

УДК 514.122

ББК 22.151.5

И 46

Учебник удостоен  
Государственной премии СССР за 1980 год

Ильин В. А., Позняк Э. Г. **Аналитическая геометрия:** Учеб.  
Для вузов. — 7-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 224 с. — (Курс  
высшей математики и математической физики.) — ISBN 5-9221-0511-6.

Учебник написан на основе опыта преподавания авторов в Московском  
государственном университете им. М.В. Ломоносова. Первое издание вышло  
в 1968 г., второе (1971 г.) и третье (1981 г.) издания стереотипные, четвертое  
издание (1988 г.) было дополнено материалом, посвященным линейным и  
проективным преобразованиям.

Для студентов физических и физико-математических факультетов и  
факультетов вычислительной математики и кибернетики университетов.

Ил. 85.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов серии .....	9
Предисловие .....	10
Введение .....	11
<b>Г л а в а 1. Системы координат. Простейшие задачи аналитической геометрии .....</b>	<b>13</b>
§ 1. Декартовы координаты на прямой .....	13
1. Направленные отрезки на оси (13). 2. Линейные операции над направленными отрезками. Основное тождество (14). 3. Декартовы координаты на прямой (15).	
§ 2. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве .....	16
1. Декартовы координаты на плоскости (16). 2. Декартовы координаты в пространстве (16).	
§ 3. Простейшие задачи аналитической геометрии .....	17
1. Понятие направленного отрезка в пространстве. Проекция направленного отрезка на ось (17). 2. Расстояние между двумя точками (18). 3. Деление отрезка в данном отношении (19). 4. Барицентрические координаты (21).	
§ 4. Полярные, цилиндрические и сферические координаты .....	22
1. Полярные координаты (22). 2. Цилиндрические координаты (23). 3. Сферические координаты (24).	
Дополнение к главе 1. Определители второго и третьего порядков .....	24
1. Понятие матрицы и определителя второго порядка (24). 2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными (25). 3. Определители третьего порядка (28). 4. Свойства определителей (29). 5. Алгебраические дополнения и миноры (31). 6. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, отличным от нуля (34). 7. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными (36). 8. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными (38). 9. Неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, равным нулю (39).	
<b>Г л а в а 2. Векторная алгебра .....</b>	<b>42</b>
§ 1. Понятие вектора и линейные операции над векторами .....	42
1. Понятие вектора (42). 2. Линейные операции над векторами (43). 3. Понятие линейной зависимости векторов (48). 4. Линейные комбинации двух векторов (49). 5. Линейные комбинации трех векторов (50). 6. Линейная зависимость четырех векторов (52). 7. Понятие базиса. Аффинные координаты (53). 8. Проекция вектора на ось и ее свойства (55). 9. Декартова прямоугольная система координат как частный случай аффинной системы координат (57).	
§ 2. Скалярное произведение двух векторов .....	59
1. Определение скалярного произведения (59). 2. Геометрические свойства скалярного произведения (60). 3. Алгебраические свойства скалярного произведения (61). 4. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах (62).	
§ 3. Векторное и смешанное произведение векторов .....	63
1. Правые и левые тройки векторов и системы координат (63). 2. Определение векторного произведения двух векторов (64). 3. Геометрические свойства векторного произведения (65). 4. Смешанное произведение трех векторов (67). 5. Алгебраические свойства векторного произведения (68). 6. Выражение векторного произведения в декартовых координатах (72). 7. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах (73). 8. Двойное векторное произведение (74).	

<b>Г л а в а 3. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости и в пространстве .....</b>	<b>76</b>
§ 1. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости .....	76
§ 2. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве .....	79
1. Общие формулы преобразования (79). 2. Выяснение геометрического смысла. Углы Эйлера (81).	
§ 3. Линейные преобразования .....	83
1. Понятие линейных преобразований плоскости (83). 2. Аффинные преобразования плоскости (84). 3. Основное свойство аффинных преобразований плоскости (86). 4. Основной инвариант аффинного преобразования плоскости (88). 5. Аффинные преобразования пространства (89). 6. Ортогональные преобразования (90).	
§ 4. Проективные преобразования .....	92
<b>Г л а в а 4. Уравнение линии на плоскости. Уравнения поверхности и линии в пространстве .....</b>	<b>95</b>
§ 1. Уравнение линии на плоскости .....	95
1. Понятие об уравнении линии (95). 2. Параметрическое представление линии (96). 3. Уравнение линии в различных системах координат (98). 4. Два типа задач, связанных с аналитическим представлением линии (100). 5. Классификация плоских линий (100). 6. О пересечении двух линий (102).	
§ 2. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве .....	102
1. Понятие об уравнении поверхности (102). 2. Уравнения линии в пространстве (104). 3. Цилиндрические и конические поверхности (104). 4. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве (107). 5. Классификация поверхностей (108). 6. О пересечении поверхностей и линий в пространстве (109). 7. Заключительные замечания (110).	
<b>Г л а в а 5. Линейные образы .....</b>	<b>111</b>
§ 1. Различные виды уравнения прямой на плоскости .....	111
1. Общее уравнение прямой (111). 2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках (113). 3. Каноническое уравнение прямой (114). 4. Параметрические уравнения прямой (115). 5. Прямая с угловым коэффициентом (115). 6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (116). 7. Нормированное уравнение прямой. Отклонение точки от прямой (118). 8. Уравнение пучка прямых (121).	
§ 2. Некоторые задачи на прямую линию на плоскости .....	123
1. Нахождение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и составляющей заданный угол $\varphi$ с данной прямой $y = k_1x + b_1$ (123). 2. Нахождение биссектрис углов, образованных данными прямыми (124). 3. Условия, при которых данная прямая пересекает данный отрезок $AB$ (124). 4. Определение местоположения данной точки $M$ и начала координат $O$ относительно углов, образованных двумя данными прямыми (124). 5. Условие пересечения трех прямых в одной точке (125). 6. Нахождение прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых и удовлетворяющей еще одному условию (126).	
§ 3. Различные виды уравнения плоскости .....	127
1. Общее уравнение плоскости (127). 2. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках (129). 3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей (130). 4. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой (131). 5. Нормированное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости (132). 6. Пучки и связки плоскостей (134).	
§ 4. Прямая линия в пространстве .....	135
1. Канонические уравнения прямой в пространстве (135). 2. Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (137). 3. Параметри-	

ческие уравнения прямой в пространстве (137). 4. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых (137). 5. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости (138). 6. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

(138). 7. Условия принадлежности прямой  $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  к плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$  (139). 8. Связь прямых (139).

§ 5. Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве ..... 140

1. Условие пересечения трех плоскостей в одной и только в одной точке (140). 2. Нахождение биссектральных плоскостей двугранного угла, образованного двумя данными плоскостями (140). 3. Условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок  $AB$  (141). 4. Определение местоположения двух данных точек  $A$  и  $B$  относительно двуграных углов, образованных данными плоскостями (141).

5. Уравнения прямой, проходящей через данную точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и перпендикулярной данной плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  (141). 6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и параллельной заданной плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  (141). 7. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точ-

ку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярной заданной прямой  $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  (141).

8. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую  $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  и

через заданную не лежащую на этой прямой точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  (142). 9. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую  $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$  и параллель-

ной другой данной прямой  $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$  (142). 10. Уравнение плоскости,

проходящей через заданную прямую  $L_1$  и перпендикулярной заданной плоскости  $\pi$  (143). 11. Уравнения перпендикуляра, опущенного из заданной точки  $M_0$  на данную прямую  $L_1$  (143). 12. Нахождение расстояния от данной точки  $M_0$  до данной прямой  $L_1$  (143). 13. Нахождение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым  $L_1$  и  $L_2$  (143). 14. Нахождение кратчайшего расстояния между двумя данными скрещивающимися прямыми  $L_1$  и  $L_2$  (143).

Г л а в а 6. Линии второго порядка ..... 144

§ 1. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы ..... 144

1. Эллипс (144). 2. Гипербола (147). 3. Парабола (148).

§ 2. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям ..... 149

1. Исследование формы эллипса (150). 2. Исследование формы гиперболы (151). 3. Исследование формы параболы (155).

§ 3. Директрисы эллипса, гиперболы и параболы ..... 155

1. Эксцентриситет эллипса и гиперболы (156). 2. Директрисы эллипса и гиперболы (157). 3. Определение эллипса и гиперболы, основанное на их свойстве по отношению к директрисам (161). 4. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения (164). 5. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы (165).

§ 4. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе ..... 167

1. Уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе (167). 2. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы (168).

§ 5. Кривые второго порядка ..... 169

1. Преобразование коэффициентов уравнения линии второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат (170). 2. Инвариантные уравнения линии второго порядка. Понятие типа линии второго порядка (172). 3. Центр линии второго порядка (175). 4. Стандартное упрощение любого уравнения линии второго порядка путем поворота осей (176). 5. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка ( $I_2 \neq 0$ ). Классификация центральных линий (177). 6. Упрощение уравнения линии параболического типа ( $I_2 = 0$ ). Классификация линий параболического типа (180). 7. Распадающиеся кривые второго порядка (183).

<b>Г л а в а 7. Поверхности второго порядка</b>	184
§ 1. Понятие поверхности второго порядка .....	184
1. Преобразование коэффициентов уравнения поверхности второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат (185). 2. Инварианты уравнения поверхности второго порядка (186). 3. Центр поверхности второго порядка (187). 4. Стандартное упрощение любого уравнения поверхности второго порядка путем поворота осей (187).	
§ 2. Классификация поверхностей второго порядка .....	189
1. Классификация центральных поверхностей (189). 2. Классификация нецентральных поверхностей второго порядка (192).	
§ 3. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям .....	194
1. Эллипсоид (194). 2. Гиперболоиды (196). 3. Параболоиды (198). 4. Конус и цилиндры второго порядка (200). 5. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка (202).	
<b>Приложение. Проблемы оснований геометрии и обоснования метода координат</b>	205
§ 1. Аксиомы элементарной геометрии .....	205
1. Аксиомы принадлежности (205). 2. Аксиомы порядка (207). 3. Аксиомы конгруэнтности (209). 4. Аксиомы непрерывности (211). 5. Обоснование метода координат (211). 6. Аксиома параллельности (216).	
§ 2. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Евклида .....	217
§ 3. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского .....	220
§ 4. Заключительные замечания о проблемах аксиоматики .....	222

## **ОТ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ**

Данный выпуск серии представляет собой учебник по курсу аналитической геометрии. Кроме традиционно излагаемого материала, он содержит изложение некоторых вопросов, находящих применение в физике и в теоретической механике (понятие о барицентрических координатах, выяснение роли углов Эйлера в вопросах преобразования координат, представление произвольного преобразования в виде трансляции и одного поворота в пространстве, оптические свойства кривых второго порядка и т.п.).

Представляет интерес и приложение, содержащее аксиоматику Гильберта, обоснование метода координат и дающее представление о неевклидовой геометрии.

*A. Тихонов, B. Ильин, A. Свешников*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла на основе лекций, читавшихся авторами на физическом факультете МГУ в течение ряда лет.

Отметим некоторые особенности изложения. Во-первых, отметим, что по всей книге идет параллельное рассмотрение случаев плоскости и пространства.

Весьма подробно излагается векторная алгебра. При ее изложении сразу же вводится понятие линейной зависимости векторов, и на его основе устанавливается возможность однозначного разложения вектора по аффинному базису. Отличаются от общепринятых доказательство распределительного свойства векторного произведения и формулы для двойного векторного произведения.

В связи с потребностями теоретической механики детально рассматривается преобразование декартовых прямоугольных координат. Выясняется роль углов Эйлера и устанавливается, что, каковы бы ни были два базиса одной ориентации, один из них может быть преобразован в другой посредством параллельного переноса и одного поворота вокруг некоторой оси в пространстве.

При описании линейных образов, наряду с изложением традиционного теоретического материала, рассмотрено большое число задач идейного характера. Нам кажется, что разбор этих задач принесет пользу студентам, приступающим к упражнениям.

Не оставлены без внимания и имеющие прикладной характер вопросы теории образов второго порядка (оптические свойства, полярные уравнения и т.п.).

Приложение к книге содержит материал, не входящий в традиционные курсы аналитической геометрии. Здесь дается представление об аксиоматике Гильберта. Проводится обоснование метода координат, дается представление о системе развертывания основных геометрических понятий, об евклидовой и неевклидовой геометриях и о доказательствах их непротиворечивости.

По программе, действующей в настоящее время, этот материал не входит ни в один математический курс. Тем не менее этот материал актуален не только с точки зрения логических принципов построения геометрии, но и для понимания ряда разделов современной физики.

При написании этой книги мы широко пользовались советами и дружеской критикой А.Н. Тихонова и А.Г. Свешникова, которым приносим свою глубокую благодарность.

Нам хочется также поблагодарить Н.В. Ефимова и А.Ф. Леонтьева за прочтение рукописи и сделанные ими замечания.

## ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия имеет своей задачей изучение свойств геометрических объектов при помощи аналитического метода.

В основе этого метода лежит так называемый *метод координат*, впервые систематически примененный Декартом<sup>1)</sup>.

Основные понятия геометрии (точки, прямые линии и плоскости) относятся к числу так называемых *начальных* понятий. Эти понятия можно описать, но всякая попытка дать определение каждого из этих понятий неизбежно сводится к замене определяемого понятия ему эквивалентным. С научной точки зрения логически безупречным методом введения указанных понятий является *аксиоматический метод*, в развитии и завершении которого величайшая заслуга принадлежит Гильберту<sup>2)</sup>.

Аксиоматический метод излагается в Приложении в конце настоящей книги. Там дается представление о всей системе аксиом геометрии и о так называемой *неевклидовой геометрии*, к которой приводит замена одной из аксиом (так называемой *аксиомы параллельности*) утверждением, ее отрицающим.

Там же выясняется вопрос о непротиворечивости как евклидовой, так и неевклидовой геометрии и устанавливается, что конкретной реализацией совокупности объектов, удовлетворяющих аксиомам геометрии, является введение точек как всевозможных упорядоченных троек  $(x, y, z)$  вещественных чисел, прямых — как множества троек  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих системе двух линейных уравнений, и плоскостей — как множества троек  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих одному линейному уравнению.

Аксиоматический метод закладывает фундамент и для лежащего в основе аналитической геометрии метода координат. Ради простоты рассмотрим вопрос о введении координат на прямой. Возможность введения координат на прямой основывается на возможности *установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек прямой и множеством всех вещественных чисел*. Доказательство возможности установления такого соответствия базируется на аксиомах геометрии и на аксиомах (свойствах) множества вещественных чисел<sup>3)</sup> и приводится в Приложении к настоящей книге.

---

<sup>1)</sup> Рене Декарт — великий французский математик и философ (1596–1650).

<sup>2)</sup> Давид Гильберт — великий немецкий математик (1862–1943).

<sup>3)</sup> Свойства вещественных чисел и аксиоматический метод введения множества вещественных чисел излагаются в гл. 2 и в Приложении к выпуску I настоящего курса.

Таким образом, в Приложении к настоящей книге читатель найдет обоснование как системы развертывания основных геометрических понятий, так и лежащего в основе аналитической геометрии метода координат.

Метод координат представляет собой глубокий и мощный аппарат, позволяющий привлекать для исследования геометрических объектов методы алгебры и математического анализа.

## ГЛАВА 1

### СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе вводятся декартовы координаты<sup>1)</sup> на прямой, на плоскости и в пространстве. Рассматриваются простейшие задачи аналитической геометрии (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении). Даётся понятие о других системах координат (полярных, цилиндрических и сферических).

