1 Линейни уравнения от n-ти ред.

1.1 Уравнения с променливи коефициенти.

Линейното нехомогенно обикновено диференциално уравнение от ред n има вида

$$L(y) \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

където коефициентите a_ν, $\nu = 0, 1, \dots n$ и дясната страна f на уравнението са непрекъснати комплексни (комплекснозначни) функции в интервала $\Delta \subset \mathbf{R}$. Интервалът Δ може да бъде произволен, т. е. без значение е дали е краен, безкраен, отворен, затворен или полуотворен, може да бъде кой да е от интервалите $[\alpha, \beta]$, (α, β), $[\alpha, \beta)$, $(-\infty, \beta]$, $(-\infty, \infty)$, ... Предполагаме, че $a_0(x) \neq 0$ за $x \in \Delta$. При $f(x) \equiv 0$ уравнението ще наричаме хомогенно.

Ако не е указано друго, по-нататък под функция ще разбираме комплекснозначна функция на реален аргумент ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Напомняме, че една комплексозначна функция на реален аргумент $g(x) = u(x) + iv(x)$ притежава дадено свойство, например непрекъснатост или диференцируемост в Δ, ако нейните реална и имагинерна част $Re\, g(x) = u(x)$ и $Im\, g(x) = v(x)$ едновременно имат това свойство. В частност $g'(x) = u'(x) + iv'(x)$ и $\int g(x)\, dx = \int u(x)\, dx + i \int v(x)\, dx$.

Задача на Коши: Да се намери в Δ функция $y = y(x)$, за която

$$\begin{cases} L(y)(x) = f(x),\ x \in \Delta, \\ y(x_0) = \alpha_1, \\ y'(x_0) = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n, \end{cases}$$

където $x_0 \in \Delta$, $\alpha_\nu \in \mathbf{C}$, $\nu = 1, 2, \dots n$.

Теорема 1.1 *(за съществуване и единственост, без доказателство). При горните предположения задачата на Коши притежава единствено решение в целия интервал Δ.*

Забележка 1.2 *Производните до ред $n-1$ на решението са диференцируеми, и следователно непрекъснати функции в Δ. Тогава от самото уравнение следва, че и n-тата производна на решението е непрекъсната в Δ.*

За краткост по-нататък с $C(\Delta)$ ще означаваме множеството от непрекъснатите в Δ функции, а с $C^k(\Delta)$ ще означаваме всички непрекъснати функции, които имат непрекъснати производни до ред k включително в Δ. Функциите, дефинирани в интервала Δ, с обичайните поточкови операции събиране на две функции и умножение на функция с число, т.е.

$$(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) \equiv \lambda f(x),\ x \in \Delta,\ \lambda \in \mathbf{C},$$

образуват комплексно линейно пространство (безкрайномерно!). Очевидно $C(\Delta)$ също е линейно пространство и множеството $C^n(\Delta) \subset C(\Delta)$ е негово линейно подпространство. Диференциалният оператор в лявата страна на уравнението е линеен диференциален оператор $L : C^n(\Delta) \to C(\Delta)$ поради линейността на операциите диференциране, умножение с функция и събиране.

1.1.1 Линейни хомогенни уравнения с променливи коефициенти

Лема 1.3 *Решенията на линейното хомогенно уравнение $L(y) = 0$ образуват линейно пространство.*

Доказателство. Нека $y_\nu \in C^k(\Delta)$, $L(y_\nu) = 0$, $C_\nu \in \mathbf{C}$, $\nu = 1, \dots, k$. От линейността на L следва

$$L(C_1 y_1 + \cdots + C_k y_k) = C_1 L(y_1) + \cdots + C_k L(y_k) = 0,$$

т.е. произволна линейна комбинация от решения на хомогенното уравнение също е решение на хомогенното уравнение, с което лемата е доказана.

Ще докажем, че пространството от решения на хомогенното уравнение е крайномерно и размерността му е точно n.

Дефиниция 1.4 *Казваме, че функциите $y_1, \dots, y_k$, дефинирани в интервала Δ, са линейно независими в Δ, ако от*

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0, \; x \in \Delta,$$

където $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$, следва, че $C_1 = \cdots = C_k = 0$.

