1 Задача на Коши за уравнението на струната. Формула на Даламбер.

1.1 Понятие за Частни диференциални уравнения (ЧДУ)

Формулирането на задача за частно диференциално уравнение е направено за пръв път от Даламбер, който изследва уравнението на трептящата струна. Оттогава започва да се развива и апаратът на математическия анализ, така че да могат да бъдат изучавани и функции на много променливи.

Уравнение от вида

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(\cancel{x},y)u_{yy} + p(x,y)u_x + q(x,y)u_y + r(x,y)u = f(x,y), \qquad (1)$$

където $(x, y) \in G$ (G-област в равнината) са независими променливи, а $u(x, y)$ е търсената функция се нарича линейно ЧДУ от втори ред с две независими променливи.

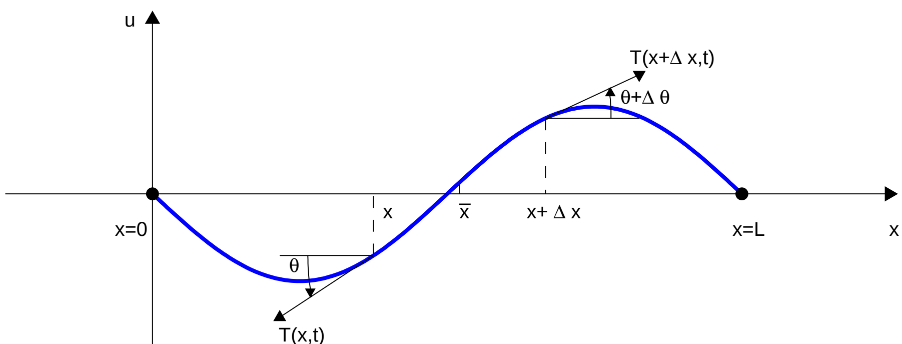
Ще предполагаме, че $|a(x, y)| + |b(x, y)| + |c(x, y)| \neq 0$.

Дефиниция 1.1 *Казваме, че в точката $(x_0, y_0) \in G$ уравнението (1) е*

1. *хиперболично, ако $D(x_0, y_0) := b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$;*
2. *параболично, ако $D(x_0, y_0) = 0$;*
3. *елиптично, ако $D(x_0, y_0) < 0$.*

Казваме, че уравнението е хиперболично/параболично/елиптично в областта $\Omega \subseteq G$ ако то е хиперболично/параболично/елиптично във всяка точка от Ω.

Пример 1.2 *Уравнение на струната.*



Фигура 1: Движение на еластична струна.

Разглеждаме една идеално гъвкава неразтеглива струна с фиксирани краища на едно и също хоризонтално ниво . Нека оста Ox е разположена по дължината на струната, чиито краища са в точките $x = 0$ и $x = L$. Ако струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$ (чрез придърпване, например) и след това е оставена без външно въздействие, то тя ще се движи във вертикална равнина, при условие, че ефекти като съпротивление на средата или триене в краищата *са пренебрегнати. Ще предполагаме, че отклонението на струната от равновесното и положение е малко и следователно всяка точка от нея се движи върху вертикална линия. Да означим с $u(x,t)$ вертикалното отместване на точката x от струната в момента t.*

Уравнението описващо това движение на струната е

$$u_{tt}(x,t) - \omega^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$

където ω е положителна константа. Възможно е да интерпретираме ω като скоростта, с която малки смущения (вълни) се придвижват по струната.

Тук $a(x,t) = -\omega^2$, $b(x,y) = 0$, $c(x,y) = 1$ и $D(x,y) = b^2 - ac = \omega^2 > 0$. Следователно уравнението на струната е хиперболично в цялата равнина.

Пример 1.3 *Уравнение на топлопроводността.*

Да разгледаме тънък хомогенен прът, подложен на някакъв топлинен режим. Нека означим с $u(x,t)$ температурата на пръта в точката x, в момента t. Изменението на тумпературата се описва чрез следното уравнение

$$u_t(x,t) - \omega^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$

където ω е положителна константа. Възможно е да интерпретираме ω като коефициент на топлопроводност, а $f(x,t)$ като източник на топлина.