#### § 1. Декартовы координаты на прямой

**1. Направленные отрезки на оси.** Прямую линию<sup>2)</sup> с указанным на ней направлением будем называть *осью*. Отрезок на оси называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая — концом. Будем обозначать направленный отрезок с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  символом  $\overrightarrow{AB}$  (на рис. 1.1 изображены направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ). Мы будем рассматривать также и так называемые *нулевые направленные отрезки*,

у которых начало и конец совпадают.

С каждым направленным отрезком сопоставляется его числовая характеристика — так называемая *величина направленного отрезка*. Величиной  $\overrightarrow{AB}$  направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  называется *число*, равное длине отрезка  $\overrightarrow{AB}$ , взятой со знаком плюс, если направление  $\overrightarrow{AB}$  совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление  $\overrightarrow{AB}$  противоположно направлению оси. Величины всех нулевых направленных отрезков считаются равными нулю.

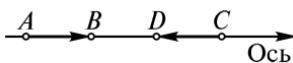


Рис. 1.1

<sup>1)</sup> Координаты (от латинских слов со — совместно, ordinatus — упорядоченный, определенный) — числа, заданием которых определяется положение точки на прямой, на плоскости или в пространстве (соответственно на линии или на поверхности). Заслуга введения метода координат, с помощью которого задачи геометрии могут быть истолкованы на языке математического анализа, и, обратно, факты анализа могут приобрести геометрическое толкование, принадлежит французскому ученому Р. Декарту.

<sup>2)</sup> В Приложении в конце этой книги рассматривается аксиоматическое введение основных геометрических понятий (точек, прямых, плоскостей). Кроме того, в этом же Приложении устанавливается связь между геометрическим понятием *прямой линии* и понятием *числовой оси* (см. вып. 1 «Основы математического анализа»).

**2. Линейные операции над направленными отрезками. Основное тождество.** Предварительно определим равенство направленных отрезков. Направленные отрезки мы будем перемещать вдоль оси, на которой они лежат, сохраняя при этом их длину и направление<sup>1)</sup>.

Два ненулевых направленных отрезка называются равными, если при совмещении начал этих отрезков совпадают и их концы. Любые два нулевых направленных отрезка считаются равными.

Очевидно, необходимым и достаточным условием равенства двух направленных отрезков на данной оси является равенство величин этих отрезков.

Линейными операциями над направленными отрезками будем называть операции сложения таких отрезков и умножения направленного отрезка на вещественное число.

Перейдем к определению этих операций.

Для определения суммы направленных отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  совместим начало  $C$  отрезка  $CD$  с концом  $B$  отрезка  $AB$  (рис. 1.2). Полученный при этом направленный отрезок  $\overline{AD}$  называется суммой направленных отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  и обозначается символом  $\overline{AB} + \overline{CD}$ .

Справедлива следующая основная теорема.

**Теорема 1.1.** Величина суммы направленных отрезков равна сумме величин слагаемых отрезков.

Доказательство. Пусть хотя бы один из отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  является нулевым. Если, например, отрезок  $CD$  нулевой, то сумма  $\overline{AB} + \overline{CD}$  совпадает с отрезком  $\overline{AB}$ , и утверждение теоремы справедливо. Пусть теперь оба отрезка  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  ненулевые. Совместим начало  $C$  отрезка  $CD$  с концом  $B$  отрезка  $AB$ . Тогда  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$ . Нам нужно доказать справедливость равенства  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$ . Рассмотрим случай, когда оба отрезка  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  направлены в одну сторону (рис. 1.2). В этом случае длина отрезка  $\overline{AD}$  равна сумме длин отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  и, кроме того, направление отрезка  $\overline{AD}$  совпадает с направлением каждого из отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$ . Поэтому интересующее нас равенство  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$  справедливо. Рассмотрим, наконец, еще один возможный случай, когда отрезки  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  направлены в противоположные стороны (рис. 1.3).

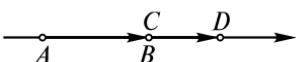


Рис. 1.2

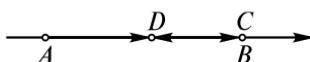


Рис. 1.3

В этом случае величины отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  имеют разные знаки, и поэтому длина отрезка  $\overline{AD}$  равна  $|AB + CD|$ . Так как направление отрезка  $\overline{AD}$  совпадает с направлением наибольшего по длине из отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$ ,

<sup>1)</sup> Вопрос о возможности перемещения отрезков связан с аксиомами конгруэнтности (см. Приложение в конце книги и, в частности, сноска на с. 209).

то знак величины отрезка  $\overline{AD}$  совпадает со знаком числа  $AB + CD$ , т.е. справедливо равенство  $AB + CD = AD$ . Теорема доказана.

**Следствие.** При любом расположении точек  $A, B, C$  на числовой оси величины направленных отрезков  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  и  $\overline{AC}$  удовлетворяют соотношению

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad (1.1)$$

которое называется основным тождеством.

Операция умножения направленного отрезка на вещественное число  $\alpha$  определяется следующим образом.

Произведением направленного отрезка  $\overline{AB}$  на число  $\alpha$  называется направленный отрезок, обозначаемый  $\alpha \cdot \overline{AB}$ , длина которого равна произведению числа  $|\alpha|$  на длину отрезка  $\overline{AB}$  и направление которого совпадает с направлением отрезка  $\overline{AB}$  при  $\alpha > 0$  и противоположно направлению  $\overline{AB}$  при  $\alpha < 0$ .

Очевидно, величина направленного отрезка  $\alpha \cdot \overline{AB}$  равна  $\alpha \cdot AB$ .

**3. Декартовы координаты на прямой.** Декартовы координаты на прямой вводятся следующим образом. Выберем на прямой определенное направление<sup>1)</sup> и некоторую точку  $O$  — начало координат (рис. 1.4). Кроме того, укажем единицу масштаба. Рассмотрим теперь произвольную точку  $M$  на прямой. Декартовы координаты точки  $M$  будем называть величину направленного отрезка  $\overline{OM}$ .

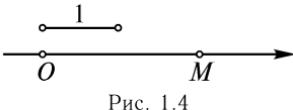


Рис. 1.4

Тот факт, что точка  $M$  имеет координату  $x$ , символически обозначают так:  $M(x)$ .

З а м е ч а н и е. Введение декартовых координат на прямой представляет собой один из способов, с помощью которого любой точке  $M$  прямой ставится в соответствие вполне определенное вещественное число  $x$ . Вопрос о том, исчерпывается ли при этом способе все множество вещественных чисел, т.е. будет ли указанное соответствие взаимно однозначным, положительно решается в Приложении в конце книги. (См. по этому поводу также Приложение к вып. I.)

Пусть  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$  — две точки на оси. В следующем утверждении устанавливается выражение величины  $M_1M_2$  направленного отрезка  $M_1M_2$  через координаты  $x_1$  и  $x_2$  — его начала и конца.

**Теорема 1.2.** Величина  $M_1M_2$  направленного отрезка  $\overline{M_1M_2}$  равна  $x_2 - x_1$ , т.е.

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \quad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на оси три точки  $O, M_1, M_2$ . Согласно теореме 1.1 справедливо равенство

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2. \quad (1.3)$$

<sup>1)</sup> Напомним, что прямая с указанным на ней направлением, называется осью.

Так как  $OM_1 = x_1$ ,  $OM_2 = x_2$ , то из (1.3) вытекает нужное нам соотношение (1.2). Теорема доказана.

**Следствие.** Расстояние  $\rho(M_1, M_2)$  между точками  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$  может быть найдено по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \quad (1.4)$$

## § 2. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

**1. Декартовы координаты на плоскости.** Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом и одинаковой масштабной единицей (рис. 1.5) образуют *декартову прямоугольную систему координат на плоскости*. Одну из указанных осей называют *осью  $Ox$*  или *осью абсцисс*, другую — *осью  $Oy$*  или *осью ординат*. Эти оси называют также *координатными осями*. Обозначим через  $M_x$  и  $M_y$  соответственно проекции произвольной точки  $M$  плоскости на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Декартовыми *прямоугольными координатами* и *у точки  $M$*  будем называть *соответственно величины направленных отрезков  $OM_x$  и  $OM_y$* .

Декартовы координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  называют *соответственно ее абсциссой и ординатой*. Тот факт, что точка  $M$  имеет координаты  $x$  и  $y$ , символически обозначают так:  $M(x, y)$ .

Координатные оси разбивают плоскость на четыре *квадранта*, нумерация которых указана на рис. 1.6. На этом же рисунке указана расстановка знаков координат точек в зависимости от их расположения в том или ином квадранте.

**2. Декартовы координаты в пространстве.** Декартовы координаты в пространстве вводятся в полной аналогии с декартовыми координатами на плоскости.

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве (координатные оси) с общим началом  $O$  и одинаковой масштабной единицей (рис. 1.7) образуют *декартову прямоугольную систему координат в пространстве*. Одну из указанных осей называют *осью  $Ox$*  или *осью абсцисс*, другую — *осью  $Oy$*  или *осью ординат*, третью — *осью  $Oz$*  или *осью аппликат*. Пусть  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  — проекции произвольной точки  $M$  пространства на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Декартовыми *прямоугольными координатами*  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки  $M$  будем называть *соответственно величины направленных отрезков  $OM_x$ ,  $OM_y$  и  $OM_z$* .

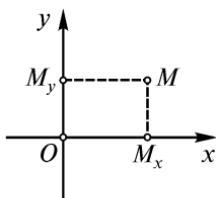


Рис. 1.5

Декартовы координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки  $M$  называются соответственно ее *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*. Тот факт, что точка  $M$  имеет координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$ , символически обозначают так:  $M(x, y, z)$ .

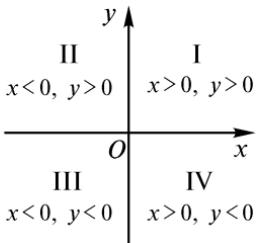


Рис. 1.6

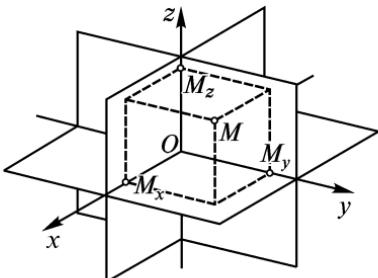


Рис. 1.7

Попарно взятые координатные оси располагаются в так называемых *координатных плоскостях*  $xOy$ ,  $yOz$  и  $zOx$  (рис. 1.7). Эти плоскости разбивают пространство на восемь *октантов*. Читатель без труда выяснит расстановку знаков координат точек в зависимости от их расположения в том или ином октанте.

### § 3. Простейшие задачи аналитической геометрии

**1. Понятие направленного отрезка в пространстве. Проекция направленного отрезка на ось.** Отрезок в пространстве называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая — концом. Как и в п. 1 § 1 этой главы символом  $\overline{AB}$  будем обозначать направленный отрезок с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$ .

Рассмотрим в пространстве направленный отрезок  $\overline{M_1M_2}$  и ось  $Ox$  (рис. 1.8). При этом будем считать, что на оси  $Ox$  введены декартовы координаты точек.

*Проекцией* направленного отрезка  $\overline{M_1M_2}$  на ось  $Ox$  (пр <sub>$Ox$</sub>   $\overline{M_1M_2}$ ) называется величина направленного отрезка  $\overline{M_{1x}M_{2x}}$ , началом  $M_{1x}$  которого служит проекция начала отрезка  $\overline{M_1M_2}$ , а концом  $M_{2x}$  — проекция конца отрезка  $\overline{M_1M_2}$ .

Пусть точки  $M_{1x}$  и  $M_{2x}$  имеют на оси  $Ox$  координаты  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Из определения пр <sub>$Ox$</sub>   $\overline{M_1M_2}$  и теоремы 1.2 вытекает справедливость соотношения

$$\text{пр}_{Ox} \overline{M_1M_2} = x_2 - x_1. \quad (1.5)$$

Установим еще одну формулу для вычисления пр <sub>$Ox$</sub>   $\overline{M_1M_2}$ . Для этого перенесем направленный отрезок  $\overline{M_1M_2}$  параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с какой-либо точкой оси  $Ox$  (на рис. 1.8 этой точкой является точка  $M_{1x}$ ). Обозначим через  $\phi$  наименьший угол между направлением оси  $Ox$  и направлением отрезка  $\overline{M_{1x}M_{2x}}$ , полученного

указанным выше параллельным переносом отрезка  $\overline{M_1 M_2}$ . Отметим, что угол  $\varphi$  заключен между  $O$  и  $\pi$ . При этом очевидно, что *угол  $\varphi$  острый, если направление отрезка  $M_{1x} M_{2x}$  совпадает с направлением  $Ox$ , и тупой, если направление  $M_{1x} M_{2x}$  противоположно направлению  $Ox$* . Используя это, легко убедиться в справедливости следующей нужной нам формулы:

$$\text{пр}_{Ox} \overline{M_1 M_2} = |\overline{M_1 M_2}| \cos \varphi, \quad (1.6)$$

в которой  $|\overline{M_1 M_2}|$  обозначает длину отрезка  $\overline{M_1 M_2}$ .

**2. Расстояние между двумя точками.** В этом пункте мы установим формулу для вычисления расстояния между двумя точками по известным координатам этих точек. Эта задача уже решена для случая точек на прямой в п. 3 § 1 этой главы (см. формулу (1.4)). Ради определенности подробно остановимся на случае, когда точки расположены в пространстве.

Рассмотрим в пространстве декартову систему координат  $Oxyz$  и точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  (рис. 1.9). Очевидно, расстояние  $\rho(M_1, M_2)$  между точками  $M_1$  и  $M_2$ , равное длине направленного отрезка  $\overline{M_1 M_2}$ , равно также длине диагонали параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям и проходят через точки  $M_1$  и  $M_2$  (на рис. 1.9 этот параллелепипед изображен штриховой линией). Длина параллельного оси  $Ox$  ребра этого параллелепипеда равна, очевидно, абсолютной величине проекции отрезка  $\overline{M_1 M_2}$  на ось  $Ox$ , т.е., согласно формуле (1.5), равна  $|x_2 - x_1|$ . По аналогичным соображениям длины ребер, параллельных осям  $Oy$  и  $Oz$ , равны соответственно  $|y_2 - y_1|$  и  $|z_2 - z_1|$ .

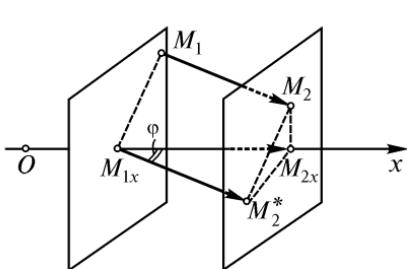


Рис. 1.8

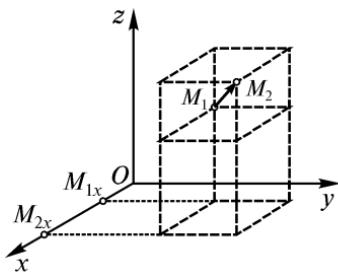


Рис. 1.9

Используя теорему Пифагора, получим следующую формулу для  $\rho(M_1, M_2)$ :

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.7)$$

**З а м е ч а н и е.** Формула расстояния между двумя точками в случае их расположения в плоскости  $Oxy$  имеет следующий вид:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.8)$$

**3. Деление отрезка в данном отношении.** Рассмотрим в пространстве две различные точки  $M_1$  и  $M_2$  и прямую, определяемую этими точками. Выберем на этой прямой некоторое направление (рис. 1.10). На полученной оси точки  $M_1$  и  $M_2$  определяют направленный отрезок  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ .

Пусть  $M$  — любая отличная от  $M_2$  точка указанной выше оси. Число

$$\lambda = \frac{M_1 M}{M M_2} \quad (1.9)$$

называется *отношением, в котором точка  $M$  делит направленный отрезок  $\overrightarrow{M_1 M_2}$* . Таким образом, любая, отличная от  $M_2$  точка  $M$  делит отрезок  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  в некотором отношении  $\lambda$ , где  $\lambda$  определяется равенством (1.9).

**З а м е ч а н и е 1.** При изменении направления на прямой, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$ , меняют знак величины всех направленных

отрезков. Поэтому отношение  $\frac{M_1 M}{M M_2}$  в правой части формулы (1.9) не зависит от выбора направления на прямой  $M_1 M_2$ .

Рассмотрим задачу о вычислении координат точки  $M$ , делящей отрезок  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  в отношении  $\lambda$ , считая известными координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  и число  $\lambda$ , где  $\lambda$  не равно  $-1$ .

Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$ , и пусть в этой системе координат точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M$  имеют соответственно координаты  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  и  $(x, y, z)$ . Спроектируем точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M$  на координатные оси (на рис. 1.10 указаны лишь проекции  $M_{1x}$ ,  $M_{2x}$  и  $M_x$  точек  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M$  на ось  $Ox$ ). Очевидно, точка  $M_x$  делит направленный отрезок  $\overrightarrow{M_{1x} M_{2x}}$  в отношении  $\lambda$ . Поэтому

$$\frac{M_{1x} M_x}{M_x M_{2x}} = \lambda. \quad (1.10)$$

Согласно теореме 1.2  $M_{1x} M_x = x - x_1$ , а  $M_x M_{2x} = x_2 - x$ . Отсюда и из соотношения (1.10) найдем, что  $x$  равняется  $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ . Совершенно аналогично вычисляются координаты  $y$  и  $z$  точки  $M$ . Таким образом,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.11)$$

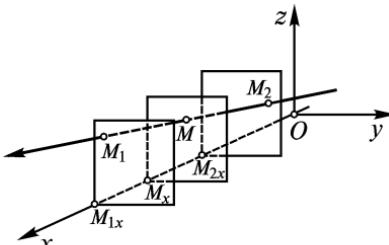


Рис. 1.10

Формулы (1.11) называются *формулами деления отрезка в данном отношении*  $\lambda$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Очевидно, если  $\lambda = 1$ , то точка  $M$  делит отрезок  $\overline{M_1 M_2}$  пополам. Получающиеся при этом из соотношений (1.11) формулы называются *формулами деления отрезка пополам*.

**З а м е ч а н и е 3.** Для положительных значений  $\lambda$  точки  $M$  лежит между точками  $M_1$  и  $M_2$  (в этом случае, как это видно из (1.9), отрезки  $\overline{M_1 M}$  и  $\overline{M M_2}$  одинаково направлены), а для отрицательных значений — вне отрезка  $M_1 M_2$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Соотношения (1.11) имеют смысл для любых значений  $\lambda \neq -1$ . Этим, в частности, и объяснялось указанное ранее ограничение для значений  $\lambda$ .

**П р и м е р.** Решим задачу о вычислении координат центра тяжести системы материальных точек.

Используем следующие два допущения, отвечающие известным физическим предпосылкам:

1) Центр тяжести системы из двух точек  $M_1$  и  $M_2$  с массами соответственно  $m_1$  и  $m_2$  находится на отрезке  $M_1 M_2$  и делит этот отрезок в отношении  $\lambda = m_2/m_1$ .

2) Центр тяжести системы точек  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$  с массами соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$  совпадает с центром тяжести системы из двух точек, одна из которых является точкой  $M_n$  с массой  $m_n$ , а другая находится в центре тяжести системы точек  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  (с массами  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ ) и имеет массу  $m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$ .

Из первого допущения и формул (1.11) вытекает, что координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  центра тяжести системы из двух точек  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  равны соответственно  $\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$  и  $\frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$ . Поэтому следует ожидать, что координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  центра тяжести системы из  $n$  точек  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , с массами  $m_i$  могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, & y &= \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}, \\ z &= \frac{m_1 z_1 + \dots + m_n z_n}{m_1 + \dots + m_n}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

В справедливости этих формул можно убедиться по индукции, если использовать второе допущение. В самом деле, пусть эти формулы справедливы для системы точек  $M_1, \dots, M_{n-1}$  с массами от  $m_1, \dots, m_{n-1}$ . Тогда, например, для абсциссы  $x$  рассматриваемой системы точек  $M_1, \dots, M_n$ ,

согласно второму допущению и формуле для абсциссы  $x$  системы из двух точек, получим выражение

$$x = \frac{(m_1 + \dots + m_{n-1}) \cdot \frac{m_1 x_1 + \dots + m_{n-1} x_{n-1}}{m_1 + \dots + m_{n-1}} + m_n x_n}{(m_1 + \dots + m_{n-1}) + m_n},$$

из которого сразу же вытекает первая формула (1.12). Выражения для  $y$  и  $z$  получаются аналогично.

**З а м е ч а н и е.** Если система точек  $M_i$  с массами  $m_i$ , расположена в плоскости  $Oxy$ , то координаты  $x$  и  $y$  центра тяжести этой системы могут быть найдены по первым двум формулам (1.12).

**4. Барицентрические координаты.** Формулы (1.12) используются для введения так называемых барицентрических координат. Рассмотрим барицентрические координаты на плоскости. В целях упрощения рассуждений будем считать, что на плоскости введены и декартовы координаты  $Oxy$ . Рассмотрим какие-либо три различные точки  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$ , не лежащие на одной прямой, и любую данную точку  $M(x, y)$ . Выясним, существуют ли такие три числа  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , удовлетворяющие условию

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1, \quad (1.13)$$

что данная точка  $M(x, y)$  будет центром тяжести системы точек  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  с массами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  соответственно. Ниже мы убедимся, что при сформулированных требованиях числа  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  определяются однозначно для каждой точки  $M$ . Они называются барицентрическими координатами точки  $M$  относительно базисных точек  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ .

Сформулированная задача о существовании чисел  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  при условии (1.13) сводится, очевидно, к исследованию вопроса об однозначной разрешимости следующей системы трех линейных уравнений<sup>1)</sup> относительно  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ :

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= 1, \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= x, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= y. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Известно, что для однозначной разрешимости квадратной системы линейных уравнений (система, у которой число уравнений равно числу неизвестных) необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был отличен от нуля (см. Дополнение к этой главе). Для рассматриваемой системы этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

<sup>1)</sup> Последние два уравнения этой системы представляют собой следствия первых двух соотношений (1.12) и соотношения (1.13).

Этот определитель отличен от нуля, иначе мы получили бы пропорцию  $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$  и, обозначив каждое из указанных отношений через  $-\lambda$  ( $\lambda \neq -1$ ), ибо точки  $M_2$  и  $M_3$  различны), пришли бы с точностью до обозначений к первым двум равенствам (1.11). Это означало бы, что точка  $M_1$  делит отрезок  $\overline{M_2 M_3}$  в отношении  $\lambda$ , т.е. означало бы, что точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  лежат на одной прямой. Таким образом, система (1.14) однозначно разрешима относительно  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Следовательно, положение любой точки  $M$  на плоскости однозначно определяется относительно базисных точек  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  этой плоскости посредством барицентрических координат  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ .

Барицентрические координаты в пространстве вводятся совершенно аналогично. Для этого используются четыре базисные точки, не располагающиеся в одной плоскости.

## § 4. Полярные, цилиндрические и сферические координаты

**1. Полярные координаты.** Полярные координаты на плоскости вводятся следующим образом. Выберем на плоскости некоторую точку  $O$  (полюс) и некоторый выходящий из нее луч  $Ox$  (рис. 1.11). Кроме того, укажем единицу масштаба. *Полярными координатами точки  $M$  называются два числа  $\rho$  и  $\phi$* , первое из которых (*полярный радиус  $\rho$* ) равно расстоянию точки  $M$  от полюса  $O$ , а второе (*полярный угол  $\phi$* ) — угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки луч  $Ox$  до совмещения с лучом  $OM$ <sup>1)</sup>.

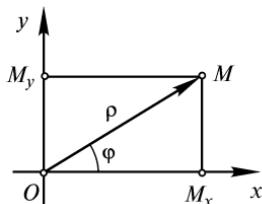


Рис. 1.11

Точку  $M$  с полярными координатами  $\rho$  и  $\phi$  обозначают символом  $M(\rho, \phi)$ .

Для того чтобы соответствие между различными от полюса точками плоскости и парами полярных координат  $(\rho, \phi)$  было взаимно однозначным, обычно считают, что  $\rho$  и  $\phi$  изменяются в следующих границах:

$$0 < \rho < +\infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (1.15)$$

**З а м е ч а н и е.** В некоторых задачах, связанных с непрерывным перемещением точки по плоскости, требуется непрерывное изменение полярных координат этой точки. В таких задачах удобнее отказаться от ограничений для  $\rho$  и  $\phi$ , указанных в соотношениях (1.15). Если, например, рассматривается *вращение точки* по окружности против часовой стрелки ( $\rho = \text{const}$ ), то естественно считать, что полярный угол этой точки может принимать, при большом числе оборотов, значения, большие  $2\pi$ . Если же рассматривается движение точки по прямой, проходящей через полюс

<sup>1)</sup> При этом предполагается, что точка  $M$  отлична от полюса. Для полюса  $O$  полярный радиус  $\rho$  равен нулю, а полярный угол неопределенный, т.е. ему можно присвоить любое значение.

$(\varphi = \text{const})$ , то естественно считать, что при переходе через полюс ее полярный радиус меняет знак.

Закон изменения величин  $\rho$  и  $\varphi$  выясняется в каждом конкретном случае.

Установим связь между полярными координатами точки и ее декартовыми координатами. При этом будем предполагать, что начало декартовой прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью (рис. 1.11). Пусть точка  $M$  имеет декартовы координаты  $x$  и  $y$  и полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$ . Очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1.16)$$

Полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$  точки  $M$  определяются по ее декартовым координатам  $x$  и  $y$ , очевидно, следующим образом:  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Для того чтобы найти величину угла  $\varphi$ , нужно, используя знаки  $x$  и  $y$ , определить квадрант, в котором находится точка  $M$  (см. п. 1 § 2 этой главы и рис. 1.6), и, кроме того, воспользоваться тем, что тангенс угла  $\varphi$  равен  $y/x$ .

**2. Цилиндрические координаты.** Цилиндрические координаты в пространстве вводятся следующим образом. Выберем на фиксированной плоскости  $\Pi$  некоторую точку  $O$  и выходящий из нее луч  $Ox$  (рис. 1.12). Кроме того, рассмотрим ось  $Oz$ , проходящую через  $O$  перпендикулярно плоскости  $\Pi$ . Пусть  $M$  — любая точка пространства,  $N$  — проекция этой точки на плоскость  $\Pi$ , а  $M_z$  — проекция  $M$  на ось  $Oz$ . Цилиндрическими координатами точки  $M$  называются три числа  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$ , первые два из которых ( $\rho$  и  $\varphi$ ) являются полярными координатами точки  $N$  в плоскости  $\Pi$  относительно полюса  $O$  и полярной оси  $Ox$ , а число  $z$  есть величина отрезка  $OM_z$ . Точку  $M$  с цилиндрическими координатами  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$  обозначают  $M(\rho, \varphi, z)$ . Наименование «цилиндрические координаты» связано с тем, что координатная поверхность  $\rho = \text{const}$  (т.е. поверхность, все точки которой имеют одну и ту же координату  $\rho$ ) является цилиндром, прямолинейные образующие которого параллельны оси  $Oz$  (на рис. 1.12 такой цилиндр изображен штриховыми линиями). Если выбрать оси декартовой прямоугольной системы координат  $Oxyz$  так, как указано на рис. 1.12, то декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки  $M$  будут связаны с ее цилиндрическими координатами  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (1.17)$$

З а м е ч а н и е. Так как первые две цилиндрические координаты  $\rho$  и  $\varphi$  являются полярными координатами проекции  $N$  точки  $M$  на плоскость  $\Pi$ , то к этим двум координатам относятся замечание и выводы, сделанные в предыдущем пункте.

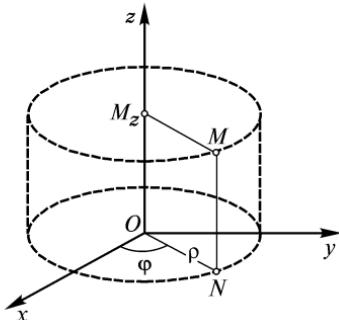


Рис. 1.12

**3. Сферические координаты.** Для введения сферических координат в пространстве рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  с общим началом  $O$  (рис. 1.13). Пусть  $M$  — любая, отличная от  $O$  точка пространства,  $N$  — ее проекция на плоскость  $Oxy$ ,  $\rho$  — расстояние  $M$  от  $O$ . Пусть, далее,  $\theta$  — угол, который образует направленный отрезок  $OM$  с осью  $z$ , а  $\phi$  — угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось  $Ox$ <sup>1)</sup> до совмещения с лучом  $ON$ . Углы  $\theta$  и  $\phi$  называют *широтой* и *долготой* соответственно.

*Сферическими координатами точки  $M$  называются три числа:  $\rho$ ,  $\phi$  и  $\theta$* <sup>2)</sup>.

Наименование «сферические координаты» связано с тем, что *координатная поверхность  $\rho = \text{const}$*  (т.е. поверхность,

все точки которой имеют одну и ту же координату  $\rho$ ) является сферой (на рис. 1.13 такая сфера изображена штриховой линией).

Для того чтобы соответствие между точками пространства и тройками сферических координат  $(\rho, \phi, \theta)$  было взаимно однозначным, обычно считают, что  $\rho$  и  $\phi$  изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Координата  $\theta$  по самому определению заключена между  $0$  и  $\pi$ . Отметим, что в задачах, связанных с непрерывным перемещением точки в пространстве, часто отказываются от указанных ограничений на изменение сферических координат (см. замечание в п. 1 этого параграфа).

Если выбрать оси декартовой прямоугольной системы координат так, как указано на рис. 1.13, то декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки  $M$  связаны с ее сферическими координатами  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  соотношениями

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (1.18)$$

#### ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ I

### ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

**1. Понятие матрицы и определителя второго порядка.** Прямоугольную таблицу из чисел, содержащую произвольное число  $m$  строк и

<sup>1)</sup> Если при этом смотреть на вращение  $Ox$  со стороны положительного направления оси  $Oz$ .

<sup>2)</sup> Если точка  $M$  совпадает с точкой  $O$ , то  $\rho = 0$ . Для точки  $O$  координаты  $\phi$  и  $\theta$  не имеют определенного значения.

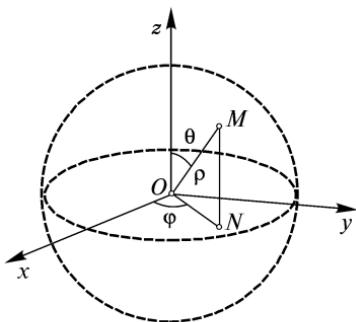


Рис. 1.13

произвольное число  $n$  столбцов, называют *матрицей*. Для обозначения матрицы используют либо сдвоенные черточки, либо круглые скобки. Например,

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 13,1 \\ 7,2 & 1 & 0 \\ -9 & 7 & 6 \end{array} \right\| \quad \text{или} \quad \left( \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 13,1 \\ 7,2 & 1 & 0 \\ -9 & 7 & 6 \end{array} \right).$$

Если число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. Числа, входящие в состав матрицы, обычно называют ее *элементами*.

