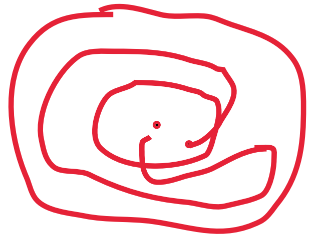
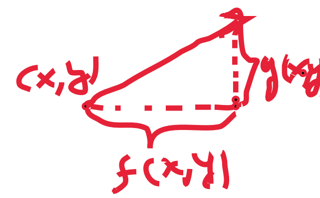


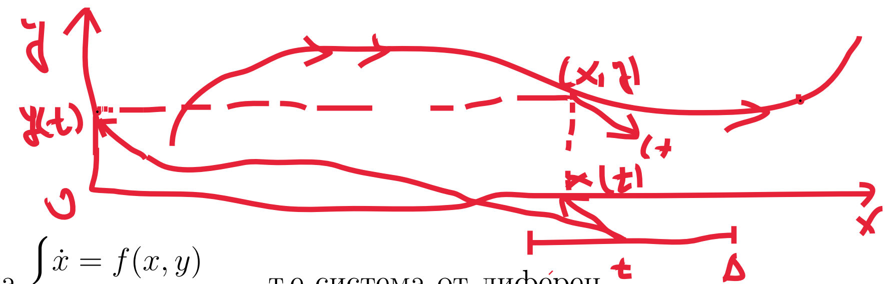
Векторни полета и фазови портрети на линейни автономни системи в равнината. Устойчивост



$y'' + ky' + w^2 y = 0$

$y_1 = y$

$y_2 = y'$



1 Дефиниции

$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -w^2 y_1 - k y_2 \end{cases}$

$(0,0)$

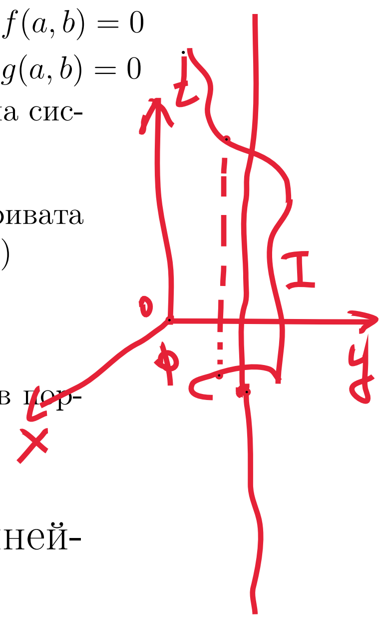
Дадена е автономната система $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$, т.е система от диференциални уравнения, в дясната част на която не участва явно t.

- Точката (a,b) наричаме равновесна (стационарна/особена), ако $\begin{cases} f(a,b) = 0 \\ g(a,b) = 0 \end{cases}$

  Ако (a,b) е равновесна точка, то $(x(t) = a,\ y(t) = b)$ е решение на системата.

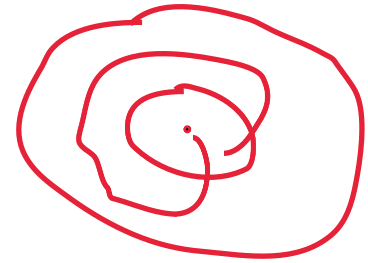
- Ако $(x(t),\ y(t)),\ t \in \Delta$ е решение на дадената система, то кривата $I = \{(x(t),\ y(t),\ t),\ t \in \Delta\}$ се нарича интегрална крива. $(I \subset \mathbb{R}^3)$

- Нейната проекция в равнината $\{t = 0\}$ се нарича фазова крива $\Phi = \{(x(t),\ y(t)),\ t \in \Delta\}$, $\Phi \subset \mathbb{R}^2$.
  Съвкупност от всевъзможните фазови криви ще наричаме фазов портрет.



