Метод на Фурие за уравнението на топлопроводността

1. Постоянна температура в краищата

Разглеждаме уравнението на топлопроводността

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

в правоъгълника $\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$,

където a, L, T са положителни константи.

Задача на Дирихле: Да се намери решение на уравнението на топлопроводността в Ω, което удовлетворява условията

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq L$$

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, 0 \leq t \leq T,$$

където $\varphi \in C^1([0,L])$ и удовлетворява условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

Задачата на Дирихле моделира разпространението на температурата в тънък хомогенен прът с дължина L. Граничните условия при x=0 и x=L означават, че в краищата на пръта се поддържа постоянна температура 0.

Разделяме променливите както н уравнението на струната

$XT' = a^2 X'' T$

Търсим решението във вида $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Заместваме в уравнението и получаваме $\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Използваме граничните условия и за X(x) получаваме задачата на Щрум-Лиувил

$$\left|\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < L, \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{array}\right.$$

Това е същата задача както при струната с фиксирани краища. Знаем вече нейните собствени стойности $\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2$ и собствени функции $X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{L}x,\ k = 1,2,3, ...$

За T(t) получаваме уравнение от първи ред, което решаваме при $\lambda = \lambda_k$:

$$\underline{T_k'(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = 0}$$ с решения

$$T_k(t) = c_k e^{-a^2 \lambda_k t}$$

Така получаваме за решението на дадената задача

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{C_k e^{-(\frac{ak\pi}{L})^2 t}} \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

Коефициентите се дават с формулата

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\,dx$$

Задача1: Разпространението на температурата в тънък хомогенен прът се моделира със описаната по-горе задача. Да се направи анимация на изменението на температурата в пръта за време t от 0 до 12 при $L = \pi\sqrt{2}, a = \frac{1}{2}$

a) $\varphi(x) = \begin{cases} 50\, e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 < x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$

b) $\varphi(x) = 2\sin(2x/\sqrt{2}) - \sin(3x/\sqrt{2})$

Като се използва 30-та парциална сума в реда на Фурие.

$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{k^2}{2}$

$X_k = \sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x\right),$

$k \in \mathbb{N}$

Решение: В подточка (b) може да намерим явен вид на решението, понеже

$\varphi(x) = 2X_2(x) - X_3(x)$. Следователно

$$\boldsymbol{u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x) = 2X_2(x) - X_3(x)}$$

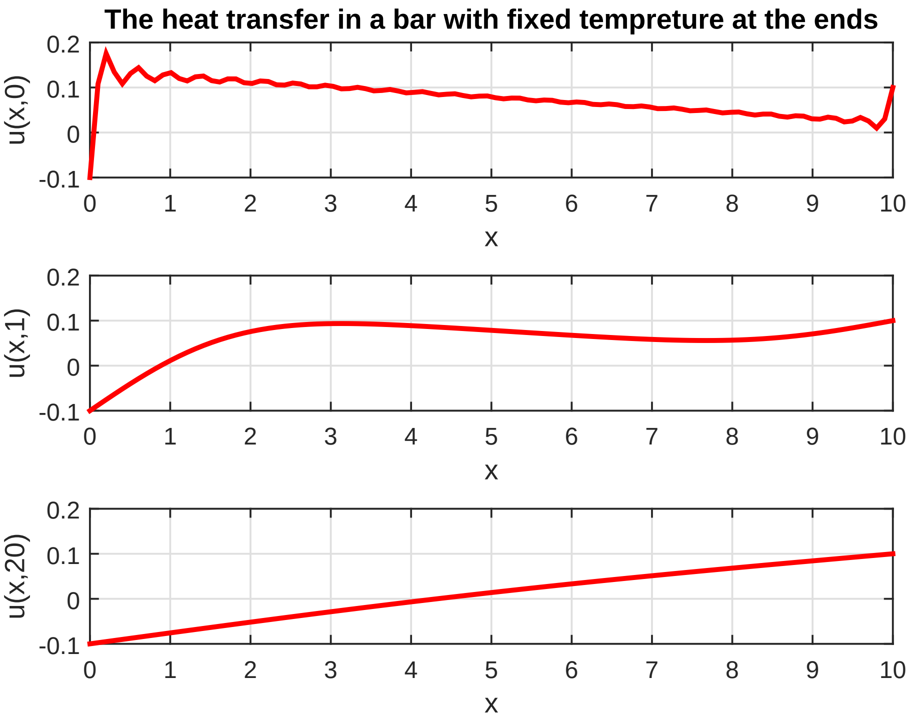
Следователно $C_2=2$, $C_3=-1$ и всички останали $C_k=0$.

