

# **Отчёт по лабораторной работе 7**

**дисциплина: Математическое моделирование**

Василиса Михайловна Крючкова, НПИбд-02-18

# Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Цель работы</b>                             | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Задание</b>                                 | <b>6</b>  |
| <b>3</b> | <b>Теоретическое введение</b>                  | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Выполнение лабораторной работы</b>          | <b>9</b>  |
| <b>5</b> | <b>Выводы</b>                                  | <b>17</b> |
| <b>6</b> | <b>Ответы на вопросы к лабораторной работе</b> | <b>18</b> |

## List of Tables

# List of Figures

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Графики распространения рекламы для 1, 2 и 3 случаев . . . . . | 16 |
| 4.2 | Графики распространения рекламы для 4 и 5 заданий . . . . .    | 16 |
| 6.1 | Модель типа модели Мальтуса . . . . .                          | 19 |
| 6.2 | Уравнение логистической кривой . . . . .                       | 20 |

# 1 Цель работы

Построить модель рекламной кампании с помощью Python.

## 2 Задание

### Вариант 41

Постройте график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

- $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.205 + 0.000023n(t))(N - n(t))$
- $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.0000305 + 0.24n(t))(N - n(t))$
- $\frac{\partial n}{\partial t} = (0.05\sin(t) + 0.03\cos(4t)n(t))(N - n(t))$

При этом объем аудитории  $N = 2300$ , в начальный момент о товаре знает 20 человек. Для случая 2 определите в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

1. Построить график распространения рекламы о салоне красоты.
2. Сравнить эффективность рекламной кампании при  $\alpha_1(t) > \alpha_2(t)$  и  $\alpha_1(t) < \alpha_2(t)$ .
3. Определить в какой момент времени эффективность рекламы будет иметь максимально быстрый рост.
4. Построить решение, если учитывать вклад только платной рекламы.
5. Построить решение, если предположить, что информация о товаре распространяется только путем «сарафанного радио», сравнить оба решения.

### 3 Теоретическое введение

Организуется рекламная кампания нового товара или услуги. Необходимо, чтобы прибыль будущих продаж с избытком покрывала издержки на рекламу. Вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, возрастает и прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар станет бесполезным.

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени  $t$  из числа потенциальных покупателей  $N$  знает лишь  $n$  покупателей. Для ускорения сбыта продукции запускается реклама по радио, телевидению и других средств массовой информации. После запуска рекламной кампании информация о продукции начнет распространяться среди потенциальных покупателей путем общения друг с другом. Таким образом, после запуска рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции людей пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей о нем не знающих.

Модель рекламной кампании описывается следующими величинами. Считаем, что

$\frac{\partial n}{\partial t}$  — скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых его купить;

$t$  — время, прошедшее с начала рекламной кампании;

$n(t)$  — число уже информированных клиентов. Эта величина пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем. Это описывается следующим образом:

$$\alpha_1(t)(N - n(t))$$

$N$  — общее число потенциальных платежеспособных покупателей

$\alpha_1(t) > 0$  — характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от затрат на рекламу в данный момент времени).

Помимо этого, узнавшие о товаре потребители также распространяют полученную информацию среди потенциальных покупателей, не знающих о нем (в этом случае работает т.н. сарафанное радио). Этот вклад в рекламу описывается величиной

$$\alpha_2(t)n(t)(N - n(t))$$

эта величина увеличивается с увеличением потребителей узнавших о товаре.

Математическая модель распространения рекламы описывается уравнением:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)n(t))(N - n(t))$$



## 4 Выполнение лабораторной работы

1. Изучила начальные условия. 20 людей знают о товаре в начальный момент времени. Максимальное количество людей, которых может заинтересовать товар, – 2300.

2. Оформила начальные условия в код на Python:

```
x0 = 20  
N = 2300
```

3. Задала условия для времени:  $t_0 = 0$  – начальный момент времени,  $t_{max} = 12$  – предельный момент времени,  $dt = 0,01$  – шаг изменения времени.

