4. Четвърто упражнение

- линейни уравнения

Зад 1. xy’-2y=2x^4 – аналитично
Зад 2. y’+y tgx=cos^2(x) с dsolve

- уравнения на Бернули:

Зад 3. 2xyy’=y^2-x^2 – аналитично и символно (на лекции е решено като хомогенно уравнение, а тук ще се реши като уравнение на Бернули)

Зад 4. Дадена е задача на Коши : 3xy’+4x^5y^4=2y, y(1)=1/2.
Решете символно задачата и начертайте графиката на решението й в интервала [1/2, 5]. Намерете локалните екстремуми и инфлексните точки на решението в същия интервал и ги маркирайте върху графиката съответно с точка и звезда.

```
function bernoulli
hold on
y=dsolve('3*x*Dy+4*x^5*y^4=2*y','y(1)=1/2','x')

x=0.5:0.1:6;
plot(x,eval(y),'b')

dy=diff(y)
a=double(solve(dy))

d2y=diff(y,2)
b=double(solve(d2y))

x=a(1) % това е реалния корен
plot(x,eval(y),'r*')

x=b(2) % това е реалния корен
plot(x,eval(y),'mo')

end
```

- Понижаване на реда
- F=dG=0 => G=const.

Зад 5. xy’’=2yy’-y’ – аналитично (с >,<,= 0) и с dsolve

- F(x,y,y^(k),y^(k+1), …, y^(n)) =0. Полагаме z=y^(k)

Пример: $y'''=2(y''-1)cotg(x)$

Зад. 6. Решете символно задачата на Коши $y'''=2(y''-1)cotg(x)$, $y(pi/2)=1$, $y'(pi/2)=0$, $y''(pi/2)=1$. Начертайте графиката на решението в интервала [-5,5]. Намерете най-голямата и най-малката стойност на решението в същия интервал и ги маркирайте с различни символи върху графиката.

```
function ponijavane1

y=simplify(dsolve('D3y=2*(D2y-
1)*cot(x)','y(pi/2)=1','Dy(pi/2)=0','D2y(pi/2)=1','x'))
x=-5:0.01:5;

y=eval(y);
hold on
plot(x,y)

[m,xm]= min(y);
[M,xM]=max(y);

plot(x(xm),m,'go',x(xM),M,'r*')

end
```

1. Метод на Ойлер.

Искаме да намерим приближение на задачата на Коши
$y'=f(x,y)$, $y(x0)=y0$
в интервала [x0,a]. Разделяме този интервал на части като въвеждаме възлите
$x_n=x0+nh$, n=0, 1, 2, …, N-1, като използваме стъпка h=(a-x_0)/N.
Означаваме $y_n=y(x_n)$ и апроксимираме производната $y'(x_n)$ с диференчното частно $(y_{n+1}-y_n)/h$. По този начин получаваме диференчната схема
$y_1=y_0$, $y_{n+1}=y_n + h\, f(x_n,y_n)$, n= 1, 2, …, N-1.

За да оценим грешката, която допускаме на всяка стъпка виждаме, че всъщност диференчното уравнение се получава като развием функцията y(x) в ред на Телър в околност на точката x_n : $y(x_n+h)=y(x_n)+y'(x_n)h+y''(x_n)h^2/2+$ … и вземем линейната част от него. Следователно грешката на всяка стъпка е от порядъка на h^2 и след (x0-a)/h стъпки общата грешка ще е от порядъка на h.

Зад1. Дадена е задачата на Коши

$y' = -y\, tg(x) + cos^2(x)$, $y(0)=1$.

- Решете символно тази задача и начертайте графиката на решението ѝ в интервала [0,2].

- Начертайте с различни цветове графиките на приближенията на решението в същия интервал, намерени с метода на Ойлер със стъпки съответно h1=0.5, h2=0.1, h3=0.01.

```
function Euler
x0=0;y0=-1;
a=2;
y=dsolve('Dy=-y*tan(x)+cos(x)^2','y(0)=-1','x');
x=linspace(x0,a);
plot(x,eval(y),'k')
grid on
hold on
xlabel('x')
ylabel('y')
h=[0.5,0.1,0.01]
c=['b','g','m']
for k=1:length(h)
 x=[];y=[];
 y(1)=y0;
x=x0:h(k):a;
for j= 1:length(x)-1
        y(j+1)=y(j)+h(k)*(cos(x(j))^2-y(j)*tan(x(j)));
end
plot(x,y,c(k))
end
```

2. Числен метод за уравнения от втори ред.

По подобен начин можем да намарим приближение на решението на ЗК за ОДУ от втори ред, решено относно втората производна y''=f(x,y,y'), y(x0)=y0, y'(x0)=z0 в интервала [x0,a]. Отново въвеждаме същите възли и означения.

$y_1=y_0$, а за да намерим y_2 използваме реда на Телър

y(z)=y(x)+y'(x)(z-x)+y''(x)(z-x)^2/2!+y'''(x)(z-x)/3! …

И вземем квадратичната част

$y_2=y(x_1)=y(x_0)+hy'(x_0)+h^2y''(x_0)/2=y_0+hz_0+h^2f(x_0,y_0,z_0)/2$.

Нека сега последователно вземем z=x+h и z=x-h:

(1) $y(x+h)=y(x)+hy'(x)+h^2f(x,y(x),y'(x))/2+ y'''(x)h^3/6+\dots$

(2) $y(x-h)=y(x)-hy'(x)+h^2f(x,y(x),y'(x))/2- y'''(x)h^3/6+\dots$

Събираме двете равенства и получаваме (като отрязваме събираемите означени с …)

$y(x+h)+y(x-h) = 2\, y(x)+h^2f(x,y(x),y'(x))$.

По този начин достигаме до диференчната схема

$y_1=y_0$

$y_2=y_0+hv_0+h^2f(x_0,y_0,z_0)/2$,

$y_{n+1}=2y_n-y_{n-1}+h^2f(x_n,y_n,(y_n-y_{n-1})/2)$, n=2,3, …, N-1.

До същата схема можеше и да достигнем като апроксимираме първата поризводна както при метода на Ойлер, а втората производна с диференчното частно $y''(x_n)=[y'(x_{n+1}-y'(x_n)]/h=[y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}]/h^2$.

Зад 2. Дадена е задачата на Коши

$y'' = -4y - y'/2$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

- Решете символно тази задача и начертайте графиката на решението й в интервала [0,20].
- Начертайте с различни цветове графиките на приближенията на решението в същия интервал, намерени с описания числен метод със стъпки съответно h1=0.5, h2=0.3, h3=0.05.

```
function Num2order
x0=0;y0=3;z0=0;
a=20;
x=x0:0.01:a;
y=dsolve('D2y+0.5*Dy+4*y=0','y(x0)=y0','Dy(x0)=z0','x');
plot(x,eval(y),'k')
hold on
grid on

function u=ff(x,y,z)
u=-4*y-0.5*z;
end

h=[0.5,0.3,0.05];
c=['b','g','r'];
for k=1:length(h)
x=[];y=[];
x=0:h(k):a;
y(1)=y0;
y(2)=y(1)+h(k)*z0+h(k)^2*ff(x(1),y(1),z0)/2;
for n=2:length(x)-1
    y(n+1)=2*y(n)-y(n-1)+h(k)^2*ff(x(n),y(n),(y(n)-y(n-
1))/h(k));
end
plot(x,y,c(k))
end

end
```