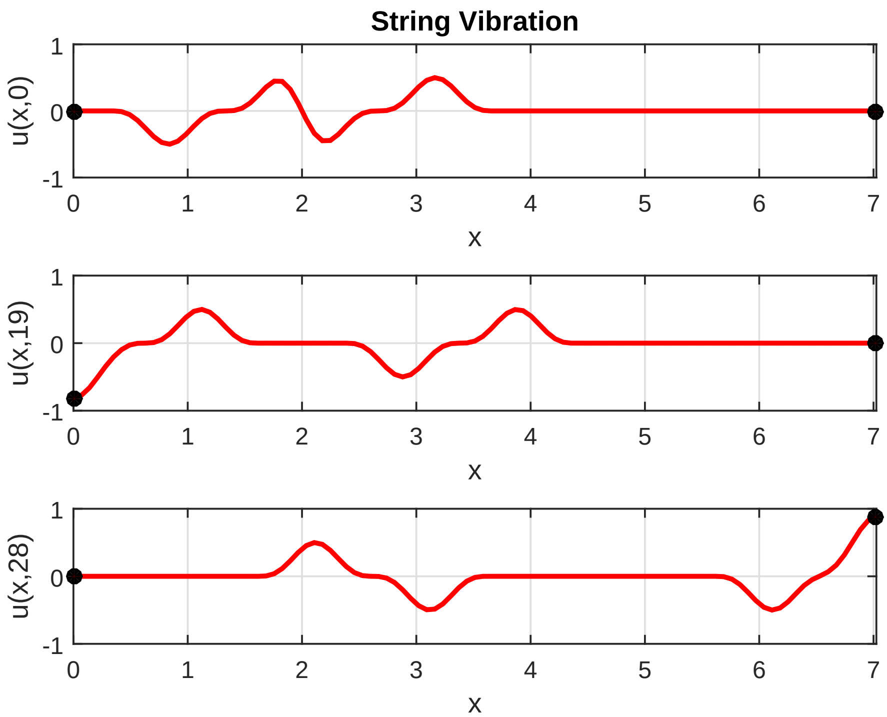
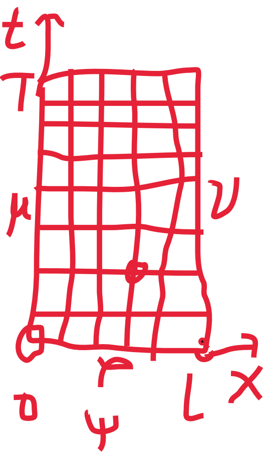


5 Учебно приложение "Диференчна схема за уравнението на струната"

В това учебно приложение ще визуализираме движението на ограничена струна с дължина L, за период от време $[0, T]$, когато ѝ действа външна сила $f(x,t)$, а краищата на струната се движат по определен закон. Математическият модел на движението на такава струна е следната смесена задача:



$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \ (x,t) \in \Omega := \{0 < x < L, \ 0 < t < T\}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ \underline{u_t|_{t=0} = \psi(x),} \ 0 < x < L, \\ u|_{x=0} = \mu(t), \ u|_{x=L} = \nu(t), \ 0 < t < T, \end{cases} \tag{24}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0,L]$, $\psi(x) \in C^1[0,L]$, $\mu, \nu \in C^2[0,T]$, $f(x,t) \in C^2(\bar{\Omega})$ и са изпълнени условията за съгласуване

$$\mu(0) = \varphi(0), \ \mu'(0) = \psi(0), \ \mu''(0) = a^2\varphi''(0) + f(0,0),$$
$$\nu(0) = \varphi(L), \ \nu'(0) = \psi(L), \ \nu''(0) = a^2\varphi''(L) + f(L,0).$$

В $\bar{\Omega}$ ще въведем мрежа $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$ със стъпки h и τ , където

$$
\begin{aligned}
\omega_h &= \{x_i = ih,\ h = \frac{L}{n},\ i = 1, 2, ..., n,\ n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}\}, \\
\omega_\tau &= \{t_j = j\tau,\ \tau = \frac{T}{m},\ j = 1, 2, ..., m,\ m \geq 2,\ m \in \mathbf{N}\}.
\end{aligned}
$$

Точките (x_i, t_j) се наричат възли на мрежата, а при фиксирано j точките $(x_i, t_j), i = 1, 2, ..., n$ образуват j – тия слой на мрежата.

