МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова»
(БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова»)

Факультет	И шифр	Информационные и управляющие системы наименование
Кафедра	И4 шифр	Радиоэлектронные системы управления наименование
Дисциплина	Математическая статистика и случайные величины	

Лабораторная работа №6

«Анализ линейной стационарной непрерывной системы в математическом пакете MATHCAD»

ВЫПОЛНИЛ студент группы И465

Масюта А.А.
Фамилия И.О.

ВАРИАНТ № 10

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

Мартынова Т.Е.
Фамилия И.О.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019 г.

Краткие сведения из теории

$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$; $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{du}$ уравнения состояния и выхода, где:

$x = (x_{1,} x_{2,} \dots x_{n,})^T$ – вектор состояния

$u = (u_{1,} u_{2,} \dots u_{r,})^T$ – входной сигнал

$y = (y_{1,} y_{2,} \dots y_{m,})^T$ – выходной сигнал

$A - n \times n$ – матрица системы

$B - n \times r$ – матрица входа

$C - m \times n$ – матрица выхода

$D - m \times r$ – матрица обхода системы

n – порядок системы

r – число входов

m – число выходов

Характеристический полином $\boldsymbol{P(\lambda)}$ – определитель матрицы $\lambda I - A$ где I-единичная матрица:

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A\ )$

Собственные числа линейной стационарной называют корни ее характеристического полинома.

$W(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$ – передаточная функция линейной стационарной системы

Сужение $W(p)$ на мнимую ось называют частотной характеристикой

$|W(i\omega)|$ – амплитудная частотная характеристика

$argW(i\omega)$ – фазовая частотная характеристика.

Ход решения

$ORIGIN := 1$

$Ds := 2\cdot\pi \quad \lambda := 1$

$$S(\omega) := \frac{2\cdot\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \qquad A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D := (0)$$

$$r := eigenvals(A) = \begin{pmatrix} -2 + 3i \\ -2 - 3i \\ -3 \end{pmatrix}$$

$n := cols(A) = 3$

$$H := identity(cols(A)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H(p) := p\cdot H - A \rightarrow \begin{pmatrix} p+1 & -2 & 4 \\ 2 & p & 1 \\ -4 & 1 & p+6 \end{pmatrix}$$

$H1(p) := H(p)^{-1}$

$$H1(p) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{p^2 + 6\cdot p - 1}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} & \frac{2\cdot p + 16}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} & -\frac{4\cdot p + 2}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} \\ -\frac{2\cdot p + 16}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} & \frac{p^2 + 7\cdot p + 22}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} & -\frac{p - 7}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} \\ \frac{4\cdot p + 2}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} & -\frac{p - 7}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} & \frac{p^2 + p + 4}{p^3 + 7\cdot p^2 + 25\cdot p + 39} \end{pmatrix}$$

$$W(p) := C\cdot H1(p)\cdot B + D \text{ simplify } \rightarrow \left(\frac{6}{p^2 + 4\cdot p + 13}\right)$$

$i := \sqrt{-1}$

$$W(p) \text{ substitute}, p = i\cdot\omega \rightarrow \left(\frac{6}{13 - \omega^2 + 4i\cdot\omega}\right)$$

$$W(i\cdot\omega) \text{ simplify } \rightarrow \left(\frac{6}{13 - \omega^2 + 4i\cdot\omega}\right)$$

$$W(p) \text{ substitute}, p = -i\cdot\omega \rightarrow \left(-\frac{6}{\omega^2 - 13 + 4i\cdot\omega}\right) \qquad W(-i\cdot\omega) \text{ simplify } \rightarrow \left[\frac{6\cdot\left(13 - \omega^2 + 4i\cdot\omega\right)}{\omega^4 - 10\cdot\omega^2 + 169}\right]$$

