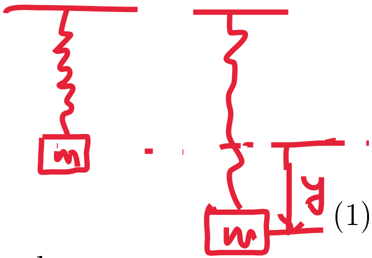
1 Уравнение на хармоничния осцилатор. Уравнения на Ойлер.

1.0.1 Уравнение на хармоничния осцилатор



Разглеждаме уравнението на хармоничния осцилатор.

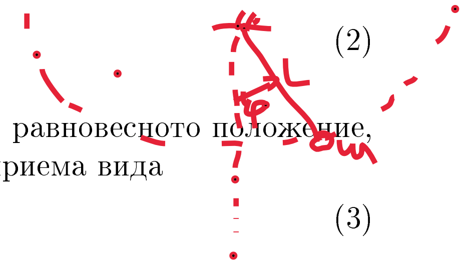
$$y''(t) + ky'(t) + \omega^2 y(t) = f(t), \tag{1}$$

където $k \geq 0, \omega > 0$ са константи, зависеща от конкретната физична система.

Например вертикалните трептения на материална точка с маса m, окачена на пружина с дължина L и коефциент на еластичност k_0. Тогава $k = \frac{\gamma}{m}$, $\omega^2 = \frac{k_0}{m}$, където γ е коефицента на триене.

Друг пример е движението на тежка частица P с маса m в окръжност C с център точката O и радиус L, разположена във вертикална равнина. Ако предполагаме, че няма трине, то уравнението за ъгъла $\varphi(t)$ на отклонението от равновесното полжение е

$$mL\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0, \tag{2}$$



където g е Земното ускорение.

В случая, когато разглеждаме малки осцилации около равновесното положение, можем да смятаме, че $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогава уравнението (2) приема вида

$$\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{3}$$

където $k = \frac{\gamma}{mL}$, $\omega^2 = \frac{g}{m}$,

Да разгледаме уравнението на хармоничния осцилатор, когато $k = 0$ и отсъства външна сила $f(t) = 0$.

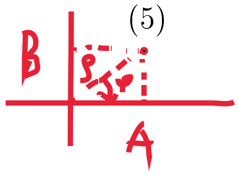
$P(\lambda) = \lambda^2 + w^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i w$

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0. \tag{4}$$

Неговото общо решение има вида

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{5}$$



където константите A и B се определят от началните условия.

Ако означим $A = \varrho\cos(\varphi)$, $B = -\varrho\sin(\varphi)$, то решението приема вида

$$u(t) = \varrho\cos(\omega t + \varphi).$$

Максималното отклонение от равновесното положение ϱ се нарича амплитуда на движението, а величината φ се нарича фаза. Амплитудата и фазата зависят от началните условия, докато ω зависи само от физическата система и често се нарича собствена честота на системата. Величината $T = \frac{2\pi}{\omega}$ се нарича период на движението. Той нараства, когато m расте, следователно по-тежките точки вибрират по-бавно. От друга страна периодът намалява, когато k нараства, което означава, че по-твърдите пружини водят до по-бързо вибриране на системата.

