Софийски университет "Св. Климент Охридски" Факултет по математика и информатика

Катедра "Числени методи и алгоритми"

Имплементация на МКЕ за решаване на уравненията на Навие–Стокс за графични процесори

Разширено резюме на дипломна работа
Магистърска програма "Изчислителна математика и математическо моделиране"

Дипломант: Васил Д. Пашов, ФН 25938
Научен ръководител: гл. ас. д-р Тихомир Б. Иванов

Ноември, 2021

Абстракт

В днешно време графичните процесори (GPU) са способни да извършват задачи с общо предназначение. Използването на графични процесори намира широко приложение за целите на криптовалутите, изкуствения интелект и т.н. Целта на тази дипломна работа е да се построи метод, базиран на МКЕ, за решаване на уравненията на Navier-Stokes. Методът е насочен за целите на компютърната графика, но може да бъде използван и в други областти.

Разглеждат се три различни подхода и се сравняват техните предимства и недостатъци спрямо поставените в дипломната работа цели – добра производителност и възможност за ефективна имплементация за графични процесори. Проведени са числени експерименти, базирани на класическата моделна задача – 2D DFG Benchmark. Алгоритъмът, който най-добре изпълнява поставените цели, разделя оператора по времето на три части, всяка от които е имплементирана по метод така, че да се възползва се от графичния процесор.

Съдържание

Глава 1

Въведение

През последните 20 години графичните процесори (GPU) изминаха дълъг път от фиксирана програмна рамка, използвана само за целите на компютърната графика, до това да станат напълно способни да изпълняват задачи с общо предназначение. Тази еволюция направи възможно използването на изчислителната мощност на графичните процесори в области, различни от компютърната графика, като изкуствен интелект, криптовалути, флуидна динамика и т.н.

Въпреки че графичните процесори имат повече ядра от централния процесор (CPU), сравнението между двете, базирано само на броя на ядрата, не е подходящо поради огромната разлика в хардуерната архитектура. Не всеки алгоритъм може да бъде ефективно реализиран за изпълнение върху GPU. Отново поради разликата в архитектурата, даден алгоритъм няма да се възползва напълно от изчислителната мощност на графичния процесор просто чрез пренаписването му в специфичен за графичния процесор език. При изчислителния модел на GPU, нишките, които изпълняват конкретна задача, изпълняват (едновременно) една и съща инструкция, но върху различен набор от данни. Това прави графичния процесор идеален за проблеми, които имат висока аритметична интензивност с ниски зависимости между данните.

1.1 GPU реализация за МКЕ

Можем да разбием компютърната имплементация на МКЕ на три подзадачи. Първо, областта трябва да бъде дискретизирана. Това е задачата,

в която графичният процесор е най-малко полезен поради естеството на проблема. Задачата е частично разгледана в [6]. Второ, поелементните изчисления и асемблирането на глобалните матрици са разгледани в [4]. Като се има предвид, че поелементните изчисления са независими едно от друго, можем да получим значително забързване чрез GPU реализация, но това е така, само ако матриците не се съхраняват в разреден формат. Повечето от разредените матрични формати създават зависимости между данните, което прави по-трудна задачата за паралелно асемблиране на глобалните матрици. Трето, в резултат от прилагането на МКЕ получаваме една или повече линейни (или нелинейни) системи, които трябва да бъдат решени. В общия случай решаването им е най-времеемката стъпка. За големи системи линейни уравнения се предпочитат итеративни методи, като най-често се използват методът на спрегнатия градиент (и негови прозиводни) и GMRES. Решаването на линейни системи е разгледано в [1], [8], [11].

1.2 Цели и структура на дипломната работа

Основните цели на дипломната работа са:

- Построяване на метод, базиран на МКЕ, за решаване на уравненията на Navier-Stokes за несвиваеми Нютонови флуиди. Методът е предназначен за целите на комютърната графика, но може да бъде използван и в други области. За целите на компютърната графика поставяме следните изисквания:
  - Бързодействие на метода;
  - Възможност за ефективна паралелизация на множество (CPU) ядра;
  - Възможност за ефективна GPU имплементация, т.е. методът трябва да има висока артиметична итензивност, но слаби зависимости между данните;
  - Възможност за работа с произволна по големина стъпка по времето, без от нея да зависи дискретизацията на областта. Това често се налага в компютърната графика, тъй като видео клиповете най-често имат 24, 30 или 60 кадъра в секунда, а останалите кадри се игнорират;

- Провеждане на числени експерименти с цел установяване ефективността на избрания метод. Експериментите са базирани на класическата моделна задача – 2D DFG Benchmark;
- Да се коментират плюсовете и минусите на GPU имплементацията;
- Да се дадат предложения за бъдещо развитие на алогоритъма.

Дипломната работа е структурирана, както следва. Гл. 2 представя диференциалната постановка на задачата и сравнява три различни подхода за решаването ѝ. Два от методите използват разделяне на диференциалния оператор по времето, а третият подход е директен. Представени са още формат за съхраняване на разредени матрици, методът на спрегнатия градиент и метод за преобуславяне. Гл. 3 представя детайли относно паралелната (CPU) имплементация, както и GPU имплементацията на един от алгоритмите, представени в Гл. 2. Представени са резултати за това как производителността на избраните алгоритми се скалира с добавяне на (логически CPU) ядра, направено е сравнение между CPU и GPU имплементациите.

1.3 Компютърен код

Компютърната имплементация на алгоритъма, описан в тази дипломна работа, може да бъде намерен в GitHub.

- За целите на работата беше разработена библиотека за работа с разредени матрици, имплементирана в C++. В нея са включени класове за работа с разредени матрици в CSR формат както и паралелни имплементации на метода на спрегнатия градиент (както и някои негови вариации). Библиотеката може да бъде намерена на следната страница: `https://github.com/vasil-pashov/sparse_matrix_math`
- Кодът, имплементиращ метода на крайните елементи, може да бъде намерен на следната страница: `https://github.com/vasil-pashov/Navier_Stokes_FEM`

Глава 2

МКЕ за уравненията на Navier-Stokes

2.1 Уравнения на Navier-Stokes

Нека формулираме уравненията, както са представени в [9].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \nabla p(\mathbf{x},t) - \nu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \\ \nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

където:

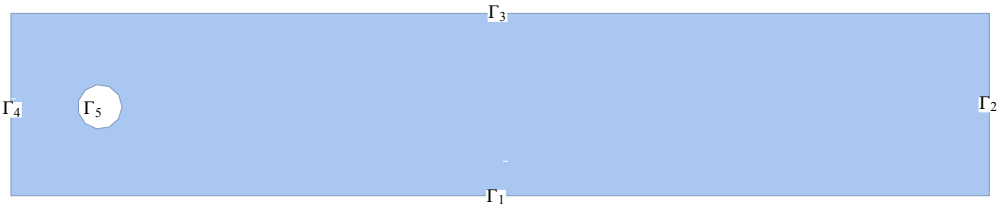
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ е скоростта;
- $p \in \mathbb{R}$ е налягането;
- ν е вискозитет;
- $\mathbf{f}$ е съвкупност от обемни сили, напр. гравитация.

