5. Линейни уравнения с постоянни коефициенти от n-ти ред. Нехомогенни уравнения

(1) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$ (*) - Хомогенно у-е

$a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ коефициенти

Характеристичен полином (ХП)

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

пространството от решенията е линейно над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ - n-мерно
Т.е. ако имаме $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ - независими над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ решения на (1) тогава всяко друго решение е

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \quad , c_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - фундаментална с-ма решения (ФСР)

Целта е да намерим ФСР. има връзка м/у ХП и ФСР
Тя е каква: ако $\lambda$ е корен на ХП то на нея можем да съпоставим някое от решенията $\varphi_j(x)$ от ФСР.

а) $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ еднократен корен на ХП $\longrightarrow e^{\lambda x} \in$ ФСР

б) $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ - k-кратен корен на ХП $\longrightarrow e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$

в) $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta \text{ - също е корен за } \mathbb{R} \end{array}\right\} \begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$

2) $\left|\begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{array}\right.$ k-кратни $\left\}\begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}\right.$

---

<u>Пример</u> $y'' - y' - 6y = 0 \longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ (ХП)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = 3 \to e^{3x} \\ \searrow \lambda_2 = -2 \to e^{-2x} \end{array}$$

$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$ - общо решение! $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ константи

---

<u>Пример</u> $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Реш. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \longrightarrow$ ФСР $e^x, xe^x, x^2e^x$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x \quad , c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

-2-

$y'' - 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1;2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad \rightarrow \left| \begin{matrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{matrix} \right\}$ ФСР

$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

---

Зад. за Дом.
1) $y'' - y' - 2y = 0$
2) $y'' + 3y' + 2y = 0$
3) $y'' - 2y' + y = 0$
4) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
5) $y'' + 4y = 0$
6) $y'' + 2y' + 10y = 0$

---

Нехомогенни уравнения

(2) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = P_m(x) e^{\gamma x}$ (дясната част се нарича квазиполином)

Първо се решава хомогенното у-е

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$

Реш на хомогенното у-е $\quad y_0(x) = c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x)$

Търсим частно решение $\quad \eta(x) = x^k Q_m(x) e^{\gamma x}$

k - кратността на $\gamma$ като корен на ХП (ако не е корен $\rightarrow \gamma = 0$)

$Q_m(x)$ е полином от степен m с неизвестни коефициенти

заместваме във (2) и намираме коеф. на $Q_m(x)$

Общо решение $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$.

<u>Пример!</u> Намерете общото решение на уравнението

$y'' - 3y' + 2y = e^x$

<u>Решение:</u> $\quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow e^x \quad \downarrow e^{2x}$

$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ - решение на хомогенно

$\gamma = 1$ - 1-кратен корен на ХП $\rightarrow \quad \eta(x) = x \cdot A e^x$

$P_0(x) = 1 \Rightarrow Q_0(x) = A \rightarrow \quad \eta' = A(e^x + x e^x) = A(1+x)e^x$ заместваме в уравнението

$\eta'' = A(e^x + (1+x)e^x) = A(2+x)e^x$

-3-

$A(2+x)e^x - 3A(1+x)e^x + 2Axe^x = e^x \quad : e^x$

$A(2+x) - 3A(1+x) + 2Ax = 1$

$-A = 1 \to \quad A = -1 \to \quad \eta(x) = (-1)\,xe^x$

Общо решение $\quad y(x) = y_0(x) + \eta(x)$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$

---

Пример $\quad y'' + y' - 6y = xe^{-x}$

Реш: $\quad y'' + y' - 6y = 0 \to \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\lambda_1 = -3 \to e^{-3x}$

$\lambda_2 = 2 \to e^{2x}$

$y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

частно решение $\quad \eta(x) = (Ax+B)e^{-x} \to \eta' = (A - Ax - B)\,e^{-x}$

$\eta' = (-Ax + A - B)e^{-x}$

$\eta'' = (-A + Ax - A + B)e^{-x} = (Ax - 2A + B)e^{-x}$

заместваме в даденото у-е и делим на $e^{-x}$

$(Ax - 2A + B) + (-Ax + A - B) - 6(Ax + B) = x$

$-6A \cdot x - A - 6B = 1 \cdot x + 0$

$-6A = 1 \to \quad A = -1/6 \qquad \to \eta(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{36}\right)e^{-x}}_{\text{частното решение}}$

$-A - 6B = 0 \quad B = -\frac{1}{6}A = 1/36$

общо решение $\quad y(x) = y_0(x) + \eta(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{36}\right)e^{-x}$

---

Дом. Намерете общото решение на уравнението

1) $y'' + 9y = xe^{2x}$

2) $y'' + 2y' + 2y = \underbrace{2x+1}_{(2x+1)e^{0x}}$

3) $y'' - 4y' + 4y = xe^{x}$