МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова»
(БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова»)

Факультет	И шифр	Информационные и управляющие системы наименование
Кафедра	И4 шифр	Радиоэлектронные системы управления наименование
Дисциплина	Математическая статистика и случайные величины	

Лабораторная работа №4

«Оценивание параметров вероятностных распределений в пакете MATHCAD»

ВЫПОЛНИЛ студент группы И465
Масюта А.А.
Фамилия И.О.

ВАРИАНТ № 10

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ
Мартынова Т.Е.
Фамилия И.О.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019 г.

Краткие сведения из теории

Пусть по значениям измерений некоторой случайной величины требуется найти число, близкое к неизвестному значению измеряемого параметра. Например, пусть по значениям выборки объема n необходимо оценить неизвестный параметр θ закона распределения случайной величины

$$X\ P(X \le x) = F(\theta, x).$$

Точечной оценкой неизвестного параметра θ называется произвольная функция элементов выборки $\theta = f_{\theta}$ (x1, x2 ,..., xn). Значения этой функции при полученных в результате измерений Xi = xi , i =1,2,...,n будут считаться приближенным значением параметра θ.

Любая функция результатов опытов, которая не зависит от неизвестных статистических характеристик, называется статистикой.

Точечной оценкой статистической характеристики θ (параметра) называется статистика, реализация которой, полученная в результате опытов, принимается за неизвестное истинное значение параметра θ.

Метод максимального правдоподобия

Один из важнейших методов для отыскания оценок параметров по данным выборки был предложен Р. Фишером и носит название метода наибольшего (или максимального) правдоподобия. Пусть имеется выборка объема n : x1, x2 ,..., xn из генеральной совокупности с теоретической функцией распределения F(x). Если случайная величина X , представленная этой выборкой, дискретна, то ее ряд распределения P(X = xi), i = 1, n . Пусть распределение имеет k неизвестных параметров θ1, θ2,...,θk , которые нужно оценить.

Тогда функция L = L(x1, x2 ,..., xn , θ1, θ2 ,..., θk) = P(x1, θ1, θ2 ,..., θk)× P(x2 , θ1, θ2 ,..., θk)· ... · P(xn , θ1, θ2 ,..., θk) называется функцией правдоподобия. Ее значение – это вероятность произведения событий, X = x2 ,…, X = xn , или, иначе, совместная вероятность появления чисел x1, x2 ,..., xn . Чем больше значение L , тем правдоподобнее или более вероятно появление в результате наблюдений чисел x1, x2 ,..., xn .

Сущность интервального оценивания

Поскольку все точечные оценки основаны на данных выборки, следовательно, они являются случайными величинами. Интервальные оценки учитывают факт случайности точечных оценок и дают представление об их точности и надежности.

$$I_{\beta} = \left(m_X^* - \varepsilon,\ m_X^* + \varepsilon\right)$$

Вероятность β называется доверительной вероятностью, а I_β - доверительным интервалом. Границы доверительного интервала могут быть вычислены точно и приближенно.

