GUÍA DE APRENDIZAJE PARA CONCURSANTES ICPC Y IOI: FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

1. Introducción

En teoría de números, los factores primos de un número entero son los números primos divisores exactos de ese número entero. El proceso de búsqueda de esos divisores se denomina factorización de enteros, o factorización en números primos. Saber como realizar este proceso no puede ser muy util para determinados ejercicios. En guía veremos varios algoritmos para factorizar números enteros, cada uno de ellos puede ser tanto rápido como lento (algunos más lentos que otros) dependiendo de su entrada.

2. Conocimientos previos

2.1. Número primo

En matemáticas, un número primo es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores positivos distintos: él mismo y el 1. Por el contrario, los números compuestos son los números naturales que tienen algún divisor natural aparte de sí mismos y del 1, y, por lo tanto, pueden factorizarse. El número 1, por convenio, no se considera ni primo ni compuesto.

2.2. Factorial

El factorial de un entero positivo N, el factorial de N o N factorial se define en principio como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 (es decir, los números naturales) hasta N.

3. Desarrollo

Para descomponer un número en factores primos solo basta con seguir la idea aprendida en enseñanzas anteriores ejemplo:

4620	2
2310	2
1155	3
385	5
77	7
11	11
1	

En esta caso $4620 = 2^2 * 3^1 * 5^1 * 7^1 * 11^1$

3.1. Probando divisiones

Este es el algoritmo más básico para encontrar una factorización prima.

Dividimos por cada posible divisor d. Podemos notar que es imposible que todos los factores primos de un número compuesto n son más grandes que $\sqrt{n}$. Por lo tanto, solo necesitamos probar

los divisores $2 \leq d \leq \sqrt{n}$, lo que nos da la factorización prima en $O(\sqrt{n})$. (Este es un tiempo pseudo-polinómico , es decir, polinomial en el valor de la entrada pero exponencial en el número de bits de la entrada).

El divisor más pequeño tiene que ser un número primo. Eliminamos el factor del número y repetimos el proceso. Si no podemos encontrar ningún divisor en el rango $[2; \sqrt{n}]$, entonces el número en sí tiene que ser primo.

3.1.1. Factorización de ruedas

Esta es una optimización de la idea anterior. La idea es la siguiente. Una vez que sabemos que el número no es divisible por 2, no necesitamos verificar todos los demás números pares. Esto nos deja solo con $50\,\%$ de los números a comprobar. Después de marcar 2, simplemente podemos comenzar con 3 y omitir cualquier otro número.

Este método se puede ampliar. Si el número no es divisible por 3, también podemos ignorar todos los demás múltiplos de 3 en los cálculos futuros. Así que solo tenemos que comprobar los números. $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$. Podemos observar un patrón de estos números restantes. Tenemos que comprobar todos los números con $d \bmod 6 = 1$ y $d \bmod 6 = 5$. Así que esto nos deja con sólo $33,3\,\%$ porcentaje de los números a verificar. Podemos implementar esto verificando primero los números primos 2 y 3, y luego comenzar a verificar con 5 y, alternativamente, omitir 1 o 3 números.

Si ampliamos esto más con más números primos, incluso podemos llegar a mejores porcentajes. Sin embargo, también las listas de saltos serán mucho más grandes.

3.2. Primos precalculados

3.2.1. Factorización de N

Una buena manera de verificar es precalcular todos los números primos con la criba de Eratóstenes hasta $\sqrt{N}$ y probarlos individualmente.

Para un factor primo p de N, la multiplicidad de p es el máximo exponente a para el cual p^a es un divisor de N. La factorización de un número entero es una lista de los factores primos de ese número, junto con su multiplicidad. El Teorema fundamental de la Aritmética establece que todo número entero positivo tiene una factorización de primos única.

3.2.2. Factorización de N!

Que pasa si ahora queremos descomponer N! la idea básica seria iterar desde 1 hasta N e ir descomponiendo cada número acumulando las potencias o hallar N! y luego descomponerlo, pero esto tendría una complejidad de O($N * \sqrt{N}$) el cual sería muy costoso para valores muy grandes de N. Analicemos la siguiente idea:

10!=1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 Necesitamos hallar cuantos 2 hay.

