Имплементация на МКЕ за решаване на уравненията на Навие-Стокс за графични процесори

Семинар по математическо моделиране

Васил Пашов

15 март 2021г.

Постановка на задачата

- Какво искаме да опишем

Постановка на задачата

- Какво искаме да опишем
- Търсени величини

Уравнения на Навие-Стокс

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) - \nu\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

- $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ е скоростта

Уравнения на Навие-Стокс

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) - \nu\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

- $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ е скоростта
- $p \in \mathbb{R}$ е налягането

Уравнения на Навие-Стокс

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) - \nu\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

- $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ е скоростта
- $p \in \mathbb{R}$ е налягането
- ν е вискозитет

Уравнения на Навие-Стокс

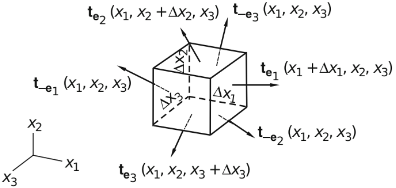
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) - \nu\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

- $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ е скоростта
- $p \in \mathbb{R}$ е налягането
- ν е вискозитет
- $\boldsymbol{f}$ е съвкупност от обемни сили, напр. гравитация

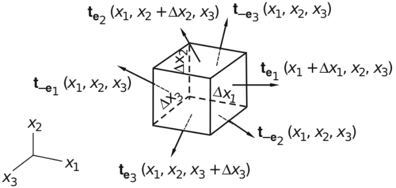
Идея за извеждане

- Разглеждаме инифинитезимален обем



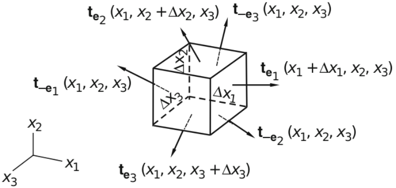
Идея за извеждане

- Разглеждаме инифинитезимален обем
  - Повърхностни сили



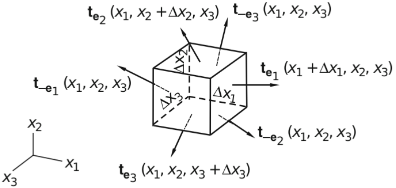
Идея за извеждане

- Разглеждаме инифинитезимален обем
  - Повърхностни сили
  - Обемни сили



Идея за извеждане

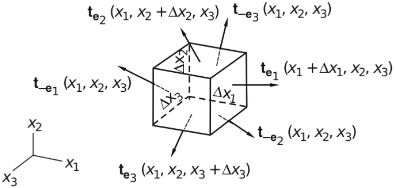
- Разглеждаме инифинитезимален обем
  - Повърхностни сили
  - Обемни сили



- Прилагаме II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$

Идея за извеждане

- Разглеждаме инифинитезимален обем
  - Повърхностни сили
  - Обемни сили



- Прилагаме II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$
- Конститутивен закон на Стокс: $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{v})^T)$

Лагранжева и Ойлерова постановка. Материална производна.

- Лагранжева постановка: проследява частици

Лагранжева и Ойлерова постановка. Материална производна.

- Лагранжева постановка: проследява частици
- Ойлерова постановка: разглежда конкретна точка

Лагранжева и Ойлерова постановка. Материална производна.

- Лагранжева постановка: проследява частици
- Ойлерова постановка: разглежда конкретна точка
- Материална производна: $\frac{Dq(\boldsymbol{x}(t),t)}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$

Дотук...

- II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$

Дотук...

- II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$
- Релация на Стокс: $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{v})^T)$

Дотук...

- II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$
- Релация на Стокс: $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{v})^T)$
- Материална производна: $\frac{D\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t),t)}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$

Дотук...

- II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$
- Релация на Стокс: $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{v})^T)$
- Материална производна: $\frac{D\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t),t)}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$
- $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{u}$

Дотук...

- II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$
- Релация на Стокс: $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{v})^T)$
- Материална производна: $\frac{D\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t),t)}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$
- $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{u}$
- Комбинация: $\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} + \nabla p(\boldsymbol{x}, t) - \nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$

Дотук...

- II-ри закон на Нютон: $\boldsymbol{f}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$
- Релация на Стокс: $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{v})^T)$
- Материална производна: $\frac{D\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t),t)}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$
- $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{u}$
- Комбинация: $\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} + \nabla p(\boldsymbol{x}, t) - \nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$
- В Декартови координати:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f_x(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = f_y(\boldsymbol{x}, t)$$

Запазване на масата

- Проследяваме инфинитезимален обем

Запазване на масата

- Проследяваме инфинитезимален обем
- Константна плъност

Запазване на масата

- Проследяваме инфинитезимален обем
- Константна плъност
- Масата не се променя

Запазване на масата

- Проследяваме инфинитезимален обем
- Константна плъност
- Масата не се променя
- Формално

$$\frac{DdV\rho}{Dt} = 0$$

$$\rho\frac{DdV}{Dt} + dV\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\dots$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