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:

$$\left\| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right\|. \quad (\text{Д1.1})$$

*Определителем второго порядка, соответствующим матрице* (Д1.1), называется число, равное  $a_1b_2 - a_2b_1$  и обозначаемое символом

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right|.$$

Итак, по определению

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (\text{Д1.2})$$

Элементы, составляющие матрицу данного определителя, обычно называются элементами этого определителя.

Справедливо следующее утверждение: *для того чтобы определитель второго порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы элементы его строк (или соответственно его столбцов) были пропорциональны*.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что каждая из пропорций  $a_1/a_2 = b_1/b_2$  и  $a_1/b_1 = a_2/b_2$  эквивалентна равенству  $a_1b_2 = a_2b_1$ , а последнее равенство в силу (Д1.2) эквивалентно обращению в нуль определителя.

**2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.** Покажем, как применяются определители второго порядка для исследования и отыскания решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$a_1x + b_1y = h_1, \quad a_2x + b_2y = h_2 \quad (\text{Д1.3})$$

(коэффициенты  $a_1, b_1, a_2, b_2$  и свободные члены  $h_1$  и  $h_2$  считаются при этом заданными). Напомним, что пара чисел  $x_0, y_0$  называется *решением* системы (Д1.3), если подстановка этих чисел на место  $x$  и  $y$  в систему (Д1.3) обращает оба уравнения (Д1.3) в тождества.

Умножая первое уравнение системы (Д1.3) на  $b_2$ , а второе — на  $-b_1$  и затем складывая полученные при этом равенства, будем иметь

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x = b_2 h_1 - b_1 h_2. \quad (\text{Д1.4})$$

Аналогично путем умножения уравнений системы (Д1.3) на  $-a_2$  и  $a_1$  соответственно получим

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)y = a_1 h_2 - a_2 h_1. \quad (\text{Д1.5})$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д1.6})$$

С помощью этих обозначений и выражения для определителя второго порядка уравнения (Д1.4) и (Д1.5) могут быть переписаны в виде

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y = \Delta_y. \quad (\text{Д1.7})$$

Определитель  $\Delta$ , составленный из коэффициентов при неизвестных системы (Д1.3), принято называть *определителем этой системы*. Заметим, что определители  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  получаются из определителя системы  $\Delta$  посредством замены первого или соответственно второго столбца свободными членами.

Могут представиться два случая: 1) определитель  $\Delta$  системы отличен от нуля; 2) определитель этот равен нулю.

Рассмотрим сначала случай  $\Delta \neq 0$ . В этом случае из уравнений (Д1.7) мы сразу же получаем формулы для неизвестных, называемые *формулами Крамера*:

$$x = \Delta_x / \Delta, \quad y = \Delta_y / \Delta. \quad (\text{Д1.8})$$

Полученные формулы Крамера (Д1.8) дают решение системы (Д1.7) и потому доказывают *единственность* решения исходной системы (Д1.3). В самом деле, система (Д1.7) является *следствием* системы (Д1.3), и поэтому всякое решение системы (Д1.3) (в случае, если оно существует!) должно являться решением и системы (Д1.7). Итак, пока доказано, что если у исходной системы (Д1.3) существует при  $\Delta \neq 0$  решение, то это решение однозначно определяется формулами Крамера (Д1.8).

Легко убедиться и в *существовании* решения, т. е. в том, что при  $\Delta \neq 0$  два числа  $x$  и  $y$ , определяемые формулами Крамера (Д1.8), будучи подставлены на место неизвестных в уравнения (Д1.3), обращают эти уравнения

ния в тождества. (Предоставляем читателю самому расписать выражения для определителей  $\Delta$ ,  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  и убедиться в справедливости указанных тождеств.)

Приходим к следующему выводу: *если определитель  $\Delta$  системы (Д1.3) отличен от нуля, то существует, и притом единственное, решение этой системы, определяемое формулами Крамера (Д1.8).*

Рассмотрим теперь случай, когда определитель  $\Delta$  системы равен нулю. Могут представиться два подсуглачая: а) хотя бы один из определителей  $\Delta_x$  или  $\Delta_y$  отличен от нуля; б) оба определителя  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  равны нулю<sup>1)</sup>.

В подсуглаче а) оказывается невозможным хотя бы одно из равенств (Д1.7), т. е. система (Д1.7) не имеет решений, а поэтому *не имеет решений исходная система* (Д1.3) (следствием которой является система (Д1.7)).

В подсуглаче б) *исходная система* (Д1.3) *имеет бесчисленное множество решений*. В самом деле, из равенств  $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$  и из утверждения в конце п. 1 заключаем, что  $a_1/a_2 = b_1/b_2 = h_1/h_2$ , т. е. что второе уравнение системы (Д1.3) является следствием первого и его можно отбросить. Но одно уравнение с двумя неизвестными

$$a_1x + b_1y = h_1 \quad (\text{Д1.9})$$

имеет бесчисленно много решений (хотя бы один из коэффициентов  $a_1$  или  $b_1$  отличен от нуля, и стоящее при нем неизвестное может быть определено из уравнения (Д1.9) через произвольно заданное значение другого неизвестного).

Приходим к следующему выводу: *если определитель  $\Delta$  системы (Д1.3) равен нулю, то система (Д1.3) либо вовсе не имеет решений (в случае, если хотя бы один из определителей  $\Delta_x$  или  $\Delta_y$  отличен от нуля), либо имеет бесчисленное множество решений (в случае, когда  $\Delta_x = \Delta_y = 0$ ).* В последнем случае два уравнения (Д1.3) можно заменить одним и при решении его одно неизвестное задавать произвольно.

**Замечание.** В случае, когда свободные члены  $h_1$  и  $h_2$  равны нулю, линейная система (Д1.3) называется *однородной*. Отметим, что однородная система всегда имеет так называемое *тривиальное решение*:  $x = 0$ ,  $y = 0$  (эти два числа обращают оба однородных уравнения в тождества).

Если определитель  $\Delta$  системы отличен от нуля, то однородная система имеет *только* тривиальное решение. Если же  $\Delta = 0$ , то однородная система имеет бесчисленное множество решений (поскольку для однородной системы возможность отсутствия решений исключена). Таким образом, *однородная система имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда определитель ее равен нулю*.

<sup>1)</sup> Из утверждения в конце п. 1 вытекает, что *если определитель  $\Delta$  и один из определителей  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  равны нулю, то и другой из указанных определителей равен нулю*. В самом деле, пусть, например,  $\Delta = 0$  и  $\Delta_x = 0$ , т. е.  $a_1/a_2 = b_1/b_2$  и  $h_1/h_2 = b_1/b_2$ . Тогда из этих пропорций получим, что  $a_1/a_2 = h_1/h_2$ , т. е.  $\Delta_y = 0$ .

**3. Определители третьего порядка.** Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из девяти элементов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д1.10})$$

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице (Д1.10), называется число, равное

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 \quad (\text{Д1.11})$$

и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

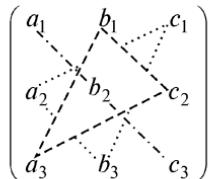
Итак, по определению

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \quad (\text{Д1.12})$$

Как и в случае определителя второго порядка, элементы матрицы (Д1.10) будем называть элементами самого определителя. Кроме того, договоримся называть диагональ, образованную элементами  $a_1, b_2$  и  $c_3$ , главной, а диагональ, образованную элементами  $a_3, b_2$  и  $c_1$ , — побочной.

Для запоминания конструкции слагаемых, входящих в выражение для определителя (Д1.11), укажем два правила.

Заметим, что первые три слагаемых, стоящих в (Д1.11) со знаком плюс, представляют собой произведение элементов определителя, взятых по три так, как указано различными пунктирами на нижеприведенной схеме:



Последние же три слагаемых, стоящих в (Д1.11) со знаком минус, представляют собой произведение элементов, взятых по три так, как указано различными пунктирами на следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Правило составления шести слагаемых, входящих в выражение (Д1.11) для определителя, опирающееся на указанные две схемы, обычно называют *правилом треугольника*.

Укажем и другое правило составления выражения для определителя, требующее еще меньшего напряжения внимания и памяти. Для этого к матрице, из которой составлен определитель, допишем справа первый, а затем второй столбец. В полученной при этом матрице

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right|$$

сплошной чертой соединены три тройки членов, получаемые параллельным переносом главной диагонали и отвечающие трем слагаемым, входящим в выражение (Д1.11) со знаком плюс; пунктирной же чертой соединены три другие тройки членов, получаемые параллельным переносом побочной диагонали и отвечающие трем слагаемым, входящим в выражение (Д1.11) со знаком минус.

**4. Свойства определителей.** В этом пункте мы установим ряд свойств определителей. Эти свойства мы будем формулировать и устанавливать применительно к определителям третьего порядка, хотя, конечно, они справедливы и для определителей второго порядка и, как выяснится позже (см. выпуск «Линейная алгебра»), эти же свойства справедливы и для определителей любого порядка  $n$  (там же см. понятие определителя порядка  $n$ ).

**Свойство 1.** Величина определителя не изменится, если строки и столбцы этого определителя поменять местами, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д1.13})$$

Для доказательства этого свойства достаточно расписать определители, стоящие в левой и в правой частях (Д1.13), по правилу треугольника

(или по другому указанному в предыдущем пункте правилу) и убедиться в равенстве полученных при этом членов.

**Свойство 1.** устанавливает *полную равноправность строк и столбцов*. Поэтому все дальнейшие свойства определителя можно формулировать и для строк, и для столбцов, а доказывать или только для строк, или только для столбцов.

**Свойство 2.** *Перестановка двух строк (или двух столбцов) определителя равносильна умножению его на число  $-1$ .*

Доказательство также получается из правила треугольника (мы предоставляем его читателю).

**Свойство 3.** *Если определитель имеет две одинаковые строки (или два одинаковых столбца), то он равен нулю.*

В самом деле, при перестановке двух одинаковых строк, с одной стороны, определитель  $\Delta$  не изменится, а с другой стороны, в силу свойства 2 он изменит знак на противоположный. Таким образом,  $\Delta = -\Delta$ , т.е.  $2\Delta = 0$ , или  $\Delta = 0$ .

**Свойство 4.** *Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число  $\lambda$  равносильно умножению определителя на это число  $\lambda$ .*

Иными словами, общий множитель всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя можно выносить за знак этого определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что определитель выражается в виде суммы (Д1.12), каждый член которой содержит один и только один элемент из каждой строки и один и только один элемент из каждого столбца.

**Свойство 5.** *Если все элементы некоторой строки (или некоторого столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.*

Это свойство вытекает из предыдущего (при  $\lambda = 0$ ).

**Свойство 6.** *Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

В самом деле, в силу свойства 4 множитель пропорциональности можно вынести за знак определителя, после чего остается определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю, согласно свойству 3.

**Свойство 7.** *Если каждый элемент  $n$ -й строки (или  $n$ -го столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, первый из которых имеет в  $n$ -й строке (в  $n$ -м столбце) первые из упомянутых слагаемых и те же элементы, что и исходный определитель,*

в остальных строках (столбцах), а второй определитель имеет в  $n$ -й строке (в  $n$ -м столбце) вторые из упомянутых слагаемых и те же элементы, что и исходный определитель, в остальных строках (столбцах). Например,

$$\begin{vmatrix} a'_1 + a''_1 & b'_1 + b''_1 & c'_1 + c''_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_1 & b''_1 & c''_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого свойства снова достаточно заметить, что определитель выражается в виде суммы слагаемых, каждое из которых содержит один и только один элемент из каждой строки и один и только один элемент из каждого столбца.

**Свойство 8.** Если к элементам некоторой строки (или некоторого столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на произвольный множитель  $\lambda$ , то величина определителя не изменится.

В самом деле, полученный в результате указанного прибавления определитель можно (в силу свойства 7) разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй равен нулю вследствие пропорциональности элементов двух строк (или столбцов) и свойства 6.

Для формулировки еще одного фундаментального свойства определителя нам понадобятся новые понятия.

**5. Алгебраические дополнения и миноры.** Соберем в выражении (Д1.12) для определителя члены, содержащие какой-нибудь один элемент этого определителя, и вынесем указанный элемент за скобки; величина, остающаяся при этом в скобках, называется *алгебраическим дополнением* указанного элемента.

Алгебраическое дополнение данного элемента мы будем обозначать большой латинской буквой того же наименования, что и данный элемент, и снабжать тем же номером, который имеет данный элемент. Например, алгебраическое дополнение элемента  $b_2$  будем обозначать через  $B_2$ , алгебраическое дополнение элемента  $a_3$  — через  $A_3$  и т.д.

Непосредственно из выражения для определителя (Д1.12) и из того, что каждое слагаемое в правой части (Д1.12) содержит один и только один элемент из каждой строки и один и только один элемент из каждого столбца, вытекают следующие равенства:

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \quad \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \\ \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3, \quad (\text{Д1.14})$$

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \quad \Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \\ \Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3. \quad (\text{Д1.15})$$

Эти равенства выражают следующее свойство определителя: *определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (этого столбца).*

Равенства (Д1.14) принято называть *разложением определителя по элементам соответственно первой, второй или третьей строки, а* равенства (Д1.15) — *разложением определителя по элементам соответственно первого, второго или третьего столбца.*

Введем теперь важное понятие *минора* данного элемента определителя. *M и n о m* *данного элемента определителя n-го порядка*<sup>1)</sup> *называется определитель* *(n – 1)-го порядка, получаемый из данного определителя путем вычеркивания той строки и того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.*

Например, минор элемента  $a_1$  равен  $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ , минором элемента  $a_2$

служит определитель  $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ , и т.д.

Предлагаем читателю самому убедиться в том, что алгебраические дополнения и миноры связаны между собой по следующему правилу: *алгебраическое дополнение любого элемента определителя равняется минору этого элемента, взятому со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент, есть число четное, и со знаком минус — в противном случае.*

Таким образом, соответствующие алгебраическое дополнение и минор могут отличаться только знаком.

Следующая таблица дает наглядное представление о том, каким знаком связаны соответствующие алгебраическое дополнение и минор:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Установленное правило позволяет в формулах (Д1.14) и (Д1.15) разложения определителя по элементам строк и столбцов всюду вместо алгебраических дополнений писать соответствующие миноры (с нужным знаком).

Так, например, последняя из формул (Д1.14), дающая разложение определителя по элементам третьей строки, принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д1.16})$$

<sup>1)</sup> В рассматриваемом случае  $n = 3$ .

В заключение установим следующее фундаментальное свойство определителя.

**Свойство 9.** Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна величине этого определителя (равна нулю).

Конечно, аналогичное свойство справедливо и применительно к строкам определителя. Случай, когда алгебраические дополнения и элементы отвечают одному и тому же столбцу, уже рассмотрен выше. Остается доказать, что сумма произведений элементов какого-либо столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю.

Докажем, например, что сумма произведений элементов первого или второго столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов третьего столбца равна нулю.

Будем исходить из третьей формулы (Д1.15), дающей разложение определителя по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3. \quad (\text{Д1.17})$$

Так как алгебраические дополнения  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  элементов третьего столбца не зависят от самих элементов  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  этого столбца, то в равенстве (Д1.17) числа  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  можно заменить произвольными числами  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , сохраняя при этом в левой части (Д1.17) первые два столбца определителя, а в правой части величины  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  алгебраических дополнений.

