



ARISTOTLE UNIVERSITY  
OF THESSALONIKI

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

## Δυναμικά φαινόμενα

*Bonus Εργασία - Ειδικά Κεφάλαια Πεπερασμένων Στοιχείων*

---

**ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ**

**LMEMD** Laboratory of  
Machine Elements &  
Machine Design  
Aristotle University of Thessaloniki

Υπεύθυνος: Γάκιος Χρήστος  
Email: [vasilepi@meng.auth.gr](mailto:vasilepi@meng.auth.gr)  
AEM: 6920

15 Ιουνίου 2025

---

# Περιεχόμενα

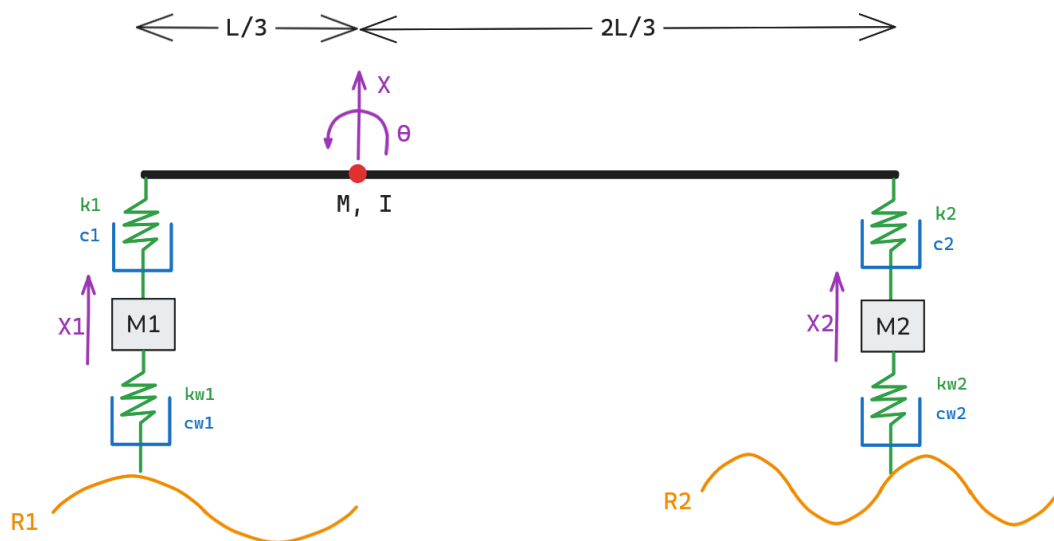
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Παρουσίαση προβλήματος	1
1.2 Αναλυτική επίλυση	2
<b>2 Μονελοποίηση</b>	<b>3</b>
2.1 Implicit	3
2.2 Explicit	3
<b>3 Αποτελέσματα Και Συζήτηση</b>	<b>4</b>
3.1 Αποτελέσματα	4
3.2 Συζήτηση	6

## 1 Εισαγωγή

### 1.1 Παρουσίαση προβλήματος

Στη παρόν εργασία ζητείται η ανάλυση ενός δυναμικού φαινομένου με τη χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, η επίλυση ενός προβλήματος ταλαντώσεων, με τη χρήση Explicit και Implicit μεθόδους για την εξακρίβωση της δυναμικής του συμπεριφοράς. Τα αποτελέσματα της επίλυσης συγκρίνονται με τα αναλυτικά για απλό πρόβλημα ταλαντώσεων.

Το πρόβλημα που επιλέχθηκε για επίλυση είναι το μοντέλο ενός μισού αυτοκινήτου υπό διέγερση εδάφους και στους δύο τροχούς. Το σασί του αυτοκινήτου μοντελοποιείται από στιβαρό σώμα του οποίου το κέντρο βάρους βρίσκεται σε απόσταση  $L/3$  από τη μία άκρη. Το μήκος του σασί είναι  $L = 4.5 \text{ m}$ . Οι αναρτήσεις μοντελοποιούνται με μονοβάθμιους ταλανταντωτές με σημειακές μάζες, ενώ τα λάστιχα μοντελοποιούνται με σύστημα ελατηρίου-αποσβέστη. Το υπό επίλυση πρόβλημα φαίνεται στο Σχ. 1.



Σχήμα 1: Σύστημα μισού αυτοκινήτου υπό διέγερση εδάφους.

