Учебни приложения за движение на струна.

Нека оста Ox е разположена по дължината на хомогенна струна, която се движи във вертикална равнина. Да означим с $u(x,t)$ вертикалното отместване на точката x от струната в момента t. Движението на точките от тази струна се описва с уравнението на струната

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{1}$$

Тук a е положителна константа, която може да интерпретираме като скоростта, с която малки смущения (вълни) се придвижват по струната. Уравнението на струната описва движението на точки, които са много отдалечени от двата краища на струната (модел - неограничена струна) или са достатъчно отдалечение от единя край на струната (модел - полуограничена струна), или са върху цялата струна (модел - ограничена струна). Математическите модели на тези три случая води до разглеждания на различни задачи за уравнението на струната, произтичащи от физическата същност на явлението.

1 Учебно приложение "Движение на неограничена струна".

В това учебно приложение ще визуализираме движението на неограничена струна. Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$, чрез придърпване до положение $\varphi(x)$, с начална скорост $\psi(x)$ и след това е оставена без външно въздействие. Така получаваме следната задача на Коши

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2}$$

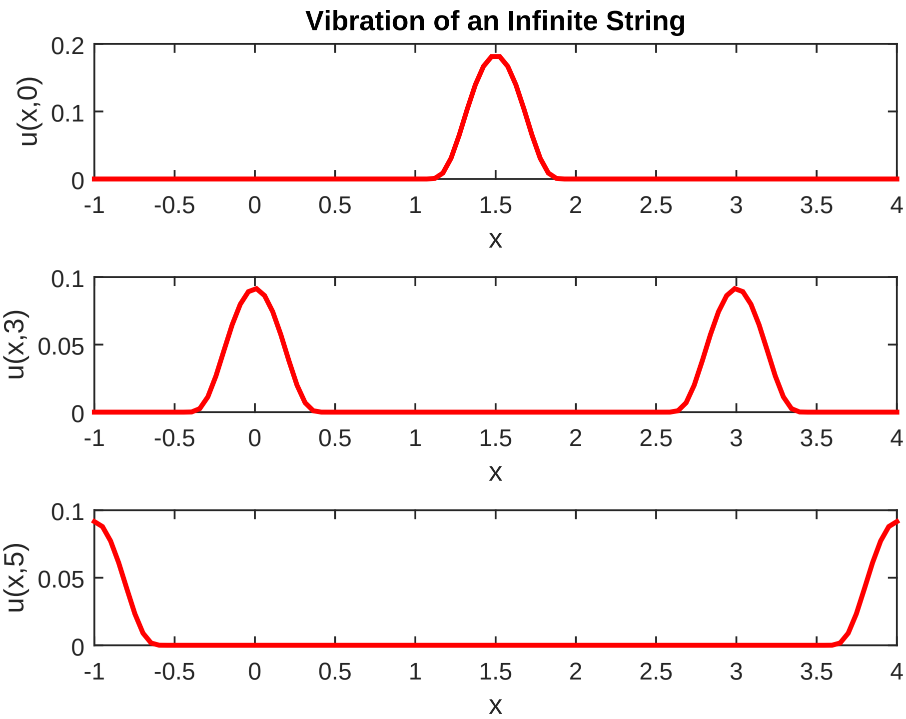
където $a = const. > 0$, а $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$ са произволни функции. При направените предположения задачата на Коши (2) има единствено решение $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds. \tag{3}$$

Във файла **infstring.m** е направена анимация на движението на частта $C := \{-1 \leq x \leq 4\}$ от неограничена струна за време $t \in [0,6]$ при $a = 1/2$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1,2], \end{cases} \tag{4}$$

и $\psi(x) \equiv 0$ и са начертани положенията на тази част от струната в моментите $t = 0$, $t = 3$, $t = 5$.



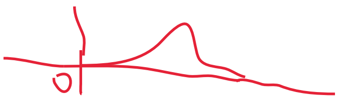
Чрез редактиране на кодът в **infstring.m** лесно може да се анимира движението на тази или друга част от струната при други начлани условия и други стойности на параметъра a.