Нека за по-кратко означим

$$
u_{i,j} = u(x_i, t_j),\ f_{i,j} = f(x_i, t_j),
$$
$$
\varphi_i = \varphi(x_i),\ \psi_i = \psi(x_i),\ \mu_j = \mu(t_j),\ \nu_j = \nu(t_j).
$$

Ще намерим приближено (с определена грешка) стойностите на решението $u(x, t)$ във възлите на въведената мрежа, като апроксимираме производните с подходящи диференчни частни. За целта ще използваме формулата на Тейлър

$$
u(x + h, t) = u(x, t) + u_x(x, t) \cdot h + O(h^2)
$$

$-h$ $-$

$$
u_x(x,t) = \frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} = \frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}
$$

и

$$
u(x, t + \tau) = u(x, t) + u_t(x, t) \cdot \tau + O(\tau^2)
$$

за да получим

$$
u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h),\ u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h)
$$

и

$$
u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + O(\tau).
$$

По аналогичен начин за вторите производни получаваме

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x_i, t_j) &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + O(\tau^2), \\
u_{xx}(x_i, t_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2),
\end{aligned}
$$

$$
u_{xx}(x,t) = \frac{u_x(x,t)-u_x(x-h,t)}{h} = \frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}
$$

ако $u(x, t) \in C^4(\Omega)$. По този начин за апроксимиране на вълновото уравнение с локална грешка на апроксимация $O(h^2 + \tau^2)$ във вътрешните възли на мрежата получаваме диференчните уравнения

$$
\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j}, \tag{25}
$$

където $i = 2, 3, ..., n-1,\ j = 2, 3, ..., m-1$.

Съгласно първото начално условие в изходната задача имаме

$$u_{i,1} = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., n,$$

а според второто (с грешка $O(\tau)$)

$$\frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\tau} = \psi_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

За да апроксимация на второто условие с локална грешка на апроксимация $O(\tau^2)$ ще използваме реда на Тейлър

$= a^2 u_{xx} + f$

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau u_t(x, t) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x, t) + O(\tau^3)$$

$j = 1,\ t = 0$ φ ψ

и вълновото уравнение. Така получаваме

$$u_t(x, t_1) = \frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\tau} - \frac{\tau}{2}\left(a^2 \frac{u_{i+1,1} - 2u_{i,1} + u_{i-1,1}}{h^2} + f_{i,2}\right) = \psi_i,\ i = 2, 3, ..., n - 1.$$

$= \psi_2$

Граничните условия в изходната задача ни дават

$$u_{1,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 2, 3, ..., m.$$

От равенството (25) можем да изразим $u_{i,j+1}$ и да получим

$$u_{i,j+1} = 2(1 - c^2)u_{i,j} + c^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j},$$
$$i = 2, 3, ..., n - 1,\ j = 2, 3, ..., m - 1,$$

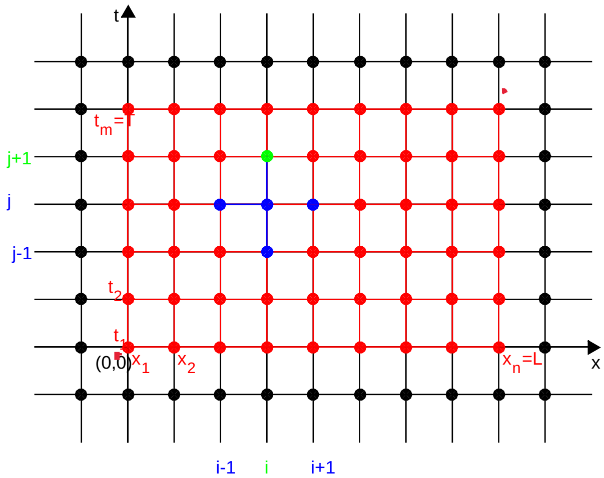
където $c = \frac{a\tau}{h}$.