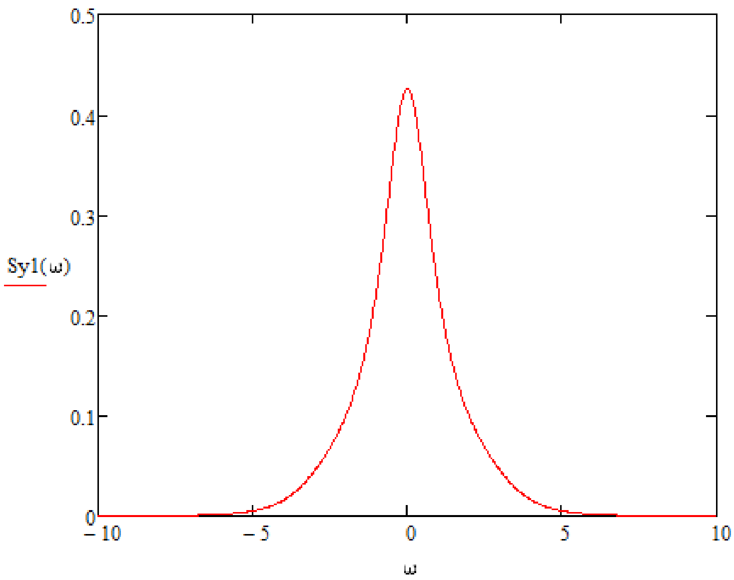
$$V1(\omega) := \frac{6}{13 - \omega^2 + 4\cdot i\cdot\omega} \qquad V2(\omega) := \frac{6\cdot\left(13 - \omega^2 + 4\cdot i\cdot\omega\right)}{\omega^4 - 10\cdot\omega^2 + 169} \qquad V3(\omega) := V2(\omega)^T$$

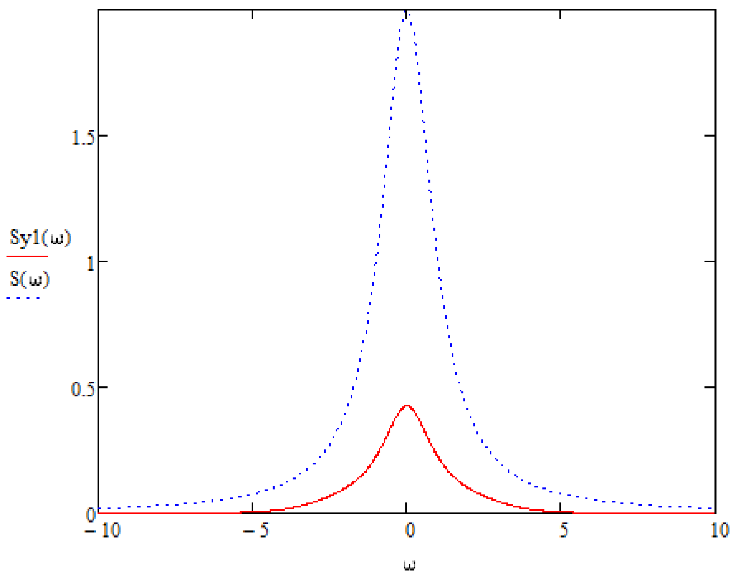
$$V3(\omega) \rightarrow \left(\frac{78 - 6\cdot\omega^2 + 24i\cdot\omega}{\omega^4 - 10\cdot\omega^2 + 169}\right)^T \qquad Spectr(\omega) := V1(\omega)\cdot V3(\omega) \rightarrow \frac{6\cdot\left(\frac{78 - 6\cdot\omega^2 + 24i\cdot\omega}{\omega^4 - 10\cdot\omega^2 + 169}\right)^T}{13 - \omega^2 + 4i\cdot\omega}$$

$$Sy(\omega) := S(\omega)\cdot Spectr(\omega) \rightarrow \frac{12\cdot\left(\frac{78-6\cdot\omega^2+24i\cdot\omega}{\omega^4-10\cdot\omega^2+169}\right)^T}{\left(\omega^2+1\right)\cdot\left(13-\omega^2+4i\cdot\omega\right)}$$

$$Sy1(\omega) := Sy(\omega)_{1,1}$$

$$Sy1(\omega) \rightarrow \left[\frac{12\cdot\left(\frac{78-6\cdot\omega^2+24i\cdot\omega}{\omega^4-10\cdot\omega^2+169}\right)^T}{\left(\omega^2+1\right)\cdot\left(13-\omega^2+4i\cdot\omega\right)}\right]_{1,1} \qquad Sy1(\omega) := \frac{12\,\frac{78-6\cdot\omega^2+24i\cdot\omega}{\omega^4-10\cdot\omega^2+169}}{\left[\left(\omega^2+1\right)\cdot\left(13-\omega^2+4i\cdot\omega\right)\right]}$$





Вывод: с помощью математического пакета MATHCAD была найдена спектральная плотность установившегося выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы с уравнением движения $x' = Ax + Bu, y = Cx$:

$$Sy1(\omega) := \frac{12\,\frac{78-6\cdot\omega^2+24i\cdot\omega}{\omega^4-10\cdot\omega^2+169}}{\left[\left(\omega^2+1\right)\cdot\left(13-\omega^2+4i\cdot\omega\right)\right]}$$

Также построен её график, и приведено сравнение со спектральной плотностью $S(\omega)$.