ЛЕКЦИЯ № 1

Уравнения с разделени променливи, линейни, Бернулиеви и Рикатиеви уравнения

Обикновено диференциално уравнение от n-ти ред се нарича равенство от вида:

$$F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1}$$

където x е независима променлива, а $y(x)$ е търсена функция,притежаваща n непрекъснати производни.Тъждеството (1) е валидно в някакъв интервал Δ. Редът на уравнението се определя от реда на най-високата производна, която участва в уравнението.

F е дадена функция, дефинирана в някаква $n+2$ мерна област Γ.

Напомняме, че по дефиниция област е отворено и свързано множество, т.е. такова отворено множество Γ всяка двойка точки на което може да бъде съединена с ненапускаща Γ начупена линия. Начупената линия се състои от краен брой отсечки.

Ще казваме, че функцията $y = \varphi(x)$, дефинирана в интервала (a, b),

е решение на уравнението (1), ако тази функция го превръща в тъждество, т.е.

$$F(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

за всяко $x \in (a, b)$.

Разбира се, тази зависимост има смисъл само тогава, когато функцията $y = \varphi(x)$ е n пъти непрекъснато диференцируема и точката $(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ принадлежи на дефиниционната област Γ на функцията F.

В тази лекция ние ще разглеждаме обикновени диференциални уравнения от първи ред решени спрямо производната, т.е. зависимости от вида

$$y' = f(x, y(x)) \tag{2}$$

Решение на (2) се определя аналогично, както за уравнение от n-ти ред.

Ако $y = \varphi(x)$ е решение на (2) дефинирано в интервала (a, b), множеството от точки $(x, \varphi(x))$ за $x \in (a, b)$ се нарича интегрална крива на уравнението (2). Това е в същност графиката на функцията φ.

По аналогичен начин може да се даде и определение на интегрални криви на по-общото уравнение (1).

Задачата

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

се нарича начална задача или задача на Коши. С други думи търсим интегрална крива на уравнението (2), която да минава през точката (x_0, y_0).

Уравнения с разделящи се променливи

Диференциалното уравнение

$$y' = f(x)g(y), \tag{4}$$

където $f(x)$ и $g(y)$ са непрекъснати функции, се нарича диференциално уравнение с разделящи се променливи.

Това уравнение е най-простото от диференциалните уравнения, които се решават в квадратури.

За едно диференциално уравнение се казва, че е решимо в квадратури, ако решението му може да се изрази чрез елементарни функции или интеграли от тях.

В теорията на диференциалните уравнения важна роля играят теоремите за съществуване и единственост на решението на дадено диференциално уравнение. Ето защо ще докажем следната теорема:

Теорема 1. *Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала (a, b), а $g(y)$ е непрекъсната в интервала (c, d). Вземаме точката $x_0 \in (a, b)$ и точката $y_0 \in (c, d)$. Нека също така $g(y) \neq 0$, за всяко*

$y \in (c, d)$. *Тогава задачата на Коши*

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

има единствено решение.

Доказателство:

Единственост: Ще допуснем, че задачата (5) притежава поне едно решение $y = \varphi(x)$ в някаква околност на точката x_0, т.е.

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Първото от тези равенства разделяме с функцията $g(\varphi(x))$, която по условие винаги е различна от нула и получаваме $\dfrac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$. Тъй като са непрекъснати функции, то те са интегруеми. Интегрираме това равенство в граници от x_0 до x, като за интеграционна променлива вместо x вземаме t, и получаваме

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

В първия интеграл правим смяната $\lambda = \varphi(t)$. Тогава

$$\begin{aligned} & d\lambda = \varphi'(t)dt \\ & x_0 \to \lambda_0 = \varphi(x_0) = y_0 \\ & x \to \lambda = \varphi(x) \end{aligned}$$

