



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова»
(БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова)

Факультет	<u>О</u> шифр	<u>Естественнаучный</u> наименование
Кафедра	<u>Об</u> шифр	<u>Высшая математика</u> наименование
Дисциплина	<u>Математическая статистика и случайные процессы</u>	

Индивидуальное домашнее задание №2

«Преобразование случайного стационарного процесса (ССП)
линейной динамической системой»

ВЫПОЛНИЛ студент группы И465
Васильев Н.А.
Фамилия И.О.

ВАРИАНТ № 4

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

Мартынова Т.Е.
Фамилия И.О.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019 г

Задание

Стационарные случайные процессы связаны соотношением:

$$a_1 \frac{dY}{dt} + b_1 Y = a_2 \frac{dX}{dt} + b_2 X$$

Найдите $K_Y(\tau)$, если известна $K_X(\tau)$.

$$K_X(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right);$$

α	β	D	a_1	b_1	a_2	b_2
10	4	3	5	4	3	2

Решение

$$\alpha := 10 \quad \beta := 4 \quad D := 3$$

$$a_1 := 5 \quad b_1 := 4$$

$$a_2 := 3 \quad b_2 := 2$$

$$K_{X1}(\tau) := D \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|} \cdot \left(\cos(\beta \cdot \tau) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin(\beta \cdot |\tau|) \right)$$

$$K_{X1}(\tau) \rightarrow 3 \cdot e^{-10 \cdot |\tau|} \cdot \left(\cos(4 \cdot \tau) + \frac{5 \cdot \sin(4 \cdot |\tau|)}{2} \right)$$

1) спектральная плотность ССП

$$S_{X1}(w) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K_{X1}(\tau) \cdot e^{-i \cdot w \cdot \tau} d\tau \rightarrow \frac{6960}{\pi \cdot (w^4 + 168 \cdot w^2 + 13456)}$$

2) Квадрат модуля частотной характеристики системы

$$\Phi_{2_1}(w) := \frac{b_2^2 + (a_2 \cdot w)^2}{b_1^2 + (a_1 \cdot w)^2} \rightarrow \frac{9 \cdot w^2 + 4}{25 \cdot w^2 + 16}$$

3) Спектральная плотность на выходе системы

$$Sy1(w) := \Phi2_1(w) \cdot Sx1(w) \rightarrow \frac{6960 \cdot (9 \cdot w^2 + 4)}{\pi \cdot (25 \cdot w^2 + 16) \cdot (w^4 + 168 \cdot w^2 + 13456)}$$

$$\pi \cdot (25 \cdot w^2 + 16) \cdot (w^4 + 168 \cdot w^2 + 13456) \text{ simplify } \rightarrow \pi \cdot (25 \cdot w^6 + 4216 \cdot w^4 + 339088 \cdot w^2 + 215296)$$

$$\text{polyroots} \left(\begin{pmatrix} 215296 \\ 0 \\ 339088 \\ 0 \\ 4216 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 - 10i \\ -4 + 10i \\ -0.8i \\ 0.8i \\ 4 + 10i \\ 4 - 10i \end{pmatrix}$$

4) Корреляционную функцию выходного ССП

- Вычет в полюсе ω_1

$$w1 := \frac{4}{5} \cdot i \quad e1(\tau) := e^{i \cdot w1 \cdot \tau} \rightarrow e^{-\frac{4 \cdot \tau}{5}}$$

$$res1(\tau) := e1(\tau) \cdot \lim_{w \rightarrow w1} [Sy1(w) \cdot (w - w1)] \text{ simplify } \rightarrow \frac{23925i \cdot e^{-\frac{4 \cdot \tau}{5}}}{1042882 \cdot \pi}$$

- Вычет в полюсе ω_2

$$w2 := 4 + 10i \quad e2(\tau) := e^{i \cdot w2 \cdot \tau} \rightarrow e^{(-10+4i) \cdot \tau}$$

$$res2(\tau) := e2(\tau) \cdot \lim_{w \rightarrow w2} [Sy1(w) \cdot (w - w2)] \text{ simplify } \rightarrow \frac{e^{(-10+4i) \cdot \tau} \cdot \left(-\frac{704475}{1042882} - \frac{282747}{1042882} \cdot i \right)}{\pi}$$

- Вычет в полюсе ω_3

$$w3 := -4 + 10i \quad e3(\tau) := e^{i \cdot w3 \cdot \tau} \rightarrow e^{(-10-4i) \cdot \tau}$$

$$res3(\tau) := e3(\tau) \cdot \lim_{w \rightarrow w3} [Sy1(w) \cdot (w - w3)] \text{ simplify } \rightarrow \frac{e^{(-10-4i) \cdot \tau} \cdot \left(\frac{704475}{1042882} - \frac{282747}{1042882} \cdot i \right)}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 JJ1(\tau) &:= 2 \cdot \pi \cdot i \cdot (\text{res1}(\tau) + \text{res2}(\tau) + \text{res3}(\tau)) \text{ simplify} \rightarrow \frac{565494 \cdot \cos(4 \cdot \tau) \cdot e^{-10 \cdot \tau}}{521441} - \frac{23925 \cdot e^{-\frac{4 \cdot \tau}{5}}}{521441} + \frac{1408950 \cdot \sin(4 \cdot \tau) \cdot e^{-10 \cdot \tau}}{521441} \\
 JJ1(\tau) &:= \text{Re}(JJ1(\tau)) \rightarrow \frac{565494 \cdot \text{Re}(\cos(4 \cdot \tau) \cdot e^{-10 \cdot \tau})}{521441} - \frac{23925 \cdot \text{Re}(e^{-\frac{4 \cdot \tau}{5}})}{521441} + \frac{1408950 \cdot \text{Re}(\sin(4 \cdot \tau) \cdot e^{-10 \cdot \tau})}{521441} \\
 Ky1(\tau) &:= JJ1(|\tau|) \rightarrow \frac{565494 \cdot \cos(4 \cdot |\tau|) \cdot e^{-10 \cdot |\tau|}}{521441} - \frac{23925 \cdot e^{-\frac{4 \cdot |\tau|}{5}}}{521441} + \frac{1408950 \cdot \sin(4 \cdot |\tau|) \cdot e^{-10 \cdot |\tau|}}{521441}
 \end{aligned}$$

$$D1 := Ky1(0) \rightarrow \frac{861}{829} = 1.039$$

$$D11 := 2 \cdot \int_0^{\infty} Sy1(w) \, dw = 1.039$$