Тук $a(x,t) = -\omega^2$, $b(x,y) = 0$, $c(x,y) = 0$ и $D(x,y) = b^2 - ac = 0$. Следователно уравнението на топлопроводността е параболично в цялата равнина.

Параболични са тези еволюционни (нестационарни) уравнения, при които разпространението на смущенията става с безкрайна скорост, т.е. малко изменение на решението в дадена точка предизвиква веднага изменение на решението във всички точки (разбира се изменението е малко в отдалечените точки).

Пример 1.4 *Уравнението на Лаплас*

$$\triangle u := u_{xx} + u_{yy} = 0$$

се нарича още уравнение на потенциала, понеже се удовлетворява от потенциалите на полета, създадени от равнинно разпределени електрически заряди или гравитационни маси.

Тук $a(x,t) = 1$, $b(x,y) = 0$, $c(x,y) = 1$ и $D(x,y) = b^2 - ac = -1 < 0$. Следователно уравнението на Лаплас е елиптично в цялата равнина.

Пример 1.5 *Уравнение на Трикоми*

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Тук $a(x,t) = y$, $b(x,y) = 0$, $c(x,y) = 1$ и $D(x,y) = b^2 - ac = -y$. Следователно уравнението на Трикоми е хиперболично в полуравнината $\{y < 0\}$, параболично в точките от правата $\{y = 0\}$ и е елиптично в полуравнината $\{y > 0\}$. Такива уравнения, които променят типа си, ще казваме, че са от смесен тип.

Уравнението на трикоми намира приложения в газовата динамика при моделирането на трансзукови потоци.

Ако уравнението (1) не променя типа си в G, то съществува неособена смяна на променливите $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, такава че в новите променливи уравнението има следния вид (каноничен вид) в зависимост от типа си:

1. Хиперболични уравнения: $v_{\xi\eta} + \tilde{p}v_\xi + \tilde{q}v_\eta + \tilde{r}v = g$;
2. Параболични уравнения: $v_{\eta\eta} + \tilde{p}v_\xi + \tilde{q}v_\eta + \tilde{r}v = g$
3. Елиптични уравнения: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \tilde{p}v_\xi + \tilde{q}v_\eta + \tilde{r}v = g$

Смяната, която привежда едно уравнение в каноничен вид, може да бъде открита, като се реши така нареченото уравнение на характеристиките на (1):

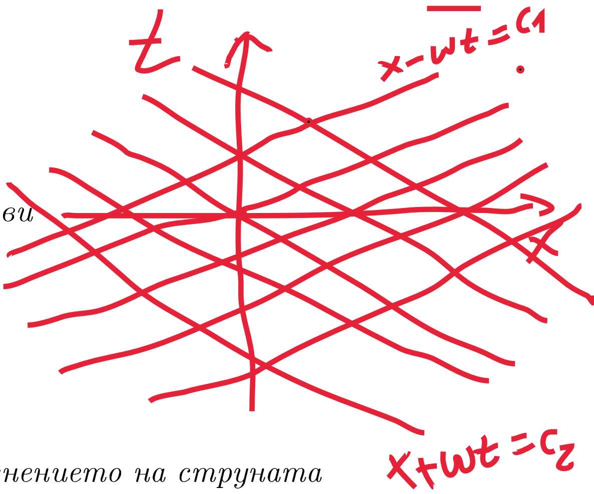
$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)\, dx\, dy + c(x, y)(dx)^2 = 0.$$

Ще демонстрираме как може да бъде направено това с уравнението на струната.

