МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

**О.В. Михайлова, Т.В. Облакова**

# Случайные процессы-2. Стохастический анализ

Электронное учебное издание

*Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу «Теория случайных процессов»*

Москва

УДК 519.2

*Рецензент:* проф., д.т.н. Сидняев Н.И.

**Михайлова О.В., Облакова Т.В.**

Случайные процессы-2. Стохастический анализ. Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу «Теория случайных процессов». - МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2014. 26 с.

Издание содержит материал для самостоятельной проработки базовой части курса «Стохастический анализ и стохастические дифференциальные уравнения». Материал предназначен для методического обеспечения специальности 01020062 – Математика и компьютерные науки, а также может быть использован студентами других специальностей, предусматривающих расширенное изложение предмета. Методические указания содержат необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач, материал для самоконтроля и варианты типового домашнего задания.

Для студентов направления подготовки "Математика и компьютерные науки", специальности "Прикладная математика", а также студентов машиностроительных специальностей, изучающих курс теории случайных процессов и стохастического анализа.

*Рекомендовано учебно-методической комиссией факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана*

**Михайлова Ольга Владимировна**

**Облакова Татьяна Васильевна**

**Случайные процессы-2. Стохастический анализ**

## Содержание.

## 1. Введение. Цели и задачи методических указаний

Данное издание предназначено для методического обеспечения направления подготовки 01020062 – Математика и компьютерные науки, но также может быть использовано студентами других специальностей, предусматривающих расширенное изложение предмета. Общий курс теории случайных процессов, который все чаще включается в программы подготовки инженеров различных специальностей и направлений подготовки, в настоящее время достаточно хорошо обеспечен фундаментальными учебниками, например [1], [2], [3]. Данные методические указания предназначены для обеспечения самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям и выполнении индивидуального домашнего задания и являются продолжением и развитием работы авторов [4]. Основной темой настоящей работы являются стационарные в широком смысле случайные процессы, описывающие установившиеся режимы функционирования стохастических систем. Примерами таких процессов могут служить колебания напряжения и силы тока в сетях различного назначения, пульсации скорости или давления газа в газопроводе и т.п. Для успешного освоения дисциплины необходимы базовые знания курсов «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей» и некоторые элементы курса «Функциональный анализ».

Целью данных методических указаний является ознакомление студентов, изучающих курс случайных процессов, со спектральной теорией стационарных случайных процессов, преобразованием таких процессов линейной динамической системой и применением теории к решению конкретных инженерных задач. Задача указаний – освоение основных понятий и отработка навыков определения вероятностных характеристик выходного сигнала $Y(t)$ по вероятностным характеристикам входного сигнала $X(t)$.

Методические указания содержат необходимый теоретический материал, сгруппированный в трех параграфах, примеры решения типовых задач, материал для самоконтроля в виде задач с приведенными ответами. Отдельный параграф содержит 30 вариантов типового домашнего задания.

## 2. Стационарные случайные процессы.

**Определение 1**. СП $X(t,\omega)$ называют *стационарным в узком смысле*, если для любого $N \ge 1, t_k \in T, k = 1,\dots,N$ *и* $h \in \Re$, такого, что $t_k + h \in T$, имеет место тождество $F_X(x_{(1)}, x_{(2)},\dots,x_{(N)} \mid t_1,\dots,t_N) \equiv F_X(x_{(1)}, x_{(2)},\dots,x_{(N)} \mid t_1 + h,\dots,t_N + h)$ или, что то же самое, $f_X(x_{(1)}, x_{(2)},\dots,x_{(N)} \mid t_1,\dots,t_N) \equiv f_X(x_{(1)}, x_{(2)},\dots,x_{(N)} \mid t_1 + h,\dots,t_N + h)$, то есть его -мерная функция распределения и плотность распределения не изменяются при сдвиге всех его временных аргументов на одинаковую произвольную величину $h$.

**Определение 2.** СП $X(t,\omega), t \in T$ называется *стационарным в широком смысле*, если его м.о. – постоянный вектор, а к.ф. зависит только от разности аргументов, то есть $M[X(t,\omega)] = m_X = const$, $K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2 - t_1) = K_X(\tau), \tau = t_2 - t_1$.

**Замечания.**

1. Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное неверно!
2. Дисперсия стационарного случайного процесса постоянна при всех значениях аргумента $t$ и равна значению корреляционной функции в начале координат $(\tau = 0)$: $D_X(t) = K_X(0)$.

**Свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса:**

1. Корреляционная функция стационарного случайного процесса четная функция: $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$.
2. Абсолютная величина корреляционной функции стационарного случайного процесса не превышает ее значения в начале координат: $|K_X(\tau)| \le K_X(0)$.

**Определение 3**. *Нормированной корреляционной функцией стационарного случайного процесса* называют неслучайную функцию аргумента $\tau$: $\rho_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)}$.

Абсолютная величина нормированной корреляционной функции не превышает единицы: $|\rho_X(\tau)| \le 1$.

**Определение 4**. Два СП $X(t)$ и $Y(t)$ одного и того же аргумента $t \in T$ называются *стационарно связанными*, если их взаимная к.ф. является функцией разности аргументов $K_{XY}(t_1,t_2) = K_{XY}(\tau), \tau = t_2 - t_1$.

**Теорема 1.** Если $X(t)$ дифференцируемый стационарный случайный процесс, то корреляционная функция производной $X'(t)$ равна второй производной от корреляционной функции СП $X(t)$, взятой со знаком минус:

$K_{X'}(\tau) = -K''_X(\tau).$ (1)

**Теорема 2.** Если $X(t)-$ стационарный случайный процесс, то корреляционная функция и дисперсия интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ находятся, соответственно, по формулам:

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)K_X(\tau)d\tau - \int_0^{t_2-t_1} (t_2 - t_1 - \tau)K_X(\tau)d\tau + \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)K_X(\tau)d\tau, \quad (2)$$

$$D_Y(t) = 2\int_0^t (t-\tau)K_X(\tau)d\tau\,. \quad (3)$$

**Пример 1**. Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $X(t) = U\cos 2t$, где $U-$ случайная величина, $M[U] = 3$, $D[U] = \frac{1}{4}$?

**Решение.** Вычислим характеристики:

$m_X(t) = M[U\cos 2t] = \cos 2t M[U] = 3\cos 2t$;

$K_X(t_1, t_2) = M\left[(U\cos 2t_1 - 3\cos 2t_1)((U\cos 2t_2 - 3\cos 2t_2))\right] = \cos 2t_1 \cos 2t_2 M(U-3)^2 =$

$= \cos 2t_1 \cos 2t_2 DU = \frac{1}{4}\cos 2t_1 \cos 2t_2$.

