GUÍA DE APRENDIZAJE PARA CONCURSANTES ICPC Y IOI: INTEGRACIÓN POR LA FÓRMULA DE SIMPSON

1. Introducción

Digamos que en un ejercicio su solución radica en hallar el valor de la integral definida como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Como implementar un algoritmo que sea capaz de hallar con determinado pero mínimo margen error dicho valor. Pues bien veremos que existe un algoritmo para esto gracias a Thomas Simpson.

2. Conocimientos previos

2.1. Integral

Una integral en matemáticas es una operación matemática que se utiliza para calcular el área bajo una curva o la acumulación de cierta cantidad a lo largo de un intervalo. En términos más simples, la integral nos permite encontrar el área bajo una curva en un gráfico, lo cual es útil en diversas aplicaciones matemáticas y científicas.

Existen dos tipos principales de integrales: la integral definida y la integral indefinida. La integral definida se utiliza para calcular el área bajo una curva entre dos puntos específicos en un eje, mientras que la integral indefinida es una función que representa todas las posibles antiderivadas de una función dada.

2.2. Thomas Simpson

Thomas Simpson fue un matemático británico del siglo XVIII conocido por sus contribuciones en el campo del cálculo numérico y la interpolación. Uno de sus logros más destacados es el desarrollo de la regla de Simpson, un método numérico más preciso que la regla del trapecio para aproximar el valor de una integral definida.

2.3. Método númericos

Los métodos numéricos son técnicas matemáticas que se utilizan para resolver problemas numéricos o computacionales en diversas áreas, como la ingeniería, la física, la economía, la informática, entre otras. Estos métodos permiten aproximar soluciones a problemas matemáticos que no pueden resolverse de forma exacta o analítica.

2.4. Regla del trapecio

El método de la regla del trapecio es un método numérico utilizado para aproximar el valor de una integral definida. Consiste en dividir el intervalo de integración en segmentos pequeños y aproximar el área bajo la curva mediante la suma de áreas de trapecios.

2.5. Interpolación polinomial Lagrange

La interpolación polinomial de Lagrange es un método utilizado en matemáticas y computación para encontrar un polinomio que pase por un conjunto dado de puntos en un plano cartesiano. Este método se basa en la idea de construir un polinomio de grado n-1 que pase por n puntos dados, donde n es el número de puntos de interpolación.

3. Desarrollo

La integración mediante la fórmula de Simpson es un método numérico utilizado para aproximar el valor de una integral definida. Este método se basa en la idea de aproximar el área bajo una curva mediante la división de la región en segmentos y la utilización de polinomios de segundo grado para estimar el valor de la integral.

La fórmula de Simpson es más precisa que otros métodos de integración numérica, como la regla del trapecio, ya que utiliza polinomios de segundo grado para ajustarse mejor a la curva original. Esto permite obtener aproximaciones más precisas del valor de la integral definida.

3.1. Fórmula Simpson

El principio básico de la fórmula de Simpson consiste en dividir el intervalo de integración en subintervalos de igual longitud y luego aplicar una fórmula que utiliza los valores de la función en los extremos y en el punto medio de cada subintervalo para aproximar el valor de la integral.

Digamos que tenemos algún número natural n. Dividiremos el intervalo de integración $[a, b]$ en $2n$ partes iguales:

$$x_i = a + ih, \;\; i = 0 \ldots 2n,$$
$$h = \frac{b-a}{2n}.$$

Ahora calcularemos la función de la integral de forma separada por cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = 1 \ldots n$, y entonces sumaremos los valores obtenidos por cada intervalo.

Entonces, supongamos que consideramos el siguiente intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}], i = 1 \ldots n$. Reemplace la función $f(x)$ en una parábola $P(x)$ pasando a través de 3 puntos $(x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i})$. Tal parábola siempre existe y es única; Se puede encontrar analíticamente. Por ejemplo, podríamos construirlo utilizando la interpolación polinomial Lagrange. Lo único que queda por hacer es integrar este polinomio. Si hace esto para una función general f, recibe una expresión notablemente simple:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x)\,dx = (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + (f(x_{2i}))\,\frac{h}{3}$$

Agregamos estos valores en todos los intervalos, obtenemos la fórmula final de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})\right)\frac{h}{3}$$

3.2. Error

El error de la integración mediante la fórmula de Simpson es:

$$-\tfrac{1}{90}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

donde ξ es algún número entre a y b.

El error es asintóticamente proporcional a $(b-a)^5$. Sin embargo, las derivaciones anteriores sugieren un error proporcional a $(b-a)^4$. La regla de Simpson gana un orden adicional porque los puntos en los que se evalúa el integrando se distribuyen simétricamente en el intervalo $[a, b]$.

4. Implementación

Aquí , $f(x)$ es alguna función definida por usted de acuerdo al problema o ejercicio.

4.1. C++

```cpp
const int N = 1000 * 1000; // numeros de pasos (ya multiplicado por 2)

double simpson_integration(double a, double b){
   double h = (b - a) / N;
   double s = f(a) + f(b); // a = x_0 y b = x_2n
   for (int i = 1; i <= N - 1; ++i) { // Consulte la formula final de Simpson.
      double x = a + h * i;
      s += f(x) * ((i & 1) ? 4 : 2);
   }
   s *= h / 3;
   return s;
}
```

4.2. Java

```java
public static final int N = 1000 * 1000; // numeros de pasos (ya multiplicado
    por 2

public static double simpson_integration(double a, double b){
   double h = (b - a) / N;
   double s = f(a) + f(b); // a = x_0 y b = x_2n
   for (int i = 1; i <= N - 1; ++i) { // Consulte la formula final de Simpson.
```

```
        double x = a + h * i;
        s += f(x) * ((i & 1)==1 ? 4 : 2);
    }
    s *= h / 3;
    return s;
}
```

5. Aplicaciones

La fórmula de Simpson es un método numérico utilizado para aproximar el valor de una integral definida. Algunas de las aplicaciones de la integración mediante la fórmula de Simpson incluyen:

1. **Cálculo de áreas:** La fórmula de Simpson se puede utilizar para aproximar el área bajo una curva, lo que es útil en campos como la geometría y la física para determinar áreas de regiones irregulares.
2. **Cálculo de volúmenes:** En el caso de funciones tridimensionales, la fórmula de Simpson se puede aplicar para aproximar el volumen de sólidos obtenidos al rotar una curva alrededor de un eje.
3. **Análisis de datos:** En estadística, la integración mediante la fórmula de Simpson se puede utilizar para calcular la probabilidad bajo una distribución de probabilidad continua.
4. **Resolución de ecuaciones diferenciales:** En algunos casos, las ecuaciones diferenciales se pueden resolver mediante métodos numéricos que involucran la integración, como la fórmula de Simpson.
5. **Modelado matemático:** La fórmula de Simpson también se utiliza en la construcción de modelos matemáticos en diversas disciplinas, como la ingeniería, la economía y la biología, para analizar fenómenos y predecir comportamientos.

6. Complejidad

La complejidad de la implementación es O(n) siendo la n la cantidad de intervalo en que subdividimos el intervalo de integración

7. Ejercicios

A continuación un lista de ejercicios que se puede resolver aplicando lo abordado:

- URI - Environment Protection