От тук получаваме

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{6}$$

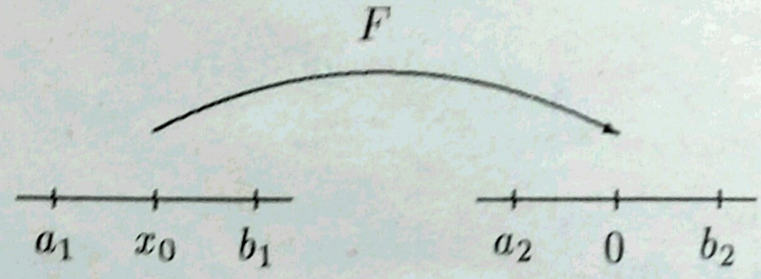
Въвеждаме функциите

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \text{ и } G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\lambda}{g(\lambda)}$$

$G(\varphi(x)) = F(x)$

$F'(x) = f(x), \quad G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$

F е непрекъснато диференцируема и $F(x_0) = 0$, (виж фиг.1).

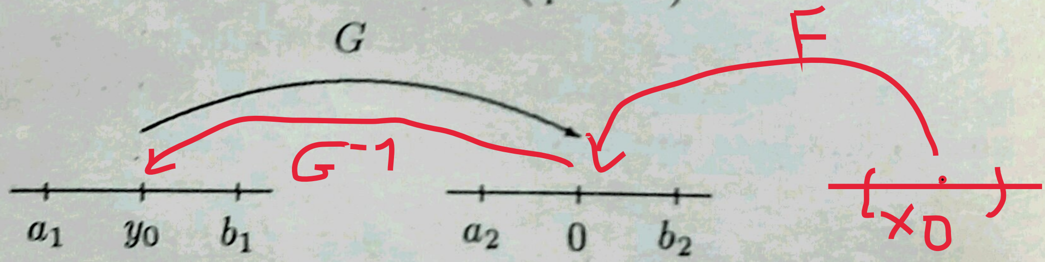


фиг. 1

F изобразява един интервал около точката x_0 в друг интервал около точката O, (виж фиг. 1).

G е дефинирана и непрекъснато диференцируема в интервала (c, d) и $G(y_0) = 0$.

Следователно G изобразява някаква околност на точката y_0 върху друга околност на точката O (фиг. 2).



фиг. 2

С помощта на функциите F и G, записваме равенството (6) във вида

$$G(\varphi(x)) = F(x) \tag{7}$$

Тъй като $G'(y) = \dfrac{1}{g(y)} \neq 0$, то G е строго монотонна. Строго монотонните непрекъснати функции са обратими. Следователно съществува функцията G^{-1}, която също е диференцируема. Тогава от (7) получаваме

$$\underline{\varphi(x) = G^{-1}(F(x))} \tag{8}$$

Това означава единственост на решението $y = \varphi(x)$, защото намерихме точна формула, с която го изразихме. Съставната функция $G^{-1}(F(x))$ съществува, защото ако x описва околност на точката x_0, то $F(x)$ описва околност на точката O, а функцията G^{-1} е дефинирана и диференцируема в околност на точката O. С това е доказана единствеността.

Съществуване: Ще покажем, че $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$ е решение на (5). Тъй като, функцията $\varphi(x)$ е диференцируема около x_0, като диференцираме равенството $G(\varphi(x)) = F(x)$, получаваме

$$G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x)$$

$$\frac{1}{g(\varphi(x))}\varphi'(x) = f(x),$$

откъдето получаваме

$$\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)),$$

т.е. уравнението е удовлетворено.

Сега ще покажем, че е изпълнено и началното условие. Като вземем предвид, че $F(x_0) = 0$, $G(y_0) = 0$, а $y_0 = G^{-1}(0)$ имаме

$$\varphi(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0,$$

т.е. $\varphi(x)$ изпълнява и началното условие.

С това показахме, че задачата на Коши (5) е удовлетворена.

Трябва изрично да отбележим, че построихме решение около точката x_0, а не в целия интервал (a, b) и всички разглеждания важат за някаква околност на точката x_0. Следващия пример добре илюстрира тази забележка.