Поскольку полученная корреляционная функция не зависит от разности аргументов $t_1$ и $t_2$, то случайный процесс $X(t)$ не является стационарным.

**Пример 2.** Даны два СП $X(t,\omega) = Z\cos\omega t + U\sin\omega t$; $Y(t,\omega) = -Z\sin\omega t + U\cos\omega t$, где $Z$ и $U$ - некоррелированные СВ, причем $DZ = DU = D$. Найдите взаимную к.ф. Являются ли эти СП стационарно связанными?

**Решение.** Находим взаимную к.ф. этих СП: $K_{XY}(t_1, t_2) =$

$= M\big[\big((Z - MZ)\cos\omega t_1 + (U - MU)\sin\omega t_1\big)\big(-(Z - MZ)\sin\omega t_2 + (U - MU)\cos\omega t_2\big)\big] =$

$= -\cos\omega t_1 \sin\omega t_2\, M(Z - MZ)^2 + \sin\omega t_1 \cos\omega t_2\, M(U - MU)^2 = D\sin\omega(t_1 - t_2).$

Поскольку $K_{XY}(t_1, t_2)$ зависит от разности аргументов, то СП $X(t)$ и $Y(t)$ стационарно связаны.

**Пример 3.** Задан случайный процесс $X(t) = \sin(t + \varphi)$, где $\varphi$ - случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0; 2\pi)$. Докажите, что $X(t)$ - стационарный случайный процесс.

**Решение**. Если $\varphi$ - равномерно распределена на $(0;2\pi)$, то ее плотность имеет вид: $p_{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \epsilon (0;2\pi) \\ 0, & x \notin (0;2\pi) \end{cases}$. Вычисляем характеристики:

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t+x)\, p_{\varphi}(x) dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t+x)\, dx = 0,$$

$$K_X(t_1,t_2) = M[\sin(t_1+\varphi)\cdot\sin(t_2+\varphi)] = \frac{1}{2}M[\cos(t_1-t_2) - \cos(t_1+t_2+2\varphi)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(t_1-t_2) - \frac{1}{2}M[\cos(t_1+t_2+2\varphi)] = \frac{1}{2}\cos(t_1-t_2) - \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t_1+t_2+2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(t_1-t_2).$$

Следовательно, $X(t)$ - стационарный в широком смысле случайный процесс.

**Пример 4.** Задан случайный процесс $X(t) = t + U\cos t + V\sin t$, где $U$ и $V$ - некоррелированные случайные величины, причем$MU = MV = 0$, $DU = DV = D$. Докажите: а) $X(t)$ - нестационарный случайный процесс; б) $X'(t)$ - стационарный случайный процесс.

**Решение**. Найдем характеристики СП $X(t)$:

$$M[X(t)] = M[t^2 + U\cos t + V\sin t] = t + \cos t\ MU + \sin t\, MV = t,$$

$$K_X(t_1,t_2) = M[(U\cos t_1 + V\sin t_1)(U\cos t_2 + V\sin t_2)] =$$

$$= \cos t_1 \cos t_2\, DU + \sin t_1 \sin t_2\, DV = D\cos(t_2 - t_1).$$

Поскольку $M[X(t)]$ зависит от $t$, СП $X(t)$ – нестационарный.

В то же время характеристики $X'(t)$ гарантируют его стационарность:

$M[X'(t)] = 1$ - не зависит от $t$,

$K_{X'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X(t_1,t_2) = D\cos(t_2-t_1)$ - зависит от разности аргументов.

**Пример 5**. Случайный процесс $X(t)$ имеет характеристики $M[X(t)] = 0$, $K_Y(t_1,t_2) = \frac{1}{1+(t_1-t_2)^2}$. Найдите характеристики случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$. Являются ли случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ стационарными?

**Решение**. Процесс $X(t)$ является стационарным в широком смысле по определению 2. Найдем характеристики СП $Y(t)$. Его математическое ожидание очевидно равно нулю. Вычислим корреляционную функцию по формуле (2):

$$K_Y(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)K_X(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)K_X(\tau)d\tau+\int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)K_X(\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{t_2}\frac{t_2-\tau}{1+\tau^2}d\tau-\int\limits_0^{t_2-t_1}\frac{t_2-t_1-\tau}{1+\tau^2}d\tau+\int\limits_0^{t_1}\frac{t_1-\tau}{1+\tau^2}d\tau=t_2\operatorname{arctg}\tau\Big|_0^{t_2}-\frac{1}{2}\ln(1+\tau^2)\Big|_0^{t_2}-$$

$$-(t_2-t_1)\operatorname{arctg}\tau\Big|_0^{t_2-t_1}+\frac{1}{2}\ln(1+\tau^2)\Big|_0^{t_2-t_1}+t_1\operatorname{arctg}\tau\Big|_0^{t_1}-\frac{1}{2}\ln(1+\tau^2)\Big|_0^{t_1}=$$

$$=t_2\operatorname{arctg}t_2+t_1\operatorname{arctg}t_1-(t_2-t_1)\operatorname{arctg}(t_2-t_1)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+(t_2-t_1)^2}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}\right).$$

Тогда из(3) заключаем, что $D_Y(t)=2t\operatorname{arctg}t-\ln(1+t^2)$.

Следовательно, СП $Y(t)$, в отличие от СП $X(t)$, не является стационарным.

## Задачи для самоконтроля.

1. Докажите, что если $X(t)$ - стационарный случайный процесс, $Y$ - случайная величина, некоррелированная с $X(t)$, то случайный процесс $Z(t)=X(t)+Y$ является стационарным.
2. Известна корреляционная функция $K_X(\tau)=De^{-\alpha^2\tau^2}$ стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдите корреляционную функцию случайного процесса $Y(t)=4X(t)$.

   Ответ: $K_Y(\tau)=16De^{-\alpha^2\tau^2}$.
3. Найдите нормированную корреляционную функцию, зная корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$: $K_X(\tau)=5e^{-\tau^2}$.

   Ответ: $\rho_X(\tau)=e^{-\tau^2}$.
4. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид: $X(t)=V\cos\omega t$, где $V$ - случайная величина с характеристиками: $MV=2, \sigma_V=3$. Является ли $X(t)$ стационарным?

   Ответ: Нет.
5. Найдите корреляционную функцию производной случайного процесса $X(t)$, если $K_X(\tau)=ae^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$.