2.2 Моделна задача

Разглеждаме постановката 2D DFG Benchmark [14]. Задачата разглежда поток в канал с препятствие. Каналът е правоъгълник с дължина 2.2 и височина 0.41. Препятствието е окръжност с център $(0.2, 0.2)$ и диаметър 0.1 (вж. Фиг. 2.1). Граничните условия са, както следва:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} = 0, && (\mathbf{x}, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5) \times J \\
&\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Gamma_4}, && (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_4 \times J \\
&\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p\mathbf{n} = 0, && (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_2 \times J
\end{aligned}
$$

където за ламинарен поток $\mathbf{u}_{\Gamma_4} = \left(\frac{1.2y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$, а за турбулентен $\mathbf{u}_{\Gamma_4} = \left(\frac{6y(0.41-y)}{0.41^2}, 0\right)$,



Фигура 2.1: Геометрия на моделната задача 2D DFG Benchmark

2.3 Метод на крайните елементи

2.3.1 Директен подход

Един възможен подход за числено решаване на уравненията на Navier-Stokes е да разгледаме слабата формулировка на (2.1) и да приложим МКЕ върху нея. Според [12] при този подход са подходящи само неявни схеми за дискретизация по времето. Основният недостатък на този подход е, че на всяка стъпка по времето трябва да бъде решена една нелинейна система. За дискретизацията по времето е използван метод на Кранк-Никълсън. Представяме финалната постановка на метода (вж. (2.2)), която е подробно изведена в дипломната работа. Да се намерят $\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{2N_v} \mathbf{\Phi}_i q_i \in U_h \subset U : \{\mathbf{v} \in H^1 : \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0\}$ и $p_h = \sum_{i=1}^{N_p} \chi_i p_i \in Q_h \subset L^2$, където N_v е броят на възлите за скоростта, които не лежат върху $\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5$, а N_p е броят на възлите за налягането,

$\{\mathbf{\Phi}_i\}_{i=1}^{2N_v} = \left\{ \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \phi_{N_v} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_{N_v} \end{bmatrix} \right\}$ са базисните функции за пространството U_h, а $\{\chi_i\}_{i=1}^{N_p}$ са базисните функции за пространството Q_h.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\left(\nu\mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{i+1})\right) & 0 & -\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_1^T \\ 0 & \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\left(\nu\mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{i+1})\right) & -\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_1 & -\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{i+1} \\ \mathbf{Q}_2^{i+1} \\ \mathbf{P}^{i+1} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2}\left(\nu\mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{i})\right) & 0 & \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_1^T \\ 0 & \mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2}\left(\nu\mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{i})\right) & \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_2^T \\ \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_1 & \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{i} \\ \mathbf{Q}_2^{i} \\ \mathbf{P}^{i} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Където $\mathbf{M}$ е матрицата на масата

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_2, \phi_1) & \cdots & (\phi_{N_v}, \phi_1) \\ (\phi_1, \phi_2) & (\phi_2, \phi_2) & \cdots & (\phi_{N_v}, \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\phi_1, \phi_{N_v}) & (\phi_2, \phi_{N_v}) & \cdots & (\phi_{N_v}, \phi_{N_v}) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}$ е конвективната матрица

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}_h) = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_1, \phi_1) & (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_2, \phi_1) & \cdots & (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_{N_v}, \phi_1) \\ (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_1, \phi_2) & (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_2, \phi_2) & \cdots & (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_{N_v}, \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_1, \phi_{N_v}) & (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_2, \phi_{N_v}) & \cdots & (\mathbf{u}_h \cdot \nabla\phi_{N_v}, \phi_{N_v}) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$ е матрица на коравина

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1) & (\nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_1) & \cdots & (\nabla\phi_{N_v} \cdot \nabla\phi_1) \\ (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2) & (\nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_2) & \cdots & (\nabla\phi_{N_v} \cdot \nabla\phi_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_{N_v}) & (\nabla\phi_2 \cdot \nabla\phi_{N_v}) & \cdots & (\nabla\phi_{N_v} \cdot \nabla\phi_{N_v}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}, \chi_1\right) & \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}, \chi_1\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\phi_{N_v}}{\partial x_1}, \chi_1\right) \\ \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}, \chi_2\right) & \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}, \chi_2\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\phi_{N_v}}{\partial x_1}, \chi_2\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}, \chi_{N_p}\right) & \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}, \chi_{N_p}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\phi_{N_v}}{\partial x_1}, \chi_{N_p}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \chi_1\right) & \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}, \chi_1\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \phi_{N_v}}{\partial x_2}, \chi_1\right) \\ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \chi_2\right) & \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}, \chi_2\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \phi_{N_v}}{\partial x_2}, \chi_2\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \chi_{N_p}\right) & \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}, \chi_{N_p}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \phi_{N_v}}{\partial x_2}, \chi_{N_p}\right) \end{bmatrix}$$

2.3.2 Разделяне на диференциалния оператор по времето

Както беше споменато, според [12], за директния подход са приложими само неявни схеми за дискретизация по времето. Такива схеми обаче изискват решаване на нелинейни системи, както и асемблиране на матрицата $C(\mathbf{u}_h)$ на всяка стъпка по времето. Това прави методите бавни и неудобни за паралелна имплементация. Друг възможен подход е операторът по времето да бъде разделен. Двете разделяния, които ще представим, са описани в [3] и [5]. За дискретизацията по времето е използвана явна схема. И двата подхода изискват да бъде решено уравнение на Поасон относно налягането. Това налага полиномиалното пространство на елементите относно налягането да бъде поне от първи ред.

2.3.2.1 Разделяне на Chorin

При това разделяне диференцианият оператор по времето се разделя на две части. Една част, отговаряща за адвекцията и дифузията, и една част, отговаряща за налягането. МКЕ има следния вид (за подробно извеждане вж. дипломната работа).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^{i+\frac{1}{2}}} \\ \mathbf{Q_2^{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^i} \\ \mathbf{Q_2^i} \end{bmatrix} - \Delta t \begin{bmatrix} \nu\mathbf{K} + \mathbf{C(u_h)} & 0 \\ 0 & \nu\mathbf{K} + \mathbf{C(u_h)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^i} \\ \mathbf{Q_2^i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_p P}^i = -\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^{i+\frac{1}{2}}} \\ \mathbf{Q_2^{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^{i+1}} \\ \mathbf{Q_2^{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^{i+\frac{1}{2}}} \\ \mathbf{Q_2^{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} - \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{B_{p,1}} \\ \mathbf{B_{p,2}} \end{bmatrix} \mathbf{P}^i \tag{2.3}$$

$$\mathbf{K_p} = \begin{bmatrix} (\nabla\chi_1, \nabla\chi_1) & (\nabla\chi_2, \nabla\chi_1) & \cdots & (\nabla\chi_{Np}, \nabla\chi_1) \\ (\nabla\chi_1, \nabla\chi_2) & (\nabla\chi_2, \nabla\chi_2) & \cdots & (\nabla\chi_{Np}, \nabla\chi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\nabla\chi_1, \nabla\chi_{Np}) & (\nabla\chi_2, \nabla\chi_{Np}) & \cdots & (\nabla\chi_{Np}, \nabla\chi_{Np}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B_{p,1}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}, \phi_1\right) & \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_1}, \phi_1\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\chi_{N_p}}{\partial x_1}, \phi_1\right) \\ \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}, \phi_2\right) & \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_1}, \phi_2\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\chi_{N_p}}{\partial x_1}, \phi_2\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}, \phi_{N_v}\right) & \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_1}, \phi_{N_v}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\chi_{N_v}}{\partial x_1}, \phi_{N_v}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B_{p,2}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_2}, \phi_1\right) & \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}, \phi_1\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\chi_{N_p}}{\partial x_2}, \phi_1\right) \\ \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_2}, \phi_2\right) & \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}, \phi_2\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\chi_{N_p}}{\partial x_2}, \phi_2\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_2}, \phi_{N_v}\right) & \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}, \phi_{N_v}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial\chi_{N_v}}{\partial x_2}, \phi_{N_v}\right) \end{bmatrix}$$

