



ARISTOTLE UNIVERSITY  
OF THESSALONIKI

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

## Εξέταση Επαφών

*2η Εργασία - Ειδικά Κεφάλαια Πεπερασμένων Στοιχείων*

---

**ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ**

**LMEMD** Laboratory of  
Machine Elements &  
Machine Design  
Aristotle University of Thessaloniki

Υπεύθυνος: Γάκιος Χρήστος  
Email: [vasilepi@meng.auth.gr](mailto:vasilepi@meng.auth.gr)  
AEM: 6920

13 Μαΐου 2025

---

# Περιεχόμενα

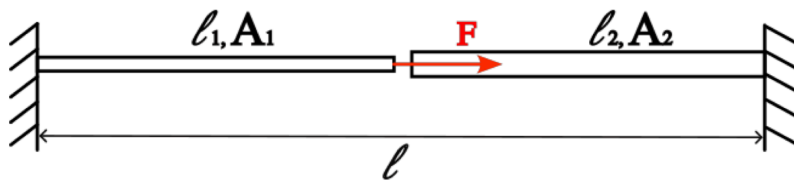
1	Εισαγωγή	1
1.1	Παρουσίαση προβλήματος	1
1.2	Συνοπτική θεωρία	2
1.2.1	Μέθοδος ποινης	2
1.2.2	Θεωρία Hertz	2
2	Μοντελοποίηση	3
2.1	Μέρος Α'	3
2.2	Μέρος Β'	4
3	Αποτελέσματα Και Συζήτηση	5

## 1 Εισαγωγή

### 1.1 Παρουσίαση προβλήματος

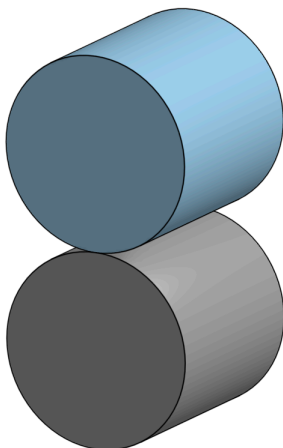
Σκοπός της παρόν εργασίας είναι η επίλυση προβλημάτων επαφών και η εξακρίβωση των αποτελεσμάτων μέσω της θεωρίας επαφών κατά Hertz και της μεθόδου της ποινης. Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος ζητείται η δημιουργία κώδικα που επιλύει απλό πρόβλημα επαφής μεταξύ δύο ράβδων. Τα άκρα των δύο ράβδων είναι πακτωμένα. Οι ράβδοι έχουν αρχικά απόσταση μεταξύ τους. Έπειτα, το ελεύθερο άκρο της μίας ράβδου μετατοπίζεται με τη βοήθεια δύναμης προς την άλλη ράβδο. Μόλις οι δύο ράβδοι βρεθούν σε επαφή επιλύεται το πρόβλημα με τη μέθοδο της ποινης. Ζητούνται τα διαγράμματα δύναμης-μετατόπισης, τα μητρώα στιβαρότητας, τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τη δύναμη επαφής.

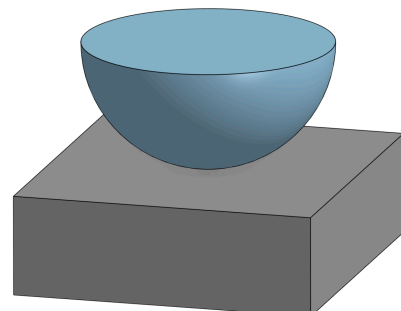


Σχήμα 1: Πρόβλημα πρώτου μέρους.

Στο δεύτερο μέρος διερευνάται η γραμμική και η σημειακή επαφή μέσω της θεωρίας του Hertz. Ζητείται η δημιουργία δύο μοντέλων για την επίλυση των δύο προβλημάτων. Για τη γραμμική επαφή, δημιουργείται μοντέλο ΠΣ δύο κυλίνδρων σε επαφή. Η δύναμη ασκείται στον έναν κύλινδρο και αναπτύσσονται έτσι οι τάσεις επαφών. Για τη σημειακή επαφή μελετάται η περίπτωση επαφής σφαίρας με επίπεδο. Τα προβλήματα αυτά θα επιλυθούν τόσο με αδρό πλέγμα όσο και με πυκνό. Οι επιλύσεις θα συγκριθούν με τα θεωρητικά αποτελέσματα από τη θεωρία του Hertz. Τα ζητούμενα είναι η αναπτυσσόμενη πίεση και το πλάτος επαφής, οι αναπτυσσόμενες κύριες τάσεις, η σχέση δύναμης-μετατόπισης.



