1 Теорема за съществуване и единственост. Непродължими решения.

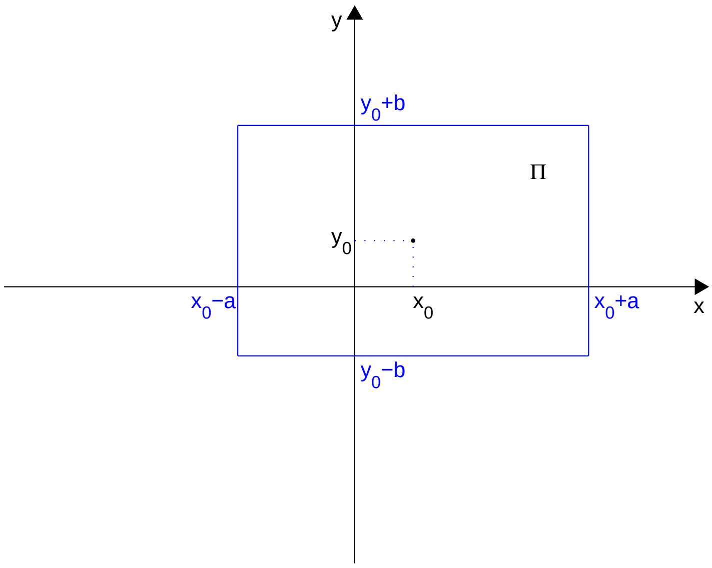
Ще разгледаме важния въпрос за съществуване и единственост на решение на задача на Коши за обикновено диференциално уравнение от първи ред, решено относно производната:

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

където $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ е произволна точка, а функцията f е дефинирана и непрекъсната в правоъгълника

$$\Pi := \{(x, y) :\ x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$$

с някакви константи $a > 0$ и $b > 0$.



Забележка 1.1 *Функцията f е неперкъсната в компакта Π. Следователно тя е ограничена в Π, т.е. съществува константа $M > 0$, такава че $|f(x, y)| \le M$ за всяко $(x, y) \in \Pi$.*

За нашите цели ще ни е необходимо функцията f да удовлетворява и така нареченото условие на Липщиц.

Дефиниция 1.2 *Казваме, че функцията $f(x, y)$ удовлетворява условието на Липшиц (или е липшицова) в правоъгълника Π, по променливата y (равномерно относно x), ако съществува константа $K > 0$, такава че за всеки две точки (x, y_1), $(x, y_2) \in \Pi$ е изпълнено*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2|. \tag{2}$$

Пример 1.3 *Функцията $f(x,y) = |y|$ е липшицова по y в Π, защото за всеки две точки (x,y_1), (x,y_2) от Π имаме*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \le |y_1 - y_2|.$$

Пример 1.4 *Проверете, че функцията $f(x,y) = y^{2/3}$ не е липшицова по y във всеки пръвоъгълник Π, който съдържа точката $(0,0)$.*

Лема 1.5 *Нека частната производна f_y на функцията f съществува и е непрекъсната в правоъгълника Π. Тогава функцията f е липшицова по y в Π.*

Доказателство. Щом като $f_y \in C(\Pi)$, то тя е ограничена в компакта Π, т.е. съществува константа $K > 0$, такава че $|f_y(x,y)| \le K$ за всяко $(x,y) \in \Pi$.

Нека (x,y_1) и (x,y_2) са две точки от Π и за определеност $y_1 < y_2$. Теоремата за крайните нараствания ни дава