   Ответ: $K_{X'}(\tau)=a\alpha^2e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|)$.
6. Докажите, что производные любого порядка (если они существуют) от стационарной случайной функции также стационарны.
7. Сколько раз можно дифференцировать в смысле среднего квадратичного стационарный случайный процесс $X(t)$, $t\in\mathbb{R}$, корреляционная функция которого имеет вид: а) $K_X(\tau)=\sigma^2e^{-a^2\tau^2}$; б) $K_X(\tau)=|\tau|^{2k+1}e^{|\tau|}, k\geq 1$.

   Ответ: а) бесконечно много; б) $k$ раз.

**8.** Найдите вероятность $p$ того, что производная в смысле среднего квадратичного $X'(t)$ от нормального стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ примет значение, большее $b = \sqrt{5}$ м/с , если $M[X(t)] = 10$ м,

$K_X(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$, где $a = 4\text{м}^2, \alpha = 1\text{с}^{-1}, \beta = 2\text{с}^{-1}$.

Ответ: $p = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}309$.

**9.** Пусть $\xi_1, \xi_2$ - независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $\pm 1$ с вероятностями 1/2. Докажите, что случайный процесс $X(t) = \xi_1 \cos\lambda t + \xi_2 \sin\lambda t$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, является стационарным в широком смысле.

**10.** Пусть $Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X_1(t)$ и $X_2(t)$ - независимые стационарные в широком смысле процессы, принимающие значения на множестве $\mathbb{R}$. Докажите, что $Y(t)$ стационарный в широком смысле случайный процесс.

**11.** До какого порядка существуют производные случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция имеет вид $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$?

Ответ: до четвертого включительно.

**12.** Известна корреляционная функция $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$ случайного процесса $X(t)$. Найдите корреляционную функцию СП $Y(t) = X''(t)$.

Ответ: $K_Y(\tau) = \sigma_X^2\alpha^4 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 - \frac{5}{3}\alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$.

**13.** Пусть $X(t)$ стационарный случайный процесс, корреляционная функция которого известна. Найдите взаимную корреляционную функцию $X(t)$ и $X'(t)$.

Ответ: $K_{XX'}(t_1, t_2) = -K_X'(t_1 - t_2)$.

**14.** Найдите дисперсию интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$, зная корреляционную функцию стационарного СП $X(t)$: а) $K_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$; б) $K_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

Ответ: а) $D_Y(t) = \frac{2D}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha|t|} - 1 + \alpha|t|\right)$, б) $D_Y(t) = \frac{2D}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha|t|}(3 + \alpha|t|) + 2\alpha|t| - 3\right]$.

**15.** Найдите взаимную корреляционную функцию случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$, если известна $K_X(\tau)$.

Ответ: $K_{XY}(t_1, t_2) = -\int_0^{t_1 - t_2} K_X(\tau)d\tau$.

## 3. Спектральное разложение стационарных случайных процессов.

**Определение 1**. *Спектральной плотностью* стационарного случайного процесса $X(t)$ называют функцию $s_X(\omega)$ которая связана с корреляционной функцией $K_X(\tau)$ взаимно-обратными преобразованиями Фурье:

$$s_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \tag{4}$$

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \tag{5}$$

Эти формулы называют *формулами Винера-Хинчина.* В действительной форме они представляют взаимно-обратные косинус - преобразования Фурье:

$$s_X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} K_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau, \tag{6}$$

$$K_X(\tau) = 2\int_{0}^{+\infty} s_X(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega. \tag{7}$$

**Свойства спектральной плотности действительного случайного процесса.**

**1.** $s_X(\omega) \geq 0$**,**

**2.** $s_X(-\omega) = s_X(\omega)$,

**3.** $\lim_{\omega\to\infty} s_X(\omega) = 0$,

**4.** $DX = 2\int_0^{\infty} s_X(\omega)d\omega$.

**Определение 2.** *Нормированной спектральной плотностью* стационарного случайного процесса $X(t)$ называют отношение спектральной плотности к дисперсии случайного процесса:

$$s_{X\text{норм}}(\omega) = \frac{s_X(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} s_X(\omega)d\omega}.$$

**Определение 3.** *Взаимной спектральной плотностью* двух стационарных и стационарно связанных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называют функцию $s_{XY}(\omega)$, определяемую преобразованием Фурье:

$$s_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

Взаимная корреляционная функция выражается через взаимную спектральную плотность с помощью обратного преобразования Фурье:

$$s_{XY}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

**Пример 1**. Найдите корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, спектральная плотность которого: $s_X(\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| \le h \\ 0, & |\omega| > h \end{cases}$, где $h$ - постоянная величина, $h > 0$.

**Решение**. Согласно формулам (3) и (5)

$$K_X(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2a \int\limits_{0}^{h} \cos\omega\tau \, d\omega = 2a \frac{\sin h\tau}{\tau}.$$

**Пример 2.** Корреляционная функция стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t),\ t \in R$, имеет вид: $K_X(\tau) = De^{-\lambda^2\tau^2}$, $D > 0$. Найдите спектральную плотность $s_X(\omega)$.

**Решение**. По определению (4) необходимо вычислить интеграл

$$s_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau^2}\, e^{-i\omega\tau} d\tau = \left\{ \begin{matrix} \lambda\left(\tau + \dfrac{i\omega}{2\lambda^2}\right) = u \\ d\tau = \dfrac{du}{\lambda} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{D}{2\pi\lambda} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}} \int\limits_{Im\, u = \frac{\omega}{2\lambda^2}} e^{-u^2}\, du = \frac{D}{2\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}}.$$

Предпоследнее равенство в этой цепочке имеет место в силу теоремы Коши из комплексного анализа. В самом деле, рассмотрим контур $C_R = C_R' \cup C_R'' \cup l_R^+ \cup l_R^-$, изображенный на рисунке 1. Здесь $l_R^\pm$ - отрезки прямых $z = \pm R + iy$, заключенные между действительной осью и прямой $Im\, z = \frac{\omega}{2\lambda^2}$. Поскольку подынтегральная функция везде аналитична, $\int_{C_R} e^{-u^2}\, du = 0$. Интегралы по отрезкам $l_R^\pm$ стремятся к нулю:

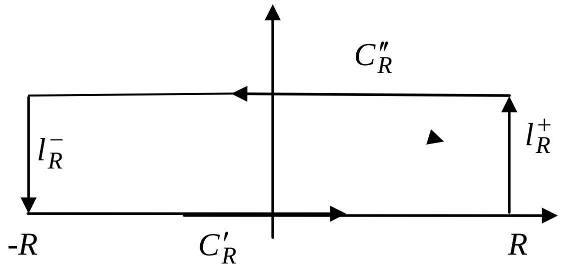

*Рис.1*

$$\left| \int\limits_{l_R^\pm} e^{-(\pm R + iy)^2} dz \right| \le \int\limits_{l_R^\pm} \left| e^{-(\pm R + iy)^2} \right| |dz| = \int\limits_{l_R^\pm} e^{-R^2 + y^2} |dz| \le e^{-R^2 + \frac{\omega^2}{4\lambda^4}} \cdot \frac{\omega}{2\lambda^2} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, получаем в пределе равенство:

$$\int\limits_{Im\,u=\frac{\omega}{2\lambda^2}} e^{-u^2}\,du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

## Задачи для самоконтроля.

1. Найдите корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, с постоянной спектральной плотностью $s_X(\omega) = s_0$.
   Ответ: $K_X(\tau) = 2\pi s_0 \delta(\tau)$ .
2. Найдите спектральную плотность стационарного случайного процесса, зная его корреляционную функцию: $K_X(\tau) = e^{-|\tau|}$.
   Ответ: $s_X(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.
3. Найдите дисперсию стационарного случайного процесса $X(t)$, зная его спектральную плотность: $s_X(\omega) = \frac{10}{\pi(1+\omega^2)}$.
   Ответ: $DX = 10$.
4. Найдите спектральную плотность случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция $K_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$.
   Ответ: $s_X(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\alpha^2+(\omega+\beta)^2)(\alpha^2+(\omega-\beta)^2)}$.
5. Найдите спектральную плотность стационарного случайного процесса с корреляционной функцией: $K_X(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(2\delta(\tau) - \alpha), \alpha > 0$.
   Ответ: $s_X(\omega) = \frac{a\omega^2}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$.
6. Корреляционная функция $K_X(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ задана выражением $K_X(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|t|)$, $\alpha > 0$, $a > 0$. Найдите спектральную плотность $s_X(\omega)$.
   Ответ: $s_X(\omega) = \frac{2a}{\pi}\frac{\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\omega^2)^2}$.
7. Дана спектральная плотность $s_X(\omega) = \sqrt{\frac{D}{\pi\alpha}}\exp\left\{-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right\}$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $\alpha > 0, D > 0$. Найдите корреляционную функцию $K_X(\tau)$.
   Ответ. $K_X(\tau) = \sqrt{D}e^{-\alpha\tau^2}$.

**8.** Докажите, что не существует никакого стационарного случайного процесса $X(t)$, корреляционная функция которого $K_X(\tau)$ постоянна в каком-то интервале $(-\tau_1;\tau_1)$ и равна нулю вне его.

**9.** Определите, обладает ли функция $K_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, свойствами корреляционной функции.

Ответ. Да.

**10.** Найдите его корреляционную функцию $K_Y(\tau)$ и спектральную плотность $s_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)=X'(t)$, если случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию $K_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right)$, $\alpha>0,\beta>0$.

Ответ: $K_Y(\tau)=(\alpha^2-\beta^2)e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau-\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right)$, $s_Y(\tau)=\frac{4\alpha\omega^2(\alpha^2-\beta^2)}{\pi(\omega^2+(\alpha-\beta)^2)(\omega^2+(\alpha+\beta)^2)}$.

**11.** Найдите спектральную плотность $s_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией $K_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$.

Ответ: $s_X(\omega)=\frac{2\sigma^2}{\pi}\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+(\omega-\beta)^2)(\alpha^2+(\omega+\beta)^2)}$

**12.** Найдите спектральную плотность $s_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией: $K_X(\tau)=\begin{cases}\sigma^2\left(1-\frac{|\tau|}{\varepsilon}\right), & |\tau|\le\varepsilon\\ 0, & |\tau|>\varepsilon\end{cases}$.

Ответ: $s_X(\omega)=\frac{\sigma^2}{\pi\varepsilon\omega^2}(1-\cos\omega\varepsilon)$.

**13.** Случайный процесс $X(t)$ имеет математическое ожидание $m_X(t)=8$ и спектральную плотность $s_X(\omega)=\frac{20}{\pi}\cdot\frac{\omega^2+5}{\omega^4+6\omega^2+25}$. Найдите корреляционную функцию СП $X(t)$.

Ответ: $K_X(\tau)=10e^{-2|\tau|}\cos\tau$ .

**14.** Найдите спектральную плотность $s_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией $K_X(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos 3\tau\, K_X(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos 3\tau$ .

Ответ: $s_X(\omega)=\frac{A^2}{4}(\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3))$.

**15.** Стационарный случайный процесс имеет корреляционную функцию $K_X(\tau)=\sigma_X^2e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$. Найдите спектральную плотность этого процесса.

Ответ. $s_X(\omega)=\frac{8\alpha^5\sigma^2}{3\pi(\alpha^2+\omega^2)^3}$.

**16.** Задана спектральная плотность $s_X(\omega)=\frac{10\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$ стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдите нормированную спектральную плотность.

Ответ: $s_{X\text{норм}}(\omega) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$.

**17.** Задана спектральная плотность $s_X(\omega) = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}, \alpha > 0,$ дифференцируемого стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдите дисперсию производной случайного процесса $X'(t)$.

Ответ. $D_X(t) = \frac{\pi\alpha^2}{2}$.

**18.** Докажите, что зная спектральную плотность дважды дифференцируемого стационарного случайного процесса $X(t)$, можно найти спектральную плотность второй производной $X''(t)$ по формуле $s_{X''}(\omega) = \omega^4 s_X(\omega)$.

**19.** Может ли функция $K_X(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau| + \tau^2)$ быть корреляционной функцией стационарного случайного процесса $X(t)$?

Ответ. Нет.

**20.** Докажите, что для стационарных и стационарно связанных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ справедливо соотношение, связывающее взаимные спектральные плотности: $s_{XY}(-\omega) = s_{YX}(\omega)$.

**21.** Задана спектральная плотность $s_X(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}, \alpha > 0,$ стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдите спектральную функцию $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} s_X(\omega)d\omega$.

Ответ: $S_X(\omega) = D\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)$.

**22.** Докажите, что взаимные спектральные плотности дифференцируемого стационарного случайного процесса $X(t)$ и его производной $X'(t)$ связаны равенством:

$s_{XX'}(\omega) = -s_{X'X}(\omega)$.

**23.** Докажите, что, зная спектральную плотность $s_X(\omega)$ дифференцируемого стационарного случайного процесса $X(t)$, можно найти взаимную спектральную плотность случайного процесса $X(t)$ и его производной $X'(t)$ по формуле: $s_{XX'}(\omega) = i\omega s_X(\omega)$.