Дефиниция 1.5 *Казваме, че функциите $y_1, \dots, y_k$, дефинирани в интервала Δ, са линейно зависими в Δ, ако можем да намерим такива константи $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$, $|C_1| + \cdots + |C_k| \neq 0$, че*

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0, \; x \in \Delta.$$

Дефиниция 1.6 *Казваме, че решенията $y_1, \dots, y_n$ на линейното хомогенно диференциално уравнение $L(y) = 0$ от ред n образуват фундаментална система (накратко ФС), ако са линейно независими в Δ.*

Ще получим удобни критерии за линейна независимост на диференцируеми функции чрез детерминантата на Вронски (или Вронскиан)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_k'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)}(x) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix},$$

където $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(\Delta)$.

Лема 1.7 *Нека функциите $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(\Delta)$ и да допуснем, че съществува такава точка $x_0 \in \Delta$, че $W(x_0) \neq 0$. Тогава функциите $y_1, \dots, y_k$ са линейно независими в Δ.*

Доказателство. Нека $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$ и да допуснем, че

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0, \; x \in \Delta.$$

$$A(x_0)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = W(x_0) \neq 0$$

Диференцирайки това равенство, получаваме че в Δ едновременно са изпълнени равенствата

$$\begin{array}{lcccccl} C_1 y_1(x) & + & \cdots & + & C_k y_k(x) & \equiv & 0, \\ C_1 y_1'(x) & + & \cdots & + & C_k y_k'(x) & \equiv & 0, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ C_1 y_1^{(k-1)}(x) & + & \cdots & + & C_k y_k^{(k-1)}(x) & \equiv & 0. \end{array}$$

За $x = x_0$ това е линейна хомогенна система за $C_1, \dots, C_k$ с детерминанта $W(x_0) \neq 0$. Следователно $C_1 = \cdots = C_k = 0$ и $y_1, \dots, y_k$ са линейно независими.

$L(y) = 0$

Лема 1.8 *Нека функциите $y_1, \dots, y_n \in C^n(\Delta)$ са решения на линейното хомогенно уравнение и да допуснем, че съществува такава точка $x_0 \in \Delta$, че $W(x_0) = 0$. Тогава решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно зависими в Δ.*

Доказателство. Да определим константите $C_1, \dots, C_n$, поне една от които е различна от 0, като решения на линейната хомогенна система

$$\begin{array}{lcccccl} C_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n(x_0) & = & 0, \\ C_1 y_1'(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n'(x_0) & = & 0, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ C_1 y_1^{(k-1)}(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0. \end{array}$$

Това е възможно, защото нейната детерминанта $W(x_0) = 0$. След това да разгледаме функцията

$$\eta(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

която очевидно е решение на хомогенното уравнение $L(\eta) = 0$ и според горните равенства $\eta(x_0) = \eta'(x_0) = \cdots = \eta^{(n-1)}(x_0) = 0$, т. е. удовлетворява нулеви данни на Коши. Тъй като функцията $\varphi(x) \equiv 0$ е решение на същата задача на Коши, от теоремата за единственост следва, че $\eta(x) \equiv \varphi(x) \equiv 0$, т. е. решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно зависими в Δ.

Лема 1.9 *(НДУ за ФС) Нека функциите $y_1, \dots, y_n \in C^n(\Delta)$ са решения на линейното хомогенно уравнение и $W(x)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Следните три твърдения са еквивалентни:*

а) $W(x_0) \neq 0$ за поне едно $x_0 \in \Delta$;

б) системата $y_1, \dots, y_n$ е фундаментална;

в) $W(x) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$.

Доказателство. Ще докажем еквивалентността на горните твърдения, като установим импликациите а) $\Longrightarrow$ б) $\Longrightarrow$ в) $\Longrightarrow$ а).

а) $\Longrightarrow$ б): Следва веднага от Лема 1.7.

б) $\Longrightarrow$ в): Нека решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно независими, но в) не е изпълнено, т. е. съществува поне едно $x_0 \in \Delta$, за което $W(x_0) = 0$. Но тогава съгласно Лема 1.8 решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно зависими, противно на допускането. Полученото противоречие показва, че ако е вярно б), то в) обезателно трябва да бъде изпълнено.

в) $\Longrightarrow$ а): Твърдението е очевидно, с което лемата е напълно доказана.

