Линейни уравнения с постоянни коефициенти. Свеждане на уравнение до система

1 Линейни уравнения с постоянни коефициенти

1.1 Хомогенни линейни уравнения с постоянни коефициенти

Хомогенно линейно уравнение с постоянни коефициенти наричаме уравнението

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

Полиномът $P(\lambda)$

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{2}$$

наричаме характеристичен полином на уравнението (1).

Всеки n линейно независими решения на уравнението (1) се нарича фундаментална система решения.

Ако $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ е фундаментална система решения на уравнението (1), то всички негови решения са:

$$y(x) = c_1\ y_1(x) + c_2\ y_2(x) + ... + c_n\ y_n(x) \quad ,$$

където $c_i \in$ C, i = 1, .. ,n

1.1.1 Построяване на фундаментална система решения, когато $a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, .., n$

Нека λ е корен на характеристичния полином (2) на уравнението (1).

- ако $\lambda \in \mathbb{R}$ е прост корен, то във фундаменталната система решения поставяме $e^{\lambda x}$;
- ако $\lambda \in \mathbb{R}$ е k-кратен корен, то във фундаменталната система решения поставяме $e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x}, \dots,\ x^{k-1} e^{\lambda x}$;
- ако $\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda = \alpha + i\beta$, е прост корен, неговото комплексно спрегнато $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ също е корен. Тогава във фундаменталната система решения поставяме $e^{\alpha x}\ \cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\ \sin(\beta x)$;
- ако $\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda = \alpha + i\beta$, е k-кратен корен, неговото комплексно спрегнато $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ също е k-кратен корен. Тогава във фундаменталната система решения поставяме
  $e^{\alpha x}\ \cos(\beta x),\ x\ e^{\alpha x}\ \cos(\beta x),\ x^2\ e^{\alpha x}\ \cos(\beta x),\ \dots,\ x^{k-1}\ e^{\alpha x}\ \cos(\beta x)$
  $e^{\alpha x}\ \sin(\beta x),\ x\ e^{\alpha x}\ \sin(\beta x),\ x^2\ e^{\alpha x}\ \sin(\beta x),\ \dots,\ x^{k-1}\ e^{\alpha x}\ \sin(\beta x)$

2 Задачи

2.1 Решете аналитично уравнението

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Решение.

$$P(\lambda) : \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Корените на уравнението са: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$

Фундаментална система решения: $\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\} = \{e^{2x},\ e^{-x}\}$

Решението на уравнението е: $y(x) = c_1\ e^{\lambda_1 x} + c_2\ e^{\lambda_2 x} = c_1\ e^{2x} + c_2\ e^{-x}$

c_1, c_2 – пр. к.

2.2 Решете символно уравненията:

1 • $y'' + 3y' + 2y = 0$

2 • $y''' - 3y'' + 4y = 0$

3 • $y''' + 4y'' + 13y' = 0$

4 • $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y^{(2)} = 0$

5 • $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

Решение.

```
dsolve('D2y+3*Dy+2*y=0')

dsolve('D3y-3*D2y+4*y=0')

dsolve('D3y+4*D2y+13*Dy=0')

dsolve('D5y+3*D4y+3*D3y+D2y=0')

dsolve('D4y+2*D2y+y=0')
```

2) $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$

$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda + 4$

$= (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\Phi CP = \{e^{-t}, e^{2t}, te^{2t}\}$

$y(t) = C_1 e^{-t} + (C_2 + C_3 t)e^{2t}$

3) $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda =$

$\lambda[\lambda^2 + 4\lambda + 13] = 0$

$\lambda_1 = 0, (\lambda+2)^2 + 9 = 0$

$(\lambda+2)^2 = (3i)^2$

$\lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$

$\Phi CP = \{1, e^{-2x}\cos 3x, e^{-2x}\sin 3x\}$

$y = C_1 + e^{-2x}(C_2\cos 3x + C_3 \sin 3x)$

4) $\lambda^2(\lambda+1)^3 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_{3,4,5} = -1$

$\Phi CP = \{1, x, e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}\}$

$y = C_1 + C_2 x + e^{-x}(C_3 + C_4 x + C_5 x^2)$

C_j – пр. к.