Οι σταθερές του προβλήματος φαίνονται παρακάτω στον Πίν. 1. Οι φορτίσεις της κατασκευής είναι ημιτονοειδείς σήματα με διαφορετικά πλάτη και συχνότητες. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1 \cdot \sin(2\pi\Omega_1 \cdot t) \\ r_2 &= R_2 \cdot \sin(2\pi\Omega_2 \cdot t) \end{aligned} \quad (1)$$

Σταθερά	Τιμή	Σταθερά	Τιμή
$m$	$1500 \text{ kg}$	$c_{w1}$	$150 \text{ N s/m}$
$I$	$1805 \text{ kg m}^2$	$c_1$	$3000 \text{ N s/m}$
$m_1$	$105 \text{ kg}$	$c_{w2}$	$160 \text{ N s/m}$
$m_2$	$110 \text{ kg}$	$c_2$	$2800 \text{ N s/m}$
$k_{w1}$	$360 \times 10^3 \text{ N/m}$	$R_1$	$0.1 \text{ m}$
$k_1$	$24.2 \times 10^3 \text{ N/m}$	$R_2$	$0.15 \text{ m}$
$k_{w2}$	$340 \times 10^3 \text{ N/m}$	$\Omega_1$	$10 \text{ Hz}$
$k_2$	$27.1 \times 10^3 \text{ N/m}$	$\Omega_2$	$15 \text{ Hz}$

Πίνακας 1: Παράμετροι προβλήματος μισού αυτοκινήτου.

## 1.2 Αναλυτική επίλυση

Το πρόβλημα έχει σύνολο 4 β.ε., μεταξύ αυτών 3 μεταφορικούς και έναν περιστροφικό. Επιλύοντας για κάθε β.ε. προκύπτουν οι εξισώσεις κινήσεις για κάθε σημειακή μάζα.

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_{w1}) \dot{x}_1 - c_1 \dot{x} + c_1 \frac{L}{3} \dot{\theta} + (k_1 + k_{w1}) x_1 - k_1 x + k_1 \frac{L}{3} \theta &= k_{w1} r_1 + c_{w1} \dot{r}_1 \\
m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_{w2}) \dot{x}_2 - c_2 \dot{x} + 2c_2 \frac{L}{3} \dot{\theta} + (k_2 + k_{w2}) x_2 - k_2 x + 2k_2 \frac{L}{3} \theta &= k_{w2} r_2 + c_{w2} \dot{r}_2 \\
m \ddot{x} - c_1 \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (c_1 + c_2) \dot{x} + \left( 2c_2 \frac{L}{3} - c_1 \frac{L}{3} \right) \dot{\theta} - k_1 x_1 - k_2 x_2 + (k_1 + k_2) x + \left( 2k_2 \frac{L}{3} - k_1 \frac{L}{3} \right) \theta &= 0 \\
I \ddot{\theta} + c_1 \frac{L}{3} \dot{x}_1 - 2c_2 \frac{L}{3} \dot{x}_2 + \left( 2c_2 \frac{L}{3} - c_1 \frac{L}{3} \right) \dot{x} + \left( c_1 \frac{L^2}{9} + 4c_2 \frac{L^2}{9} \right) \dot{\theta} \\
+ k_1 \frac{L}{3} x_1 - 2k_2 \frac{L}{3} x_2 + \left( 2k_2 \frac{L}{3} - k_1 \frac{L}{3} \right) x + \left( k_1 \frac{L^2}{9} + 4k_2 \frac{L^2}{9} \right) \theta &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Το παραπάνω σύστημα 4 εξισώσεων μπορεί να εκφραστεί και σε μητρική μορφή εύκολα, με πίνακες:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_{w1} & 0 & -c_1 & \frac{c_1 L}{3} \\ 0 & c_2 + c_{w2} & -c_2 & -\frac{2c_2 L}{3} \\ -c_1 & -c_2 & c_1 + c_2 & \frac{(2c_2 - c_1)L}{3} \\ \frac{c_1 L}{3} & -\frac{2c_2 L}{3} & \frac{(2c_2 - c_1)L}{3} & \left( \frac{L}{3} \right)^2 (4c_2 + c_1) \end{bmatrix} \\
K &= \begin{bmatrix} k_1 + k_{w1} & 0 & -k_1 & \frac{k_1 L}{3} \\ 0 & k_2 + k_{w2} & -k_2 & -\frac{2k_2 L}{3} \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 & \frac{(2k_2 - k_1)L}{3} \\ \frac{k_1 L}{3} & -\frac{2k_2 L}{3} & \frac{(2k_2 - k_1)L}{3} & \left( \frac{L}{3} \right)^2 (4k_2 + k_1) \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} k_{w1} r_1 + c_{w1} \dot{r}_1 \\ k_{w2} r_2 + c_{w2} \dot{r}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Έτσι, μπορεί το σύστημα να μεταφραστεί σε μοντέλο state space με πίνακες:

$$\begin{aligned}
A_N &= \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_N = \begin{bmatrix} -M^{-1}L_N \\ 0 \end{bmatrix} \\
C_N &= \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad D_N = \begin{bmatrix} M^{-1}L_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Όπου,  $L_N$  ο πίνακας που εκφράζει το που εφαρμόζεται η φόρτιση και είναι:

$$L_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τελικά, η επίλυση έγκειται στο state space σύστημα:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_N z + B_N R \\
y &= C_N z + D_N R
\end{aligned} \tag{3}$$

Με τα διανύσματα μεταβλητής κατάστασης και εξόδου να είναι:

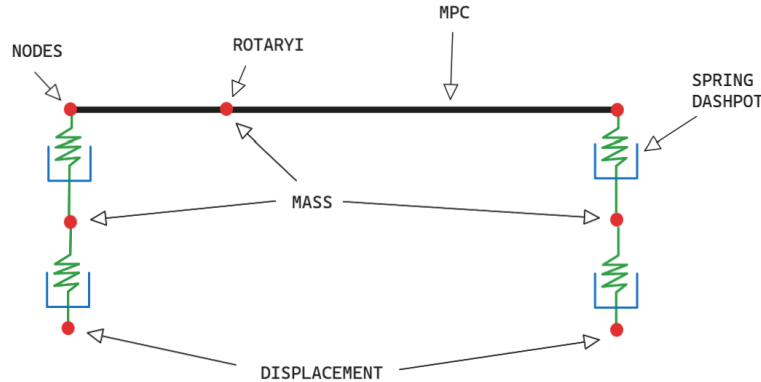
$$z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x & \theta & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

$$y = \begin{bmatrix} z^T & \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x} & \ddot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

## 2 Μονελοποίηση

### 2.1 Implicit

Για την Implicit μοντελοποίηση, χρησιμοποιούνται στοιχεία MPC, SPRING, DASHPOT, MASS, ROTARYI. Το μοντέλο φαίνεται παρακάτω.

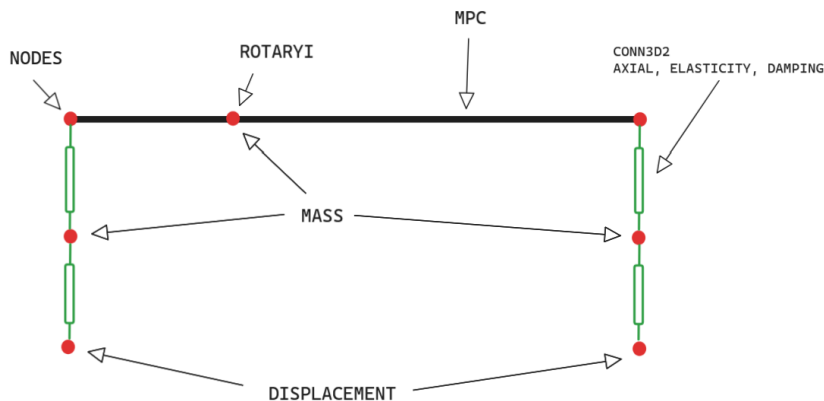


Σχήμα 2: Μοντέλο Implicit επίλυσης.

Στους κόμβους στο έδαφος, ορίζεται DISPLACEMENT με περιοδικό AMPLITUDE. Όσο αναφορά το STEP, συνολικός χρόνος επίλυσης ορίσθηκε  $T = 1$  sec. και αριθμός βημάτων 5000 με βήμα επίλυσης 0.001 ώστε να καταγραφεί καλά η απόκριση από το ημιτονοειδές σήμα.