Решението на задачата в този случаи е

$$\underline{\boldsymbol{u(x,t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) - e^{-\frac{9}{8}t}\sin\left(\frac{3x}{\sqrt{2}}\right)}}$$

```
function heatfourie1

L=pi*sqrt(2);a=0.5;tmax=12;

t=0:tmax/50:tmax;

x=0:L/100:L;

 function y=phi(x)

        for i=1:length(x)
```

```
            if 1<x(i) & x(i)<2
            y(i)=50*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));
            else
            y(i)=0;
            end
        end
% y=   2 sin(2x/sqrt(2))-sin(3x/sqrt(2))
end
   function y=heat(x,t)
   K=30;
   y=0;
      for k=1:K
      Xk=sin(k*pi*x/L);
      Ck=2*trapz(x, phi(x).*Xk)/L;
      Tk=Ck*exp(-(a*k*pi/L)^2*t);
            y=y+Xk*Tk;
            end
      end
            for n=1:length(t)
      plot(x,heat(x,t(n)))
      axis([0,L,-0.1,1])
      grid on
      M(n)=getframe;
      end
movie(M,2)
end
```



5 Учебно приложение "Диференчна схема за уравнението на топлопроводността "

В това учебно приложение ще визуализираме изменението на температурата в прът с дължина L за период от време $[0, T]$, когато пръта е подложен на температуренрежим $f(x,t)$, а краищата му температурата се изменя по определни закони. Математическият модел на изменението на температурата в пръта се дава със следната смесена задача:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t), \ (x,t) \in \Omega := \{0 < x < L,\, 0 < t < T\}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ 0 < x < L, \\ u|_{x=0} = \mu(t), \ u|_{x=L} = \nu(t), \ 0 < t < T, \end{cases} \tag{10}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0,L]$, $\mu, \nu \in C^2[0,T]$, $f(x,t) \in C^2(\bar{\Omega})$ и са изпълнени условията за съгласуване

$$\mu(0) = \varphi(0),\ \mu'(0) = \varphi''(0) + f(0,0),$$
$$\nu(0) = \varphi(L),\ \nu'(0) = \varphi''(L) + f(L,0).$$

В областта Ω ще въведем мрежа $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$ със стъпки h и τ , където

$$\begin{aligned} \omega_h &= \{x_i = ih,\ h = \frac{L}{n},\ i = 1, 2, ..., n,\ n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}\}, \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau,\ \tau = \frac{T}{m},\ j = 1, 2, ..., m,\ m \geq 2,\ m \in \mathbf{N}\}. \end{aligned}$$

Точките (x_i, t_j) се наричат възли на мрежата, а при фиксирано j точките $(x_i, t_j), i = 1, 2, ..., n$ образуват j – тия слой на мрежата.

Нека за по-кратко означим

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j),\ f_{i,j} = f(x_i, t_j),$$
$$\varphi_i = \varphi(x_i),\ \cancel{\psi_i = \psi(x_i)},\ \mu_j = \mu(t_j),\ \nu_j = \nu(t_j).$$

Ще намерим приближено (с определена грешка) стойностите на решението $u(x, t)$ във възлите на въведената мрежа, като апроксимираме производните с подходящи диференчни частни. За целта ще използваме формулата на Тейлър

$$u(x + h, t) = u(x, t) + u_x(x, t) \cdot h + O(h^2)$$

и

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + u_t(x, t) \cdot \tau + O(\tau^2)$$

за да получим

$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h),\ u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h)$$

$$\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}$$

$$u_{xx} = \frac{u_x(x+h,t)-u_x(x,t)}{h}$$

$$-\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}$$

и

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + O(\tau).$$

По аналогичен начин за втората производна по x получаваме

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2).$$

По този начин за апроксимиране на уравнението на топлопроводността във вътрешните възли на мрежата получаваме диференчните уравнения

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j}, \tag{11}$$

където $i = 2, 3, ..., n - 1,\ j = 2, 3, ..., m - 1$.

