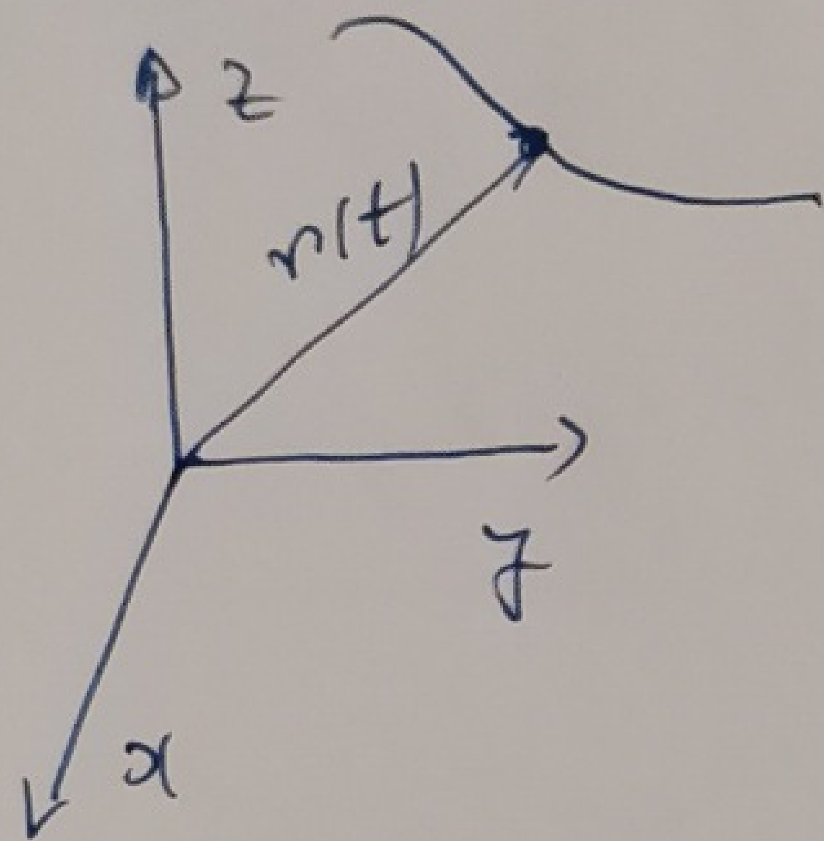
Диференциални уравнения



$\dot{\vec{r}} = \vec{V}$ – скорост

векторна ф-я на скаларен аргумент

ОДУ – $F(x, y(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$

има само обикновени производни

ЧДУ $F(x, y, u(x,y), u'_x(x,y), u'_y(x,y)) = 0$

<u>Пример 1:</u> У-е на нормалното размножаване

Биологичен вид количество в момента t е $x(t)$

Размножаване без конкуренция със скорост пропорционална на количеството в дадения момент

$\dot{x} = kx$ $\quad t \in (-\infty; +\infty)$ $\quad \dot{} = \frac{d}{dt}$

$\int \frac{\dot{x}}{x} dt = \int k\, dt \to \ln x = kt + k$

$\Rightarrow x(t) = e^{kt} \cdot c$

Друго у-е е $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ – У-е на Нютон

$\vec{F} = m\vec{a}$

Лотка-Волтера

$\dot{x} = x(a - my)$

$\dot{y} = y(-b + nx)$

Задача на Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ – начално условие

Уравнения с разделени променливи

$y' = f(x) g(y) \quad : \quad g(y) \neq 0$

$\int \frac{y'}{g(y)} dx = \int f(x) dx \to \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$ – интеграл на уравнение

<u>Пример</u> $y' = \frac{xy}{\sqrt{x^2+1}} \to y \equiv 0$ е реш.

$\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \to \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{1/2}} + C$ –

$$\ln y = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \to \ln y = \sqrt{x^2+1} + C$$

$$y = e^C e^{\sqrt{x^2+1}}$$ —

2) $xy - (1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$, $y(\sqrt{8}) = 1$ – Задача на Коши

$y = 0$ е реш, но не удовл. началните условия

$$y'(1+y^2)\sqrt{1+x^2} = xy \to \frac{y'}{y}(1+y^2) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1+y^2}{y}\,dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + C$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int y\,dy = \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\ln y + \frac{y^2}{2} = \sqrt{1+x^2} + C$$ – от началните условия

от $y(\sqrt{8}) = 1$

$$\ln 1 + \frac{1^2}{2} = \sqrt{1+(\sqrt{8})^2} + C$$

$$\frac{1}{2} = 3 + C \to C = -3 + 1/2 = -5/2$$

$$\Rightarrow \ln y + \frac{y^2}{2} = \sqrt{1+x^2} - 5/2$$

$y' = f(ax+by+c)$ пол. $z = ax + by + c$ $(b \neq 0)$

$y = \frac{1}{b}(z - a.x - c) \to y' = \frac{1}{b}(z' - a)$ → заместваме

$\frac{1}{b}(z' - a) = f(z) \to z' = bf(z) + a$ – Разделени промен.

<u>Пример</u> $y' = \cos(x-y)$ $z = x - y$ $y = x - z$

$y' = 1 - z' \to 1 - z' = \cos z \to z' = 1 - \cos z$

$z' = 2\sin^2\frac{z}{2}$; $z = 0$ е реш $\frac{z}{2} = k\pi$ – също

$z = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$$\int \frac{z'}{2\sin^2 z/2}\,dx = \int dx + C \to \int \frac{dz/2}{\sin^2 z/2} = x + C$$

$$-\cot z/2 = x + C \to \frac{z}{2} = \operatorname{arccot}(-x-C)$$

$$z = 2\operatorname{arccot}(-x-C) \xrightarrow{\text{заместване } z} x - y = 2\operatorname{arccot}(-x-C)$$

Хомогенни уравнения

$$y' = f(y/x) \to z = y/x \to y = z.x$$

$$\underline{y' = z'.x + z} \to z'.x + z = f(z) - \text{р.п.}$$

Пр: $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2} \to y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

пол $z = y/x \to y = z.x \to z'.x + \cancel{z} = \cancel{z} + \sqrt{1 - z^2}$

$z'.x = \sqrt{1 - z^2}$; $z = \pm 1$ реш

$z \neq \pm 1$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} + C \to \arcsin z = \ln x + C$$

$$\arcsin z = \ln x.K \to z = \sin(\ln(xK))$$

$$\Rightarrow y/x = \sin(\ln(xK)) \to \underline{y = x\sin(\ln(xK))}$$

Зад за упражнение $\qquad xy' - y = (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)$