Уравнения на Навие-Стокс

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \nabla p(\boldsymbol{x}, t) - \nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

- Частица се движи защото:

Уравнения на Навие-Стокс

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \nabla p(\boldsymbol{x}, t) - \nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

- Частица се движи защото:
    - Има налягане $\nabla p(\boldsymbol{x}, t)$

Уравнения на Навие-Стокс

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \nabla p(\boldsymbol{x}, t) - \nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

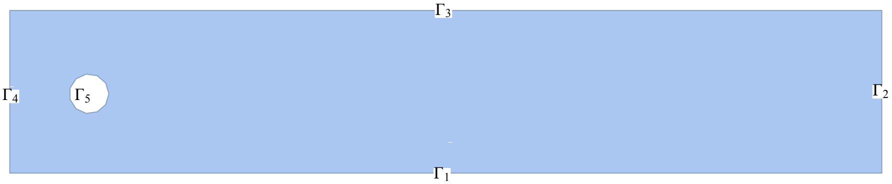
- Частица се движи защото:
  - Има налягане $\nabla p(\boldsymbol{x}, t)$
  - Съседните частици я "повличат" $\nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$

Уравнения на Навие-Стокс

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \nabla p(\boldsymbol{x}, t) - \nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

- Частица се движи защото:
  - Има налягане $\nabla p(\boldsymbol{x}, t)$
  - Съседните частици я "повличат" $\nu \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$
  - Има външни сили $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$

Моделна задача (2D DFG Benchmark)



Гранични условия:

$$\boldsymbol{u} = 0, \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5) \times J$$

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{1.2y\,(0.41 - y)}{0.41^2}, 0 \right), \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_4 \times J$$

$$\nu \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} - p\boldsymbol{n} = 0, \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_2 \times J$$

Дефинираме $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$

Директен подход – слаба формулировка

- Искаме:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \mathrm{v}\right) + (\mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{u}, \mathrm{v}) + \nu(\nabla\mathrm{u} : \nabla\mathrm{v}) = (p, \nabla\cdot\mathrm{v}), && \mathrm{v}\in V\\
&(\nabla\cdot\mathrm{u}, q) = 0, && q\in L^2\\
&\mathrm{u} = \mathrm{u}_{\Gamma_4}, && (\mathrm{x}, t)\in\Gamma_4\times J
\end{aligned}$$

Директен подход – слаба формулировка

- Искаме:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \mathrm{v}\right) + (\mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{u}, \mathrm{v}) + \nu(\nabla\mathrm{u} : \nabla\mathrm{v}) = (p, \nabla\cdot\mathrm{v}), \quad && \mathrm{v}\in V\\
&(\nabla\cdot\mathrm{u}, q) = 0, && q\in L^2\\
&\mathrm{u} = \mathrm{u}_{\Gamma_4}, && (\mathrm{x}, t)\in\Gamma_4\times J
\end{aligned}$$

- Тестови пространства:

Директен подход – слаба формулировка

- Искаме:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \mathrm{v}\right) + (\mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{u}, \mathrm{v}) + \nu(\nabla\mathrm{u} : \nabla\mathrm{v}) = (p, \nabla\cdot\mathrm{v}), \quad \mathrm{v}\in V$$

$$(\nabla\cdot\mathrm{u}, q) = 0, \qquad q \in L^2$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_{\Gamma_4}, \qquad (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_4 \times J$$

- Тестови пространства:
  - $\mathrm{v} \in V : \left\{\mathrm{v} \in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0\right\}$

Директен подход – слаба формулировка

- Искаме:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \mathrm{v}\right) + (\mathrm{u} \cdot \nabla \mathrm{u}, \mathrm{v}) + \nu(\nabla \mathrm{u} : \nabla \mathrm{v}) = (p, \nabla \cdot \mathrm{v}), \quad \mathrm{v} \in V$$

$$(\nabla \cdot \mathrm{u}, q) = 0, \qquad q \in L^2$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_{\Gamma_4}, \qquad (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_4 \times J$$

- Тестови пространства:
  - $\mathrm{v} \in V : \left\{\mathrm{v} \in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0\right\}$
  - $p \in L^2(\Omega)$

Директен подход – слаба формулировка

- Искаме:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \mathrm{v}\right) + (\mathrm{u} \cdot \nabla \mathrm{u}, \mathrm{v}) + \nu(\nabla \mathrm{u} : \nabla \mathrm{v}) = (p, \nabla \cdot \mathrm{v}), \quad \mathrm{v} \in V$$

$$(\nabla \cdot \mathrm{u}, q) = 0, \qquad q \in L^2$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_{\Gamma_4}, \qquad (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_4 \times J$$