2 Учебни приложения за движение на полуограничена струна. Метод на отраженията.

Това приложение визуализира трептенето на полуограничена струна със закрепен или свободен ляв край (изследването на струна със закрепен или свободен десен край е аналогично). Без ограничение на общността можем да приемем, че левият край на струната е в точката с абсциса $x = 0$. Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$, чрез придърпване до положение $\varphi(x)$, с начална скорост $\psi(x)$ и след това е оставена без външно въздействие.

2.1 Учебно приложение "Движение на полуограничена струна със закрепен ляв край".

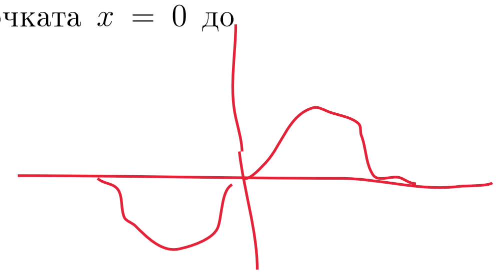
Движението на струната се моделира със следната смесена задача:



$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ x > 0,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \geq 0, \\ \\ u|_{x=0} = 0,\ t \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0,\infty)$, $\psi(x) \in C^1[0,\infty)$ и разбира се са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$.

Ще продължим функциите φ и ψ нечетно през точката $x = 0$ до функции



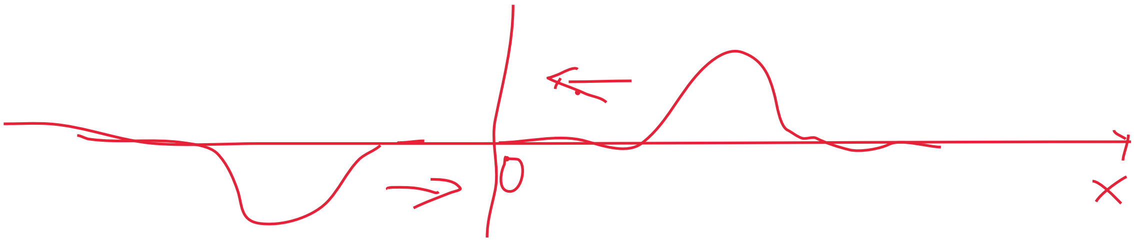
$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

За получените функции имаме $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbf{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbf{R})$.

Нека $\tilde{u}(x,t)$ е решението на задачата на Коши за неограничена струна

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x),\ u_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x),\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{6}$$



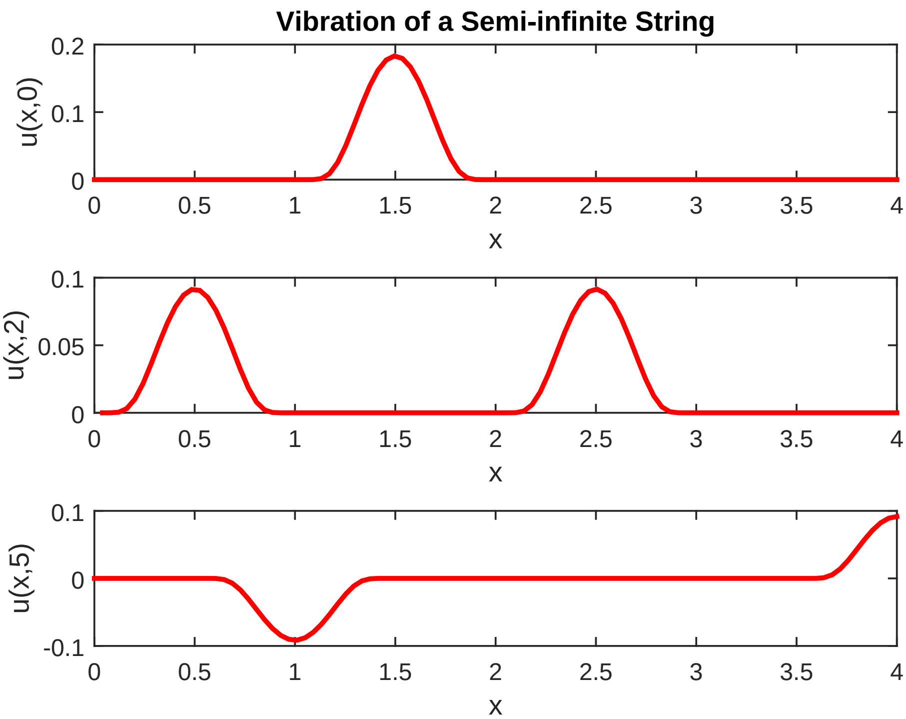
което се изписва с формулата на Даламбер. Тогава $\tilde{u}(0,t) = 0$ за $t \geq 0$ и рестрикцията $u(x,t)$ на функцията $\tilde{u}(x,t)$ в $\{x \geq 0,\ t \geq 0\}$ е решение на изходната смесена задача (5).