2 Класификация на равновесните точки на линейни автономни системи в равнината

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}\ x + a_{12}\ y + b_1 \\ \dot{y} = a_{21}\ x + a_{22}\ y + b_2 \end{cases}$$



Равновесните точки са решенията на системата

$$\begin{cases} a_{11}\ x + a_{12}\ y + b_1 = 0 \\ a_{21}\ x + a_{22}\ y + b_2 = 0 \end{cases}$$

Основна информация за фазовия портрет на системата носят двете собствени стойности λ_1 и λ_2 на матрицата $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

$\det(A) \neq 0$

- При $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathrm{R}$:
  - Ако $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$, то равновесната точка се нарича неустойчив възел.
  - $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$, то равновесната точка се нарича устойчив възел.
  - $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$, то равновесната точка се нарича седло и е неустойчива.
- При $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathrm{C}$:
  - Ако $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, равновесната точка се нарича неустойчив фокус и е неустойчива, а фазовите криви са развиващи се спирали.
  - Ако $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, равновесната точка се нарича устойчив фокус и е устойчива, а фазовите криви са навиващи се спирали.
  - Ако $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, равновесната точка се нарича център и е устойчива, а фазовите криви са елипси.

3 Задача

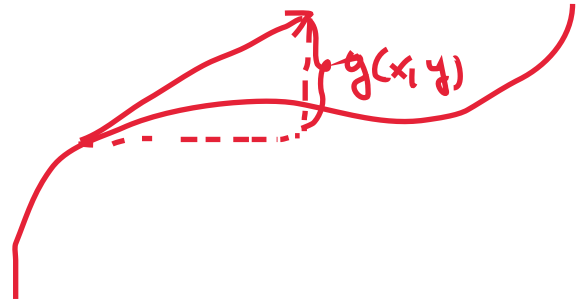
Дадени са системите

1. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1 \\ \dot{y} = 4x + 3y - 1 \end{cases}$$

2. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = f \\ y = g \end{cases}$$



3 • $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\ -4\end{pmatrix}$

4 • $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\ 0\end{pmatrix}$

5 • $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 1\\ -18 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

6 • $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$

1. Намерете равновесните точки на системите и ги изследвайте относно устойчивост. Определете типа на намерените равновесни точки.
2. Начертайте фазови портрети на системите в околност на равновесните точки. Към всяка една от изобразените фазови криви (без равновесните точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

4 Решение

1. • $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + B = 0$$

$$T^{-1}AT = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

Намиране на равновесни точки:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

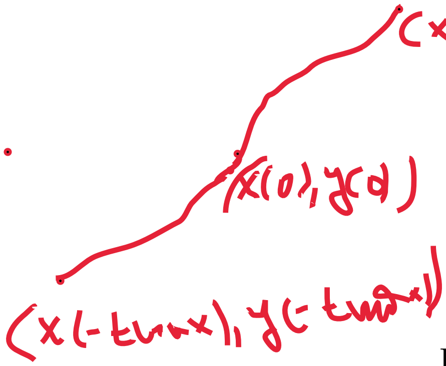
Решението на системата е (1,-1).

Намиране на собствените стойности λ_1 и λ_2 - те са корените на уравнението $\det\left(\grave{A} - \lambda E\right)$.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 * 4 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \implies \lambda_1 = -1 \text{ и } \lambda_1 = 5$$