Пример 1: Нека е дадена задачата

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{y'\,dt}{1+y^2} = \int_0^x 1\,dt$$

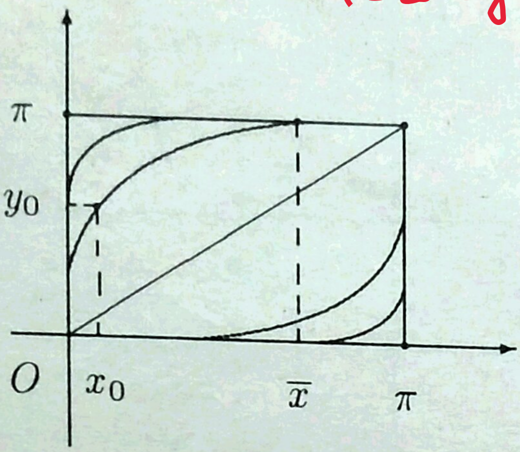
Макар, че функцията $1 + y^2$ е дефинирана за всички x и y, решението на тази задача $y = tg\ x$ е дефинирано само в интервала $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$t \to y(x)$

$$\int_0^{y(x)} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = x \qquad \operatorname{arctg} \lambda \Big|_0^{y(x)} = x$$

$$\operatorname{arctg} y(x) = x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \operatorname{tg} x$$



фиг. 3

Единствеността е нарушена в т. $x = \pi$, $y = \pi$, $x = y = 0$

Пример 3: Нека да решим уравнението $y' = y^{\frac{2}{3}}$, с начално условие $y(x_0) = 0$.

Разделяме променливите, след което интегрираме и получаваме:

$y(x) \equiv 0$ е реш. на ЗК

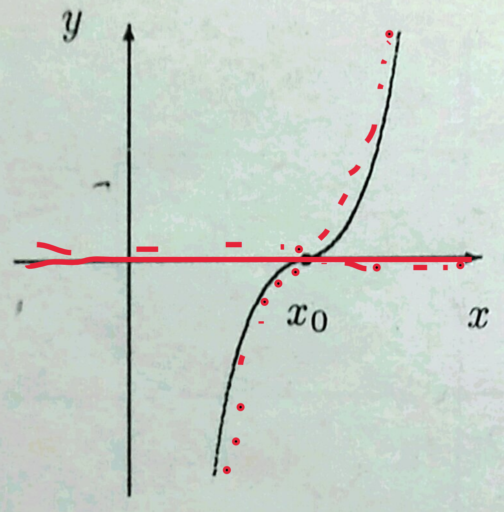
$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}, \qquad \int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int dx + C$$

$$y^{\frac{1}{3}} = \frac{x+C}{3}, \qquad y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3.$$

Това е общото решение. От началното условие получаваме

$$0 = y(x_0) = \left(\frac{x_0 + C}{3}\right)^3 \Rightarrow x_0 = -C,\ C = -x_0$$

Решението на задачата е $y = \frac{(x-x_0)^3}{27}$. Това е кубична парабола изобразена на фиг.4.



фиг. 4

Освен намереното решение, функцията $y = 0$ също е решение на поставената задача, което не се получава от общото при определена стойност на константата C. Това показва, че метода на разделяне на променливите не винаги ни дава всички решения. През точката x_0 минават две решения $y = \dfrac{(x - x_0)^3}{27}$ и $y = 0$, т.е. нарушена е единствеността. Това е така, защото не е изпълнено изискването на теоремата за съществуване и единственост $g(0) \neq 0$, тъй като $g(y) = y^{\frac{2}{3}}$ и $g(0) = 0$.