5) $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = 0$

$\lambda_1^2 = -1, \lambda^2 = -1$

$\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i$

$\Phi CP = \{\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x\}$

$y^{(6)} + y = 0$

$\lambda^6 = -1$

$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$

```
ans =

C1*exp(-2*t) + C2*exp(-t)


ans =

C3*exp(2*t) + C5*exp(-t) + C4*t*exp(2*t)


ans =

C6 + C7*cos(3*t)*exp(-2*t) - C8*sin(3*t)*exp(-2*t)


ans =

C10 - 3*C9 + C9*t + C11*exp(-t) + C12*t*exp(-t) + C13*t^2*exp(-t)


ans =

C14*cos(t) - C16*sin(t) + C15*t*cos(t) - C17*t*sin(t)
```

3 Нехомогенни линейни уравнения с постоянни коефициенти

Нехомогенно линейно уравнение с постоянни коефициенти наричаме уравнението

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{3}$$

Ако $z(x)$ е едно частно решение на уравнението (3), а $y_0(x)$ е общото решение на хомогенното уравнение
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, то $y(x) = z(x) + y_0(x)$ е общото решение на уравнението (3).

3.1 Намиране на частно решение на уравнението (3), когато $f(x)$ има вида $P_m(x)\, e^{\gamma x}$, където $\gamma \in \mathbb{C}$, а $P_m(x)$ е полином на x от степен m.

Търсим частно решение $z(x)$ от вида $z(x) = x^s\, Q_m(x)\, e^{\gamma x}$, където $Q_m(x)$ е полином на x от степен m, а

$$\text{s} = \begin{cases} 0, & \text{ако } \gamma \text{ не е корен на } P(\lambda) \\ k, & \text{ако } \gamma \text{ е k-кратен корен на } P(\lambda) \end{cases}$$

4 Задачи

4.1 Решете аналитично уравнението

$$y'' + 3y' + 2y = 12e^x \tag{4}$$

Решение.

- Търсим решение на $y'' + 3y' + 2y = 0$

  $$P(\lambda) : \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

  Корените на уравнението са: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

  Фундаментална система решения: $\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\} = \{e^{-2x},\ e^{-x}\}$

  Решението на уравнението е:
  $y_0(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x} = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{-x}$, c_1, c_2 – пр. к.

- Търсим частно решение $z(x)$
  $f(x) = 12e^x \implies P_m(x) = 12,\ e^{\gamma x} = e^x \implies m = 0,\ \gamma = 1$
  γ не е корен на $P(\lambda) \implies s = 0$
  Тогава $z(x)$ има вида $z(x) = x^s\, Q_m(x)\, e^{\gamma x} = x^0\, Q_0(x)\, e^x = ce^x$
  където $c = const$.
  $z' = ce^x$
  $z'' = ce^x$
  Заместваме в уравнението (4):
  $ce^x + 3ce^x + 2ce^x = 12e^x$

$6ce^x = 12e^x \qquad / : e^x$
$6c = 12 \implies c = 2$
$\implies z(x) = 2e^x$

- Тогава общото решение на уравнението (4) е $y(x) = y_0(x) + z(x)$
  $y(x) = \underline{c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{-x} + 2e^x}$

1) $Ly = 0$ $\quad y_0$
2) $Ly = 12e^x$ $\quad z_1(x)$
3) $Ly = \frac{1}{1+e^x}$, $\quad z_2(x)$

4.2 Решете символно уравнението:

$$Ly = y'' + 3y' + 2y = 12e^x + \underline{\frac{1}{1+e^x}}$$

5 Линейни уравнения от n-ти ред с променливи коефициенти. Задача на Коши. Примери

$y = y_0 + z_1 + z_2$

5.1 Уравнение на Льожандър

$$(1 - x^2)\; y'' - 2x\; y' + n(n+1)\; y = 0$$

```
yn = dsolve('(1-x^2)*D2y - 2*x*Dy + n*(n+1)*y = 0','x')
```

$y'' - (x^2 y')' =$
$(y' - x^2 y')' = 0$
$y' = \frac{c}{1-x^2}$

$y_n = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $\quad -1 < x < 1$
В случая $n = 0$ имаме:
$(1 - x^2)\; y'' - 2x\; y' = 0$
Полагаме $z = y'$
$z' = y''$
$(1 - x^2)\; z' - 2x\; z = 0$