(α) Πρόβλημα γραμμικής επαφής.



(β) Πρόβλημα σημειακής επαφής.

Σχήμα 2: Προβλήματα δεύτερου μέρους.

## 1.2 Συνοπτική θεωρία

### 1.2.1 Μέθοδος ποινής

Σύμφωνα με τη μέθοδο της ποινής, αφού τα σώματα έρθουν σε επαφή, ξεκινάει να δρα ένα ελατήριο με πολύ μεγάλη στιβαρότητα στον κόμβο της επαφής. Η σταθερά του ελατηρίου αυτού είναι  $\epsilon \gg k$ . Έτσι, εισάγεται ένα νέο δυναμικό στο ισοζύγιο ενέργειας, αυτό του ελατηρίου με στιβαρότητα  $\epsilon$ . Πλέον, το πρόβλημα προς ελαχιστοποίηση είναι το:

$$\Pi_p = \frac{1}{2}Ku^2 - Fu + \frac{1}{2}\epsilon g^2 \quad (1)$$

$$\text{s.t. } g \cdot N = 0 \quad (2)$$

$$(3)$$

Με τους πίνακες του συστήματος  $K, u, F$  να είναι:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon \end{bmatrix}, \vec{g} = l - l_1 - l_2 - \vec{u} \quad (4)$$

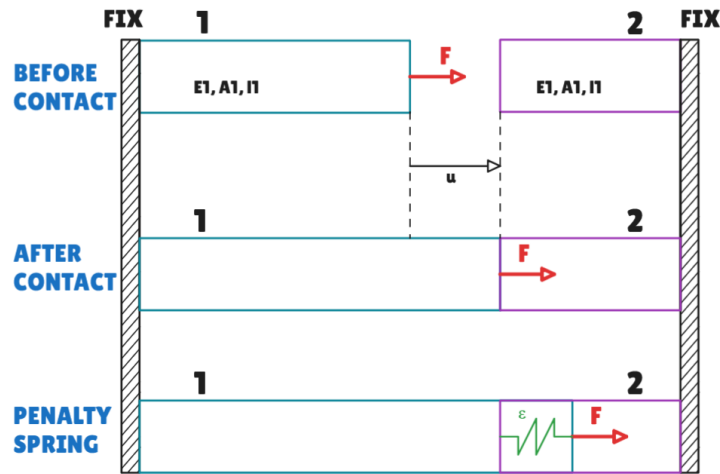
Όπου  $N$ , η δύναμη επαφής η οποία υπολογίζεται ως:

$$N = -\epsilon \cdot g \quad (5)$$

Τελικά το πρόβλημα καταλήγει στην εξίσωση:

$$K\vec{u} - \vec{F} - E\vec{g} = 0 \quad (6)$$

$$(7)$$



Σχήμα 3: Μέθοδος ποινής.

### 1.2.2 Θεωρία Hertz

Η γραμμική θεωρία του Hertz αναφέρει ότι, κατά την επαφή δημιουργείται ημιπλάτος επαφής που υπολογίζεται ως:

$$\alpha = \sqrt{\frac{4FR^*}{\pi E^* l}} \quad (8)$$

Με τα ισοδύναμα μεγέθη  $^*, R^*$ , για επαφή δύο κυλίνδρων  $R_1, E_1, l$  και  $R_2, E_2, l$  να υπολογίζονται ως:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (10)$$

Η πίεση επαφής κατά την διεύθυνση της επαφής δίνεται ως:

$$p = \frac{2F}{\pi \alpha l} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \quad (11)$$

Η σχέση δύναμης μετατόπισης είναι γραμμική και δίνεται ως:

$$F = \frac{\pi}{4} E^* l u \quad (12)$$

Τέλος, οι κύριες τάσεις συναρτήσει του βάθους στον κύλινδρο δίνονται ως:

$$\sigma_x = -2\nu p_0 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{z}{\alpha} \right)^2} - \left| \frac{z}{\alpha} \right| \right) \quad (13)$$

$$\sigma_y = -p_0 \left( \frac{1 + 2 \frac{z^2}{\alpha^2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{\alpha} \right)^2}} - 2 \left| \frac{z}{\alpha} \right| \right) \quad (14)$$

$$\sigma_z = - \frac{p_0}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{\alpha} \right)^2}} \quad (15)$$