2.3.3 Разделяне на адвекцията и дифузията

Разделянето на Chroin може да бъде комбинирано с явни схеми за диференциране по времето, но има няколко недостатъка. От една страна, комбинацията от дифизуя и адвекция в едно уравнение обвързва стъпката по времето и размера на елементите. При работа с фиксиран брой кадри (фиксирана стъпка) в секунда, за да имаме устойчивост, трябва или да използваме по-фина мрежа, или да намалим стъпката по времето и да използваме само някои кадри, което е загуба на изчислителен ресурс и време. Един възможен подход е да използваме неявна схема за апроксимиране на дифузията и адвекцията. Това отново би наложило решаване на нелинейна система, както и асемблиране на матрицата $C(\mathbf{u}_h)$ на всяка стъпка по времето. Полунеявна схема би могла да бъде решение на този проблем, ние обаче ще разделим уравнението за дифузия-адвекция още веднъж. Ползите от това са две: първо, за адвекцията съществува устойчив (независимо от големината на стъпката по времето) алгоритъм [7], който е изключително удобен за паралелна имплементация, както на CPU, така и на GPU. Второ, за дифузията можем да приложим неяв-

на схема, без да се налага решаване на нелинейна система. МКЕ има следния вид (вж. (2.4)-(2.7), където (2.4) е полу-Лагранжевият метод).

$$\mathbf{Q^A} = advect(KDTree, \mathbf{Q^i}, \Delta t) \tag{2.4}$$

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} + \nu \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^B} \\ \mathbf{Q_2^B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^A} \\ \mathbf{Q_2^A} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{K_p P}^i = -\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^B} \\ \mathbf{Q_2^B} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

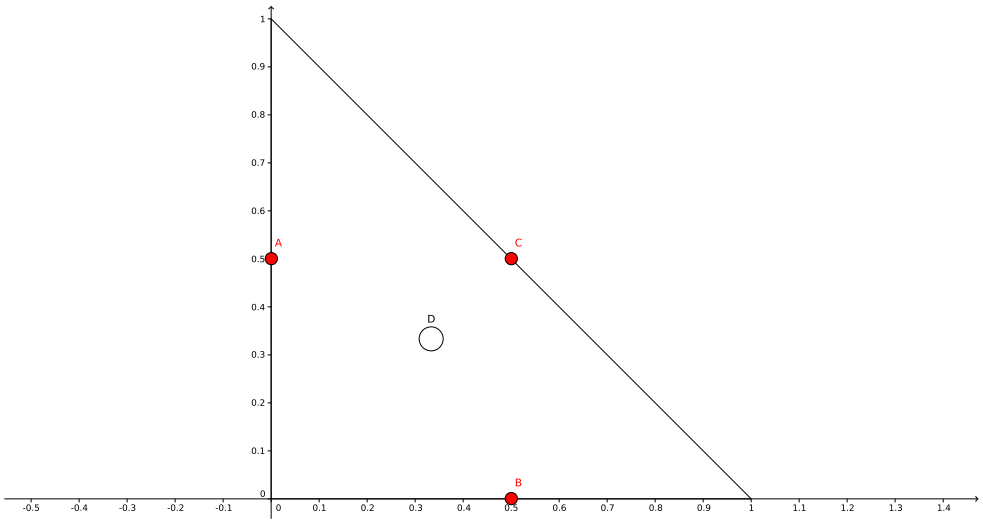
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^{i+1}} \\ \mathbf{Q_2^{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1^B} \\ \mathbf{Q_2^B} \end{bmatrix} - \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{B_{p,1}} \\ \mathbf{B_{p,2}} \end{bmatrix} \mathbf{P}^i \tag{2.7}$$

2.3.3.1 Полу-Лагранжев метод за пресмятане на адвекция

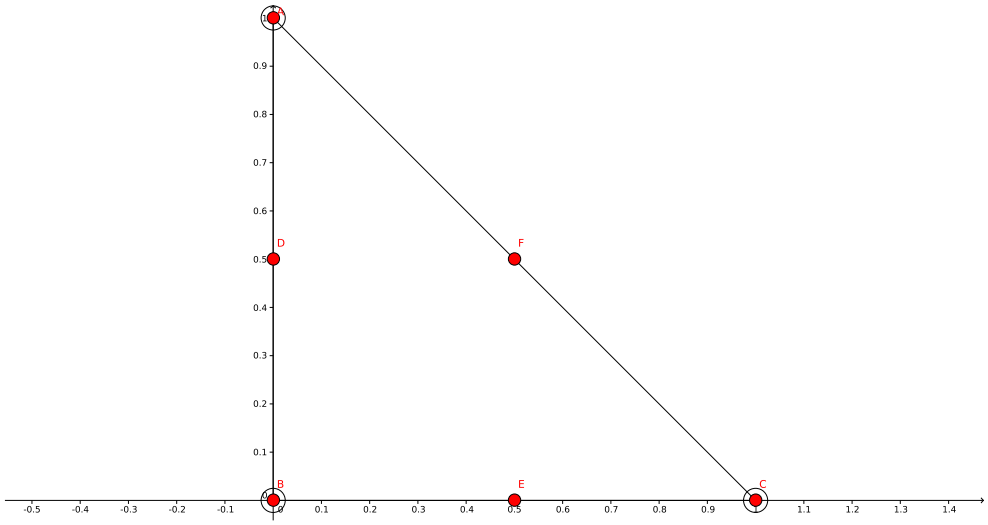
Полу-Лагранжевият метод се базира на факта, че решаването на $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u = 0$ е тривиално, ако разгледаме задачата в Лагранжева постановка. Нека си представим, че можем да проследим всяка една частица от флуида. Тогава, за да намерим скоростта на флуида в дадена точка, трябва само да намерим коя частица се намира в нея и да вземем нейната скорост. Работата директно с частици обаче има своите недостатъци [3]. За да се справим с тях, ще използваме комбинация между Ойлерова и Лагранжева постановка на задачата. За да намерим скоростта в точка $\mathbf{x_e}$ в момент от време $t + \Delta t$ е нужно да намерим частицата с позиция $\mathbf{x_s}$ (в момент t), която ще се премести в точка $\mathbf{x_e}$ в момент $t + \Delta t$. За тази цел ще линеализираме задачата, като разглеждаме полето на скоростите в точката $\mathbf{x_e}$ в момент от време t и се придвижваме със стъпка Δt "назад" в полето на скоростта. Това ни дава приблизителната позиция $\mathbf{x_s}$ на частицата, която би се озовала в точка $\mathbf{x_e}$ след период от време Δt. Тази позиция $\mathbf{x_s}$ обаче най-вероятно няма да бъде възел от триангулацията, по тази причина трябва да интерполираме между стойностите на възлите в елемента. Очевидно е, че пресмятането на една скорост не зависи от другите скорости, които се пресмятат в момента. Това прави алгоритъма изключително подходящ за паралелна имплементация както на CPU, така и на GPU.

