МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова»
(БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова»)

Факультет	О	Естественнонаучный
	шифр	наименование
Кафедра	О6	Высшая математика
	шифр	наименование
Дисциплина	Математическая статистика и случайные процессы	

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

на тему «Анализ линейной стационарной непрерывной системы в пакете MATHCAD»

Вариант №4

Выполнил студент группы И967
Васильев Н.А.
Фамилия И.О.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ
Мартынова Т.Е.
Фамилия И.О. Подпись

«_____» ___________________ 2019 г.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019 г.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В курсе теории автоматического управления рассматриваются линейные стационарные системы, уравнения состояния и выхода которых имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{3.62}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_2, \ldots u_r)^T$ – входной сигнал, $y = (y_1, y_2, \ldots y_m)^T$ – выходной сигнал, $A - n \times n$ – матрица системы, $B - n \times r$ – матрица входа, $C - m \times n$ – матрица выхода, $D - m \times r$ – матрица обхода системы.

Все эти четыре матрицы имеют постоянные элементы. Если эти элементы меняются с течением времени, то система перестает быть стационарной. Число компонент n вектора состояния называют *порядком* системы, число компонент r входного сигнала – *числом входов*, а число компонент m выходного сигнала – *числом выходов*.

Характеристическим полиномом $P(\lambda)$ линейной стационарной системы (3.62) называется определитель матрицы $\lambda I - A$, где I – единичная матрица:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A). \tag{3.64}$$

Например, характеристический полином (3.63) в соответствии с этим определением имеет вид

$$P(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6. \tag{3.65}$$

Собственными числами линейной стационарной системы называются корни ее характеристического полинома, т.е. собственные числа матрицы системы $\lambda I - A$. Например, собственные числа

Уравнение состояния системы (3.62)

$$x' = Ax + Bu \tag{3.66}$$

есть система линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Если известно ее состояние в начальный момент $x(0) = x_0$ и входной сигнал $u = u(t)$ для $t > 0$, то состояние системы $x = x(t)$ может быть найдено для любого $t > 0$.

Применим преобразование Лапласа для решения уравнения состояния (3.66). Пусть

$$x(t) \cdot 1(t) \doteq X(p) \text{ и } u(t)1(t) \doteq U(p) \tag{3.67}$$

– соответствия между оригиналами и их изображениями по Лапласу, в которых функция Хевисайда (единичного скачка, см. табл. 6 на с. 140, п. 1) обозначена через $1(t)$. По второй теореме о дифференцировании оригинала,

$$x'(t)1(t) \doteq pX(p) - x_0. \tag{3.68}$$

Преобразуя (3.66) с учетом (3.67) и (3.68) по Лапласу и помня о линейности этого преобразования, получим

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p). \tag{3.69}$$

Перенесем столбец x_0 в правую часть (3.69), а произведение $AX(p)$ в левую:

$$pX(p) - AX(p) = x_0 + BU(p). \qquad (3.70)$$

Вынесем столбец $X(p)$ вправо за скобки:

$$(pI - A)X(p) = x_0 + BU(p). \qquad (3.71)$$

Умножим правую и левую части (3.71) слева на матрицу $(pI - A)^{-1}$:

$$X(p) = (pI - A)^{-1}x_0 + (pI - A)^{-1}BU(p). \qquad (3.72)$$

Первое слагаемое в правой части (3.72) является изображением собственного движения системы, второе – изображением вынужденной составляющей. Преобразуем уравнение выхода $y = Cx + Du$ по Лапласу и подставим в него результат из (3.72):

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1}x_0 + [C(pI - A)^{-1}B + D]U(p). \qquad (3.73)$$

Введем обозначение

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B + D \qquad (3.74)$$

и запишем (3.73) в виде

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1}x_0 + W(p)U(p). \qquad (3.75)$$