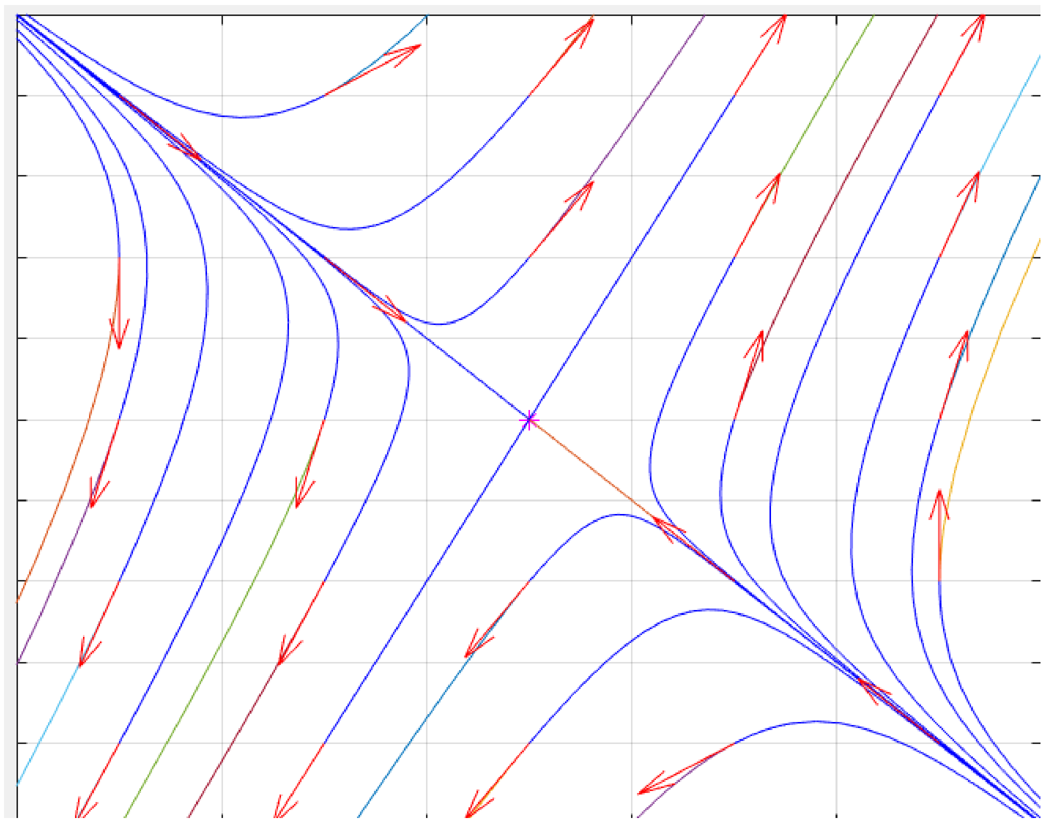
(1,-1) е седло

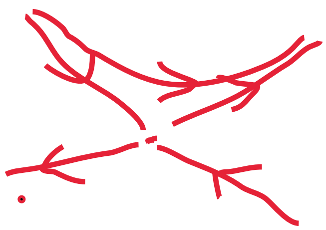


$$\frac{dx}{dt} = f, \quad \frac{dy}{dt} = g$$

$$dt = \underbrace{\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g}}$$

Равновесната точка е неустойчива (седло).