Пример 1.6 *Каноничен вид на уравнението на струната.*

Разглеждаме хомогенното уравнение на струната

$$u_{tt}(x, t) - \omega^2 u_{xx}(x, t) = 0.$$



Уравнението на храктеристиките е

$$(dx)^2 - \omega^2(dt)^2 = 0.$$

То се разпада на две уравнения с раделящи се променливи

$$dx - \omega dt = 0,\ dx + \omega dt = 0,$$

които могат да бъдат решени и по следния начин

$$d(x - \omega t) = 0,\ d(x + \omega t) = 0.$$

Така намираме две семейства характеристики на уравнението на струната

$$x - \omega t = c_1, \quad x + \omega t = c_2,$$

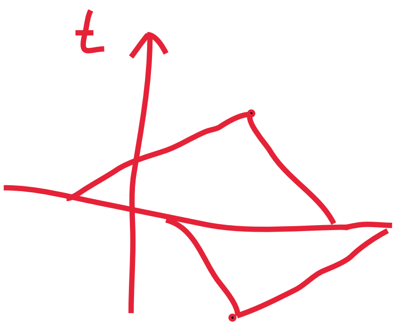
където c_1 и c_2 са произволни константи.

Това ни позволява да направим следната неособена смяна на независимите променливи

$$\xi = x - \omega t, \quad \eta = x + \omega t,$$

за която

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{vmatrix} = 2\omega > 0.$$



Обратната смяна е

$$x = \frac{\eta + \xi}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2\omega}.$$

Въвеждаме нова функция

$$U(\xi, \eta) = u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2\omega}\right)$$

тоест

$$u(x,t) = U(\underbrace{x - \omega t}_{\xi}, \underbrace{x + \omega t}_{\eta}).$$

Сега вече лесно пресмятаме

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta,$$

$$u_t = U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = -\omega U_\xi + \omega U_\eta,$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\xi\eta}\eta_x + U_{\eta\xi}\xi_x + U_{\eta\eta}\eta_x = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = \omega[-U_{\xi\xi}\xi_t - U_{\xi\eta}\eta_t + U_{\eta\xi}\xi_t + U_{\eta\eta}\eta_t] = \omega^2[U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}].$$

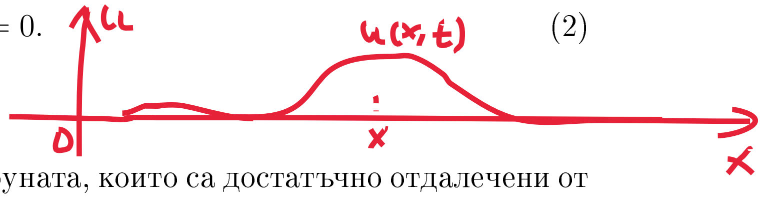
$\omega^2[U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}] - \omega^2(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) = 0$

Заместваме в уравнението на струната и получаваме

$$u_{tt} - \omega^2 u_{xx} = -4\omega^2 U_{\xi\eta} = 0.$$

Така достигаме до каноничния вид на уравнението на струната

$$U_{\xi\eta} = 0. \tag{2}$$



1.2 Уравнение на струната

Ще разгледаме движението на точки от струната, които са достатъчно отдалечени от неините краища, така че поведението на струната в двата ѝ края не оказва влияние върху движението на тези точки. Така достигаме до математическата абстракция, наречена неограничена струна. Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$, чрез придърпване до положение $\varphi(x)$, с начална скорост $\psi(x)$ и след това е оставена без външно въздействие ($f(x,t) \equiv 0$). Така получаваме следната задача на Коши

$u = u_1 - u_2$

$u|_{t=0} = u(x,0)$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \omega^2 u_{xx}(x,t) = 0, \ x \in \mathbf{R}, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{3}$$

$u|_t = 0$

$u_t|_{t=0} = u_t(x,0)$

$u_t|_{t=0} = 0$

T

$u = 0$

където $\omega = const. > 0$, а $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$ са произволни функции. При направените предположения задачата на Коши (3) има единствено решение $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - \omega t) + \varphi(x + \omega t)] + \frac{1}{2\omega}\int_{x-\omega t}^{x+\omega t} \psi(s)\, ds. \tag{4}$$

