МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова»
(БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова»)

Факультет	О	Естественнонаучный
	шифр	наименование
Кафедра	О6	Высшая математика
	шифр	наименование
Дисциплина	Математическая статистика и случайные процессы	

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

на тему «Вычисление дисперсии выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы при случайном воздействии в пакете MATHCAD»

Вариант №4

Выполнил студент группы И967
Васильев Н.А.
Фамилия И.О.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ
Мартынова Т.Е.
Фамилия И.О. Подпись

«_____» __________________ 2019 г.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019 г.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В курсе теории автоматического управления рассматриваются линейные стационарные системы, уравнения состояния и выхода которых имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{3.62}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_2, \ldots u_r)^T$ – входной сигнал, $y = (y_1, y_2, \ldots y_m)^T$ – выходной сигнал, $A - n \times n$ – матрица системы, $B - n \times r$ – матрица входа, $C - m \times n$ – матрица выхода, $D - m \times r$ – матрица обхода системы.

Все эти четыре матрицы имеют постоянные элементы. Если эти элементы меняются с течением времени, то система перестает быть стационарной. Число компонент n вектора состояния называют *порядком* системы, число компонент r входного сигнала – *числом входов*, а число компонент m выходного сигнала – *числом выходов*.

Характеристическим полиномом $P(\lambda)$ линейной стационарной системы (3.62) называется определитель матрицы $\lambda I - A$, где I – единичная матрица:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A). \tag{3.64}$$

Например, характеристический полином (3.63) в соответствии с этим определением имеет вид

$$P(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6. \tag{3.65}$$

Собственными числами линейной стационарной системы называются корни ее характеристического полинома, т.е. собственные числа матрицы системы $\lambda I - A$. Например, собственные числа

Уравнение состояния системы (3.62)

$$x' = Ax + Bu \tag{3.66}$$

есть система линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Если известно ее состояние в начальный момент $x(0) = x_0$ и входной сигнал $u = u(t)$ для $t > 0$, то состояние системы $x = x(t)$ может быть найдено для любого $t > 0$.

Применим преобразование Лапласа для решения уравнения состояния (3.66). Пусть

$$x(t) \cdot 1(t) \doteqdot X(p) \text{ и } u(t)1(t) \doteqdot U(p) \tag{3.67}$$

– соответствия между оригиналами и их изображениями по Лапласу, в которых функция Хевисайда (единичного скачка, см. табл. 6 на с. 140, п. 1) обозначена через $1(t)$. По второй теореме о дифференцировании оригинала,

$$x'(t)1(t) \doteqdot pX(p) - x_0. \tag{3.68}$$

Преобразуя (3.66) с учетом (3.67) и (3.68) по Лапласу и помня о линейности этого преобразования, получим

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p). \tag{3.69}$$

Перенесем столбец x_0 в правую часть (3.69), а произведение $AX(p)$ в левую:

$$pX(p) - AX(p) = x_0 + BU(p). \qquad (3.70)$$

Вынесем столбец $X(p)$ вправо за скобки:

$$(pI - A)X(p) = x_0 + BU(p). \qquad (3.71)$$

Умножим правую и левую части (3.71) слева на матрицу $(pI - A)^{-1}$:

$$X(p) = (pI - A)^{-1} x_0 + (pI - A)^{-1} BU(p). \qquad (3.72)$$

Первое слагаемое в правой части (3.72) является изображением собственного движения системы, второе – изображением вынужденной составляющей. Преобразуем уравнение выхода $y = Cx + Du$ по Лапласу и подставим в него результат из (3.72):

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1} x_0 + [C(pI - A)^{-1} B + D]U(p). \qquad (3.73)$$

Введем обозначение

$$W(p) = C(pI - A)^{-1} B + D \qquad (3.74)$$

и запишем (3.73) в виде

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1} x_0 + W(p)U(p). \qquad (3.75)$$

Матрица (3.74) называется *передаточной функцией* линейной стационарной системы. Знания этой матрицы достаточно для нахождения выходного сигнала по известному входному при $x_0 = 0$, так как в этом случае (3.75) принимает вид

$$Y(p) = W(p)U(p). \qquad (3.76)$$

Как видно из (3.76), передаточная функция имеет столько строк, сколько у системы выходов, и столько столбцов, сколько входов.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАНИЯ

Найти дисперсию выходного сигнала системы $x' = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u,\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,$, на выходе которой – белый шум единичной интенсивности.