10!	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
Descomposición de n1	1	2	3	2^2	5	2*3	7	2^3	3^2	2*5	
Primo 2	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	8
Primo 3	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	4

Para el caso del 2 seria todos los múltiplos de 2 hasta N ejemplo para 10 hay 5 que seria 10/2 luego todos los múltiplos de 4 hasta N que sería N/4 y así hasta que la potencia de 2 sea mayor que N la suma de estos seria el exponente de la potencia de 2 luego de descomponer N!, en este caso sería $2^{10/2+10/4+10/8}$=2^{5+2+1}=2^8 y este sería el procedimiento para todos los primos hasta N.

3.3. Método de factorización de Fermat

Podemos escribir un número compuesto impar $n = p \cdot q$ como la diferencia de dos cuadrados $n = a^2 - b^2$:

$$n = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$$

El método de factorización de Fermat trata de explotar el hecho, adivinando el primer cuadrado a^2 y compruebe si la parte restante $b^2 = a^2 - n$ también es un número cuadrado. Si es así, entonces hemos encontrado los factores $a - b$ y $a + b$ de n.

3.4. Método de Pollard's *p-1*

Es muy probable que al menos un factor de un número sea B-powersmooth para pequeños B. B-powersmooth significa que cada potencia principal d^k que divide $p - 1$ es como mucho B. Por ejemplo, la descomposición en factores primos de 4817191 es $1303 \cdot 3697$. Y los factores son 31-poderoso y suave 16-powersmooth respetablemente, porque $1303 - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 31$ y $3697 - 1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. En 1974, John Pollard inventó un método para extraer B-powersmooth factores de un número compuesto.

La idea proviene del pequeño teorema de Fermat . Sea una factorización de n ser $n = p \cdot q$. Dice que si a es coprimo de p, se cumple el siguiente enunciado:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Esto también significa que

$$a^{(p-1)^k} \equiv a^{k\cdot(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Así que para cualquier M con $p - 1 \mid M$ lo sabemos $a^M \equiv 1$. Esto significa que $a^M - 1 = p \cdot r$, y por eso también $p \mid \gcd(a^M - 1, n)$.

Por lo tanto, si $p-1$ por un factor p de n divide M, podemos extraer un factor usando el algoritmo de Euclides.

Está claro que los más pequeños M que es múltiplo de cada B-el número de powersoft es $\text{lcm}(1,\ 2\ ,3\ ,4\ ,\ \ldots,\ B)$. O alternativamente:

$$M = \prod_{\text{prime } q \leq B} q^{\lfloor \log_q B \rfloor}$$

Aviso, si $p-1$ divide M para todos los factores primos p de n, entonces $\gcd(a^M - 1, n)$ solo será n. En este caso no recibimos un factor. Por lo tanto, intentaremos realizar la $\gcd$ varias veces, mientras calculamos M.

Algunos números compuestos no tienen B-powersmooth factores para pequeños B. Por ejemplo, los factores del número compuesto $100\ 000\ 000\ 000\ 000\ 493 = 763\ 013 \cdot 131\ 059\ 365\ 961$ son $190\ 753$-poderoso y suave $1\ 092\ 161\ 383$-poderoso. Tendríamos que elegir $B >= 190\ 753$ para factorizar el número.

3.5. Algoritmo rho de Pollard

Otro algoritmo de factorización de John Pollard.

Sea la factorización prima de un número $n = pq$. El algoritmo analiza una secuencia pseudo-aleatoria $\{x_i\} = \{x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ \ldots\}$ dónde f es una función polinomial, generalmente $f(x) = (x^2 + c) \bmod n$ se elige con $c = 1$.

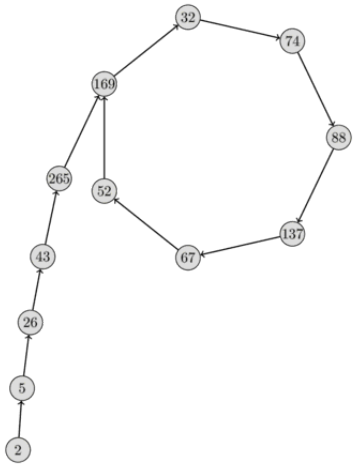
En realidad no estamos muy interesados en la secuancia $\{x_i\}$, estamos más interesados en la secuencia $\{x_i \bmod p\}$. Desde f es una función polinomial y todos los valores están en el rango $[0;\ p)$ esta secuencia comenzará a circular tarde o temprano. La paradoja del cumpleaños en realidad sugiere que el número esperado de elementos es $O(\sqrt{p})$ hasta que comience la repetición. Si p es más pequeña que $\sqrt{n}$, la repetición comenzará muy probablemente en $O(\sqrt[4]{n})$.