4. Добавила в программу условия, описывающие время:

```
t0 = 0  
tmax = 12  
dt = 0.01  
t = np.arange(t0, tmax, dt)
```

5. Запрограммировала функцию, отвечающую за платную рекламу, для 1, 2 и 3 случаев:

```
def k1(t):  
    g = 0.205  
    return g
```

```
def k2(t):  
    g = 0.0000305  
    return g
```

```
def k3(t):  
    g = 0.05*np.sin(t)  
    return g
```

6. Запрограммировала функцию, описывающую сарафанное радио, для 1, 2 и 3 случаев:

```
def p1(t):  
    v = 0.000023  
    return v
```

```
def p2(t):  
    v = 0.24  
    return v
```

```
def p3(t):  
    v = 0.03*np.cos(4*t)  
    return v
```

7. Запрограммировала уравнения, описывающие распространение рекламы, для 1, 2 и 3 случаев:

```
def f1(x, t):  
    xd = (k1(t) + p1(t)*x)*(N - x)  
    return xd
```

```
def f2(x, t):
```

```

xd = (k2(t) + p2(t)*x)*(N - x)
return xd

```

```

def f3(x, t):
    xd = (k3(t) + p3(t)*x)*(N - x)
    return xd

```

В 1-ом случае  $\alpha_1(t) > \alpha_2(t)$ , а во 2-ом –  $\alpha_1(t) < \alpha_2(t)$ .

8. Добавила в программу функцию, отвечающую за платную рекламу, для 4-ого задания:

```

def k4(t):
    g = 0.009
    return g

```

9. Добавила в программу функцию, описывающую сарафанное радио, для 5-ого задания:

```

def p4(t):
    v = 0.0009
    return v

```

10. Запрограммировала уравнение, учитывающие вклад только платной рекламы, для 4-ого задания:

```

def f4(x, t):
    xd = k4(t)*(N - x)
    return xd

```

11. Запрограммировала уравнение, описывающее распространение информации только путем “сарафанного радио”, для 5-ого задания:

```
def f5(x, t):
    xd = (p4(t)*x)*(N - x)
    return xd
```

12. Запрограммировала решение всех уравнений:

```
x1 = odeint(f1, x0, t)
x2 = odeint(f2, x0, t)
x3 = odeint(f3, x0, t)
x4 = odeint(f4, x0, t)
x5 = odeint(f5, x0, t)
```

13. Описала построение графиков для 1, 2 и 3 случаев:

```
plt.plot(t, x1, label='Случай 1')
plt.plot(t, x2, label='Случай 2')
plt.plot(t, x3, label='Случай 3')
plt.legend()
```

14. Описала построение графиков для 4 и 5 заданий:

```
plt.plot(t, x4, label='Сарафанное радио = 0')
plt.plot(t, x5, label='Платная реклама = 0')
plt.legend()
```

15. Запрограммировала определение момента времени, в который эффективность рекламы будет иметь максимально быстрый рост:

```
t[np.argmax(x2[1:].transpose()/t[1:])] + 1]
```

16. Собрала код программы воедино и получила следующее:

```
import math
import numpy as np
```

```

from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

x0 = 20
N = 2300

t0 = 0
tmax = 12
dt = 0.01
t = np.arange(t0, tmax, dt)

def k1(t):
    g = 0.205
    return g

def k2(t):
    g = 0.0000305
    return g

def k3(t):
    g = 0.05*np.sin(t)
    return g

def k4(t):
    g = 0.009
    return g

def p1(t):
    v = 0.000023

```

```

        return v

def p2(t):
    v = 0.24
    return v

def p3(t):
    v = 0.03*np.cos(4*t)
    return v

def p4(t):
    v = 0.0009
    return v

def f1(x, t):
    xd = (k1(t) + p1(t)*x)*(N - x)
    return xd

def f2(x, t):
    xd = (k2(t) + p2(t)*x)*(N - x)
    return xd

def f3(x, t):
    xd = (k3(t) + p3(t)*x)*(N - x)
    return xd

def f4(x, t):
    xd = k4(t)*(N - x)
    return xd