Вижда се, че стойността на решението в точката $i, j + 1$ се определя от стойностите му в точките $(i-1, j);\ (i, j);(i+1, j)$ и$(i, j-1)$. Затова получената диференчна схема се нарича явна трислойна схема по шаблона "кръст":

$$u_{i,1} = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., n,$$
$$u_{i,2} = \varphi_i + \tfrac{c^2}{2}(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + \tfrac{\tau^2}{2} f_{i,2} + \tau\psi_i,\ i = 2, 3, ..., n - 1,$$
$$u_{1,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 2, 3, ..., m,$$
$$u_{i,j+1} = 2(1 - c^2)u_{i,j} + c^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j},$$
$$i = 2, 3, ..., n - 1,\ j = 2, 3, ..., m - 1.$$

Може да се покаже, че тази схема е устойчива, ако е изпълнено условието

$$c = \frac{a\tau}{h} \leq 1. \tag{26}$$

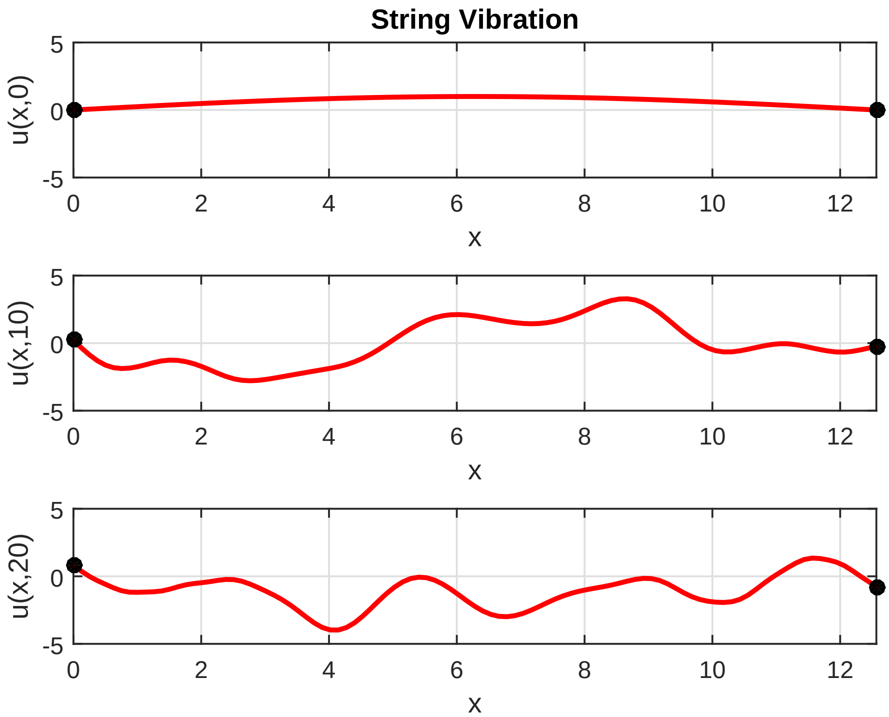


В следващия пример, ще визуализираме трептене на струна по описания метод и ще покажем, че ако условието (26) не е изпълнено, то диференчната схема не дава адекватен модел на това движение

