1 Метод на Фурие за уравнението на струната.

1.1 Струна със закрепен ляв край и свободен десен край

Ще разгледаме движението на ограничена струна със закрепен ляв край и свободен десен край, което се описва със следната смесена задача

$u(x,0)=\varphi(x)$
$u(0,t)=0$
$u_t(0,t)=0$
$u_t(x,0)=\psi(x)$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ 0 < x < L, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leq x \leq L, \\ u|_{x=0} = 0, \ \boxed{u_x|_{x=L} = 0}, \ t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

НУ

ГУ

където $a > 0$ е константа, $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(L) = \psi'(L) = 0$.

Ще намерим решение на тази задача с помощта на метода на Фурие:

В тривиалния случай на нулеви начални данни $u(x, t) \equiv 0$ е решение на тази задача. В останалите случаи ще търсим ненулево решение от следния вид

$$u(x, t) = X(x)T(t). \not\equiv 0 \tag{2}$$

Заместваме в уравнението на струната от задача (1) и получаваме

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

за $(x, t) \in G := \{(x, t) : \ 0 < x < L, \ t > 0\}$.

В точките, в които $X(x)$ и $T(t)$ не се анулират в G имаме

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Като фиксираме x и оставим t да се мени, заключаваме, че λ не зависи от t. Като фиксираме t и оставим x да се мени, заключаваме, че λ не зависи от x. Следователно λ е константа. Така получаваме следните две обикновени диференциални уравнения от втори ред

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{3}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{4}$$

Може да се покаже, че тези уравнения са изпълнени и в точките, в които $X(x)T(t)$ се анулира.

От граничните условия в (1) получаваме

$X(0)T(t)=0, t\geq 0$
$X'(L)T(t)=0, t\geq 0$

$$X(0) = 0, \ X'(L) = 0. \tag{5}$$

По този начин достигнахме до следната задача на Щурм - Лиувил (3), (5) за функцията $X(x)$.

Характеристичният полином на уравнението (3) е

$$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda.$$

$\alpha^2 = -\lambda$

Той има корени

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-\lambda} & \lambda < 0; \\ 0, & \lambda = 0; \\ \pm i\sqrt{\lambda}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Следователно общото решение на линейното уравнение (3) е

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}, & \lambda < 0; \\ c_1 + c_2 x, & \lambda = 0; \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + \underline{c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)}, & \lambda > 0, \end{cases}$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

Ще разгледаме три случая

1.) $\lambda < 0$.

Тогава

$x'(x) = \sqrt{-\lambda}(-c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x})$

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0,$$
$$X'(L) = \sqrt{-\lambda}(-c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}L}) = 0.$$

Получаваме, че $c_2 = -c_1$ и

$$-c_1(e^{-\sqrt{-\lambda}L} + e^{\sqrt{-\lambda}L}) = 0,$$

Откъдето намираме $c_1 = c_2 = 0$.

Следователно в този случай задачата има само тривиалното решение $\underline{X(x) \equiv 0}$.

2.) $\lambda = 0$.

Тогава

$$X(0) = c_1 = 0,$$
$$X'(L) = c_2 = 0.$$

Следователно и в този случай задачата има само тривиалното решение $\underline{X(x) \equiv 0}$.

3.) $\lambda > 0$.

Тогава

$$X(0) = c_1 = 0,$$
$$X'(L) = \sqrt{\lambda}c_2 \underline{\cos\left(\sqrt{\lambda}\,L\right)} = 0.$$

0

Имаме две възможности

$\lambda:$ **3.1.)** $\cos\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) \neq 0$. Тогава $c_2 = 0$ и отново получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$.

$\lambda:$ **3.2.)** $\cos\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0$. Това е възможно, ако $\lambda > 0$ е такова, че $\sqrt{\lambda}\,L = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. ако λ е някоя от константите

$0 \cdot c_2 = 0$
$\forall c_2$

$$\lambda_k := \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогава задачата на Щрум Лиувил има нетривиално решение $c_2 X_k(x)$, където c_2 е произволна константа, а

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right), \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Функциите $X_k(x)$ се наричат собствени функции, а λ_k - собствени стойности на задачата на Щурм-Лиувил.

При $\lambda = \lambda_k$, линейното уравнение (4) има характеристичен полином $T'' + \lambda_k a^2 T = 0$

$$Q(\alpha) = \alpha^2 + \lambda_k a^2,$$

който има корени $\alpha_{1,2} = \pm i\frac{(2k+1)\pi a}{2L}$. Следователно общото решение на уравнението (4) е

$$T_k(x) = A_k \cos\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

където A_k и B_k са произволни реални константи.