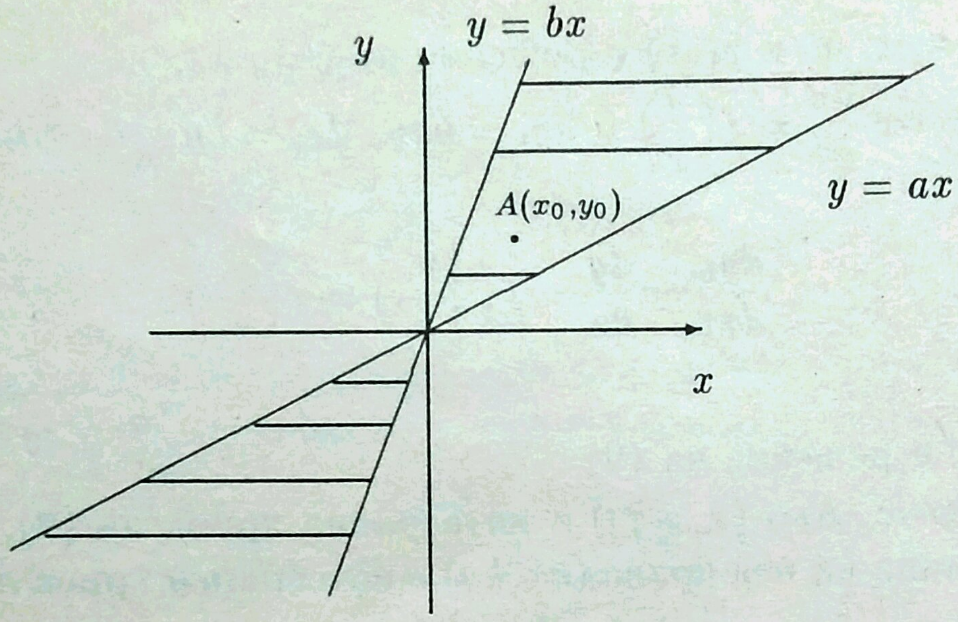
Хомогенни уравнения от 1 ред

Хомогенни диференциални уравнения се наричат уравнения от вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9}$$

$M(t\,x) = t^k M(x)$ $\quad$ $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ (9a)

Ако $f(z)$ е дефинирана и непрекъсната при $a < z < b$, то и функцията $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ще бъде дефинирана и непрекъсната при $a < \dfrac{y}{x} < b, \quad x \neq 0$.



фиг.5

Хомогенното уравнение (9), снабдено с началното условие $y(x_0) = y_0$, лесно може да се сведе към уравнение с разделящи се променливи с помощта на полагането $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Тогава имаме $y(x) = xz \Rightarrow y' = xz' + z$.

Заместваме в (9) и получаваме $z' = \dfrac{f(z) - z}{x}$ и $z(x_0) = \dfrac{y(x_0)}{x_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$.

$$\begin{cases} z' = \dfrac{1}{x}(f(z) - z) \\ z(x_0) = \dfrac{y_0}{x_0} \end{cases}$$

Това е уравнение с разделящи се променливи. След като разделим променливите и интегрираме получаваме: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{f(z) - z}{x}$. Нека $f(z) - z \neq 0$ за всяко z. Тогава $\displaystyle\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C = \ln|x| + \ln C$. Следователно решението е:
$\displaystyle \ln C|x| = \int \frac{dz}{f(z) - z}$.

Нека $x_1 = kx$, $y_1 = ky(x)$, $k > 0$, $k = const$ и нека $y(x)$ е решение на (9).

Ще покажем, че и $y_1(x)$ е решение на (9).
Наистина от $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ и $dy_1 = kdy,\ dx_1 = kdx$, получаваме

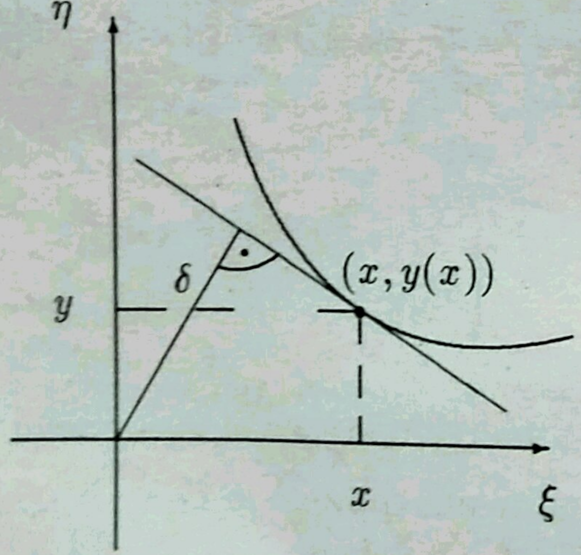
$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\frac{1}{k}y_1}{\frac{1}{k}x_1}\right) = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

т.е. $y_1(x)$ е решение на (9).