2.3.4 Избор на крайни елементи

За уравнение (2.2) използваме неконформния елемент на Crouzeix-Raviart (вж. Фиг. 2.2). Предимствата му са, че поддържа нулева дивергенция и че е евтин от изчислителна гледна точка. Използването на този елемент би генерирало по-малка система, в сравнение с елемент, чиито полиномиални пространства за скоростта и налягането са от по-висок ред. За подходите, използващи разделяне на оператора по времето, използваме елемент на Taylor-Hood (вж. Фиг. 2.3). Според [12] това е "най-простият елемент от втори ред" и "първоначален фаворит".



Фигура 2.2: Неконформен елемент на Crouzeix-Raviart. Трите степени на свобода за скоростта са отбелязани със запълнен кръг, степента на свобода за налягането е отбелязана с окръжност.



Фигура 2.3: Елемент на Taylor-Hood от втори ред. Шестте степени на свобода за скоростта са отбелязани със запълнен кръг, трите степени на свобода за налягането са отбелязани с окръжност.

2.4 CSR формат за съхранение на разредени матрици

Нека бележим броя на ненулеви елементи в дадена матрица с nnz, а броя на редовете – с m. За представянето ѝ в CSR формат са нужни три масива: NZ с размер nnz, в който са записани ненулевите елементи на матрицата, Pos с размер nnz, в който е записан индексът на стълба на всеки един елемент от NZ и $Start$ с размер $m + 1$, в който е записан индексът в NZ (и Pos) където започва i-тият ред, последният елемент има стойност nnz. Изискване е редовете да са подредени във възходящ ред в паметта. Следва илюстрация (вж. Фиг. 2.5) на формата, приложен за матрицата от Фиг. 2.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Фигура 2.4: Примерна разредена матрица

NZ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pos	0	3	2	3	2	4	0	2	3
Start	0	2	4	6	6	9			

Фигура 2.5: Матрицата от Фиг. 2.4 в CSR формат. Индексацията на масивите започва от 0.

2.5 Метод на спрегнатия градиент

Всички ленейни алгебрични системи, участващи в получената по МКЕ дискретна задача имат симетрични и положително определени матрици. Един от най-популярните методи за решаване на такива системи е методът на спрегнатия градиент. Подробна информация за него може да се намери в [13]. Тук ще приложим псевдокод за алгоритъма (вж. Алг. 1)

Алгоритъм 1 Метод на спрегнатия градиент за решаване на $Ax = b$ с начално приближение x_0

procedure CG(A, b, x_0)
  $r_0 \leftarrow b - Ax_0$
  $p_0 \leftarrow r_0$
  for $j \leftarrow 0, 1, \ldots$ until convergence **do**
    $\alpha_j \leftarrow \frac{(r_j, r_j)}{(Ap_j, p_j)}$
    $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$
    $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$
    $\beta_j \leftarrow \frac{(r_{j+1}, r_{j+1})}{(r_j, r_j)}$
    $p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_j p_j$
  return x_{j+1}

2.6 Непълна факторизация по Холецки с нулево запълване (IC0)

Разглеждаме линейната система $Ax = b$. Често използвана техника при итеративните методи е преобуславянето. Целта е да бъде подобрено числото на обусловеност на матрицата. За тази цел двете страни на системата се умножават с матрица $P^{-1} \approx A^{-1}$. Добре е след преобуславяне, матрицата да запазва най-важните си свойства (да продължава да бъде симетрична и/или положително определена). В общия случай, дори и A и P^{-1} да бъдат разредени матрици, тяхното произведение няма да бъде разредена матрица. По тази причина е желателно да не умножаваме матрицата A по преобуславящата матрица. Представяме един възможен алгоритъм (вж. Алг. 2), при който не се налага такова умножение. За повече информация вж. [13].

Алгоритъм 2 Преобусловен метод на спрегнатия градиент за решаване на $Ax = b$ с начално приближение x_0

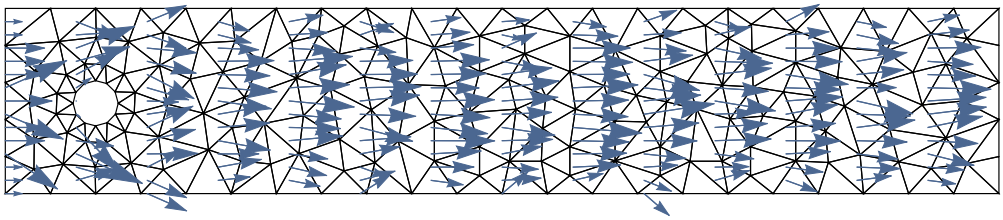
procedure PCG($A, M^{-1}b, x_0$)
  $r_0 \leftarrow b - Ax_0$
  $z_0 \leftarrow M^{-1}r_0$
  $p_0 \leftarrow z_0$
  for $j \leftarrow 0, 1, \ldots$ until convergence **do**
    $\alpha_j \leftarrow \frac{(r_j, z_j)}{(Ap_j, p_j)}$
    $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$
    $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$
    $z_{j+1} \leftarrow M^{-1} r_{j+1}$
    $\beta_j \leftarrow \frac{(r_{j+1}, z_{j+1})}{(r_j, z_j)}$
    $p_{j+1} \leftarrow z_{j+1} + \beta_j p_j$
  return x_{j+1}

При симетрични и положително определени матрици е логично да използваме факторизация на Холецки $A = LL^T$ за преобуславяне. В общия случай, дори A да бъде разредена матрица, матрицата L не е разредена. По тази причина търсим матрица $\tilde{L} \approx L$, такава че $\tilde{L}\tilde{L^T} \approx A$. Ще поискаме $\tilde{L}$ да има ненулеви елементи само там където долнотриъгълната част от A има ненулеви елементи. Тези ненулеви елементи ще бъдат

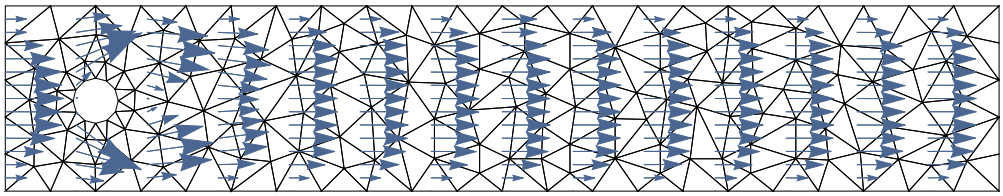
стойностите, получени по стандартния метод на Холецки.

2.7 Числен експеримент

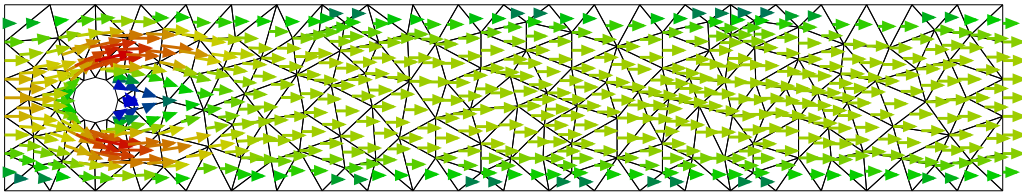
Ще представим графика на решението на задачата за ламинарен поток след 100 стъпки по времето, с големина на стъпката $\Delta t = 0.01$, получено чрез решаване на (2.2). Ще го сравним с решенията, получени чрез (2.3) и (2.4)-(2.7). От графиките се вижда, че уравнения (2.3) и (2.4)-(2.7) имат сходни резултати, докато директният подход, използващ елементи на Crouzeix-Raviart, дава по-лоши резултати, особено около границата. Трябва да отбележим, че сравненито не е напълно честно, тъй като елементът на Crouzeix-Raviart е от по-нисък ред. Повишаването на реда би генерирало по-голяма система, чието решаване би отнело повече време, по тази причина този подход беше отхвърлен на ранен етап.



