GUÍA DE APRENDIZAJE PARA CONCURSANTES ICPC Y IOI: ÁRBOL DE FENWICK (BINARY INDEXED TREE, BIT)

---

1. Introducción

El árbol de Fenwick se describió por primera vez en un artículo titulado "*Una nueva estructura de datos para tablas de frecuencias acumulativas*"(Peter M. Fenwick, 1994). El árbol de Fenwick también se llama Árbol Indexado Binario (*Binary Indexed Tree*) , o simplemente BIT abreviado.

El árbol de Fenwick es una estructura de datos que:

- Calcula el valor de la función f en el rango dado $[l; r]$ (i.e. $f(A_l, A_{l+1}, \ldots, A_r)$) en tiempo $O(\log N)$.
- Requiere $O(N)$ memoria, o en otras palabras, exactamente la misma memoria requerida para A
- Es fácil de usar y codificar, especialmente en el caso de arreglos multidimensionales

2. Conocimientos previos

2.1. Función asociativa binaria

Sea A un conjunto no vacío y * una operación binaria en A. Se dice que * es asociativa si, solo si: (a*b)*c = a*(b*c). Por ejemplo la adición y la multiplicación con números pares son asociativas

2.2. Vector

Vector es una clase genérica y está pensada para operar con arreglos unidimensionales de datos del mismo tipo.

2.3. Operador AND (&)

El AND bit a bit, toma dos números enteros y realiza la operación AND lógica en cada par correspondiente de bits. El resultado en cada posición es 1 si el bit correspondiente de los dos operandos es 1, y 0 de lo contrario. La operacion AND se representa con el signo &.

a	b	a & b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ejemplo 21 (10101_2) & 11 (01011_2) :

&	10101
	01011
	00001

2.4. Operador OR (|)

Una operación OR de bit a bit, toma dos números enteros y realiza la operación OR inclusivo en cada par correspondiente de bits. El resultado en cada posición es 0 si el bit correspondiente de los dos operandos es 0, y 1 de lo contrario. La operacion OR se representa con el signo |.

a	b	a | b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ejemplo 21 (10101_2) & 11 (01011_2) :

|	10101
	01011
	11111

3. Desarrollo

En aras de la simplicidad, supondremos que la función f es solo una función de suma.

Dado un arreglo de enteros $A[0 \ldots N-1]$. Un árbol de Fenwick es solo un arreglo $T[0 \ldots N-1]$, donde cada uno de sus elementos es igual a la suma de los elementos de A en algún rango $[g(i), i]$:

$$T_i = \sum_{j=g(i)}^{i} A_j,$$

dónde g es alguna función que satisface $0 \leq g(i) \leq i$ que más adelante vamos a definir.

La estructura de datos se llama árbol, porque hay una buena representación de la estructura de datos como árbol, aunque no necesitamos modelar un árbol real con nodos y bordes. Solo necesitaremos mantener la matriz. T para atender todas las consultas.

Ahora podemos escribir un pseudocódigo para las dos operaciones mencionadas anteriormente: obtener la suma de elementos de A en el rango $[0, r]$ y actualizar (aumentar) algún elemento A_i :

```
def sum(int r):
   res = 0
   while (r >= 0):
      res += t[r]
      r = g(r) - 1
return res

def increase(int i, int delta):
   for all j with g(j) <= i <= j:
```

```
        t[j] += delta
```

La función *sum* funciona de la siguiente manera:

1. Primero, suma la suma del rango $[g(r), r]$ (es decir $T[r]$) en *result*
2. Luego salta al rango $[g(g(r) - 1), g(r) - 1]$ y adiciona la suma de este rango a *result*
3. Y asi sucesivamente salta en el rango de $[0, g(g(\ldots g(r) - 1 \cdots - 1) - 1)]$ hasta que llega al rango $[g(-1), -1]$ donde se detiene. En cada salto adiciona a *result* el valor almacenado en el rango analizado.

La función *increase* funciona de forma similar pero en dirección de incremento de los índices del rango:

1. Sumas de rangos $[g(j), j]$ que satisfacen la condición $g(j) \leq i \leq j$ se incrementan en delta, es decir $t[j] += delta$. Por lo tanto, actualizamos todos los elementos en T que corresponden a rangos verdaderos de A_i.