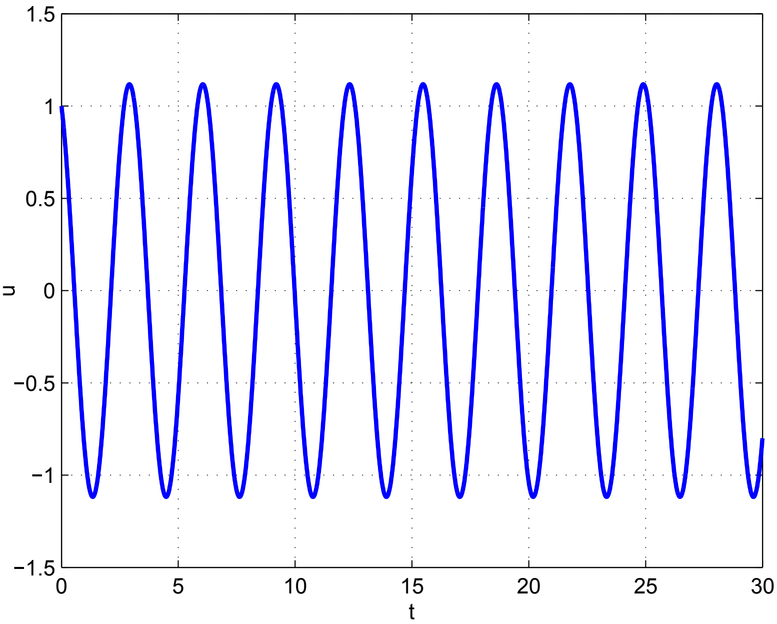
$y(0) = y_0$

$y'(0) = V_0$

При линейното математическо махало, периодът на движението

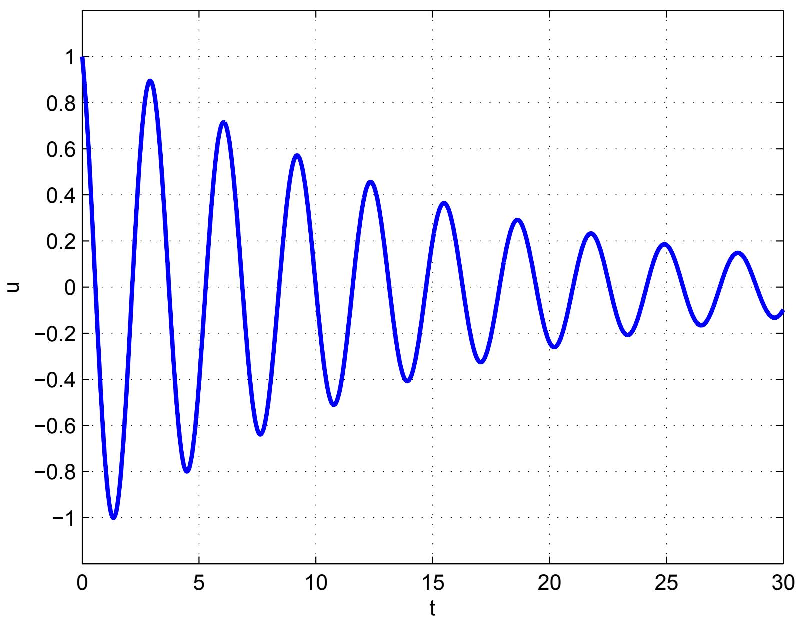
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6}$$

не зависи от началното отклонение. Това свойство се нарича изохронност и е открито от Галилей.



Фигура 1: Периодично движение.

1.0.2 Свободни вибрации с триене.



Фигура 2: Затихващо движение.

Нека сега има триене ($k > 0$). Общо решение на уравнението на хармоничния

$y'' + ky' + w^2 y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + w^2$

$D = k^2 - 4w^2$

$D > 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{2} < 0$

2) $D = 0$; $\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} < 0$

$$\text{ФСР} = \{e^{-\frac{k}{2}t}, te^{-\frac{k}{2}t}\}$$

$$3)\ D < 0,\ \lambda_{1,2} = \frac{-k \pm i\sqrt{-D}}{2}$$

осцилатор е

$$u(t) = \begin{cases} Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, & k^2 - 4\omega^2 > 0; \\ (A + Bt)e^{-kt/2}, & k^2 - 4\omega^2 = 0; \\ (A\cos\mu t + B\sin\mu t)e^{-kt/2}, & k^2 - 4\omega^2 < 0, \end{cases} \tag{7}$$

където $\lambda_{1,2} = \frac{k}{2}(-1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2/k^2})$, а $\mu = \sqrt{4\omega^2 - k^2}/2 > 0$.

И в трите случая решението $y(t)$ намалява с нарастването на t и клони към 0, когато $t \to \infty$, което отговаря на интуитивната ни представа, че триенето намалява енергията на системата. Въпреки, че движението не е периодично величината μ показва честотата с която точката вибрира и се нарича квази–честота, а $T_d = 2\pi/\mu$ се нарича квази–период.