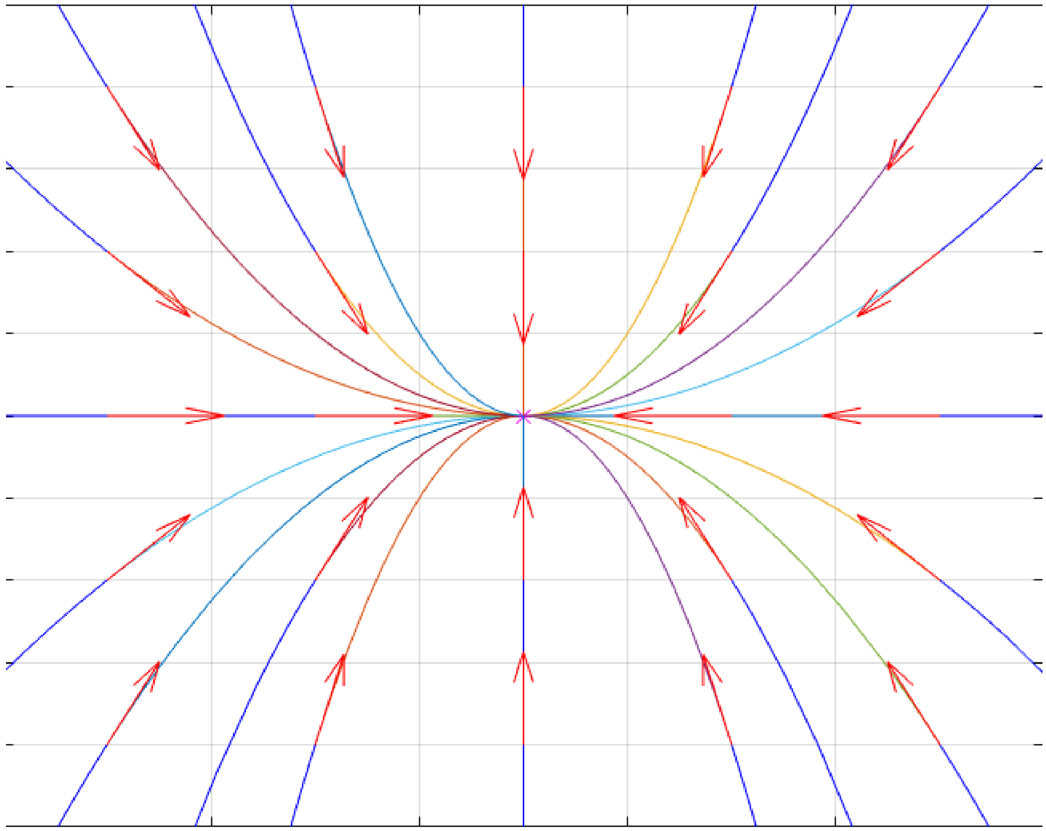


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\begin{cases} -x - 6 = 0 \\ -2y - 6 = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (-1,3).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_1 = -2$
  Равновесната точка е устойчива (устойчив възел).

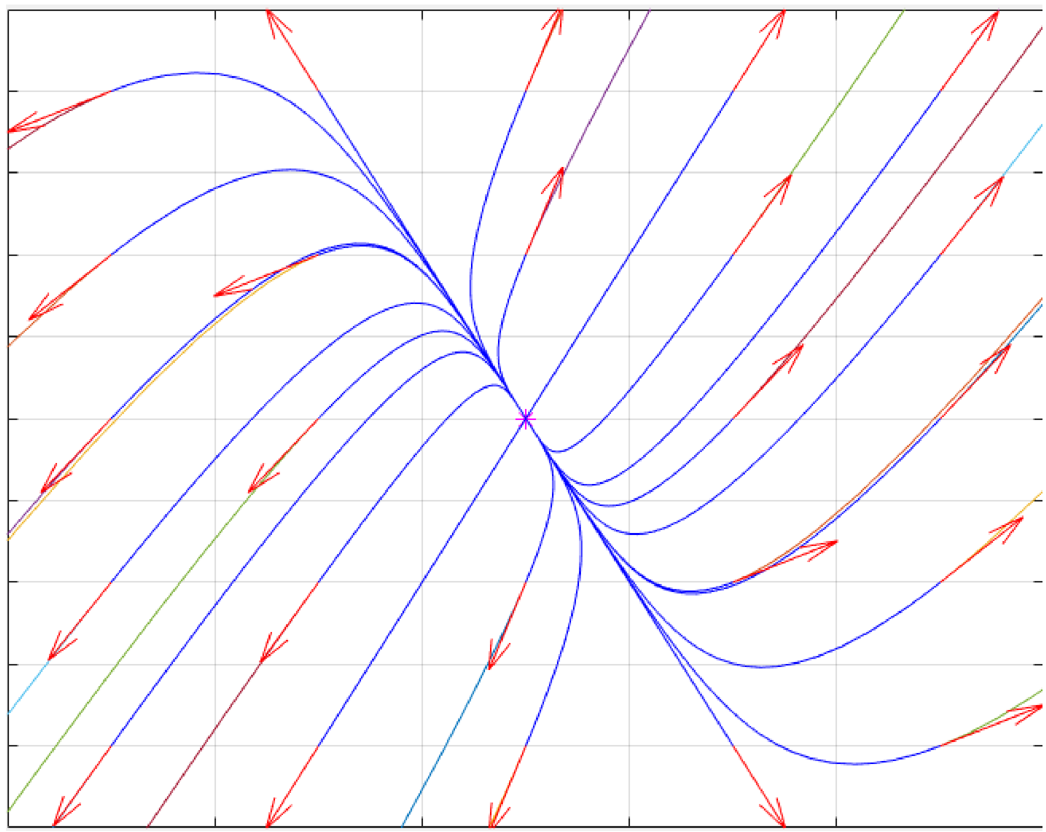


- $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\ -4\end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\begin{cases}3x + y - 3 = 0\\ 4x + 3y - 4 = 0\end{cases}$$

  Решението на системата е (1,0).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_1 = 5$
  Равновесната точка е неустойчива (неустойчив възел).

