1-

Устойчивост

Нека решенията на система ДУ

$(*)\ \dot{x} = f(x,t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$

са продължими в интервала $t \in [t_0; +\infty)$

Нека $x = \varphi(t)$ е реш на $(*)$ за $t \geq t_0$. Казваме, че $x = \varphi(t)$ е устойчиво по Ляпунов, ако за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ със свойството, ако $\eta(t)$ е реш на $(*)$ с начално условие

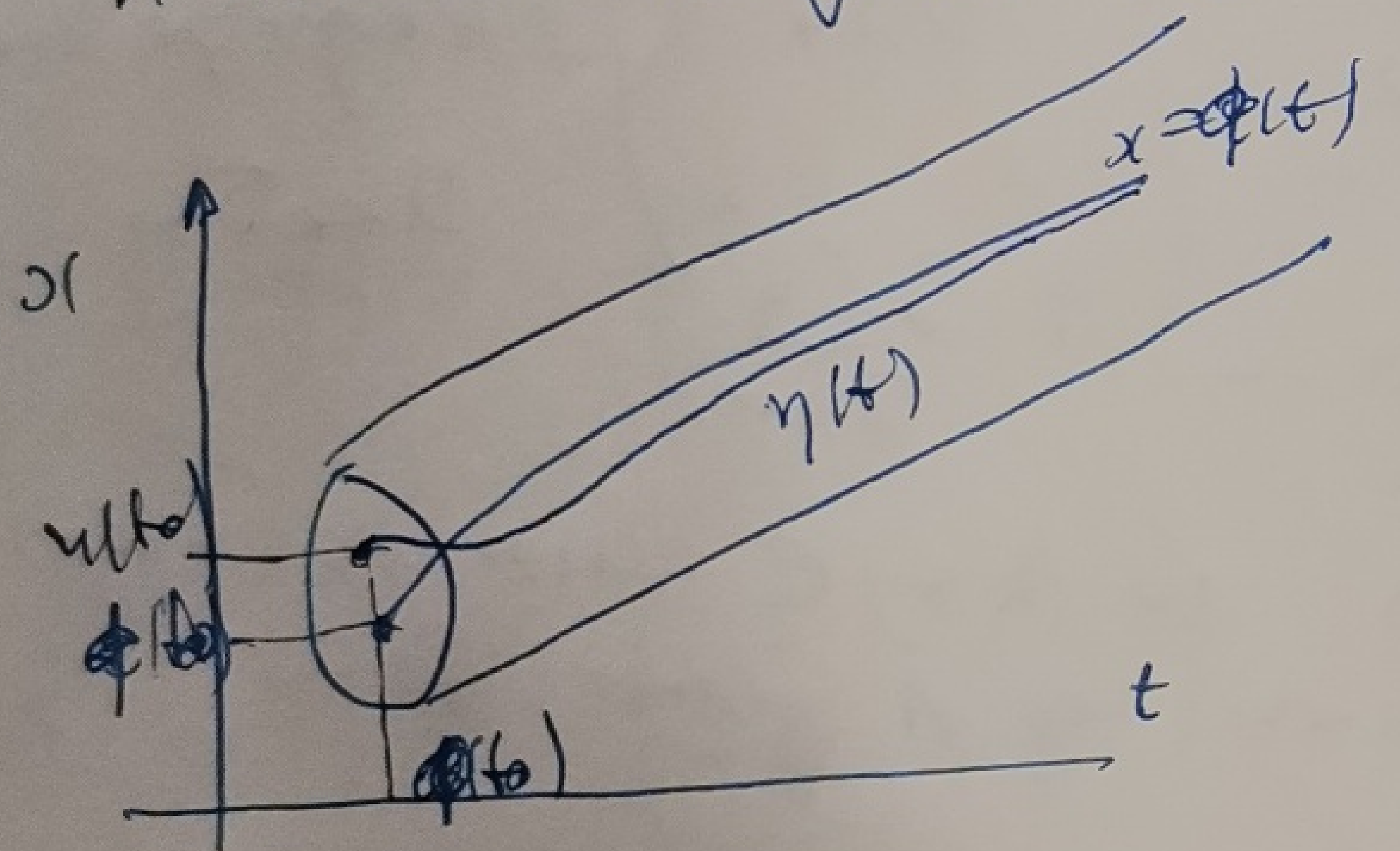
$\| \eta(t_0) - \phi(t_0) \| < \delta$, то $\| \eta(t) - \phi(t) \| < \varepsilon$, за $\forall t \geq t_0$

