12. Метод на Фурие за уравнението на топлопроводността.

Разглеждаме уравнението на топлопроводността

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

в правоъгълника $\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$,

където a, L, T са положителни константи.

Задача на Дирихле: Да се намери решение на уравнението на топлопроводността в Ω, което удовлетворява условията

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq L$$

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, 0 \leq t \leq T,$$

където $\varphi \in C^1([0,L])$ и удовлетворява условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

Задачата на Дирихле моделира разпространението на температурата в тънък хомогенен прът с дължина L. Граничните условия при x=0 и x=L означават, че в краищата на пръта се поддържа постоянна температура 0.

Разделяме променливите както н уравнението на струната

Търсим решението във вида $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Заместваме в уравнението и получаваме $\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Използваме граничните условия и за X(x) получаваме задачата на Щрум-Лиувил

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < L,$$

$$X(0) = 0, X(L) = 0$$

Това е същата задача както при струната с фиксирани краища. Знаем вече нейните собствени стойности λ_k и собствени функции. За T(t) получаваме уравнение от първи ред, което решаваме при $\lambda = \lambda_k$:

$$T_k'(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = 0$$

с решения

$$T_k(t) = c_k e^{-a^2 \lambda_k t}$$

Така получаваме за решението

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Коефициентите се дават с формулата

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\, dx$$

Задача: Да се направи анимация на изменението на температурата в тънък хомогенен прът за време t от 0 до 12 при $L = \pi\sqrt{2}, a = \frac{1}{2}$

а) $\varphi(x) = \begin{cases} 50\, e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 < x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$

Като се използва 30-та парциална сума в реда на Фурие.

```
function heatfourie2015

L=pi*sqrt(2);a=0.5;tmax=12;

t=0:tmax/50:tmax; x=0:L/100:L;

 function y=phi(x)

        for i=1:length(x)

            if 1<x(i) & x(i)<2

            y(i)=50*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));

            else

            y(i)=0;

            end

        end

end

   function y=heat(x,t)

   K=30;
```

```
    y=0;
      for k=0:K
      Xk=sin(k*pi*x/L); %Xk=cos((2*k+1)*pi*x/(2*L));
      Ck=2*trapz(x, phi(x).*Xk)/L;
      Tk=Ck*exp(-(a*k*pi/L)^2*t); % Tk=Ck*exp(-(a*(2*k+1)*pi/(2*L))^2*t);
            y=y+Xk*Tk;
            end
      end
            for n=1:length(t)
      plot(x,heat(x,t(n)))
      axis([0,L,-0.1,1])
      grid on
      M(n)=getframe;
      end
movie(M,2)
end
```

Понеже ще има време ще направим и задачата, когато левия край на пръта е топлоизолиран, тоест вместо условието u(0,t)=0 се задава условието u_x(0,t)=0:

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq L$$

$u_x(0,t)=0$, $u(L,t)=0$, $t>=0$.

Условията за съгласуване сега са phi'(0)=psi'(0)=0, phi(L)=psi(L)=0. Тогава се разделят променливите и се получава същата задача на Щурм-Лиувил, като при струрната със свободен ляв край. Вече сме намирали нейните собствени стойности и функции. За решението получаваме

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{2k+1}{2L}a\pi\right)^2 t} \cos\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right),$$

където

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \cos\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right)\, dx.$$

Решаваме същата задача със същите a,L и начална температура, но вече с топлоизолиран ляв край. Използваме кода за предишната задача, в който използваме коментираните и маркираните