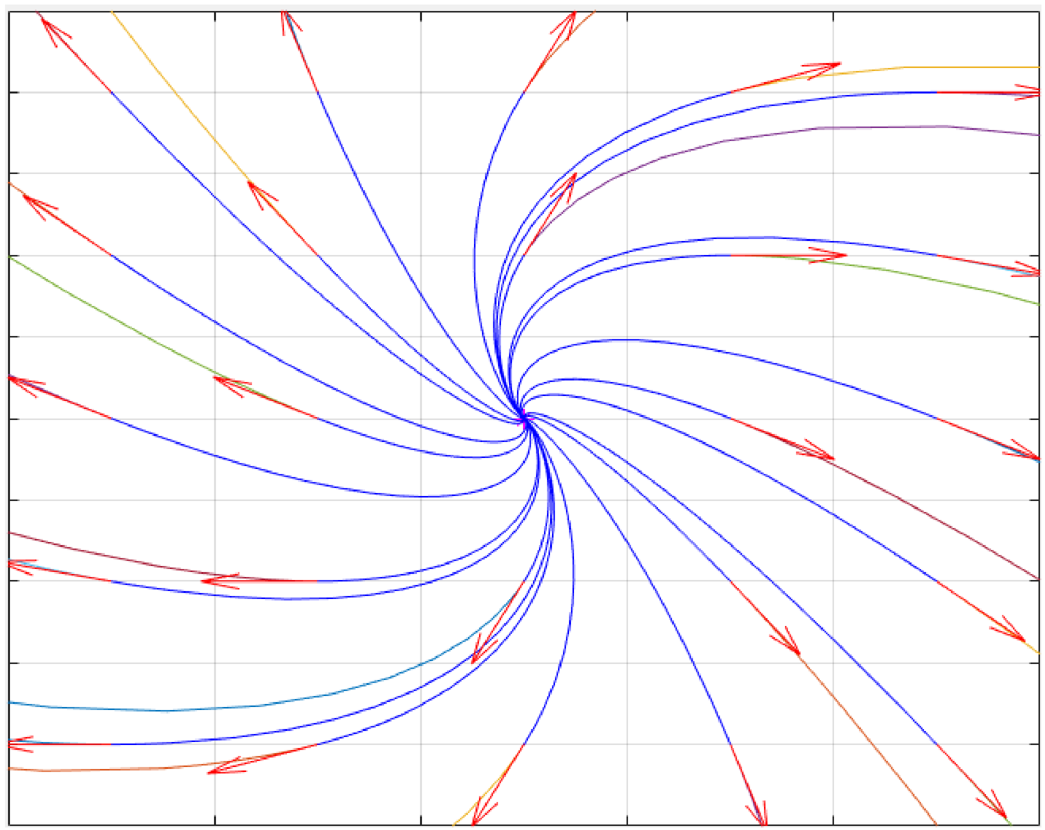


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

$$\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (1,1).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = 3 + i$ и $\lambda_1 = 3 - i$
  Равновесната точка е неустойчива (неустойчив фокус).