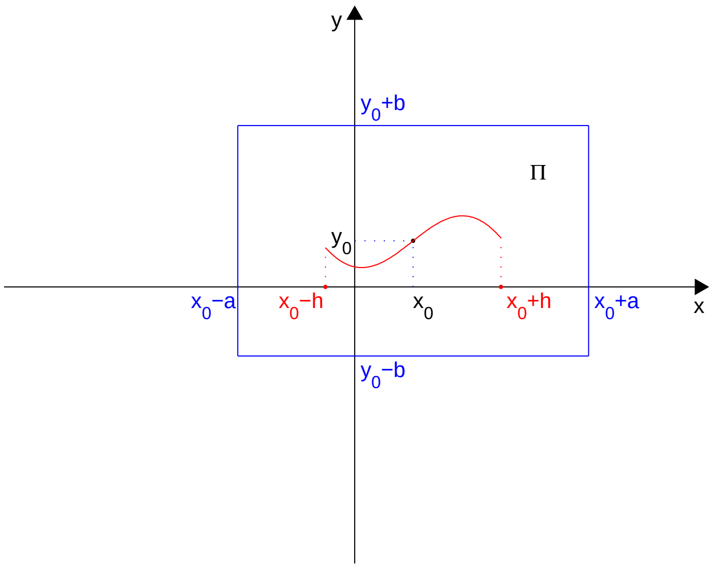
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |(y_1 - y_2) f_y(x,\xi)| = |y_1 - y_2||f_y(x,\xi)| \le K|y_1 - y_2|,$$

където $y_1 < \xi < y_2$.

Доказателството е завършено. $\square$

Теорема 1.6 *(Локална теорема за съществуване и единственост)*

Нека $f \in C(\Pi)$ и f е липшицова по y в Π. Тогава задачата на Коши (1) притежава единствено решение, дефинирано поне за $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, където $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{\Pi} |f(x,y)|$.



Ще скицираме доказателство на тази теорема. Най-напред да забележим, че задачата на Коши (1) е еквивалентна на интегралното уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{3}$$

Наистина, нека диференциеруемата функция $y(s)$ е решение на задачата на Коши (1). Следователно функцията $f(s, y(s))$ е непрекъсната и можем да интегрираме уравнението $y'(s) = f(s, y(s))$ от x_0 да x :

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Тъй като

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)\, ds = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$$

получаваме, че $y(x)$ е решение на интегралното уравнение (3).

Обратното, нека $y(x)$ е непрекъснато решение на интегралното уравнение (3). Тогава функцията $\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$ е диференцируема функция и следователно и лявата страна $y(x)$ на (3) е диференцируема функция. Следователно производната на функцията $y(x)$ съществува и

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Като заместим в уравнението (3) x с x_0 получаваме

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))\, ds = y_0.$$

Следователно $y(x)$ е решение на задачата на Коши (1).

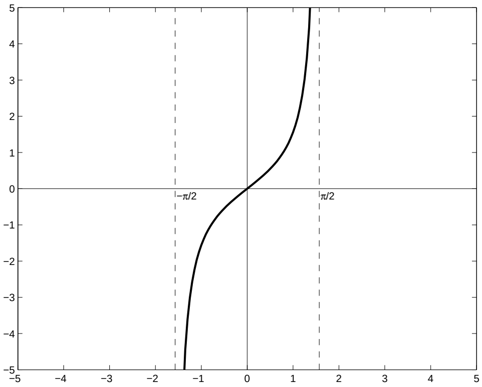
Можем да използваме метода на последователните приближения, който е предложен за пръв път от швейцарския математик Пикар. Построяваме следната редица $\{y_n(x)\}$ от приближения на решението:

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\, ds,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Може да се докаже, че редицата от функции $\{y_n(x)\}$ е равномерно сходяща в интервала $[x_0 - h, x_0 + h]$ и границата ѝ е решение на интегралното уравнение (3) и следователно е решение и на задачата на Коши (1).

Забележка 1.7 *Обърнете внимание, че теоремата гарантира съществуването на решение локално – само в малка околност на точката* x_0 *и не може да се очаква то да е дефинирано в целия интервал* $(x_0 - a, x_0 + a)$. *Това може да се илюстрира със следния пример:*



Пример 1.8 *Решението* $y(x) = tg(x)$ *на задчата на Коши*

$$\left|\begin{array}{l} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

е дефинирано само в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, *въпреки че дясната страна на уравнението* $f(x, y) = 1 + y^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Всъщност, достатъчно условие за съществуване на решение на задачата на Коши (1) е функцията $f(x, y)$ да е непрекъсната. Това е по-слабо от изискването за липшицовост, обаче не гарантира единственост на решението, както се вижда от следващия пример:

Пример 1.9 *От лекцията за уравнения с разделящи се променливи знаем, че задачата на Коши*

$$\left|\begin{array}{l} y' = 3y^{2/3}, \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

има повече от едно решение.