Αντίστοιχα, η θεωρία του Hertz για σημειακή επαφή, δηλαδή επαφή δύο σφαιρών, αναφέρει ότι το πλάτος επαφής είναι:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3FR^*}{4E^*}} \quad (16)$$

Με τα ισοδύναμα μεγέθη  $E^*$ ,  $R^*$  να δίνονται με τον ίδιο τρόπο όπως στην επαφή των κυλίνδρων. Η πίεση επαφής κατά την ακτινική διεύθυνση δίνεται ως:

$$p = \frac{3F}{2\pi\alpha^2} \sqrt{1 - \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2} = p_0 \sqrt{1 - \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2} \quad (17)$$

Στην περίπτωση επαφής σφαίρας δαπέδου απλώς ορίζεται ότι  $R_2 = \inf$ . Η σχέση δύναμης μετατόπισης δεν είναι γραμμική αυτή τη φορά και δίνεται ως:

$$F = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} u^{3/2} \quad (18)$$

Τέλος, οι κύριες τάσεις συναρτήσει του βάθους δίνονται ως:

$$\sigma_{x,y} = -p_0 \left( \left( 1 - \left| \frac{z}{\alpha} \right| \operatorname{atan} \left( \frac{1}{|z/\alpha|} \right) \right) (1 + \nu) - \frac{1}{2 \left( 1 + \left( \frac{z}{\alpha} \right)^2 \right)} \right) \quad (19)$$

$$\sigma_z = - \frac{p_0}{1 + \left( \frac{z}{\alpha} \right)^2} \quad (20)$$

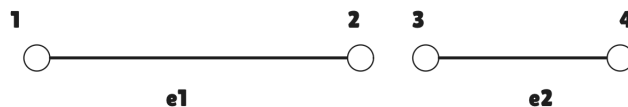
## 2 Μοντελοποίηση

### 2.1 Μέρος Α'

Για το πρώτο μέρος της εργασίας, η μοντελοποίηση αφορά την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Ορίζοντας τους κόμβους και τα στοιχεία του συστήματος, το πρόβλημα έγκειται στην επίλυση του απλού συστήματος  $4 \times 4$ . Ωστόσο, μιας και οι κόμβοι 1 και 4 είναι πακτωμένοι, διαγράφοντας τις αντίστοιχες γραμμές και στήλες, το πρόβλημα καταλήγει στο σύστημα  $2 \times 2$  εξισώσεων:

$$k_1 u_2 - F - \epsilon(l - l_1 - l_2 - u_2) = 0 \quad (21)$$

$$k_2 u_3 + \epsilon(l - l_1 - l_2 - u_3) = 0 \quad (22)$$



Σχήμα 4: Μοντελοποίηση προβλήματος πρώτου μέρους.

Προφανώς, κατά την επαφή θα ισχύει ότι οι κόμβοι 2 και 3 κινούνται μαζί. Έτσι, αναμένεται οι μετατοπίσεις τους να έχουν αντίθετη φορά και έως ότου αρχίσει η επαφή ο κόμβος 2 να έχει μηδενική μετατόπιση.

## 2.2 Μέρος Β'

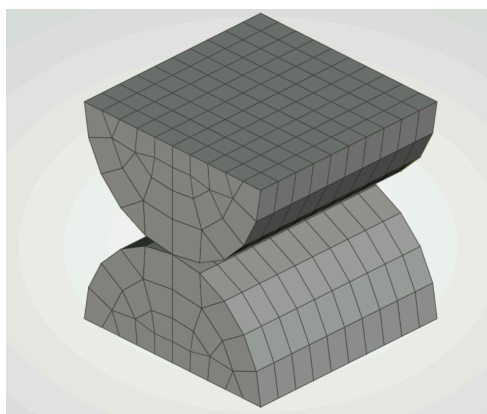
Στο δεύτερο μέρος, ζητούνται μοντέλα επαφών ΠΣ. Ζητείται η μοντελοποίηση τόσο με αδρό πλέγμα όσο και με πυκνό. Για το αδρό πλέγμα η προϋπόθεση είναι ότι ο μέγιστος αριθμός κόμβων δεν πρέπει να ξεπερνάει το όριο της φοιτητικής αδείας. Επομένως, τα μοντέλα των κυλίνδρων δημιουργούνται μισά και αντίστοιχα της σφαίρας επίσης μισό. Το δάπεδο στο οποίο ακουμπάει η σφαίρα, με άπειρη ακτίνα, πρέπει να έχει πάχος παρόμοιο με αυτό της σφαίρας.