**24.** Найдите взаимную спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ и его производной $X'(t)$, зная корреляционную функцию $K_X(\tau) = 2e^{-\tau^2}$.

Ответ: $s_{XX'}(\omega) = \frac{i\omega}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

**25.** По виду спектральной плотности случайного процесса $X(t)$ определите, сколько производных имеет этот процесс, если $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$.

Ответ. Две производные, так как $s_X(\omega)$ с ростом $\omega$ убывает, как $\frac{1}{\omega^6}$.

## 4. Линейные динамические системы.

**Определение.** Стационарной линейной динамической системой называют устройство, которое описывается линейной динамической системой с постоянными коэффициентами, вида

$$a_0 Y^{(n)}(t) + a_1 Y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n Y(t) = b_0 X^{(m)}(t) + b_1 X^{(m-1)}(t) + \ldots + b_m X(t) = f(t) \qquad (8)$$

где $X(t)$ - стационарный случайный процесс на входе устройства (воздействие, возмущение), $Y(t)$ - случайный процесс на выходе устройства (реакция, отклик) Случайные воздействия (ошибки измерения, помехи и т.д.) приводят к тому, что на вход системы подается не функция $f(t)$, а некоторая функция $X(t) = f(t) + \varepsilon(t)$ - где $\varepsilon(t)$ - это случайный процесс. В результате выходной сигнал $Y(t)$ - также является случайным процессом. В этом случае принято говорить о стохастическом дифференциальном уравнении.

Задача интегрирования стохастического дифференциального уравнения состоит в определении вероятностных характеристик выходного сигнала $Y(t)$ по вероятностным характеристикам входного сигнала $X(t)$.

Пусть случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ стационарные случайные процессы, связанные дифференциальным уравнением вида (8). Найдем математическое ожидание $m_Y$, зная $m_X$. Для этого приравняем математические ожидания левой и правой частей уравнения (8). Учитывая, что $X(t)$ и $Y(t)$ - стационарные случайные процессы, а, следовательно, математические ожидания их производных равно нулю, получим, что $a_n m_X = b_m m_Y$, откуда $m_Y = \frac{a_n}{b_m} m_X$.

Далее введем обозначение $\frac{d}{dt} = p$, что позволяет переписать уравнение (8) в операторной форме:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) Y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m) X(t) \qquad (9)$$

Разрешая (9) относительно $Y(t)$, получаем:

$$Y(t) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} X(t) \qquad (10)$$

**Определение.** *Передаточной функцией* линейной динамической системы называют отношение многочлена от переменной $p$ при $X(t)$ к соответствующему многочлену при $Y(t)$ в операторном уравнении (9): $\varPhi(p) = \dfrac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}$

Из соотношения (10) следует, что входная и выходная функции связаны равенством: $Y(t) = \Phi(p) X(t)$.

**Определение.** *Частотной характеристикой* линейной динамической системы называют функцию, которая получается заменой аргумента $p$ в передаточной функции на аргумент $i\omega$ $(i^2 = -1,\ \omega \in R, \omega - \textit{число})$

$$\Phi(i\omega) = \frac{b_0 (i\omega)^m + b_1 (i\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad (11)$$

**Теорема.** Пусть $\Phi(i\omega)$ – частотная характеристика линейной динамической системы (8). Тогда спектральные плотности входного и выходного СП связаны равенством:

$$s_Y(\omega) = s_X(\omega) |\Phi(i\omega)|^2. \qquad (12)$$

То есть, для того, чтобы найти спектральную плотность выходного случайного процесса, надо умножить спектральную плотность входного случайного процесса на квадрат модуля частотной характеристики.

Зная спектральную плотность выходной функции можно найти ее к.ф.

$$K_Y(h) = \int_{-\infty}^{\infty} s_Y(\omega) e^{i\omega h} d\omega,$$

а, следовательно, и дисперсию

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} s_Y(\omega) d\omega.$$

**Пример 1**.

Некоторая динамическая система описывается уравнением $5\frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = 4\frac{dX(t)}{dt} + 3X(t)$. На вход этой системы подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с характеристиками $m_X = 3$ и $K_X(h) = 2e^{-\alpha|h|}, \alpha > 0$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе.

**Решение.** Приравниваем математические ожидания левой и правой частей заданного дифференциального уравнения и находим $m_Y$:

$M[5Y'(t) + Y(t)] = M[4X'(t) + 3X(t)]$, $m_Y = 3m_X = 9$.

Поскольку $X(t)$ и $Y(t)$ - стационарные функции, математические ожидания их производных равны нулю. Далее, по формуле (6)

$$s_X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} K_X(h)\cos\omega h\,dh = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha h}\cos\omega h\,dh = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Находим частотную характеристику и квадрат ее модуля. Из формулы (11)

$\Phi(i\omega) = \frac{4i\omega+3}{5i\omega+1}$, откуда $|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{9+16\omega^2}{1+25\omega^2}$.

Следовательно,

$$s_Y(\omega) = s_X(\omega)|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}\cdot\frac{9+16\omega^2}{1+25\omega^2}.$$

Тогда

$$K_Y(h) = 2\int_{-\infty}^{\infty} s_Y(\omega)\cos\omega h\,d\omega = \frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{9+16\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(1+25\omega^2)}\cos\omega h\,d\omega,$$

$$D_Y = K_Y(0) = \frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{9+16\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(1+25\omega^2)}d\omega = \frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{9+16\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(1+25\omega^2)}d\omega =$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{\omega=\alpha i}\frac{9+16\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(1+25\omega^2)} + \operatorname*{Res}_{\omega=\frac{i}{5}}\frac{9+16\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(1+25\omega^2)}\right) =$$

$$= 4\alpha i\left(\lim_{\omega\to\alpha i}\frac{9+16\omega^2}{(\omega+\alpha i)(1+25\omega^2)} + \lim_{\omega\to\frac{i}{5}}\frac{9+16\omega^2}{5(\alpha^2+\omega^2)(i+5\omega)}\right) =$$

$$= 4\alpha i\left(\frac{9-16\alpha^2}{2\alpha i(1-25\alpha^2)} + \frac{9-16/25}{5(\alpha^2-1/25)2i}\right) = \frac{2}{5}\frac{45-80\alpha^2-225\alpha+16\alpha}{1-25\alpha^2} = \frac{2}{5}\frac{16\alpha+45}{5\alpha+1}.$$

**Пример 2**. Следящая система описывается дифференциальным уравнением $\frac{d^2Y}{dt^2}+2\frac{dY}{dt}+2Y=\frac{dX}{dt}-X$. На вход этой системы подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x$ и корреляционной функцией $K_X(h) = D_X e^{-\alpha|h|}, \alpha > 0$. Найдем математическое ожидание и спектральную плотность на выходе.