От началното условие получаваме

$$u_{i,1} = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{12}$$

Граничните условия ни дават

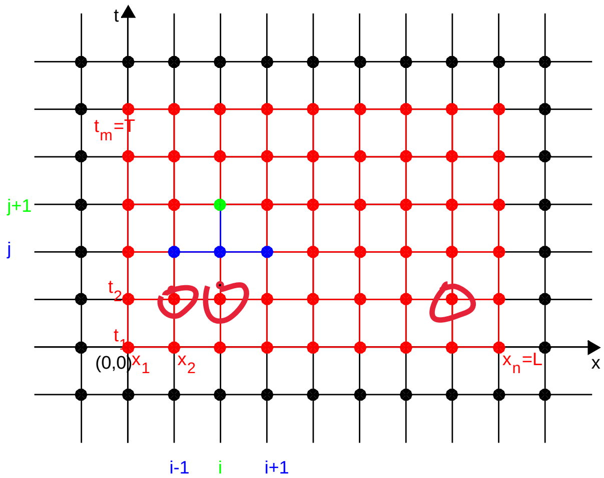
$$u_{1,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 2, 3, ..., m. \tag{13}$$

От равенството (11) можем да изразим $u_{i,j+1}$ и да получим

$$u_{i,j+1} = (1-2c)u_{i,j} + c(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \tau f_{i,j},$$
$$i = 2, 3, ..., n-1,\ j = \cancel{2,3}\ 1,2, ..., m-1,$$

където $c = \frac{\tau}{h^2}$.

Вижда се, че стойностите на u в $j+1$-тия слой се определят чрез стойностите му в предния j - ти слой. Така знаейки стойностите в един слой можем да намерим стойностите в следващия слой.



Така получихме следната явна диференчна схема:

$$u_{i,1} = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., n, \tag{14}$$
$$u_{1,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 2, 3, ..., m,$$
$$u_{i,j+1} = (1-2c)u_{i,j} + c(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \tau f_{i,j},$$
$$i = 2, 3, ..., n-1,\ j = 1,2, ..., m-1.$$

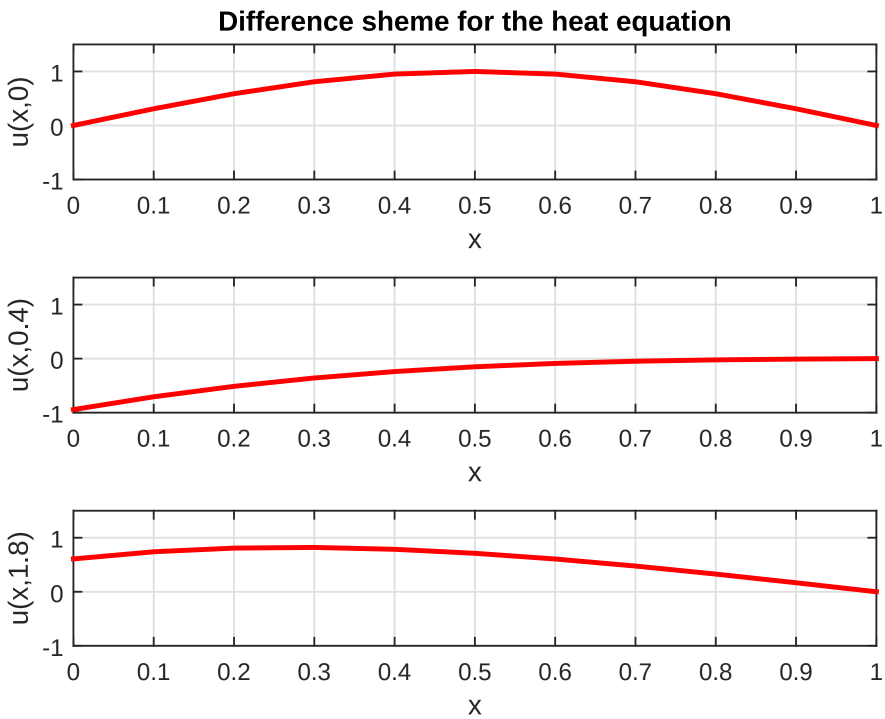
Получената схема е с грешка на апроксимаци $O(\tau + h^2)$. Може да се покаже, че необходимо и достатъчно условие за устойчивостта на схемата (т. е. грешката да не се натрупва, а да намалява, когато пресмятаме всеки следващ слой) е