Казваме, че $\phi(t)$ е асимптотично устойчиво, ако

а) е устойчиво по Ляпунов

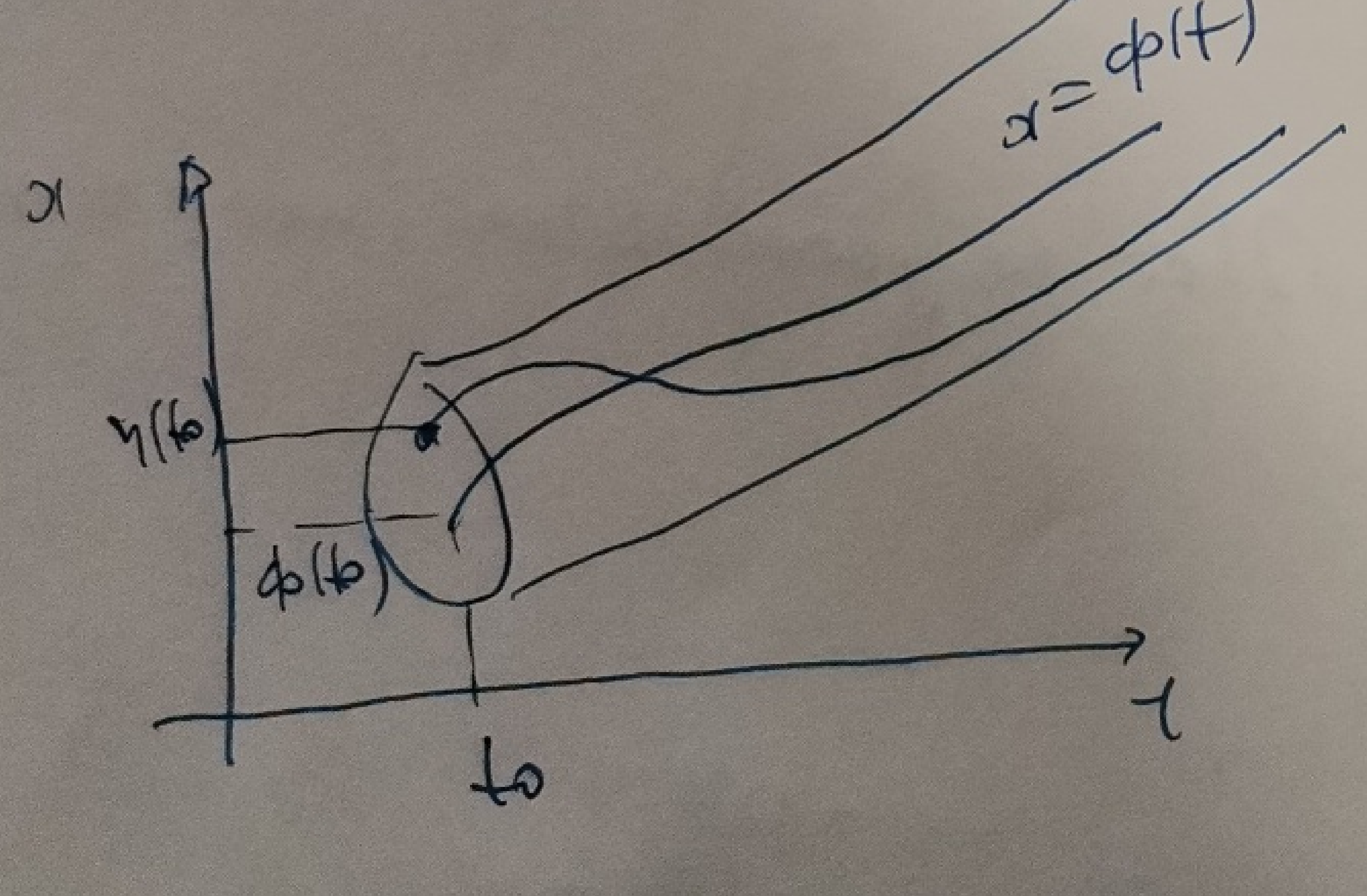
б) $\| \eta(t) - \phi(t) \| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

