0.1 Метод на Фурие за смесената задача

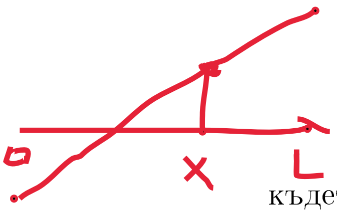
Да разгледаме процесът на разпространение на топлина по тънък хомогенен прът. Ще предполагаме, че няма топлообмен през околната повърхнина на пръта и в точките от произволно взето сечение температурата е постоянна. Нека прътът е разположен по оста Ox и $u(x,t)$ е температурата на сечението през точка x в момент t. Разпространението на топлина става от областите с по-висока температура към тези с по-ниска температура и съгласно допускането може да става само по направление на оста на пръта. Затова можем да си мислим че прътът е безкрайно тънък, а x е координатата на точка от него. Законът, който описва изменението на температурата във времето се дава с уравнението

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

което се нарича уравнение на топлопроводността. Положителната константа a наричаме коефициент на топлопроводност.

Изменението във времето на температурата в точките от пръта се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < L, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ 0 \le x \le L, \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=L} = 0, \ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$



където $\varphi(x) \in C^2[0,L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

Разглежданата задача наричаме смесена задача за уравнението на топлопроводноста, защото освен начално условие имаме и гранични условия зададени в краищата на пръта.

Теорема 0.1.1. *При направените предположения задачата* (2) *притежава единствено решение.*

Ще скицираме доказателствот за съществуване на решение. Ако $\varphi(x) \equiv 0$, то очевидно $u(x,t) \equiv 0$ е решение на разглежданата задача. Нека $\varphi(x)$ не се анулира тъждествен в $[0,L]$. Тогава търсим ненулево решение на задачата (2).

Както при изследването на граничната задача за уравнението на струната, отначало ще намерим безброй много решения $u_k(x,t)$ на уравнението (1), които се нулират при $x = 0$ и $x = L$, а след това ще покажем, че при подходящ избор на константите, участващи в тях, функцията

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$$

е решение на задачата (2).

Търсейки решения на (1) от вида $u(x,t) = X(x)T(t)$, получаваме

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = -\lambda = const.$$

От тук следват равенствата

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad (3)$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0. \qquad (4)$$

От своя страна граничните условия

$0 \le t \le T$

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(L,t) = X(L)T(t) = 0, \; t \geq 0$$

$T(t) \not\equiv 0$

ни дават

$$\boxed{X(0) = X(L) = 0,} \qquad (5)$$

защото в противен случай $u(x,t)$ би се нулира тъждествено.

Както бе показано при изследванеот на смесената задачата за уравнението на струната в предишната лекция, задачата на Щурм-Лиувил (3), (5) има нетривилани решения само, ако λ е някоя от константите

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \; k = 1, 2, \ldots$$

При $\lambda = \lambda_k$, съответната задача има безбройно много решения от вида $cX_k(x)$, където c е произволна констант, а

$T' = -\lambda_k a^2 T$

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

$T' + \lambda_k a^2 T = 0$

Интегрирайки (4) при $\lambda = \lambda_k$, получаваме

$y' = ay$

$$T_k(t) = C_k e^{-(ak\pi/L)^2 t}, \; k = 1, 2, \ldots.$$

$y = ce^{at}$

$\int \frac{y'}{y} dt = \int a\, dt$

$\int \frac{dy}{y} = \int a\, dt$

$u_k(x,0) = C_k X_k(x) = \varphi(x)$

По този начин получихме функциите

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = C_k e^{-(a\pi k/L)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \; k = 1, 2, \ldots.$$

Те удовлетворяват уравнението на топлопровдността и граничните условия в задача (2).

Нека сега да построим реда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(a\pi k/L)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \tag{6}$$

с неопределени коефициенти и да допуснем, че е равномерно сходящ в $\Pi := \{(x,t) : 0 \le x \le L, \; \delta \le t \le T\}$ и е решение на изходната гранична задача (2) (това наистина е така). Тогава полагайки $t = 0$, намираме

$|u_k| \le C_k$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \tag{7}$$

От предположението за равномерна сходимост на реда следва , че C_k са фуриеровите коефициенти :

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx. = \frac{2}{L}\left(\varphi(x), X_k(x)\right) \tag{8}$$

Така формално получихме решение във вид на ред.

Очевидно $|u_k(x,t)| \le |C_k|$ за $(x,t) \in \Pi$. Следователно функционалният ред $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$ се мажорира от числовия ред $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$ в Π. Може да се покаже, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$ е сходящт. Съгласно критерият на Вайерщрас редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$ е равномерно сходящ в Π и неговата сума $u(x,t)$ е непркъсната в Π.

