Метод на Фурие

1. Струна със закрепени краища

(*) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ $\quad 0 < x < l, \; t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ $\quad 0 \le x \le L$ – начални условия

$u(0,t) = u(l,t) = 0$

Тук $\varphi \in C^2([0,L])$ $\quad \psi \in C^1([0,L])$

и са изпълнени условия за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$

$\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$

Нека търсим решение от вида $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

Заместваме в уравнението (*) $\quad XT'' - a^2 X'' T = 0$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \lambda = const$$

(двете отношения $\frac{X''}{X}$ и $\frac{T''}{a^2T}$ са на две независими променливи x и t и могат да са
за $\forall x$ и t
равни единствено, ако са константи)

Получаваме $\quad X'' - \lambda X = 0$ и $T'' - a^2 \lambda T = 0$

Да разгледаме граничните условия $u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow X(0) = 0$

$u(l,t) = X(l)\,T(t) = 0$ за $\forall t \rightarrow X(l) = 0$

получихме задача $\left.\begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0, \; x \in [0,l] \\ X(0) = X(l) = 0 \end{array}\right\}$ Задача на Щурм-Лиувил.

$X'' - \lambda X = 0 \rightarrow$ ХП $\quad \alpha^2 - \lambda = 0$

Тя се решава така, корените на ХП

ще разгледаме няколко възможности за

$\lambda > 0$

1 сл. $\quad \alpha = \pm\sqrt{\lambda}$ $\quad e^{-\sqrt{\lambda}x}, \; e^{\sqrt{\lambda}x} \rightarrow X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$

ФСР

$X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0$

$X(\ell) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}\cdot\ell} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}\ell} = 0$

Получаваме система линейни уравнения за c_1 и c_2

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{-\sqrt{\lambda}\ell} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}\ell} = 0 \end{cases}$ - Детерминантата на тази система е

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda}\ell} & e^{\sqrt{\lambda}\ell} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell} \neq 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Това решение не ни удовлетворява, защото $X(x) \equiv 0$

$\Rightarrow u(x,t) \equiv 0$

$\underline{2\text{ сл}}$ $\lambda = 0$ $\qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \longrightarrow$ ФСР $\{1, x\}$

$X(x) = c_1 + c_2 x$

аналогично както в сл 1 $\qquad X(0) = 0 = c_1$

$X(\ell) = 0 = c_2 \cdot \ell \qquad (\ell \neq 0)$

$c_1 = c_2 = 0$ - пак получаваме нулево решение

$\underline{3\text{ сл}}$ $\lambda < 0 \rightarrow \alpha = \pm\sqrt{-\lambda}\, i$

ФСР $\{\cos(\sqrt{-\lambda}\, x), \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)\}$

$\Rightarrow X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x)$

$X(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 = c_1 \rightarrow c_1 = 0$

$X(\ell) = c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\cdot\ell = 0 \overset{c_2 \neq 0}{\Rightarrow} \sqrt{-\lambda}\,\ell = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$-\lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \Rightarrow \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \; k = 0, 1, 2 \ldots$

собствени стойности

решението е $X(x) = c_2 \sin\frac{k\pi}{\ell}x$ (c_2 - ще се определи по късно)

$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{\ell}x$, при така намерено λ_k можем да

определим решението (общото) на $T'' - a^2\lambda_k T = 0$

имаме $T_k(t) = A_k \sin\left(\frac{a k\pi}{\ell}\cdot t\right) + B_k \cos\left(a\frac{k\pi}{\ell}\cdot t\right)$

Решението на нашата първоначална задача има вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \sin\left(\frac{ak\pi}{l} \cdot t\right) + B_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l} t\right) \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

коефициентите A_k и B_k ще определим от началните условия

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

(от знанието за ортогонална тригонометрична система)

$$\Rightarrow B_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx$$

– коефициенти на Фурие

за A_k имаме:

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(A_k \frac{ak\pi}{l} \underbrace{\cos \frac{ak\pi}{l} \cdot 0}_{1} \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

$$A_k = \frac{1}{ak\pi} \int_{-l}^{l} \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

Тези коефициенти ни дават решение. За пълнота е нужно да се докаже равномерна сходимост на полученото решение в дадената област. Това се получава от вариантите на неравенството на Коши-Буняковски в този случай

$f, g \in L[a,b]$ $\qquad \int_a^b |f| \, dx < \infty$ и $\int_a^b |g| \, dx < \infty$

$\int_a^b f g \, dx = \langle f, g \rangle$ – скаларно произведение на две функции

$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ – норма (разстояние)

$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$ – Коши-Буняковски