Фигура 2.6: Решение за ламинарен поток чрез (2.2) след 100 стъпки по времето, с размер на стъпката $\Delta t = 0.01$



Фигура 2.7: Решение за ламинарен поток чрез (2.3) след 100 стъпки по времето, с размер на стъпката $\Delta t = 0.01$



Фигура 2.8: Решение за ламинарен поток чрез (2.4)-(2.7) след 100 стъпки по времето, с размер на стъпката $\Delta t = 0.01$

Глава 3

Паралелна имплементация

В тази секция ще представим техниките, използвани за многонишкова CPU и GPU имплементация на МКЕ. Ще представим графики, които показват как алгоритмите скалират с увеличаване на броя на (логическите) CPU ядра и как се представят при изпълнение на GPU. Тестовете са извършени върху две машини със следните характеристики: Компютър 1: CPU - Intel(R) Core(TM) i7-3632QM CPU @ 2.20GHz (4 ядра, 8 нишки (логически ядра)), 2 плочки 4GB SODIMM DDR3 Synchronous 800 MHz RAM and Компютър 2: CPU - Intel(R) Core(TM) i7-9700 CPU @ 3.00GHz (8 ядра, 8 нишки (логически ядра)), 4 плочки 16GB DDR4 1333 MHz RAM, GPU - NVidia A5000.

За целта е използвана триангулация със следните размери (вж. Фиг. 3.1).

Брой елементи	305854
Брой възли за скоростта	613458
Брой възли за налягането	153802

Фигура 3.1: Размер на триангулацията, използвана в числените експерименти.

Първо, представяме резултатите от еднонишковата имплементация на алгоритъма. Тя ще послужи за основа при последващи сравнения.

	Компютър 1						
	Step 1	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо време
Средно време	79.75s	138.33s	505.50s	44.47s	688.30s	20.80s	794.82s
Стандартно отклонение	0.64s	3.83s	3.62s	1.30s	8.76s	0.38s	10.01s
Медиана	80.20s	141.05s	508.06s	45.39s	694.50s	21.07s	801.89s
Мин.	79.30s	135.62s	502.94s	43.55s	682.11s	20.54s	787.74s
Макс.	80.20s	141.05s	508.06s	45.39s	694.50s	21.07s	801.89s

Таблица 3.1: Статистика за еднонишково решаване на (2.4)-(2.7) на Компютър 1 за ламинарен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$

	Компютър 2						
	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо време
Средно време	60.32s	101.12s	398.50s	30.31s	529.93s	11.82s	605.48s
Стандартно отклонение	0.15s	0.57s	1.85s	0.05s	2.14s	0.04s	2.27s
Медиана	60.31s	100.96s	398.29s	30.33s	529.86s	11.84s	605.45s
Мин.	60.03s	100.56s	395.98s	30.19s	526.75s	11.76s	602.09s
Макс	60.54s	102.54s	402.81s	30.37s	534.01s	11.87s	609.62s

Таблица 3.2: Статистика за еднонишково решаване на (2.4)-(2.7) на Компютър 2 за ламинарен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$.

	Компютър 1						
	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо време
Средно време	80.35s	196.81s	597.43s	55.31s	849.54s	20.45s	956.29s
Стандартно отклонение	0.83s	5.57s	3.18s	0.77s	9.52s	0.08s	10.45s
Медиана	80.94s	200.74s	599.68s	55.86s	856.28s	20.51s	963.68s
Мин.	79.76s	192.87s	595.18s	54.76s	842.81s	20.40s	948.90s
Макс.	80.94s	200.74s	599.68s	55.86s	856.28s	20.51s	963.68s

Таблица 3.3: Статистика за еднонишково решаване на (2.4)-(2.7) на Компютър 1 за турбулентен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$

	Компютър 2						
	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо Време
Средно Време	61.22s	143.49s	541.06s	37.69s	722.23s	11.90s	798.78s
Стандартно Отклонение	0.31s	0.77s	3.23s	0.17s	3.97s	0.12s	4.25s
Медиана	61.35s	143.62s	542.91s	37.73s	724.74s	11.89s	801.48s
Мин.	60.74s	142.42s	535.43s	37.39s	716.07s	11.75s	792.43s
Макс.	61.71s	144.89s	544.70s	38.03s	727.36s	12.17s	804.32s

Таблица 3.4: Статистика за еднонишково решаване на (2.4)-(2.7) на Компютър 2 за турбулентен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$.

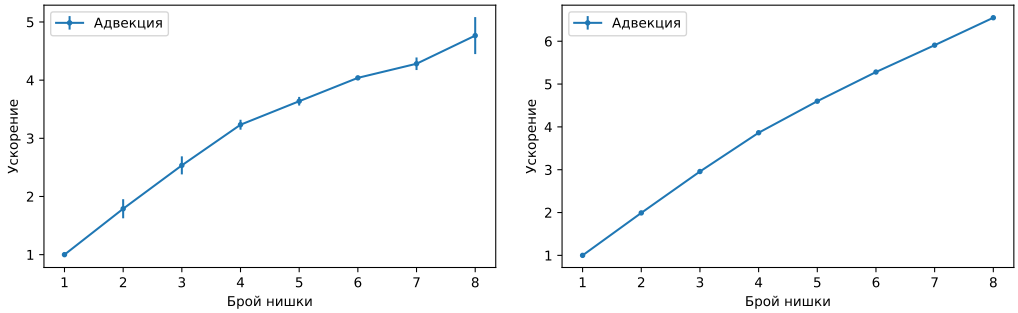
3.1 Асемблиране на глобалните матрици

В постановката, която разглеждаме, геометрията и матриците не се изменят във времето. По тази причина е достатъчно да асемблираме матриците веднъж. За целта всяка матрица се асемблира на отделна нишка, паралелно с останалите. Тъй като има 5 матрици са нужни 5 нишки. Времето за асемблиране е приблизително равно на времето за асемблиране на най-времеемката матрица.

3.2 Многонишкова имплементация на адвекцията

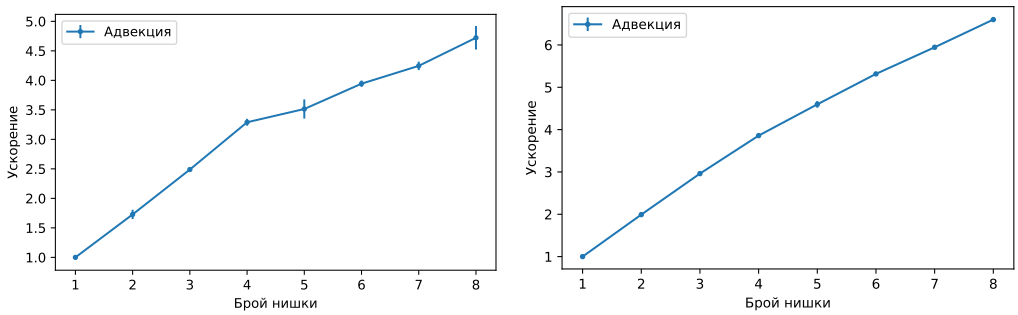
Тъй като пресмятането на скоростта в момент $t + \Delta t$ не зависи от скоростта в другите възли в момент $t + \Delta t$, паралелната имплементация е тривиална (както за CPU, така и за GPU). Разделяме възлите от триангулацията на n равни части, където n е броят на (логическите) ядра, с които разполагаме. Всяко ядро пресмята скоростта на всички възли в съответното множество от възли. В частност, ако искаме да пресметнем m стойности и разполагаме с m ядра, всяко от тях може да пресметне една стойност независимо от останалите.