Όσο αναφορά τις παραμέτρους επίλυσης, γεωμετρικά τα μοντέλα δεν ακουμπάνε. Έτσι, ορίζεται η παράμετρος ADJUST στη καρτέλα της επαφής, ώστε να μετακινηθούν τα σώματα το ένα μέσα στο άλλο για να ξεκινήσει η επίλυση της επαφής. Οι οριακές συνθήκες των δύο προβλημάτων φαίνονται παρακάτω.

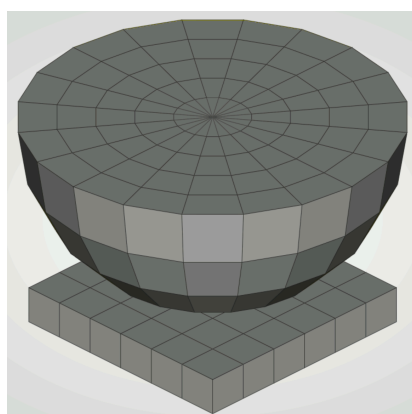
Linear	
Επιφάνεια εφαρμογής δύναμης	Περιορισμός στο επίπεδο της
Ελεύθερη επιφάνεια μη φορτισμένου κυλίνδρου	Περιορισμός σε όλους τους μεταφορικούς β.ε.
Άξονες συμμετρίας κυλίνδρων στη μία πλευρά	Περιορισμός στο β.ε. κατά την εγκάρσια στον άξονα διεύθυνση
Point	
Επιφάνεια εφαρμογής δύναμης	Περιορισμός στο επίπεδο της
Επίπεδη ελεύθερη επιφάνεια δαπέδου	Περιορισμός σε όλους τους μεταφορικούς β.ε.

Πίνακας 1: Οριακές συνθήκες προβλημάτων επαφής.

Παρακάτω φαίνονται τα μοντέλα ΠΣ των προβλημάτων καθώς και οι περιοχές πύκνωσης με πλάτος λίγο περισσότερο από το θεωρητικά αναμενόμενο πλάτος επαφής.

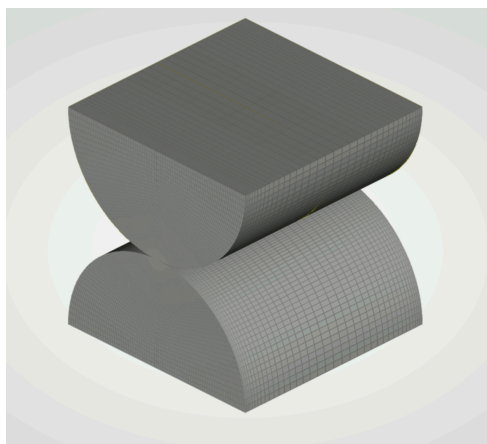


(α) Μοντέλο γραμμικής επαφής.

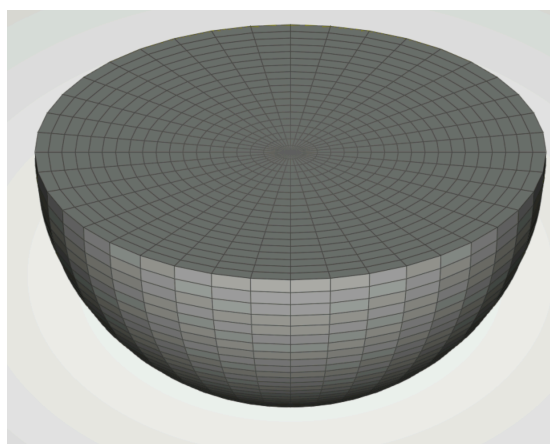


(β) Μοντέλο σημειακής επαφής.

Σχήμα 5: Μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων με αδρό πλέγμα.

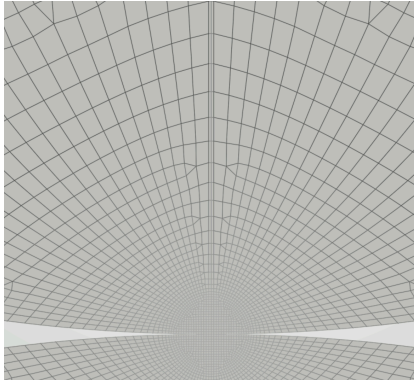


(α) Μοντέλο γραμμικής επαφής.

