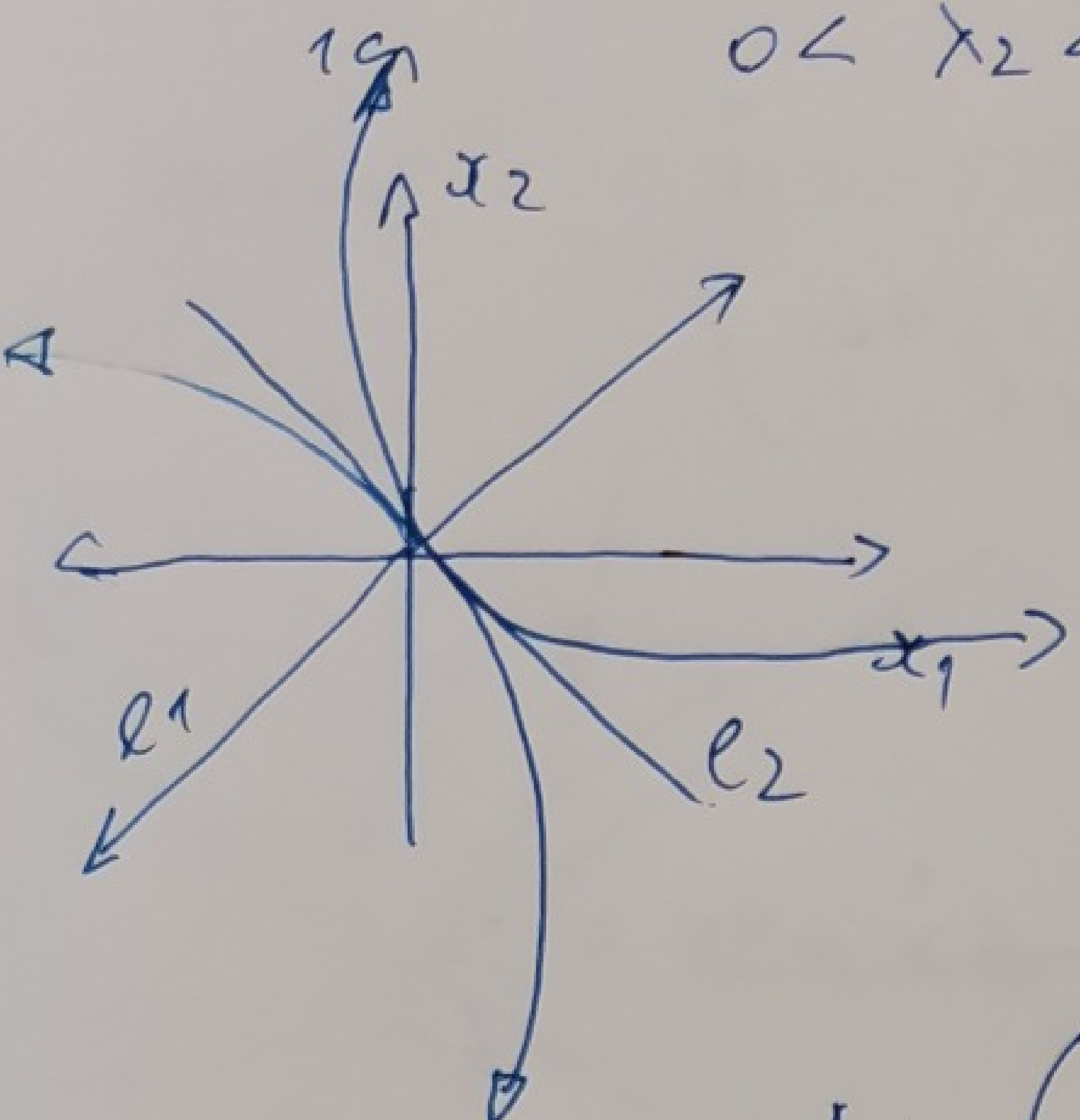
Фазови портрети на линейни хомогенни с-ми в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Основна информация за фазовият портрет дават собствените стойности на $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Възможни са следните типове фазови портрети



