РАЗЛОЖЕНИЕ ХОЛЕЦКОГО

In [164]:

```
from IPython.display import Latex
```

Разложение Холецкого симметричной положительно-определенной матрицы A — это разложение вида $A = LL^T$, где L — нижняя треугольная матрица с действительными и положительными диагональными элементами, а L^T обозначает сопряженную транспонированность L

Схема реализации последовательного алгоритма

1. $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
2. $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$ (при j от 2 до n).
3. $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}$ и
4. (кроме $i = n$): $l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp}\right) / l_{ii}$ (для всех j от $i+1$ до n).

После этого (если i<n) происходит переход к шагу 3 с большим i.

In [165]:

```
from math import sqrt
import numpy

def Cholesky_Decomposition(matrix):
    n = len(matrix)
    L = numpy.array([[0 for x in range(n)] for y in range(n)])
    # Разложение матрицы в нижнюю треугольную матрицу (L)
    for i in range(n):
        for j in range(i + 1):
            sum1 = 0

            # sum1 - суммировние для диагностики
            if (j == i):
                for k in range(j):
                    sum1 += pow(L[j][k], 2)
                L[j][j] = int(sqrt(matrix[j][j] - sum1))
            else:

                # Оценка L(i, j) используя L(j, j)
                for k in range(j):
                    sum1 += (L[i][k] *L[j][k])
                if(L[j][j] > 0):
                    L[i][j] = int((matrix[i][j] - sum1) / L[j][j])
    return L

A = [[81, -45, 45],
    [-45, 50, -15],
    [45, -15, 38]]
b = [531, -460, 193]

L = Cholesky_Decomposition(A)
LT = Cholesky_Decomposition(A).T
y = numpy.linalg.solve(L, b) # Ly=b
x = numpy.linalg.solve(LT, y) # L^Tx=y
```

Исходная матрица: $A = \begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}$

Разложение Холецкого: $A = LL^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Решением системы $Ly = b$ является вектор $y = \begin{pmatrix} 59 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}$

Решением системы $L^T x = y$ является вектор $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ответ: $X_1 = 6$; $X_2 = -5$; $X_3 = -4$