1.0.3 Принудени трептения. Резонанс и биене.

Ще разгледаме случая, когато върху материалната точка действа външна периодична сила, например $F_0 \cos\omega_0 t$, $\omega_0 > 0$. Тогава уравнението на движението е

$$y''(t) + ky'(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \cos\omega_0 t. \tag{8}$$

Да предположим, че $k^2 - 4\omega^2 < 0$. Общото решение на уравнението (8) в този случай е

$$u(t) = (A\cos\mu t + B\sin\mu t)e^{-kt/2} + \frac{F_0\cos(\omega_0 t - \beta)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k\omega_0^2}}, \tag{9}$$

където $\beta = \arg(\omega^2 - \omega_0^2 + k\omega_0 i)$. В този случай търсим частно решение от вида $z(t) = De^{i\omega_0 t}$ и получаваме

$$Re(z) = \frac{F_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega^2}[(\omega^2 - \omega_0^2)\cos\omega_0 t + k\omega_0 \sin\omega_0 t].$$

Понеже $k > 0$, след известно време първия член става пренебрежимо малък. Второто събираемо тогава ни дава периодично движение с честота равна на честотата на външната сила ω_0 и с известно отместване по фаза. Когато ω_0 се мени и амплитудата на второто събираемо се мени и достига максимума си при $\omega_0 = \omega$. Тогава ефектът на външната сила е най-голям. В този случай се казва, че имаме резонанс. При $k = 0$ и $\omega_0 = \omega$ общото решение на уравнението (8) е

$$y(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \frac{F_0}{2\omega} t \sin\omega t.$$

$$\frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos\omega_0 t$$

Сега амплитудата на принудените трептения расте линейно заедно с t.

В зависимост от обстоятелствата резонансът може да бъде както хубав, така и лош. Той се взима под сериозно внимание, когато се проектират такива съоръжения, като мостове, при които той би могъл да предизвика разрушение. Резонансът играе важна роля и в радиотехниката - радиоапаратите приемат най-ясно сигналите с честота, близка до собствената им.

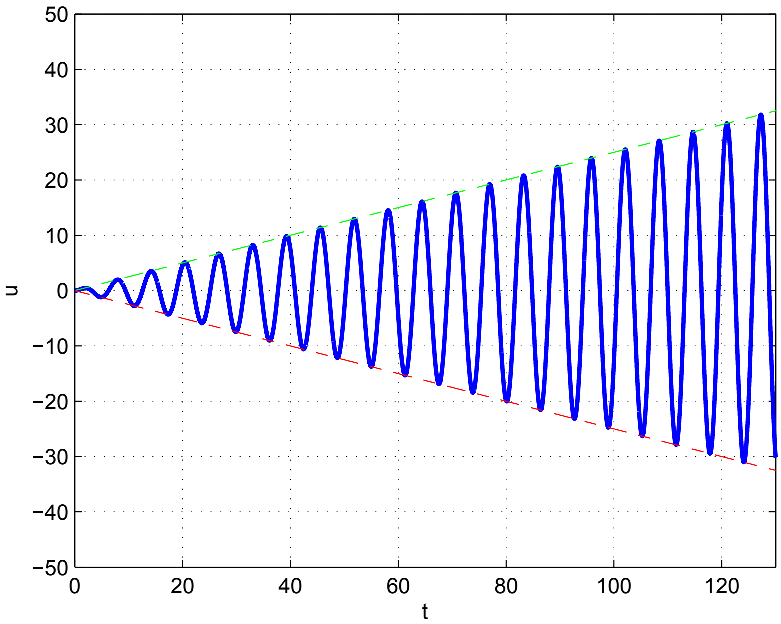
Да предположим сега, че $k = 0$, $\omega_0 \neq \omega$ и в началния момент системата се намира в покой, тоест $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$. Решението на получената задача на Коши е