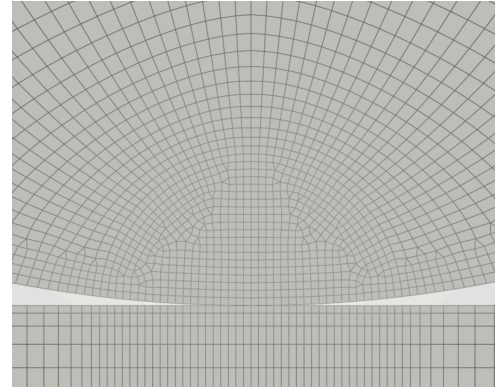


(β) Μοντέλο σημειακής επαφής.

Σχήμα 6: Μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων με πυκνό πλέγμα.



(α ) Μοντέλο γραμμικής επαφής.



(β ) Μοντέλο σημειακής επαφής.

Σχήμα 7: Πύκνωση πλέγματος στο σημείο επαφής.

### 3 Αποτελέσματα Και Συζήτηση

Από την επίλυση του προγράμματος για το πρώτο μέρος προκύπτουν η δύναμη αντίδρασης στην επαφή, οι μετατοπίσεις των δύο ράβδων και οι τάσεις που προκύπτουν στη κάθε ράβδο. Στον Πίν. 2 φαίνονται τα δεδομένα της επίλυσης και στον Πίν. 3 τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους.

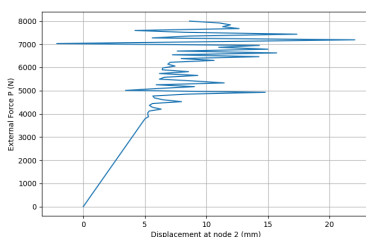
Δεδομένο	Τιμή
$F$	8000 N
$l$	1505 mm
$l_1$	500 mm
$l_2$	1000 mm
$A_1$	1.8 mm <sup>2</sup>
$A_2$	3.1 mm <sup>2</sup>
$\epsilon$	1E10

Πίνακας 2: Δεδομένα προβλήματος πρώτου μέρους.

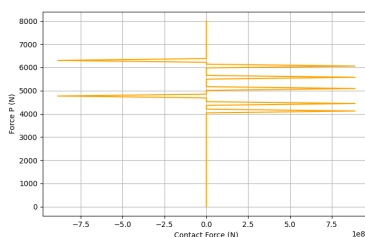
Αποτέλεσμα	Τιμή
$N$	1952 N
$u_2$	7.999 mm
$u_3$	-2.999 mm
$\sigma_1$	3359 MPa
$\sigma_2$	-629 MPa

Πίνακας 3: Αποτελέσματα προβλήματος πρώτου μέρους.

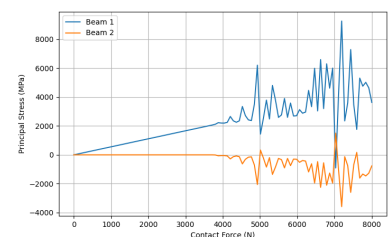
Να σημειωθεί, ότι η τιμή για τη σταθερά ποινης δοκιμάστηκε. Όπως αναμενόταν πολύ μεγάλες τιμές της κάνουν το πρόβλημα ασταθές. Στο Σχ. 8 φαίνεται, για αποτυχημένη επίλυση τα διαγράμματα δύναμης - μετατόπισης, δύναμης - αντίδρασης επαφής και τάσης - δύναμης και πως αυτά δεν συγκλίνουν.



(α ) Διάγραμμα δύναμης προς μετατόπιση.