Ще направим анимация на движението на частта $C := \{0 \leq x \leq 4\}$ от полуограничена струна със закрепен ляв край за време $t \in [0,6]$ при $a = 1/2$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1,2], \end{cases} \tag{7}$$

и $\psi(x) \equiv 0$.

Анимация на движението на избраната част от струната и статични графики на нейното положение в три фиксирани момента са направени във файла **SemiInfStringFixed.m**. Чрез редактиране на кодът в



SemiInfStringFixed.m лесно може да се анимира движението на частта C или друга част от струната при други начлани условия и други стойности на параметъра a.

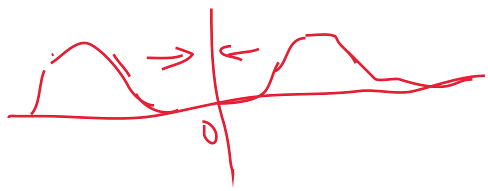
2.2 Учебно приложение "Движение на полуограничена струна със свободен ляв край".

Разглеждаме третпенето на полуограничена струна със свободен ляв край:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ x > 0,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \geq 0, \\ \\ u_x|_{x=0} = 0,\ t \geq 0, \end{cases} \tag{8}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0,\infty)$, $\psi(x) \in C^1[0,\infty)$ и разбира се са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$.

Сега ще направим четни продължения на началните данни през точката $x = 0$ до функции



$$\hat{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

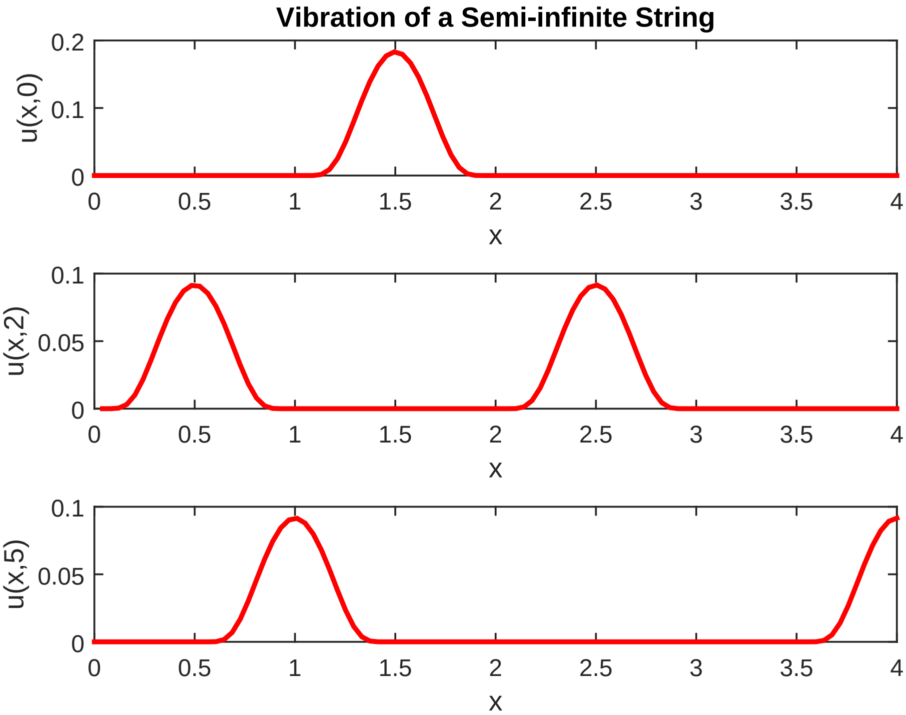
Решаваме задачата на Коши за неограничена струна с тези начални данни. Рестрикцията на намереното решение върху $\{x \geq 0,\ t \geq 0\}$ е решение на изходната смесена задача