3.1. Definición de $g(i)$

El cómputo de $g(i)$ se define usando la siguiente operación simple: reemplazamos todos los 1 bits en la representación binaria de i con 0. En otras palabras, si el dígito menos significativo de i en binario es 0, entonces $g(i) = i$. Y de lo contrario, el dígito menos significativo es un 1, y tomamos esto 1 y todos los demás que se arrastran 1 y lo cambiamos a 0. Por ejemplo, obtenemos:

$g(11) = g(1011_2) = 1000_2$
$g(12) = g(1100_2) = 1100_2$
$g(13) = g(1101_2) = 1100_2$
$g(14) = g(1110_2) = 1110_2$
$g(15) = g(1111_2) = 0000_2$

Existe una implementación simple que utiliza operaciones bit a bit para la operación no trivial descrita anteriormente:

$$g(i) = \quad i \quad \& \quad (i+1)$$

dónde $\&$ es el operador AND bit a bit. No es difícil convencerse de que esta solución hace lo mismo que la operación descrita anteriormente. Ahora, solo necesitamos encontrar una manera de iterar sobre todos j's, tal que $g(j) \leq i \leq j$.

Es fácil ver que podemos encontrar todos esos j es comenzando con i y volteando el último bit no configurado. Llamaremos a esta operación $h(j)$. por ejemplo, para $i = 10$ tenemos:

$10 = 0001010_2$
$h(10) = 11 = 0001011_2$

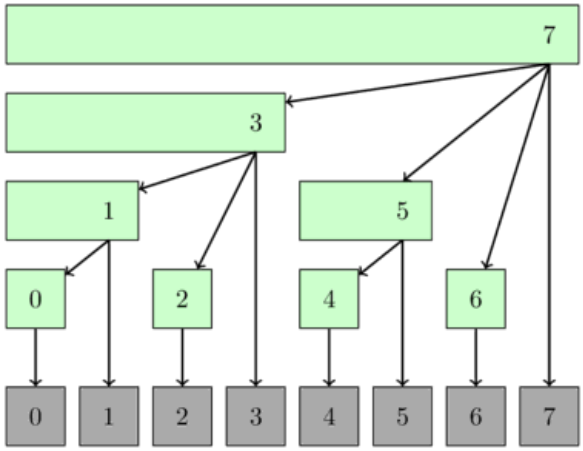
$h(11) = 15 = 0001111_2$
$h(15) = 31 = 0011111_2$
$h(31) = 63 = 0111111_2$
$\vdots$

Como era de esperar, también existe una forma sencilla de realizar h usando operaciones bit a bit:

$$h(j) = j \quad | \quad (j+1)$$

dónde | es el operador OR bit a bit.

La siguiente imagen muestra una posible interpretación del árbol de Fenwick como árbol. Los nodos del árbol muestran los rangos que cubren.



3.2. Encontrar la suma en un arreglo

El árbol de Fenwick normal solo puede responder consultas de suma del tipo $[0, r]$ usando sum(int r), sin embargo también podemos responder otras consultas del tipo $[l, r]$ calculando dos sumas $[0, r]$ y $[0, l-1]$ y restarlos. Esto se maneja en el metodo sum(int l, int r).

3.3. Encontrar mínimo de $[0, r]$ en un arreglo

Es obvio que no hay una manera fácil de encontrar el mínimo de rango $[l, r]$ usando el árbol de Fenwick, ya que el árbol de Fenwick solo puede responder consultas de tipo $[0, r]$. Además, cada vez que un valor es update'd, el nuevo valor tiene que ser menor que el valor actual. Ambas limitaciones significativas se deben a que la operación min junto con el conjunto de números enteros no forma un grupo, ya que no hay elementos inversos.