Таким образом, при любых  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix} = h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 C_3. \quad (\text{Д1.18})$$

Беря теперь в равенстве (Д1.18) в качестве  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  сначала элементы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  первого столбца, а затем элементы  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  второго столбца и учитывая, что определитель с двумя совпадающими столбцами в силу свойства 3 равен нулю, мы придем к следующим равенствам:

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0, \quad b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0.$$

Тем самым доказано, что сумма произведений элементов первого или второго столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов третьего столбца равна нулю.

Аналогично доказываются равенства

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0, \quad c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 = 0,$$

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0, \quad c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$$

и соответствующие равенства, относящиеся не к столбцам, а к строкам:

$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0, \quad a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0,$$

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0, \quad a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0,$$

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0, \quad a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0.$$

**6. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, отличным от нуля.** В качестве приложения изложенной выше теории рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= h_3 \end{aligned} \tag{Д1.19}$$

(коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  и свободные члены  $h_1, h_2, h_3$  считаются заданными). Тройка чисел  $x_0, y_0, z_0$  называется *решением* системы (Д1.19), если подстановка этих чисел на место  $x, y, z$  в систему (Д1.19) обращает все три уравнения (Д1.19) в тождества.

Фундаментальную роль в дальнейшем будут играть следующие четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель  $\Delta$  принято называть *определенителем системы* (Д1.19) (он составлен, из коэффициентов при неизвестных). Определители  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\Delta_z$  получаются из определителя системы  $\Delta$  посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

Для исключения из системы (Д1.19) неизвестных  $y$  и  $z$  умножим уравнения (Д1.19) соответственно на алгебраические дополнения  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$

элементов первого столбца определителя  $\Delta$  системы и после этого сложим эти уравнения. В результате получим

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3. \quad (\text{D1.20})$$

Учитывая, что сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (нулю) (см. свойство 9), получим

$$\begin{aligned} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 &= \Delta, & b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 &= 0, \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D1.21})$$

Кроме того, посредством разложения определителя  $\Delta_x$  по элементам первого столбца получается формула

$$\Delta_x = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3. \quad (\text{D1.22})$$

С помощью формул (D1.21) и (D1.22) равенство (D1.20) перепишется в следующем (не содержащем неизвестных  $y$  и  $z$ ) виде:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x.$$

Совершенно аналогично выводятся из системы (D1.19) равенства  $\Delta \cdot y = \Delta_y$  и  $\Delta \cdot z = \Delta_z$ <sup>1)</sup>.

Таким образом, мы установили, что система уравнений

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y = \Delta_y, \quad \Delta \cdot z = \Delta_z \quad (\text{D1.23})$$

является следствием исходной системы (D1.19).

В дальнейшем мы отдельно рассмотрим два случая:

- 1) когда определитель  $\Delta$  системы *отличен от нуля*;
- 2) когда этот определитель *равен нулю*.

Здесь мы рассмотрим лишь первый случай (рассмотрение второго случая отложим до п. 9).

Итак, пусть  $\Delta \neq 0$ . Тогда из системы (D1.23) мы сразу получаем формулы для неизвестных, называемые *формулами Крамера*:

$$x = \Delta_x / \Delta, \quad y = \Delta_y / \Delta, \quad z = \Delta_z / \Delta. \quad (\text{D1.24})$$

Полученные нами формулы Крамера дают решение системы (D1.23) и потому доказывают *единственность* решения исходной системы (D1.19), ибо система (D1.23) является следствием системы (D1.19), и всякое решение системы (D1.19) обязано быть решением и системы (D1.23).

---

<sup>1)</sup> Для получения этих равенств следует сначала умножить уравнения (D1.19) соответственно на алгебраические дополнения элементов второго и третьего столбцов, а затем сложить полученные равенства.

Итак, мы доказали, что если у исходной системы (Д1.19) существует при  $\Delta \neq 0$  решение, то это решение однозначно определяется формулами Крамера (Д1.24).

Чтобы доказать, что решение в самом деле существует, мы должны подставить в исходную систему (Д1.19) на место  $x$ ,  $y$  и  $z$  их значения, определяемые формулами Крамера (Д1.24), и убедиться в том, что все три уравнения (Д1.19) обращаются при этом в тождество. Убедимся, например, что первое уравнение (Д1.19) обращается в тождество при подстановке значений  $x$ ,  $y$  и  $z$ , определяемых формулами Крамера (Д1.24). Учитывая, что  $\Delta_x = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3$ ,  $\Delta_y = h_1B_1 + h_2B_2 + h_3B_3$ ,  $\Delta_z = h_1C_1 + h_2C_2 + h_3C_3$ , будем иметь, подставив в левую часть первого из уравнений (Д1.19) значения  $x$ ,  $y$  и  $z$ , определяемые формулами Крамера:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ a_1(h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3) + b_1(h_1B_1 + h_2B_2 + h_3B_3) + \right. \\ &\quad \left. + c_1(h_1C_1 + h_2C_2 + h_3C_3) \right\}. \end{aligned}$$

Группируя внутри фигурной скобки члены относительно  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , будем иметь

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= \frac{1}{\Delta} \left\{ h_1(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + h_2(a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2) + \right. \\ &\quad \left. + h_3(a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3) \right\}. \end{aligned}$$

В силу свойства 9 в последнем равенстве обе квадратные скобки равны нулю, а круглая скобка равна определителю  $\Delta$ . Таким образом, мы получим  $a_1x + b_1y + c_1z = h_1$ , и обращение в тождество первого уравнения системы (Д1.19) установлено. Аналогично устанавливается обращение в тождество второго и третьего уравнений системы (Д1.19).

Мы приходим к следующему выводу: если определитель  $\Delta$  системы (Д1.19) отличен от нуля, то существует, и притом единственное, решение этой системы, определяемое формулами Крамера (Д1.24).

**7. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными.** В этом и в следующем пунктах мы разовьем аппарат, необходимый для рассмотрения неоднородной системы (Д1.19) с определителем, равным нулю. Сначала рассмотрим однородную систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned} \tag{Д1.25}$$

Если все три определителя второго порядка, которые можно составить из матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad (\text{Д1.26})$$

равны нулю, то в силу утверждения из п. 1 коэффициенты первого из уравнений (Д1.25) пропорциональны соответствующим коэффициентам второго из этих уравнений. Стало быть, в этом случае второе уравнение (Д1.25) является следствием первого, и его можно отбросить. Но одно уравнение с тремя неизвестными  $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ , естественно, имеет бесчисленное множество решений (двум неизвестным можно предписывать произвольные значения, а третье неизвестное определять из уравнения).

Рассмотрим теперь систему (Д1.25) для случая, когда хотя бы один из определителей второго порядка, составленных из матрицы (Д1.26), отличен от нуля. Не ограничивая общности, будем считать, что определитель<sup>1)</sup>

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{Д1.27})$$

Тогда мы можем переписать систему (Д1.25) в виде

$$a_1x + b_1y = -c_1z,$$

$$a_2x + b_2y = -c_2z,$$

и утверждать, что для каждого  $z$  существует единственное решение этой системы, определяемое формулами Крамера (см. п. 2, формулы (Д1.8)):

$$x = -z \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \\ \hline a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y = -z \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ \hline a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д1.28})$$

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение алгебраические дополнения  $A_3$ ,  $B_3$  и  $C_3$  элементов третьей строки определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

---

<sup>1)</sup> Это предположение не снижает общности, ибо порядок следования неизвестных  $x$ ,  $y$  и  $z$  находится в нашем распоряжении.

В силу результатов п. 5 о связи алгебраических дополнений и миноров можно записать

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д1.29})$$

Основываясь на (Д1.29), мы можем переписать формулы (Д1.28) в виде

$$x = \frac{A_3}{C_3} z, \quad y = \frac{B_3}{C_3} z. \quad (\text{Д1.30})$$

Для того чтобы получить решение в виде, *симметричном относительно всех неизвестных*  $x, y$  и  $z$ , положим  $t = z/C_3$  (отметим, что в силу (Д1.27) определитель  $C_3$  отличен от нуля). Поскольку  $z$  может принимать любые значения, то и новая переменная  $t$  может принимать любые значения.

Мы приходим к выводу, что в случае, когда определитель (Д1.27) отличен от нуля, однородная система (Д1.25) имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулами

$$x = A_3 t, \quad y = B_3 t, \quad z = C_3 t, \quad (\text{Д1.31})$$

в которых  $t$  принимает какие угодно значения, а алгебраические дополнения  $A_3, B_3$  и  $C_3$  определяются формулами (Д1.29).

**8. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.** Рассмотрим теперь однородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Д1.32})$$

Очевидно, что эта система всегда имеет так называемое *тривиальное решение*:  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

В случае, когда определитель системы  $\Delta \neq 0$ , это тривиальное решение является единственным (в силу п. 6).

Докажем, что в случае, когда определитель  $\Delta$  равен нулю, однородная система (Д1.32) имеет бесчисленное множество решений.

Если все определители второго порядка, которые можно составить из матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (\text{Д1.33})$$

равны нулю, то в силу утверждения из п. 1 соответствующие коэффициенты всех трех уравнений (Д1.32) пропорциональны. Но тогда второе и

третье уравнения (Д1.32) являются следствиями первого и могут быть отброшены, а одно уравнение  $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ , как уже отмечалось в предыдущем пункте, имеет бесчисленное множество решений.

Остается рассмотреть случай, когда хотя бы один минор матрицы (Д1.33) отличен от нуля. Так как порядок следования уравнений и неизвестных находится в нашем распоряжении, то, не ограничивая общности, мы можем считать, что отличен от нуля определитель (Д1.27). Но тогда, как установлено в предыдущем пункте, система трех уравнений (Д1.32) имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулами (Д1.31) (при любом  $t$ ).

Остается доказать, что  $x$ ,  $y$  и  $z$ , определяемые формулами (Д1.31) (при любом  $t$ ), обращают в тождество и третье уравнение (Д1.32). Подставляя в левую часть третьего уравнения (Д1.32)  $x$ ,  $y$  и  $z$ , определяемые формулами (Д1.31), будем иметь

$$a_3x + b_3y + c_3z = (a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3)t = \Delta \cdot t.$$

Мы воспользовались тем, что в силу свойства 9 выражение в круглых скобках равно определителю  $\Delta$  системы (Д1.32). Но определитель  $\Delta$  по условию равен нулю, и поэтому при любом  $t$  мы получим  $a_3x + b_3y + c_3z = 0$ .

Итак, доказано, что однородная система (Д1.32) с определителем  $\Delta$ , равным нулю, имеет бесчисленное множество решений. Если отличен от нуля минор (Д1.27), то эти решения определяются формулами (Д1.31) при произвольно взятом  $t$ .

Полученный результат можно сформулировать еще и так: однородная система (Д1.32) имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда определитель ее равен нулю.

**9. Неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, равным нулю.** Теперь мы располагаем аппаратом для рассмотрения неоднородной системы (Д1.19) с определителем  $\Delta$ , равным нулю. Могут представиться два случая: а) хотя бы один из определителей  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  или  $\Delta_z$  отличен от нуля; б) все три определителя  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\Delta_z$  равны нулю.

В случае а) оказывается невозможным хотя бы одно из равенств (Д1.23), т. е. система (Д1.23) не имеет решений, а поэтому не имеет решений и исходная система (Д1.19) (следствием которой является система (Д1.23)).

Переходим к рассмотрению случая б), т. е. случая, когда все четыре определителя  $\Delta$ ,  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\Delta_z$ , равны нулю. Начнем с примера, показывающего, что в этом случае система может не иметь ни одного решения. Рассмотрим систему

$$x + y + z = 1,$$

$$2x + 2y + 2z = 3,$$

$$3x + 3y + 3z = 4.$$

Ясно, что эта система не имеет решений. В самом деле, если бы решение  $x_0, y_0, z_0$  существовало, то из первых двух уравнений мы получили бы  $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ ,  $2x_0 + 2y_0 + 2z_0 = 3$ , а отсюда, умножая первое равенство на 2, получили бы, что  $2 = 3$ . Далее, очевидно, что все четыре определителя  $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$  и  $\Delta_z$  равны нулю. В самом деле, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

*имеет три одинаковых столбца*, определители  $\Delta_x, \Delta_y$  и  $\Delta_z$  получаются путем замены одного из этих столбцов свободными членами и, стало быть, *имеют по два одинаковых столбца*. В силу свойства 3 все эти определители равны нулю.

Докажем теперь, что если система (Д1.19) с определителем  $\Delta$ , равным нулю, имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесчисленное множество различных решений.

Предположим, что указанная система имеет решение  $x_0, y_0, z_0$ . Тогда справедливы тождества

$$\begin{aligned} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 &= h_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 &= h_2, \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 &= h_3. \end{aligned} \tag{Д1.34}$$

Вычитая почленно из уравнений (Д1.19) тождества (Д1.34), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) &= 0, \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0) &= 0, \\ a_3(x - x_0) + b_3(y - y_0) + c_3(z - z_0) &= 0, \end{aligned} \tag{Д1.35}$$

*эквивалентную* системе (Д1.19). Но система (Д1.35) является *однородной* системой трех линейных уравнений относительно трех неизвестных  $(x - x_0), (y - y_0)$  и  $(z - z_0)$  с определителем  $\Delta$ , равным нулю. Согласно п. 8 последняя система (а стало быть, и система (Д1.19)) имеет бесчисленное множество решений. Например, в случае, когда отличен от нуля минор (Д1.27), мы с помощью формул (Д1.31) получим следующее бесконечное множество решений системы (Д1.19):

$$x = x_0 + A_3t, \quad y = y_0 + B_3t, \quad z = z_0 + C_3t$$

( $t$  принимает любые значения).

Рассматриваемое утверждение доказано, и мы можем сделать следующее заключение: *если  $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ , то неоднородная система*

(Д1.19) либо совсем не имеет решений, либо имеет их бесконечное множество.

В качестве примеров предлагаем читателю рассмотреть следующие три системы:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3, \end{array} \right\} \end{array}$$

и убедиться в том, что первая система имеет единственное решение  $x = 1, y = 1, z = 1$  (для нее  $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 33$ ), вторая система не имеет решений (для нее  $\Delta = 0, \Delta_y = 1$ ), а третья система имеет бесчисленное множество решений (для нее  $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ), определяемых при произвольном  $t$  формулами:  $x = 1, y = t, z = -t$ .

## ГЛАВА 2

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В этой главе изучаются векторные величины (или просто векторы), т.е. такие величины, которые, кроме своего численного значения, характеризуются еще *направленностью*. Физическими примерами векторных величин могут служить смещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на нее сила.

В главе изучаются простейшие операции над векторами (сложение векторов, умножение векторов на число), вводится понятие линейной зависимости векторов и рассматриваются основные приложения этого понятия, изучаются различные типы произведений векторов, актуальные для физических приложений (скалярное и векторное произведение двух векторов, смешанное и двойное векторное произведение трех векторов).

### § 1. Понятие вектора и линейные операции над векторами

**1. Понятие вектора.** Абстрагируясь от конкретных свойств встречающихся в природе физических векторных величин, мы приходим к понятию *геометрического вектора*, или просто *вектора*.

*Геометрическим вектором* (или просто *вектором*) будем называть *направленный отрезок*.

Мы будем обозначать вектор либо как направленный отрезок символом  $\overrightarrow{AB}$ , где точки  $A$  и  $B$  обозначают соответственно начало и конец



Рис. 2.1

данного направленного отрезка (вектора), либо одной жирной латинской буквой, например **a** или **b**. На чертеже будем изображать вектор стрелкой, причем латинскую букву, обозначающую этот вектор, будем писать у его конца (рис. 2.1).