$$y(0) = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} + A = 0$$

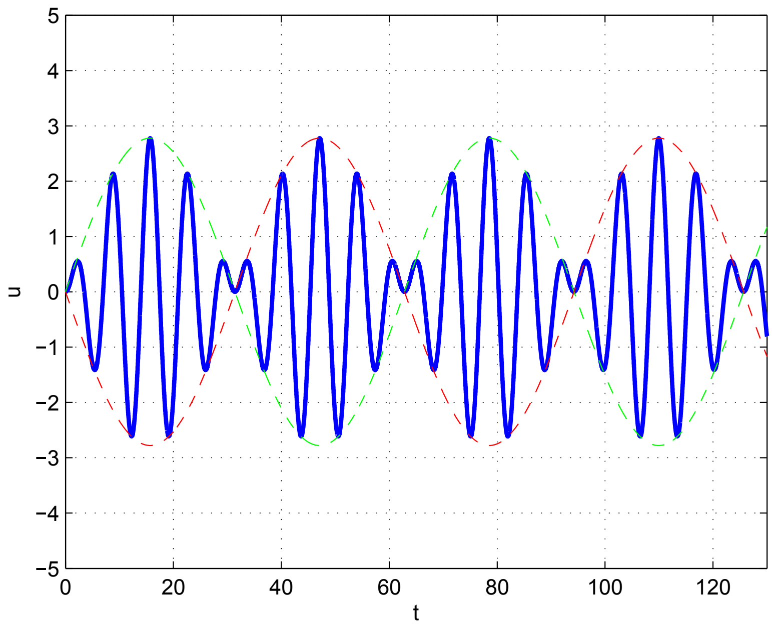
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{F_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)}(\cos\omega_0 t - \cos\omega t) \\ &= \frac{2F_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \sin\frac{(\omega + \omega_0)t}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

$$y'(x) = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t) + \frac{F_0}{2\omega}\sin\omega t + \frac{F_0}{2} t\cos\omega t$$

$$y'(0) = \omega B = 0 \Rightarrow B = 0$$



Фигура 3: Резонанс. Графики на решението (в син цвят) и амплитудата.



Фигура 4: Биене. Графики на решението (в син цвят) и амплитудата.

Ако $|\omega - \omega_0|$ е малко число, то $\omega + \omega_0$ е много по-голямо от $|\omega - \omega_0|$ и $\sin \frac{(\omega+\omega_0)t}{2}$ осцилира много по-бързо от $\sin \frac{(\omega-\omega_0)t}{2}$. Следователно движението е бързо осцилиращо със честота $(\omega + \omega_0)/2$, но с бавно варираща амплитуда

$$\frac{2F_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}.$$

Такъв тип движение с периодично променяща се амплитуда се нарича биене. В електрониката например варирането на амплитудата във времето се нарича амплитудна модулация.

1.1 Уравнения на Ойлер

Уравнения на Ойлер наричаме следното уравнение с променливи коефициенти

$$a_0(x-a)^n y^{(n)}(x) + a_1(x-a)^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x-a)y^{(1)}(x) + a_n y = f(x),$$

където a, a_0, $a_1, \ldots, a_n$ са реални константи, $a_0 \neq 0$.

Уравнението на Ойлер се свежда до линейно уравнение с постоянни коефициенти чрез смяната $x = a + e^t$ при $x > a$ и $x = a - e^t$ при $x < a$.

Ще демонстрираме това на един прост пример.

Пример 1.1

$\ln x \to t$

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

При $x > 0$ полагаме $x = e^t$. Последователно ще изразим производните по x чрез производните по t. Нека означим $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ и да пресметнем

$y(x) \xrightarrow{x=e^t} y(e^t) = z(t)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \underline{\dot{y}e^{-t}},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d(\dot{y}e^{-t})}{dt}e^{-t} = \underline{(\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}}.$$

Заместваме в разглежданото уравнение и получаваме

$z(t) = y(e^t)$

$e^{2t}(\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t} + 2e^t \dot{y} e^{-t} - 6y = 0$

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0.$$

$y(x) = z(\ln x)$

$t' = \frac{1}{x} = e^{-t}$

Неговият характеристичен полином

$$\lambda^2 + \lambda - 6$$

има корени $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$. Това означава, че e^{-3t}, e^{2t} е фундаментална система и общото решение на последното уравнение е

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}.$$

Така окончателно намираме, че при $x > 0$ решението на изходното уравнение е

$$y(x) = c_1 x^{-3} + c_2 x^2.$$

Тази формула важи очевидно и при $x < 0$.

