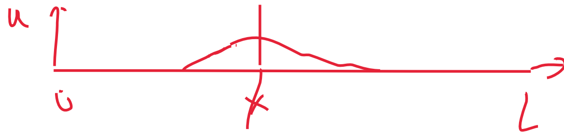
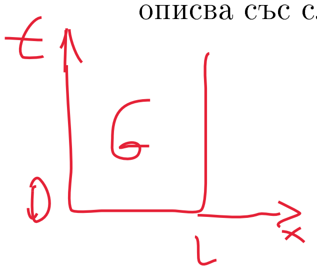
1 Метод на Фурие за уравнението на струната.

Ще разгледаме движението на ограничена струна със закрепени краища, което се описва със следната смесена задача





НУ
ГУ

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ 0 < x < L, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ 0 < x < L, \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=L} = 0, \ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

където $a > 0$ е константа, $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$.

В сила е следната

Теорема 1.1 *При така напарвените предположения задачта* (1) *притежава единствено решение* $u \in C^2(\bar{G})$, *където* $G := \{(x, t) : \ 0 < x < L, \ t > 0\}$.

Ще скицираме доказателството на съществуване на решение. В тривиалният случай на нулеви начални данни $u(x, t) \equiv 0$ е решение на тази задача. В останилте случаи, ще намерим ненулево решение $u(x, t) \not\equiv 0$ на задача (1) с помощта на метода на Фурие, познат още като метод на разделяне на променливите.

Търсим решение от вида

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{2}$$

Заместваме в уравнението на струната от задача (1) и получаваме

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \tag{3}$$

за $(x, t) \in G$.

В точките от G, в които $X(x)T(t) \neq 0$ имаме

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{4}$$

Като фиксираме x и оставим t да се мени, заключаваме, че λ не зависи от t. Като фиксираме t и оставим x да се мени, заключаваме, че λ не зависи от x. Следователно λ е константа. Така получаваме следните две обикновени диференциални уравнения от втори ред

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{6}$$

Ще покажем, че уравненията (5) и (6) са изпълнение и в точките от G, в които $X(x)T(t)$ се анулира. Тъй като $u(x, t) \not\equiv 0$, то съществува точка $(x_0, t_0) \in G$, такава че $u(x_0, t_0) = X(x_0)T(t_0) \neq 0$. Тогава при $t = t_0$ от (3) получаваме

$$X''(x) = \frac{T''(t_0)}{a^2 T(t_0)} X(x) = \mu X(x).$$

По същия начин при $x = x_0$ получаваме

$$T''(t) = a^2 \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} T(t) = \nu T(t).$$

Сега (4) при $x = x_0$ и $t = t_0$ ни дава, че $\mu = \nu = -\lambda$.

От граничните условия в (1) получаваме

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ и $u(L,t) = X(L)T(t) = 0$ за $t \geq 0$. $\exists t_0 \geq 0 : T(t_0) \not\equiv 0$

Следователно

$$X(0) = 0, \; X(L) = 0. \tag{7}$$

По този начин достигнахме до следната задача на Щурм - Лиувил (5), (7) за функцията $X(x)$:

$e^{\alpha x}$ $(\alpha^2+\lambda)e^{\alpha x} = 0$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; 0 < x < L, \\ X(0) = 0, \; X(L) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

$P(\alpha)e^{\alpha x} = 0$

Ще търсим ненулеви решения на тази задача. Уравнението (5) е линейно и има характеристичен полином

$$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda.$$

$\alpha^2 = -\lambda$

Ще разгледаме три случая:

i.) Ако $\lambda < 0$, то $P(\alpha)$ има два различни реални корена $\alpha_1 = -\sqrt{-\lambda}$ и $\alpha_2 = \sqrt{-\lambda}$. Следователно фундаментална система от решения (ФСР) на (5) е

$$\text{ФСР} : \left\{ e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \; e^{\sqrt{-\lambda}x} \right\}.$$

Общото решение на (5) в този случай е

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

Сега условията (7) ни дават

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \; X(L) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0.$$

Следователно $C_2 = -C_1$ и $C_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} \right) = 0$. Така получаваме $C_1 = C_2 = 0$ и задачата на Щурм-Лиувил в този случай има само тривиално решение $X(x) \equiv 0$.

