Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2020/2021

Тема № СИ21-П-37

15.06.2021 Изготвил: Васил Христов

София Ф. No. 62431

Група 2

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по "Диференциални уравнения и приложения"
спец. Софтуерно инженерство,
2 курс, летен семесътр, уч. год. 2020-2021

Име..,
Ф.No..........., група ....

Тема СИ21-П-37. Движението на струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{\pi}u_{xx} = \sin(\pi x), \;\; 0 < x < \frac{1}{2}, \; t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \; u_t|_{t=0} = 0, \; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ u|_{x=0} = \sin^3\left(\frac{t}{4}\right), \; u|_{x=\frac{1}{2}} = 0, \; t \ge 0. \end{cases}$$

1. Намерете приближение на решението на задачата за $t \in [0, 19]$ с помощта на явна диференчна схема.
2. Начертайте с MATLAB направете анимация на движението на струната за $t \in [0, 19]$, като използвате намереното приближение на решението на дадената задача. Начертайте положението на струната в три момента от направената анимация.

2. Решение на задачата

2.1. Теоретична част

По условие имаме следната смесена задача за движението на струната:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{\pi} u_{xx} = sin(\pi x), 0 < x < \frac{1}{2}, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ u|_{x=0} = sin^3\left(\frac{t}{4}\right), u|_{x=\frac{1}{2}} = 0, t \ge 0. \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}, \varphi(x) = 0 \in C^2[0, L], \psi(x) = 0 \in C^1[0, L], \mu(t) = sin^3\left(\frac{t}{4}\right), \nu(t) = 0 \in C^2[0, T],$$

$$f(x,t) = \sin(\pi x)\,, T = 19, a^2 = \frac{1}{\pi}.$$

Проверяваме дали условията за съгласуване са изпълнени:

$$\mu(0) = sin^3\left(\frac{0}{4}\right) = 0 = \varphi(0),$$

$$\mu'(0) = \frac{3}{4} sin^2\left(\frac{0}{4}\right) \cos\left(\frac{0}{4}\right) = 0 = \psi(0),$$

$$\mu''(0) = -\frac{3}{16} \sin\left(\frac{0}{4}\right)\left(sin^2\left(\frac{0}{4}\right) - 2cos^2\left(\frac{0}{4}\right)\right) = 0 = \frac{1}{\pi}\varphi''(0) + \sin(0),$$

$$\nu(0) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\nu'(0) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\nu''(0) = \frac{1}{\pi}\varphi''\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

В **Ω** ще въведем мрежа ω = ωh × ωτ със стъпки h и τ, където

$$\omega_h = \left\{x_i = ih, h = \frac{1}{2n}, i = 1,2, \dots, n, n \ge 2, n \in N\right\},$$

$$\omega_\tau = \left\{tj = j\tau, \tau = \frac{19}{m}, j = 1,2, \dots, m, m \ge 2, m \in N\right\}.$$

Точките (x_i, t_j) се наричат възли на мрежата, а при фиксирано *j* точките образуват *j*-тия слой на мрежата.

Нека за по-кратко означим

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j), f_{i,j} = f(x_i, t_j),$$

$$\varphi_i = \varphi(x_i), \psi_i = \psi(x_i), \mu_j = \mu(t_j), \nu_j = \nu(t_j).$$

Ще намерим приближено (с определена грешка) стойностите на решението $u(x,t)$ във възлите на въведената мрежа, като апроксимираме производните с подходящи диференчни частни. За целта ще използваме формулата на Тейлър

$$u(x+h,t) = u(x,t) + u_x(x,t) \cdot h + O(h^2)$$

и

$$u(x,t+\tau) = u(x,t) + u_t(x,t) \cdot \tau + O(\tau^2)$$

за да получим

$$u_x(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h), u_x(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h)$$

и

$$u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + O(\tau).$$

По аналогичен начин за вторите производни получаваме

$$u_{tt}(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + O(\tau^2),$$

$$u_{xx}(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2),$$

ако $u(x,t) \in C^4(\Omega)$. По този начин за апроксимиране на вълновото уравнение с локална грешка на апроксимация $O(h^2 + \tau^2)$ във вътрешните възли на мрежата получаваме диференчните уравнения

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j}, \qquad (*)$$

където i = 2,3,…,n-1, j = 2,3,…,m-1.

Съгласно първото начално условие в изходната задача имаме

$$u_{i,1} = \varphi_i, i = 1,2,\dots,n,$$

а според второто (с грешка $O(\tau)$)

$$\frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\tau} = \psi_i, i = 1,2,\dots,n.$$

За апроксимация на второто условие с локална грешка на апроксимация $\mathrm{O}(\tau^2)$ ще използваме реда на Тейлър

$$u(x, t+\tau) = u(x,t) + \tau u_t(x,t) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x,t) + O(\tau^3)$$

и вълновото уравнение. Така получаваме

$$\frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\tau} - \frac{\tau}{2}\left(a^2 \frac{u_{i+1,1} - 2u_{i,1} + u_{i-1,1}}{h^2} + f_{i,1}\right) = \psi_i, i = 2,3, \dots, n-1.$$

Граничните условия в изходната задача ни дават

$$u_{1,j} = \mu_j, u_{n,j} = \nu_j, j = 2,3, \dots, m.$$

От равенството (*) можем да изразим $u_{i,j+1}$ и да получим

$$u_{i,j+1} = 2(1-c^2)u_{i,j} + c^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j},$$

$$i = 2,3, \dots, n-1, j = 2,3, \dots, m-1,$$

където $c = \frac{a\tau}{h}$.

