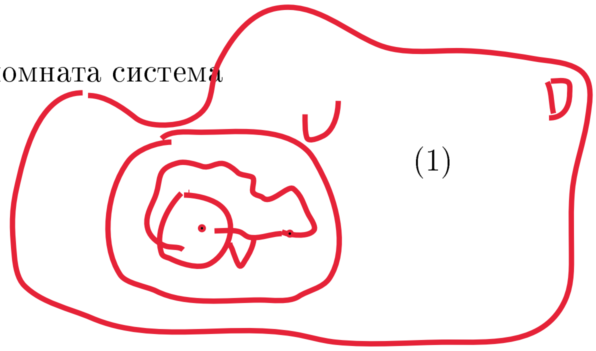
1 Фазови портрети на нелинейни автономни системи в равнината. Векторни полета. Устойчивост по линейно приближение. Движение на точка по фазова крива.

Нека точката $(a,b) \in D$ е равновесна точка на автономната система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y), \end{array} \right. \tag{1}$$



където $f, g \in C^1(D)$, а D е област в равнината.

Следователно $f(a,b) = 0$, $g(a,b) = 0$.

Дефиниция 1.1 *Казваме, че (a,b) е устойчиво положение на равновесие на автономната система (1), ако за всяка околност $U \subseteq D$ на (a,b) съществува такава околност $V \subseteq U$ на (a,b), че решението $(\varphi(t), \psi(t))$, удовлетворяващо началното условие $(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = (x_0, y_0) \in V$, има свойствата:*

1. *Решението $(\varphi(t), \psi(t))$ е дефинирано за всички $t \geq t_0$.*
2. *Решението остава в U при $t \geq t_0$, т.е. $(\varphi(t), \psi(t)) \in U$ за всяко $t \geq t_0$.*

Положението на равновесие се нарича асимптотично устойчиво, ако е устойчиво и

$$\lim_{t \to \infty} (\varphi(t), \psi(t)) = (a,b).$$

Дефиниция 1.2 *Линейно (първо) приближение на системата (1) в околност на нейната равновесна точка (a,b) наричаме системата*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b), \\ \dot{y} = g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b). \end{array} \right.$$

Ако въведем означението

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix},$$

първото приближение може да бъде записано във вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

- Ако всички собсвени стойности на матрицата $J(a,b)$ са с отрицателни реални части, то равновесната точка (a,b) на системата (1) е асимптотично устойчива.
- Ако съществува собствена стойност на матрицата $J(a,b)$ с положителна реала част, то равновесната точка (a,b) на системата (1) е неустойчива.

Задача 1. Дадена е системата

$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \sin(x+y). \end{aligned} \right.$$

1. Намерете равновесните точки на системата и ги изследвайте за устойчивост.
2. Начертайте фазов портрет на системата в правоъгълник, който съдържа три от равновесните точки
3. Намерете първото приближение на системата в околност на някоя изобразените от равновесните точки и начертайте фазов портрет на полученото линейно приближение.

Решение.
1.) Равновесните точки са решения на системата

$$\left| \begin{aligned} y &= 0, \\ \sin(x+y) &= 0. \end{aligned} \right.$$

$-2\pi \quad -\pi \quad 0 \quad \pi \quad 2\pi$

Следователно равновесните точки на системата са $(a_k, b_k) = (k\pi, 0)$, където k е цяло число.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

2.) Matlab кодът е след точка 3.
3.) В дадената система $f(x,y) = y$, $g(x,y) = \sin(x+y)$ и следователно $f_x = 0$, $f_y = 1$, $g_x = g_y = \cos(x+y)$. така получаваме

$$J(a_k, b_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos k\pi & \cos k\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Следователно лнейното приближение на системата в оклоност на равновесната точка $(a_k, b_k) = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ е

$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (-1)^k(x - k\pi) + (-1)^k y. \end{aligned} \right.$$

Да намерим собствените стойности на матрицата $J(k\pi, 0)$. Ще разгледаме два случая

i) k е четно число
Тогава

$$J(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

и има характеристичен политом

$$P_J = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

който има корени $\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2 < 0$ и $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2 > 0$. Следователно тези равновесни точки на дадената система са неустойчиви.