$\frac{dz}{z} = \int \frac{2x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{dx^2}{1-x^2}$

$\ln|z| = -\ln|1-x^2| + c_0$

$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$z' = \frac{2x\; z}{1-x^2}$, $z = 0$,

$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

$z = \frac{c}{1-x^2} \implies y = c_1 \frac{\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}{2} + c_2$

С допълнителни условия $y_n(-1) = (-1)^n$, $y_n(1) = 1$ се получават решенията $P_n(x)$, които се наричат полиноми на Льожандър от степен n.

```
P0=dsolve('(1-x^2)*D2y-2*x*Dy=0','y(-1)=1','y(1)=1','x')
P1=dsolve('(1-x^2)*D2y-2*x*Dy+2*y=0','y(-1)=-1','y(1)=1','x')
P2=dsolve('(1-x^2)*D2y-2*x*Dy+6*y=0','y(-1)=1','y(1)=1','x')
```

5.2 Уравнение на Бесел

$$x^2\ y'' + x\ y' + (x^2 - n^2)\ y = 0$$

Bessel function of first kind

expand all in

Syntax

```
J = besselj(nu,Z)
J = besselj(nu,Z,1)
```

Definitions

The differential equation

Описание: Описание: besselj

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \nu^2\right)y = 0,$$

where ν is a real constant, is called *Bessel's equation*, and its solutions are known as *Bessel functions*.

$J_\nu(z)$ and $J_{-\nu}(z)$ form a fundamental set of solutions of Bessel's equation for noninteger ν. $J_\nu(z)$ is defined by

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{(k=0)}^{\infty} \frac{\left(\frac{-z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

where $\Gamma(a)$ is the gamma function.

$Y_\nu(z)$ is a second solution of Bessel's equation that is linearly independent of $J_\nu(z)$. It can be computed using `bessely`.

```
Y = bessely(nu,Z)
Y = bessely(nu,Z,1)
```

Definitions

The differential equation

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \nu^2\right)y = 0,$$

where ν is a real constant, is called *Bessel's equation*, and its solutions are known as *Bessel functions*.

A solution $Y_\nu(z)$ of the second kind can be expressed as

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

where $J_\nu(z)$ and $J_{-\nu}(z)$ form a fundamental set of solutions of Bessel's equation for noninteger ν

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)},$$

and $\Gamma(a)$ is the gamma function. $Y_\nu(z)$ is linearly independent of $J_\nu(z)$.

$J_\nu(z)$ can be computed using `besselj`.

5.3 Уравнение на Ойлер

$x^2\ y'' + 2x\ y' - 6y = -2x, \quad x > 0$

```
>> y = dsolve('x^2*D2y+2*x*Dy-6*y = -2*x','x')

y =

x/2 + C1*x^2 + C2/x^3
```

Вижда се, че фундаменталната система решения е $\{\frac{1}{x^3}, x^2\}$, а частното решение е $\frac{x}{2}$.

6 Числено решаване на задача на Коши за линейно уравнение от n-ти ред чрез свеждане до система

Всяко линейно обикновено диференциално уравнение е еквивалентно на система от n линейни обикновени диференциални уравнения от първи ред.

Дадено ни е уравнението

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{5}$$

Правим следните замествания:

$(*) \quad y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

$y_1 = y$
$y_2 = y'$
$y_3 = y''$
...
$y_n = y^{(n-1)}$
$y_n' = y^{(n)}$

Първите $n-1$ уравнения от системата се получават по следния начин:

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n \end{cases}$$

$y_{n-1} = y^{(n-2)}$

Накрая заместваме уравненията от системата в (5) и получаваме n-тото уравнение на системата
$y'_n = f(x) - a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \dots - a_{n-1} y_2 - a_n y_1$

Получихме следната система:

$$(*) \quad \begin{cases} y'_1 = y' = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = \underbrace{f(x) - a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \dots - a_{n-1} y_2 - a_n y_1}_{F(x, y_1, \dots, y_n)} \end{cases}$$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{Y}' = \vec{G}(x, \vec{Y}) \\ \vec{Y}(x_0) = \vec{e} \end{cases}$$