Теорема 1.10 *Линейното хомогенно диференциално уравнение от ред n притежава безбройно много фундаментални системи решения.*

Доказателство. Нека $A = (a_{ij})$ е произволна неособена матрица с комплексни елементи, т. е.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нека $x_0 \in \Delta$. Да определим функциите $y_1, \ldots, y_n$ като решения на задачите на Коши

$$\begin{cases} L(y_1) = 0, \\ y_1(x_0) = a_{11}, \\ y_1'(x_0) = a_{21}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1}. \end{cases} \quad , \ldots\ldots\ldots\ldots , \quad \begin{cases} L(y_n) = 0, \\ y_n(x_0) = a_{1n}, \\ y_n'(x_0) = a_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) = a_{nn}. \end{cases}$$

които съгласно теоремата за съществуване имат решения в Δ. Тъй като детерминантата на Вронски за тези решения на хомогенното уравнение в точка x_0 е $W(x_0) = \det A \neq 0$, то съгласно Лема 1.9 те образуват фундаментална система. Ясно е, че променяйки матрицата A, по такъв начин можем да получим безбройно много фундаментални системи.

Забележка. Явното намиране (изписване) на фундаментална система решения за уравнението с променливи коефициенти в общия случай не е възможно.

Следващата теорема показва структурата на множеството от всички решения на хомогенното уравнение, т. е. вида на "общото решение".

Теорема 1.11 *Линейното пространство от решения на хомогенното уравнение от ред n е с размерност точно n, и ако $y_1, \ldots, y_n$ образуват фундаментална система в Δ, а y е произволно решение на хомогенното уравнение, то*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x), \; x \in \Delta,$$

където $C_1 \ldots, C_n \in \mathbf{C}$ (формула за вида на общото решение на хомогенното уравнение).

Доказателство. Нека $x_0 \in \Delta$. Да определим константите $C_1, \ldots, C_n$ като решения на линейната нехомогенна система

$$\begin{array}{lcccccl} C_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n(x_0) & = & y(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n'(x_0) & = & y'(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(k-1)}(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y^{(n-1)}(x_0). \end{array}$$

Това е възможно, защото нейната детерминанта е $W(x_0) \neq 0$. След това да разгледаме функцията

$$\eta(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

$L(\eta) = 0$

Функциите η и y са решения на хомогенното уравнение и от горните равенства имаме

$$\eta(x_0) = y(x_0), \; \eta'(x_0) = y'(x_0), \; \ldots \; , \; \eta^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0),$$

т. е. η и y са решения на една и съща задача на Коши и по теоремата за единственост $\eta \equiv y$, т. е. функциите от фундаменталната система образуват базис в линейното пространство от решения на хомогенното уравнение, с което теоремата е доказана.

Пример 1.12 *Дадено е уравнението*

$$(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' + 6y = 0, \ x > 1.$$

2.1. Намерете две решения на уравнението от вида $(x-1)^n$, $n \in \mathbb{R}$.

2.2. Пресметнете детерминантата на Вронски $W(x)$ за намерените решения в подточка (2.1.).

2.3. Намерете общото решение на уравнението.

Решение.

2.1. Търсим решение от вида $y(x) = (x-1)^n$, $n \in \mathbb{R}$.

Последователно пресмятаме

$$y'(x) = n(x-1)^{n-1}, \ y''(x) = n(n-1)(x-1)^{n-2}.$$

Заместваме в уравнението и получаваме

$$[n(n-1) - 4n + 6](x-1)^n = 0, \, x > 1.$$

Следователно

$$n^2 - 5n + 6 = 0.$$

Това е квадратно уравнение, което има корени $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. По този начин получихме, че функциите

$$y_1(x) = (x-1)^2, \ y_2 = (x-1)^3$$

са две решения на даденото уравнение.

2.2. Детерминанта на Вронски за функциите y_1 и y_2 е

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1)^2 & (x-1)^3 \\ 2(x-1) & 3(x-1)^2 \end{vmatrix} = (x-1)^4.$$

2.3. $W(x) \neq 0$ при $x > 1$ и следователно функциите y_1 и y_2 са фундаментална система от решения на даденото уравнение в интервала $(1, +\infty)$. Общото решение на даденото уравнение в този интервал е

$$y(x) = c_1(x-1)^2 + c_2(x-1)^3,$$

където c_1 и c_2 са произволни константи.