Ще направим анимация на движението на частта $C := \{0 \leq x \leq 4\}$ от полуограничена струна със свободен ляв край за време $t \in [0,6]$ при $a = 1/2$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1,2], \end{cases} \tag{9}$$

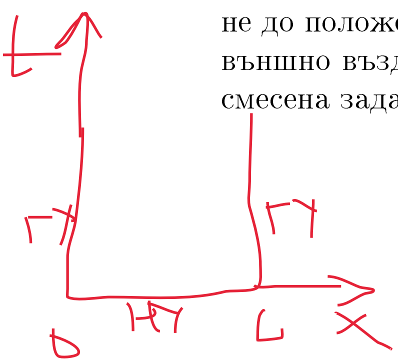
и $\psi(x) \equiv 0$.

Анимация на движението на избраната част от струната и статични графики на нейното положение в три фиксирани момента са направени във файла **SemiInfStringFree.m**. Чрез редактиране на кодът в него лесно може да се анимира движението на избраната или друга част от струната при други начлани условия и други стойности на скоростта a.



3 Учебно приложение "Движение на ограничена стрна с фиксирани краища"

Разглеждаме движението на ограничена струна със дължина L. Без ограничение на общността можем да приемем, че левият край на струната е в точката с абсциса $x = 0$, а десният в точката с абсциса $x = L$. Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$, чрез придърпване до положение $\varphi(x)$, с начална скорост $\psi(x)$ и след това е оставена без външно въздействие. Трептенето на струната се моделира със следната смесена задача

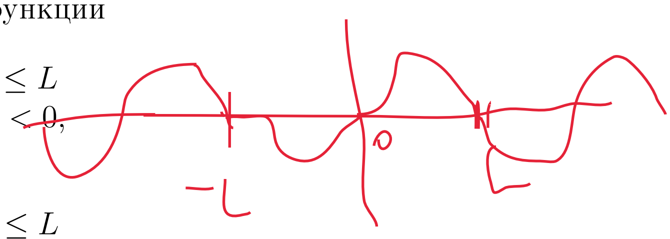


$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le L, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=L} = 0,\ t \ge 0, \end{cases} \tag{10}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$.

Един възможен начин за решение на задачата е следният: продължаваме нечетно φ и ψ в интервала $[-L, 0]$ до функции

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & 0 \le x \le L \\ -\varphi(-x), & -L \le x < 0, \end{cases}$$



$$\tilde{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x), & 0 \le x \le L \\ -\psi(-x), & -L \le x < 0, \end{cases}$$

След това продължаваме функциите $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ периодично с период $2L$ върху цялата реална права до функции

$$\hat{\varphi}(x) := \begin{cases} \tilde{\varphi}(x), & -L \le x \le L \\ \hat{\varphi}(x-2L), & x > L, \\ \hat{\varphi}(x+2L), & x < -L, \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(x) := \begin{cases} \tilde{\psi}(x), & -L \le x \le L \\ \hat{\psi}(x-2L), & x > L, \\ \hat{\psi}(x+2L), & x < -L. \end{cases}$$

Получените функции са съответно от класовете $\hat{\varphi} \in C^2(\mathbf{R})$ и $\hat{\psi} \in C^1(\mathbf{R})$! За задачата на Коши с начални данни получените функции можем да приложим формулата на Даламбер. Рестрикцията при $0 \le x \le L$, $t \ge 0$ на полученото решение на задачата на Коши е решение на изходната смесена задача.