**Решение.** Математическое ожидание $m_y$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе определяем по формуле $m_y = -\frac{b_m}{a_n}m_x$, то есть $m_y = -\frac{1}{2}m_x$. Спектральная плотность $s_X(\omega)$ находится аналогично предыдущему примеру:

$$s_X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} K_X(h)\cos\omega h\,dh = \frac{D_X}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha h}\cos\omega h\,dh = \frac{2D_X}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Составляем переходную функцию $\Phi(i\omega)=\dfrac{i\omega-1}{(i\omega)^2+2i\omega+2}$ и находим

$$|\Phi(i\omega)|^2=\frac{1+\omega^2}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}=\frac{1+\omega^2}{(2+\omega^2)^2}.$$

Применяя формулу (12), получим

$$s_Y(\omega)=s_X(\omega)|\Phi(i\omega)|^2=\frac{2D_X}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}\cdot\frac{1+\omega^2}{(2+\omega^2)^2}.$$

Можно было бы поставить задачу нахождения корреляционной функции выходного сигнала $Y(t)$. Тогда нужно было бы сделать еще один шаг – перейти от функции $s_Y(\omega)$ к функции $K_Y(h)$, что требует более громоздких вычислений.

## Задачи для самоконтроля.

1. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $\dfrac{d^2Y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dY(t)}{dt}+6Y(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}+X(t)$, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x=4$ и корреляционной функцией $K_X(\tau)=e^{-|\tau|}$. Найдите математическое ожидание и спектральную плотность спектрального процесса $Y(t)$ на выходе системы.

   Ответ: $m_y=2/3$, $s_y(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2s}\omega^2+(6-\omega^2)^2\right)$.

2. Динамическая система описывается уравнением $a_0\dfrac{dY(t)}{dt}+a_1Y(t)=b_0\dfrac{dX(t)}{dt}+b_1X(t)$, где $m_x=const$, $K_x(\tau)=\sigma_x^2e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha>0$. Определите математическое ожидание и дисперсию стационарного решения этого уравнения.

   Ответ. $m_y=\dfrac{b_1}{a_1}m_x$, $D_y=\dfrac{\sigma_x^2}{a_0a_1}\cdot\dfrac{a_1b_0^2\alpha+a_0b_1^2}{a_1+a_0\alpha}$.

3. Передаточная функция системы, на которую подается сигнал $X(t)$, имеет вид $\Phi(p)=\dfrac{1+T_1p}{T_1^2p^2+p+k}$, где $k=25[1/\text{с}]$, $T_1=0{,}05[\text{с}]$. Спектральная плотность входного сигнала $s_X(\omega)=\frac{2T\delta_X}{1+\omega^2T^2}$, где $T=1[\text{с}]$, $\delta_x=4[\text{град}^2/\text{с}^2]$. Найдите дисперсию выходного сигнала.

   Ответ. $D_Y=0{,}0428[\text{град}^2]$.

4. На вход колебательного звена системы автоматического регулирования, передаточная функция которой имеет вид $\Phi(p)=\dfrac{k}{Tp^2+\xi p+k}$, $\xi>0$, подается белый шум, спектральная плотность которого равна $s_X(\omega)=N$. Определите дисперсию выходного сигнала (подразумевается, что речь идет о достаточно удаленных участках времени, после окончания переходных процессов).

Ответ. $D=\dfrac{\pi kN}{\xi}$.

5. Случайный стационарный процесс $Y(t)$ связан со случайным процессом $X(t)$ уравнением $\dfrac{d^3Y(t)}{dt^3}+6\dfrac{d^2Y(t)}{dt^2}+11\dfrac{dY(t)}{dt}+6Y(t)=7\dfrac{d^3X(t)}{dt^3}+5X(t)$. Найдите спектральную плотность $s_Y(\omega)$ для стационарного решения уравнения, если $s_X(\omega)=\frac{4}{\pi(\omega^2+1)}$.

Ответ. $s_Y(\omega)=\dfrac{4(49\omega^6+25)}{\pi(\omega^2+1)^2(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$

6. Может ли уравнение $Y''(t)-2Y'(t)+3Y(t)=X(t)$, содержащее в правой части равенства стационарный процесс $X(t)$, иметь стационарное решение?

Ответ. Не может.

7. Определите спектральную плотность и корреляционную функцию стационарного решения уравнения $\dfrac{d^2Y(t)}{dt^2}+2h\dfrac{dY(t)}{dt}+k^2Y(t)=X(t)$, $k\geq h>0$, если можно считать, что $X(t)$ обладает свойствами «белого шума», т.е. $s_X(\omega)=c^2=const$.

Ответ. $s_Y(\omega)=\dfrac{1}{h\left((\omega^2-k^4)^2+4h^2\omega^2\right)}$, $K_X(\tau)=\left(\frac{\pi c^2}{2hk^2}\right)^2e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$, где $\beta=\sqrt{k^2-h^2}$.

8. На вход динамической системы первого порядка, описываемой уравнением $\dfrac{dY(t)}{dt}+\alpha Y(t)=X(t)$, $\alpha>0$, поступает случайный процесс $X(t)$, спектральная плотность которого в полосе частот $|\omega|\leq\omega_0$, где $\omega_0\geq\alpha$, может быть принята постоянной: $s_x(\omega)\approx c^2$. Найдите корреляционную функцию случайного процесса $Y(t)$ при $t>>\dfrac{1}{\alpha}$.

Ответ. $K_Y(\tau) = \frac{\pi c^2}{\alpha} e^{-|\tau|}$.

**9.** Работа динамической системы описывается дифференциальным уравнением $f\left(y'(t), y(t), x'(t), x(t), t\right) = 0$. На вход системы поступает стационарный, в широком смысле случайный процесс $X(t)$, $t \in R$, с математическим ожиданием $m_X$ и корреляционной функцией $K_X(\tau)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы, если:

а) $f\left(y'(t), y(t), x'(t), x(t), t\right) = 2y'(t) + y(t) - 3x(t)$, $m_X = 1$, $K_X(t) = e^{-2|t|}$

б) $f\left(y'(t), y(t), x'(t), x(t), t\right) = 3y'(t) + 2y(t) - 2x'(t) - 3x(t)$, $m_X = 1{,}5$, $K_X(t) = 2e^{-\frac{|t|}{3}}$;

в) $f\left(y'(t), y(t), x'(t), x(t), t\right) = 2y'(t) + y(t) - x'(t) - 3x(t)$, $m_Y = 1$, $K_X(t) = e^{-2|t|}$.