- Тестови пространства:
  - $\mathrm{v} \in V : \left\{\mathrm{v} \in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0\right\}$
  - $p \in L^2(\Omega)$
- Търсим:

Директен подход – слаба формулировка

- Искаме:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \mathrm{v}\right) + (\mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{u}, \mathrm{v}) + \nu(\nabla\mathrm{u} : \nabla\mathrm{v}) = (p, \nabla\cdot\mathrm{v}), \quad \mathrm{v}\in V$$
$$(\nabla\cdot\mathrm{u}, q) = 0, \quad q \in L^2$$
$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_{\Gamma_4}, \quad (\mathrm{x}, t)\in \Gamma_4\times J$$

- Тестови пространства:
  - $\mathrm{v}\in V : \left\{\mathrm{v}\in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0\right\}$
  - $p \in L^2(\Omega)$
- Търсим:
  - $\mathrm{u}\in U : \left\{\mathrm{v}\in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_1\cup\Gamma_3\cup\Gamma_5} = 0\right\}$

Директен подход – слаба формулировка

- Искаме:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \mathrm{v}\right) + (\mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{u}, \mathrm{v}) + \nu(\nabla\mathrm{u} : \nabla\mathrm{v}) = (p, \nabla\cdot\mathrm{v}), \quad \mathrm{v} \in V$$

$$(\nabla\cdot\mathrm{u}, q) = 0, \qquad q \in L^2$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_{\Gamma_4}, \qquad (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_4 \times J$$

- Тестови пространства:
  - $\mathrm{v} \in V : \left\{\mathrm{v} \in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0\right\}$
  - $p \in L^2(\Omega)$
- Търсим:
  - $\mathrm{u} \in U : \left\{\mathrm{v} \in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_1\cup\Gamma_3\cup\Gamma_5} = 0\right\}$
  - $p \in L^2(\Omega)$

Директен подход – метод на крайните елементи, матрична форма

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu K - C(u_h) & 0 & B_1^T \\ 0 & -\nu K - C(u_h) & B_2^T \\ B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p \end{bmatrix}$$

- M - $N_v \times N_v$ матрица на масата за компонентите на скоростта

Директен подход – метод на крайните елементи, матрична форма

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu K - C(u_h) & 0 & B_1^T \\ 0 & -\nu K - C(u_h) & B_2^T \\ B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p \end{bmatrix}$$

- M - $N_v \times N_v$ матрица на масата за компонентите на скоростта
- K - $N_v \times N_v$ матрица на коравината за компонентите на скоростта

Директен подход – метод на крайните елементи, матрична форма

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu K - C(u_h) & 0 & B_1^T \\ 0 & -\nu K - C(u_h) & B_2^T \\ B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p \end{bmatrix}$$

- M - $N_v \times N_v$ матрица на масата за компонентите на скоростта
- K - $N_v \times N_v$ матрица на коравината за компонентите на скоростта
- $C(u)$ - $N_v \times N_v$ конвективна матрица за скоростта

Директен подход – метод на крайните елементи, матрична форма

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{q}}_1 \\ \dot{\mathrm{q}}_2 \\ \mathrm{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \mathrm{K} - \mathrm{C}(\mathrm{u}_\mathrm{h}) & 0 & \mathrm{B}_1^T \\ 0 & -\nu \mathrm{K} - \mathrm{C}(\mathrm{u}_\mathrm{h}) & \mathrm{B}_2^T \\ \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1 \\ \mathrm{q}_2 \\ \mathrm{p} \end{bmatrix}$$

- M - $N_v \times N_v$ матрица на масата за компонентите на скоростта
- K - $N_v \times N_v$ матрица на коравината за компонентите на скоростта
- $C(\mathrm{u})$ - $N_v \times N_v$ конвективна матрица за скоростта
- B_1, B_2 - $N_p \times N_v$ матрици получени от производните (частен случай на конвективни матрици)

Директен подход – метод на крайните елементи, дискретизация на времето

- Използваме метода на Crank-Nicolson:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} + \frac{\Delta t}{2}\left(\nu \mathrm{K} + \mathrm{C}(\mathrm{u}_h^{i+1})\right) & 0 & -\frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_1^T \\ 0 & \mathrm{M} + \frac{\Delta t}{2}\left(\nu \mathrm{K} + \mathrm{C}(\mathrm{u}_h^{i+1})\right) & -\frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_1 & -\frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1^{i+1} \\ \mathrm{Q}_2^{i+1} \\ \mathrm{P}^{i+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{M} - \frac{\Delta t}{2}\left(\nu \mathrm{K} + \mathrm{C}(\mathrm{u}_h^{i})\right) & 0 & \frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_1^T \\ 0 & \mathrm{M} - \frac{\Delta t}{2}\left(\nu \mathrm{K} + \mathrm{C}(\mathrm{u}_h^{i})\right) & \frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_2^T \\ \frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_1 & \frac{\Delta t}{2}\mathrm{B}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1^{i} \\ \mathrm{Q}_2^{i} \\ \mathrm{P}^{i} \end{bmatrix}$$