$$c = \frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}. \tag{15}$$

$u_t - a^2 u_{xx} = f \Rightarrow c = \frac{a^2 \tau}{h^2}$

Ще разгледаме изменението на температурата в пръта за време $t \in [0, T]$, $T = 2$ при $L = 1$, $\varphi(x) = \sin(\pi x)$, $\mu(t) = \sin(\pi t)$, $\nu(t) = 0$, $f(x,t) = (1-x)(\pi+t)$. Нека стъпката по x е $h = L/10$, а стъпката по t е $\tau = T/500$. $\frac{2\tau}{h^2} = \frac{4}{5} < 1$ и условието (15) е изпълнено.

Кодът на това приложение се намира във файла **HeatDS.m**. На следващата фигура е показано разпределението на температурата в пръта в три момента от анимацията. Чрез редактиране на кода могат да бъ-



дат направени анимации на изменението на температурата в пръта при различни стойности на началната темрература на пръта, поддържаните температури в неговите краища и темрелатулния режим, на който е подложен.

```
function HeatDS
clear all;
L=1;
T=2;
h=L/10; tau=T/500;
x=0:h:L;
t=0:tau:T;
c=tau/h^2
% ???????? ?? ????????? ????????????? ??
?????????????
function y=phi(x)
 y=sin(pi*x);
end

% ???????? ?? ????????????? ? ????? ????
function y=mu(t)
 y=sin(pi*t);
end

% ???????? ?? ????????????? ? ????? ????
function y=nu(t)
 y=0*t;
 %(1-cos(pi*t/2));
end

% ???????? ?? ????????? ?????
function y=f(x,t)
 y=5*(1-x)*(pi+t);
end

% ?????????? ??????????? ?? ?????????
for j=1:length(t)
for i=1:length(x)
```

```
if i>1 && i<length(x)
if j==1 u(i,j)=phi(x(i));
else
u(i,j)=(1-2*c)*u(i,j-1)+c*(u(i+1,j-1)+u(i-
1,j-1))...
        +tau*f(x(i),t(j-1));
end
elseif i==1
u(1,j)=mu(t(j));
else
u(length(x),j)=nu(t(j));
end
end
end



 %?????????

for k = 1:length(t)

plot(x,u(:,k),'r','LineWidth',2);
axis([0 L -1 3]);
grid on
title('Difference sheme for the heat
equation')
xlabel('x')
ylabel('u(x,t)')
getframe;
end

% ??? ??????? ??????? ?? ??????????
```

```
% subplot(3,1,1)
% plot(x,u(:,1),'r', 'LineWidth',2)
%              axis([0 L -1 1.5]);
% grid on
% title('Difference sheme for the heat
equation')
% xlabel('x')
% ylabel('u(x,0)')
%
% subplot(3,1,2)
% plot(x,u(:,99),'r', 'LineWidth',2)
%              axis([0 L -1 1.5]);
% grid on
% xlabel('x')
% ylabel('u(x,0.4)')
%
%
%
%
% subplot(3,1,3)
% plot(x,u(:,449),'r', 'LineWidth',2)
%              axis([0 L -1 1.5]);
% grid on
%
% xlabel('x')
% ylabel('u(x,1.8)')
%

   [X,T]=meshgrid(x,t);
   surf(X,T,u')
   xlabel('x')
   ylabel('t')
```

```
    zlabel('u(x,t)')

end
```