ARISTOTLE UNIVERSITY
OF THESSALONIKI

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξέταση Επαφών

2η Εργασία - Ειδικά Κεφάλαια Πεπερασμένων Στοιχείων

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ

LMEMD Laboratory of Machine Elements & Machine Design
Aristotle University of Thessaloniki

Υπεύθυνος: Γάκιας Χρήστος
Email: vasilepi@meng.auth.gr
AEM: 6920

9 Μαΐου 2025

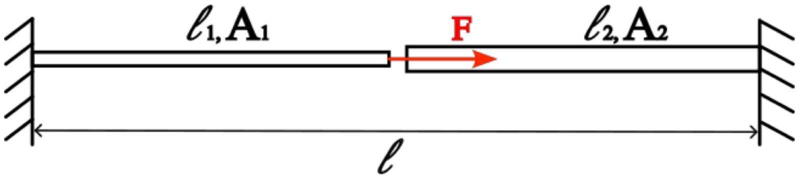
Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Παρουσίαση προβλήματος

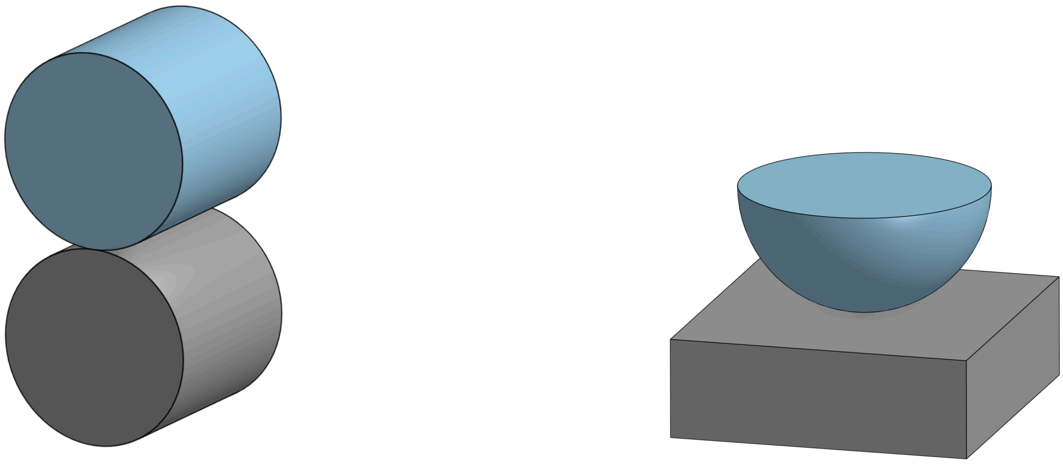
Σκοπός της παρόν εργασίας είναι η επίλυση προβλημάτων επαφών και η εξακρίβωση των αποτελεσμάτων μέσω της θεωρίας επαφών κατά Hertz και της μεθόδου της ποινής. Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος ζητείται η δημιουργία κώδικα που επιλύει απλό πρόβλημα επαφής μεταξύ δύο ράβδων. Τα άκρα των δύο ράβδων είναι πακτωμένα. Οι ράβδοι έχουν αρχικά απόσταση μεταξύ τους. Έπειτα, το ελεύθερο άκρο της μίας ράβδου μετατοπίζεται με τη βοήθεια δύναμης προς την άλλη ράβδο. Μόλις οι δύο ράβδοι βρεθούν σε επαφή επιλύεται το πρόβλημα με τη μέθοδο της ποινής. Ζητούνται τα διαγράμματα δύναμης-μετατόπισης, τα μητρώα στιβαρότητας, τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τη δύναμη επαφής.



Σχήμα 1: Πρόβλημα πρώτου μέρους.

Στο δεύτερο μέρος διερευνάται η γραμμική και η σημειακή επαφή μέσω της θεωρίας του Hertz. Ζητείται η δημιουργία δύο μοντέλων για την επίλυση των δύο προβλημάτων. Για τη γραμμική επαφή, δημιουργείται μοντέλο ΠΣ δύο κυλίνδρων σε επαφή. Η δύναμη ασκείται στον έναν κύλινδρο και αναπτύσσονται έτσι οι τάσεις επαφών. Για τη σημειακή επαφή μελετάται η περίπτωση επαφής σφαίρας με επίπεδο. Τα προβλήματα αυτά θα επιλυθούν τόσο με αδρό πλέγμα όσο και με πυκνό. Οι επιλύσεις θα συγκριθούν με τα θεωρητικά αποτελέσματα από τη θεωρία του Hertz. Τα ζητούμενα είναι η αναπτυσσόμενη πίεση και το πλάτος επαφής, οι αναπτυσσόμενες κύριες τάσεις, η σχέση δύναμης-μετατόπισης.



(α) Πρόβλημα γραμμικής επαφής. *(β) Πρόβλημα σημειακής επαφής.*

Σχήμα 2: Προβλήματα δεύτερου μέρους.

1.2 Συνοπτική θεωρία

1.2.1 Μέθοδος ποινής

1.2.2 Θεωρία Hertz

$$F_1 - F_2 - u(k_1 + k_2) = 0 \tag{1}$$
$$F_1 + F_2 = 0 \tag{2}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},\ \vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix},\ K_i = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$A \cdot \vec{F} - K_i \cdot \vec{u} = \vec{0} \tag{4}$$

$$\vec{F} - A^{-1} \cdot K_i \cdot \vec{u} = \vec{0} \tag{5}$$

$$K = A^{-1} \cdot K_i \tag{6}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} K \vec{u} \vec{u}^T - \vec{F} \vec{u}^T \tag{7}$$

$$g = \begin{bmatrix} H - (l + u) \\ H - l \end{bmatrix},\ \epsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d >> k_1 + k_2 \tag{8}$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} K \vec{u} \vec{u}^T - \vec{F} \vec{u}^T - \frac{1}{2} \epsilon \vec{g} \vec{g}^T = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \tag{10}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \tag{11}$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \tag{12}$$
$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0 \tag{13}$$

$$\vec{N} = -\epsilon \vec{g} \tag{14}$$