Директен подход – метод на крайните елементи, дискретизация на времето

- Използваме метода на Crank-Nicolson:

$$\begin{bmatrix} M + \frac{\Delta t}{2}\left(\nu K + C(u_h^{i+1})\right) & 0 & -\frac{\Delta t}{2} B_1^T \\ 0 & M + \frac{\Delta t}{2}\left(\nu K + C(u_h^{i+1})\right) & -\frac{\Delta t}{2} B_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} B_1 & -\frac{\Delta t}{2} B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ P^{i+1} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} M - \frac{\Delta t}{2}\left(\nu K + C(u_h^{i})\right) & 0 & \frac{\Delta t}{2} B_1^T \\ 0 & M - \frac{\Delta t}{2}\left(\nu K + C(u_h^{i})\right) & \frac{\Delta t}{2} B_2^T \\ \frac{\Delta t}{2} B_1 & \frac{\Delta t}{2} B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^{i} \\ Q_2^{i} \\ P^{i} \end{bmatrix}$$

- Нелинейна система!

Разделяне на Chorin - 1

- Ще разделим диференциалния оператор по времето на две части: адвекция-дифузия, налягане.

Разделяне на Chorin - 1

- Ще разделим диференциалния оператор по времето на две части: адвекция-дифузия, налягане.
- Прибавяме dummy term

Разделяне на Chorin - 1

- Ще разделим диференциалния оператор по времето на две части: адвекция-дифузия, налягане.
- Прибавяме dummy term
- Прилагаме $\nabla\cdot$ (за налягането)

Разделяне на Chorin - 2

$$
\begin{aligned}
&\frac{\boldsymbol{u}^{i+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{u}^i}{\Delta t} = \nu \Delta \boldsymbol{u}^i - \boldsymbol{u}^i \cdot \nabla \boldsymbol{u}^i, && (\mathrm{x}, t) \in \Omega \times J \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{i+\frac{1}{2}} = \Delta p^i \Delta t, && (\mathrm{x}, t) \in \Omega \times J \\
&\boldsymbol{u}^{i+1} = \boldsymbol{u}^{i+\frac{1}{2}} - \Delta t \nabla p^i, && (\mathrm{x}, t) \in \Omega \times J \\
&\boldsymbol{n} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^i = 0, && (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_2 \times J \\
&\boldsymbol{u}^i = 0, && (\mathrm{x}, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5) \times J \\
&\boldsymbol{u}^i = \boldsymbol{u}_{\Gamma_4}, && (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_4 \times J \\
&\boldsymbol{n} \cdot \nabla p^i = 0, && (\mathrm{x}, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5) \times J \\
&p^i = 0, && (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_2 \times J
\end{aligned}
$$

Разделяне на Chorin – слаба формулировка

Тестови пространства:

- $\mathrm{v} \in V : \left\{\mathrm{v} \in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0\right\}$
- $q \in Q : \left\{q \in H^1 : q|_{\Gamma_2} = 0\right\}$

Търсим:

- $\mathrm{u} \in U : \left\{\mathrm{v} \in H^1 : \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0\right\}$
- $p \in Q$

Такива че:

$$\left(\boldsymbol{u}^{i+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{v}\right) = \left(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{v}\right) - \Delta t \left[\nu \left(\nabla \boldsymbol{u}^i : \nabla \boldsymbol{v}\right) + \left(\boldsymbol{u}^i \cdot \nabla \boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{v}\right)\right], \forall \mathrm{v} \in V$$

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{i+\frac{1}{2}}, q\right) = -\Delta t \left(\nabla p^i, \nabla q\right), \forall q \in Q$$

$$\left(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{v}\right) = \left(\boldsymbol{u}^{i+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{v}\right) - \Delta t \left(\boldsymbol{v}, \nabla p^i\right) \forall \mathrm{v} \in V$$

$$\boldsymbol{u}^i = \boldsymbol{u}_{\Gamma_4}, \quad (\mathrm{x}, t) \in \Gamma_4 \times J$$

Разделяне на Chorin – метод на крайните елементи

Приложен е явен метод за дискретизация на времето.
Търсим приближени решения за скоростта и налягането:

- $\mathrm{u}_h = \sum_{i=1}^{2N_v} \Phi_i q_i \in U_h$
- $p_h = \sum_{i=1}^{N_p} \chi_i p_i \in Q_h$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i} \end{bmatrix} - \Delta t \begin{bmatrix} \nu \mathrm{K} + \mathrm{C}(\boldsymbol{u_h}) & 0 \\ 0 & \nu \mathrm{K} + \mathrm{C}(\boldsymbol{u_h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{K_p} \boldsymbol{P}^i = -\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i+1} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} - \Delta t \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{p},1} \\ \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{p},2} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^i$$