Aquí hay una visualización de tal secuencia $\{x_i \bmod p\}$ con $n = 2206637$, $p = 317$, $x_0 = 2$ y $f(x) = x^2 + 1$. Por la forma de la secuencia se puede ver muy claramente por qué el algoritmo se llama de Pollard ρ algoritmo.

Todavía hay una gran pregunta abierta. no sabemos p sin embargo, entonces, ¿cómo podemos discutir sobre la secuencia $\{x_i \bmod p\}$?

En realidad es bastante fácil. Hay un ciclo en la secuencia $\{x_i \bmod p\}_{i \leq j}$ si y solo si hay dos índices $s, t \leq j$ tal que $x_s \equiv x_t \bmod p$. Esta ecuación se puede reescribir como $x_s - x_t \equiv 0 \bmod p$ que es lo mismo que $p \mid \gcd(x_s - x_t, n)$.

Por lo tanto, si encontramos dos índices s y t con $g = \gcd(x_s - x_t, n) > 1$, hemos encontrado un ciclo y también un factor g de n. Note que es posible que $g = n$. En este caso, no hemos encontrado un factor adecuado y tenemos que repetir el algoritmo con un parámetro diferente (diferente valor inicial x_0, diferente constante c en la función polinomial f).



Para encontrar el ciclo, podemos usar cualquier algoritmo común de detección de ciclos.

3.6. Algoritmo de búsqueda de ciclos de Floyd

Este algoritmo encuentra un ciclo usando dos punteros. Estos punteros se mueven sobre la secuencia a diferentes velocidades. En cada iteración, el primer puntero avanza al siguiente elemento, pero el segundo puntero avanza dos elementos. No es difícil ver que, si existe un ciclo, el segundo puntero hará al menos un ciclo completo y luego se encontrará con el primer puntero durante los próximos bucles de ciclo. Si la duración del ciclo es λ y el μ es el primer índice en el que comienza el ciclo, entonces el algoritmo se ejecutará en $O(\lambda + \mu)$ tiempo.

Este algoritmo también se conoce como tortuga y el algoritmo de la liebre , basado en el cuento en el que una tortuga (aquí un puntero lento) y una liebre (aquí un puntero más rápido) hacen una carrera.

En realidad, es posible determinar el parámetro λ y μ utilizando este algoritmo (también en $O(\lambda + \mu)$ tiempo y $O(1)$ espacio), pero aquí está solo la versión simplificada para encontrar el ciclo. El algoritmo y devuelve verdadero tan pronto como detecta un ciclo. Si la secuencia no tiene un ciclo, la función nunca se detendrá. Sin embargo, esto no puede suceder durante el algoritmo rho de Pollard.

La siguiente tabla muestra los valores de x y y durante el algoritmo de $n = 2206637$, $x_0 = 2$ y $c = 1$.

i	x_i mód n	x_{2i} mód n	x_i mód 317	x_{2i} mód 317	$\gcd(x_i - x_{2i}, n)$
0	2	2	2	2	–
1	5	26	5	26	1
2	26	458330	26	265	1
3	677	1671573	43	32	1
4	458330	641379	265	88	1
5	1166412	351937	169	67	1
6	1671573	1264682	32	169	1
7	2193080	2088470	74	74	317

La implementación utiliza una función multque multiplica dos enteros $\leq 10^{18}$ sin desbordamiento utilizando un tipo de GCC __int128para enteros de 128 bits. Si GCC no está disponible, puede usar una idea similar a la exponenciación binaria .

Alternativamente, también puede implementar la multiplicación de Montgomery .

Como ya se ha señalado anteriormente: si n es compuesto y el algoritmo devuelve n como factor, tienes que repetir el procedimiento con diferentes parámetros x_0 y c. ej., la elección $x_0 = c = 1$ no factorizará $25 = 5 \cdot 5$. El algoritmo simplemente regresará 25. Sin embargo la elección $x_0 = 1, c = 2$ lo factorizará.

3.7. Algoritmo de Brent

Brent usa un algoritmo similar al de Floyd. También utiliza dos punteros. Pero en lugar de avanzar los punteros en uno y dos respetablemente, los avanzamos en potencias de dos. Tan pronto como 2^i es mayor que λ y μ , encontraremos el ciclo.