$0 < \lambda_2 < \lambda_1 \longrightarrow$ неустойчив възел

e_1 и e_2 - собствени прави

(прави през началото $\parallel$ собствен вектор h^i)

Пример $\dot{x}_1 = 5x_1 - 3x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow |A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

$$\lambda_1 = 7 \qquad \lambda_2 = 2$$

Нека $\lambda_1 = 7 \xrightarrow{\text{с.в}} h^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$:

$$(A - 7E)h^1 = \vec{0} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2\alpha_1 - 3\beta_1 = 0 \qquad \alpha_1 = -\frac{3}{2}\beta_1 \qquad \beta_1 = 2$$

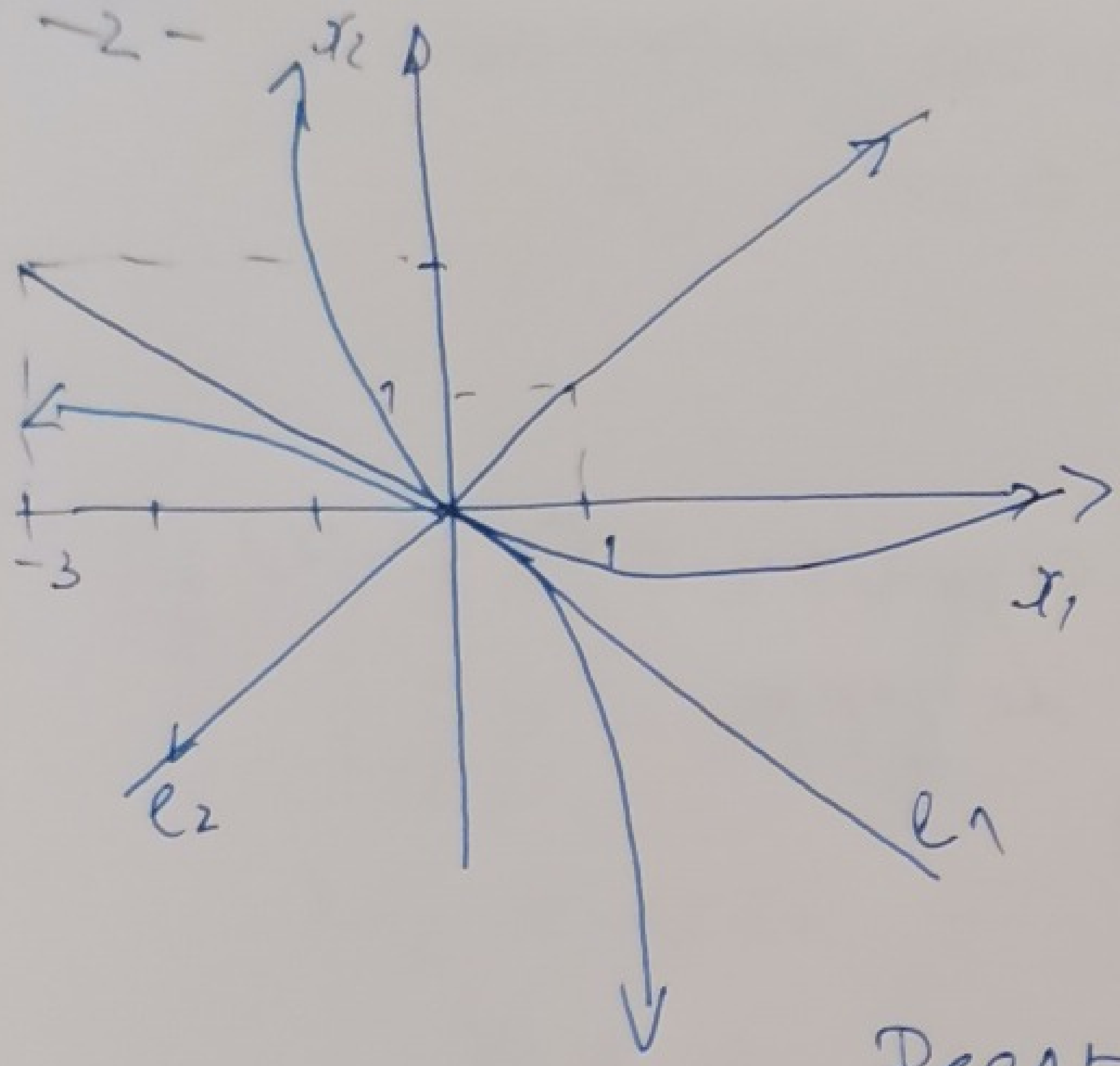
$$\alpha_1 = -3$$

$$h^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Аналогично $\lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{с.в}} h^2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$$(A - 2E)\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_2 = \beta_2 = 1$$

$$h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



неустойчив възел

Реални собствени стойности

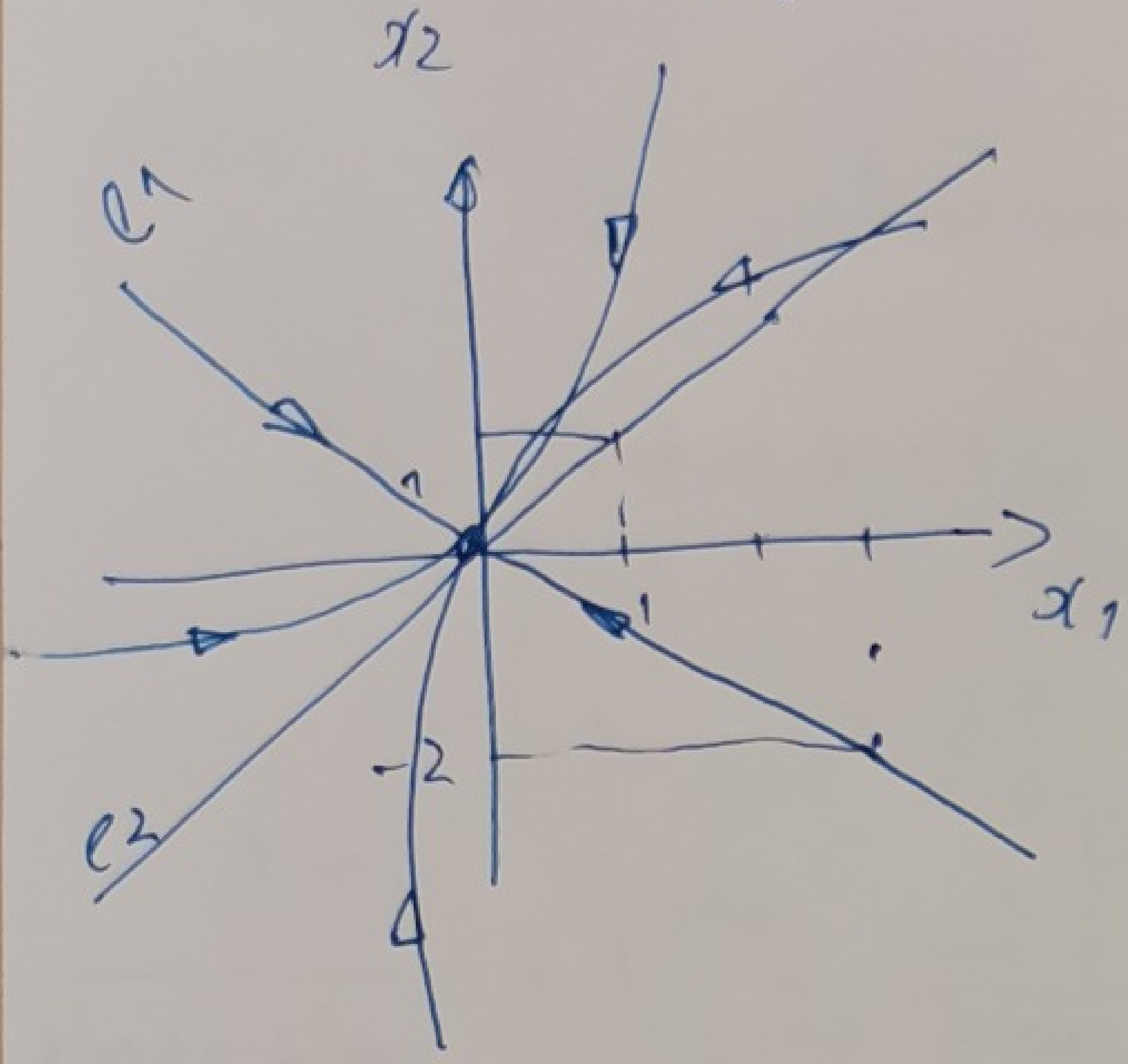
$0 > \lambda_2 > \lambda_1$ – устойчив възел