Дискретизация по времето

Основно уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \nabla p(\boldsymbol{x},t) - \nu\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

Дискретизиране по времето

$$\frac{\boldsymbol{u}^{i+1}-\boldsymbol{u}^{i}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^{i}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^{i} + \nabla p^{i} - \nu\Delta\boldsymbol{u}^{i} = 0$$

$$\frac{\boldsymbol{u}^{i+1}+\boldsymbol{u}^{A}-\boldsymbol{u}^{A}+\boldsymbol{u}^{B}-\boldsymbol{u}^{B}-\boldsymbol{u}^{i}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^{i}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^{i} + \nabla p^{i} - \nu\Delta\boldsymbol{u}^{i} = 0$$

Разделяне на оператора

$$\frac{\boldsymbol{u}^{A}-\boldsymbol{u}^{i}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^{i}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^{i} = 0$$

Адвекция

$$\frac{\boldsymbol{u}^{B}-\boldsymbol{u}^{A}}{\Delta t} = \nu\Delta\boldsymbol{u}^{B}$$

Дифузия

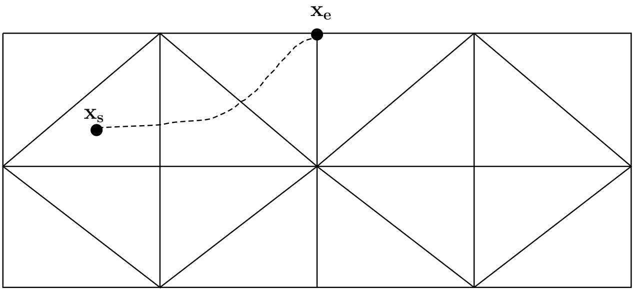
$$\frac{\boldsymbol{u}^{i+1}-\boldsymbol{u}^{B}}{\Delta t} = -\nabla p^{i}$$

Уравнение на Поасон за налягането (след прилагане на $\nabla\cdot$ върху двете страни)

Адвекция – полу-Лагранжев метод

Уравнение на адвекцията. Търсим скоростта в точка $\boldsymbol{x}_e$ в момент от време $t + \Delta t$.

$$\frac{\boldsymbol{u}^A - \boldsymbol{u}^i}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^i \cdot \nabla \boldsymbol{u}^i = 0$$



$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_e - \Delta t \mathbf{u}(\mathbf{x}_e, t)$$

Дифузия – слаба формулировка

$$
\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{u}^B - \boldsymbol{u}^A}{\Delta t} &= \nu \Delta \boldsymbol{u}^B, && (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times J \\
\boldsymbol{n} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^B &= 0, && (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_2 \times J \\
\boldsymbol{u}^B &= 0, && (\boldsymbol{x}, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5) \times J \\
\boldsymbol{u}^B &= \boldsymbol{u}_{\Gamma_4}, && (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_4 \times J
\end{aligned}
$$

Тестово пространство: $\boldsymbol{v} \in V : \left\{ \boldsymbol{v} \in H^1 : \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$
Търсим $\boldsymbol{u} \in U : \left\{ \boldsymbol{v} \in H^1 : \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0 \right\}$, такова че:

$$
\left(\frac{\boldsymbol{u}^B - \boldsymbol{u}^A}{\Delta t}, \boldsymbol{v} \right) = \left(\nu \Delta \boldsymbol{u}^B, \boldsymbol{v} \right), \forall \boldsymbol{v} \in V
$$

Дифузия – МКЕ

$$\left(\boldsymbol{u}^B, \boldsymbol{v}\right) = \left(\boldsymbol{u}^A, \boldsymbol{v}\right) - \Delta t \nu \left(\nabla \boldsymbol{u}^B : \nabla \boldsymbol{v}\right), \forall \boldsymbol{v} \in V$$

$$\left(\boldsymbol{u}^B, \boldsymbol{v}\right) + \Delta t \nu \left(\nabla \boldsymbol{u}^B : \nabla \boldsymbol{v}\right) = \left(\boldsymbol{u}^A, \boldsymbol{v}\right), \forall \boldsymbol{v} \in V$$

Търсим приближеното решение: $\boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{2N_v} \boldsymbol{\Phi}_i q_i \in U_h$

$$\left(\begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} + \nu \Delta t \begin{bmatrix} \mathrm{K} & 0 \\ 0 & \mathrm{K} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^B \\ \boldsymbol{Q}_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^A \\ \boldsymbol{Q}_2^A \end{bmatrix}$$

Налягане – слаба формулировка

Основно уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\boldsymbol{u}^{i+1}-\boldsymbol{u}^{B}}{\Delta t} = -\nabla p^{i}, && (\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times J\\
&\boldsymbol{n}\cdot\nabla p^{i} = 0, && (\boldsymbol{x},t)\in(\Gamma_1\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5)\times J\\
&p^{i} = 0, && (\boldsymbol{x},t)\in\Gamma_2\times J
\end{aligned}
$$