ii) k е нечетно число
Тогава

$$J(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

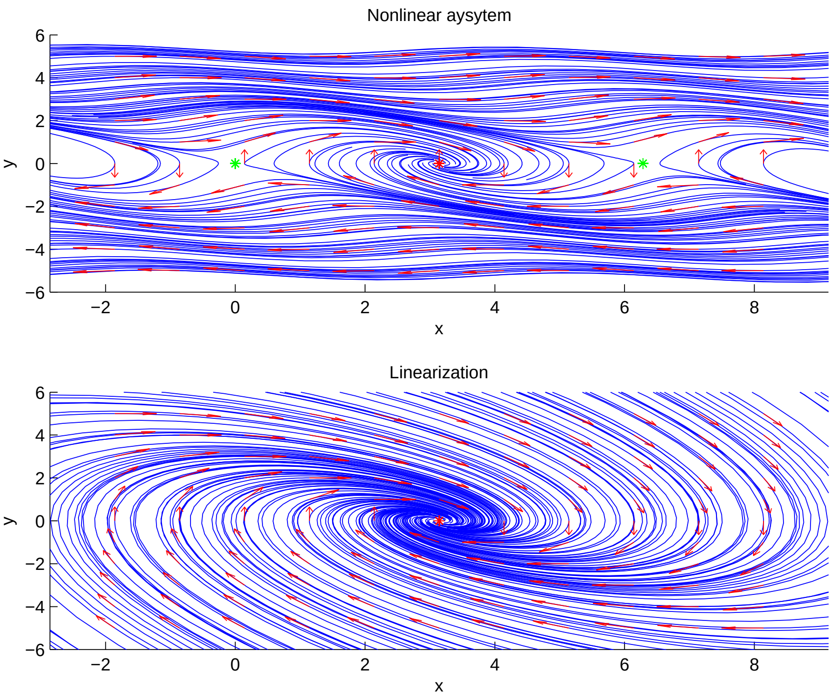
и има характеристичен политом

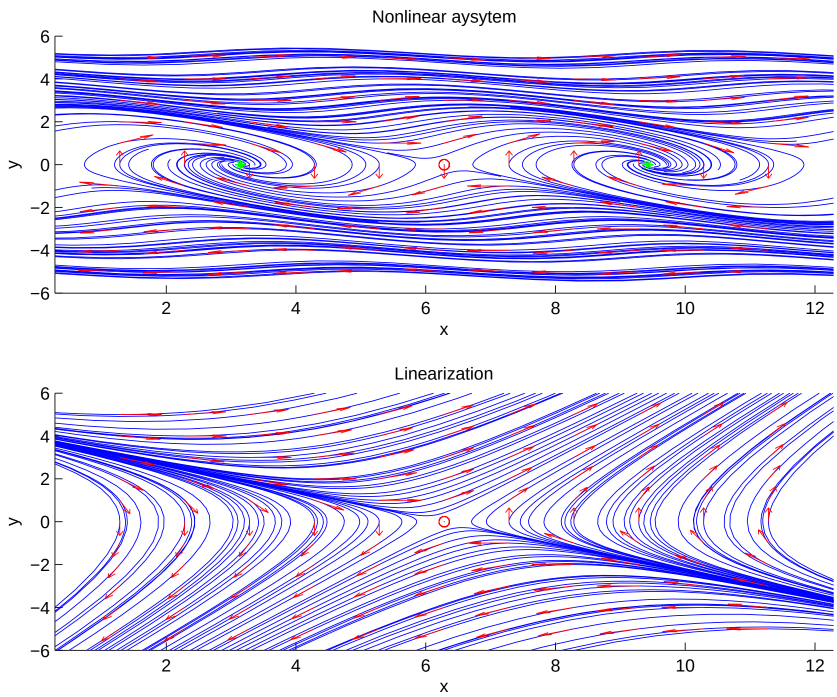
$$P_J = -\lambda(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1,$$