Началните условия в задачата на Коши за уравнението

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

се свеждат до начални условия за задачата на Коши за системата

$$(\#) \quad \begin{cases} y_1(x_0) = b_0 \\ y_2(x_0) = b_1 \\ \dots \\ y_n(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

1)

1) Дефинираме функция G(x,Y)
2) [X,Z]= ode45(@G, [x0,a], b)

X= [x0, x1, x2, ..., xm=a]

$$Z = \begin{pmatrix} y1(x0) & y2(x0) & \dots & yn(x0) \\ y1(x1) & y2(x1) & \dots & yn(x1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y1(xm) & y2(xm) & \dots & yn(xm) \end{pmatrix}$$

7 Задачи

7.1 Дадена е задачата на Коши:

$$\begin{cases} y''' + 4y'' + 13y' = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 13 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

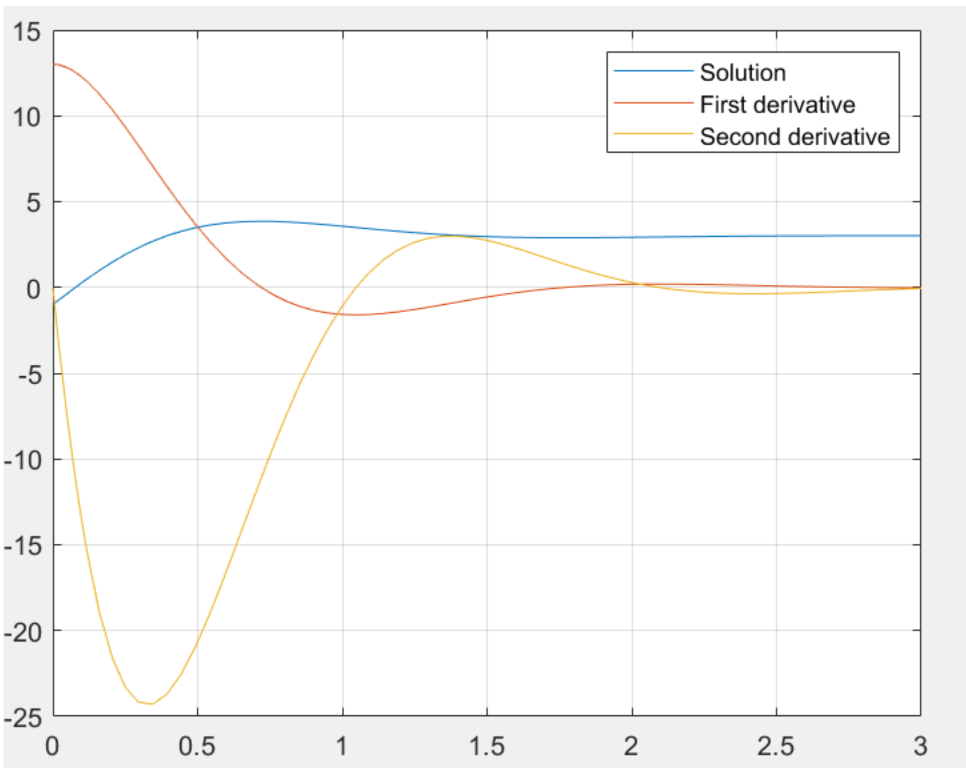
Сведете я до линейна нормална система от първи ред. Решете числено получената система в интервала $[0, 3]$. Начертайте графиките на трите функции, решения на системата. Коя от тези графики е графика съответно на y, y', y''?
Решение.
Правим следните замествания:
$y_1 = y$
$y_2 = y'$
$y_3 = y''$
$y_3' = y'''$
Системата ще има следния вид: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -4y_3 - 13y_2 \end{cases}$

А за начални условия за системата ще имаме:

$$\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = 13 \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$$

```
function equationToSystem
clc
ff = @(t,y) [y(2) ; y(3) ; -13*y(2)-4*y(3)];
% anonymous function
% this is equivalent to
% function zz = ff(t,y)
%         zz = [y(2);y(3);-13*y(2)-4*y(3)];
% end
```