Използваме $\nabla\cdot\mathbf{u}^{i+1}=0$ и вземаме дивергенцията на двете страни:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{B} = \Delta p^{i}\Delta t$$

Умножаваме двете страни с функция от тестовото пространство: $q\in Q:\left\{q\in H^{1}: q|_{\Gamma_2}=0\right\}$. Решението търсим в пространството Q.

$$\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{B},q\right) = -\Delta t\left(\nabla p^{i},\nabla q\right),\forall q\in Q$$

Налягане – МКЕ

Търсим приближеното решение за налягането $p_h = \sum_{i=1}^{N_p} \chi_i p_i \in Q_h$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i+1} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{B} \\ \boldsymbol{Q}_2^{B} \end{bmatrix} - \Delta t \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{p,1} \\ \boldsymbol{B}_{p,2} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^i$$

Намиране на $\mathbf{u}^{i+1}$ – Слаба формулировка

Основно уравнение:

$$\begin{aligned}
&\frac{\boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^B}{\Delta t} = -\nabla p^i, && (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times J \\
&\boldsymbol{n} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^i = 0, && (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_2 \times J \\
&\boldsymbol{u}^i = 0, && (\boldsymbol{x}, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5) \times J \\
&\boldsymbol{u}^i = \boldsymbol{u}_{\Gamma_4}, && (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_4 \times J
\end{aligned}$$

Тестово пространство: $\boldsymbol{v} \in V : \left\{ \boldsymbol{v} \in H^1 : \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$.
Търсим $\boldsymbol{u} \in U : \left\{ \boldsymbol{v} \in H^1 : \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0 \right\}$, такова че:

$$\left(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{v}\right) = \left(\boldsymbol{u}^B, \boldsymbol{v}\right) - \Delta t \left(\boldsymbol{v}, \nabla p^i\right)$$

Намиране на $\mathbf{u}^{i+1}$ – МКЕ

Търсим приближеното решение: $\boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{2N_v} \boldsymbol{F}_i q_i \in U_h$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{i+1} \\ \boldsymbol{Q}_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^{B} \\ \boldsymbol{Q}_2^{B} \end{bmatrix} - \Delta t \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{p,1} \\ \boldsymbol{B}_{p,2} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^i$$

Време за изпълнение за ламинарен поток ($Re = 20$) – CPU

	Компютър 2 – 1 нишка						
	Адвекция	Дифузия	Намиране на налягането	Намиране на $\boldsymbol{u}^{i+1}$	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо Време
Средно време	60.32s	101.12s	398.50s	30.31s	529.93s	11.82s	605.48s

	Компютър 2 – 8 нишки						
	Адвекция	Дифузия	Намиране на налягането	Намиране на $\boldsymbol{u}^{i+1}$	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо Време
Средно Време	9.21s	26.31s	75.57s	8.29s	110.17s	3.72s	124.40s

CSR формат за разредени матрици

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Фигура: Примерна разредена матрица

NZ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pos	0	3	2	3	2	4	0	2	3
Start	0	2	4	6	6	9			

Фигура: Примерна разредена матрица в CSR формат

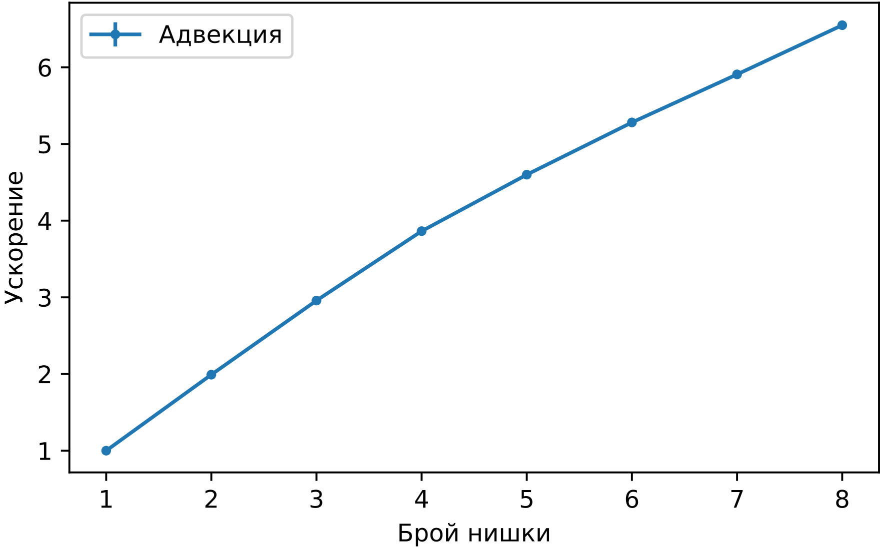
Асемблиране на глобалните матрици – CPU

- CSR формата налага зависимост между данните
- Матриците са константни
- Всяка матрица се пресмята на отделна нишка

Задачата е тривиална.