който има корени $\lambda_1 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ и $\lambda_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2 > 0$. $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ и следователно тези равновесни точки на дадената система са асимптотично устойчиви.

```
function nonlinearphaseportrait2020

clear;
clf;
tmax=5;

function z=ff(t,y)
   z=[y(2); sin(y(1)+y(2))];
   end

k=1;

A=[0,1;(-1)^k,(-1)^k]; ak=k*pi;bk=0;

function u=fl(t,y)
         u=A*(y-[ak;bk]);
   end

d=5;s=1;
x=ak-d:s:ak+d;
y=bk-d:s:bk+d;

% chertane na fazovia portret
[X,Y]=meshgrid(x,y);

for i=1:length(x)
      for j=1:length(y)
[T,Z]=ode45(@fl,[0,tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
[T1,Z1]=ode45(@fl,[0,-tmax],[X(i,j), Y(i,j)]);
 [T2,Z2]=ode45(@ff,[0,tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
[T3,Z3]=ode45(@ff,[0,-tmax],[X(i,j), Y(i,j)]);

 subplot(2,1,2)
 title('Linearization ')
hold on
plot(ak,bk,'r*')
axis([ak-d-1, ak+d+1,bk-d-1,bk+d+1]);
plot(Z(:,1),Z(:,2),Z1(:,1),Z1(:,2),'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

```
subplot(2,1,1)  title('Nonlinear aysytem')
hold on
plot(ak,bk,'r*',ak-pi,bk,'g*',ak+pi,bk,'g*')
plot(Z2(:,1),Z2(:,2),Z3(:,1),Z3(:,2),'b')
axis([ak-d-1,ak+d+1,bk-d-1,bk+d+1])
 xlabel('x')
ylabel('y')
     end
end
 % chertane na vektornite ploeta
DX=Y; DY=sin(X+Y);
d=sqrt(DX.^2+DY.^2);
subplot(2,1,1)
quiver(X,Y,DX./d,DY./d,0.5,'r')

DXL=A(1,1)*(X-ak)+ A(1,2)*(Y-bk);
DYL= A(2,1)*(X-ak)+ A(2,2)*(Y-bk);
dL=sqrt(DXL.^2+DYL.^2);
subplot(2,1,2)
quiver(X,Y,DXL./dL,DYL./dL,0.5,'r')

saveas(gcf,'fig1.png')
end
```





Задача 2. Разглеждаме системата на Лотка-Волтера

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{array} \right.$$

където a, b, c, d са положителни коснтанти.

Системата описва динамиката в популации от хищници и жертви, които съжителстват на определена територия. Предполага се, че хищниците се хранят само с индивиди от жертвите, а жертвите разполагат с неограничен хранителен ресурс. С $x(t) \geq 0$ и $y(t) \geq 0$ са означени съответно броя жертви и броя хищници в момента t.

1. Намерете равновесните точки на системата
2. При $a = 1$, $b = 0.3$, $c = 1$, $d = 0.2$ начертайте векторно поле на система в правоъгълник, който съдържа намерените равновесни точки. С негова помощ изследвайте равновесните точки за устойчивост.
3. Направете анимация на движението на точката $(x(t), y(t))$ от фазовата крива на системата, минаваща при $t = 0$ през точката (x_0, y_0),въведена с кликване с мишката или пък задайте конкретна точка.

Решение. Равновесните точки са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} ax - bxy = 0, \\ -cy + dxy = 0. \end{array} \right.$$

$x(a-by)=0$
$y(-c+dx)=0$

Следователно системата има две равновесни точки $(0,0)$ и $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

$J = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}$, $J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = a > 0$, $\lambda_2 = -c < 0$

неуст.

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + ac = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$$

Не можем да определим по първо приближение каква ще е точката за нелинейната система.