```

```

def f5(x, t):
    xd = (p4(t)*x)*(N - x)
    return xd

x1 = odeint(f1, x0, t)
x2 = odeint(f2, x0, t)
x3 = odeint(f3, x0, t)
x4 = odeint(f4, x0, t)
x5 = odeint(f5, x0, t)

plt.plot(t, x1, label='Случай 1')
plt.plot(t, x2, label='Случай 2')
plt.plot(t, x3, label='Случай 3')
plt.legend()

plt.plot(t, x4, label='Сарафанное радио = 0')
plt.plot(t, x5, label='Платная реклама = 0')
plt.legend()

t[np.argmax(x2[1:].transpose())/t[1:]] + 1]

```

17. Получила следующие графики распространения рекламы для 1, 2 и 3 случаев (см. рис. 4.1):

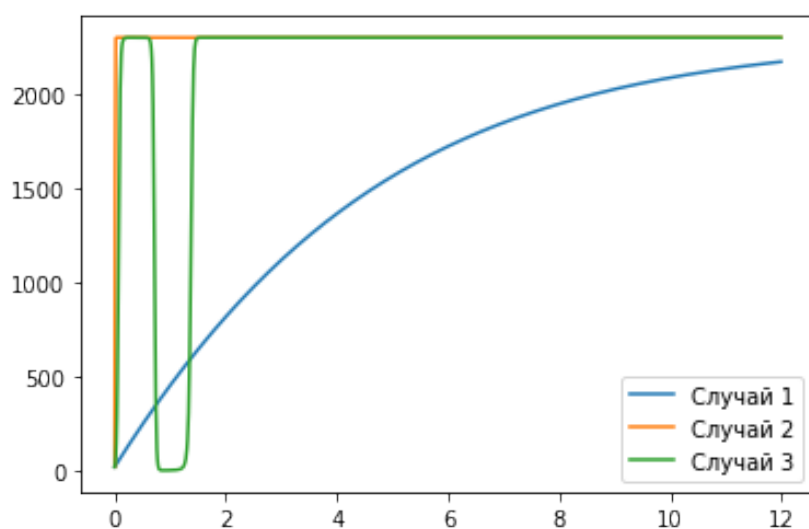


Figure 4.1: Графики распространения рекламы для 1, 2 и 3 случаев

18. Получила следующие графики для 4 и 5 заданий (см. рис. 4.2):

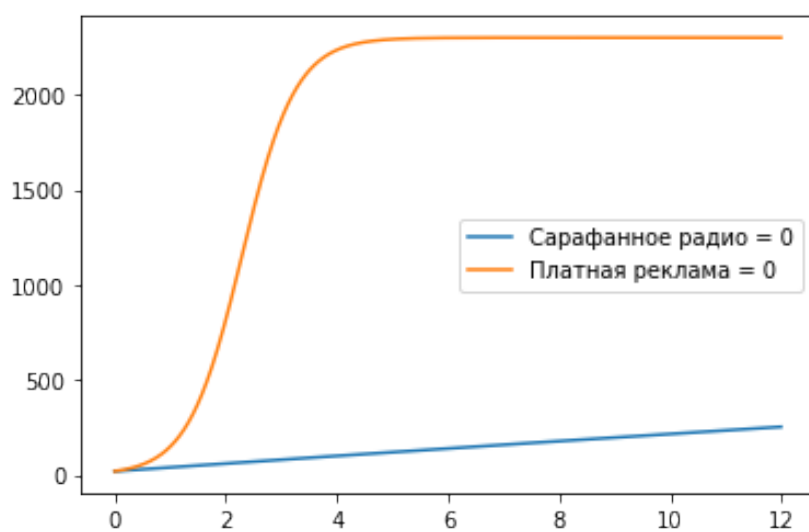


Figure 4.2: Графики распространения рекламы для 4 и 5 заданий



## 5 Выводы

Построила модель рекламной кампании с помощью Python.