$u_k|_{t=0} = A_k X_k(x)$

По този начин получихме функциите

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{7}$$

които удовлетворяват уравнението и граничните условия в изходната задача (1). Те обаче не удовлетворяват началните условия, освен в случаите на много специален избор на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. По тази причина ще търсим решението на задачата (1) в следния вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) \qquad (8) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\left[A_k \cos\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right)\right]. \end{aligned}$$

От първото начално условие получаваме

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right).$$

$\int_0^L |f(x)|^2 dx < \infty$

$\left\{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ е пълна и ортогонална система в $L_2(0,L)$. Скаларното произведение в $L_2(0,L)$ се дефинира с

$$(f,g) = \int_0^L f(x)\bar{g}(x)dx, \quad f, g \in L_2(0,L).$$

Лесно можем да проверим, че

$$(X_n(x), X_m(x)) = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{L}{2}, & n = m. \end{cases}$$

Наистина

$$\begin{aligned} (X_n(x), X_n(x)) &= \int_0^L \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)\right]\Big|_0^L \\ &= \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

$\left\{\sqrt{\frac{2}{L}} X_k\right\}$

При $n \neq m$ получаваме

$$
\begin{aligned}
(X_m(x), X_n(x)) &= \int_0^L \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{(m+n+1)\pi}{L}x\right)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) - \frac{L}{(m+n+1)\pi}\sin\left(\frac{(m+n+1)\pi}{L}x\right)\right]\Big|_0^L \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Сега фиксираме едно k, умножаваме равенството

$$\int_0^L \varphi(x) X_k(x)\,dx$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s X_s(x) = \varphi(x)$$

с $X_k(x)$ интегрираме от 0 до L :

$$\frac{L}{2}A_k = \sum_{s=0}^{\infty} A_s (X_s(x), X_k(x)) = (\varphi(x), X_k(x)).$$

Получаваме, че константите A_k са фуриеровите коефициенти в развитието на $\varphi(x)$ по системата $\left\{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$:

$$A_k = \frac{2}{L}(\varphi(x), X_k(x)) = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\,dx.$$

Аналогично от второто начално условие получаваме

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2k+1)\pi a}{2L}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right). \tag{9}$$

Следователно

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^L \psi(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\,dx. \tag{10}$$

Задача 1. Движението на струна се моделира със следната задача

$$
\left|
\begin{array}{l}
u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < \pi\sqrt{2}, \\
u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi\sqrt{2} \\
u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi\sqrt{2}} = 0, \quad t \ge 0,
\end{array}
\right.
$$

1) $\varphi(x) = 2X_3(x)$

$\psi(x) \equiv 0 \Rightarrow B_k = 0$

$A_k = \frac{4}{L}(X_3, X_k) = \begin{cases} 0, & k \neq 3 \\ 2, & k = 3 \end{cases}$

където

а.)

$$
\varphi(x) = \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in [0,1) \cup (2, \pi\sqrt{2}], \end{cases},
$$

$B_2 = \frac{8}{5\pi}\frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

$u = 2\sin\left(\frac{7\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{7a\pi}{2L}t\right)$

$A_k = 0$ $\Uparrow$ $\qquad$ $B_k = 0,\ k \neq 2$ $\Downarrow$ $\qquad$ $X_k = \sin\left(\frac{2k+1}{2\pi\sqrt{2}}\pi x\right) = \sin\left(\frac{(2k+1)\sqrt{2}}{4} x\right)$

$$\psi(x) = 0.$$

б.) $\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = \underline{\sin(5x\sqrt{2}/4)}.$ $= X_2$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 31-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете на MatLab анимация на движението на струната за $t \in [0, 30]$.

$u_1 = \frac{4\sqrt{2}}{5} \sin\left(\frac{5\sqrt{2}}{4} x\right) \sin\left(\frac{5\sqrt{2}}{8} t\right)$

```
function string_fourie
clf
clc

L=pi*sqrt(2); a=1/2;
x=0:L/100:L;
t0=0;tmax=30;
t=t0:(tmax-t0)/100:tmax;

function y=phi(x)
 for i=1:length(x)
        if 1<x(i) & x(i)<2
        y(i)=10*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));
        else
        y(i)=0;
        end
   end
      %y=sin(5*x*sqrt(2)/4);
      %y=0;
end

function y=psi(x)
 y=0;
%y=sin(5*x*sqrt(2)/4);
end

function y=fourieru(x,t) y=0;
for k=0:30
    Xk=sin(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
    Ak=(2/L)*trapz(x,phi(x).*Xk);
    Bk=(4/(2*k+1)*pi*a)*trapz(x,psi(x).*Xk);
    Tk=Ak*cos((2*k+1)*pi*a*t/(2*L))+Bk*sin((2*k+1)*pi*a*t/(2*L));

end
end

for n=1:length(t)
```

```
        clf
        hold on
y=fourieru(x,t(n));  plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
axis([0 L -1 1]);
grid on;
M(n)=getframe;
end
movie(M,2)
end
```

1.2 Струна със закрепени краища

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le L, \\ \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=L} = 0,\ t \ge 0, \end{cases} \tag{11}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0,L]$, $\psi(x) \in C^1[0,L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$.