Пример $\quad \dot{x}_1 = -5x_1 + 3x_2$

$\dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2$

$\lambda_1 = -7, \; \lambda_2 = -2$

$h^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \; h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Реални собствени стойности

$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

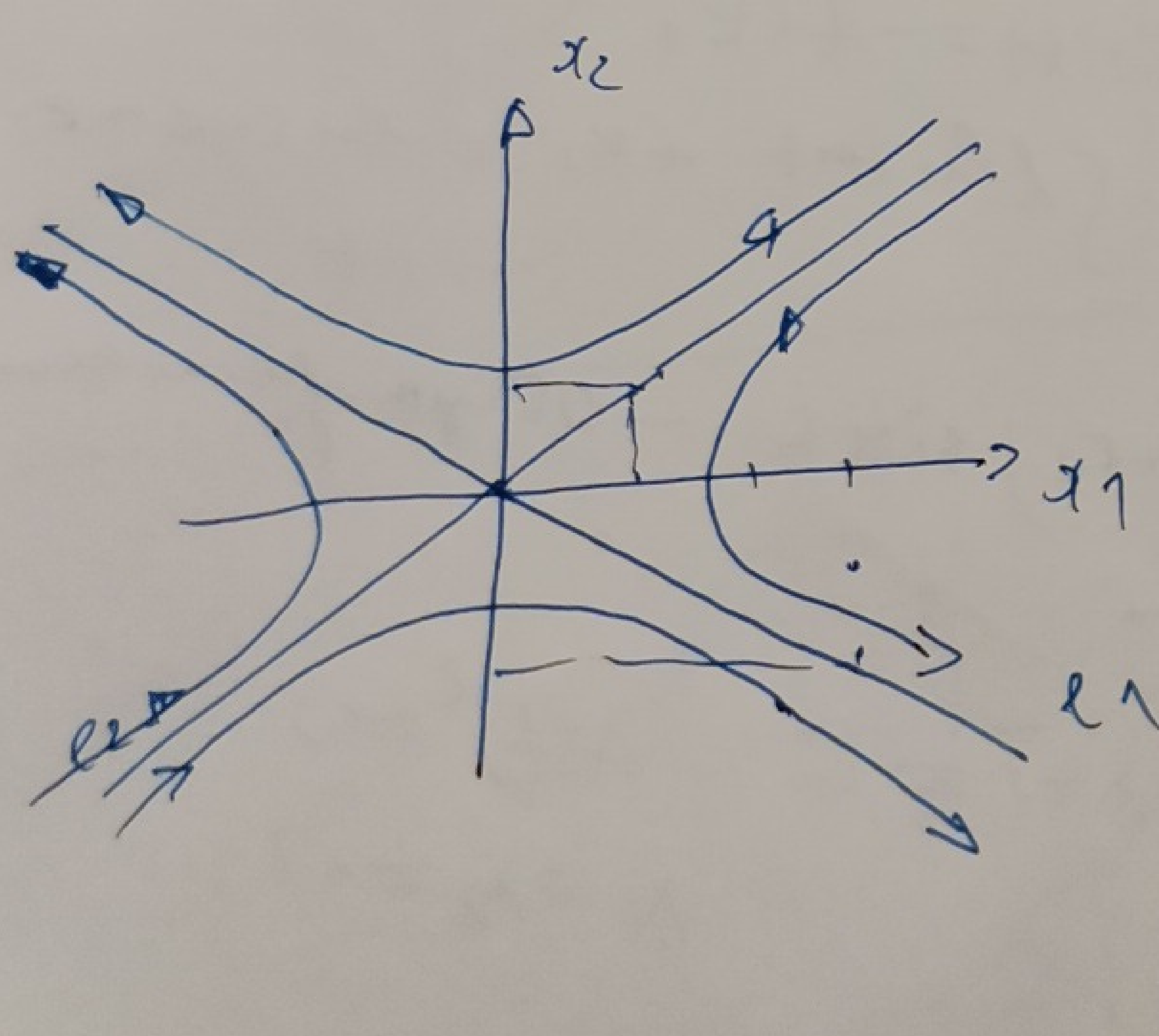
седло

Пр $\quad \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2$