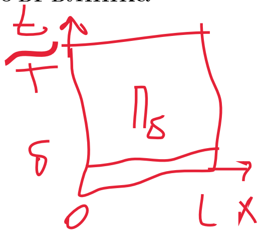
Формалното диференциране по t ни дава реда

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,t}(x,t) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a\pi k}{L}\right)^2 C_k e^{-(a\pi k/L)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right). \end{aligned} \tag{9}$$

$\left|\sum k^2 C_k\right|$

Да фиксираме едно произволно $\delta \in (0, T]$ и да разгледаме правоъгълника $\Pi_\delta := \{(x,t) : 0 \le x \le L, \; \delta \le t \le T\} \subset \Pi$. Понеже

$$\left(\frac{a\pi k}{L}\right)^2 e^{-(a\pi k/L)^2 t} \le \left(\frac{a\pi k}{L}\right)^2 e^{-(a\pi k/L)^2 \delta} \quad \text{в} \quad \Pi_\delta$$



и

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a\pi k}{L}\right)^2 e^{-(\pi k/L)^2\delta}=0,$$

което може да се установи например с правилото на Лопитал, следва, че

$$\left(\frac{a\pi k}{L}\right)^2 e^{-(a\pi k/L)^2 t}\le 1,\quad k\ge N\quad \text{в}\quad \Pi_\delta$$

за достатъчно голямо N. Следователно редът

$$\sum_{k=N}^{\infty}\left(\frac{a\pi k}{L}\right)^2 C_k e^{-(a\pi k/L)^2 t}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

се мажорира от числовия ред $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$ в Π_δ, който е сходящ. Следователно редът

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,t}(x,t)=&-\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{aa\pi k}{L}\right)^2 C_k e^{-(\pi k/L)^2 t}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\\&-\sum_{k=N}^{\infty}\left(\frac{a\pi k}{L}\right)^2 C_k e^{-(a\pi k/L)^2 t}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right).\end{aligned}\tag{10}$$

е равномерно сходящ в Π_δ.

Така получихме и равномерна сходимост на реда (9) във всеки от правоъгълниците Π_δ. Понеже всяка точка от Π се включва в някой от правоъгълниците Π_δ, следва равномерна сходимост на разглеждания ред в $\Pi\cap\{t>0\}$.

Формалното диференциране по x ни дава реда

$$u_x(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi k}{L}C_k e^{-(\pi k/L)^2 t}\cos\left(\frac{\pi k}{L}x\right).$$

С аналогично разсъждение се вижда и неговата равномерна сходимост в $\Pi\cap\{t>0\}$.

Второто формално диференциране по x ни ред пропорционален с константа $1/a^2$ на реда, който получихме с едно диференциране по t и чиято равномерна сходимост вече изследвахм.

По аналогичен начин може да се установи, че $u(x,t)$ е безбройно много пъти диференцируема в $\Pi\cap\{t>0\}$.

И така, редът (6) удовлетворява уравнението (1), понеже всеки негов член го удовлетворява. равномерната сходимост на редът при $t=0$ ни осигурява удовлетворяването на нчалното условие в разглежданата задача. Всички членове на реда (6) удовлетворяват граничните условия, следователно и $u(x,t)$ ги удовлетворява.

$$\varphi = X_{k_0}(x) \Rightarrow C_k = \begin{cases} 0, & k\ne k_0\\ 1, & k=k_0\end{cases}$$

$$u(x,t)=e^{-(a k_0\pi/L)^2 t}\sin\left(\frac{k_0\pi}{L}x\right)$$

Пример $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{\pi}x^4 - 2x^3 + \pi^2 x, \ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0, \ t \ge 0 \end{cases}$

$$a = 1, \ L = \pi, \ \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = k^2, \ X_k = \sin(kx)$$
$$k \in \mathbb{N}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

$$C_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}x^4 - 2x^3 + \pi^2 x\right)\sin(kx)\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}x^4 - 2x^3 + \pi^2 x\right)d\cos(kx)$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\Big[\underbrace{\left(\frac{1}{\pi}x^4 - 2x^3 + \pi^2 x\right)\cos kx\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \left(\frac{4}{\pi}x^3 - 6x^2 + \pi^2\right)\cos kx\,dx\Big]$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\int_0^\pi \left(\frac{4}{\pi}x^3 - 6x^2 + \pi^2\right)d\sin kx$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\Big[\underbrace{\left(\frac{4}{\pi}x^3 - 6x^2 + \pi^2\right)\sin kx\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \left(\frac{12}{\pi}x^2 - 12x\right)\sin kx\,dx\Big]$$

$$= +\frac{24}{\pi k^3}\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{\pi} - x\right)d\cos kx$$

$$= \frac{24}{\pi k^3}\Big[\underbrace{\left(\frac{x^2}{\pi} - x\right)\cos kx\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)\cos kx\,dx\Big]$$

$$= -\frac{24}{\pi k^4}\int_0^\pi \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)d\sin kx$$

$$= -\frac{24}{\pi k^4}\Big[\underbrace{\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)\sin kx\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin kx\,dx\Big]$$

$$= -\frac{48}{\pi^2 k^5} \cos kx \Big|_0^{\pi} = -\frac{48}{\pi^2 k^5}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & , k = 2s \\ \dfrac{96}{\pi^2 (2s+1)^5} & , k = 2s+1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{x}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(2s+1)^5}}_{c_s} e^{-(2s+1)^2 t} \sin(2s+1)x$$

$$|c_s| = \frac{1}{(2s+1)^5}, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^p} < \infty,$$

$$p > 1$$