Метод на Фурие за уравнението на топлопроводността

(*) $u_t = a^2 u_{xx}$ в $\Omega = \{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$

$L > 0,\ T > 0$ (константи)

Задача на Дирихле за уравнението на топлопроводността

Решение (*) в Ω, където

$u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x < l$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $0 \le t \le T$

$\varphi \in C^1[0,l]$ – условия за съгласуване

$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

Метод на Фурие: търсим решение от вида $u(x,t) = X(x)T(t)$

заместваме в (*) и получаваме

$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda$ $\rightarrow$ стигаме до задача на Щурм-Лиувил

$X'' - \lambda X = 0$ $\rightarrow$ $X(0) = X(l) = 0$ (от граничното условие)

Тази задача обаче я решавахме на предното упражнение:

$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ и $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ $\quad T' - a^2 \lambda_k T = 0$

за другото уравнение за T получаваме

$\Rightarrow$ $T_k(t) = c_k e^{-a^2 \frac{k\pi}{l} t}$

Получаваме решение

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-a^2 \frac{k\pi}{l} t} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$$

$$c_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx$$