### 2.2 Explicit

Για την Explicit μοντελοποίηση, πρέπει να δοθεί προσοχή στο γεγονός ότι ο ABAQUS/Explicit δεν υποστηρίζει στοιχεία SPRING, DASHPOT. Επομένως, για να προσομοιωθεί η συμπεριφορά του συστήματος ελατήριο-αποσβέστης, ορίζονται στοιχεία σύνδεσης τύπου CONN3D2. Για να λειτουργήσουν σωστά σαν ελατήρια, ο τύπος τους ορίζεται AXIAL. Έπειτα ορίζεται η συμπεριφορά στοιχείου σύνδεσης (CONNECTOR BEHAVIOR) ως ελαστικότητα και απόσβεση. Ενεργοποιείται το πρώτο COMPONENT της κάθε συμπεριφοράς ώστε να δρα στον άξονα X του τοπικού συστήματος αναφοράς του στοιχείου σύνδεσης, ο οποίος είναι στην διεύθυνση ορισμού του στοιχείου, δηλαδή στη διεύθυνση που δρα το ελατήριο και ο αποσβέστης. Να τονισθεί εδώ ότι για τον τύπο απόσβεσης δοκιμάστηκε τόσο η VISCOUS όσο και η STRUCTURAL. Η VISCOUS προσέδιδε μεγάλη σταθερότητα στο μοντέλο κατά την επίλυση οπότε είχε και πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Με την STRUCTURAL απόσβεση, το σύστημα ήταν ασταθές και δε σύγκλινε. Παρακάτω φαίνεται το μοντέλο.



Σχήμα 3: Μοντέλο Explicit επίλυσης.

Για το STEP, ορίσθηκε INCREMENTATION σταθερό (DIRECT USER CONTROL) και ίσο με  $1E-5$  σύμφωνα με τις προδιαγραφές:

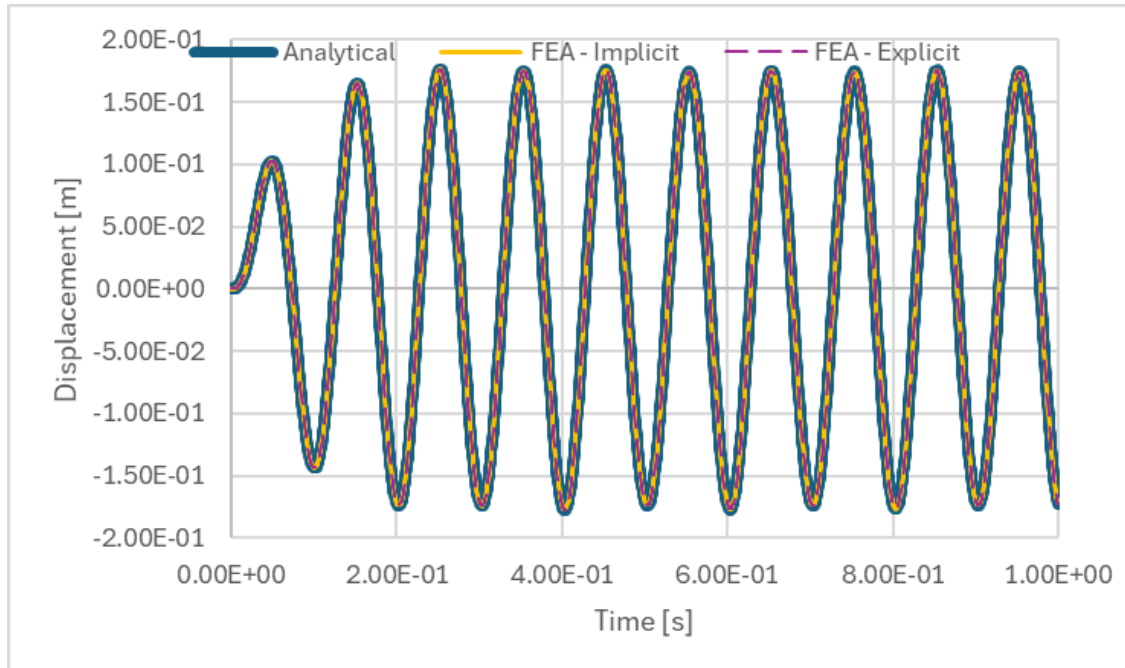
$$dt \leq \frac{1}{100 \cdot \max\{\Omega_1, \Omega_2\}}$$

Να σημειωθεί ότι για την εξακρίβωση των δύο μοντέλων, έτρεξαν και αναλύσεις ιδιομορφικές (FREQUENCY) καθώς είναι εύκολες επιλύσεις. Αυτό έγινε για να συγκριθούν οι ιδιοτιμές των μοντέλων με τις αναλυτικές ώστε να αποδειχθεί ότι τα στοιχεία μοντελοποίησης προσομοιώνουν καλά τη κατασκευή. Οι ιδιομορφικές αναλύσεις επιλύθηκαν με LANCZOS για τις 4 πρώτες ιδιοτιμές από 0.01 - 2000 Hz.