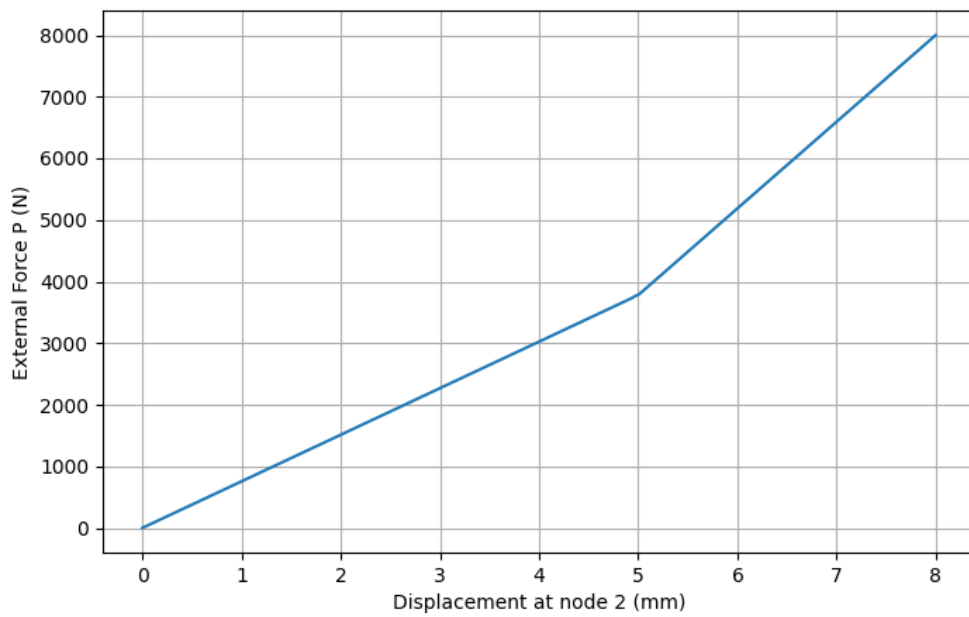
(β ) Διάγραμμα δύναμης προς δύναμη αντίδρασης.



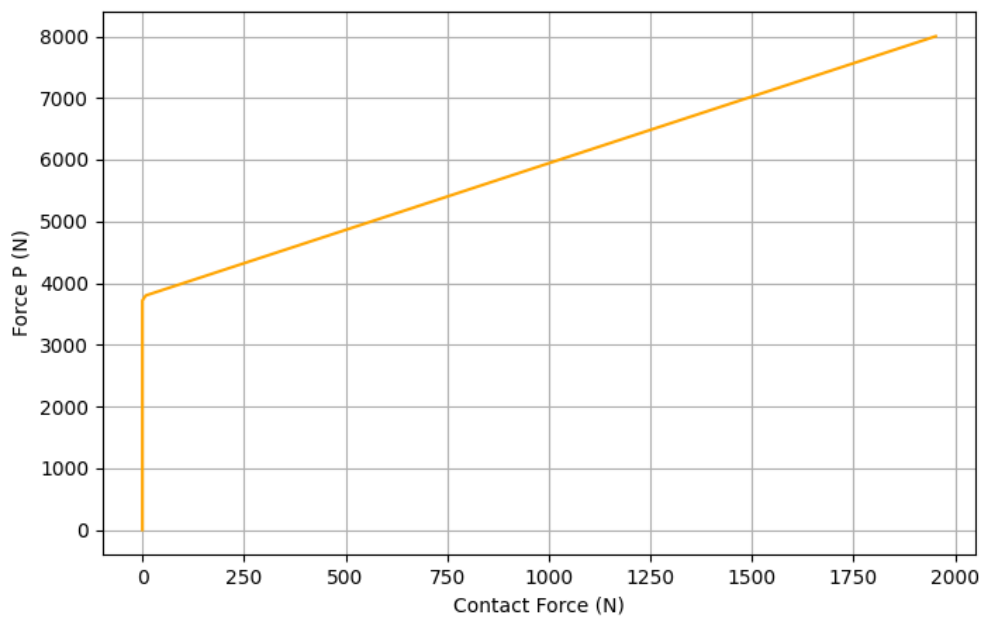
(γ ) Διάγραμμα τάσης προς εξωτερική δύναμη.

Σχήμα 8: Αποτυχημένη επίλυση με πολύ μεγάλη σταθερά ποινης, ίση με 1E100.