Задача 1.10 *Определете интервал, в който задачата на Коши*

$$\left|\begin{array}{l} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

има единствено решение.

Решение. Да разгледаме правоъгълника $\Pi = \{(x, y) : -2 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$ с център точката $(0, 0)$. Очевидно $f(x, y) = x^2 + y^2 \in C(\Pi)$. Освен това $f_y = 2y \in C(\Pi)$, и Лема 1.5 ни дава, че f е липшицова по y в Π. Сега локалната теорема за съществуване и единственост ни дава, че разглежданата задача на Коши има единствено решение, дефинирано поне в интервала $[-h, h]$, където $h = \min\{2, 1/M\}$, а $M = \max\limits_{\Pi} |x^2 + y^2| = 5$. Следователно разглежданата задача на Коши има единствено решение, дефинирано поне в интервала $[-1/5, 1/5]$. Може ли да получим по-голям интервал, ако изберем друг правоъгълник с център началото?

Задача 1.11 *Напишете интегрално уравнение, еквивалентно на задачата на Коши*

$$\left| \begin{array}{l} y' = 2x + 2y^2, \\ y(0) = 1. \end{array} \right.$$

Пресметнете последователните приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ *на решението ú, получени с метода на Пикар.*

Решение. Интегралното уравнение, еквивалентно на дадената задча на Коши е

$$y(x) = 1 + 2\int_0^x (s + y^2(s))\,ds.$$

Редицата от последователни приближения на решението е

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_n(x) = 1 + 2\int_0^x [s + y_{n-1}^2(s)]\,ds,\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Последователно пресмятаме

$$y_1(x) = 1 + 2\int_0^x [s + 1]\,ds = 1 + x^2 + 2x = (x+1)^2,$$

$$y_2(x) = 1 + 2\int_0^x [s + (s+1)^4]\,ds = \frac{3}{5} + x^2 + \frac{2}{5}(x+1)^5.$$

Може да се изведе и глобален вариант на теоремата за съществуване и единственост, но първо трябва да въведем някои понятия.

Нека G е област в равнината. Казваме, че G е област на единственост за уравнението $y' = f(x, y)$, ако за всяка точка $(x_0, y_0) \in G$ задачата на Коши има единствено решение.

Разбира се, G ще е област на единственост, ако около всяка точка от G може да се построи подходящ правоъгълник, в който да са изпълнени предположенията от локалната теорема за съществуване и единственост.

Функцията $f(x, y)$ ще наричаме *локално-липшицова* по y в G, ако за всяка точка от G съществува правоъгълник с център в нея, който се съдържа в G и в който функцията е липшицова по y.

Така G е област на единственост за уравнението $y' = f(x, y)$, ако например $f \in C(G)$ и е локално-липшицова по y в G.

Както и преди може да се види, че локалната липшицовост по y е по-слабо от изискването функцията да има непрекъсната частна производна спрямо y в областта.

Казваме, че решението $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал $\triangle_\varphi$ на уравнението $y' = f(x, y)$ е продължение на решението $\psi(x)$ с дефиниционен интервал $\triangle_\psi$ на същото уравнение, ако $\triangle_\psi \subset \triangle_\varphi$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ в $\triangle_\psi$.

Като "залепим" всевъзможните продължения на решението на задача на Коши, ще получим решение с максимален дефиниционен интервал, което наричаме непродължимо.

Едно решение на уравнението наричаме *непродължимо решение*, ако съвпада с всяко свое продължение.

Теорема 1.12 *(Глобална теорема за съществуване и единственост)*

Нека $f \in C(G)$ *и* f *е локално-липшицова по* y *в* G*. Тогава за всяка точка* $(x_0, y_0) \in G$ *задачата на Коши*

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

притежава единствено непродължимо решение.