Ход работы

$ORIGIN := 1$

$l := 2.5$

$s := 3$

$n := 100$

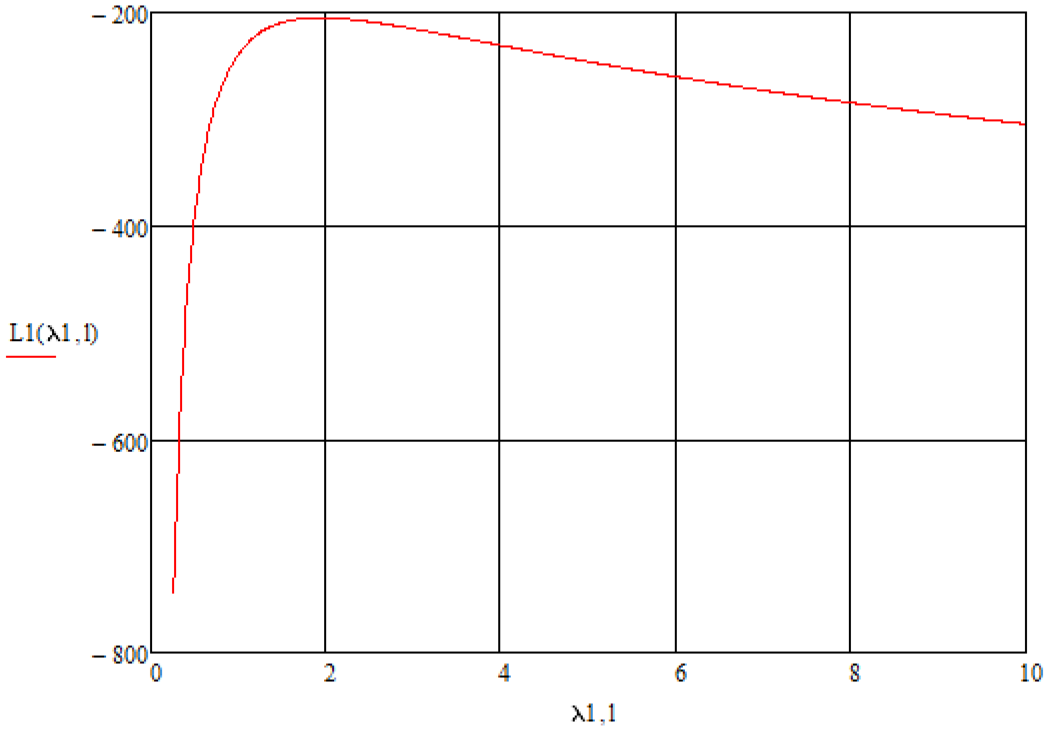
$x := rlogis(n, l, s)$

$x =$

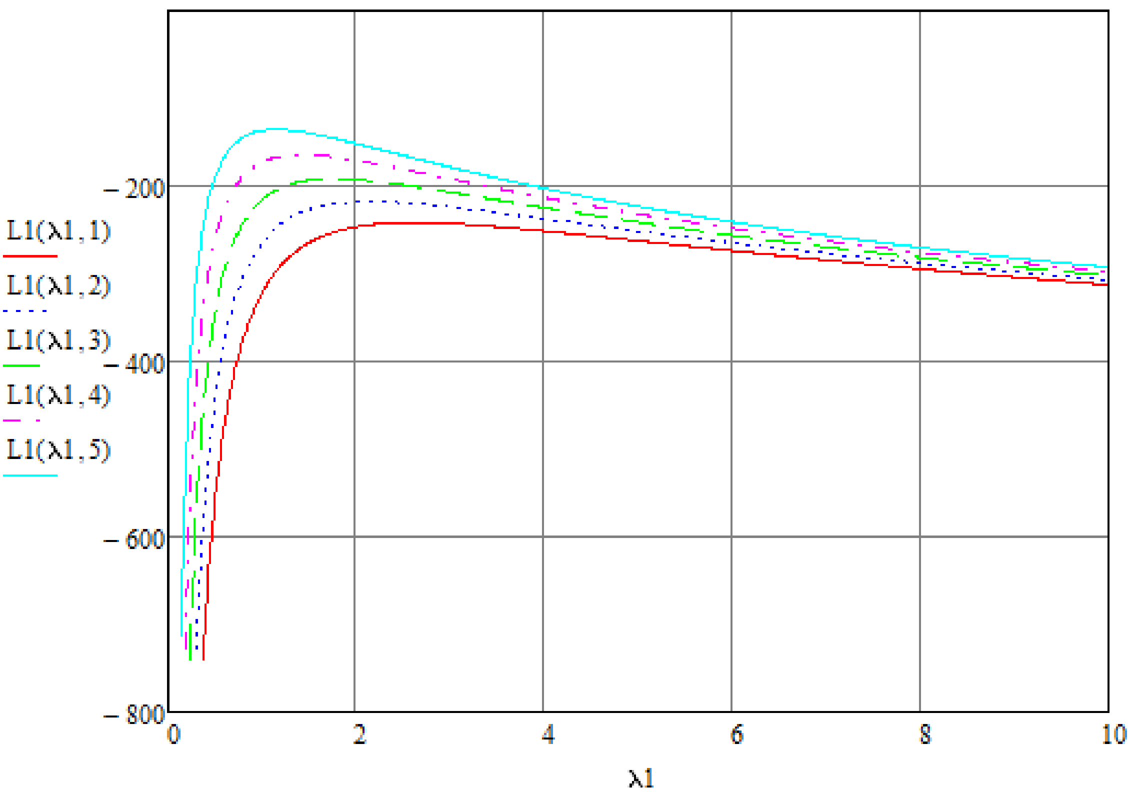
	1
1	1.315
2	1.267
3	10.301
4	-0.368
5	2.809
6	9.707
7	-6.467
8	-0.206
9	-0.668
10	0.668
11	7.018
12	0.268
13	12.126
14	10.429
15	-3.98
16	...

$$L(\lambda1, l) := \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{-(x_i - l)}{\lambda1}}}{\lambda1 \cdot \left[1 + e^{\frac{-(x_i - l)}{\lambda1}}\right]}$$