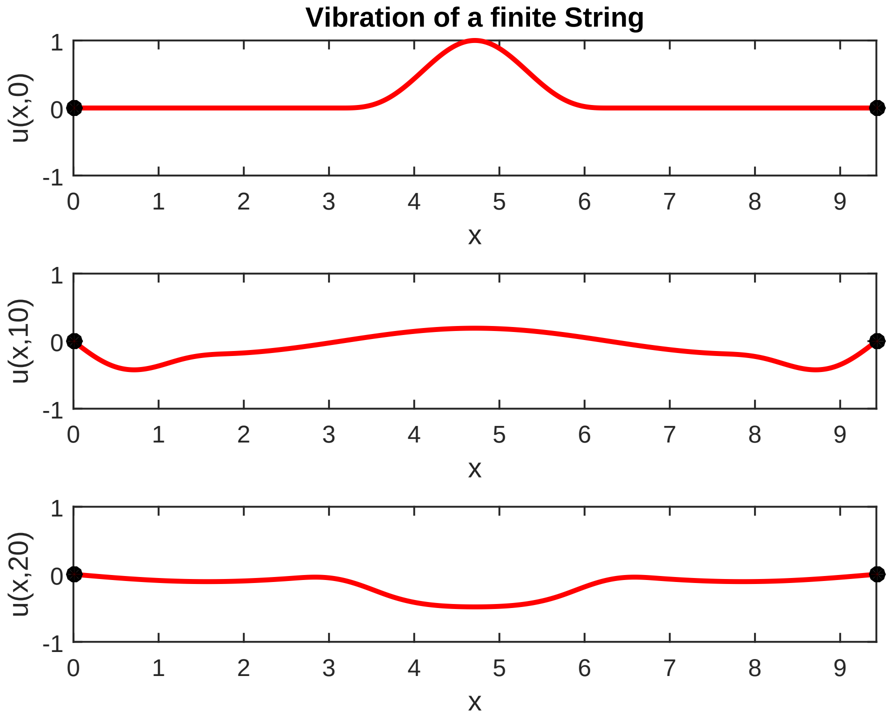
Ще визуализиранeто трептенето на струната за време $t \in [0, 50]$ при $L = 3\pi$, $a = \pi$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} -\sin^3 x, & \pi \le x \le 2\pi, \\ 0, & x \in [0,\pi) \cup (2\pi, 3\pi]. \end{cases} \tag{11}$$

и $\psi(x) := \sin(x)/10$.

Анимация на движението на струната в избрания времеви интервал и графики на нейното положение в три фиксирани момента са направени в Матлаб файла **fixedstringprod.m**. Чрез редактиране на кодът в този файл лесно може да се анимира движението на струната при други начлани условия и други стойности на параметъра a.

Аналогично се процедира, когато искаме да моделираме трептенето на ограничена струна със свободни краища. Тогава продължаваме началните данни четно в интервала $[-L, 0]$ и получаваме функции дефинирани



в $[-L, L]$, които след това продължаваме $2L-$ периодично върху цялата релана права. След това решаваме с формулата на Даламбер задачата на Коши за неограничена струна с продължените начални данни. Рестрикцията на намереното решение върху $\{0 \leq x \leq L,\, t \geq 0\}$ е решение на изходната смесена задача

Упражнения

1.1.1. Разгледайте задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi^2} u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ u|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

С помощта на формулата на Даламбер направете анимация на движението на частта от струната $x \in [-10, 10]$ за $t \in [0, 6]$.

1.1.2. Разгледайте задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ u|_{t=0} = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = \cos \frac{3\pi x}{2}, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

С помощта на формулата на Даламбер направете анимация на движението на частта от струната $x \in [0, 1]$ за $t \in [0, 5]$.

1.1.3. Разгледайте задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{2} u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

където

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^3(x - \frac{3\pi}{2}), & x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}], \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} -\sin^3(x - \frac{\pi}{2}), & x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}], \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]. \end{cases}$$

С помощта на формулата на Даламбер направете анимация на движението на частта от струната $x \in [-5, 12]$ за $t \in [0, 8]$.

2.2.3 Задача на Коши за нехомогенното уравнение на струната. Метод на Дюамел.

В този параграф ще изследваме задачата на Коши за нехомогенното уравнение на струната :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2.2.18}$$