Основните заявки, които трябва да можем да изпълняваме при имплементация на полу-Лагранжевия метод са: намиране на елемент, съдържащ конкретна точка, и намиране на възел от триангулацията, който се намира най-близо до дадена точка в пространството. Двете операции могат да бъдат имплементирани ефективно с помощта на KD дърво, което е подробно разгледано в дипломната работа. KD дърветата намират широко разпространение в компютърната графика при ray-tracing алгоритмите [10]. С малка модификация на алгоритъма за пресичане на лъч можем да получим ефективна имплементация на заявката за намиране на елемент съдържащ дадена точка. Намирането на точка от дадено множество точки, която е най-близко до друга точка в пространството, е класическа задача в сферата на изкуствения интелект, представена в [2]. Изключително важно за големи триангулации е да получим балансирано дърво.



(а) Компютър 1 (б) Компютър 2

Фигура 3.2: Скалиране на производителността на полу-Лагранжевия метод за ламинарен поток. Вертикалните линии са с големина 2 пъти стандартното отклонение.



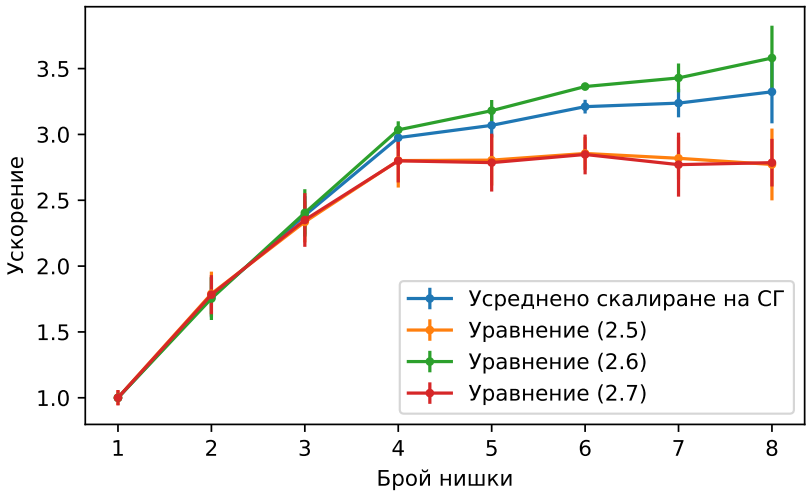
(а) Комоютър 1 (б) Компютър 2

Фигура 3.3: Скалиране на производителността на полу-Лагранжевия метод за турбулентен поток. Вертикалните линии са с големина 2 пъти стандартното отклонение.

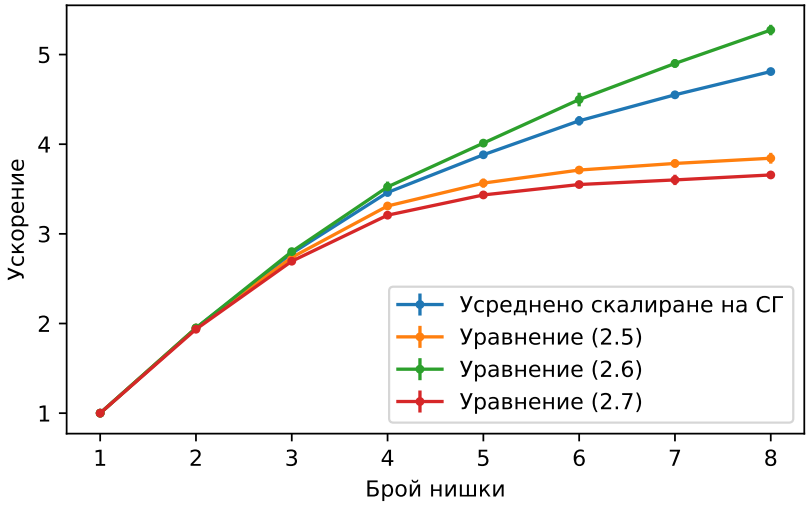
3.3 Метод на спрегнатия градиент

За разлика от полу-Лагранжевия метод, методът на спрегнатия градиент не може да бъде директно имплементиран в многонишкова среда, без използването на сихронизационни примитиви. Причината за това са двете скаларни произведения в него. Те играят ролята на “бариера”, т.е. всички нишки трябва да спрат и да изчакат пресмятането на скаларното произведение да завърши преди да продължат със следващата

стъпка. Въпреки това, отделните стъпки на алгоритъма могат да бъдат имплементирани в паралелна среда (повече подробности за това са представени в дипломната работа). Представяме графики, показващи как се скалира производителността на метода с увеличаване на броя на (логическите) ядра.

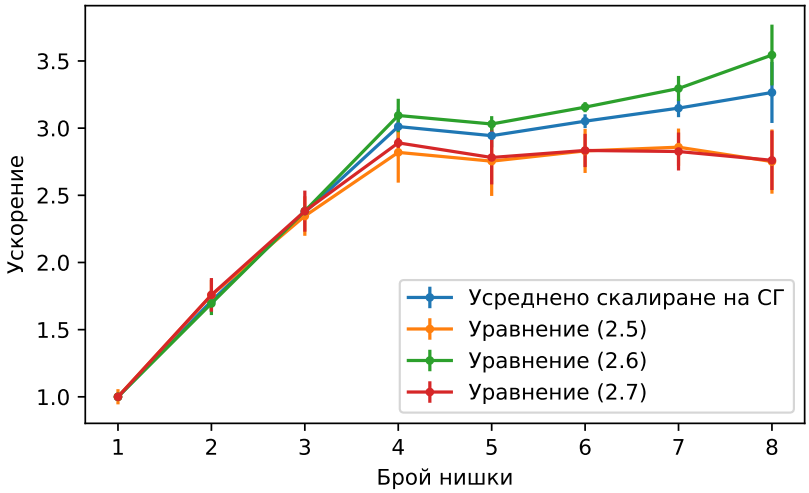


(а) Компютър 1

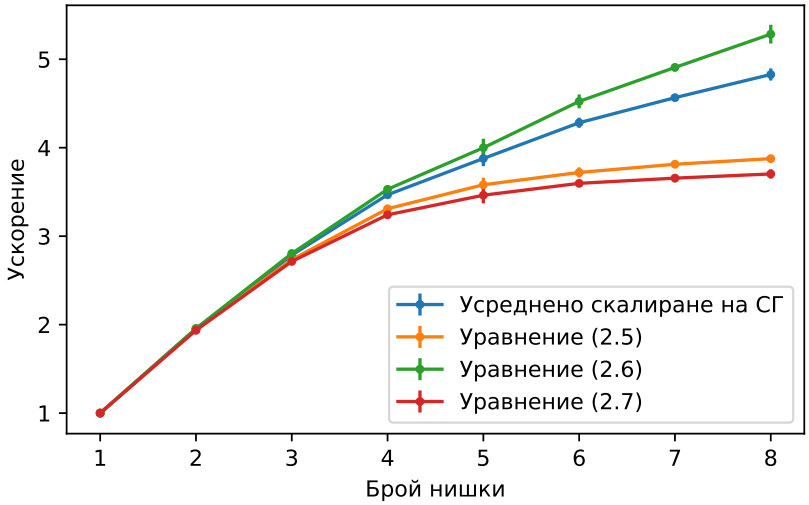


(б) Компютър 2

Фигура 3.4: Скалиране на метода на спрегнатия градиент за ламинарен поток. Вертикалните линии са с големина 2 пъти стандартното отклонение.