Начало вектора называют *точкой его приложения*. Если точка  $A$  является началом вектора **a**, то мы будем говорить, что вектор **a** приложен в точке  $A$ . Для обозначения длины вектора будем пользоваться символом модуля (или *абсолютной величины*). Так,  $|\overrightarrow{AB}|$  и  $|a|$  обозначают длины векторов  $\overrightarrow{AB}$  и **a** соответственно.

*Вектор называется нулем, если начало и конец его совпадают.* Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

*Введем важное понятие коллинеарности векторов. Векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.*

Теперь можно сформулировать понятие равенства двух векторов: *два вектора называются равными, если они коллинеарны, т. е. имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными.*

На рис. 2.2 изображены слева неравные, а справа равные векторы **a** и **b**.

Из определения равенства векторов непосредственно вытекает следующее утверждение: *каковы бы ни были вектор **a** и точка  $P$ , существует, и притом единственный, вектор  $\overrightarrow{PQ}$  с началом в точке  $P$ , равный вектору **a**<sup>1)</sup>.*

Иными словами, точка приложения данного вектора **a** может быть выбрана произвольно (мы не различаем двух равных векторов, имеющих разные точки приложения и получающихся один из другого параллельным переносом). В соответствии с этим векторы, изучаемые в геометрии, называют *свободными* (они определены с точностью до точки приложения)<sup>2)</sup>.

**2. Линейные операции над векторами.** *Линейными операциями* принято называть операцию сложения векторов и операцию умножения векторов на вещественные числа.

Сначала определим *операцию сложения* двух векторов.

**Определение 1.** *Суммой  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  двух векторов **a** и **b** называется вектор, идущий из начала вектора **a** в конец вектора **b** при условии, что вектор **b** приложен к концу вектора **a**.*

<sup>1)</sup> В самом деле, существует лишь одна прямая, проходящая через точку  $P$  и параллельная той прямой, на которой лежит вектор **a**. На указанной прямой существует единственная точка  $Q$  такая, что отрезок  $PQ$  имеет длину, равную длине вектора **a**, и направлен в ту же сторону, что и вектор **a**.

<sup>2)</sup> В механике и физике, кроме *свободных* векторов, иногда рассматривают *скользящие* и *связанные* векторы. *Скользящими* называют такие векторы, которые считаются эквивалентными, если они не только равны, но и лежат на одной прямой. Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу (известно, что две силы, равные и расположенные на одной прямой, оказывают на абсолютно твердое тело одинаковое механическое воздействие). *Связанными* называются такие векторы, которые считаются эквивалентными, если они не только равны, но и имеют общее начало. Примером связанного вектора может служить сила, приложенная к некоторой точке нетвердого (например, упругого) тела.

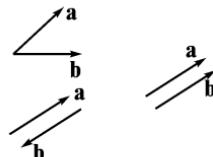


Рис. 2.2

Правило сложения двух векторов, содержащееся в этом определении, обычно называют *правилом треугольника*.

Это название объясняется тем, что в соответствии с указанным правилом слагаемые векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (в случае, если они не коллинеарны) и их сумма  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  образуют треугольник (рис. 2.3).

Правило сложения векторов обладает теми же самыми четырьмя свойствами, что и правило сложения вещественных (или рациональных) чисел<sup>1)</sup>:

1°  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (*переместительное свойство*);

2°  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (*сочетательное свойство*);

3° существует нулевой вектор  $\mathbf{0}$  такой, что  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  для любого вектора  $\mathbf{a}$  (особая роль нулевого вектора);

4° для каждого вектора  $\mathbf{a}$  существует противоположный ему вектор  $\mathbf{a}'$  такой, что  $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = 0$ .

Убедимся в справедливости этих свойств. Свойство 3° непосредственно вытекает из определения 1. Для доказательства свойства 4° определим вектор  $\mathbf{a}'$ , *противоположный вектору  $\mathbf{a}$* , как вектор, коллинеарный вектору  $\mathbf{a}$ , имеющий одинаковую с вектором  $\mathbf{a}$  длину и противоположное направление<sup>2)</sup>. Очевидно, что взятая, согласно определению 1, сумма вектора  $\mathbf{a}$  с таким вектором  $\mathbf{a}'$  дает нулевой вектор.

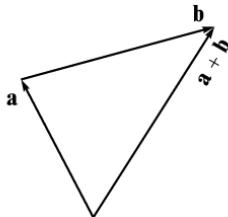


Рис. 2.3

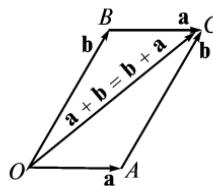


Рис. 2.4

Для доказательства свойства 1° приложим два произвольных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  к общему началу  $O$  (рис. 2.4). Обозначим буквами  $A$  и  $B$  концы векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно и рассмотрим параллелограмм  $OBCA$ . Из определения равенства векторов следует, что  $\overline{BC} = \overline{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AC} = \overline{OB} = \mathbf{b}$ .

Из определения 1 и из рассмотрения треугольника  $OAC$  следует, что диагональ  $\overline{OC}$  указанного параллелограмма представляет собой сумму векторов  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , а из рассмотрения треугольника  $OBC$  следует, что та же самая диагональ  $\overline{OC}$  представляет собой сумму векторов  $\mathbf{b} + \mathbf{a}$ . Тем самым свойство 1 установлено.

Остается доказать свойство 2°. Для этого приложим вектор  $\mathbf{a}$  к произвольной точке  $O$ , вектор  $\mathbf{b}$  к концу вектора  $\mathbf{a}$  и вектор  $\mathbf{c}$  к концу векто-

<sup>1)</sup> См. вып. 1, гл. 2.

<sup>2)</sup> Для получения  $\mathbf{A}'$  достаточно поменять местами начало и конец вектора  $\mathbf{A}$ .

ра **b** (рис. 2.5). Обозначим буквами *A*, *B* и *C* концы векторов **a**, **b** и **c** соответственно. Тогда

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\overline{OA} + \overline{AB}) + \overline{BC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC},$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overline{OA} + (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC},$$

т.е. свойство 2° доказано.

**З а м е ч а н и е 1.** При доказательстве свойства 1° обосновано еще одно правило сложения векторов, называемое *правилом параллелограмма*: если векторы **a** и **b** приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма **a + b** (или **b + a**) этих векторов представляет собой диагональ указанного параллелограмма, идущую из общего начала векторов **a** и **b**<sup>1)</sup>.

Доказанные свойства 1°–4° позволяют оперировать с суммой векторов так же, как с суммой вещественных чисел. В частности, при сложении трех векторов **a**, **b** и **c** нет необходимости указывать, как мы понимаем сумму **a + b + c** (как **a + (b + c)** или как **(a + b) + c**). Свойства 1°–4° позволяют нам распространить правило сложения на сумму любого конечного числа векторов. При этом нет необходимости производить сложение последовательно, фиксируя каждый промежуточный результат; сумма любого числа векторов может быть построена с помощью следующего правила: если приложить вектор **a<sub>2</sub>** к концу вектора **a<sub>1</sub>**, вектор **a<sub>3</sub>** к концу вектора **a<sub>2</sub>**,..., вектор **a<sub>n</sub>** к концу вектора **a<sub>n-1</sub>**, то сумма **a<sub>1</sub> + a<sub>2</sub> + a<sub>3</sub> + ... + a<sub>n</sub>** будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора **a<sub>1</sub>** в конец вектора **a<sub>n</sub>**.

Сформулированное правило сложения, проиллюстрированное на рис. 2.6, естественно назвать *правилом замыкания ломаной до многоугольника* (на рис. 2.6 ломаная  $\overline{OA_1A_2A_3 \dots A_n}$  замыкается до многоугольника путем добавления звена  $\overline{OA_n}$ ).

Наконец, свойства 1°–4° позволяют исчерпывающим образом решить вопрос о вычитании векторов.

**Определение 2.** Разностью **a – b** вектора **a** и вектора **b** называется такой вектор **c**, который в сумме с вектором **b** дает вектор **a**.

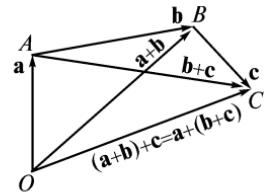


Рис. 2.5

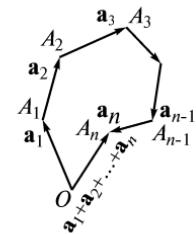


Рис. 2.6

<sup>1)</sup> Следует особо оговорить случай, когда векторы **a** и **b** коллинеарны. В этом случае параллелограмм, построенный на векторах **a** и **b**, вырождается в отрезок, понятие его диагонали теряет смысл, а сумма векторов **a** и **b** может быть получена из определения 1.

С помощью свойств  $1^\circ - 4^\circ$  элементарно доказывается, что существует, и притом единственный, вектор  $\mathbf{c}$ , представляющий собой разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , причем этот вектор равен  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}'$ , где  $\mathbf{b}'$  — вектор, противоположный  $\mathbf{b}$ .

В самом деле, если  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}'$ , то на основании свойств  $1^\circ - 4^\circ$

$$\mathbf{c} + \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}') + \mathbf{b} = \mathbf{a} + (\mathbf{b}' + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a},$$

т.е. вектор  $\mathbf{c}$  представляет собой разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

Убедимся теперь в однозначности разности  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Предположим, что, кроме вектора  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}'$ , существует еще один вектор  $\mathbf{d}$  такой, что  $\mathbf{d} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$ . Тогда, с одной стороны,  $(\mathbf{d} + \mathbf{b}) + \mathbf{b}' = \mathbf{a} + \mathbf{b}' = \mathbf{c}$ , с другой стороны,  $(\mathbf{d} + \mathbf{b}) + \mathbf{b}' = \mathbf{d} + (\mathbf{b} + \mathbf{b}') = \mathbf{d} + \mathbf{0} = \mathbf{d}$ , т. е.  $\mathbf{c} = \mathbf{d}$ .

Непосредственно из определения 2 и из правила треугольника сложения векторов вытекает следующее правило построения разности  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ : разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  приведенных к общему началу векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого вектора  $\mathbf{b}$  в конец уменьшаемого вектора  $\mathbf{a}$ .

Это правило иллюстрируется на рис. 2.7.

Перейдем, наконец, к рассмотрению операции умножения вектора на вещественное число.

**Определение 3.** Произведением  $\alpha\mathbf{a}$  (или  $\mathbf{a}\alpha$ ) вектора  $\mathbf{a}$  на вещественное число  $\alpha$  называется вектор  $\mathbf{b}$ , коллинеарный вектору  $\mathbf{a}$ , имеющий длину, равную  $|\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$ , и имеющий

направление, совпадающее с направлением вектора  $\mathbf{a}$  в случае  $\alpha > 0$  и противоположное направлению вектора  $\mathbf{a}$  в случае  $\alpha < 0$ .

Замечание 2. В случае, когда  $\alpha = 0$  или  $\mathbf{a} = 0$ , произведение  $\alpha\mathbf{a}$  представляет собой нулевой вектор, направление которого неопределенно.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора  $\mathbf{a}$  на число  $\alpha$  вектор  $\mathbf{a}$  «растягивается» в  $\alpha$  «раз».

Конечно, надо тут же оговорить условность термина «растягивается», ибо действительное растяжение происходит лишь при  $\alpha > 1$ ; при  $0 < \alpha < 1$  происходит не растяжение, а сжатие, а при отрицательном  $\alpha$ , кроме растяжения (при  $|\alpha| > 1$ ) или сжатия (при  $|\alpha| < 1$ ), происходит еще изменение направления вектора на противоположное.

Операция умножения вектора на число обладает следующими тремя свойствами:

5°  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$  (распределительное свойство числового множителя относительно суммы векторов);

6°  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$  (распределительное свойство векторного множителя относительно суммы чисел);

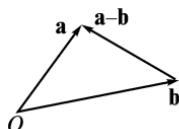


Рис. 2.7

$7^\circ \alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$  (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Для доказательства свойства  $5^\circ$  приложим векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  к общему началу  $O$  и построим на них параллелограмм, диагональ которого будет представлять собой сумму  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  (рис. 2.8). При «растяжении»<sup>1)</sup> сторон этого параллелограмма в  $\alpha$  раз в силу свойств подобия диагональ также «растягивается» в  $\alpha$  раз, но это и означает, что сумма  $\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$  равна  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

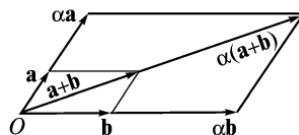


Рис. 2.8

Свойства  $6^\circ$  и  $7^\circ$  почти очевидны из наглядных геометрических соображений. С учетом оговоренной выше условности термина «растяжение» свойство  $6^\circ$  означает, что при «растяжении» вектора  $\mathbf{a}$  в  $(\alpha + \beta)$  раз получается такой же вектор, как при сложении вектора  $\mathbf{a}$ , «растянутого» в  $\alpha$  раз, с вектором  $\mathbf{a}$ , «растянутым» в  $\beta$  раз.

Свойство  $7^\circ$  в тех же терминах означает, что при «растяжении» вектора  $\mathbf{a}$  сначала в  $\beta$  раз, а потом еще в  $\alpha$  раз получается такой же вектор, как и при «растяжении» вектора  $\mathbf{a}$  сразу в  $\alpha\beta$  раз. Итак, мы установили, что линейные операции над векторами обладают свойствами  $1^\circ$ – $7^\circ$ .

Эти свойства имеют фундаментальное значение, ибо они позволяют производить выкладки в векторной алгебре по тем правилам, по которым производятся аналогичные выкладки в обычной алгебре.

В заключение докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Если вектор  $\mathbf{b}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\mathbf{a}$ , то существует вещественное число  $\lambda$  такое, что  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ .

Доказательство. Приложим векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  к общему началу  $O$ . Тогда эти векторы расположатся на одной прямой, на которой мы выберем начало отсчета, масштабный отрезок и положительное направление. Возможны два случая: 1) векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  направлены в одну сторону; 2) указанные векторы направлены в противоположные стороны<sup>2)</sup>. На рис. 2.9 изображен первый из указанных случаев.

Обозначим буквами  $A$  и  $B$  концы векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно и заметим, что, поскольку вектор  $\mathbf{a}$  ненулевой, точка  $A$  отлична от  $O$ . Но тогда, исключив тривиальный случай совпадения точек  $A$  и  $B$ <sup>3)</sup>, мы (в силу п. 3 § 3 гл. 1) можем утверждать, что точка  $O$  делит направленный отрезок  $BA$  в некотором отношении, которое мы обозначим через  $-\lambda$ , т.е.

$$\frac{BO}{OA} = -\lambda, \quad (2.1)$$

<sup>1)</sup> Термин «растяжение» следует понимать в указанном выше условном смысле. Рисунок 2.8 отвечает случаю  $\alpha > 1$ .

<sup>2)</sup> Тривиальный случай, когда вектор  $\mathbf{b}$  нулевой и направление его неопределенно, можно исключить из рассмотрения, ибо в этом случае равенство  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$  реализуется при  $\lambda = 0$ .

<sup>3)</sup> В этом случае векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  совпадают и равенство  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$  реализуется при  $\lambda = 1$ .

или, что то же самое<sup>1)</sup>,

$$OB = \lambda \cdot OA. \quad (2.2)$$

В случае, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  направлены в одну сторону (как на рис. 2.9), точка  $O$  лежит вне отрезка  $BA$ , и потому отношение (2.1)

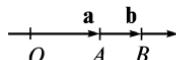
 отрицательно, а  $\lambda > 0$ . Если же векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  направлены в противоположные стороны, то точка  $O$  лежит внутри отрезка  $BA$ , и потому отношение (2.1) положительно, а  $\lambda < 0$ .

Рис. 2.9  
При доказательстве будем считать, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны.

