5. Пето упражнение

1. Линейни уравнения с постоянни коефициенти. Характеристичен полином и Фундаментална система от решения. Символно решаване с dsolve.

- Описание как се конструира фундаментална система от реални решения на хомогенно линейно уравнение с постоянни коефициенти

  Зад1.

  a) Решете аналитично уравнението y''-y'-2y=0
  b) Решете символно уравненията
     - y’’+3y’’+2y= 0
     - y'''-3y''+4y=0
     - y'''+4y''+13y'=0
     - $y^{(5)}+3y^{(4)}+3y^{(3)}+y^{(2)}=0$
     - $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$

  c) решете аналитично уравнението (намиране на частно решение на нехомогенното уравнение)

  $y''+3y''+2y= 12 e^x$

  d) Решете символно уравнението

  \- $y''+3y''+2y= 1/(1+e^x)+12 e^x$

  $y=(c1+\ln(1+e^x)-e^x)e^{-2x} +(c2+\ln(1+e^x))e^{-x} +2e^x$

- Решението е сума от общото решение на хомогенното уравнение и едно частно решение на нехомогенното уравнение.

2. Линейни уравнения от n-ти ред с променливи коефициенти. Задача на Коши.

Пример 1. Уравнение на Льожандър: $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$

```
yn=dsolve('(1-x^2)*D2y-2*x*Dy+n*(n+1)*y=0','x')
```

yn=c1 y1+c2y2

y1 – полином на Льожандър, да намерим и другото решение y2 в случая n=0

(1-x2)y’’-2xy’=0

Полагаме z=y’

z=c/(1-x2) => y=c1 ln[(1+x)/(1-x)]/2 +c2

С допълнителни условия yn(-1)=(-1)n, yn(1)=1 се получават решенията Pn(x), които се наричат полиноми на Льожандър от степен n.

```
P0=dsolve('(1-x^2)*D2y-2*x*Dy=0','y(-1)=1','y(1)=1','x')
P1=dsolve('(1-x^2)*D2y-2*x*Dy+2*y=0','y(-1)=-1','y(1)=1','x')
P2=dsolve('(1-x^2)*D2y-2*x*Dy+6*y=0','y(-1)=1','y(1)=1','x')
```

The Legendre functions are defined by

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

where

$$P_n(x)$$

is the Legendre polynomial of degree n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right]$$

Пример 2. • Пример 2. Уравнение на Бесел: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$
besselj и bessely. С условието y(0)=0 се получават besselj

```
x=0:0.01:15;
plot(x,besselj(0,x),x,besselj(1,x),x,besselj(-1/2,x),x,besselj(1/2,x))
```

```
Y = bessely(nu,Z)
Y = bessely(nu,Z,1)
```

Definitions

The differential equation

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \nu^2\right) y = 0,$$

where ν is a real constant, is called *Bessel's equation*, and its solutions are known as *Bessel functions*.

A solution $Y_\nu(z)$ of the second kind can be expressed as

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

where $J_\nu(z)$ and $J_{-\nu}(z)$ form a fundamental set of solutions of Bessel's equation for noninteger ν

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)},$$

and $\Gamma(a)$ is the gamma function. $Y_\nu(z)$ is linearly independent of $J_\nu(z)$.

$J_\nu(z)$ can be computed using `besselj`.