Метод на Пикар

$$(*)\begin{cases} y' = f(x,y), & x,y \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 & , f \text{ непр. ф-я} \end{cases}$$

Локална теорема за съществуване и единственост.

Нека $h>0$, M и L са такива константи, че ф-ята $f(x,y)$ от $(*)$ удовлетворява следните условия в (x_0+h, y_0+hM) (x_0,y_0) и (x_0+h, y_0-hM) (това е триъгълник с тези върхове): а) $|f(x,y)| \le M$ $\forall (x,y)$ в този триъгълник

б) $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$ $\forall (x,y_1), (x,y_2)$

Тогава (•) $\exists!$ реш. $y=y(x)$ на $(*)$ деф. в $[x_0, x_0+h]$ в триъгълника

(•) обща на $(*)$ $y=y(x)$ е реш на интегралното у-е

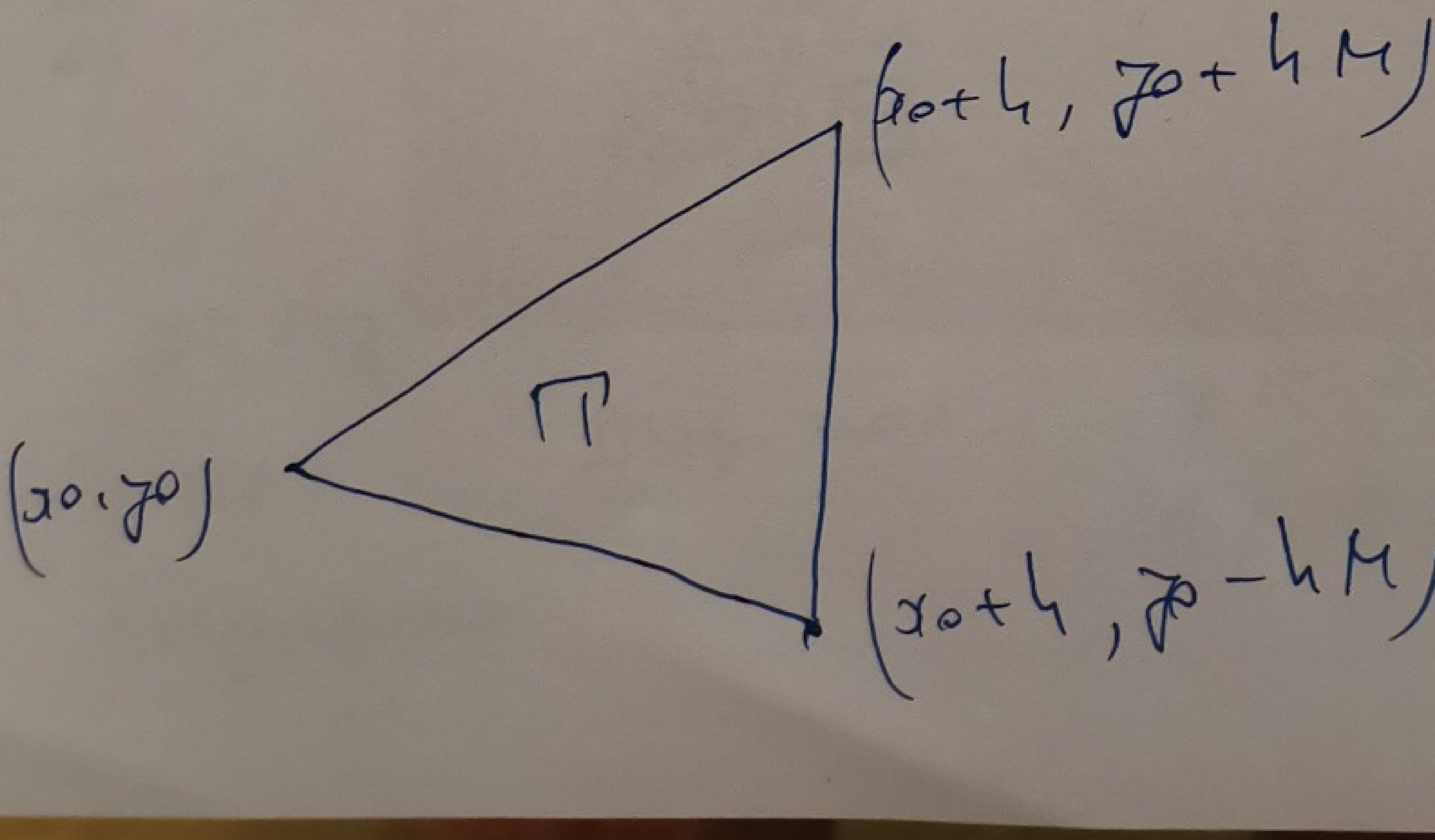
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\,dx$$

(•) редицата $y_0(x), y_2(x) \dots y_n(x), \dots$

определени чрез $y_0(x) \equiv y_0$; $y_{s+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_s(x))\,dx$

$y_n(x) \rightrightarrows y(x)$ в $[x_0, x_0+h]$

(•) $|y_s(x) - y(x)| \le M\left(L^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + L^{n+1}\frac{h^{n+2}}{(n+2)!} + \dots\right)$



Пример $h = ?$ $h > 0$ т.ч. реш $y(x)$ на З.К.

$$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 1$$

да е дефинирано в $x \in [0, h]$

Реш! За да приложим горната теорема:

$|y-1| \le Mx$ трябва да е в сила $x^2 + y^2 \le M$, но

$$\sup_{\substack{|y-1| \le Mx \\ 0 \le x \le h}} (x^2+y^2) = h^2 + (Mh+1)^2$$

$$\Rightarrow 0 < h \le \frac{-M + \sqrt{M^3 + M - 1}}{M^2+1} := g(M)$$

$M = 1 \to g(1) = 0$

$g(M)$ нрс, $M = 2 \to h = 1/5$

Уравнения нерешени относно производната
обикновени и особени точки

$F(x, y, y') = 0$ не е решено относно y'

имаме следните възможности

- $ky = f(x, y')$, $k = const$
- $ky = f(y, y')$

Уравн. $ky = f(x, y')$ пол. $y' = p(x)$ и диф по x

$$\frac{dx}{dp} = g(x, p) \qquad \frac{dx}{dp} = \frac{1}{p'} \to x = x(p) \text{ - реш!}$$

Пр $y = 2xy' - (y')^2$

$y' = p(x)$. Диф. по x $\quad y = 2xp - p^2$

$$y' = p = 2p + 2xp' - 2pp'$$

Получаваме

$\rightarrow \quad -p = 2(x-p)p'$

$$\frac{1}{p'} = -2\frac{x}{p} + 2$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + 2$$, линейно у-е

$$x(p) = \frac{c}{p^2} + \frac{2p}{3}$$

зем в и уесметаме $\quad y = 2xp - p^2 = \frac{2c}{p} + p$