Выяснила, что рекламная кампания для случая, когда  $\alpha_1(t) < \alpha_2(t)$  (2 случай), эффективнее, чем кампания для случая, когда  $\alpha_1(t) > \alpha_2(t)$  (1 случай).

Определила, что в момент времени  $t = 0,01$  эффективность рекламы будет иметь максимально быстрый рост.

Выяснила, что реклама только путем “сарафанного радио” эффективнее только платной рекламы.

## 6 Ответы на вопросы к лабораторной работе

1. Записать модель Мальтуса (дать пояснение, где используется данная модель)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN$$

где

- $N$  – исходная численность населения
- $r$  – коэффициент пропорциональности, для которого  $r = b - d$ , где
  - $b$  – коэффициент рождаемости
  - $d$  – коэффициент смертности
- $t$  – время

Модель используется в экологии для расчета изменения популяции особей животных.

2. Записать уравнение логистической кривой (дать пояснение, что описывает данное уравнение)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

- $r$  – характеризует скорость роста (размножения)
- $K$  – поддерживающая ёмкость среды (то есть, максимально возможная численность популяции)

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях;
- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

3. На что влияет коэффициент  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  в модели распространения рекламы

$\alpha_1(t)$  – интенсивность рекламной кампании, зависящая от затрат

$\alpha_2(t)$  – интенсивность рекламной кампании, зависящая от сарафанного радио

4. Как ведет себя рассматриваемая модель при  $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$

При  $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$  получается модель типа модели Мальтуса (см. рис. 6.1):

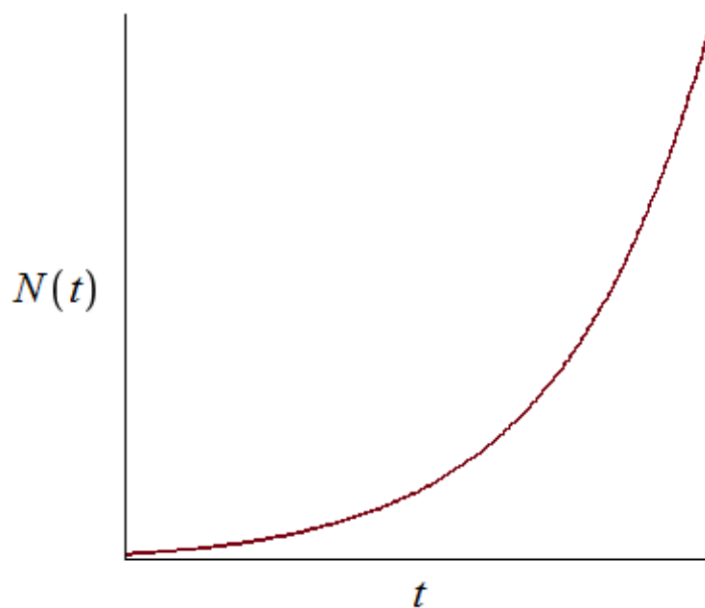


Figure 6.1: Модель типа модели Мальтуса

5. Как ведет себя рассматриваемая модель при  $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$

При  $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$  получаем уравнение логистической кривой (см. рис. 6.2):

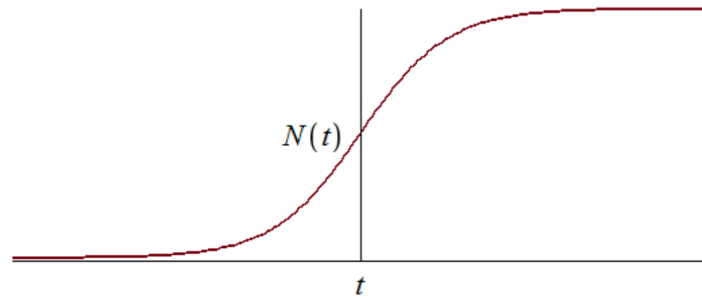


Figure 6.2: Уравнение логистической кривой