Изследването на тази задача е направено на лекции. Тук ще скицираме получените резултати.

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \tag{12}$$

За всяка от функциите $X_k(x)$ ~~получаваме следната задача на Щурм-Лиувил~~ са нетривиалните решения на зад. на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < L, \\ X(0) = 0,\ X(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности $\lambda_k := \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ и собствени функции

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),\ k \in \mathbf{N}.$$

За всяка от функциите $T_k(t)$ получаваме линейно уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

което има общо решение

$$\frac{1}{2} 4 \cancel{\pi} \over \cancel{\pi}\sqrt{2}$$

$$T_k(t) := A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right).$$

Константите A_k и B_k се определят с помощта на началните условия в изходната задача

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)X_k(x)\,dx,$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^L \psi(x)X_k(x)\,dx.$$

С получените по този начин функции $X_k(x)$ и $T_k(t)$ редът (12), както и получените от него редове с почленно диференциране по x и t от първи и втори ред са равномерно сходящи в полуивицата $G = \{(x,t) : 0 \le x \le L,\ t \ge 0\}$.

Задача 2. Движението на струна се моделира със следната задача

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx},\quad t > 0,\ 0 < x < \pi\sqrt{2}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le \pi\sqrt{2} \\ u|_{x=0} = 0,\ \underline{u|_{x=\pi\sqrt{2}} = 0,\quad t \ge 0,} \end{array}\right.$$

$a = \frac{1}{2}$, $L = \pi\sqrt{2}$,

$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{k^2}{2}$

$X_k(x) = \sin\frac{kx}{\sqrt{2}}$, $k = 1, 2, \ldots$

където

а.)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in [0,1) \cup (2, \pi\sqrt{2}], \end{cases},$$

$\psi(x) = 0.$ $\Rightarrow B_k = 0$

б.) $\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = \sin(2x\sqrt{2}).$ $= X_4(x)$

$T_k = A_k \cos\frac{kt}{2\sqrt{2}} + B_k \sin\frac{kt}{2\sqrt{2}}$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 30-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете на MatLab анимация на движението на струната за $t \in [0, 30]$.

```
function string_fourie2
  clf
  clc

 L=pi*sqrt(2);  a=1/2;
 x=0:L/100:L;
t0=0;tmax=30;
t=t0:(tmax-t0)/100:tmax;
```

$\varphi \equiv 0 \Rightarrow A_k = 0$

$B_k = \frac{2}{ak\pi}(X_4, X_k) = \begin{cases} 0, & k \ne 4 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 4 \end{cases}$

$u_1(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\,t)\sin(2\sqrt{2}\,x)$

B) $\psi = x_4 - x_6$

$B_k = \frac{2}{ak\pi}\left[(X_4, X_k) - (X_6, X_k)\right] \Rightarrow B_k = 0$ при $k = 1, 2, 3, 5, 7, 8, \ldots$

$u_2 = u_1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} t\right) \sin(3\sqrt{2}x)$

```
function y=phi(x)
 for i=1:length(x)
          if 1<x(i) & x(i)<2
          y(i)=10*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));
          else
          y(i)=0;
          end
    end
       %y=sin(2*x*sqrt(2));
       %y=0;
end

function y=psi(x)
 y=0;
%y=sin(2*x*sqrt(2));
end

function y=fourieru(x,t)
y=0;
for k=1:30
     Xk=sin(k*pi*x/L);
     Ak=(2/L)*trapz(x,phi(x).*Xk);
     Bk=2/(a*k*pi)*trapz(x,psi(x).*Xk);
     Tk=Ak*cos(a*k*pi*t/L)+Bk*sin(a*k*pi*t/L);
     y=y+ Tk*Xk;
end
end

for n=1:length(t)
     clf
     hold on
y=fourieru(x,t(n));
 plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
axis([0 L -1 1]);
grid on;
M(n)=getframe;
end
movie(M,2)
end
```