3.4. Enfoque de indexación basado en uno

Para este enfoque, cambiamos los requisitos y la definición de $T[]$ y $g()$ un poco. Queremos $T[i]$ almacenar la suma de $[g(i)+1; i]$. Esto cambia un poco la implementación y permite una definición agradable similar para $g(i)$:

```
def sum(int r):
    res = 0
    while (r > 0):
        res += t[r]
        r = g(r)
    return res

def increase(int i, int delta):
    for all j with g(j) < i <= j:
        t[j] += delta
```

El cómputo de $g(i)$ se define como: alternancia del último conjunto 1 bit en la representación binaria de i.
$g(7) = g(111_2) = 110_2 = 6$
$g(6) = g(110_2) = 100_2 = 4$
$g(4) = g(100_2) = 000_2 = 0$

El último bit establecido se puede extraer usando $i \quad \& \quad (-i)$, por lo que la operación se puede expresar como:

$$g(i) = i - (i\&(-i))$$

Y no es difícil ver que necesitas cambiar todos los valores $T[j]$ en la secuencia $i, h(i), h(h(i)), \ldots$ cuando quieras actualizar $A[j]$, dónde $h(i)$ Se define como:

$$h(i) = i + (i\&(-i))$$

Como puede ver, el principal beneficio de este enfoque es que las operaciones binarias se complementan muy bien

3.5. Operaciones de rango

Un árbol Fenwick puede admitir las siguientes operaciones de rango:

1. **Actualización de puntos y consulta de rango:** Este es solo el árbol Fenwick ordinario como se explicó anteriormente.
2. **Actualización de rango y consulta de posición:** Usando trucos simples, también podemos hacer las operaciones inversas: aumentar rangos y consultar valores únicos. Deje que el árbol

de Fenwick se inicialice con ceros. Supongamos que queremos incrementar el intervalo$[l, r]$ por x. Realizamos operaciones de actualización de dos puntos en el árbol de Fenwick, que son add(l,x) y add(r+1, -x). Si queremos obtener el valor de $A[i]$, solo necesitamos tomar la suma del prefijo usando el método de suma de rango ordinario. Para ver por qué esto es cierto, podemos centrarnos de nuevo en la operación de incremento anterior. Si $i < l$, entonces las dos operaciones de actualización no tienen efecto en la consulta y obtenemos la suma 0 . Si $i \in [l, r]$, entonces obtenemos la respuesta x debido a la primera operación de actualización. Y si $i > r$, entonces la segunda operación de actualización cancelará el efecto de la primera.

3. **Actualización de rango y consulta de rango:** Para admitir tanto las actualizaciones de rango como las consultas de rango, utilizaremos dos BIT, a saber $B_1[]$ y $B_2[]$, inicializado con ceros. Supongamos que queremos incrementar el intervalo $[l, r]$ por el valor x. De manera similar al método anterior, realizamos actualizaciones de dos puntos en B_1: add(B1,l,x)y add(B1,r+1,-x). Y también actualizamos B_2. Los detalles se explicarán más adelante.

```
def range_add(l, r, x):
   add(B1, l, x)
   add(B1, r+1, -x)
   add(B2, l, x*(l-1))
   add(B2, r+1, -x*r))
```

Después de la actualización de rango (l, r, x) la consulta de suma de rango debe devolver los siguientes valores:

$$sum[0; i] = \begin{cases} 0 & i < l \\ x \cdot (i - (l - 1)) & l \leq i \leq r \\ x \cdot (r - l + 1) & i > r \end{cases}$$

Podemos escribir la suma del rango como diferencia de dos términos, donde usamos B_1 para el primer término y B_2 para segundo término. La diferencia de las consultas nos dará el *prefix_sum* sobre $[0, i]$.

$$\begin{aligned} sum[0; i] &= sum(B_1, i) \cdot i - sum(B_2, i) \\ &= \begin{cases} 0 \cdot i - 0 & i < l \\ x \cdot i - x \cdot (l - 1) & l \leq i \leq r \\ 0 \cdot i - (x \cdot (l - 1) - x \cdot r) & i > r \end{cases} \end{aligned}$$

La última expresión es exactamente igual a los términos requeridos. Así podemos usar B_2 para eliminar términos adicionales cuando multiplicamos $B_1[i] \times i$.