Вижда се, че стойността на решението в точката $i, j+1$ се определя от стойностите му в точките $(i-1, j)$; (i, j); $(i+1, j)$ и $(i, j-1)$. Затова получената диференчна схема се нарича явна трислойна схема по шаблона „кръст“:

$$u_{i,1} = \varphi_i, i = 1,2, \dots, n,$$

$$u_{i,2} = \varphi_i + \frac{c^2}{2}(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + \frac{\tau^2}{2} f_{i,1} + \tau\psi_i, i = 2,3, \dots, n-1,$$

$$u_{1,j} = \mu_j, u_{n,j} = \nu_j, j = 2,3, \dots, m,$$

$$u_{i,j+1} = 2(1-c^2)u_{i,j} + c^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j},$$

$$i = 2,3, \dots, n-1, j = 2,3, \dots, m-1.$$

Може да се покаже, че тази схема е устойчива, ако е изпълнено условието

$$c = \frac{a\tau}{h} \le 1.$$

С тази диференчна схема, която получихме можем да намерим приближение на решението на задачата за $t \in [0,19]$.

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

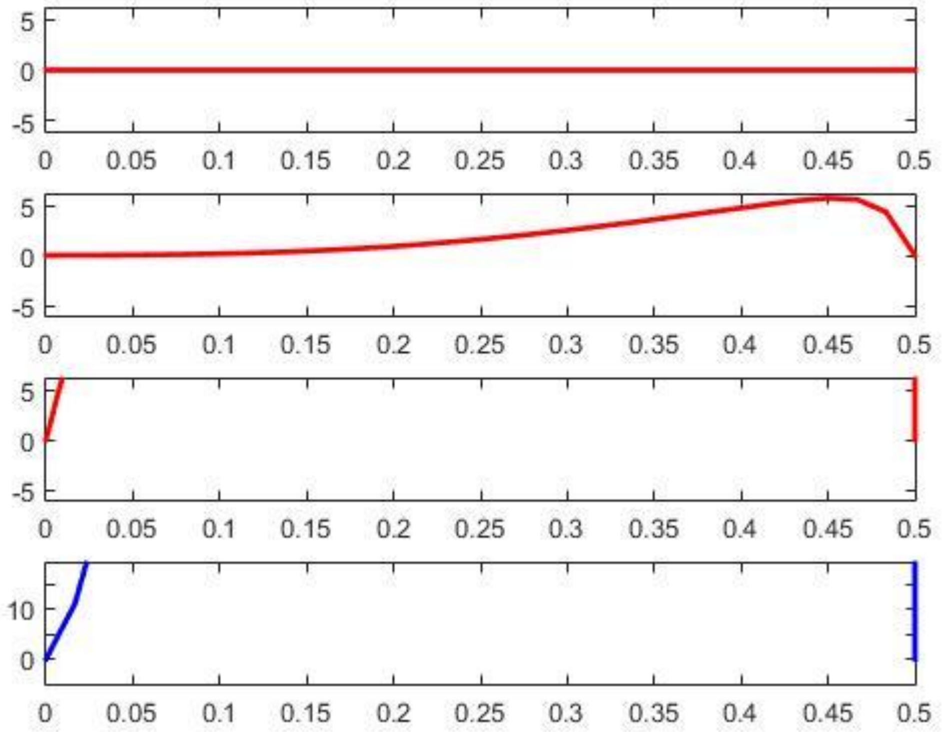
```
function tema37
clc
L=1/2;
a=1/sqrt(pi);
T=19;
h=L/30;
tau=T/760;
x=0:h:L;
t=0:tau:T;
c=(tau*a)/h;

function y=phi(x)
y=0*x;
end

 function y=psi(x)
 y=0*x;
 end

function y=ni(t)
y=0*t;
end

 function y=mu(t)
 y=sin(t/4)^3;
 end

 function y= f(x,t)
 y=sin(pi*x)+0*t;
 end

for j=1:length(t)
 for i=1:length(x)
 if i>1 && i<length(x)
 if j==1
 u(i,j)=phi(x(i));
 elseif j==2
 u(i,j)=phi(x(i))+c^2/2*(phi(x(i+1))-2*phi(x(i))+phi(x(i-
1)))+tau^2/2*f(x(i),t(j-1))+tau*psi(x(i));
 else
 u(i,j)=2*(1-c^2)*u(i,j-1)+c^2*(u(i+1,j-1)+u(i-1,j))-u(i,j-
2)+tau^2*f(x(i),t(j-1));
 end
 elseif i==1
 u(i,j)=mu(t(j));
 else u(i,j)=ni(t(j));
 end
 end
end

for k = 1:T
 clf;
 hold on;
 y=u(:,k);
 plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
```

```
 plot(L,y(end),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
 plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
 grid on;
 title('String Vibration')
 axis([0 L -5 20]);
 xlabel('x');
 ylabel('u(x,t)');
 getframe;
end

clf
subplot(4,1,1)
plot(x,u(:,1),'r','LineWidth',2)
axis([0 L -6 6]);
subplot(4,1,2)
plot(x,u(:,9),'r','LineWidth',2)
axis([0 L -6 6]);
subplot(4,1,3)
plot(x,u(:,19),'r','LineWidth',2)
axis([0 L -6 6]);

M = T;
subplot(4,1,4)
for m=1:M

   plot(x,u(:,m), 'b', 'LineWidth', 2)
   axis([0,0.5,-5,5])
   MM(m) = getframe;
end
movie(MM,3,-20)
end
```

Горният код намира приближение на решението на задачата с помощта на явна диференчна схема.

2.3. Графики (включително от анимация)

Това са графиките от получената анимация и трите кадъра съответно в точките $t = 1, t = 9, t = 19$.



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати

На графиките с червен цвят са начертани трите кадъра, който се изискват от втората точка на задачата в моментите $t = 1, t = 9, t = 19$. Също така се вижда, че началния момент на анимацията е при $t = 0$. Последната графика представлява анимацията.