La implementación directa utilizando los algoritmos de Brent se puede acelerar al notar que podemos omitir los términos $x_l - x_k$ si $k < \frac{3 \cdot l}{2}$. Además, en lugar de realizar la $\gcd$ cálculo en cada paso, multiplicamos los términos y lo hacemos cada pocos pasos y retrocedemos si nos sobrepasamos.

La combinación de una división de prueba para números primos pequeños junto con la versión de Brent del algoritmo rho de Pollard creará un algoritmo de factorización muy poderoso.

4. Implementación

4.1. C++

```
vector<long long> trialDivision(long long n) {
   vector<long long> factorization;
   for (long long d = 2; d * d <= n; d++) {
      while (n % d == 0) {
         factorization.push_back(d);
         n /= d;
      }
   }
```

```
    if (n > 1)
        factorization.push_back(n);
    return factorization;
}
```

```
vector<long long> wheelFactorization(long long n) {
    vector<long long> factorization;
    for (int d : {2, 3, 5}) {
        while (n % d == 0) {
            factorization.push_back(d);
            n /= d;
        }
    }
    static array<int, 8> increments = {4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6};
    int i = 0;
    for (long long d = 7; d * d <= n; d += increments[i++]) {
        while (n % d == 0) {
            factorization.push_back(d);
            n /= d;
        }
        if (i == 8)
            i = 0;
    }
    if (n > 1)
        factorization.push_back(n);
    return factorization;
}
```

En las dos implementaciones siguientes es evidente que se necesita precalcular todos los primos al menos hasta N y tenerlos almacenados en el vector *primos*

```
//definir una tupla para almacenar a^b
//(a base)=>.first  (b expo)=>.second
typedef pair<int,int>fac;
vector<fac> Factorizar(int n){
    int l = primos.size();
    //iterar sobre todos los primos
    //hasta que algun primo sea mayor que n
    vector<fac>FP;
    for(int i=0;i<l && primos[i]<=n ;i++){
        int pi = primos[i];
        int exp = 0;
        if(n%pi==0){
            while(n%pi==0){
                exp++;//contador para el exponente
                n/=pi;//divido entre la base
            }
            // pi^exp
```

```
            // {a,b}  es lo mismo que make_pair(a,b) o Pair(a,b)
            FP.push_back({pi,exp});
        }
    }
    // si n es distinto n es un primo
    if(n>1){
            FP.push_back({n,1});
    }
    return FP;
}
```

```
vector<fac> FactorizarFactorial(int n){
   int l = primos.size();
   vector<fac>FP;
   //iterar sobre todos los primos menores e iguales que n
   for(int i=0;i<l && primos[i]<=n;i++){
      //acumulador para la potencia del primo actual
      int exp = 0;
      //potencia del primo actual
      int pot = primos[i];
      //mientras la potencia sea menor que n
      while(pot<=n){
         //multiplos de la potencia menores que n
         exp+=n/pot;
         //proxima potencia del primo
         pot*=primos[i];
      }
      FP.push_back({primos[i],exp});
  }
  return FP;
}
```

```
int fermat(int n) {
   int a = ceil(sqrt(n)); int b2 = a*a - n;
   int b = round(sqrt(b2));
   while (b * b != b2) {
      a = a + 1; b2 = a*a - n;
      b = round(sqrt(b2));
   }
   return a - b;
}
```

En la siguiente implementación comenzamos con $B = 10$ y aumentar B después de cada iteración.

```
long long pollards_p_minus_1(long long n) {
   int B = 10; long long g = 1;
```

```
    while (B <= 1000000 && g < n) {
        long long a = 2 + rand() % (n - 3);
        g = gcd(a, n);
        if (g > 1) return g;
        // compute a^M
        for (int p : primes) {
            if (p >= B) continue;
            long long p_power = 1;
            while (p_power * p <= B)
                p_power *= p;
            a = power(a, p_power, n);
            g = gcd(a - 1, n);
            if (g > 1 && g < n) return g;
        }
        B *= 2;
    }
    return 1;
}


long long mult(long long a, long long b, long long mod) {
    long long result = 0;
    while (b) {
        if (b & 1) result = (result + a) % mod;
        a = (a + a) % mod;
        b >>= 1;
    }
    return result;
}

long long mult(long long a, long long b, long long mod) {
    return (__int128)a * b % mod;
}

long long f(long long x, long long c, long long mod) {
    return (mult(x, x, mod) + c) % mod;
}

long long rho(long long n, long long x0=2, long long c=1) {
    long long x = x0; long long y = x0;
    long long g = 1;
    while (g == 1) {
        x = f(x, c, n); y = f(y, c, n); y = f(y, c, n);
        g = gcd(abs(x - y), n);
    }
    return g;
}


long long brent(long long n, long long x0=2, long long c=1) {
```

```
   long long x = x0; long long g = 1;
   long long q = 1; long long xs, y;
   int m = 128; int l = 1;
   while (g == 1) {
      y = x;
      for (int i = 1; i < l; i++)
         x = f(x, c, n);
      int k = 0;
      while (k < l && g == 1) {
         xs = x;
         for (int i = 0; i < m && i < l - k; i++) {
            x = f(x, c, n); q = mult(q, abs(y - x), n);
         }
         g = gcd(q, n); k += m;
      }
      l *= 2;
   }
   if (g == n) {
      do {
         xs = f(xs, c, n); g = gcd(abs(xs - y), n);
      } while (g == 1);
   }
   return g;
}
```