Докажем, что в обоих случаях  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ . Достаточно доказать, что два вектора  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  1) коллинеарны; 2) имеют одинаковую длину, 3) имеют одинаковое направление.

Коллинеарность векторов  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  вытекает из коллинеарности векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и определения произведения вектора на число. Равенство длин векторов  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  непосредственно следует из определения произведения вектора на число и соотношения (2.2). Наконец, тот факт, что векторы  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  имеют одинаковое направление, следует из определения произведения вектора на число и из того, что  $\lambda > 0$ , когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково направлены, и  $\lambda < 0$ , когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  противоположно направлены. Теорема доказана.

**3. Понятие линейной зависимости векторов.** *Линейной комбинацией векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  будем называть сумму произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, т.е. выражение вида*

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n, \quad (2.3)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — какие угодно вещественные числа.

**Определение 1.** Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются линейно зависимыми, если найдутся такие вещественные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  с указанными числами обращается в нуль, т.е. имеет место равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = 0.$$

Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , не являющиеся линейно зависимыми, будем называть линейно независимыми.

Дадим другое определение линейно независимых векторов, основанное на логическом отрицании содержания определения 1.

**Определение 2.** Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются линейно независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации (2.3) возможно лишь в случае, когда все числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  равны нулю.

Имеют место следующие два утверждения.

**Теорема 2.2.** Если хотя бы один из векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

<sup>1)</sup> Здесь под  $OA$  и  $OB$  следует понимать величины направленных отрезков.

**Доказательство.** Пусть, ради определенности, вектор  $\mathbf{a}_1$  является нулевым<sup>1)</sup>, а остальные векторы  $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  произвольны. Тогда обращается в нуль линейная комбинация (2.3) указанных векторов с числами  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ , одно из которых отлично от нуля. Теорема доказана.

**Теорема 2.3.** *Если среди  $n$  векторов какие-либо  $n - 1$  векторов линейно зависимы, то и все  $n$  векторов линейно зависимы.*

**Доказательство.** Пусть для определенности векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$  линейно зависимы, а вектор  $\mathbf{a}_n$  произволен<sup>2)</sup>. По определению линейной зависимости найдутся такие вещественные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что имеет место равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{a}_{n-1} = 0. \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) сохранится, если мы добавим в левую часть этого равенства равное нулю слагаемое  $0 \cdot \mathbf{a}_n$ , т.е. справедливо равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{a}_{n-1} + 0 \cdot \mathbf{a}_n = 0. \quad (2.5)$$

Так как среди чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 0$  хотя бы одно отлично от нуля, то равенство (2.5) доказывает линейную зависимость векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Конечно, утверждение теоремы 2.3 о линейной зависимости  $n$  векторов останется в силе, если среди этих векторов линейно зависимыми являются не  $n - 1$ , а любое меньшее  $n$  число векторов.

#### 4. Линейные комбинации двух векторов.

**Теорема 2.4.** *Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.*

**Доказательство.** 1) Необходимость. Пусть два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  линейно зависимы. Докажем коллинеарность этих векторов.

По определению линейной зависимости найдутся такие вещественные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , хотя бы одно из которых отлично от нуля, что справедливо равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0. \quad (2.6)$$

Пусть для определенности отлично от нуля число  $\beta$ . Тогда из равенства (2.6) (посредством деления этого равенства на  $\beta$  и переброски одного члена в правую часть) получим следующее равенство:

$$\mathbf{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{a}.$$

<sup>1)</sup> Мы всегда можем поменять порядок следования векторов так, чтобы нулевым оказался первый из векторов.

<sup>2)</sup> Поменяв порядок следования векторов, мы всегда можем добиться того, чтобы линейно зависимыми оказались первые  $n - 1$  векторов.

Вводя обозначение  $\lambda = -\alpha/\beta$ , получим, что  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ . Таким образом, вектор  $\mathbf{b}$  равен произведению вектора  $\mathbf{a}$  на вещественное число  $\lambda$ . По определению произведения вектора на число векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. Необходимость доказана.

2) Достаточность. Пусть векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. Докажем, что эти векторы линейно зависимы. Если хотя бы один из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  нулевой, то эти векторы линейно зависимы в силу теоремы 2.2.

Таким образом, нужно рассмотреть лишь случай, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые. Но если вектор  $\mathbf{a}$  ненулевой, то из коллинеарности векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в силу теоремы 2.1 вытекает существование такого вещественного числа  $\lambda$ , что  $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ , или, что то же самое,

$$\lambda\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = 0. \quad (2.7)$$

Так как из двух чисел  $\lambda, -1$  одно заведомо отлично от нуля, то равенство (2.7) доказывает линейную зависимость векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Достаточность доказана.

**Следствие 1.** Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны, то они линейно независимы.

**Следствие 2.** Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора (иначе бы эти векторы оказались линейно зависимыми).

### 5. Линейные комбинации трех векторов.

**Определение.** Векторы называются *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

**Теорема 2.5.** Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть три вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  линейно зависимы. Докажем компланарность этих векторов.

По определению линейной зависимости найдутся такие вещественные числа  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , хотя бы одно из которых отлично от нуля, что справедливо равенство

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0. \quad (2.8)$$

Пусть для определенности отлично от нуля число  $\gamma$ . Тогда из равенства (2.8) (посредством деления этого равенства на  $\gamma$  и переброски двух членов в правую часть) получим следующее равенство:

$$\mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b}.$$

Вводя обозначения  $\lambda = -\alpha/\gamma$ ,  $\mu = -\beta/\gamma$ , перепишем последнее равенство в виде

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}. \quad (2.9)$$

Если все три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  приложены к общему началу  $O$ , то из равенства (2.9) следует <sup>1)</sup>, что вектор  $\mathbf{c}$  равен диагонали параллелограмма, построенного на двух векторах: на векторе  $\mathbf{a}$ , «растянутом» в  $\lambda$  раз, и векторе  $\mathbf{b}$ , «растянутом» <sup>2)</sup> в  $\mu$  раз (рис. 2.10).

Но это означает, что векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  лежат в одной плоскости, т.е. компланарны. Необходимость доказана.

2) Д о с т а т о ч н о с т ь . Пусть векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны. Докажем, что эти векторы линейно зависимы.

Прежде всего, исключим случай, когда *какая-либо пара из указанных трех векторов коллинеарна*. Тогда в силу теоремы 2.4 указанная пара векторов линейно зависима, а стало быть (в силу теоремы 2.3), и все три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  линейно зависимы.

Остается рассмотреть случай, когда в тройке векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  ни одна пара векторов не коллинеарна (и, в частности, отсутствуют нулевые векторы <sup>3)</sup>).

Перенесем три компланарных вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  на одну плоскость и приведем их к общему началу  $O$  (рис. 2.10). Проведем через конец  $C$  вектора  $\mathbf{c}$  прямые, параллельные векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Обозначим буквой  $A$  точку пересечения прямой, параллельной вектору  $\mathbf{b}$ , с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{a}$ , а буквой  $B$  точку пересечения прямой, параллельной вектору  $\mathbf{a}$ , с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{b}$ . (Существование указанных точек пересечения вытекает из того, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны.) В силу правила параллелограмма сложения векторов вектор  $\mathbf{c}$  равен сумме векторов  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , т.е.

$$\mathbf{c} = \overline{OA} + \overline{OB}. \quad (2.10)$$

Так как вектор  $\overline{OA}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\mathbf{a}$  (с которым он лежит на одной прямой), то в силу теоремы 2.1 найдется вещественное число  $\lambda$  такое, что

$$\overline{OA} = \lambda \mathbf{a}. \quad (2.11)$$

Из аналогичных соображений вытекает существование вещественного числа  $\mu$  такого, что

$$\overline{OB} = \mu \mathbf{b}. \quad (2.12)$$

<sup>1)</sup> В силу правила параллелограмма сложения векторов и определения произведения вектора на число (см. п. 2). При этом мы исключаем тривиальный случай, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. В этом случае компланарность векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  вытекает из того, что эти три вектора, будучи приведены к общему началу  $O$ , лежат на двух проходящих через точку  $O$  прямых: на одной лежит вектор  $\mathbf{c}$ , на другой — оба вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

<sup>2)</sup> Термин «растянутый» следует понимать в указанном в п. 2 условном смысле.

<sup>3)</sup> В силу следствия 2 из теоремы 2.4 в паре неколлинеарных векторов не могут содержаться нулевые векторы.

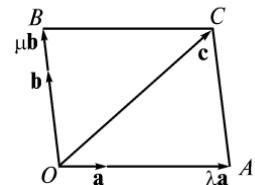


Рис. 2.10

Вставляя (2.11) и (2.12) в (2.10), будем иметь

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}. \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) можно переписать в виде

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = 0.$$

Так как из трех чисел  $\lambda, \mu, -1$  одно заведомо отлично от нуля, то последнее равенство доказывает линейную зависимость векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Достаточность доказана.

Попутно доказаны следующие утверждения:

**Следствие 1.** *Каковы бы ни были неколлинеарные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  для любого вектора  $\mathbf{c}$ , лежащего в одной плоскости с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , найдутся такие вещественные числа  $\lambda$  и  $\mu$ , что справедливо равенство*

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}. \quad (2.13)$$

**Следствие 2.** *Если векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  не компланарны, то они линейно независимы.*

**Следствие 3.** *Среди трех некомпланарных векторов не может быть двух коллинеарных векторов и не может быть ни одного нулевого вектора<sup>1)</sup>.*

## 6. Линейная зависимость четырех векторов.

**Теорема 2.6.** *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Доказательство. Прежде всего исключим случай, когда *какая-нибудь тройка из указанных четырех векторов компланарна*. Тогда в силу теоремы 2.5 указанная тройка векторов линейно зависима, а стало быть (в силу теоремы 2.3), и все четыре вектора линейно зависимы.

Остается рассмотреть случай, когда среди четырех векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  *никакая тройка векторов не компланарна* (и, стало быть, нет ни одной пары коллинеарных векторов и ни одного нулевого вектора<sup>2)</sup>).

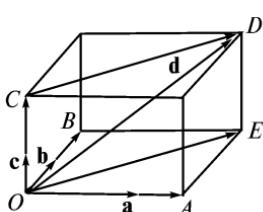


Рис. 2.11

Приведем все четыре вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  к общему началу  $O$  и проведем через конец  $D$  вектора  $\mathbf{d}$  плоскости, параллельные плоскостям, определяемым парами векторов  $\mathbf{bc}$ ,  $\mathbf{ac}$  и  $\mathbf{ab}$ <sup>3)</sup> (рис. 2.11). Точки пересечения указанных плоскостей с прямыми, на которых лежат векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , обозначим соответственно буквами  $A, B$  и  $C$ . (Существование указанных точек пересечения вытекает из того, что векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  некомпланарны.)

<sup>1)</sup> Иначе эти векторы оказались бы линейно зависимыми.

<sup>2)</sup> Согласно следствию 3 из теоремы 2.5 в тройке некомпланарных векторов не может содержаться ни одной пары коллинеарных векторов и ни одного нулевого вектора.

<sup>3)</sup> Векторы, входящие в каждую из указанных трех пар, не коллинеарны, а поэтому каждая из указанных трех пар определяет некоторую плоскость.

Убедимся в том, что вектор  $\mathbf{d} = \overline{OD}$  равен сумме трех векторов  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OC}$ , т.е.

$$\mathbf{d} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}. \quad (2.14)$$

В самом деле, из правила параллелограмма сложения векторов и из параллелограмма  $OCDE$  (рис. 2.11) вытекает, что  $\mathbf{d} = \overline{OC} + \overline{OE}$ , а из параллелограмма  $OBEA$  вытекает, что  $\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{OB}$ . Тем самым равенство (2.14) установлено.

Так как вектор  $\overline{OA}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\mathbf{a}$  (с которым он лежит на одной прямой), то в силу теоремы 2.1 найдется вещественное число  $\lambda$  такое, что

$$\overline{OA} = \lambda \mathbf{a}. \quad (2.15)$$

Из аналогичных соображений вытекает существование вещественных чисел  $\mu$  и  $v$  таких, что

$$\overline{OB} = \mu \mathbf{b}, \quad \overline{OC} = v \mathbf{c}. \quad (2.16)$$

Вставляя (2.15) и (2.16) в (2.14), будем иметь

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + v \mathbf{c}. \quad (2.17)$$

Равенство (2.17) можно переписать в виде

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + v \mathbf{c} + (-1)\mathbf{d} = 0. \quad (2.18)$$

Так как из четырех чисел  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $-1$  одно заведомо отлично от нуля, то равенство (2.18) доказывает линейную зависимость векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ . Теорема доказана.

Попутно доказано следующее утверждение:

**Следствие 1.** *Каковы бы ни были некомпланарные векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , для любого вектора  $\mathbf{d}$  найдутся такие вещественные числа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $v$ , что справедливо равенство*

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + v \mathbf{c}. \quad (2.17)$$

## 7. Понятие базиса. Аффинные координаты.

**Определение 1.** Говорят, что три линейно независимых вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образуют в пространстве базис, если любой вектор  $\mathbf{d}$  может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , т.е. если для любого вектора  $\mathbf{d}$  найдутся такие вещественные числа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $v$ , что справедливо равенство (2.17).

Аналогично определяется базис на некоторой плоскости  $\pi$ .

**Определение 2.** Говорят, что два лежащих в плоскости  $\pi$  линейно независимых вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  образуют на этой плоскости базис, если любой лежащий в плоскости  $\pi$  вектор  $\mathbf{c}$  может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , т.е. если

для любого лежащего в плоскости  $\pi$  вектора  $\mathbf{c}$  найдутся такие вещественные числа  $\lambda$  и  $\mu$ , что справедливо равенство (2.13).

Справедливы следующие *фундаментальные утверждения*:

- 1) любая тройка некомпланарных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образует базис в пространстве;
- 2) любая пара лежащих в данной плоскости неколлинеарных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  образует базис на этой плоскости.

Для доказательства первого из этих утверждений достаточно заметить, что, каковы бы ни были три некомпланарных вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , они линейно независимы (в силу следствия 2 из теоремы 2.5), и для любого вектора  $\mathbf{d}$  найдутся вещественные числа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $v$  такие, что справедливо равенство (2.17) (в силу следствия из теоремы 2.6). Утверждение 2) доказывается аналогично (с помощью следствия 1 из теоремы 2.4 и следствия 1 из теоремы 2.5).

В дальнейшем для определенности будем рассматривать базис в пространстве. Итак, пусть  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — произвольный базис в пространстве, т.е. произвольная тройка некомпланарных векторов. Тогда (по определению базиса) для любого вектора  $\mathbf{d}$  найдутся такие вещественные числа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $v$ , что будет справедливо равенство

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + v \mathbf{c}. \quad (2.17)$$

Принято называть равенство (2.17) *разложением вектора  $\mathbf{d}$  по базису  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$* , а числа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $v$  — *координатами вектора  $\mathbf{d}$  относительно базиса  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$* .

Докажем, что *каждый вектор  $\mathbf{d}$  может быть единственным способом разложен по базису  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$* , или (что то же самое) *координаты каждого вектора  $\mathbf{d}$  относительно базиса  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  определяются однозначно*.

Допустим, что для некоторого вектора  $\mathbf{d}$ , наряду с разложением (2.17), справедливо еще и другое разложение по тому же самому базису

$$\mathbf{d} = \lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b} + v' \mathbf{c}. \quad (2.19)$$

Почленное вычитание равенств (2.17) и (2.19) приводит к соотношению<sup>1)</sup>

$$(\lambda - \lambda')\mathbf{a} + (\mu - \mu')\mathbf{b} + (v - v')\mathbf{c} = 0. \quad (2.20)$$

В силу линейной независимости базисных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  соотношение (2.20) приводит к равенствам

$$\lambda - \lambda' = 0, \quad \mu - \mu' = 0, \quad v - v' = 0,$$

или  $\lambda = \lambda'$ ,  $\mu = \mu'$ ,  $v = v'$ . Единственность разложения по базису доказана.