Вариант:

Значения матрицы A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{pmatrix}$

СКРИНШОТЫ

$ORIGIN := 1$

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

$I := \mathrm{identity}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r := \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$M(p) := p \cdot I - A \rightarrow \begin{pmatrix} p & -1 \\ 15 & p+8 \end{pmatrix} \qquad i := \sqrt{-1}$

$$N(p) := M(p)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{p+8}{p^2 + 8 \cdot p + 15} & \dfrac{1}{p^2 + 8 \cdot p + 15} \\ -\dfrac{1}{\dfrac{p^2}{15} + \dfrac{8 \cdot p}{15} + 1} & \dfrac{p}{15 \cdot \left(\dfrac{p^2}{15} + \dfrac{8 \cdot p}{15} + 1 \right)} \end{bmatrix}$$

$$W(p) := C\cdot N(p)\cdot B \rightarrow \frac{1}{p^2+8\cdot p+15} + \frac{p+8}{p^2+8\cdot p+15} \text{ simplify } \rightarrow \frac{p+9}{(p+3)\cdot(p+5)}$$

$$W(p) \text{ substitute}, p = i\cdot w \rightarrow \frac{9+w\cdot i}{(3+w\cdot i)\cdot(5+w\cdot i)} \text{ simplify } \rightarrow -\frac{-9+3i\cdot w}{w^2+9} + \frac{-10+2i\cdot w}{w^2+25}$$

$$W(p) \text{ substitute}, p = -i\cdot w \rightarrow -\frac{-9+w\cdot i}{(-3+w\cdot i)\cdot(-5+w\cdot i)} \text{ simplify } \rightarrow \frac{9+3i\cdot w}{w^2+9} - \frac{10+2i\cdot w}{w^2+25}$$

$$V(w) := W(p) \text{ substitute}, p = i\cdot w \rightarrow \frac{9+w\cdot i}{(3+w\cdot i)\cdot(5+w\cdot i)} \text{ simplify } \rightarrow -\frac{-9+3i\cdot w}{w^2+9} + \frac{-10+2i\cdot w}{w^2+25}$$

$$V1(w) := W(p) \text{ substitute}, p = -i\cdot w \rightarrow -\frac{-9+w\cdot i}{(-3+w\cdot i)\cdot(-5+w\cdot i)} \text{ simplify } \rightarrow \frac{9+3i\cdot w}{w^2+9} - \frac{10+2i\cdot w}{w^2+25}$$

$$Su := 1$$

$$Sy(w) := V(w)\cdot Su\cdot V1(w) \rightarrow -\left(\frac{-9+3i\cdot w}{w^2+9} - \frac{-10+2i\cdot w}{w^2+25}\right)\cdot\left(\frac{9+3i\cdot w}{w^2+9} - \frac{10+2i\cdot w}{w^2+25}\right) \text{ simplify } \rightarrow \frac{w^2+81}{\left(w^2+9\right)\cdot\left(w^2+25\right)}$$

$$f1(w) := w^2+81 \text{ rectangular } \rightarrow w^2+81$$

$$f2(w) := \left(w^2+9\right)\cdot\left(w^2+25\right) \text{ rectangular } \rightarrow w^4+34\cdot w^2+225$$

$$f(w) := \frac{f1(w)}{f2(w)} \rightarrow \frac{w^2+81}{w^4+34\cdot w^2+225}$$

$$\int f(w)\,dw \rightarrow \frac{3\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{w}{3}\right)}{2} - \frac{7\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{w}{5}\right)}{10}$$

$$\lim_{w\to\infty}\left(\frac{3\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{w}{3}\right)}{2} - \frac{7\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{w}{5}\right)}{10}\right) \rightarrow \frac{2\cdot\pi}{5}$$

$$\lim_{w\to-\infty}\left(\frac{3\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{w}{3}\right)}{2} - \frac{7\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{w}{5}\right)}{10}\right) \rightarrow -\frac{2\cdot\pi}{5} \qquad Dy := 2\cdot\frac{2\cdot\pi}{5} = 2.513$$

Вывод: В ходе выполнения данной лабораторной работы была найдена дисперсия выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы при случайном воздействии.