$\lambda_1 = 4 \longrightarrow h^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \longrightarrow h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Комплексни собствени числа

А) $\lambda_{1,2} = a \pm i b$ $\quad a>0$ – неустойчив фокус

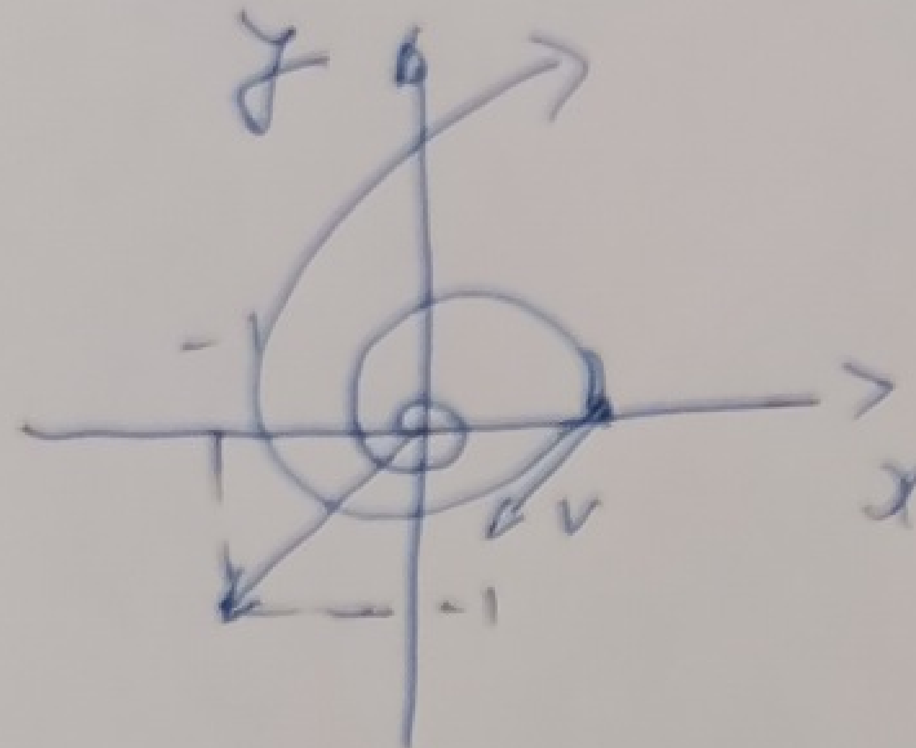
Пр: $\begin{cases} \dot{x} = -x+8y \\ \dot{y} = -x+3y \end{cases}$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