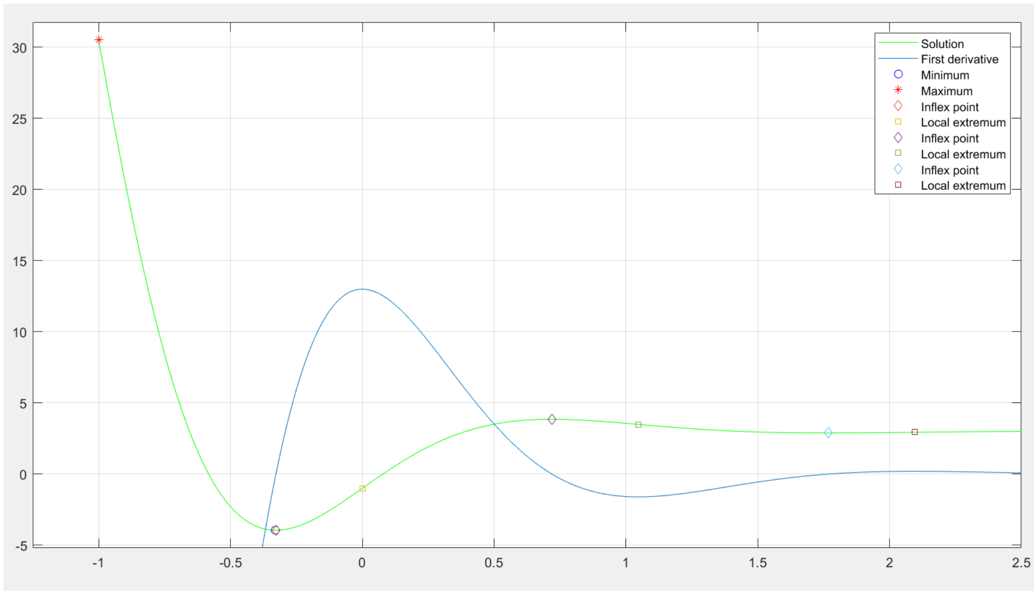
```
initial_conditions=[-1 ; 13 ; 0];
[T, Z] = ode45(ff, [0,3], initial_conditions);

plot(T,Z(:,1), T,Z(:,2), T,Z(:,3))
legend('Solution',...
       'First derivative',...
       'Second derivative')
grid on
end
```



7.2 Решете символно получената система в предната задача

Начертайте със зелен цвят графиката на решението на дадената ЗК в интервала [-1;2.5]. Определете най-малката и най-голямата стойност на намереното решение и отбележете върху графиката точката на най-малката стойност със син цвят и кръгче, а точката на най-голямата стойност с червен цвят и звезда. Начертайте графиката на втората компонента на решението. Намерете неговите локални екстремуми в същия интревал и ги марикирайте върху графиката. Намерете инфлексните точки на решението на дадената задача и ги маркирайте върху графиката.

```
function LinearEquationToSystem

[x, y, z] = dsolve('Dx = y',...
                   'Dy = z',...
                   'Dz = -13*y-4*z',...
                   'x(0) = -1',...
                   'y(0) = 13',...
                   'z(0)=0');
t = -1 : 0.01 : 2.5;
plot(t, eval(x), 'g', t, eval(y));
grid on
hold on

[m ,tm] = min(eval(x));
[M, tM] = max(eval(x));

plot(t(tm), m, 'bo');
plot(t(tM), M, 'r*');
axis([-1.25 2.5 m-1.25 M+1.25])

for k = 0 : 2
  t = fzero(matlabFunction(y), k) % local extremum
  plot(t, eval(x), 'd');
  t = fzero(matlabFunction(z), k) % inflex point
  plot(t, eval(x), 's');
end

legend('Solution', 'First derivative',...
       'Minimum', 'Maximum',...
       'Inflex point', 'Local extremum',...
       'Inflex point', 'Local extremum',...
       'Inflex point', 'Local extremum')

end
```



Solution
First derivative
Minimum
Maximum
Inflex point
Local extremum
Inflex point
Local extremum
Inflex point
Local extremum
30
25
20
15
10
5
0
-5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5