par si sabemos que el resultado está entre $1 \ldots 3$.

Las reglas básicas de la probabilidad condicional:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$, cuando A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$, y así sucesivamente.
- $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)$, cuando $B_1, \ldots, B_k$ son disjuntos y exhaustivos.

3.2.4. Intersección

La intersección $A \cap B$ significa **A y B suceden**. Por ejemplo, la intersección de $A = \{\ 2,\ 5\}$ y $B = \{\ 4,\ 5,\ 6\}$ es $A \cap B = \{5\}$. Usando probabilidad condicional, la probabilidad de la intersección $A \cap B$ se puede calcular usando la fórmula

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Los eventos A y B son independientes si $P(B|A) = P(A)$ y $P(A|B) = P(B)$, lo que significa que el hecho de que ocurra B no cambia la probabilidad de que ocurra A, y viceversa. En este caso, la probabilidad de la intersección es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Por ejemplo, al robar una carta de una baraja, los eventos $A =$ el palo es de tréboles y $B =$ el valor es cuatro son independientes. De ahí el evento $A \cap B =$ la carta es el cuatro de tréboles sucede con probabilidad

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$$

Las reglas básicas de probabilidad:

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. Implementación

La implementación de la solución de problemas de probabilidades en programación competitiva va depender en gran medida del problema y del enfoque que le de el programador concursante es por eso que no existe una implementación base o guía.

5. Aplicaciones

Las probabilidades tienen aplicaciones en una amplia variedad de campos, incluyendo:

- **Juegos de azar:** Las probabilidades se utilizan para calcular las posibilidades de ganar en juegos como el póker, la ruleta y las tragamonedas.
- **Finanzas:** En el mundo de las finanzas, las probabilidades se utilizan para calcular el riesgo y el rendimiento de inversiones, así como para evaluar la probabilidad de eventos económicos como recesiones o aumentos en los precios de las acciones.

- **Ciencia:** Las probabilidades se utilizan en la física, la química, la biología y otras disciplinas científicas para modelar y predecir el comportamiento de sistemas complejos.
- **Medicina:** En medicina, las probabilidades se utilizan para evaluar la eficacia de tratamientos médicos, calcular el riesgo de enfermedades y predecir la probabilidad de que ocurran ciertos eventos médicos.
- **Seguros:** Las compañías de seguros utilizan las probabilidades para calcular las primas y evaluar el riesgo de reclamaciones.
- **Juegos deportivos:** Las probabilidades se utilizan para predecir los resultados de eventos deportivos y calcular las probabilidades de que un equipo gane un partido.

Estos son solo algunos ejemplos de las muchas aplicaciones de las probabilidades en la vida cotidiana. Las probabilidades son una herramienta fundamental para tomar decisiones informadas en una amplia variedad de situaciones.

6. Complejidad

En los ejercicios de probabilidades de programación competitiva no existe una complejidad determinada porque la forma de calcular la probabilidad va depender en gran medida del problema y del enfoque que le de el programador concursante.

7. Ejercicios

A continuación una lista de ejercicios que se pueden resolver aplicando los contenidos abordados en la guía

- DMOJ - Dreamoon y Wi-Fi
- DMOJ - Probabilities
- DMOJ - Cuál es el último?