Podemos encontrar sumas de rangos arbitrarias al calcular las sumas de prefijos para $l - 1$ y r y tomando la diferencia de ellos de nuevo.

```
def add(b, idx, x):
   while idx<=N:
      b[idx]+=x
```

```
        idx+=idx&-idx

    def range_add(l,r,x):
        add(B1,l,x)
        add(B1,r+1,-x)
        add(B2,l,x*(l-1))
        add(B2,r+1,-x*r)

    def sum(b, idx):
        total=0
        while idx>0:
            total+=b[idx]
            idx-=idx&-idx
        return total

    def prefix_sum(idx):
        return sum(B1,idx)*idx-sum(B2,idx)

    def range_sum(l, r):
    return sum(r) - sum(l-1)
```

4. Implementación

4.1. C++

La siguiente implementación es con indexado a partir de la posición 0

```
struct FenwickTree {
    vector<int> bit; int n;

    FenwickTree(int n){ this->n=n; bit.assign(n,0); }

    FenwickTree(vector<int> a):FenwickTree(a.size()){
        for(size_t i=0;i<a.size();i++)add(i,a[i]);
    }

    int sum(int r){
        int ret = 0;
        for(;r>=0;r=(r&(r+1))-1)ret+=bit[r];
        return ret;
    }

    int sum(int l, int r){ return sum(r)-sum(l-1);}

    void add(int idx, int delta){
        for(;idx<n;idx=idx|(idx+1))bit[idx]+=delta;
    }
};
```

La siguiente implementación es con indexado a partir de la posición 1

```
struct FenwickTreeOneBasedIndexing {
   vector<int> bit; int n;

   FenwickTreeOneBasedIndexing(int n) {
      this->n = n + 1; bit.assign(n + 1, 0);
   }

   FenwickTreeOneBasedIndexing(vector<int> a)
   :FenwickTreeOneBasedIndexing(a.size()) {
      init(a.size());
      for(size_t i=0;i<a.size();i++) add(i,a[i]);
   }

   int sum(int idx) {
      int ret = 0;
      for(;idx>0;idx-=idx&-idx) ret += bit[idx];
      return ret;
   }

   int sum(int l, int r) {
      return sum(r)-sum(l-1);
   }

   void add(int idx, int delta) {
      for(;idx<n;idx+=idx&-idx) bit[idx] += delta;
   }

   //actualizacion en rango con consulta en una posicion
   void add(int idx, int val) {
      for (; idx < n; idx += idx & -idx)
         bit[idx] += val;
   }

   int point_query(int idx) {
      int ret = 0;
      for (; idx > 0; idx -= idx & -idx)
         ret += bit[idx];
      return ret;
   }
};
```

4.2. Java

La siguiente implementación es con indexado a partir de la posición 1

```
private class FenwickTree{
  public long [] bit;
```

```
  public int nodes;

  public FenwickTree(int _nnodes) {
     bit = new long [_nnodes+1];
     Arrays.fill(bit,0L);
     nodes=_nnodes+1;
  }

  public void add(int idx, long delta) {
     for(;idx<this.nodes;idx+=idx&-idx) bit[idx]+=delta;
  }

  public long sum(int idx) {
     long ret = 0L;
     for(;idx>0;idx-=idx&-idx) ret += bit[idx];
     return ret;
  }

  long sum(int l,int r){return sum(r)-sum(l-1);}
}
```

5. Aplicaciones

La aplicación más común del árbol de Fenwick es calcular la suma de un rango (es decir, usar la suma sobre el conjunto de números enteros (i.e. $f(A_1, A_2, \ldots, A_k) = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$) pero esto no significa que sea su único uso. Dicha estructura puede ser utiliza para resolver otros problemas como puede ser el conteo de elementos dentro de un rango y otros para los cuales se se tiene que aplicar un poco de creatividad a partir de lo conocido de la estructura.

6. Complejidad

Es obvio que la complejidad de ambos *sum* y *increase (add)* depende de la función g. Hay muchas maneras de elegir la función. g, mientras $0 \leq g(i) \leq i$ para todos i. Por ejemplo la función $g(i) = i$ funciona, lo que da como resultado $T = A$ y, por lo tanto, las consultas de suma son lentas. También podemos tomar la función $g(i) = 0$. Esto corresponderá a matrices de suma de prefijos, lo que significa que encontrar la suma del rango $[0, i]$ solo tomará un tiempo constante, pero las actualizaciones son lentas. La parte inteligente del algoritmo de Fenwick es que utiliza una definición especial de la función g que puede manejar ambas operaciones en tiempo $O(\log N)$.

7. Ejercicios propuestos

A continuación una lista de ejercicios que se resuelven utilizando esta estructura:

- DMOJ - Curious Robin Hood

- DMOJ - Respondiendo Preguntas
- DMOJ - Vigilando el Museo
- DMOJ - Super Turbo