ii.) Ако $\lambda = 0$, то $P(\alpha)$ има двоен корен реални корена $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Следователно фундаментална система от решения на (5) е

$$\text{ФСР} : \{1, \; x\}.$$

Общото решение на (5) в този случай е

$$X(x) = C_1 + C_2 x,$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

Сега условията (7) ни дават

$$X(0) = C_1 = 0, \; X(L) = C_1 + C_2 L = 0.$$

Следователно $C_1 = C_2 = 0$ и задачата на Щурм-Лиувил в този случай има само тривиално решение $X(x) \equiv 0$.

iii.) Ако $\lambda > 0$, то $P(\alpha)$ има два комплексни корена $\alpha_1 = -i\sqrt{\lambda}$ и $\alpha_2 = i\sqrt{\lambda}$. Следователно фундаментална система от решения (ФСР) на (5) е

$$\text{ФСР}: \left\{ \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right), \ \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \right\}.$$

Общото решение на (5) в този случай е

$$X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

Сега условията (7) ни дават

$$X(0) = C_1 = 0, \ X(L) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}L\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0.$$

Следователно

$$C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0.$$

Има две възможност

λ

iii.1.) $\sin\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) \neq 0$. Тогава $C_2 = 0$ и отново получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$.

λ

iii.2.) $\sin\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0$. Това е възможно, ако $\lambda > 0$ е такова, че $\sqrt{\lambda}\,L = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$, т.е. ако λ е някоя от константите

$$\lambda_k := \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \ k = 1, 2, \ldots$$

Тогава задачата на Щрум Лиувил има нетривиално решение $cX_k(x)$, където c е произволна константа, а

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \ k = 1, 2, \ldots$$

Функциите $X_k(x)$ се наричат собствени функции, а λ_k - собствени стойности на задачата на Щурм-Лиувил.

Ще решим уравнението (6) при $\lambda = \lambda_k$. То е линейното и има характеристичен полином

$$T'' + \lambda_k a^2 T = 0$$

$$Q(\alpha) = \alpha^2 + \lambda_k a^2,$$

който има корени $\alpha_{1,2} = \pm\frac{ak\pi}{L} i$. Следователно общото решение на уравнението (6) е

$$T_k(x) = A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right), \ k = 1, 2, ..., \tag{9}$$

където A_k и B_k са произволни реални константи.

По този начин намерихме функциите

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= X_k(x) T_k(t) \\ &= \left\{ A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) \right\} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \ k = 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{10}$$

$$u_{k,t}\Big|_{t=0} = \frac{ak\pi}{L} B_k X_k(x) = \psi(x)$$

които удовлетворяват уравнението и граничните условия в изходната задача (1). Те обаче не удовлетворяват началните условия, освен в случаите на много специален избор на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Например равенството

$$u_k(x,0) = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \varphi(x)$$

е възможно само, ако $\varphi(x) = A_k X_k(x)$.

По тази причина ще търсим решението на задачата (1) в следния вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) \right\} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \end{aligned} \tag{11}$$

От първото начално условие получаваме

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

$\sum A_k \sin \frac{k}{5} x = \sin x$

$k=1$

$A_1 \sin \frac{x}{5} + A_2 \ldots + A_5 \sin x + \ldots = \sin x$

$\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ е пълна и ортогонална система в $L_2(0,L)$. Скаларното произведение в $L_2(0,L)$ се дефинира с

$$(f,g) = \int_0^L f(x)\bar{g}(x)dx, \;\; f,g \in L_2(0,L).$$

$\int_0^L f(x) \bar{f}(x)\, dx < \infty$

$\int_0^L |f(x)|^2 dx$

Лесно можем да проверим, че

$$(X_n(x), X_m(x)) = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right) = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{L}{2}, & n = m. \end{cases}$$

Наистина

$$\begin{aligned} (X_n(x), X_n(x)) &= \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]\Big|_0^L \\ &= \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

При $n \neq m$ получаваме

$$\begin{aligned} (X_m(x), X_n(x)) &= \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) - \frac{L}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right)\right]\Big|_0^L \\ &= 0. \end{aligned}$$

Да фиксираме едно k и да умножим равенството $\frac{5\pi}{L}$ X

$$\underbrace{\sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin\left(\frac{s\pi}{L}x\right)}_{X_s(x)} = \varphi(x)$$