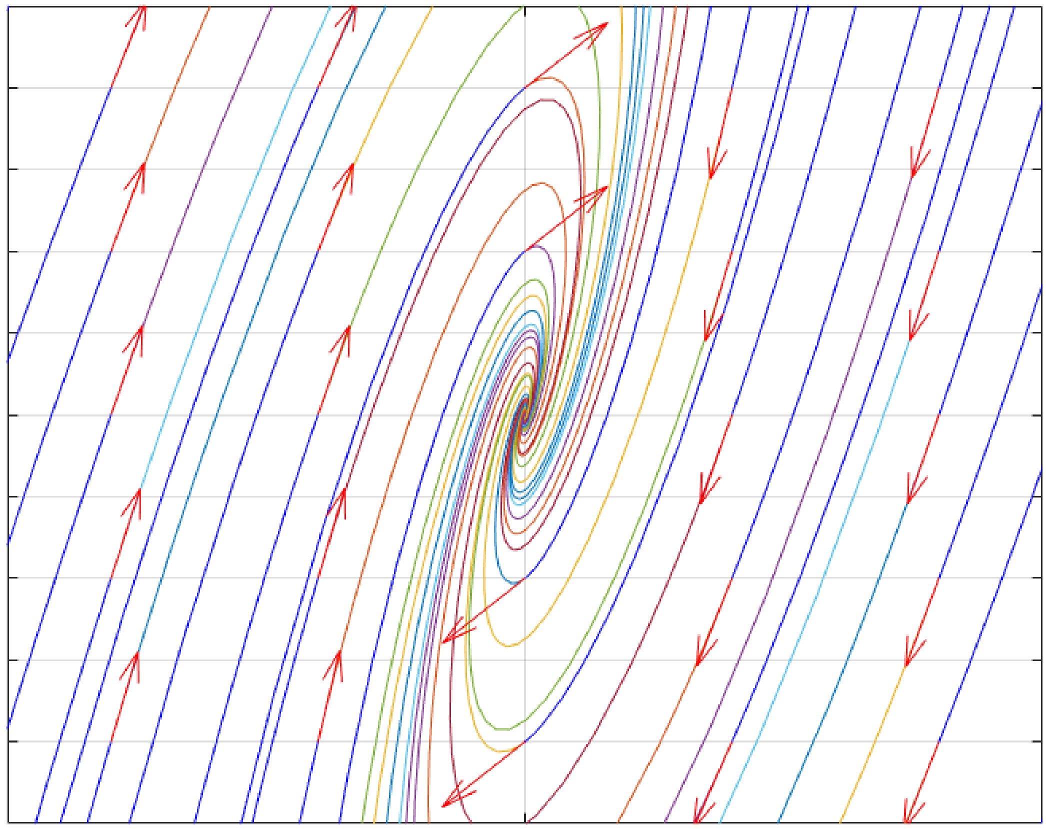


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -18 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\begin{cases} -5x + y = 0 \\ -15x + y = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (0,0).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = -2 + 3i$ и $\lambda_1 = -2 - 3i$
  Равновесната точка е устойчива (устойчив фокус).



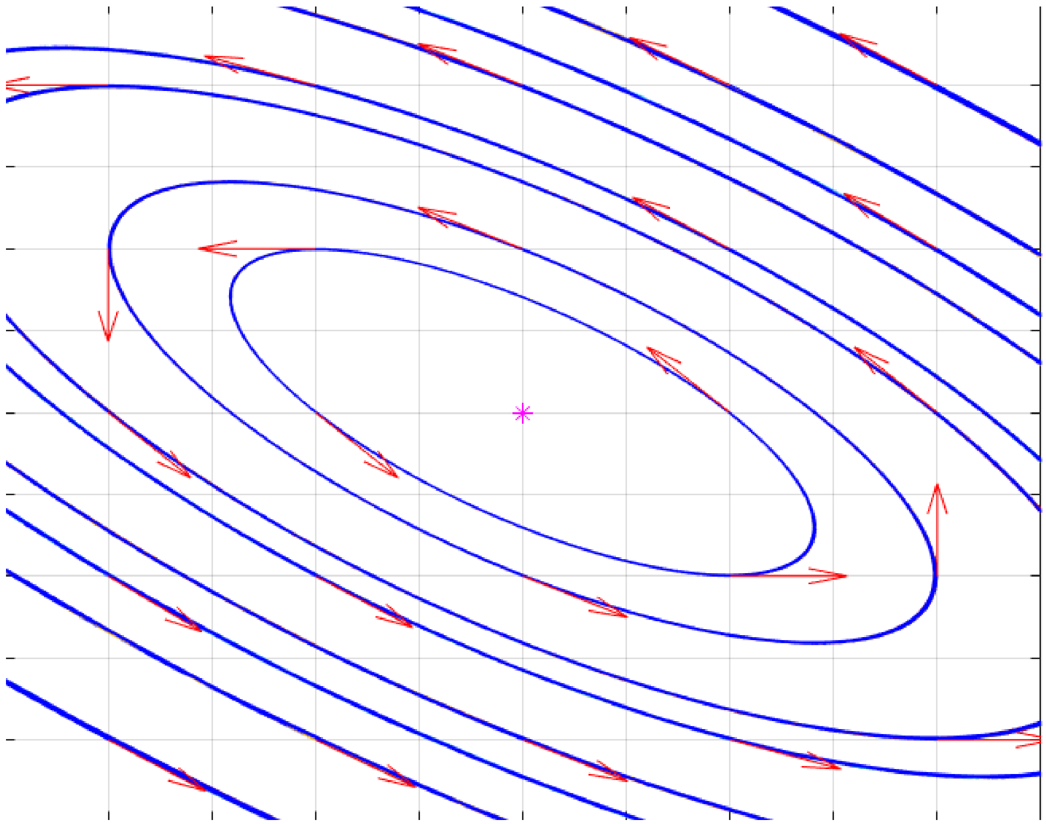
- $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\cancel{\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}}$$

  $$\left| \begin{array}{l} -2x-4y=0 \\ 2x+2y-2=0 \end{array}\right.$$

  Решението на системата е (2,-1).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_1 = -2i$
  Равновесната точка е устойчива (център).