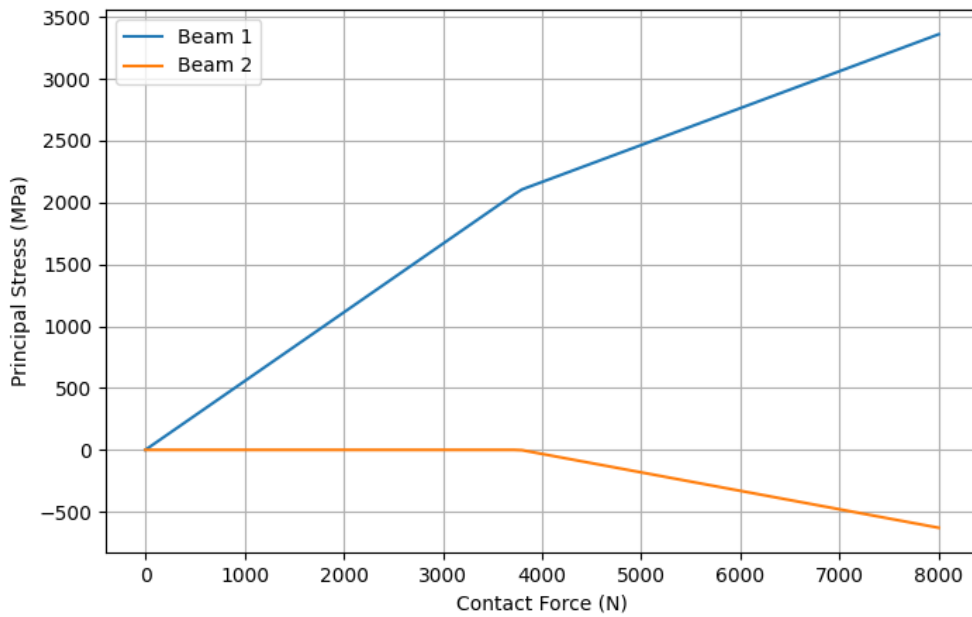
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν πραγματικά, συμφωνούν με τη θεωρία. Η μετατόπιση όπως φαίνεται αυξάνεται υπό σταθερή κλίση έως το σημείο επαφής. Έπειτα αυξάνεται με πολύ μεγαλύτερη κλίση.



Σχήμα 9: Διάγραμμα δύναμης προς μετατόπιση του κόμβου 2, δηλαδή του κόμβου της επαφής.

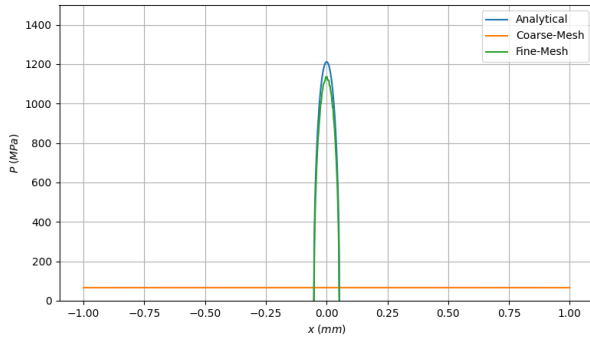


Σχήμα 10: Διάγραμμα δύναμης προς αντίδραση επαφής.

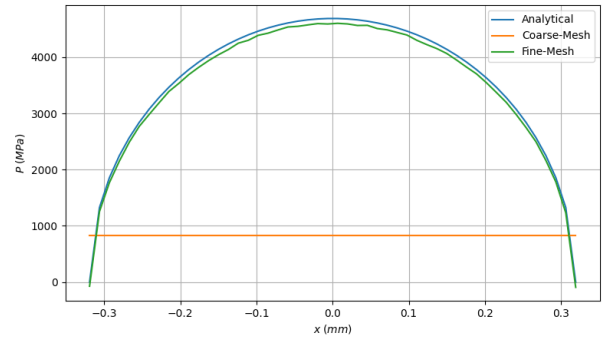


Σχήμα 11: Διάγραμμα τάσης προς την εξωτερική δύναμη στον κόμβο 2.

Όσο αναφορά το δεύτερο μέρος, τα μοντέλα με πυκνό πλέγμα αποδείχθηκαν πολύ ικανοποιητικά καθώς έρχονται σε ταύτιση με τα θεωρητικά αποτελέσματα. Προφανώς, τα μοντέλα με αδρό πλέγμα δεν απέδωσαν καλά. Όσο πιο μακριά από το σημείο επαφής υπολογίζεται τιμή τόσο πιο κοντά στη θεωρητική της βρίσκεται. Επίσης, τα μοντέλα με αδρό πλέγμα αποδείχθηκαν εντελώς ανίκανα να υπολογίσουν τη συνάρτηση της πίεσης. Σχετικά με τη δύναμη, όλα τα μοντέλα έρχονται σε ταύτιση με την αναλυτική λύση.