Матрица (3.74) называется *передаточной функцией* линейной стационарной системы. Знания этой матрицы достаточно для нахождения выходного сигнала по известному входному при $x_0 = 0$, так как в этом случае (3.75) принимает вид

$$Y(p) = W(p)U(p). \qquad (3.76)$$

Как видно из (3.76), передаточная функция имеет столько строк, сколько у системы выходов, и столько столбцов, сколько входов.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАНИЯ

Найти спектральную плотность установившегося выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы с уравнениями движения $x' = Ax + Bu, \dot{y} = Cx$ и построить график спектральной плотности первой компоненты этого сигнала. На вход системы подается стационарный случайный процесс с ковариационной функцией $K_u(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{2\lambda}{\omega^2+\lambda^2}$.

Вариант:

№ вар.	A	B	C	D	σ^2	λ
11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	8π	3

СКРИНШОТЫ

Данная линейная стационарная система есть система третьего порядка, так как размерность матрицы A – 3x3, с одним входом, т. к. в матрице B только один столбец, и с тремя выходами, так как в матрице C 3 столбца. Прежде чем находить спектральную плотность установившегося выходного сигнала, необходимо было убедиться, что система асимптотически устойчива. Это действительно так, поскольку все три собственных числа системы в матрице r имеют отрицательные вещественные части. Система асимптотически устойчива, и на ее выходе устанавливается с течением времени стационарный процесс, чью спектральную плотность необходимо найти.

$ORIGIN := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \qquad \lambda := 3 \qquad Ds := 8\pi$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S(w) := \frac{Ds}{2\cdot\pi}\cdot\frac{2\cdot\lambda}{w^2+\lambda^2}$$

$$r := \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -2+3i \\ -2-3i \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$n := \mathrm{cols}(A) = 3$$

$$H := \mathrm{identity}(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(p) := p\cdot H - A \rightarrow \begin{pmatrix} p & -1 & 5 \\ 1 & p+1 & 2 \\ -5 & 2 & p+7 \end{pmatrix}$$

$$H1(p) := H(p)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{p^2+8\cdot p+3}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} & \frac{p+17}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} & -\frac{5\cdot p+7}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} \\ -\frac{p+17}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} & \frac{p^2+7\cdot p+25}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} & -\frac{2\cdot p-5}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} \\ \frac{5\cdot p+7}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} & -\frac{2\cdot p-5}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} & \frac{p^2+p+1}{p^3+8\cdot p^2+29\cdot p+52} \end{pmatrix}$$

$$H1(p)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2\cdot p+4}{p^2+4\cdot p+13}-\frac{1}{p+4} & \frac{p+17}{(p+4)\cdot(p^2+4\cdot p+13)} & -\frac{5\cdot p+7}{(p+4)\cdot(p^2+4\cdot p+13)} \\ \frac{p-1}{p^2+4\cdot p+13}-\frac{1}{p+4} & \frac{3}{p^2+4\cdot p+13}+\frac{1}{p+4} & -\frac{2\cdot p-5}{(p+4)\cdot(p^2+4\cdot p+13)} \\ \frac{5\cdot p+7}{(p+4)\cdot(p^2+4\cdot p+13)} & -\frac{2\cdot p-5}{(p+4)\cdot(p^2+4\cdot p+13)} & \frac{1}{p+4}-\frac{3}{p^2+4\cdot p+13} \end{bmatrix}$$

$$W(p) := C\cdot H1(p)\cdot B + D\ \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{p+4} \\ \frac{3}{p+4} \end{pmatrix} \qquad i := \sqrt{-1}$$

$$W(p)\ \text{substitute}, p = i\cdot w \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4+w\cdot i} \\ \frac{3}{4+w\cdot i} \end{pmatrix} \qquad V1(w) := \begin{pmatrix} \frac{1}{4+w\cdot i} \\ \frac{3}{4+w\cdot i} \end{pmatrix}$$

$$W(p)\ \text{substitute}, p = -i\cdot w \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{-4+w\cdot i} \\ -\frac{3}{-4+w\cdot i} \end{pmatrix} \qquad V2(w) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{-4+w\cdot i} \\ -\frac{3}{-4+w\cdot i} \end{pmatrix}$$

$$V3(w) := V2(w)^T \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{-4+w\cdot i} & -\frac{3}{-4+w\cdot i} \end{pmatrix}$$

$$Spectr(w) := V1(w)\cdot V3(w) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)} & -\frac{3}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)} \\ -\frac{3}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)} & -\frac{9}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)} \end{bmatrix}$$