Ответ. а) $m_Y = 3$, $D_Y = \dfrac{9}{5}$; б) $m_Y = \dfrac{9}{4}$, $D_Y = \dfrac{89}{27}$; в) $m_Y = 3$, $D_Y = 2$.

**10.** Найдите дисперсию угла крена корабля $\Theta(t)$, определяемого уравнением $\ddot{\Theta}(t) + 2h\dot{\Theta}(t) + k^2\Theta(t) = k^2 F(t)$, $k > h > 0$, если угол волнового склона $F(t)$ имеет нулевое математическое ожидание, $K_F(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$, а процесс качки можно считать установившимся.

Ответ.
$$s_{X_c}(k) = \frac{k_0^4 s_x(k)}{\left|-k^2 + 2hik + k_0^2\right|^2}$$

$$D_{X_c}(t) = \frac{a\alpha(\alpha^2 + \beta^2)k_0^4}{\left((\beta_1 - \beta)^2 + (\alpha_1 - \alpha)^2\right)\left((\beta_1 + \beta)^2 + (\alpha_1 - \alpha)^2\right)(\beta_1 - \beta)^2 + (\alpha_1 + \alpha)^2(\beta_1 + \beta)^2 + (\alpha_1 + \alpha)^2} \cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{(-\beta_1^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha_1^2)^2 + 4(\alpha^2\beta_1^2 - 2\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^4 - 2\alpha^2\alpha_1^2 + \alpha_1^2\beta^2)}{\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(-\beta^2 + \beta_1^2 + \alpha^2 + \alpha_1^2)^2 + (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 + \alpha^4 - 2\alpha^2\alpha_1^2 + \alpha^2\beta_1^2)}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}\right\},$$
где $\alpha_1 = h$, $\beta_1 = \sqrt{k_0^2 - h^2}$.

**11.** Определите дисперсию ординаты центра тяжести корабля $Y_c(t)$ на волнении, если $Y''(t) + 2hY'(t) + \omega_0{}^2 Y(t) = \omega^2 X(t)$, где ордината волнового профиля $X(t)$ имеет корреляционную функцию $K_X(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$, $h$ и $\omega_0$ – постоянные, определяемые параметрами корабля, $\alpha -$ параметр, характеризующий нерегулярность волнения, $\beta -$ преобладающая частота волнения, $\omega_0 \geq h > 0$.

Ответ. Так как $X_c(t)$ стационарна, то $s_{X_c}(\omega) = \dfrac{\omega_0^4 s_x(\omega)}{\left|-\omega^2 + 2hi\omega + \omega_0^2\right|^2}$

$D_{X_c}(t) =$

$$\frac{a\alpha(\alpha^2+\beta^2)\omega_0^4}{\left((\beta_1-\beta)^2+(\alpha_1-\alpha)^2\right)\left((\beta_1+\beta)^2+(\alpha_1-\alpha)^2\right)(\beta_1-\beta)^2+(\alpha_1+\alpha)^2(\beta_1+\beta)^2+(\alpha_1+\alpha)^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{(-\beta_1^2+\beta^2+\alpha^2+\alpha_1^2)^2+4(\alpha^2\beta_1^2-2\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_1^4-2\alpha^2\alpha_1^2+\alpha_1^2\beta^2)}{\alpha_1(\alpha_1^2+\beta_1^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-\beta^2+\beta_1^2+\alpha^2+\alpha_1^2)^2+(\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2+\alpha^4-2\alpha^2\alpha_1^2+\alpha^2\beta_1^2)}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\right\},$$ где $\alpha_1 = h$,

$\beta_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$.

**12.** Дано: $Y''(t) + 8Y'(t) + 7Y(t) = X(t)$, $K_X(\tau) = 4e^{-\alpha^2\tau^2}$. Найдите корреляционную функцию $Y(t)$ для моментов времени, превосходящих время переходного процесса.

Ответ. $$K_y(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{336} 7e^{-\tau+\frac{1}{4\alpha^2}}\left\{1+\Phi\left(\sqrt{2}\left(\alpha\tau-\frac{1}{2\alpha}\right)\right)\right\} - e^{-7\tau+\frac{12,25}{\alpha^2}}\left\{1+\Phi\left(\sqrt{2}\left(\alpha\tau-\frac{3,5}{\alpha}\right)\right)\right\}+$$

$$\cdot e^{-7\tau+\frac{12,25}{\alpha^2}}\left\{1+\Phi\left(\sqrt{2}\left(\alpha\tau+\frac{1}{2\alpha}\right)\right)\right\}+7e^{\tau+\frac{1}{4\alpha^2}}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{2}\left(\alpha\tau+\frac{3,5}{\alpha}\right)\right)\right\}.$$

**13.** Воспользовавшись спектральным разложением стационарного случайного процесса $X(t)$, определите для момента времени $t \gg \dfrac{1}{a}$ дисперсию интеграла уравнения $Y'(t) + aY(t) = tX(t)$ при нулевых начальных условиях, если $s_X(\omega) = \dfrac{\sigma_x^2}{\pi}\dfrac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$.

Ответ. $D_Y(t) = \dfrac{\sigma_x^2}{a(a+\alpha)}\left(t^2 + \dfrac{2a+\alpha}{2a^2(a+\alpha)}(1-2at\right)$.

**14.** Два стационарных скалярных случайных процесса $X(t,\omega)$, $t \in T = [0;+\infty)$ и $Y(t)$, $t \in T = [0;+\infty)$, связаны равенством $5Y'(t,\omega) + Y(t,\omega) = 4X'(t,\omega) + 3X(t,\omega)$, $t \in T$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t,\omega)$, $t \in T$, если $m_x = 0$ и $K_X(\tau) = 2e^{-\alpha|\tau|}$, где $\alpha -$ известная положительная величина.

Ответ. $m_Y = 0$, $D_Y = \dfrac{0,4(16\alpha^2+45)}{5\alpha+1}$.

**15.** Найдите дисперсии решений системы уравнений в момент времени $t$: $\begin{cases} Y_1'(t)+3Y_1(t)-Y_2(t)=tX(t) \\ Y_2'(t)(t)+2Y_1(t)=0 \end{cases}$, если начальные условия нулевые, а $s_X(\omega)=\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)}$.

