

1 -

Струна неотгнута - Постеновка, незаведен

Нека не отх $0,1$ е разположена по дължината на хоробетна струна, която се движи във вертикална равнина. Нека $u(x,t)$ е вертикалното отместване на t, x в момента t . Движението не теглите по тази струна се описва от линейно уравнение на ускорение, което е

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

$v = \partial u / \partial t > 0$ - скоростта, която малки смущения (вълни) се придвижват по струната. Тегленето на струната описва движението на този отсечек (или) отсечка. Край на струната (неотгнута струна) или се достатъчно отдалечи от единия край на струната (покояваща струна) или се върху цялата струна: (отгнута струна)
Тогава се 3 различни зони!

-2-

Неограниченно, строго,

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & u_t|_{t=0} = \psi(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad 3. \text{в.}$$

$$a = \text{const} > 0, \varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

Заданные на концах и на единичном времени $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ получаются из формулы Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)] + \frac{1}{2a} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

Пример

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u_t|_{t=0} = \cos x \end{cases}$$

от формулы Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x-t) + \sin(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos s ds$$

$$= \frac{1}{2} \sin(x-t) + \frac{1}{2} \sin(x+t) + \frac{1}{2} [\sin(x+t) - \sin(x-t)] = \sin(x+t)$$

Пример

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = e^x \\ u_t|_{t=0} = xe^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Реш. } u(x, t) = \frac{1}{2} (e^{x+2t} + e^{x-2t}) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} xe^{-x} dx$$

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

→ -

$$u(x,t) = \frac{1}{2} (e^{x+2t} + e^{x-2t}) + \frac{1}{4} (-x)e^{-x} - e^{-x} \Big|_{x-2t}^{x+2t}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t+x} + \frac{1}{2} e^{x-2t} - \frac{1}{4} (x+2t) e^{-x-2t} - \frac{1}{4} e^{-(x+2t)}$$

$$+ \frac{1}{4} (x-2t) e^{-x+2t} + \frac{1}{4} e^{-x+2t}$$
