10. Десето упражнение

10.1. Движение на неограничена струна. Формула на Даламбер.

Разглеждаме идеално гъвкава, неразтеглива струна, разположена по оста Ох. Нека с u(x,t) означим отклонението в точката x на струната от равновесното й положение. Ако струната е пусната да се движи в някакъв момент t=0 чрез придръпване до положение φ(x), с начална скорост ψ(x) и след това е оставена без външно въздействие. Тя ще се движи във вертикална равнина, при условие че съпротивлението на средата е пренебрегнато. Така достигаме до следната задача на Коши:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in R, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in R,$$

където a = const. >0 е скоростта, с която малки смущения се придвижват по струната, $\varphi(x) \in C^2(R)$, $\psi(x) \in C^1(R)$.

При направените предположения задачата има единствено решение

$u \in C^2(R \times [0,+\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds.$$

- интегриране

- символно: int(sym('string’)) и int(sym(‘string’),a,b)

Да се пресметне символно $\int_0^1 x^2\, dx$

int(sym(‘x’),0,1)

- численo quad и trapz, с дефинирана функция f(x)

Да се пресметне числено $\int_0^1 x^2\, dx$

```
function integration

I=quad(@ff,0,1)

x=0:1/100:1;

T=trapz(x,ff(x))

function z=ff(x)

z=x.^2;
```

end

Зад 1. Да се направи анимация на движението на частта $C \coloneqq \{-1 \le x \le 4\}$ от неограничена струна за време $t \in [0,6]$, ако

a) $a = 1/2,\ \varphi(x) = \begin{cases} \sin^4 x, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in R\backslash[1,2] \end{cases}$, ψ(x)=0.

b) $a = 1/10$ и същите начални условия,

c) a=1/2, φ (x) от подточка (a) и $\psi(x) = \frac{1}{2}\sin(3\pi x)$

```
function stringdalambert1

clf
tmax=6;
t=linspace(0,tmax);
xmin=-1;xmax=4;
x=linspace(xmin,xmax);
  function y=phi(x)
    for i=1:length(x)
        if x(i)>=1 && x(i)<=2
           y(i)=sin(pi*x(i))^4;
        else
           y(i)=0;
        end
    end
  end

       function y=psi(x)
       y=0*x;
       %y=sin(3*pi*x)/2;
       end

   function y=dalambert(x,t)
       a=1/2;%1/10;
        for j=1:length(x)
          if t==0
          integral=0;
          else
          s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
          integral=trapz(s,psi(s));
          end
        y(j)=(phi(x(j)-a*t)+phi(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
        end
   end

    for k=1:length(t)
    plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)
    axis ([xmin,xmax,-1.05,1.05])
    daspect([1,1,1])
    grid on
```

```
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,t)')
    M=getframe;
    end
%movie(M,2)
    end
```

10.2. Движение на полуограничена струна. Метод на продълженията.

Ще разглеадаме движението на полуограничена струна със закрепен или свободен ляв край - точката с абсциса x=0.

- Нека левият край е фиксиран. Тогава имаме следната смесена задача.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x > 0, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x > 0,$$
$$u(0,t) = 0, t > 0,$$

където a = const. >0, $\varphi(x) \in C^2([0,\infty))$, $\psi(x) \in C^1([0,\infty))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$.

Продължаваме нечетно функциите φ и ψ до функции φ_odd и ψ_odd и получаваме задача на Коши за неограничена стурна с начални данни φ_odd и ψ_odd, която решихме в 10.1. Ако u_odd е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в {x>0, t>0} е решение на задачата за полуограничената струна с фиксиран ляв край. Ще припомним, че нечетно продължение на функция f(x) е

$$f\_odd(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

- По аналогичен начин се разсъждава, ако левия край на струната е свободен. Тогава имаме следната смесена задача.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x > 0, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0, t > 0,$$

където a = const. >0, $\varphi(x) \in C^2([0,\infty))$, $\psi(x) \in C^1([0,\infty))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$.

Продължаваме четно функциите φ и ψ до функции φ_even и ψ_even и получаваме задача на Коши за неограничена стурна с начални данни φ_even и ψ_even, която решихме в 10.1. Ако u_even е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в {x>0, t>0} е решение на задачата за полуограничената струна със свободенляв край. Ще припомним, че четно продължение на функция f(x) е

$$f\_even(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Зад. 2. Да се моделира трептенето на частта $C ≔ \{0 \le x \le 6\}$ от полуограничена струна с фиксиран или свободен ляв край за време $t \in [0,8]$, ако

a) $a = 1/2,\ \varphi(x) = \begin{cases} \sin^4 x, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in [0,1] \cup [2,+\infty) \end{cases}$, $\psi(x)=0$.

b) $a = 1/10$ и същите начални условия,

c) $a=1/2$, $\varphi(x)$ от подточка (a) и $\psi(x) = \frac{1}{2}\sin(3\pi x)$

Може да се редактира кода от зад 1. До следния

```
function stringdalamber2
clear
tmax=8;
t=linspace(0,tmax,200);
xmax=6;
x=linspace(0,xmax);

        function y=phi(x)
             for i=1:length(x)
                   if x(i)>=1 && x(i)<=2
                      y(i)=sin(pi*x(i))^4;
                   else
                      y(i)=0;
                   end
             end
        end

         function y=psi(x)
         y=0.*x;
         %y=sin(3*pi*x)/2;
         end

   function y=phi_odd(x)%phi_even(x)
       if x>0
          y=phi(x);
       else
          y=-phi(-x);
         %y=phi(-x);
       end
   end

       function y=psi_odd(x)%psi_even(x)
           if x>0
              y=psi(x);
           else
              y=-psi(-x);
           end
       end

       function y=dalambert(x,t)
```

```
            a=1/2;%1/10;
               for j=1:length(x)
                  if t==0
                     integral=0;
                  else
                     s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
                     integral=trapz(s,psi_odd(s));
                  end
    y(j)=(phi_odd(x(j)-a*t)+phi_odd(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
               end
           end

       for k=1:length(t)
       clf
       hold on
       plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)
       plot(0,0,'ko','MarkerFaceColor',[0,0,0])
       axis ([0,xmax,-1.05,1.05])
       grid on
       daspect([1,1,1])
       xlabel('x')
       ylabel('u(x,t)')
       M=getframe;
   end
   %movie(M,3)
       end
```