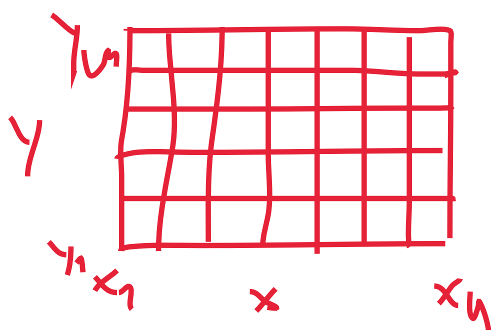
2. MATLab код

```
function phaseportreit
clc
clf
tmax = 50;
A = [1, 2; 4, 3]; b = [1; −1]; % sedlo
%A = [−1, 0; 0, −2]; b = [−1; −6]; % ustoichiv vuzel
%A = [3, 1; 4, 3]; b = [−3; −4]; % neustoichiv vuzel
%A = [4, 1; −2, 2]; b = [−5; 0]; % neustoichiv fokus
%A = [−5, 1; −18, 1]; b = [0; 0]; % ustoichiv fokus
%A = [−2, −4 ;2, 2]; b = [0; −2]; % centur

% equilibrium point
eqpoint = A \ (−b)
```

```
plot(eqpoint(1),eqpoint(2),'m*')

axis([eqpoint(1)-5, eqpoint(1)+5,eqpoint(2)-5, eqpoint(2)+5])
hold on
grid on
[T, D] = eig(A)

if imag(D(1,1)) == 0 % v tozi if se izchertavat pravite,
    % opredeleni ot sobstvenite vektori na sistemata, kogato
    % kogato sobstvenite stoinosti sa realni.
    % Togava chastite ot tezi pravi bez ravnovesnata tochka
    % sa fazovi krivi na sistemata.
    % Ravnovesnata tochka e otdelna fazova kriva.
    xx = -10 : 1 : 10;
    for j = 1 : 2
        if T(1,1) ~= 0
            plot(xx+eqpoint(1),T(2,j)/T(1,j)*xx + eqpoint(2), 'k')
        else
            plot(0*xx + eqpoint(1), xx, 'k')
        end
    end
end
```

(x(tmax), y(tmax))

```
x = eqpoint(1)-4 : 2 : eqpoint(1)+4;
y = eqpoint(2)-4 : 2 : eqpoint(2)+4;

[X, Y] = meshgrid(x,y);
```



(x(0),y(0))

(x(-tmax), y(-tmax))

```
for i = 1 : length(x)
    for k = 1 : length(y)
        [T, Z] = ode45(@rhs, [0, tmax],[X(i, k), Y(i, k)]);
        [T1, Z1] = ode45(@rhs, [0, -tmax],[X(i, k), Y(i, k)]);
        plot(Z(:, 1), Z(:,2 ), Z1(:, 1), Z1(:, 2), 'b')
    end
end

function z = rhs(~,y)
    z = A*y + b;
```

```
end

DX = A(1,1)*X + A(1,2)*Y + b(1);
DY = A(2,1)*X + A(2,2)*Y + b(2);

d=sqrt(DX.^2+DY.^2);
quiver(X,Y,DX./d,DY./d,0.5,'r')
end
```

Ако не чертаем фазовите криви, а само тангенциалните вектори (x, Ax + b) в мрежа от точки, то получаваме векторно поле на системата.

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$, $(0,0)$ е р.т; $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$

$x = c_1 e^{-t}$, $y = c_2 e^{-t}$ $\Rightarrow y = cx$

2) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}$ Р. Т: $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2(x+y) = 0 \end{cases}$

Всяка точка от права $\underline{y=-x}$ е равновесна.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + \lambda = 0$, $\underline{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1}$

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2(x+y) \end{cases}$

$\dfrac{dy}{dx} = -2 \Rightarrow d(y + 2x) = 0$

$\underline{y + 2x = c}$