Отчёт по лабораторной работе 8

дисциплина: Математическое моделирование

Василиса Михайловна Крючкова, НПИбд-02-18

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Построить модель конкуренции двух фирм с помощью Python.

2 Задание

Вариант 41

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом). Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \widetilde{p}_1^2 N q}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \widetilde{p}_2^2 N q}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \widetilde{p}_1^2 \tau_2^2 \widetilde{p}_2^2 N q}, c_1 = \frac{p_{cr} - \widetilde{p}_1}{\tau_1^2 \widetilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \widetilde{p}_2}{\tau_2^2 \widetilde{p}_2^2}$$

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.00021) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$M_{1.0} = 5.5, M_{2.0} = 5, p_{cr} = 35, N = 41, q = 1, \tau_1 = 14, \tau_2 = 7, \tilde{p}_1 = 6.5, \tilde{p}_2 = 15$

Замечание: Значения $p_{cr}, \tilde{p}_{1,2}, N$ указаны в тысячах единиц, а значения $M_{1,2}$ указаны в млн единиц.

Обозначения:

N – число потребителей производимого продукта;

τ – длительность производственного цикла;

p – рыночная цена товара;

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции;

q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени;

$\theta = \frac{t}{c_1}$ – безразмерное время.

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

3. Найдите стационарное состояние системы для первого случая.

3 Теоретическое введение

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия.

τ – длительность производственного цикла.

p – рыночная цена товара.

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

κ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}}), \tag{1}$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = \frac{Sq}{k}$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa \tag{2}$$

Уравнение для рыночной цены р представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \tag{3}$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть предложению), а второй член – спросу.

Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0 \tag{4}$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены р равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}) \tag{5}$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\delta p})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $\frac{\partial M}{\partial t}$ = 0

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \tag{7}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2} \tag{8}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения М равны

$$\tilde{M}_{+} = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \tilde{M}_{-} = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})} \tag{9}$$

Первое состояние $\tilde{M}_{+}$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\tilde{M}_{-}$ неустойчиво, так что при $M < \tilde{M}_{-}$ оборотные средства падают ($\partial M/\partial t < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\tilde{M}_{-}$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: δ = 1, а параметр τ будем считать временем цикла с учётом сказанного.

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей какимлибо иным способом).

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_2 \end{cases} \tag{10}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме соответственно. Величины N_1 и N_2 – числа потребителей, приобревших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p. Тогда

$$\begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = -N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = -N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \end{cases} \tag{11}$$

где $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}) - \kappa_2 \end{cases} \tag{12}$$

Уравнение для цены по аналогии с (3)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \tag{13}$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = p_{cr}(1 - \frac{1}{Nq}(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2})) \tag{14}$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - bM_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - bM_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \end{cases} \tag{15}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2} \tag{16}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (κ_1, κ_2) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1 \theta$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases} \tag{17}$$

4 Выполнение лабораторной работы

1. Изучила начальные условия. Начальные значения объема оборотных средств первой и второй фирмы соответственно 5,5 и 5 млн единиц. Критическая стоимость продукта 35 тыс. единиц. 41 тыс. потребителей производимого продукта. Максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени равна 1. Длительность производственного цикла первой фирмы равна 14, а второй – 7. Себестоимость продукта первой фирмы составляет 6,5, а второй – 15.

2. Оформила начальные условия в код на Python:

```
M10 = 5.5
M20 = 5
x0=[M10, M20]

pcr = 35
N = 41
q = 1

tau1 = 14
tau2 = 7

p1 = 6.5
p2 = 15
```

3. Задала условия для времени: $t_0 = 0$ – начальный момент времени, $t_{max} = 30$ – предельный момент времени, $dt = 0,01$ – шаг изменения времени.