```
function  phasemovie
clear;
tmax=10;
a=1;b=0.3;c=1;d=0.2;
x=-1:0.5:c/d+15;
y=-1:0.5:a/b+10;

axis([-1,c/d+15,-1,a/b+10])
 hold  on
  plot(0,0,'m*',c/d,a/b,'m*')
[X,Y]=meshgrid(x,y);
 Dx=a*X-b*X.*Y;
 Dy= -c*Y+d*X.*Y;
D=sqrt(Dx.^2+Dy.^2);
quiver(X,Y,Dx./D,Dy./D,0.5,'k')

[x0,y0]=ginput(1);
plot(x0,y0,'go')  xlabel('x')  ylabel('y')

[T,Y]=ode45(@ff,[0,tmax],[x0;  y0]);
        for   k=1:length(T)
          plot(Y(1:k,1),Y(1:k,2),'r');

      M(k)=getframe;
 end

          function  z=ff(t,y)
                  z=[a*y(1)-b*y(1)*y(2);-c*y(2)+d*y(1)*y(2)]
          end

       end
```

От начертаното векторно полее се вижда, че равновесната точка $(0,0)$ е нуестойчива, а равновесната точка $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ е устойчива, но не е асимптотично устойчива.

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{N} I & -\frac{\beta}{N} S \\ \frac{\beta}{N} I & \frac{\beta}{N} S - \mu \end{pmatrix}$$

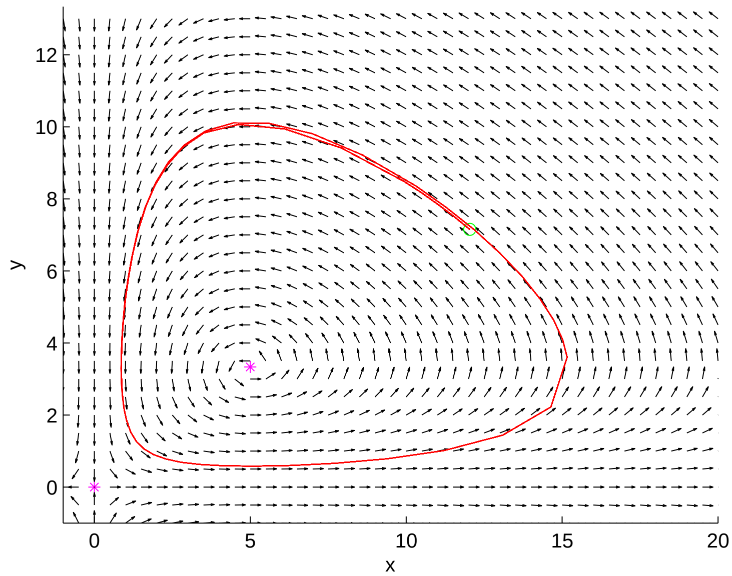
Нека $(S_0, 0)$ е р. т.

$$J(S_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta}{N} S_0 \\ 0 & \frac{\beta}{N} S_0 - \mu \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = \frac{\beta}{N} S_0 - \mu$

$\lambda_2 > 0$, ако $S_0 > \frac{\mu}{\beta} N = \frac{N}{R_0} = S_1 \Rightarrow$ неуст.



$N = \text{const.}$

$\boxed{S} \longrightarrow \boxed{I} \longrightarrow \boxed{R}$

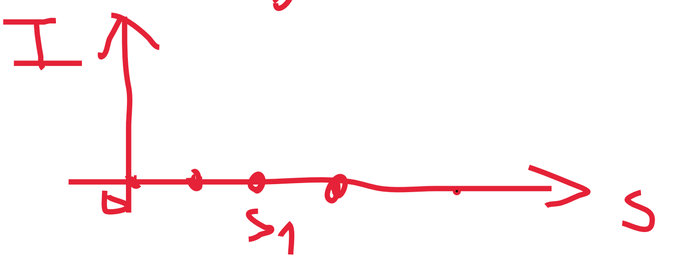
$\underline{R = N - S - I}$

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta}{N} S I \\ \dot{I} = \frac{\beta}{N} S I - \mu I \\ \dot{R} = \mu I \end{cases}$$

$$\begin{cases} S I = 0 \\ I\left(\frac{\beta}{N} S - \mu\right) = 0 \end{cases}$$

$(S = 0, I = 0)$

$I = 0$, $\underline{S}$ – произв.



$J = (-$