1.1.2 Линейни нехомогенни уравнения с променливи коефициенти. Метод на Лагранж.

Да разгледаме в Δ нехомогенното уравнение $L(y) = f$, като функцията $y = y(x)$ е едно произволно решение. Да предположим, че ни е известно друго конкретно решение на същото уравнение (частно решение) $z = z(x)$, т. е. $L(z) = f$. Като извадим двете уравнения, поради линейността на L, разликата $y - z \equiv y_0$ е решение

$L(y-z) = L(y) - L(z) = f - f = 0$

на хомогенното уравнение $L(y_0) = 0$. Следователно структурата на решенията на нехомогенното диференциално уравнение е

$$y = y_0 + z,$$

където z е едно фиксирано частно решение, а y_0 е подходящо решение на хомогенното уравнение, т. е.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) + z(x), \ x \in \Delta,$$

където $C_1 \ldots, C_n \in \mathbf{C}$ (формула за вида на общото решение на нехомогенното уравнение).

Ако познаваме една фундаментална система от решения на хомогенното уравнение, то едно частно решение на нехомогенното уравнение винаги можем да намерим по метода на Лагранж за вариране на произволните константи, при който частното решение се търси във вида на решението на хомогенното уравнение, в което произволните константи са заменени с произволни функции, т. е. константите са варирани. Това означава, че търсим частно решение от вида

$$z(x) = C_1(x) y_1(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x) y_\nu(x),$$

където C_ν са диференцируеми функции в Δ. Едно диференциране ни дава

$$z'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x) y'_\nu(x).$$

Нека функциите C_ν са такива, че

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y_\nu(x) = 0, \ \in \Delta.}$$

Следователно

$$z'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x) y'_\nu(x).$$

Да диференцираме отново и ще получим

$$z''(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y'_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x) y''_\nu(x).$$

Нека функциите C_ν са такива, че

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y'_\nu(x) = 0, \ \in \Delta.}$$

Тогава ще имаме

$$z''(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x) y''_\nu(x).$$

Ако повторим същата процедура още $n-3$ пъти и на всяка стъпка поставяме условието за C_ν :

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y_\nu^{(k)}(x) = 0, \in \Delta, \ k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

то за $z^{(n)}$ ще получим

$z^{(n-1)} = \sum C_\nu y_\nu^{(n-1)}$

$$z^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y_\nu^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x) y_\nu^{(n)}(x).$$

Вече пресметнахме всички необходими ни производни на $z(x)$ за да пресметнем

$$L(z(x)) = a_0(x) \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y_\nu^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(x) \underbrace{L(y_\nu(x))}_{=0} = f(x),$$

т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(x) y_\nu^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)},$$

защото $L(y_\nu(x)) = 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, n$.

По този начин за $C'_\nu(x), \ \nu = 1, 2, \ldots, n$ получихме следната система от n уравнения

$$\begin{array}{lllllllll}
y_1(x)C'_1(x) & + & y_2(x)C'_2(x) & + & \cdots & + & y_n(x)C'_n(x) & = & 0, \\
y'_1(x)C'_1(x) & + & y'_2(x)C'_2(x) & + & \cdots & + & y'_n(x)C'_n(x) & = & 0, \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
y_1^{(n-1)}(x)C'_1(x) & + & y_2^{(n-1)}(x)C'_2(x) & + & \cdots & + & y_n^{(n-1)}(x)C'_n(x) & = & \frac{f(x)}{a_0(x)}.
\end{array}$$

Детерминантата на тази система е точно детерминантата на Вронски за $\{y_\nu\}_1^n$, която не се анулира. Решаваме системата, например по правилото на Крамер, и намираме функциите $C'_\nu(x)$, а оттам чрез интегриране получаваме

$$C_\nu(x) = \int C'_\nu(s)\, ds + \sigma_\nu$$

и търсените функции $C_\nu(x), \ \nu = 1, 2, \ldots, n$. Понеже търсим едно частно решение, то можем да изберем $\sigma_\nu = 0$. Ако оставим комплексните константи σ_ν да се менят, очевидно получаваме всички решения на нехомогенното уравнение $L(y) = f$.

