Упражнение 6

Решаване на уравнения от вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = P_{m_1}(x) e^{\gamma x}\cdot\cos\beta x + P_{m_2}(x) e^{\gamma x}\sin\beta x$$

Решаване хомогенното уравнение $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$

$y_0(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$

и търсим частно решение от вида

$$\eta(x) = x^k \left(Q_m^1(x) e^{\gamma x}\cos\beta x + Q_m^2(x) e^{\gamma x}\sin\beta x \right)$$

k е кратността на $\gamma \pm i\beta$ като корен на ХП

$m = \max\{m_1, m_2\}$ $\quad Q_m^1(x)$ и $Q_m^2(x)$ са два полинома с неизвестни коефициенти, които всъщност трябва да намерим.

Общо решение $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$

<u>Пример</u> $\quad y'' + 4y' + 5y = 2\cos x$

Решение: $\quad y'' + 4y' + 5y = 0 \to$ ХП: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = -2 \pm i \to$ ФСР: $\{e^{-2x}\cos x, e^{-2x}\sin x\}$

Решение на хомогенното у-е

$y_0(x) = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\sin x$

Частно решение : Дясна част $\quad 2\cos x + 0\sin x$

$P_{m_1} = 2 \quad ; P_{m_2} = 0$

$\Rightarrow Q_0^1 = A \to \quad Q_0^2 = B \quad \{m_1 = m_2 = 0\}$

$\eta(x) = A\cos x + B\sin x$ $\quad$ ($k=0$, защото $-2 \pm i$ не е корен на ХП няма резонанс)

$\eta' = -A\sin x + B\cos x$

$\eta'' = -A\cos x - B\sin x$

заместваме в даденото уравнение

$-A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x)$

$= 2\cos x + 0\sin x.$

(2) Да сравним коефициентите пред $\cos x$ и $\sin x$

$$(-A+4B+5A)\cos x + (-B-4A+5B)\sin x = 2\cos x + 0\sin x$$

$\Rightarrow 4B+4A=2 \quad \nearrow \quad 8A=2 \rightarrow A=B=1/4$

$-4A+5B=0 \rightarrow A=B$

частното решение $y(x)=\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\sin x$

Общо решение $y(x)=C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x$

Зад за упр. 1) $y''+y=\sin x$

2) $y''-2y'+2y=\cos 2x+\sin 2x$

Хармоничен осцилатор

$y''+cy'+\omega^2y=f(x)$ $\quad y(x_0)=y_0 \quad y'(x_0)=y_0'$

$(x$ – време$)$

c – коефициент на триене

ω – честота

$f(t)$ – външна сила

$f(t)=P_{m_1}(x)e^{\gamma x}\cos\beta x + P_{m_2}(x)e^{\gamma x}\sin\beta x$.

резонанс – бихме имали, когато $\gamma \pm i\beta$ е корен на

$\lambda^2+c\lambda+\omega^2=0$ (ХП)

Свеждане на уравнение до система от I ред.

$y^{(n)}+a_1y^{n-1}+\dots+a_ny=0$

$y=Y_1$; $y'=Y_2$ — $y^{(n-1)}=Y_n$

$$Y'=AY \quad : \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

-3- Пример

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

Реш $y = Y_1$; $y' = Y_2$

$\Rightarrow$ $Y_2' = y'' = 2y' - 2y = 2Y_2 - 2Y_1$

$Y_1' = Y_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Пример $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$y = Y_1$; $y' = Y_2$, $y'' = Y_3$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Y_1' &= Y_2 \\ Y_2' &= Y_3 \\ Y_3' &= 3Y_3 - 3Y_2 + Y_1 \end{aligned} \longrightarrow Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} Y$$

Уравнение на Ойлер

$$x^2 y'' + 2x y' - 6y = 2x \quad , x > 0$$

Решение: $x = e^t > 0$

$y(x) = y(e^t)$

$\dot{y} = y' \cdot \dot{x} \longleftrightarrow \left(\frac{d}{dt} y = \frac{d}{dx} y \cdot \frac{dx}{dt} \right)$

$\dot{y} = y'(\dot{e^t}) = y' e^t \longrightarrow y' = e^{-t} \cdot \dot{y}$

$\ddot{y} = y''(e^t)^2 + y' e^t = y'' e^{2t} + \cancel{e^{-t}} \dot{y} \cancel{e^t}$

$\Rightarrow$ $y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) \rightarrow$ заместете в дадено у.е

$$\cancel{e^{2t}}\cdot\cancel{e^{-2t}}(\ddot{y}-\dot{y})+2\cancel{e^{t}}\cancel{e^{-t}}\dot{y}-6y=2e^{t}$$

$$\ddot{y}-\dot{y}+2\dot{y}-6y=2e^{t} \rightarrow \ddot{y}+\dot{y}-6y=2e^{t} \quad (*)$$

$$\lambda^2+\lambda-6=0 \qquad \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-3\end{matrix}$$

ФСР $\{e^{2t}, e^{-3t}\} \rightarrow y_0(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}$

2-р $\eta(t)=Ae^{t}$; $\dot{\eta}=Ae^{t}$; $\ddot{\eta}=Ae^{t} \rightarrow$ заменяме в $(*)$

$$Ae^{t}+Ae^{t}-6Ae^{t}=2e^{t} \rightarrow -4A=2 \rightarrow A=-1/2$$

$$\eta(t)=-\frac{1}{2}e^{t}$$

$$\Rightarrow y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{t}$$

$$\Rightarrow y(x)=c_1x^2+c_2x^{-3}-\frac{1}{2}x$$