(а) Компютър 1



(б) Компютър 2

Фигура 3.5: Скалиране на метода на спрегнатия градиент за турбулентен поток. Вертикалните линии са с големина 2 пъти стандартното отклонение.

От графиките можем да видим че производителността се скалира позле при добавяне на (логически) ядра, в сравнение с полу-Лагранжевия метод. Причината е, че отделните стъпки от алгоритъма са твърде прости, и не могат да "заситят" процесора. За да се скалира задачата, трябва матрицата, участваща в метода, да бъде голяма, както и методът да има нужда от голям брой итерации.

3.3.1 Преобуславяне

Имайки предвид, че по-голямата част от времето за решаване на задачата се прекарва в метода на спрегнатия градиент, преобуславяне чрез IC0 е имплементирано с цел да се подобри производителността. Паралелното изчисляване и паралелното прилагане на преобусловителя са трудни задачаи, които ще бъдат обект на следващо проучване. По тази причина те са имплементирани на една нишка. Представяме резултати от изпълнението

Задача	Брой итерации (2.5)	Брой итерации (2.6)	Брой итерации (2.7)
Ламинарен поток	10370	195422	2763
Турбулентен поток	14820	264394	3504
Ламинарен поток (IC0)	1855	72353	495
Турбулентен поток (IC0)	2693	85047	693

Таблица 3.5: Общ брой итерации за всяка една система.

	Средно време	Медиана	SD	Мин. време	Макс. време
Пресмятане на IC0 за Матрица на коравината на налягането	15.66	15.67	0.02	15.64	15.68
Пресмятане IC0 за Матрица на маста за скоростта	390.33	389.98	1.32	389.22	391.79
Пресмятане IC0 за Дифузионна матрица	380.68	379.17	4.98	376.62	386.23

Таблица 3.6: Времето нужно за пресмятане на всяка една преобуславяща матрица на Компютър 2

	Средно Време	Медиана	Стандартно Отклонение	Минимално Време	Максимално Време
(2.5)	54.76	54.76	0.00	74.75	54.76
(2.6)	393.30	393.50	0.29	393.09	393.50
(2.7)	22.01	22.03	0.03	21.99	22.03

Таблица 3.7: Време за решаване на (2.5)-(2.7) с преобуславяне на една нишка на Компютър 2.

От резултатите можем да видим, че, въпреки че броят на итерациите е сериозно намален, времето за изпълнение е не е много по-добро (дори сравнено с еднонишковата имплементация без преобуславяне). Резултатите обаче показват потенциал за подобрения на цялостното бързодействие, ако преобуславянето бъде ефективно разпаралелено.

3.4 GPU имплементация

3.4.1 Кратко въведение в програмия модел

Тук ще опишем графичните процесори, произвеждани от NVidia. На практика, обаче, архитектурата на графичните процесори не варира драстично при различните производители. Централните процесори (CPU) са изключително сложни. Те имат малко на брой ядра, в сравнение с графичните процесори. За да подобрят скоростта си, централните процесори имат много различни системи (служещи за branch prediction, prefetching, cache, out-of-order execution, pipelining и т.н.). От друга страна, ядрата на графичните процесори са изключително прости, но за сметка на това са много на брой. В един графичен процесор има няколко на брой Streaming Multiprocessor-a (SM). Всеки от тях е отговорен за извличане на данни и операции от паметта на графичния процесор, както и за разпределяне на работата между нишките. Всяка инструкция се изпълнява *едновременно* от 32 нишки (warp) върху различни данни. Ако се стигне до условен оператор, при който част от нишките трябва да изпълнят един клон, а другите друг, двата клона се изпълняват, като в зависимост от това кой клон се изпълнява, част от нишките са неактивни. На всеки процесорен цикъл SM избира warp от активни нишки (такива, които не чакат да пристигнат данни от паметта или някоя операция да завърши) и изпълнява една или повече операции с него.

3.4.2 Асемблиране на глобалните матрици

Както беше споменато, при разредените матрични формати се създават зависимостти между данните, поради което тези алгоритми не пасват добре на GPU програмния модел. GPU имплементацията на асемблирането е оставена за бъдещо проучване. За нашите цели ще асемблираме матриците на CPU, с алгоритъма, който представихме.

3.4.3 Адвекция

За имплементацията на полу-Лагранжевия метод може да бъде използван същият подход като при CPU имплементацията. В този случай всяка GPU нишка отговаря за пресмятането на скоростта в един възел от триангулацията. От изключителна важност при имплементацията на KD

дървото за GPU е обхождането му да не бъде имплементирано чрез рекурсия, а чрез стек и цикъл, симулиращи рекурсия.

3.4.4 Метод на спрегнатия градиент

Както вече беше споменато, двете скаларни произведения действат като бариери, което пречи за директна паралелна имплементация. Разглеждаме два подхода: при първия (multi kernel) всяка стъпка от алгоритъма е имплементирана като отделна GPU функция (kernel). При втория подход (mega kernel), целият алгоритъм се изпълнява на GPU, но се налага използването на глобална синхронизационна примитива. По-старите графични процесори и езици за програмиране не разполагат с вградени такива примитиви.

3.4.5 Резултати

	GPU Multi Kernel подход						
	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо време
Средно време	0.56s	14.67s	65.96s	4.71s	85.34s	4.02s	91.16s
Стандартно отклонение	0.01s	0.07s	0.34s	0.02s	0.35s	0.02s	0.36s
Медиана	0.56s	14.69s	66.00s	4.71s	85.35s	4.02s	91.19s
Мин.	0.53s	14.56s	65.33s	4.69s	84.81s	3.99s	90.62s
Макс.	0.57s	14.75s	66.47s	4.74s	85.87s	4.03s	91.69s

Таблица 3.8: Време за решаване на (2.4)-(2.7), чрез графичен процесор, за ламинарен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$. Използван е multi kernel подходът.

	GPU Multi Kernel подход						
	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо време
Средно време	0.84s	20.69s	78.12s	5.70s	104.50s	4.03s	110.63s
Стандартно отклонение	0.01s	0.04s	0.25s	0.01s	0.25s	0.02s	0.23s
Медиана	0.85s	20.71s	78.12s	5.70s	104.56s	4.02s	110.66s
Мин.	0.83s	20.61s	77.75s	5.69s	104.15s	4.01s	110.33s
Макс.	0.86s	20.73s	78.55s	5.72s	104.99s	4.07s	111.11s

Таблица 3.9: Време за решаване на (2.4)-(2.7), чрез графичен процесор, за турбулентен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$. Използван е multi kernel подходът.