$$L1(\lambda1, l) := \ln(L(\lambda1, l))$$



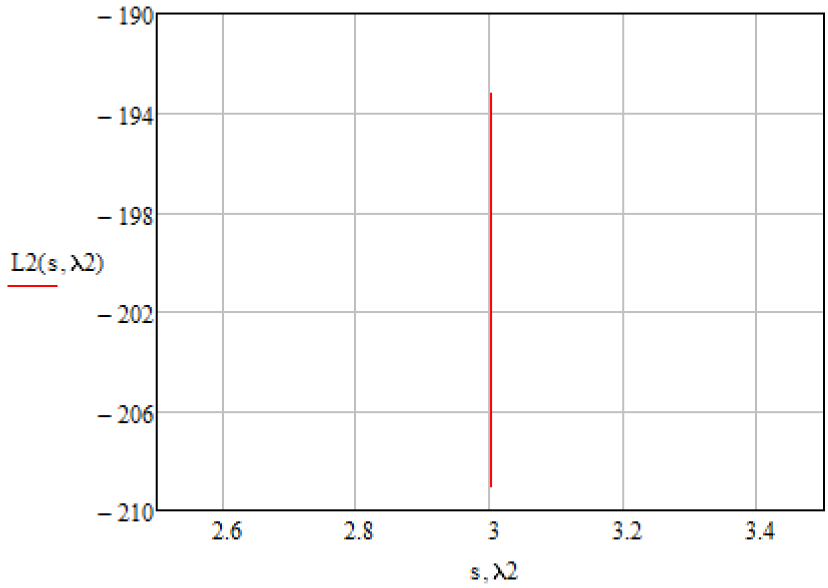
−200
−400
−600
−800
0
2
4
6
8
10
L1(λ1,1)
λ1,1



−200
−400
−600
−800
0
2
4
6
8
10
L1(λ1, 1)
L1(λ1, 2)
L1(λ1, 3)
L1(λ1, 4)
L1(λ1, 5)
λ1

$$L(s,\lambda 2) := \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{-(x_i-\lambda 2)}{s}}}{s\cdot\left[1+e^{\frac{-(x_i-\lambda 2)}{s}}\right]^{2}}$$

$$L2(s,\lambda 2) := \ln(L(s,\lambda 2))$$



$\beta := 0.95$

$t1 := qnorm\left(\frac{1+\beta}{2}, 0, 1\right)$

$t1 = 1.96$

$\varepsilon := \sqrt{\frac{D}{n}} \cdot t1 = 0.167$

$Mxl := m - \varepsilon = 0.868$

$Mxr := m + \varepsilon = 1.202$

$\varepsilon1 := \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot D \cdot t1 = 0.238$

$Dxl := D - \varepsilon1 = 1.192$

$Dxr := D + \varepsilon1 = 1.667$

$t11 := qt\left(\frac{1+\beta}{2}, n\right)$

$t11 = 1.984$

$\varepsilon\varepsilon := \sqrt{\frac{D}{n}} \cdot t11 = 0.168$

$Mxl1 := m - \varepsilon\varepsilon = 0.867$

$Mxr1 := m + \varepsilon\varepsilon = 1.203$

$t11 := qchisq\left(\frac{1-\beta}{2}, n-1\right) = 73.361$

$t22 := qchisq\left(\frac{1+\beta}{2}, n-1\right) = 12$

$Dxl1 := D \cdot \frac{n-1}{t22} = 1.102$

$Dxr1 := D \cdot \frac{n-1}{t11} = 1.929$

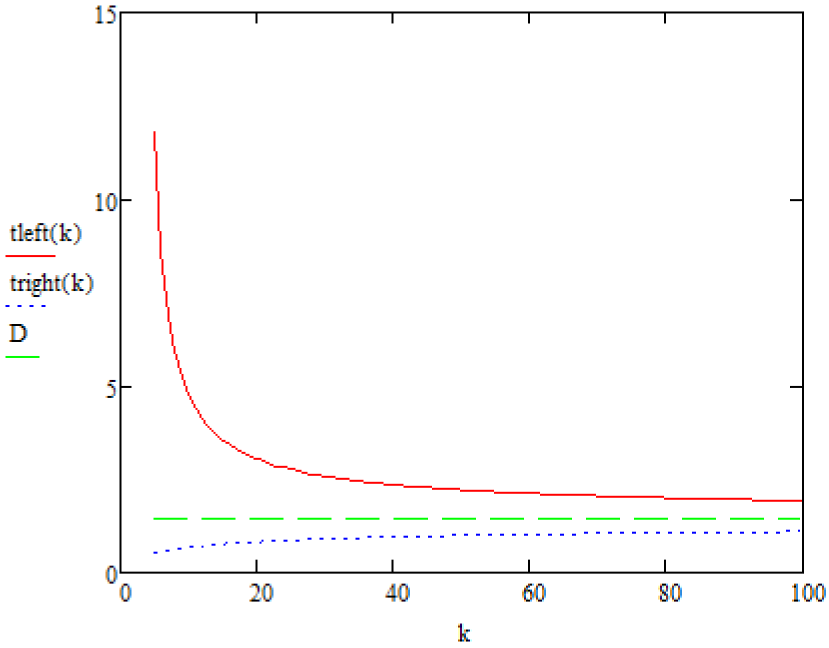
$\beta1 := \frac{1-\beta}{2}$

$\beta2 := \frac{1+\beta}{2}$

$k := 5..100$

$tright(k) := D \cdot \frac{k-1}{qchisq(\beta2, k-1)}$

$tleft(k) := D \cdot \frac{k-1}{qchisq(\beta1, k-1)}$



Вывод

При проведении лабораторной работы были получены точечные и интервальные оценки математического ожидания и дисперсии в пакете MATHCAD. Экспериментальным (графическим) способом было получено максимальное значение логарифма функции правдоподобия (λ≈2)