Извод: Ако $(x, y(x))$ е интегрална крива на (9), то всяка хомотетична на нея крива (kx, ky) е интегрална крива на (9) при $k > 0$.

Сега ще разгледаме една задача от геометрията, която води до решаване на хомогенно уравнение.

Пример 4: Намерете гладка крива в първи квадрант, която притежава следното геометрично свойство: Разстоянието от началото на координатната система до тангентата във всяка точка на кривата да съвпада с абсцисата на тази точка.



фиг.6

Уравнението на допирателната в точка $(x, y(x))$ е $\eta - y(x) = y'(x)(\xi - x)$.
За да намерим растоянието от точка до права, трябва да напишем нормалното уравнение на правата.

Нормално уравнение на допирателната е

$$\frac{\eta - y(x) - y'(\xi - x)}{\sqrt{1 + y'^2}} = l(\xi, \eta) = 0.$$

За да намерим разстоянието от началото на координатната система до допирателната, заместваме ξ и η с нула и получаваме

$$d = |l(0,0)| = \frac{|-y(x) + xy'(x)|}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}.$$

Това разстояние трябва да е равно на абсцисата, т.е.
$\dfrac{|-y(x) + xy'(x)|}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = x.$

Така ние получихме уравнението $|xy' - y| = x\sqrt{1 + y'^2}$, което удовлетворява условието на задачата.
Сега нека да решим това уравнение:

$$(xy' - y)^2 = x^2(1 + y'^2) \quad \Rightarrow \quad x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 = x^2 + x^2y'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2xyy' = y^2 - x^2$$

От тук получаваме $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\right)$.

Това е хомогенно уравнение.

Полагаме $z = \dfrac{y}{x}$ или $y = xz$, $y' = z + xz'$.

Заместваме в уравнението и получаваме

$$z + xz' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad xz' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2z} - z = -\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right).$$

Разделяме променливите и интегрираме

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{x}\right) \qquad\qquad \frac{dz}{z+\frac{1}{z}} = -\frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{zdz}{z^2+1} = -\int \frac{dx}{2x} + \frac{\ln C}{2}$$

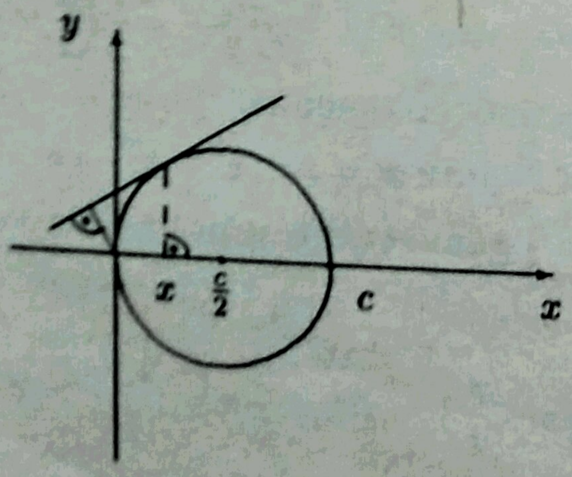
$$\frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{\ln C}{2}$$

$$\ln(1+z^2)x = \ln C \Longrightarrow x(1+z^2) = C > 0,$$

защото сме в първи квадрант.
Връщаме се към първоначалната променлива y и намираме
$x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = C \Rightarrow x + \frac{y^2}{x} = C$, оттук имаме $x^2+y^2 = Cx$.
На това уравнение можем да му дадем следния вид

$$\left(x-\frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}.$$

Това е уравнение на семейство от окръжностти с център $\left(\frac{C}{2},\ 0\right)$ и радиус $\frac{C}{2}$ (фиг.7).



фиг.7