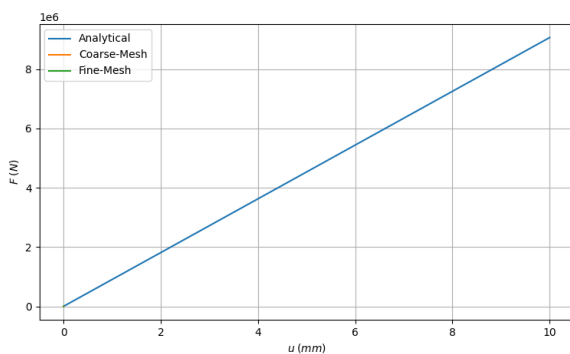


(α ) Πρόβλημα γραμμικής επαφής.

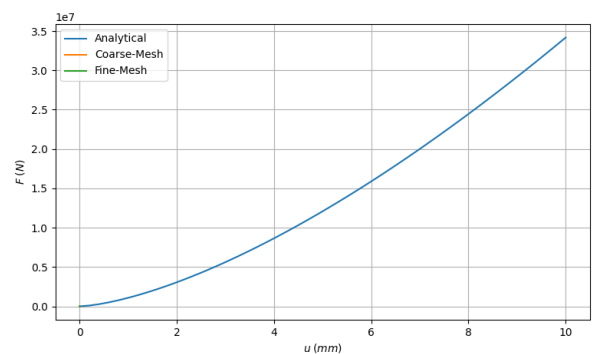


(β ) Πρόβλημα σημειακής επαφής.

Σχήμα 12: Πίεση επαφής.



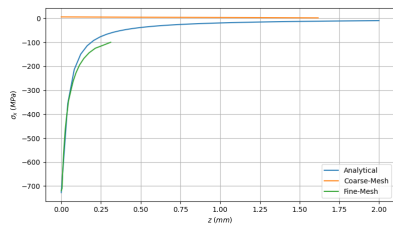
(α ) Πρόβλημα γραμμικής επαφής.



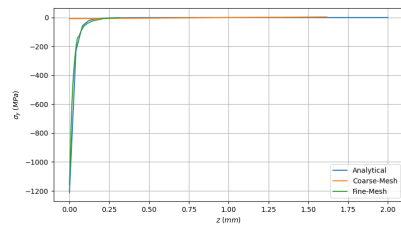
(β ) Πρόβλημα σημειακής επαφής.

Σχήμα 13: Σχέση δύναμης προς μετατόπιση.

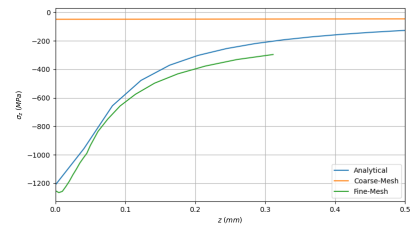




(α)  $\sigma_x$

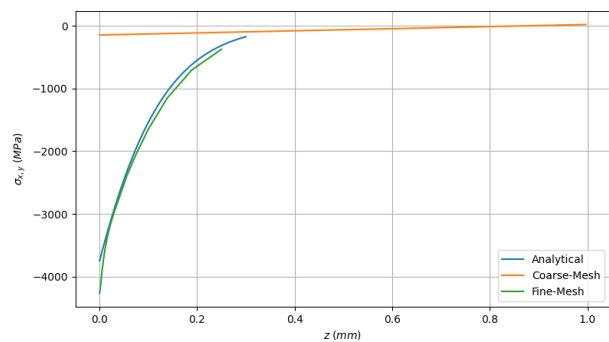


(β)  $\sigma_y$

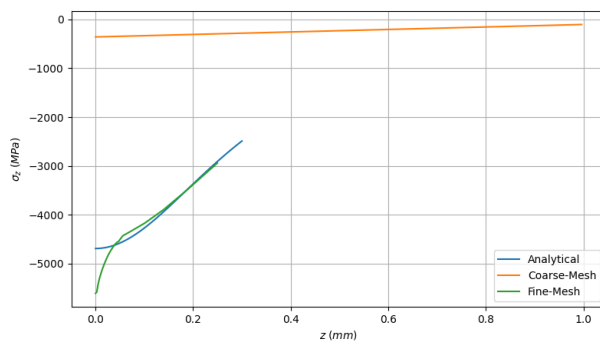


(γ)  $\sigma_z$

Σχήμα 14: Κύριες τάσεις επαφής για το πρόβλημα γραμμικής επαφής.



(α)  $\sigma_{x,y}$



(β)  $\sigma_z$

Σχήμα 15: Κύριες τάσεις επαφής για το πρόβλημα σημειακής επαφής.