

# **Отчёт по лабораторной работе 6**

**дисциплина: Математическое моделирование**

Василиса Михайловна Крючкова, НПИбд-02-18

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>14</b>

## List of Tables

# List of Figures

4.1	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп при $I(0) \leq I^*$ . . . . .	13
4.2	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп при $I(0) > I^*$ . . . . .	13

# 1 Цель работы

Построить простейшую модель эпидемии с помощью Python.

## 2 Задание

### Вариант 41

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ( $N = 5000$ ) в момент начала эпидемии ( $t = 0$ ) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции)  $I(0) = 30$ , а число здоровых людей с иммунитетом к болезни  $R(0) = 1$ . Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени  $S(0) = N - I(0) - R(0)$ .

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- 1) если  $I(0) \leq I^*$
- 2) если  $I(0) > I^*$

### 3 Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из  $N$  особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы:

- $S(t)$  — восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи;
- $I(t)$  — это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции;
- $R(t)$  — это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения  $I^*$  считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда  $I(t) > I^*$ , тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа  $S(t)$  меняется по следующему закону:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \begin{cases} -\alpha S, & I(t) > I^* \\ 0, & I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая в конце концов заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \begin{cases} -\alpha S - \beta I, & I(t) > I^* \\ -\beta I, & I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности:

- $\alpha$  — коэффициент заболеваемости
- $\beta$  — коэффициент выздоровления

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялись однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени  $t = 0$  нет особей с иммунитетом к болезни  $R(0) = 0$ , а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей  $I(0)$  и  $S(0)$  соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая:  $I(0) \leq I^*$  и  $I(0) > I^*$ .



## 4 Выполнение лабораторной работы

1. Изучила начальные условия. Популяция состоит из 5000 особей. В начальный момент времени: 30 особей инфицированы; 1 здоровая особь с иммунитетом;  $(5000 - 30 - 1)$  особей, восприимчивых к болезни. Задала коэффициент заболеваемости, равный 0,15, и коэффициент выздоровления, равный 0,02.

2. Оформила начальные условия в код на Python:

```
a = 0.15
```

```
b = 0.02
```

```
N = 5000
```

```
I0 = 30
```

```
R0 = 1
```

```
S0 = N - I0 - R0
```

```
x0 = [S0, I0, R0]
```

3. Задала условия для времени:  $t_0 = 0$  – начальный момент времени,  $t_{max} = 200$  – предельный момент времени,  $dt = 0,01$  – шаг изменения времени.

4. Добавила в программу условия, описывающие время:

```
t0 = 0
```

```
tmax = 200
```

```
dt = 0.01
```

```
t = np.arange(t0, tmax, dt)
```

5. Запрограммировала систему уравнений, соответствующую 1-ому случаю ( $I(0) \leq I^*$ ):

```
def S1(x, t):  
    dx1_0 = 0  
    dx1_1 = - b*x[1]  
    dx1_2 = b*x[1]  
    return dx1_0, dx1_1, dx1_2
```

6. Запрограммировала систему уравнений, соответствующую 2-ому случаю ( $I(0) > I^*$ ):

```
def S2(x, t):  
    dx2_0 = -a*x[0]  
    dx2_1 = a*x[0] - b*x[1]  
    dx2_2 = b*x[1]  
    return dx2_0, dx2_1, dx2_2
```

7. Запрограммировала решение систем уравнений:

```
y1 = odeint(S1, x0, t)  
y2 = odeint(S2, x0, t)
```

8. Описала построение графика для 1-ого случая ( $I(0) \leq I^*$ ):

```
plt.plot(t, y1[:,0], label='S(t)')  
plt.plot(t, y1[:,1], label='I(t)')  
plt.plot(t, y1[:,2], label='R(t)')  
plt.title('I(0) <= I*')  
plt.legend()
```

9. Описала построение графика для 2-ого случая ( $I(0) > I^*$ ):

```
plt.plot(t, y2[:,0], label='S(t)')
plt.plot(t, y2[:,1], label='I(t)')
plt.plot(t, y2[:,2], label='R(t)')
plt.title('I(0) > I*')
plt.legend()
```

10. Собрала код программы воедино и получила следующее:

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

a = 0.15
b = 0.02

N = 5000
I0 = 30
R0 = 1
S0 = N - I0 - R0
x0 = [S0, I0, R0]

t0 = 0
tmax = 200
dt = 0.01
t = np.arange(t0, tmax, dt)

def S1(x, t):
    dx1_0 = 0
    dx1_1 = - b*x[1]
    dx1_2 = b*x[1]
```

```

    return dx1_0, dx1_1, dx1_2

def S2(x, t):
    dx2_0 = -a*x[0]
    dx2_1 = a*x[0] - b*x[1]
    dx2_2 = b*x[1]
    return dx2_0, dx2_1, dx2_2

y1 = odeint(S1, x0, t)
y2 = odeint(S2, x0, t)

plt.plot(t, y1[:,0], label='S(t)')
plt.plot(t, y1[:,1], label='I(t)')
plt.plot(t, y1[:,2], label='R(t)')
plt.title('I(0) <= I*')
plt.legend()

plt.plot(t, y2[:,0], label='S(t)')
plt.plot(t, y2[:,1], label='I(t)')
plt.plot(t, y2[:,2], label='R(t)')
plt.title('I(0) > I*')
plt.legend()

```

11. Получила следующие динамики изменения числа людей из каждой группы (см. рис. 4.1 и 4.2):

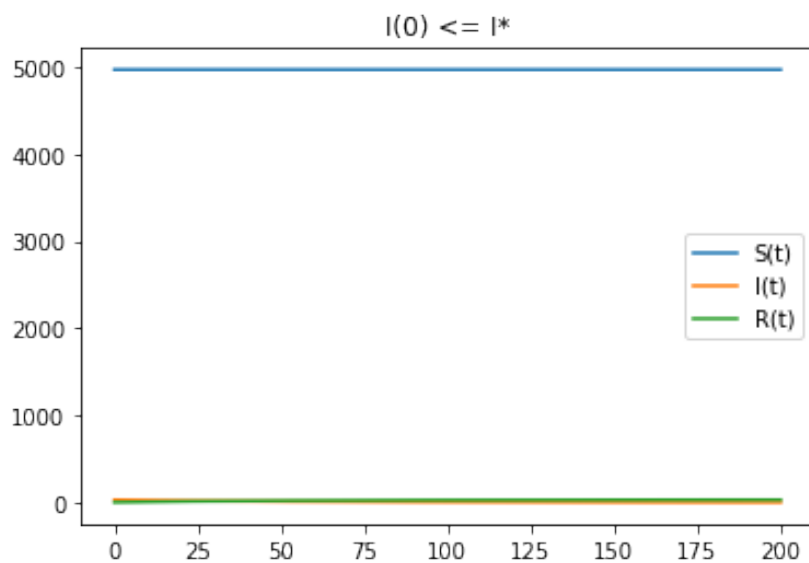


Figure 4.1: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп при  $I(0) \leq I^*$

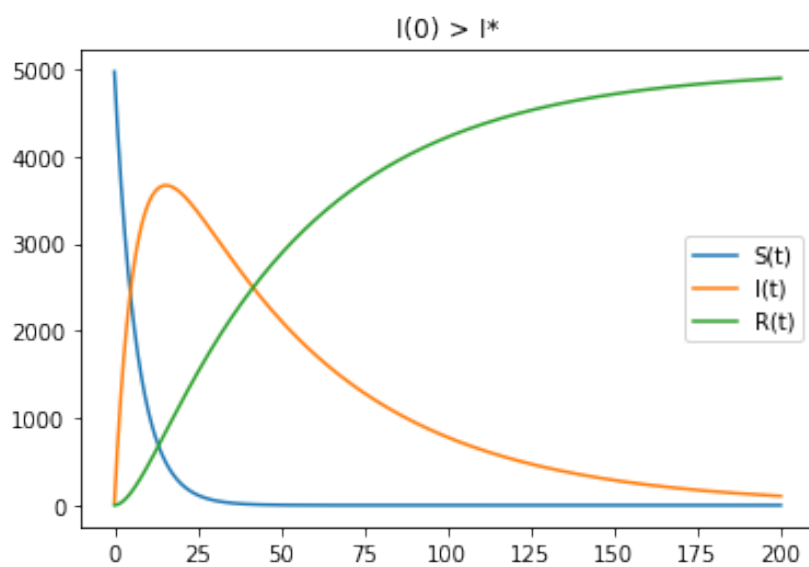


Figure 4.2: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп при  $I(0) > I^*$

## 5 Выводы

Построила простейшую модель эпидемии с помощью Python.

В обоих случаях люди острова смогут победить болезнь.