	GPU Mega Kernel подход						
	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо време
Средно време	0.54s	2.98s	8.19s	1.26s	12.44s	4.02s	18.24s
Стандартно отклонение	0.01s	0.07s	0.09s	0.01s	0.06s	0.02s	0.06s
Медиана	0.54s	2.96s	8.20s	1.26s	12.43s	4.02s	18.22s
Мин.	0.53s	2.95s	7.95s	1.25s	12.36s	3.99s	18.13s
Макс.	0.55s	3.18s	8.29s	1.28s	12.54s	4.05s	18.32s

Таблица 3.10: Време за решаване на (2.4)-(2.7), чрез графичен процесор, за ламинарен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$. Използван е mega kernel подходът.

	GPU Mega Kernel подход						
	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо време
Средно време	0.84s	4.01s	9.72s	1.45s	15.18s	4.00s	21.26s
Стандартно отклонение	0.00s	0.01s	0.04s	0.00s	0.04s	0.01s	0.05s
Медиана	0.84s	4.01s	9.70s	1.45s	15.17s	4.00s	21.27s
Мин.	0.83s	3.99s	9.67s	1.44s	15.12s	3.98s	21.20s
Макс.	0.84s	4.02s	9.79s	1.46s	15.24s	4.02s	21.32s

Таблица 3.11: Време за решаване на (2.4)-(2.7), чрез графичен процесор, за турбулентен поток със стъпка $\Delta t = 0.01$. Използван е mega kernel подходът.

От резултатите можем да се убедим, че вторият метод (mega kernel) е по-ефективен.

3.5 Сравнение

От резултатите се вижда, че графичният процесор има по-добра производителност. Това в никакъв случай не означава, че ерата на централните процесори е преминала. Трудно е да се сравняват толкова различни по същество хардуерни устройства, тъй като няма еднозначни критерии, по-които това да се направи. Графичният процесор, използван за числените експерименти, е висок клас, докато централните процесори са по-скоро в средния (към нисък) клас централни процесори. Графичните процесори обикновено разполагат с по-малко памет от централните процесори и няма опция за добавяне на допълнително количество памет. Има нужда от повече тестове на различни постановки с различни по големина области. Това, което можем да заключим от този експеримент, е, че има перспектива в имплементацията на МКЕ за графични процесори. Както се вижда, те се справят добре, когато има множество независими прости изчисления. Има обаче множество отворени въпроси:

- Колко добре биха се справили графичните процесори с дискретизацията на областта?

- Колко добре биха се справили графичните процесори с асемблирането на глобални матрици?
- Колко добре биха се справили графичните процесори с изчислението на преобуславяща матрица?
- Колко добре биха се справили графичните процесори с прилагането на преобуславяща матрица?
- Колко добре биха се справили графичните процесори с построяването на KD дървета?

Най-вероятно графичните процесори няма да могат да се справят добре с някои от тези задачи и част от тях ще трябва да се имплементират за CPU.

Заключение

В дипломната работа бяха изложени 3 подхода за решаване на уравненията на Navier-Stokes. Един от тях беше най-подходящ за нашите цели (добра производителност и възможност за ефективна паралелна реализация) и беше имплементиран, както за CPU, така и за GPU. Избраният алгоритъм разделя диференциалния оператор по времето на три части: адвекция, дифузия и уравнение на Поасон относно налягането. Полу-Лагранжевият метод беше приложен за решаване на адвекцията и беше показано, че дава добри резултати както на CPU, така и на GPU. Дифузията и уравнението за налягането се свеждат до решаване на линейна система с положително определена матрица. Методът на спрегнатия градиент беше използван за решаването на тези системи. За GPU имплементацията бяха разработени два подхода: multi kernel и mega kernel и беше показано, че mega kernel подходът е значително по-бърз. Въпреки че реализацията на този подход е лесна, не ни е известно в литературата той да е разглеждан и да са правени сравнения с multi kernel подхода. Метод с преобуславяне с непълна факторизация на Холецки беше имплементиран. Въпреки че преобуславянето намалява значително броя на итерации при метода на спрегнатия градиент, то не подобрява значително времето за изпълнение, тъй като самото прилагане на преобуславящата матрица, увеличава времето нужно за една итерация на метода. Като резултат в дипломната работа е показано, че използването на GPU за решаване на уравненията на Navier–Stokes би имало своите приложения, като са очертани и посоки за бъдещо развитие в тази посока.

Библиография

[1] Jeff Bolz, Ian Farmerand Eitan Grinspun и Peter Schrőoder. “Sparse Matrix Solvers on the GPU: Conjugate Gradients and Multigrids”. в: *SIGGRAPH ’03 ACM SIGGRAPH 2003* (2003).

[2] Giuseppe Bonaccorso. *Mastering Machine Learning Algorithms Expert techniques for implementing popular machine learning algorithms, fine-tuning your models, and understanding how they work*. 2-е изд. Packt Publishing, 2020;2018. ISBN: 9781838821913; 1838821910.

[3] Robert Bridson. *Fluid Simulation for Computer Graphics*. A K Peters/CRC Press (September 18, 2008), 2016. ISBN: 1568813260.

[4] Cris Cecka, Adrian J. Lew и E. Darve. “Assembly of finite element methods on graphics processors”. в: *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING* (2010). DOI: 10.1002/nme.2989.

[5] A J Chorin. “THE NUMERICAL SOLUTION OF THE NAVIER–STOKES EQUATIONS FOR AN INCOMPRESSIBLE FLUID.” в: *Mathematics of Computation* 22 (1968), с. 745—762. URL: https://www.osti.gov/biblio/4568862.

[6] J.P. D’Amato и M. Vénere. “A CPU–GPU framework for optimizing the quality of large meshes”. в: *Journal of Parallel and Distributed Computing* 73 (2013), с. 1127—1134.

[7] Dale R. Durran. *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 1999. ISBN: 9781441931214; 144193121X; 9781475730814; 1475730810.

[8] Mike Giles István Reguly. “Efficient sparse matrix-vector multiplication on cache-based GPUs”. в: *Innovative Parallel Computing (InPar)* (2012). DOI: 10.1109/InPar.2012.6339602.

[9] Fredrik Bengzon Mats G. Larson. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications (Texts in Computational Science and Engineering, 10)*. Springer, 2013. ISBN: 3642332862.

[10] Greg Humphreys Matt Pharr Wenzel Jakob. *Physically Based Rendering. From Theory to Implementation*. 3-е изд. Morgan Kaufmann series in computer graphics and geometric modeling. Morgan Kaufmann, 2002. ISBN: 0128006455; 9780128006450; 9780080512846; 0080512844; 9780128007099; 0128007095; 9780585453767; 0585453764; 9781558607873; 1558607870.

[11] G. Ortega и др. "The BiConjugate gradient method on GPUs". в: *The Journal of Supercomputing* 64 (2013), с. 49—58. DOI: 10.1007/s11227-012-0761-2.

[12] R. L. Sani P. M. Gresho. *Incompressible Flow and the Finite Element Method*. т. 1. Wiley, 1999. ISBN: 0471967890.

[13] Yousef Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial и Applied Mathematics, 2003. ISBN: 0898715342.

[14] S. Tureka. "Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder". в: т. 48. 1996.