- Разделяме възлите на m групи
- Всяка нишка може независимо да намери скоростите за възлите от своята група

Адвекция – паралелна имплементация, ламинарен поток



Метод на спрегнатия градиент – CPU

- Нужни са синхронизационни примитиви
- Всяка част от една стъпка е тривиална за паралелна имплементация

Метод на спрегнатия градиент – алгоритъм

Алгоритъм 1 Метод на спрегнатия градиент за решаване на $Ax = b$ с начално приближение x_0

procedure $\mathrm{CG}(A, b, x_0)$

  $r_0 \leftarrow b - Ax_0$

  $p_0 \leftarrow r_0$

  for $j \leftarrow 0, 1, \ldots$ until convergence **do**

    $ap \leftarrow Ap_j$

    $\alpha_j \leftarrow \frac{(r_j, r_j)}{(ap, p_j)}$

    $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$

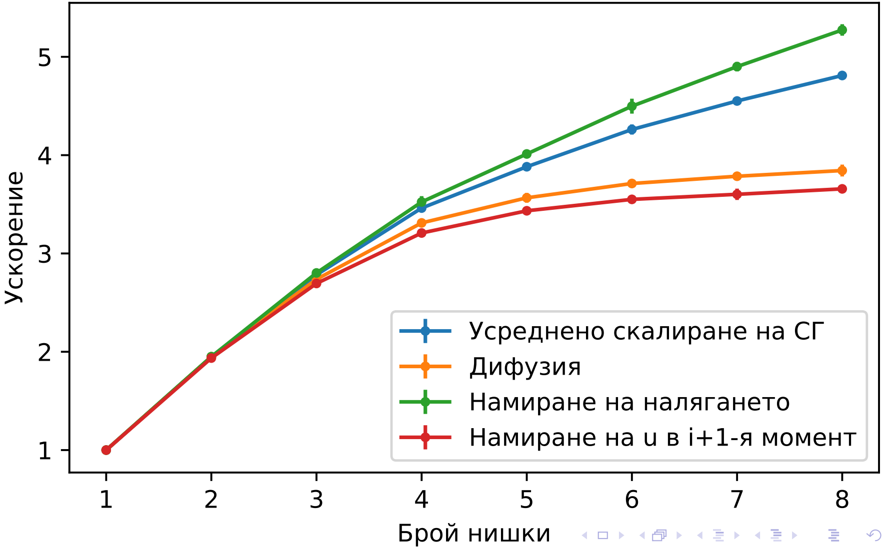
    $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j ap$

    $\beta_j \leftarrow \frac{(r_{j+1}, r_{j+1})}{(r_j, r_j)}$

    $p_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_j p_j$

  return x_{j+1}

Метод на спрегнатия градиент – паралелна имплементация, ламинарен поток ($Re = 20$)



Метод на спрегнатия градиент – преобуславяне

- Намаляваме броя итерации
- Търсим $P^{-1} \approx A^{-1}$
- Непълна факторизация на Холецки. Пресмятане, проблеми
- Произведението на две разредени матрици не е разредена матрица

Метод на спрегнатия градиент – преобуславяне, алгоритъм

Алгоритъм 2 Преобусловен метод на спрегнатия градиент за решаване на $Ax = b$ с начално приближение x_0

procedure $\mathrm{PCG}(A, M^{-1}b, x_0)$
    $r_0 \leftarrow b - Ax_0$
    $z_0 \leftarrow M^{-1} r_0$
    $p_0 \leftarrow z_0$
    for $j \leftarrow 0, 1, \ldots$ until convergence **do**
        $\alpha_j \leftarrow \frac{(r_j, z_j)}{(Ap_j, p_j)}$
        $x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j p_j$
        $r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A p_j$
        $z_{j+1} \leftarrow M^{-1} r_{j+1}$
        $\beta_j \leftarrow \frac{(r_{j+1}, z_{j+1})}{(r_j, z_j)}$
        $p_{j+1} \leftarrow z_{j+1} + \beta_j p_j$
    return x_{j+1}

Метод на спрегнатия градиент – преобуславяне, брой итерации

Задача	Брой итерации Дифузия	Брой итерации намиране на налягането	Брой итерации прилагане на налягането
Ламинарен поток ($Re = 20$)	10370	195422	2763
Ламинарен поток ($Re = 20$) с IC0	1855	72353	495

Таблица: Общ брой итерации за всяка една система.

Метод на спрегнатия градиент – преобуславяне, време за пресмятане на IC0

	Средно време	Медиана	SD	Мин. време	Макс. време
Пресмятане на IC0 за Матрица на коравината на налягането	15.66	15.67	0.02	15.64	15.68
Пресмятане IC0 за Матрица на маста за скоростта	390.33	389.98	1.32	389.22	391.79
Пресмятане IC0 за Дифузионна матрица	380.68	379.17	4.98	376.62	386.23

Можем да пресметнем само за матрицата на коравина за налягането.