$x = -e^t$, $t = \ln(-x)$, $t'_x = \frac{1(-1)}{-x} = \frac{1}{x} = -e^{-t}$

$y' = -\dot{y}e^{-t}$, $y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-t}$

Търсим частно решение на у-то

(9) $y'' + \overset{=0}{K} y' + \omega^2 y = F_0 \cos \omega_0 t$, $\underline{K^2 - 4\omega^2 < 0}$

$\underline{\text{при } K = 0}$

1. $e^{i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t$

$F_0 \cos \omega_0 t = Re(F_0 e^{i\omega_0 t})$

ще намерим частно решение на у-то

$$(*) \quad y'' + \omega^2 y = \underbrace{F_0 e^{i\omega_0 t}}_{f(t)}$$

$f(t) = P_0(t) \cdot e^{\varkappa t}$, $\varkappa = i\omega_0$

У-то има частно решение от вида

$z(t) = t^s Q_0(t) e^{\varkappa t}$,

където $Q_0(t) = a = const$,

$s = \begin{cases} 0, & \text{ако } \varkappa \text{ не е корен на х.п.} \\ 1, & \text{ако } \varkappa \text{ е корен на хар. полином} \end{cases}$

$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

1 сл) $\omega = \omega_0 \Rightarrow S = 1$ и

$z(t) = ate^{i\omega_0 t} = ate^{i\omega t}$

заместване в у-то

(*) $\underline{z''(t) + \omega^2 z(t) = F_0 e^{i\omega t}}$

$z' = a(e^{i\omega_0 t} + t \cdot i\omega_0 e^{i\omega_0 t}) =$

$= a(1 + i\omega_0 t) e^{i\omega_0 t}$

$z'' = a[i\omega_0 e^{i\omega_0 t} + (i\omega_0 + (i\omega_0)^2 t) e^{i\omega_0 t}]$

$= a[2i\omega_0 - \omega_0^2 t] e^{i\omega_0 t}$

$a\cancel{e^{i\omega_0 t}}[2i\omega_0 - \cancel{\omega_0^2 t} + \cancel{\omega^2 t}] = F_0 \cancel{e^{i\omega t}}$

$2i\omega a = F_0 \Rightarrow a = \frac{F_0}{2i\omega} = \frac{F_0 i}{2i^2\omega} = -\frac{F_0}{2\omega} i$

$z(t) = -\frac{F_0}{2\omega} i t e^{i\omega t} =$

$= -\frac{F_0}{2\omega} i t(\cos\omega t + i\sin\omega t) =$

$= \frac{F_0}{2\omega} t(-i\cos t + \sin\omega t)$

$Re(z(t)) = \frac{F_0}{2\omega} t\sin\omega t$ е частно реш. на

$y'' + \omega^2 y = F_0 \cancel{e^{i\omega t}} \cos(\omega t)$

Общото решение на $y'' + \omega^2 y = F_0 \cos\omega t$

$$y(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \frac{F_0}{2\omega}\, t \sin\omega t.$$

2 сл) $\omega \neq \omega_0$ $\Rightarrow s = 0$; $y'' + \omega^2 y = F_0 \cos\omega_0 t$

$$z(t) = a e^{i\omega_0 t} \longrightarrow y'' + \omega^2 y = F_0 e^{i\omega_0 t}$$

$$z'(t) = a i \omega_0 e^{i\omega_0 t}$$

$$z''(t) = -a\omega_0^2 e^{i\omega_0 t}$$

$$z'' + \omega^2 z = F_0 \cancel{\cos} e^{i\omega_0 t}$$

$$a \cancel{e^{i\omega_0 t}} [-\cancel{A}\omega_0^2 + \omega^2] = F_0 \cancel{e^{i\omega_0 t}}$$

$$a = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \Rightarrow z(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega_0 t}$$

$$z(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2}(\cos\omega_0 t + i \sin\omega_0 t)$$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega_0 t$ е частно решение на $y'' + \omega^2 y = F_0 \cos\omega_0 t$

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos\omega_0 t$$