4.2. Java

```
private class Tuple{
   private int prime, int exponent;

   public Tuple(int _p,int _e) {
      this.prime =_p; this.exponent = _e;
   }
}

public Queue<Tuple> factorize(int n) {
   Queue<Tuple> factors = new ArrayDeque<Tuple>();
   Tuple p;
   for (int d = 2; d * d <= n; d++) {
      int power=0;
      while (n % d == 0) {
         n /= d; power++;
      }
      if(power!=0) {
         factors.add(new Tuple(d,power));
      }
   }
   if (n > 1) {
```

```
            factors.add(new Tuple(n,1));
        }
        return factors;
    }
```

5. Complejidad

Tenga en cuenta que si el número que desea factorizar es en realidad un número primo, la mayoría de los algoritmos, especialmente el algoritmo de factorización de Fermat, el p-1 de Pollard, el algoritmo rho de Pollard se ejecutarán muy lentamente. Por lo tanto, tiene sentido realizar una prueba de primalidad probabilística (o determinista rápida) antes de intentar factorizar el número.

El método de factorización de Fermat puede ser muy rápido, si la diferencia entre los dos factores p y q es pequeño. El algoritmo se ejecuta en $O(|p-q|)$ tiempo. Sin embargo, dado que es muy lento, una vez que los factores están muy separados, rara vez se usa en la práctica.

El método de Pollard's *p-1* es un algoritmo probabilístico. Puede suceder que el algoritmo no encuentre un factor. la complejidad es $O(B \log B \log^2 n)$ por iteración.

El algoritmo de búsqueda de ciclos de Floyd se ejecuta (normalmente) en $O(\sqrt[4]{n}\log(n))$ tiempo.

El algoritmo de Brent también se ejecuta en tiempo lineal, pero suele ser más rápido que el algoritmo de Floyd, ya que utiliza menos evaluaciones de la función f.

6. Aplicaciones

Con la factorización de un número *N* en números primos es posible hallar la cantidad de divisores de *N* y la suma de estos. Veamos:

Si descomponemos N en $b_1^{a_1}$*$b_2^{a_2}$*$b_3^{a_3}$* ... * $b_m^{a_m}$

La cantidad de divisores de *N* sería :

(a_1+1)*(a_2+1)*(a_3+1)* ... * (a_m+1)

Por ejemplo 12=2^2*3^1 , (2+1)*(1+1)= 6 el 12 tiene 6 divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

La suma de los divisores de N es igual a:

$$suma = \frac{\frac{{b_1}^{a_1+1}-1}{b_1-1} * {b_2}^{a_2+1}-1}{b_2-1} * {b_3}^{a_3+1} - 1}{b_3-1} * \ldots \frac{{b_m}^{a_m+1}-1}{b_m-1}$$

Para el caso de 12:

$$suma = \frac{\frac{2^{2+1}-1}{2-1} * 3^{1+1} - 1}{3-1} = \frac{\frac{2^3-1}{1} * 3^2 - 1}{2} = \frac{\frac{8-1}{1} * 9 - 1}{2} = 4 * 7 = 28$$

Comprobación los divisores de 12 son 1+2+3+4+6+12 = 28.

7. Ejercicios propuestos

A continuación una lista de ejercicios que la base de su solución es saber descomponer en factores primos un número.

- DMOJ - Neuronas en Acción
- DMOJ - Firmas Primas