Ответ. $D_{Y_1}(t)=\dfrac{3}{2}e^{-4t}+\dfrac{4}{9}\left(-t^2+4t-\dfrac{20}{3}\right)e^{-3t}+\left(\dfrac{1}{2}t^2-2t+\dfrac{5}{4}\right)e^{-2t}+\dfrac{1}{9}t^2-\dfrac{1}{6}t+\dfrac{23}{108}$;

$D_{Y_2}(t)=\dfrac{3}{2}e^{-4t}-\dfrac{8}{27}\left(3t^2-6t+14\right)e^{-3t}+\left(2t^2-4t+1\right)e^{-2t}+\dfrac{8}{9}t^2-\dfrac{20}{9}t+\dfrac{89}{54}$.

**16.** Найдите дисперсии решений системы уравнений при $t=0{,}5$ сек: $\begin{cases} Y_1'(t)+3Y_1(t)-Y_2(t)=tX(t) \\ Y_2'(t)+2Y_1(t)=0 \end{cases}$, если $s_X(\omega)=\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)}$, а начальные условия нулевые.

Ответ. $D_{Y_1}(t)(0{,}5)=0{,}01078$, $D_{Y_2}(t)(0{,}5)=0{,}00150$.

**17.** Спроектированы две линейные стационарные динамические системы, на вход которых поступает стационарный случайный процесс $X(t)$. Передаточные функции систем соответственно равны: $\Phi_1(p)=\dfrac{4p+1}{3p+1}$, $\Phi_2(p)=\dfrac{p+1}{3p+1}$. Известна спектральная плотность выходного процесса: $s_X(\omega)=\dfrac{12}{\pi(\omega^2+4)}$. Какая из систем обеспечивает наименьшую дисперсию выходного процесса?

Ответ*.* Вторая система: $D_{Y_1}(t)(0{,}5)=10$, $D_{Y_2}(t)(0{,}5)=10/7$.

**18.** Случайный процесс $Y(t)$ связан со случайным процессом $X(t)$ уравнением $Y'(t)-tY(t)=X(t)$. Найдите $K_Y(t_1,t_2)$, если $K_X(\tau)=ae^{-\alpha|\tau|}$, а при $t=0$ $Y(t)=0$.

Ответ. $K_Y(t_1,t_2)=\dfrac{a\pi}{2}e^{\frac{1}{2}(t_{11}^2+t_2^2+2\alpha^2)}\Big\{\left(\Phi(\mathrm{t}_1-\alpha)+\Phi(\alpha)\right)\left(\Phi(\mathrm{t}_2+\alpha)+\Phi(\mathrm{t}_1+\alpha)\right)-$

$-\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{t_1}e^{-\frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2}\Phi(\xi+\alpha)d\xi\Big\}$, $t_2\ge t_1$.

**19.** Стационарный случайный процесс $Y(t)$ связан со стационарным случайным процессом $X(t)$, спектральная плотность которого известна, уравнением $Y''(t)+2hY'(t)+k^2Y(t)=k^2X(t)$, где $k\ge h>0$. Найдите взаимную спектральную плотность $s_{YX}(\omega)$ и корреляционную функцию связи $R_{YX}(\tau)$.

Ответ. $s_{YX}(\omega)=\dfrac{k^2s_x(\omega)}{(k^2-\omega^2)-2hi\omega}$, $R_{YX}=k^2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}\dfrac{k^2s_x(\omega)}{(k^2-\omega^2)-2hi\omega}d\omega$.

## 5. Варианты домашнего задания.

Стационарные случайные процессы связаны соотношением:

$$a_1 \frac{dY}{dt} + b_1 Y = a_2 \frac{dX}{dt} + b_2 X$$

Найдите $K_Y(\tau)$, если известна $K_X(\tau)$.

Варианты функции $K_X(\tau)$ :

1) $K_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$; 2) $K_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$;

3) $K_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(\cos \beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|)$; 4) $K_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|\right)$.

| Вар. | $K_X(\tau)$ | $\alpha$ | $\beta$ | $D$ | $a_1$ | $b_1$ | $a_2$ | $b_2$ | Вар. | $K_X(\tau)$ | $\alpha$ | $\beta$ | $D$ | $a_1$ | $b_1$ | $a_2$ | $b_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 16 | 4 | 1 | 9 | 3 | 4 | 3 | 2 | 6 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 17 | 1 | 2 | 8 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 18 | 2 | 6 | 0 | 4 | 2 | 3 | 4 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 8 | 3 | 5 | 1 | 2 | 3 | 19 | 3 | 5 | 6 | 2 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 5 | 6 | 4 | 1 | 6 | 2 | 3 | 20 | 4 | 5 | 7 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | 2 | 6 | 0 | 5 | 2 | 3 | 7 | 4 | 21 | 1 | 8 | 4 | 6 | 1 | 0 | 2 | 3 |
| 7 | 3 | 7 | 5 | 6 | 1 | 4 | 3 | 8 | 22 | 2 | 4 | 0 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 8 | 4 | 8 | 2 | 7 | 4 | 3 | 8 | 1 | 23 | 3 | 3 | 2 | 12 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 11 | 6 | 3 | 3 | 8 | 7 | 4 | 24 | 4 | 5 | 1 | 11 | 5 | 4 | 0 | 2 |
| 10 | 2 | 12 | 0 | 4 | 2 | 4 | 3 | 1 | 25 | 1 | 7 | 3 | 5 | 3 | 7 | 3 | 7 |
| 11 | 3 | 10 | 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 2 | 26 | 2 | 10 | 0 | 7 | 2 | 5 | 1 | 5 |
| 12 | 4 | 13 | 5 | 1 | 4 | 3 | 2 | 5 | 27 | 3 | 5 | 7 | 9 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| 13 | 1 | 15 | 3 | 6 | 3 | 2 | 5 | 4 | 28 | 4 | 3 | 9 | 3 | 1 | 4 | 0 | 9 |
| 14 | 2 | 2 | 0 | 7 | 2 | 5 | 4 | 3 | 29 | 1 | 8 | 3 | 7 | 2 | 1 | 3 | 6 |
| 15 | 3 | 3 | 10 | 8 | 6 | 4 | 3 | 2 | 30 | 2 | 4 | 0 | 6 | 5 | 4 | 2 | 1 |

## 6. ЛИТЕРАТУРА.


1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 400 с.
2. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000.
4. Михайлова О.В., Облакова Т.В. Случайные процессы-1. Основные понятия. Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу «Теория случайных процессов» - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 24с.
5. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М., Наука, 1970.
6. Случайные функции: Учеб. Пособие. Тескин О.И., Цветкова Г.М., Козлов Н.Е., Пашовкин Е.М. М, Изд-во МГТУ, 1994.