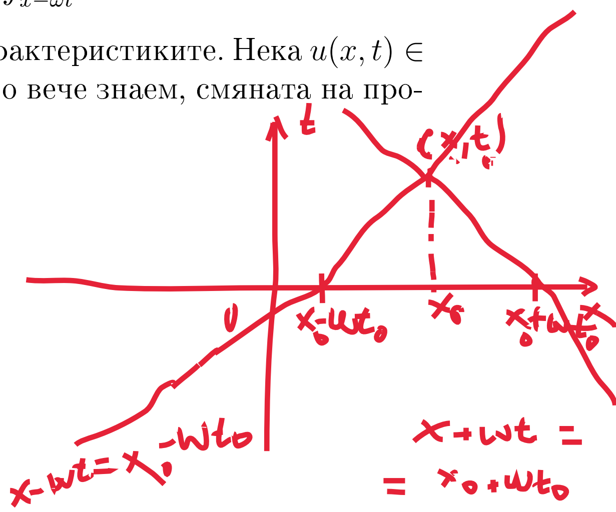
1) Ще изведем формулата на Даламбер чрез метода на характеристиките. Нека $u(x,t) \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$ е решение на задачата на Коши. Както вече знаем, смяната на променливите

u(x,t) = U(x-wt,x+wt)

$$\xi = x - \omega t, \quad \eta = x + \omega t,$$

привежда уравнението на струната в каноничен вид

$$U_{\xi\eta} = 0,$$



където

$$u(x,t) = U(x-\omega t, x+\omega t).$$

Следният запис на уравнението (2)

$$[U_\xi(\xi,\eta)]_\eta = 0$$

показва, че $U_\xi(\xi,\eta)$ не зависи от η, тоест

$$U_\xi(\xi,\eta) = H(\xi),$$

където $H(\xi)$ е диференцируема функция. Интегрираме последното равенство при фиксирано η и намираме

$$U(\xi,\eta) = \int H(\xi)\,d\xi + g(\eta) = \underline{h(\xi) + g(\eta)},$$

където $g(\eta)$ е двукратно гладка функция, а $h(\xi) = \int H(\xi)\,d\xi$.

Следователно решението има вида

$$u(x,t) = h(x-\omega t) + g(x+\omega t). \tag{5}$$

$u_t = h'(x-wt)(-w) + g'(x+wt)\,w$

Началните условия в задачата на Коши (3) ни дават системата

$$\begin{cases} h(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -\omega h'(x) + \omega g'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Диференцираме първото уравнение и получаваме следната систем за $h'(x)$ и $g'(x)$

$$\begin{cases} h'(x) + g'(x) = \varphi'(x), \\ -h'(x) + g'(x) = \frac{1}{\omega}\psi(x). \end{cases}$$

Следователно

$$h'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2\omega}\psi(x). \tag{6}$$

Интегрираме равенството

$$h'(s) = \frac{1}{2}\varphi'(s) - \frac{1}{2\omega}\psi(s) \qquad \int_0^x$$

от 0 до x и получаваме

$h(x) - h(0) = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(0)) - \frac{1}{2w}\int_0^x \psi(s)\,ds$

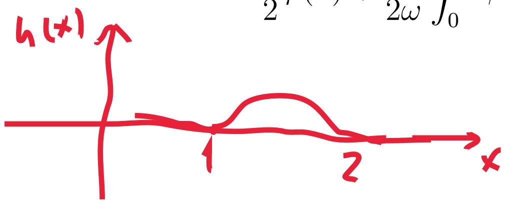
$$h(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2\omega}\int_0^x \psi(s)\,ds + \underline{h(0)} - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Сега лесно пресмятаме

$$\begin{aligned} g(x) &= \varphi(x) - h(x) \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\omega}\int_0^x \psi(s)\,ds - h(0) + \frac{1}{2}\varphi(0). \end{aligned}$$

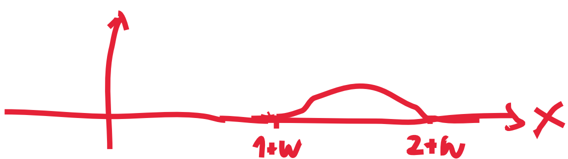
$h(x-wt)$

1) $t=0$



2) $t=1$

$h(x-w)$



Следователно

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= h(x-\omega t) + g(x+\omega t) \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x-\omega t)+\varphi(x+\omega t)] + \frac{1}{2\omega}\left(\int_0^{x+\omega t}\psi(s)\,ds - \int_0^{x-\omega t}\psi(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x-\omega t)+\varphi(x+\omega t)] + \frac{1}{2\omega}\left(\int_0^{x+\omega t}\psi(s)\,ds + \int_{x-\omega t}^{0}\psi(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x-\omega t)+\varphi(x+\omega t)] + \frac{1}{2\omega}\int_{x-\omega t}^{x+\omega t}\psi(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