$x=1 \quad y=0$

$\dot{x} = -1$ $\quad \vec{v}$ – спрямо в $(1,0)$

$\dot{y} = -1$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$



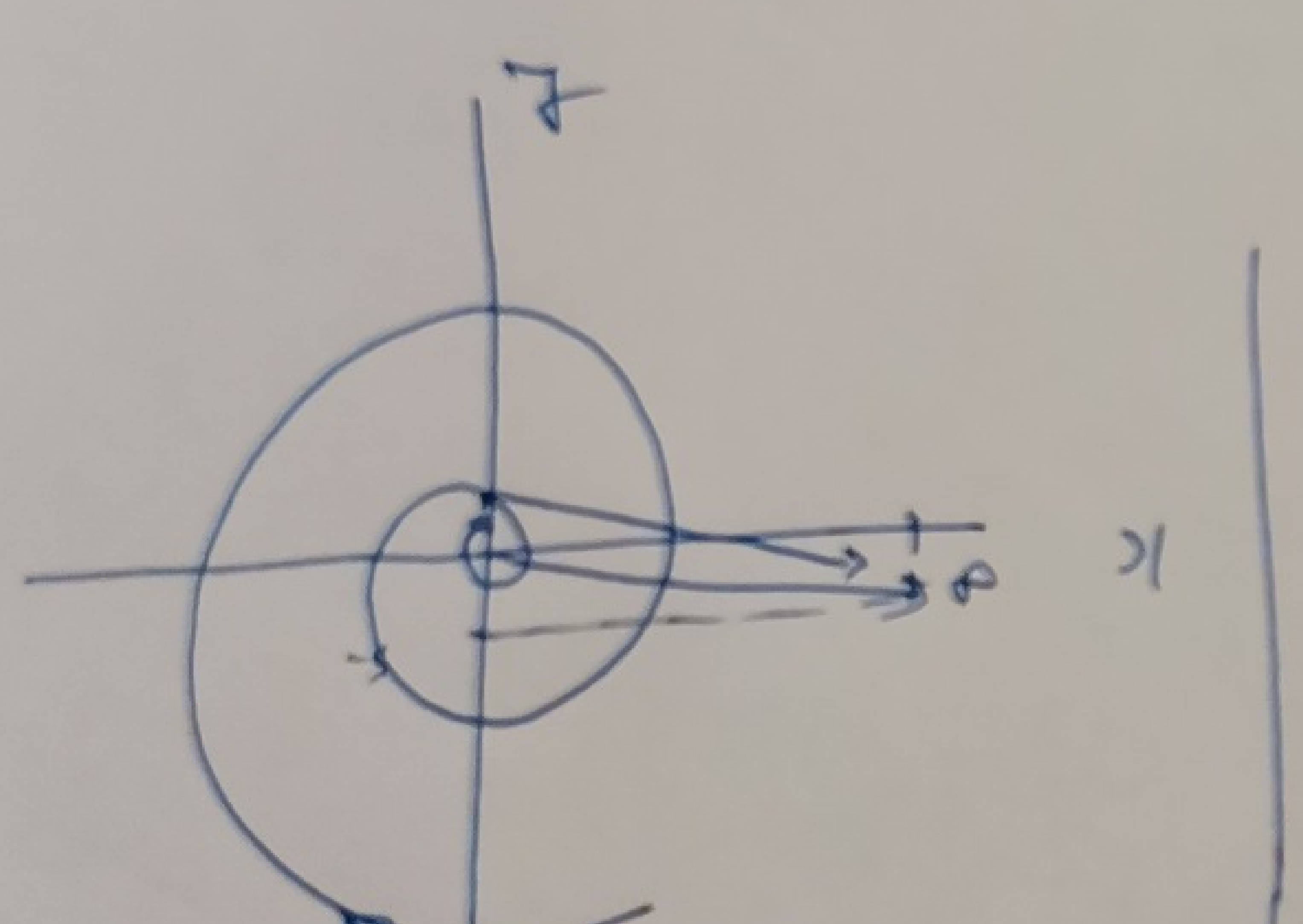
B) $a<0$ – устойчив фокус

Пр $\begin{cases} \dot{x} = x-8y \\ \dot{y} = x-3y \end{cases}$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$

$x=0$ $\quad \dot{x} = -8$

$y=1$ $\quad \dot{y} = -3$



$a=0$ – център

Пр. $\begin{cases} \dot{x} = -3x+5y \\ \dot{y} = -5x+3y \end{cases}$

$\lambda_{1,2} = \pm 4i$

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = -2 \end{cases}$