Асимптотично устойчиво

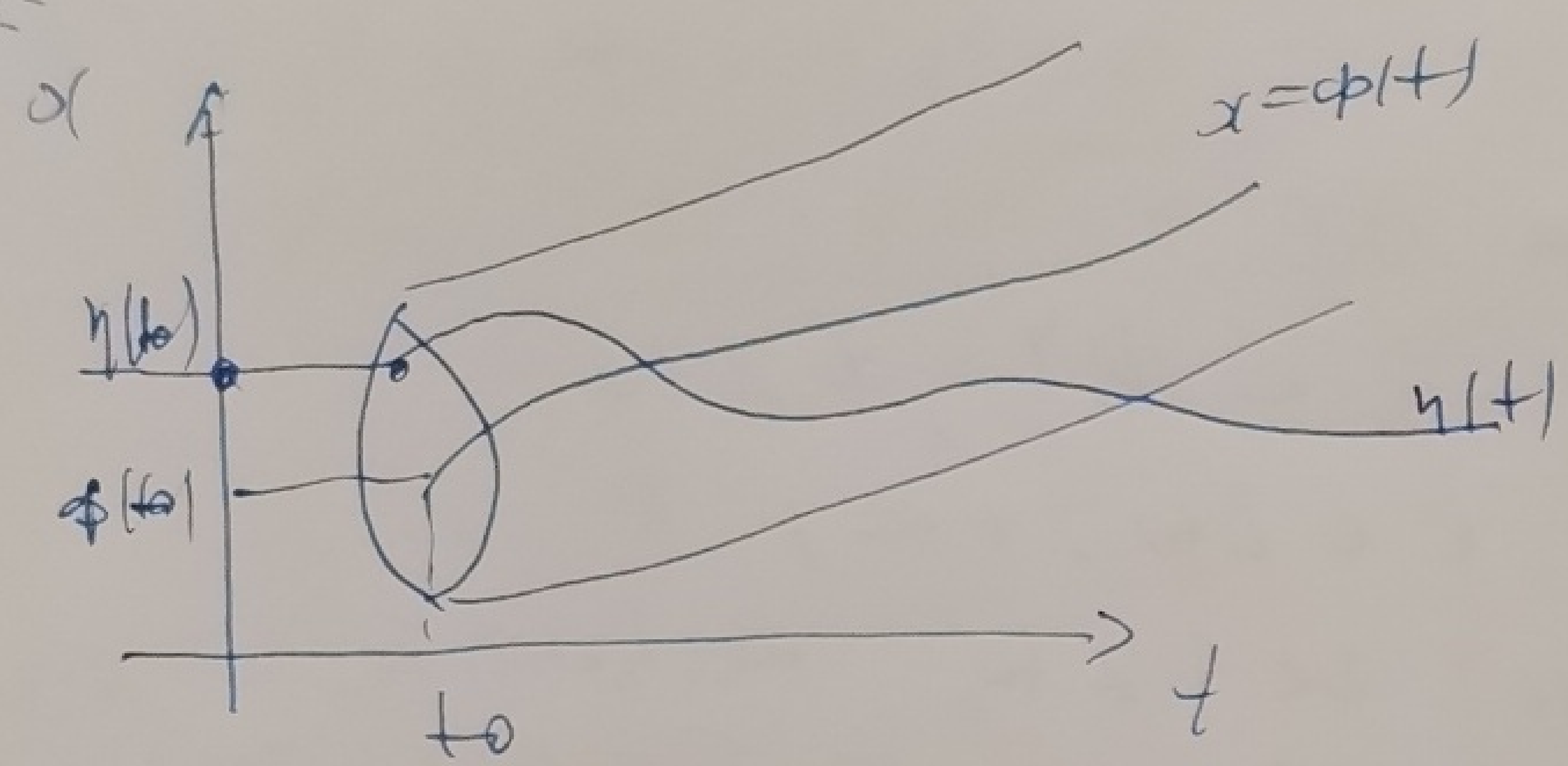


стреми се към $\phi(t)$ за $t \to \infty$

Устойчиво по Ляпунов



не излиза от цилиндър



нa пусне цилиндъра!

Всяко решение $x(t)=x_0$ – наричаме положение на равновесие или особена точка.

С транслация винаги можем да сведем точката на равновесие до $x_0=\vec{0}$, за тези реш. също имаме устойчивост (там вече можем да разглеждаме

Автономни с-ми

$(**)\ \dot{x}=f(x)$ $\qquad x_0\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ е точка на равновесие

тогава $\dot{x}=A(x-x_0)+O(\|x-x_0\|^2)$

$$A=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$ – матрица на Якоби

<u>Th (Ляпунов)</u> | решението x_0 за $(**)$ е асимптотично устойчиво, ако собствените стойности на A имат $Re\lambda_i<0$ за $\forall i=1\dots n$

Решението x_0 на $(**)$ не е устойчиво, ако $\exists j$! $Re\lambda_j>0$.

<u>Пример</u> Да се намерят и изследват за устойчивост положенията на равновесие на системата

$$\begin{cases}\dot{x}=xy+12\\ \dot{y}=x^2+y^2-25\end{cases}$$

Реш. $f(x,y)=xy+12$
$g(x,y)=x^2+y^2-25$

$$\begin{cases}xy+12=0\\ x^2+y^2-25=0\end{cases}\qquad y=-\frac{12}{x}$$

$$\Rightarrow x^2+\left(-\frac{12}{x}\right)^2-25=0$$

-3-

$$x^4 + 144 - 25x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4\cdot 144}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}$$

$$(x^2)_1 = 16 \qquad (x^2)_2 = 9$$

$$\left|\begin{matrix} x = 4 \\ y = -\frac{12}{4} = -3 \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} x = -4 \\ y = 3 \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} x = 3 \\ y = -4 \end{matrix}\right. \quad \begin{matrix} x = -3 \\ y = 4 \end{matrix}$$

$$f'_x(x,y) = y \quad ; \quad f'_y(x,y) = x$$

$$g'_x(x,y) = 2x \quad ; \quad g'_y(x,y) = 2y$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 14 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{22}$$

$$A(3,-4) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad Re\,\lambda_{1,2} < 0$$ – Асимптотично устойчиво

$$A(-3,4) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & +8 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 - 12\lambda + 14 = 0$$ неустойчиво

$$\lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{22}$$

$$A(4,-3) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 + 9\lambda - 14 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{137}}{2}$$ неустойч.

$$A(-4,3) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 - 9\lambda - 14 = 0$$

$$\frac{9 \pm \sqrt{137}}{2} > 0$$ неуст.!