11. Метод на Фурие. Трептене на ограничена струна с фиксиран десен край и закрепен или свободен ляв край.

1. Струна със закрепени краища

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le L,$$
$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0 \; t \ge 0,$$

където a = const. >0, $\varphi(x) \in C^2([0,L)$, $\psi(x) \in C^1([0,L))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$ и $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$

Търсим решението във вида $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Заместваме в уравнението и получаваме $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Използваме граничните условия и за X(x) получаваме задачата на Щурм-Лиувил

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < L,$$

$$X(0) = 0, X(L) = 0$$

Всичко това ще бъде направено на Лекции. Намирането на собствените стойности и собствените функции на задачата, както и решението на уравнението за T(t) и коефициентите в реда на Фурие ще бъдат изведени на Лекции. На упражнения директно се записват кои са те. Решението има вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

В правоъгълните скоби са решенията на уравненията за T(t). Коефициентите са дадени по-долу.

На упражнения подробно се прави това за другата задача:

1. Свободен ляв край и фиксиран десен край:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le L,$$
$$u_x(0,t) = 0, u(L,t) = 0 \; t \ge 0,$$

където a = const. >0, $\varphi(x) \in C^2([0,L)$, $\psi(x) \in C^1([0,L))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$ и $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$.

На упражнения се разделят променливиге, решава се задачата на Щурм-Лиувил за X(x), решават се уравненията за T(t), записва се решението във вид на ред

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{2k+1}{2L} a\pi t\right) + B_k \sin\left(\frac{2k+1}{2L} a\pi t\right) \right] \cos\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right)$$

и се записват фуриеровите кофециенти:

1) $X(0)=0, \; X(L)=0,$ $\quad \varphi \in C^2[0,L], \; \psi \in C^1[0,L]$

$\varphi(0)=\varphi''(0)=\psi(0)=0, \; \varphi(L)=\varphi''(L)=\psi(L)=0$

$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \; X_k = \sin\frac{k\pi}{L}x, \; k=1,2,3,\dots$

$T_k = A_k \cos\frac{ak\pi}{L}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{L}t$

$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) X_k(x)\,dx, \; B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^L \psi(x) X_k(x)\,dx$

---

2) $X'(0)=0, \; X(L)=0,$

$\varphi'(0)=\psi'(0)=0; \; \varphi(L)=\psi(L)=\varphi''(L)=0$

$\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2, \; X_k = \cos\frac{2k+1}{2L}\pi x, \; k=0,1,2,\dots$

$T_k = A_k \cos\frac{2k+1}{2L}a\pi t + B_k \sin\frac{2k+1}{2L}a\pi t$

$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) X_k(x)\,dx, \; B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^L \psi(x) X_k(x)\,dx$

Разбира се първо се говори за първата задача и се пише кода при
и $L = \pi\sqrt{2}, a = \frac{1}{2}$

а) $\varphi(x) = \begin{cases} 10\, e^{\frac{4}{(4x-3)^2-1}}, & 1 < x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$

Ψ(x)=0.

б) демонстриат се стоящи вълни, когато поне една от функциите φ(x), ψ(x) е пропорционална на някоя от собствените функции на задачата на Щрум-Лиувил:

$$\varphi(x) = \sin\left(5x\sqrt{2}\right), \qquad \psi(x) = 0$$

или

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = \sin\left(5x\sqrt{2}\right)$

```
function string_fourie

clf

L=pi*sqrt(2); a=1/2;

x=0:L/100:L;

t0=0;tmax=30;

t=t0:(tmax-t0)/100:tmax;


function y=phi(x)

p=3;

for i=1:length(x)

        if 1<x(i) & x(i)<2

        y(i)=10*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));

        else

        y(i)=0;

        end

   end

      %y=sin(p*x*sqrt(2));

      %y= cos((2*p+1)*x/sqrt(8));
```

```
      %y=0;
end

function y=psi(x)
p=5;
y=0;
%y=sin(p*x*sqrt(2));
%y=cos((2*p+1)*x/sqrt(8));
end

function y=fourieru(x,t)
y=0;
for k=1:30
    Xk=sin(k*pi*x/L);
    %Xk=cos(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
    Ak=(2/L)*trapz(x,phi(x).*Xk);
    Bk=2/(a*k*pi)*trapz(x,psi(x).*Xk);
    %Bk=(4/(2*k+1)*pi*a)*trapz(x,psi(x).*Xk);
    Tk=Ak*cos(a*k*pi*t/L)+Bk*sin(a*k*pi*t/L);
    %Tk=Ak*cos((2*k+1)*pi*a*t/(2*L))+Bk*sin((2*k+1)*pi*a*t/(2*L));

    y=y+ Tk*Xk;
end
end

for n=1:length(t)
    clf
    hold on
```

```
y=fourieru(x,t(n));
plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
xlabel('x'); ylabel('u(x,t)');
axis([0 L -1 1]);
grid on;
M(n)=getframe;
end
movie(M,2)


hold off
[X,T]=meshgrid(x,t);
U=fourieru(X,T);
surf(X,T,U)
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u')
end
```

След това се говори за втората задача и се използват коментираните със зелено промени, които се правят за да се анимира трептението на струната от втората задача. Тогава функциите, с които се демонстрират стоящи вълни са други – косинуси.