1.

Линейни уравнения

(1) $y' = a(x)\,y + b(x)$, $a(x), b(x)$ – непр. функции.

Решение: $y' = a(x)\,y$ – хомогенно у-е

$$\frac{y'}{y} = a(x) \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx + k$$

$$\Rightarrow \ln y = \int a(x)\,dx + k \longrightarrow y = \frac{e^k}{c}\, e^{\int a(x)dx}, \quad c = const$$

$y(x) = c\, e^{\int a(x)dx}$ – решение на хомогенното у-е

Метод на Лагранж (вариране на константите)

Търсим реш на (1) във вида $y(x) = c(x)\, e^{\int a(x)dx}$

$$y' = c' e^{\int a(x)dx} + c\left(e^{\int a(x)dx}\right)' = c' e^{\int a(x)dx} + c\, e^{\int a(x)dx}\,\underbrace{\left(\int a(x)dx\right)'}_{a(x)}$$

$$\Rightarrow y' = c' e^{\int a(x)dx} + \underbrace{c(x)\, e^{\int a(x)dx}}_{y} \cdot a(x)$$

$$\Rightarrow y' = a(x)\,y + c' e^{\int a(x)dx}$$

от друга страна $y' = a(x)\,y + b(x)$

$$\Rightarrow b(x) = c' e^{\int a(x)dx} \longrightarrow c' = b(x)\, e^{-\int a(x)dx}$$

$$c(x) = \int b(x)\, e^{-\int a(x)dx} + const$$

$\Rightarrow$ решението на (1) $y(x) = e^{\int a(x)dx}\left[const + \int b(x)\, e^{-\int a(x)dx} dx\right]$

<u>Пример</u> $y' = \frac{3}{x}\,y + 4x^5$, $y(2) = 1$ – З. Коши.

Реш: $a(x) = \frac{3}{x}$, $b(x) = 4x^5$

$$y(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx}\left[C + \int 4x^5\, e^{-\int \frac{3}{x}dx} dx\right]$$

$\int \frac{3}{x}dx = 3\ln x = \ln x^3 \Rightarrow e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{\ln x^3} = x^3$

$\left(e^{\ln A} = A \quad , A > 0\right)$

аналогично $e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{\ln x^{-3}} = x^{-3}$

Тогава $y(x) = x^3\left[C + \int 4x^5 \cdot x^{-3} dx\right]$

$= x^3\left[C + 4\int x^2 dx\right] = x^3\left[C + 4\frac{x^3}{3}\right]$

$y(x) = x^3\left[C + \frac{4x^3}{3}\right]$

$x_0 = 2 \qquad y_0 = 1$ – начално условие

$\Rightarrow 1 = 2^3\left[C + 4\cdot\frac{2^3}{3}\right] = 8\left[C + \frac{32}{3}\right]$

$C + \frac{32}{3} = \frac{1}{8} \quad \to \quad C = \frac{1}{8} - \frac{32}{3} = \frac{3 - 256}{24} = \frac{-253}{24}$

$\Rightarrow y(x) = x^3\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{253}{24}\right]$

Зад $\quad \dot{x} + \frac{3}{t}x = \frac{2}{t^3} \quad , \quad x(1) = 1 \qquad$ – 3. Коши!

$x(t) = e^{-\int \frac{3}{t}dt}\left[C + \int \frac{2}{t^3} e^{\int \frac{3}{t}dt} dt\right]$

$x(t) = e^{\ln t^{-3}}\left[C + 2\int \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{t^3}} dt\right] = \frac{1}{t^3}\left[C + 2t\right]$

$t_0 = 1 \qquad x_0 = 1 \quad \longrightarrow \qquad 1 = \frac{1}{1^3}\left[C + 2\cdot 1\right] \to C = -1$

$x(t) = \frac{1}{t^3}\left[2t - 1\right]$

Зад. за упр. 1) $t\dot{x} = (t+1)x + 3t^2e^{-2t}$

2) $(2t+1)\dot{x} = 4t + 2x$

3) $\dot{x} + x\sin t = \sin^3 t$

Уравнение на Бернули

$y' = a(x)y + b(x)y^m$, $m \neq 0, 1$

$y = 0$ е изключено (т.е. проверява се за решение)

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)y^{1-m} + b(x)$$

полагаме $z(x) = [y(x)]^{1-m}$, $z' = (1-m)\frac{y'}{y^m}$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m} \quad (m \neq 1)$$

$\Rightarrow z' = (1-m)a(x).z + (1-m)b(x)$ - линейно у-е!

пример

$y' + 2y = y^2 . e^x$ $\quad y = 0$ е реш:

$\Rightarrow y \neq 0$

$$\frac{y'}{y^2} = -2 \cdot \frac{1}{y} + e^x \qquad \text{пол } z = \frac{1}{y} \qquad z' = -\frac{y'}{y^2}$$

$\Rightarrow -z' = -2z + e^x \longrightarrow z' = 2z - e^x$

$$z(x) = e^{\int 2dx}[c + \int(-e^x)e^{-\int 2dx}dx]$$

$$= e^{2x}[c - \int e^x e^{-2x}dx] = e^{2x}[c - \int e^{-x}dx]$$

$z(x) = e^{2x}[c + e^{-x}] \longrightarrow$ $\boxed{y = \frac{1}{z} = \frac{e^{-2x}}{c + e^{-x}}}$

Дом!

1) $2\dot{x} = \frac{xt}{t^2 - 1} + \frac{t}{x}$

2) $\dot{x} = x\tan(t) + x^4\cos(t)$