По този начин показахме, че ако задачата на Коши (3) има решение то се дава с формулата на Даламбер и следователно е единствено. Лесно се проверява и обратното - ако $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$, то формулата на Даламбер дава решени на задачата на Коши (3). Наистина, като използваме формулата

$$
\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s)\,ds\right]_x' = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)),
$$

пресмятаме

$$
u_x = \frac{1}{2}[\varphi'(x-\omega t)+\varphi'(x+\omega t)] + \frac{1}{2\omega}[\psi(x+\omega t)-\psi(x-\omega t)],
$$

$$
\begin{aligned}
u_t &= \frac{\omega}{2}[-\varphi'(x-\omega t)+\varphi'(x+\omega t)] + \frac{1}{2}[\psi(x+\omega t)+\psi(x-\omega t)] \\
u_{xx} &= \frac{1}{2}[\varphi''(x-\omega t)+\varphi''(x+\omega t)] + \frac{1}{2\omega}[\psi'(x+\omega t)-\psi'(x-\omega t)], \\
u_{tt} &= \frac{\omega^2}{2}[\varphi''(x-\omega t)+\varphi''(x+\omega t)] + \frac{\omega}{2}[\psi'(x+\omega t)-\psi'(x-\omega t)].
\end{aligned}
$$

Веднага се вижда, че $u_{tt} = \omega^2 u_{xx}$. Остава да проверим началните условия:

$$
u(x,0) = \frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(x)] + \frac{1}{2\omega}\int_x^x \psi(s)\,ds = \varphi(x),
$$

$$
u_t(x,0) = \frac{\omega}{2}[-\varphi'(x)+\varphi'(x)] + \frac{1}{2}[\psi(x)+\psi(x)] = \psi(x),
$$

с което проверката е завършена.

Пример 1.7 *Решете задачата на Коши за уравнението на струнатана*

$x \pm \omega t = x \pm \frac{\pi}{2} t$

$$
\left|\begin{array}{l}
u_{tt} - \frac{\pi^2}{4}u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\
u|_{t=0} = \cos(x^2),\ u_t|_{t=0} = \frac{e^x - 2e^{2x}}{e^{2x}+4},\ x \in \mathbb{R}.
\end{array}\right.
$$

Тук $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(x) = \cos(x^2)$, $\psi(x) = \frac{e^x-2e^{2x}}{e^{2x}+4}$. *Заместваме във формулата на Даламбер*

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{2}t\right)^2 + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}t\right)^2\right] + \frac{1}{\pi}\int_{x-\frac{\pi}{2}t}^{x+\frac{\pi}{2}t}\frac{e^s-2e^{2s}}{e^{2s}+4}\,ds.
$$

Ще пресметнем неопределения интеграл

$$\int \frac{e^s - 2e^{2s}}{e^{2s}+4}\, ds = \int \frac{1-2e^s}{e^{2s}+4}\, de^s = \int \frac{1}{e^{2s}+4}\, de^s - \int \frac{2e^s}{e^{2s}+4}\, de^s$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{e^s}{2}\right)^2+1}\, d\left(\frac{e^s}{2}\right) - \int \frac{1}{e^{2s}+4}\, de^{2s}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{e^s}{2}\right) - \ln(e^{2s}+4)$$

Следователно

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{2}t\right)^2 + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}t\right)^2\right] + \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{e^{x+\frac{\pi}{2}t}}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{e^{x-\frac{\pi}{2}t}}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\ln(e^{2x+\pi t}+4) + \frac{1}{\pi}\ln(e^{2x-\pi t}+4).$$