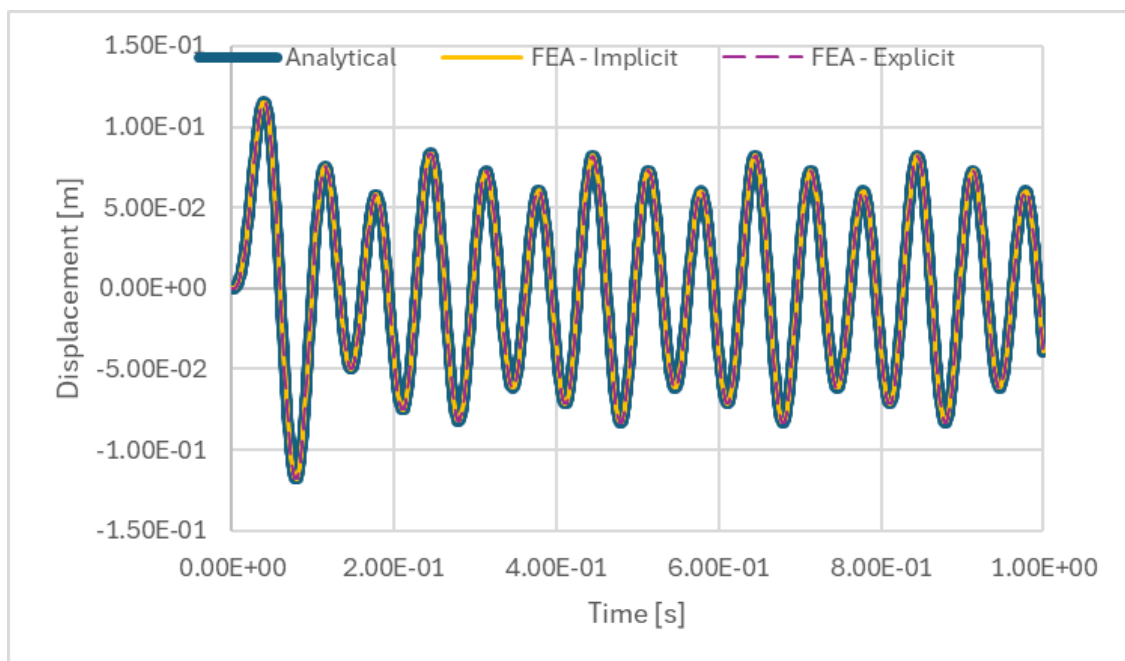
### 3 Αποτελέσματα Και Συζήτηση

#### 3.1 Αποτελέσματα

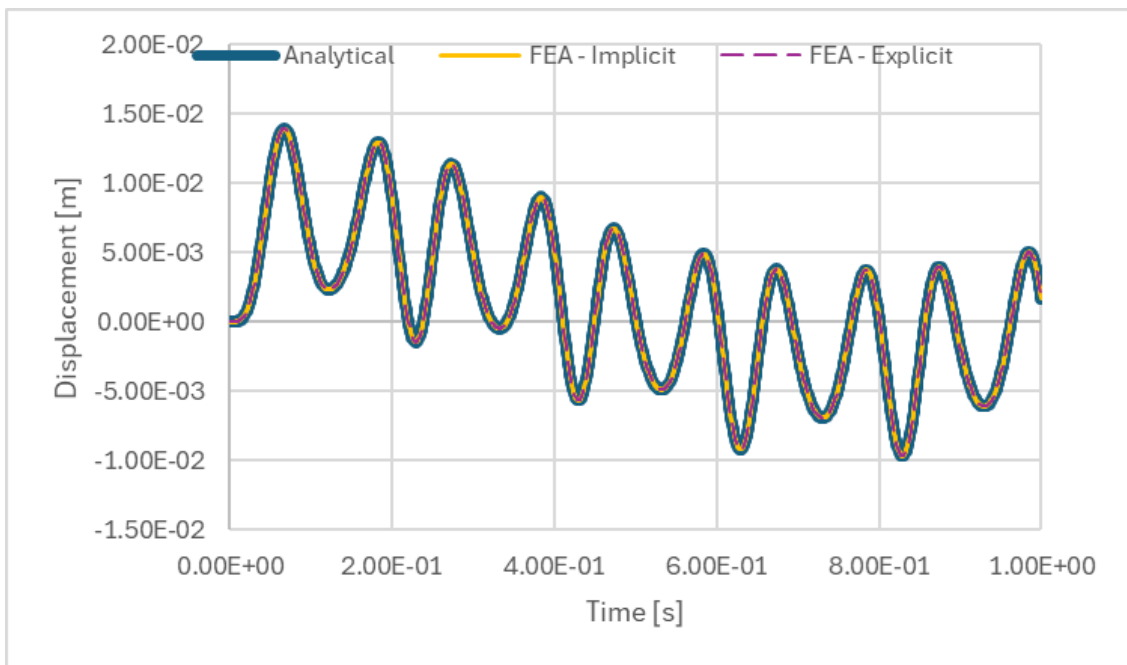
Παρακάτω φαίνονται οι συγκρίσεις της αναλυτικής επίλυσης με τις δύο προσεγγίσεις πεπερασμένων στοιχείων.