с $X_k(x)$. След това да интегрираме от 0 до L. Ще получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s \underbrace{\int_0^L X_s(x)X_k(x)\,dx}_{(X_s, X_k)} = \int_0^L \varphi(x)X_k(x)\,dx.$$

Следователно

$$\frac{L}{2}A_k = (\varphi(x), X_k(x)).$$

Редът

$\varphi(x) \sim$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi(x), X_k(x))X_k(x)$$

се нарича ред на Фурие на функцията $\varphi(x)$ по системата $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Така получихме, че

$$A_k = \frac{2}{L}(\varphi(x), X_k(x)) = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\,dx.$$

За да удовлетворим второто начално условие първо ще пресметнем

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{L}\left\{-A_k\sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k\cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right)\right\}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Следователно

$\frac{L}{2}\frac{ak\pi}{L}B_k = (\psi, X_k)$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{L}B_k\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \psi(x).$$

X_5

По налогичен начин както при определянето на A_k намираме

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^L \psi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\,dx. \tag{12}$$

С тези изрази за A_k и B_k редът (11), както и получените от него редове с почленно диференциране един и два пъти по x и t са равномерно сходящи в ивицата $\bar{G}$. Следователно за сумата нареда (11) ще имаме $u(x,t) \in C^2(\bar{G})$. Може ад се покаже, че $u(x,t)$ е решение на изходната задача.

Пример 1.2 *(Стоящи вълни.) Ще разгледаме движението на струната, когато функцията $\varphi(x)$ съвпада с някоя от собствените функции на задачата на Щурм – Луивил, а началната скорост е нула. Нека трептенето на ограничена струна със закрепени краища в точките $x = 0$ и $x = L = 5\pi$ се моделира със следната смесена задача:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ 0 < x < 5\pi,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \sin x,\ u_t|_{t=0} = 0,\ 0 \le x \le 5\pi, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5\pi} = 0,\ t \ge 0. \end{cases} \tag{13}$$

$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{k}{5}\right)^2$

$\psi = 0 \Rightarrow B_k = 0$

Както знаем собствените стойности и собствените функции на задачата на Щурм - Лиувил (5), (7) са съответно

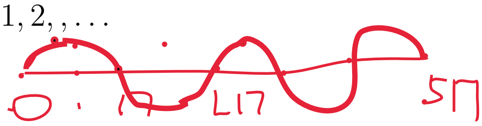
$$\lambda_k = \frac{k^2}{25},\ X_k(x) = \sin\frac{kx}{5},\ k = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Следователно функцията в началното условие е $\varphi(x) = X_5(x)$ и ако използваме метода на Фурие и търсим решението във вид на ред, то в този ред ще има само едно ненулево събираемо. Наистина, от

$$A_k = \frac{2}{L}(\varphi(x), X_k(x)) = \frac{2}{5\pi}(X_5(x), X_k(x)) = \begin{cases} 1, & k = 5 \\ 0, & k \neq 5 \end{cases}$$

и

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}(\psi(x), X_k(x)) = \frac{2}{ak\pi}(0, X_k(x)) = 0,\ k = 1, 2, , \dots$$



намираме, че решението на задачата е

$$u(x,t) = \underline{u_5(x,t)} = \boxed{\sin x \cos t}. \tag{15}$$

Получихме вълна, която осцилира във времето, но точките от струната с абсциси $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = 3\pi$, $x = 4\pi$ и $x = 5\pi$ не се движат (амплитудата в тях е винаги нула, u=0). Те се наричат възли (nodes). Точките с абсциси $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{2}$ и $x = \frac{9\pi}{2}$ се наричат анти-възли (anti-nodes) – в тях амплитудата е максимална. Такива вълни се наричат стоящи вълни.

$\varphi = X_5$, $\quad u = \underline{\sin x \sin t}$

$\psi \equiv 0$

$\varphi = 2X_3 + X_5$

$\psi \equiv 0 \Rightarrow B_k = 0$

$A_k = \frac{2}{5\pi}(2X_3 + X_5, X_k)$

$= \frac{4}{5\pi}(X_3, X_k) + \frac{2}{5\pi}(X_5, X_k)$

$A_3 = 2, \quad A_5 = 1$

$u = 2\sin\frac{2x}{5}\cos\frac{2t}{5} + \sin x \cos t$