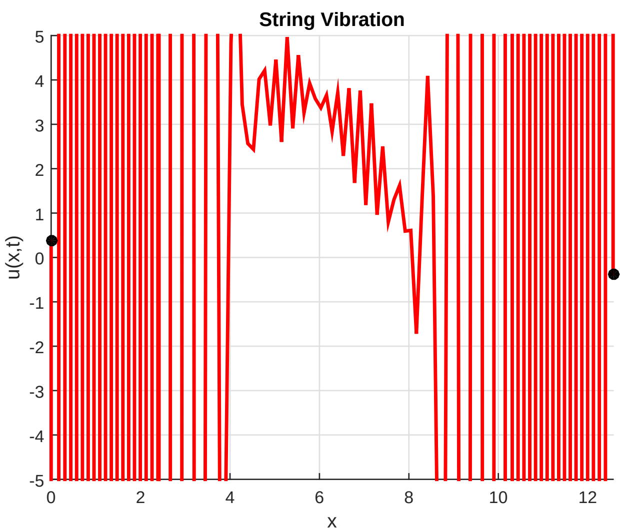
Ще разгледаме трептенето на ограничена струната за време $t \in [0, T]$, $T = 20$ при $L = 4\pi$, $a = 1$, $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, $\psi(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$, $\mu(t) = \sin^2 t$, $\nu(t) = -\sin^2 t$, $f(x,t) = 4\cos(x^2 - Lx)$ $\sin^3(t)$

Въвеждаме диференчна схема по описания по-горе начин. Нека стъпката по x е $h = L/100$, а стъпката по t е $\tau = T/250$. Понеже $a = 1$, то $c = \frac{a\tau}{h} = \frac{2}{\pi} < 1$ и условието (26) е изпълнено.

Кодът във файла **StringDS.m** визуализира трептенето на тази струна. На следващата фигура е показано положението на струната в моментите $t = 0$, $t = 10$ и $t = 20$.



Нека сега изберем стъпката по x да е $h = L/100$, а стъпката по t да е $\tau = T/100$. Понеже $a = 1$, то $c = \frac{a\tau}{h} = \frac{5}{\pi} > 1$ и условието (26) не е изпълнено. На следващата фигура е показано как изглежда функцията, получена с описаната диференчна схема в момента $t = 5$.



Резонанс. Ще разгледаме трептенето на ограничена струната със закрепени краища под действието на периодична външна сила. Нека движението на струната се задава със следната смесена задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{4}u_{xx} = -\frac{1}{5}x^2(x-\pi)^2\cos(\omega t),\ 0 < x < \pi,\ 0 < t < 40, \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0,\ 0 \le x \le \pi, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,\ 0 \le t \le 40, \end{cases} \tag{27}$$

$T'' + \underbrace{a^2 \lambda_k} T = f_k \cdot \cos\omega t$

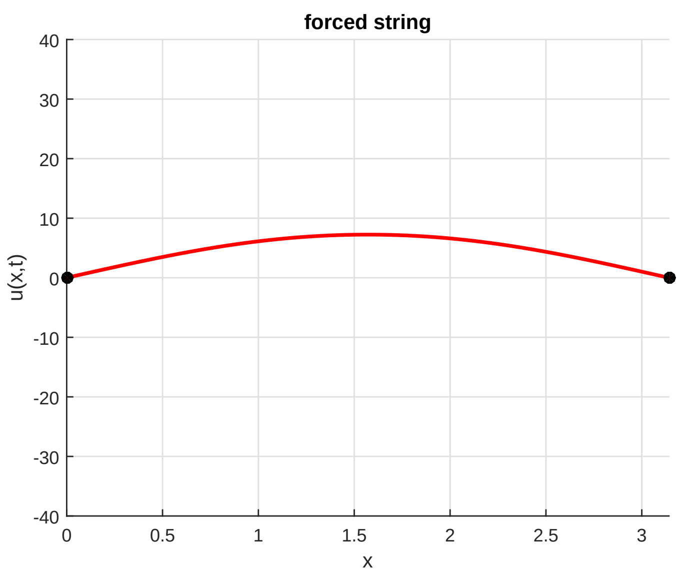
където $\omega > 0$ е константа.

Честотите на собствените трептения на закрепената струната са $\omega_k = \frac{ak\pi}{L} = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbf{N}$. Ако честота ω на външната сила съвпада с една от тези честоти се получава резонанс. В този случай амплитудата на трептене на струната нараства неограничено при нарастване на времето.