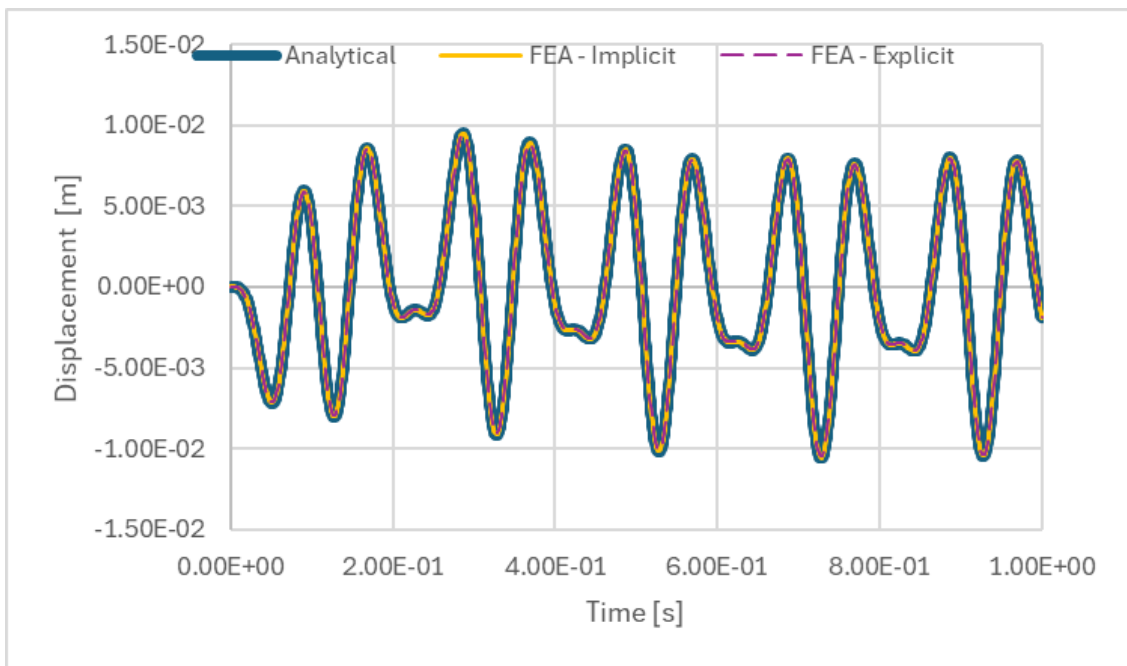
Σχήμα 4: Απόκριση μετατόπισης οπίσθιας ανάρτησης αυτοκινήτου  $x_1$ , σε αρμονική διέγερση εδάφους.



Σχήμα 5: Απόκριση μετατόπισης εμπρόσθιας ανάρτησης αυτοκινήτου  $x_2$ , σε αρμονική διέγερση εδάφους.