С други думи, всички решения на нехомогенното уравнение можем да намерим, ако намерим поне една фундаментална система от решения на хомогенното уравнение. Ако коефициентите на уравнението и дясната страна са реални функции, то по описания начин получаваме по формулата $y(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu y_\nu(x) + z(x)$ общо решение с реални $C_1, \ldots, C_n$ и реални функции $y_1, \ldots, y_n$ и z.

Пример 1.13 *Решете уравнението*

$$(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' + 6y = (x-1)^4 \ln(x-1), \ x > 1.$$

$(x+2)^2 y'' + 4(x+2)y' + 2y = 0$

$(x+2)^n$

Решение.

1. От Пример 1.12 знаем, че общото решение на хомогенното уравнение

$$(x-1)^2y'' - 4(x-1)y' + 6y = 0$$

в разглеждания интервал е

$$y_0(x) = c_1(x-1)^2 + c_2(x-1)^3,$$

където c_1 и c_2 са произволни константи.

2. Търсим частно решение на даденото уравнение от вида

$$z(x) = b_1(x)(x-1)^2 + b_2(x)(x-1)^3,$$

където $b_1(x)$ и $b_2(x)$ са неизвестни функции. Ще ги определим с помощта на метода на Лагранж:

$$\left|\begin{array}{c} (x-1)^2b_1'(x) + (x-1)^3b_2'(x) = 0 \\ 2(x-1)\underline{b_1'(x)} + 3(x-1)^2\underline{b_2'(x)} = (x-1)^2\ln(x-1) \end{array}\right.$$

От първото уравнение получаваме

$$b_1'(x) = -(x-1)b_2'(x)$$

и заместваме във второто.

$$b_2'(x) = \ln(x-1),\ b_1'(x) = -(x-1)\ln(x-1).$$

Интегрираме и намираме

$$\underset{2}{b_1}(x) = \int \ln(x-1)\,d(x-1) = (x-1)\ln(x-1) - x + c_3.$$

$$\begin{aligned} b_1(x) &= -\int \underline{(x-1)}\ln(x-1)\,d(x-1) \\ &= -\frac{1}{2}\int \ln(x-1)\,d(x-1)^2 \\ &= -\frac{1}{2}[(x-1)^2\ln(x-1) - \int (x-1)\,dx] \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)^2\ln(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + c_4. \end{aligned}$$

Понеже търсим едно частно решение, избираме константите $c_3 = 0$ и $c_4 = 0$. Така намерихме следното частно решение на даденото уравнение

$$z(x) = [-\frac{1}{2}(x-1)^2\ln(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2\underset{+c_{21}}{]}(x-1)^2 + [(x-1)\ln(x-1) - \underset{+c_3}{x}](x-1)^3.$$

3. Общото решение на даденото уравнение е

$$y(x) = y_0(x) + z(x).$$

1.2 Уравнения с постоянни коефициенти.

$y' + ay = 0$

$y = ce^{-ax}$

За линейното хомогенно уравнение с постоянни коефициенти

$$L(y) \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ и $a_0 \neq 0$, за разлика от общия случай на променливи коефициенти, винаги можем да посочим фундаментална система от решения, следвайки проста алгебрична процедура. За целта, ще дефинираме e^λ за $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$:

$$e^\lambda := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta).$$

При $\alpha = 0$ получаваме известната формулата на Ойлер

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta.$$

Лесно пресмятаме, че $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ за $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}(e^{\lambda x})' &= [e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)]' = (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' \\ &= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \beta(-\sin\beta x + i\cos\beta x) \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ &= \lambda e^{\lambda x}.\end{aligned}$$

$\alpha i - \beta = \alpha i + i^2\beta$

$= i(\alpha + i\beta)$

Проверете, че $e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}$ за $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbf{C}$ и $e^\lambda \neq 0$ за $\lambda \in \mathbf{C}$.