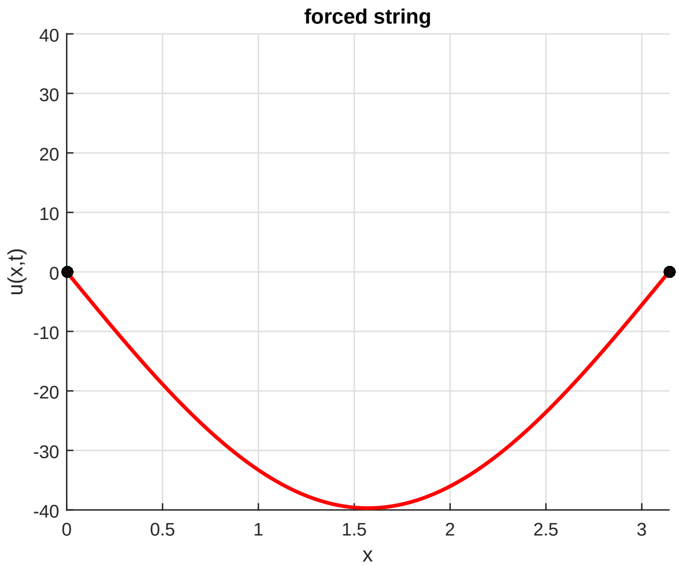
Ще визуализираме трептенето на струната при $\omega = 1/4$ и $\omega = \omega_1 = 1/2$. Нека стъпката по x е $h = L/100$, а стъпката по t е $\tau = T/1000$. Понеже $a = 1/2$, то $c = \frac{a\tau}{h} = 2/\pi < 1$ и условието (26) е изпълнено.

Трептенето на струната се визуализира чрез примерения код, който се намира във файла **forcedstring.m**.

На следващата фигура е показано положението на струната при $\omega = 1/2$ в момента $t = 40$.



При резонанс ($\omega = 1$) в същия момент $t = 40$ положението на струната е показано на следващата фигура. Очевидна е разликата в амплитудата на трептенето в двата случая.



```
function StringDS
clc
clear all;
clf
L=4*pi;
a=1;
T=20;
h=L/100;
tau=T/250;
x=0:h:L;
t=0:tau:T;
c=(tau*a)/h

function y=phi(x)
 y=sin(pi*x/L);
end

    function y=psi(x)
        y=sin(2*pi*x/L);
    end

function y=ni(t)
 y=-sin(t)^2;
end

    function y=mu(t)
        y=sin(t)^2;
    end

    function y= f(x,t)
        y=4*cos(x.*(x-L))*sin(t)^3;
       %w=1/2;
       %y=-x.^2.*(x-pi).^2.*cos(w*t)/5;
    end

for j=1:length(t)
    for i=1:length(x)
        if i>1 && i<length(x)
            if j==1
            u(i,j)=phi(x(i));
            elseif j==2
            u(i,j)=phi(x(i))+c^2/2*(phi(x(i+1))-
2*phi(x(i))+phi(x(i-1)))...
                +tau^2/2*f(x(i),t(j-1))+tau*psi(x(i));
            else
            u(i,j)=2*(1-c^2)*u(i,j-1)+c^2*(u(i+1,j-1)+u(i-1,j-
1))...
```

```
                -u(i,j-2)+tau^2*f(x(i),t(j-1));
            end
        elseif i==1
        u(i,j)=mu(t(j));
        else u(i,j)=ni(t(j));
        end
    end
end




for k = 1:length(t)
    clf;
    hold on;
    y=u(:,k);
    plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
    plot(L,y(end),'ko',...
    'MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    grid on;
    title('String Vibration')
    axis([0 L -5 5]);
    xlabel('x');
    ylabel('u(x,t)');
    getframe;
end

clf

subplot(3,1,1)
plot(x,u(:,1),'r','LineWidth',2)
axis([0 L -5 5]);

subplot(3,1,2)
plot(x,u(:,50),'r','LineWidth',2)
axis([0 L -5 5]);

subplot(3,1,3)
plot(x,u(:,250),'r','LineWidth',2)
axis([0 L -5 5]);

% [X,T1]=meshgrid(x,t);
% surf(X,T1,u')


end
```