4. Добавила в программу условия, описывающие время:

```
t0 = 0
tmax = 30
dt = 0.01
t = np.arange(t0, tmax, dt)
```

5. Запрограммировала вычисление коэффициентов a_1, a_2, b, c_1, c_2 для последующего использования в уравнениях:

```
a1 = pcr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
a2 = pcr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
b = pcr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)
c1 = (pcr-p1)/(tau1*p1)
c2 = (pcr-p2)/(tau2*p2)
```

6. Запрограммировала функцию, описывающую систему уравнений для 1-ого случая:

```
def S1(x, t):
    dx1 = (c1/c1)*x[0] - (a1/c1)*x[0]*x[0] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    return dx1, dx2
```

7. Запрограммировала функцию, описывающую систему уравнений для 2-ого случая:

```
def S2(x, t):
    dx1 = x[0] - (b/c1 + 0.00021)*x[0]*x[1] - (a1/c1)*x[0]*x[0]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1]
    return dx1, dx2
```

8. Запрограммировала решение всех систем уравнений:

```
y1 = odeint(S1, x0, t)
y2 = odeint(S2, x0, t)
```

9. Для 1-ого случая нашла стационарное состояние системы.

9.1. Приравняла каждое уравнение системы к 0 и получила следующие корни:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} M_{1.1} = 0, \\ M_{1.2} = \dfrac{c_1 a_2 - b c_2}{a_1 a_2 - b^2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} M_{2.1} = 0, \\ M_{2.2} = \dfrac{a_1 c_2 - b c_1}{a_1 a_2 - b^2} \end{array}\right. \end{cases}$$

9.2. Отбросила корни $M_{1.1} = 0, M_{2.1} = 0$, т. к. стационарное состояние не может быть равно 0.

9.3. Получила следующее решение:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{c_1 a_2 - b c_2}{a_1 a_2 - b^2} \\ M_2 = \frac{a_1 c_2 - b c_1}{a_1 a_2 - b^2} \end{cases}$$

9.4. Запрограммировала подсчет стационарного состояния:

```
M1 = (a2*c1-b*c2)/(a1*a2-b*b)
M2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b)
print(M1, "; ", M2)
```

10. Описала построение графиков и отметку стационарного состояния для 1-ого случая:

```
plt.plot(t, y1[:,0], label='Фирма 1')
plt.plot(t, y1[:,1], label='Фирма 2')
plt.hlines(M1, t0, tmax, colors="darkgrey", linestyles='dashed', label='M
plt.hlines(M2, t0, tmax, colors="dimgrey", linestyles='dashed', label='M2
```

```
plt.legend(loc=4)
plt.grid()
```

11. Описала построение графиков для 2-ого случая:

```
plt.plot(t, y2[:,0], label='Фирма 1')
plt.plot(t, y2[:,1], label='Фирма 2')
plt.legend()
plt.grid()
```

12. Собрала код программы воедино и получила следующее:

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

M10 = 5.5
M20 = 5
x0=[M10, M20]

pcr = 35
N = 41
q = 1

tau1 = 14
tau2 = 7

p1 = 6.5
p2 = 15
```

```
t0 = 0
tmax = 30
dt = 0.01
t = np.arange(t0, tmax, dt)

a1 = pcr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
a2 = pcr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
b = pcr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)
c1 = (pcr-p1)/(tau1*p1)
c2 = (pcr-p2)/(tau2*p2)

def S1(x, t):
    dx1 = (c1/c1)*x[0] - (a1/c1)*x[0]*x[0] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    return dx1, dx2

def S2(x, t):
    dx1 = x[0] - (b/c1 + 0.00021)*x[0]*x[1] - (a1/c1)*x[0]*x[0]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1]
    return dx1, dx2

y1 = odeint(S1, x0, t)
y2 = odeint(S2, x0, t)

