Васил Христов, № 62431, група 2, СИ

Контролна работа №2.

Вариант 2К

1з. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2y^2 \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$

а) Намерете равновесните точки на с-мата

б) Напишете линейно приближение на с-мата в околност на ненулевата равновесна точка. Определете типа на тази равновесна точка за написаната линейна с-ма

а) $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = 2x - y + 2y^2 \\ \dot{y} = x - y \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} f(x,y) = 2x - y + 2y^2 \\ g(x,y) = x - y \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - y + 2y^2 = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2y - y + 2y^2 = 0 \\ x = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2y^2 + y = 0 \\ x = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y(2y+1) = 0 \\ x = y \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} y_1 = 0, \ 2y_2 + 1 = 0 \\ x_1 = 0, \ x_2 = y_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y_1 = 0, \ y_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 0, \ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

$(x_1, y_1) = (0, 0), \ (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f_x'(x,y) = 2 \qquad f_y'(x,y) = 4y - 1$

$g_x'(x,y) = 1 \qquad g_y'(x,y) = -1$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4y - 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

(*) $A(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A - \lambda . E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ $\quad P(\lambda) = (2-\lambda)(-1-\lambda)+1$

$P(\lambda) = -2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 + 1$

$\boxed{P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1}$

$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

(**) $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A - \lambda . E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ $\quad P(\lambda) = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 3$

$P(\lambda) = -2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 + 3$

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$

$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

За (*) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$
равновесната точка е седло и е неустойчива

За (**) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и равновесната точка е неустойчива (неустойчив фокус).

№5. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 3,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{3} + \sin(\pi x), & 0 \le x \le 3, \\ u(0,t) = 0,\ u(3,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$

$u_t = u_{xx} \Rightarrow a^2 = 1$

$L = 3,$

$u(x,0) = \varphi(x)$

$\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{3} + \sin(\pi x)$

$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0.$

$\varphi(0) = \varphi(3) = 0$

$u(x,t) = X(x)\,T(t).$

$X T' = a^2 X'' T$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L,$

$X(0) = 0, \quad X(3) = 0.$

$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{L}x, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

За $T(t)$ получаваме уравнение от първи ред, което решаваме при $\lambda = \lambda_k$:

$T_k'(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = 0$ с решения $T_k(t) = c_k e^{-a^2 \lambda_k t}$

Така получаваме за решението на дадената задача:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad c_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Като заместим със стойностите от условието на задачата получаваме. $\Rightarrow$

$$c_k = \frac{2}{3}\int_0^3 \left(\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sin(\pi x)\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right) dx$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{k\pi}{3}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)$$