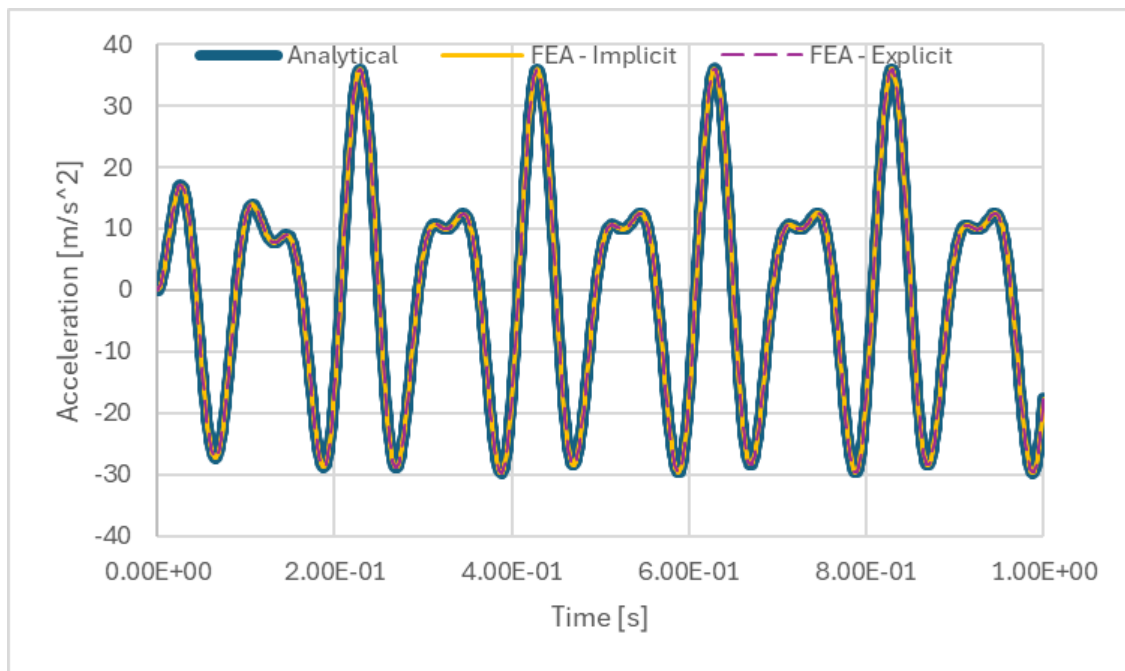


Σχήμα 6: Απόκριση μετατόπισης σασί αυτοκινήτου  $x$ , σε αρμονική διέγερση εδάφους.