Метод на спрегнатия градиент – преобуславяне, време за решаване на системите, на 1 нишка

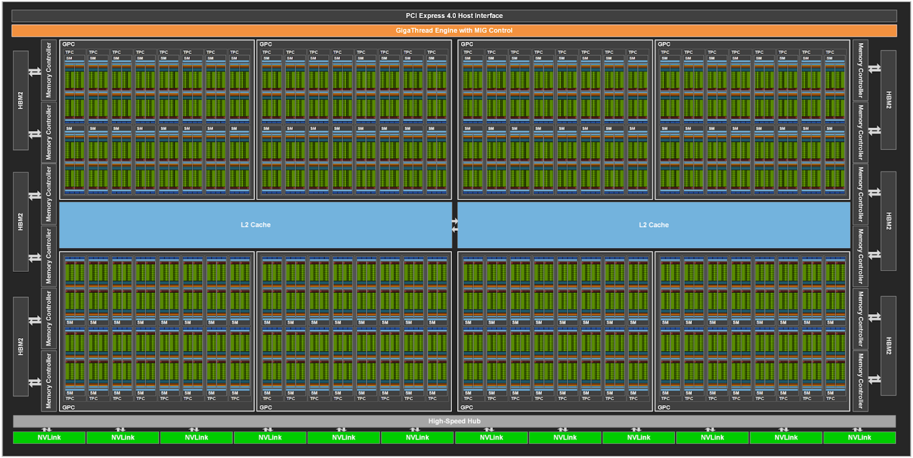
	Средно Време	Медиана	Стандартно Отклонение	Минимално Време	Максимално Време
Дифузия	101.12s	100.96s	0.57s	100.56s	102.54s
Намиране на налягането	398.50s	398.29	1.85s	395.98s	402.81s
Прилагане на налягането	30.31s	30.33s	0.05s	30.19s	30.37s
Дифузия (IC0)	54.76s	54.76s	0.00	54.76s	74.75s
Намиране на налягането (IC0)	393.30s	393.50s	0.29s	393.09s	393.50s
Прилагане на налягането (IC0)	22.01s	22.03s	0.03s	21.99s	22.03s

Таблица: Ламинарен поток, компютър 2, 1 нишка.

GPU архитектура – Streaming Multiprocessor

- 64 CUDA ядра
- Warp, active warp
- Условни оператори

GPU Цялостна архитектура



Програмен модел

- Kernel
- Grid (2D/3D)
- Thread block (до 1024 нишки).
- Препоръчително е в един grid да има повече блокове отколкото SM
- Пример – събиране на два вектора

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ & & + & \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{array}$$

GPU – Адвекция

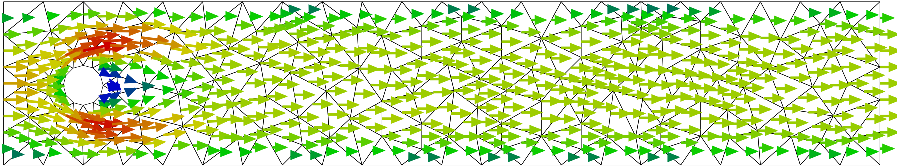
- Пасва идеално на програмния модел

Метод на спрегнатия градиент – Mega kernel подход

- Сравнение с multi kernel подход
- Целият метод е един kernel
- Изисква синхронизация

Време за изпълнение за ламинарен поток ($Re = 20$) – GPU

	GPU Mega Kernel подход						
	Адвекция	Дифузия	Намиране на налягането	Намиране на $\boldsymbol{u}^{i+1}$	СГ (Общо)	Асемблиране	Общо Време
Средно време	0.54s	2.98s	8.19s	1.26s	12.44s	4.02s	18.24s



Заключение

- Представени са 3 метода за решаване на уравненията на Navier-Stokes
- Разделянето на диференциалния оператор по времето на 3 части пасва най-добре на зададените цели
- Полу-Лагранжевият метод за адвекция е подходящ за паралелна имплементация
- Ускорението от паралелна имплементация на метода на спрегнатия градиент се усеща най-добре за големи матрици и уравнения с много итерации

Насоки за развитие

- Експерименти с други видове елементи
- Разделяне на оператора с по-голяма точност, напр. разделяне на Странг
- Апроксимация по времето с по-голяма точност, напр. методи на Рунге-Кута
- Използване на “многоетапен” полу-Лагранжев метод
- Паралелно асемблиране на глобалните матрици
- Паралелна имплементация на пресмятането и прилагането на IC0
- Разглеждане на други преобуславящи методи, напр. блочно пребуславяне на Якоби

Благодаря за вниманието!