Сега вече лесно получаваме, че за $\lambda \in \mathbf{C}$

$(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$

$$L(e^{\lambda x}) = (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x}.$$

Следователно $e^{\lambda x}$ е решение на хомогенното уравнение, точно когато λ е корен на характерситичния полином

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

и намираме корените му $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. На всеки прост корен λ съответства функция $e^{\lambda x}$ от фундаменталната система. На всеки многократен корен с краткост k съответстват k функции

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots\ ,\ x^{k-1}e^{\lambda x}$$

от фундаменталната система. Така получаваме общо n на брой линейно независими решения $y_1, \ldots, y_n$ (ФС) на хомогенното уравнение с постоянни коефициенти, а общото решение на хомогенното уравнение има вида

$$y(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x),\ x \in \underset{\mathbf{R}}{\overset{}{\Delta}},\qquad (*)$$

където $C_1, \ldots, C_n \in \mathbf{C}$.

Ако коефициентите на L са реални, т. е. $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, можем да посочим фундаментална система от реални функции. Ако λ е реален корен, функциите, които му съпоставяме имат описания по-горе вид. На всяка двойка комплексно спретнати прости корени $\lambda = \alpha \pm i\beta$ съпоставяме двойката реални функции

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x}\ldots e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\lambda = \alpha + i\beta, \ \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$

$e^{\alpha x}\cos\beta x \pm i e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}) = e^{\alpha x}cos\beta x$, $\frac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) = e^{\alpha x}sin\beta x$. На всяка двойка комплексно спрегнати корени $\lambda = \alpha \pm i\beta$ с кратност k съпоставяме $2k$ реални функции

$$e^{\alpha x}cos\beta x,\ xe^{\alpha x}cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}cos\beta x,\ \dots\ ,\ x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}sin\beta x,\ xe^{\alpha x}sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}sin\beta x,\ \dots\ ,\ x^{k-1}e^{\alpha x}sin\beta x$$

По такъв начин отново получаваме n на брой линейно независими решения, т.е. фундаментална система $y_1, \dots, y_n$ от реални функции. В такъв случай от формулата за общото решение $(*)$ всички комплексни решения получаваме при $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{C}$, а всички реални решения при $C_1, \dots, C_n \in \mathbf{R}$.

Като имаме пред вид тези правила, обикновено след като намерим корените на характеристичния полином, веднага пишем формулата за общото решение.

С намерената фундаментална система от решения можем по метода на Лагранж да намерим частно решение на нехомогенното уравнение с постоянни коефициенти $L(y) = f$. В специалния случай, когато дясната страна на едно нехомогенно линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти е квазиполином, тоест произведение от полином с експонента, sin или cos, или сума от такива произведения, може да бъде намерено частно решение, което също е квазиполином. За целта използваме метода на неопределните коефициенти.

Ако дясната страна на уравнението има вида $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, където $P_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, то частно решение търсим от вида

$$z(x) = x^sQ_m(x)e^{\gamma x},$$

където $Q_m(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_mx^m$ е полином от същата степен m. Числото $s = 0$, ако γ не е корен на характеристичния полином. Ако γ е корен на характеристичния полином, то s е равно на кратността му. Неопределените коефициенти $c_0,\ c_1, \dots,\ c_m$ като заместим с формулата за z в диференциалното уравнение и приравним коефициентите пред подобните членове в лявата и дясната страна на полученото уравнение.

$f(x) = f_1 + f_2 + \dots + f_p$

Ако в дясната страна на уравнението участват sin или cos, като ги изразим чрез експоненти по формулите на Ойлер

$P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x,\ P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\cos\beta x = \frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}),\ \sin\beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})/2i,$$

свеждаме задачата за намиране на частно решение до вече разгледания случай.

Ако коефициентите на уравнението са реални, а дясната страна има вида

$$e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

с метода на неопределените коефициенти можем да намерим частно решение от вида

$$z(x) = x^se^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x,)$$

където $s = 0$, ако $\alpha + \beta i$ не е корен на характеристичния полином, а в противен случай s е равно на кратността на корена $\alpha + \beta i$. $R_m(x)$ и $T_m(x)$ са полиноми с неопределени коефициенти от степен (по-малка или равна на) m, където m е по-голямата от степените на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Когато коефициентите на уравнението са реални, а в дясната страна освен $P(x)e^{\alpha x}$ има $\sin\beta x$ или $\cos\beta x$, често е по-удобно най-напред да решим уравнението с дясна страна $P(x)e^{(\alpha+\beta i)x}$. Реалната част на полученото решение ще бъде решение на уравнението с дясна страна $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, а имагинерната част ще бъде решение на уравнението с дясна страна $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.