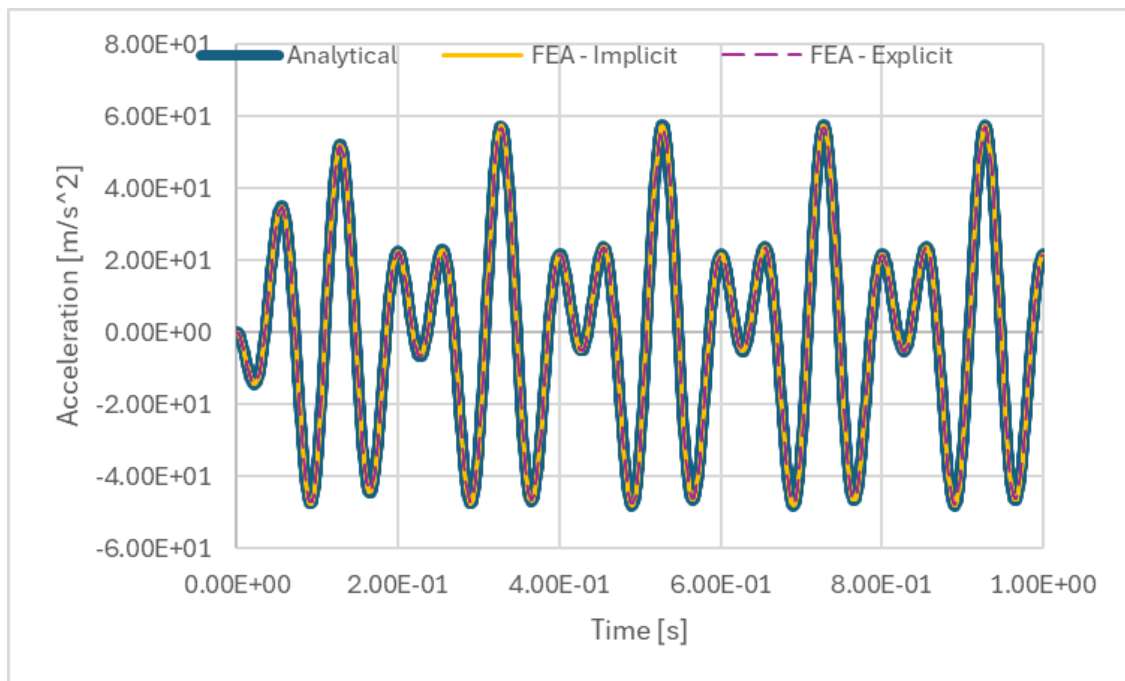


Σχήμα 7: Απόκριση περιστροφής σασί αυτοκινήτου  $\theta$  σε αρμονική διέγερση εδάφους.

Πέρα από τις μετατοπίσεις των βαθμών ελευθερίας, διαβάζονται επίσης και οι επιταχύνσεις του σασί του αυτοκινήτου. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα για τους βαθμούς ελευθερίας της μάζας  $m$  στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 8: Απόκριση μεταφορικής επιτάχυνσης σασί αυτοκινήτου  $\ddot{x}$  σε αρμονική διέγερση εδάφους.



Σχήμα 9: Απόκριση περιστροφικής επιτάχυνσης σασί αυτοκινήτου  $\ddot{\theta}$  σε αρμονική διέγερση εδάφους.

### 3.2 Συζήτηση

Όπως φαίνεται, παρατηρείται πλήρη ταύτιση των αποτελεσμάτων με την αναλυτική επίλυση. Αυτό δείχνει ότι για το απλό πρόβλημα δυναμικής απόκρισης, μισού αυτοκινήτου, υπό αρμονική διέγερση εδάφους, και οι δύο προσεγγίσεις (Implicit, Explicit) ανταποκρίνονται πολύ καλά. Ωστόσο, η επίλυση με Explicit μεθόδους, ήταν πολύ πιο ασταθής και χρειάστηκε να καταβληθεί πολύ μεγαλύτερη προσπάθεια για να σταθεροποιηθεί η επίλυση. Χρειάστηκε να εξετασθούν πολύ πιο ενδελεχώς οι παράμετροι της επίλυσης και να δοθεί πολύ μεγαλύτερη βάση στη μοντελοποίηση. Μια μικρή παράμετρος όπως ο τύπος απόσβεσης επηρέαζε δραματικά την απόκριση από εντελώς ασταθή σε ταυτόσημη με την αναλυτική επίλυση. Επομένως, καταλήγει κανείς, ότι για τόσο απλό πρόβλημα όσο αυτό της συγκεκριμένης εργασίας, η Implicit επίλυση αποτελεί καλύτερη επιλογή λόγω της ευκολίας χρήσης του ABAQUS/Standard. Μπορεί η Explicit επίλυση να ήταν πιο γρήγορη στο να επιφέρει αποτελέσματα αλλά ήταν πολύ πιο χρονοβόρα στο να βρεθούν οι κατάλληλες παράμετροι που σταθεροποιούν την επίλυση.

## Κατάλογος σχημάτων

1	Σύστημα μισού αυτοκινήτου υπό διέγερση εδάφους. . . . .	1
2	Μοντέλο Implicit επίλυσης. . . . .	3
3	Μοντέλο Explicit επίλυσης. . . . .	3
4	Απόκριση μετατόπισης οπίσθιας ανάρτησης αυτοκινήτου $x_1$ , σε αρμονική διέγερση εδάφους. . . . .	4
5	Απόκριση μετατόπισης εμπρόσθιας ανάρτησης αυτοκινήτου $x_2$ , σε αρμονική διέγερση εδάφους. . . . .	4
6	Απόκριση μετατόπισης σασί αυτοκινήτου $x$ , σε αρμονική διέγερση εδάφους. . . . .	5
7	Απόκριση περιστροφής σασί αυτοκινήτου $\theta$ σε αρμονική διέγερση εδάφους. . . . .	5
8	Απόκριση μεταφορικής επιτάχυνσης σασί αυτοκινήτου $\ddot{x}$ σε αρμονική διέγερση εδάφους. . . . .	6
9	Απόκριση περιστροφικής επιτάχυνσης σασί αυτοκινήτου $\ddot{\theta}$ σε αρμονική διέγερση εδάφους. . . . .	6

## Κατάλογος πινάκων

1	Παράμετροι προβλήματος μισού αυτοκινήτου. . . . .	2
---	---	---