M1 = (a2*c1-b*c2)/(a1*a2-b*b)
M2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b)
print(M1, "; ", M2)

plt.plot(t, y1[:,0], label='Фирма 1')
```

```
plt.plot(t, y1[:,1], label='Фирма 2')
plt.hlines(M1, t0, tmax, colors="darkgrey", linestyles='dashed', label='M
plt.hlines(M2, t0, tmax, colors="dimgrey", linestyles='dashed', label='M2
plt.legend(loc=4)
plt.grid()

plt.plot(t, y2[:,0], label='Фирма 1')
plt.plot(t, y2[:,1], label='Фирма 2')
plt.legend()
plt.grid()
```

13. Получила следующее значение стационарного состояния для 1-ого случая:

$M_1 = 3037.876904022589, M_2 = 2459.6331509595434$

14. Получила следующие графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для 1-ого случая (см. рис. 4.1):

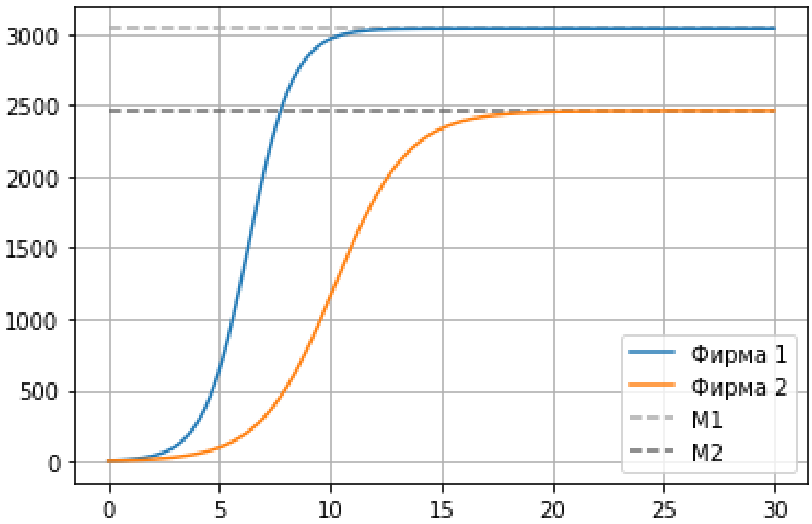

Figure 4.1: Изменение оборотных средств. 1-ый случай

15. Получила следующие графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для 2-ого случая (см. рис. 4.2):

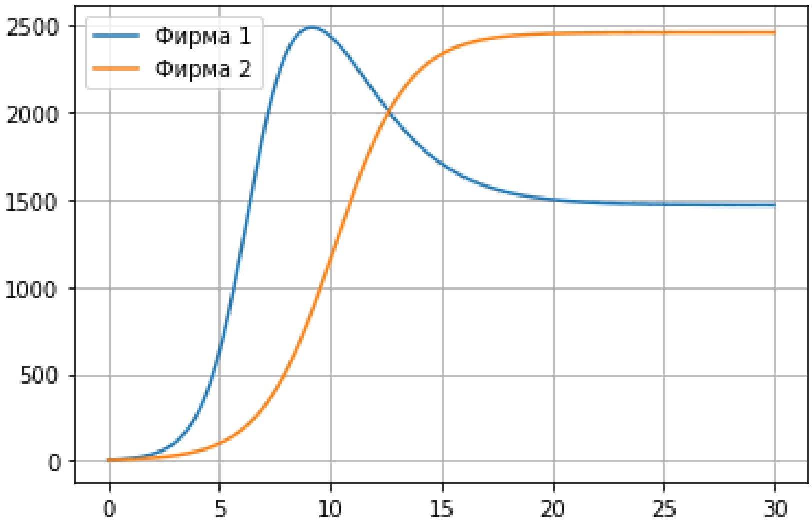

Figure 4.2: Изменение оборотных средств. 2-ой случай

5 Выводы

Построила модель конкуренции двух фирм с помощью Python.

Нашла стационарное состояние системы для 1-ого случая.

В 1-ом случае фирма 1 будет иметь по итогу больше оборотных средств, чем фирма 2.

Во 2-ом случае фирма 1 стремительно достигнет мимолетного успеха, а затем окажется в проигрыше: фирма 2 будет иметь по итогу больше оборотных средств, чем фирма 1.