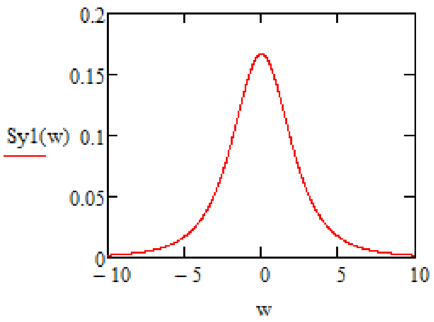
$$Sy(w) := S(w)\cdot Spectr(w) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{24}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)} & -\frac{72}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)} \\ -\frac{72}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)} & -\frac{216}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)} \end{bmatrix}$$

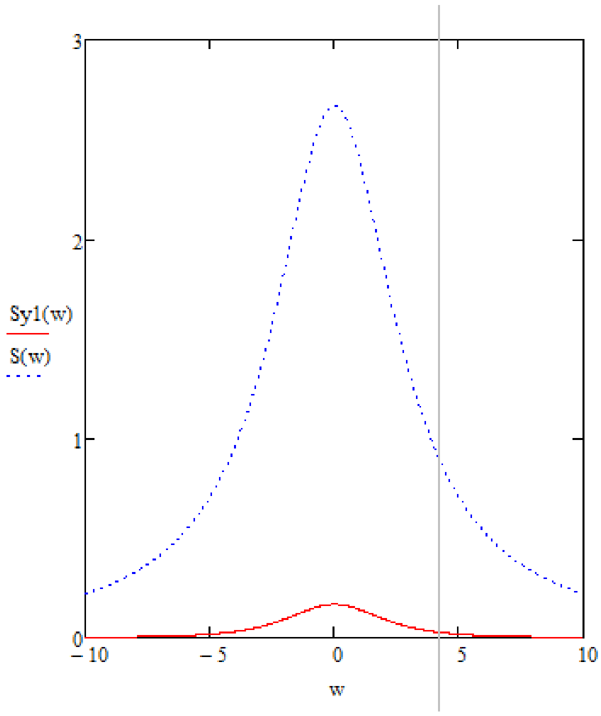
$$Sy1(w) := Sy(w)_{1,1} \rightarrow -\frac{24}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)}\ \text{rectangular} \rightarrow \frac{24}{w^4+25\cdot w^2+144}$$

$$Sy2(w) := Sy(w)_{1,2} \rightarrow -\frac{72}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)}\ \text{rectangular} \rightarrow \frac{72}{w^4+25\cdot w^2+144}$$

$$Sy3(w) := Sy(w)_{2,1} \rightarrow -\frac{72}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)}\ \text{rectangular} \rightarrow \frac{72}{w^4+25\cdot w^2+144}$$

$$Sy4(w) := Sy(w)_{2,2} \rightarrow -\frac{216}{(-4+w\cdot i)\cdot(4+w\cdot i)\cdot(w^2+9)}\ \text{rectangular} \rightarrow \frac{216}{w^4+25\cdot w^2+144}$$





Вывод: В ходе выполнения данной лабораторной работы была найдена спектральная плотность установившегося выходного сигнала линейной стационарной непрерывной системы, а также построен график спектральной плотности первой компоненты сигнала и график сравнения спектральных плотностей первой компоненты выходного сигнала со входным. По полученным данным можно сделать вывод, что спектральная плотность 1 компоненты выходного сигнала в несколько раз меньше спектральной плотности входного.