<sup>1)</sup> Возможность почленного вычитания равенств (2.17) и (2.19) и производимой группировкой членов вытекают из свойств линейных операций над векторами (см. п. 2).

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами — координатами этих векторов. Именно справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.7.** *При сложении двух векторов  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  их координаты (относительно любого базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ) складываются. При умножении вектора  $\mathbf{d}_1$  на любое число  $\alpha$  все его координаты умножаются на это число.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{d}_1 = \lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} + \nu_1 \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}_2 = \lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b} + \nu_2 \mathbf{c}$ . Тогда в силу свойств 1°–7° линейных операций (см. п. 2)

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a} + (\mu_1 + \mu_2) \mathbf{b} + (\nu_1 + \nu_2) \mathbf{c}, \\ \alpha \mathbf{d}_1 &= (\alpha \lambda_1) \mathbf{a} + (\alpha \mu_1) \mathbf{b} + (\alpha \nu_1) \mathbf{c}.\end{aligned}$$

В силу единственности разложения по базису теорема доказана.

Перейдем теперь к определению так называемых *аффинных*<sup>1)</sup> координат точки.

*Аффинные координаты в пространстве* определяются заданием базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и некоторой точки  $O$ , называемой *началом координат*.

*Аффинные координаты* точки  $M$  называются координаты вектора  $\overrightarrow{OM}$  (относительно базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ).

Так как каждый вектор  $\overrightarrow{OM}$  может быть, и притом единственным способом, разложен по базису  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , то каждой точке пространства  $M$  однозначно соответствует тройка аффинных координат  $\lambda, \mu, \nu$ .

Разумеется, декартовы прямоугольные координаты являются частным случаем аффинных координат, соответствующим тройке взаимно ортогональных и единичных базисных векторов. Более подробно этот важный частный случай рассматривается в п. 9 настоящего параграфа.

В заключение заметим, что свойства базиса и понятие аффинных координат на плоскости вполне аналогичны случаю пространства.

**8. Проекция вектора на ось и ее свойства.** Прежде всего определим проекцию вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  на произвольную ось  $u$ . Обозначим буквами  $A'$  и  $B'$  основания перпендикуляров, опущенных на ось  $u$  из точек  $A$  и  $B$  соответственно (рис. 2.12).

Проекцией вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  на ось  $u$  называется величина  $A'B'$  направленного отрезка  $A'B'$  оси  $u$ .

Договоримся обозначать проекцию вектора  $\mathbf{a}$  на ось  $u$  символом  $\text{пр}_u \mathbf{a}$ . Построение проекции вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  на ось  $u$  иллюстрируется на рис. 2.12, где символом  $\alpha$  и  $\beta$  обозначены две проецирующие плоскости

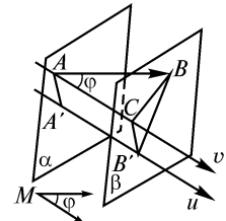


Рис. 2.12

<sup>1)</sup> Термин «аффинный» происходит от латинского слова *affinis*, что означает смежный, или соседний.

(т.е. плоскости, перпендикулярные оси  $u$  и проходящие через концы  $A$  и  $B$  вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ ).

Для дальнейшего нам понадобится понятие угла наклона вектора  $a$  к оси  $u$ . Этот угол может быть определен как угол  $\phi$  между двумя выходящими из произвольной точки  $M$  лучами, один из которых имеет направление, совпадающее с направлением вектора  $a = \overrightarrow{AB}$ , а другой — направление, совпадающее с направлением оси  $u$  (рис. 2.12).

Очевидно, на величину угла наклона вектора  $a$  к оси  $u$  не влияют выбор точки  $M$  выхода указанных выше лучей и замена оси  $u$  любой другой осью  $v$ , имеющей то же направление, что и ось  $u$ .

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.8.** *Проекция вектора  $a$  на ось  $u$  равна длине вектора  $a$ , умноженной на косинус  $\phi$  угла наклона вектора  $a$  к оси  $u$ .*

Доказательство. Обозначим через  $v$  ось, проходящую через начало  $A$  вектора  $a$  и имеющую то же направление, что и ось  $u$  (рис. 2.12), и пусть  $C$  — проекция  $B$  на ось  $v$ . Тогда  $\angle BAC$  равен углу  $\phi$  наклона вектора  $a = \overrightarrow{AB}$  к любой из осей  $u$  или  $v$ , причем точка  $C$  заведомо лежит в указанной на рис. 2.12 проецирующей плоскости  $\beta$  (т.е. в плоскости, перпендикулярной оси  $u$  и проходящей через точку  $B$ ).

Далее, можно утверждать, что  $A'B' = AC$ <sup>1)</sup>, ибо оси  $u$  и  $v$  параллельны и одинаково направлены и отрезки этих осей, заключенные между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , равны. Так как по определению  $\text{пр}_u \mathbf{a} = A'B'$ , то мы приходим к равенству

$$\text{пр}_u \mathbf{a} = AC. \quad (2.21)$$

Но величина  $AC$  представляет собой проекцию направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $v$ , которая (в силу п. 1 § 3 гл. 1) равна

$$AC = |\overrightarrow{AB}| \cos \phi = |\mathbf{a}| \cos \phi. \quad (2.22)$$

Из сопоставления равенств (2.21) и (2.22) вытекает равенство

$$\text{пр}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \phi. \quad (2.23)$$

Теорема доказана.

Основные свойства проекции вектора на ось заключаются в том, что линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов (на произвольную ось).

Именно справедливо следующее утверждение:

*При сложении двух векторов  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  их проекции на произвольную ось  $u$  складываются. При умножении вектора  $\mathbf{d}_1$  на любое*

<sup>1)</sup> Здесь под  $A'B'$  следует понимать величину направленного отрезка  $\overrightarrow{A'B'}$  оси  $u$ , а под  $AC$  — величину направленного отрезка  $\overrightarrow{AC}$  оси  $v$ .

число  $\alpha$  проекция этого вектора на произвольную ось и также умножается на число  $\alpha$ .

Доказательство этого утверждения отложим до п. 9. Описанные свойства проекции вектора на ось естественно назвать линейными свойствами.

**9. Декартова прямоугольная система координат как частный случай аффинной системы координат.** Как уже отмечалось выше, декартова прямоугольная система координат является частным случаем аффинной системы, отвечающей тройке взаимно ортогональных и единичных базисных векторов.

В случае декартовой прямоугольной системы базисные векторы принято обозначать не буквами **a**, **b**, **c**, а буквами **i**, **j**, **k**. Итак, каждый из векторов **i**, **j**, **k** имеет длину, равную единице, причем эти три вектора взаимно ортогональны (обычно направления векторов **i**, **j**, **k** берут совпадающими с направлениями декартовых осей *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно).

В силу основных результатов п. 7 *каждый вектор **d** может быть, и притом единственным способом, разложен по декартову прямоугольному базису **i**, **j**, **k**, т.е. для каждого вектора **d** найдется, и притом единственная, тройка чисел  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ <sup>1)</sup>* такая, что справедливо равенство

$$\mathbf{d} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \quad (2.24)$$

Числа  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  называются *декартовыми прямоугольными координатами вектора **d***. Если  $M$  — любая точка пространства, то определенные в гл. 1 декартовы прямоугольные координаты этой точки совпадают с декартовыми прямоугольными координатами вектора  $\overrightarrow{OM}$ .

Если вектор **d** имеет декартовы прямоугольные координаты  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , то мы будем использовать следующую символику:

$$\mathbf{d} = \{X, Y, Z\}.$$

Геометрический смысл декартовых прямоугольных координат вектора позволяет сделать следующее утверждение.

**Теорема 2.9.** *Декартовы прямоугольные координаты  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  вектора **d** равны проекциям этого вектора на оси *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно.*

Доказательство. В полной аналогии с рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 2.6 (п. 6), приложим вектор **d** к началу *O* декартовой системы и проведем через конец *D* этого вектора три плоскости, параллельные координатным плоскостям *Oyz*, *Oxz* и *Oxy* (рис. 2.13). Точки пересечения указанных плоскостей с осями *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно обозначим буквами *A*, *B* и *C*.

<sup>1)</sup> В случае декартовой прямоугольной системы для координат вектора **d** вместо  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  мы будем использовать обозначения  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Как и при доказательстве теоремы 2.6, получим, что

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Дальнейшие рассуждения упомянутой теоремы (с учетом изменившихся обозначений) приводят нас к равенствам

$$\overrightarrow{OA} = X\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OB} = Y\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{OC} = Z\mathbf{k}. \quad (2.25)$$

В рассматриваемом случае декартовой прямоугольной системы параллелепипед, построенный на базисных векторах  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  и имеющий вектор  $\mathbf{d}$  своей диагональю, является прямоугольным. Поэтому проекции

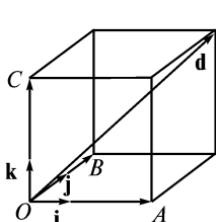


Рис. 2.13

вектора  $\mathbf{d}$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно равны величинам  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ . Для доказательства теоремы нам остается убедиться в том, что  $OA = X$ ,  $OB = Y$ ,  $OC = Z$ .

Убедимся, например, в равенстве  $OA = X$ . В силу (2.25)  $\overrightarrow{OA} = X\mathbf{i}$ . Отсюда и из того, что  $\mathbf{i}$  — единичный вектор, вытекает, что  $|OA| = |X|$ . Но и знаки чисел  $OA$  и  $X$  совпадают, ибо в случае, когда векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{i}$  направлены в одну сторону, оба числа  $OA$  и  $X$  положительны, а в случае, когда векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{i}$  направлены в противоположные стороны, оба числа  $OA$  и  $X$  отрицательны. Итак,  $OA = X$ . Аналогично доказываются равенства  $OB = Y$  и  $OC = Z$ . Теорема доказана.

Обозначим буквами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  углы наклона вектора  $\mathbf{d}$  к осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Три числа  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$  принято называть *направляющими косинусами* вектора  $\mathbf{d}$ .

Из теорем 2.9 и 2.8 (см. формулу (2.23)) вытекают следующие формулы для координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  вектора  $\mathbf{d}$ :

$$X = |\mathbf{d}| \cos \alpha, \quad Y = |\mathbf{d}| \cos \beta, \quad Z = |\mathbf{d}| \cos \gamma. \quad (2.26)$$

Так как квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его сторон, то из равенств  $OA = X$ ,  $OB = Y$  и  $OC = Z$  мы получим следующее выражение для длины вектора  $\mathbf{d}$  через его координаты:

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (2.27)$$

Из формул (2.26) и (2.27) вытекают следующие выражения для направляющих косинусов вектора  $\mathbf{d}$  через координаты этого вектора:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, & \cos \beta &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Возводя в квадрат и складывая равенства (2.28), получим, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.

Так как вектор  $\mathbf{d}$  однозначно определяется заданием трех его координат, то из формул (2.26) ясно, что вектор  $\mathbf{d}$  однозначно определяется заданием его длины и трех направляющих косинусов.

В заключение докажем сформулированные в конце предыдущего пункта линейные свойства проекции вектора на ось, т.е. докажем, что при сложении двух векторов  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  их проекции на произвольную ось и складываются, а при умножении вектора  $\mathbf{d}_1$  на любое число  $\alpha$  его проекция на произвольную ось и умножается на число  $\alpha$ .

Пусть дана произвольная ось  $u$  и любые векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ . Введем декартовы прямоугольные координаты так, чтобы ось  $u$  совпадала с осью  $Ox$ . Пусть

$$\mathbf{d}_1 = X_1 \mathbf{i} + Y_1 \mathbf{j} + Z_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{d}_2 = X_2 \mathbf{i} + Y_2 \mathbf{j} + Z_2 \mathbf{k}.$$

Тогда в силу теоремы 2.7

$$\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = (X_1 + X_2) \mathbf{i} + (Y_1 + Y_2) \mathbf{j} + (Z_1 + Z_2) \mathbf{k},$$

$$\alpha \mathbf{d}_1 = (\alpha X_1) \mathbf{i} + (\alpha Y_1) \mathbf{j} + (\alpha Z_1) \mathbf{k}.$$

Но в силу теоремы 2.9 и того, что ось  $u$  совпадает с осью  $Ox$ , можно утверждать, что

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{пр}_u \mathbf{d}_1, \quad X_2 = \text{пр}_u \mathbf{d}_2, \quad X_1 + X_2 = \text{пр}_u (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2), \\ \alpha X_1 &= \text{пр}_u (\alpha \mathbf{d}_1). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\text{пр}_u (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) = \text{пр}_u \mathbf{d}_1 + \text{пр}_u \mathbf{d}_2$ ,  $\text{пр}_u (\alpha \mathbf{d}_1) = \alpha \text{пр}_u \mathbf{d}_1$ , и сформулированное утверждение доказано.

## § 2. Скалярное произведение двух векторов

### 1. Определение скалярного произведения.

**Определение 1.** Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  будем обозначать символом  $\mathbf{ab}$ . Если угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равен  $\varphi$ , то по определению скалярное произведение этих двух векторов выражается формулой

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi. \quad (2.29)$$

Сформулируем другое определение скалярного произведения двух векторов, эквивалентное определению 1. Для этого воспользуемся

понятием проекции вектора  $\mathbf{b}$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{a}$ . В соответствии с обозначениями п. 8 § 1 будем обозначать проекцию вектора  $\mathbf{b}$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{a}$ , символом  $\text{пр}_a \mathbf{b}$ . На основании теоремы 2.8 получим

$$\text{пр}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos \varphi. \quad (2.30)$$

Сопоставление равенств (2.29) и (2.30) приводит нас к следующему выражению для скалярного произведения:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{пр}_a \mathbf{b}. \quad (2.31)$$

Конечно, в проведенных рассуждениях можно было бы поменять местами векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . При этом мы пришли бы к следующему выражению для скалярного произведения:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{пр}_b \mathbf{a}. \quad (2.32)$$

Выражения (2.31) и (2.32) приводят нас к следующему определению скалярного произведения (эквивалентному определению 1).

**Определение 2.** Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на ось, определяемую первым из указанных векторов.

Понятие скалярного произведения векторов родилось в механике. Если вектор  $\mathbf{a}$  изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора  $\mathbf{b}$ , то работа  $w$  указанной силы определяется равенством

$$w = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

т.е. равна скалярному произведению векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

## 2. Геометрические свойства скалярного произведения.

**Теорема 2.10.** Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

**Доказательство.** 1) Необходимость. Пусть векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны,  $\varphi$  — угол между ними. Тогда  $\cos \varphi = 0$  и в силу формулы (2.29) скалярное произведение  $\mathbf{a}\mathbf{b}$  равно нулю.

2) Достаточность. Пусть скалярное произведение  $\mathbf{a}\mathbf{b}$  равно нулю. Докажем, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны. Прежде всего исключим тривиальный случай, когда хотя бы один из векторов  $\mathbf{a}$  или  $\mathbf{b}$  является нулевым (нулевой вектор имеет неопределенное направление, и его можно считать ортогональным любому вектору). Если же оба вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые, то  $|\mathbf{a}| > 0$  и  $|\mathbf{b}| > 0$ , и поэтому из равенства  $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$  из формулы (2.29) вытекает, что  $\cos \varphi = 0$ , т.е. векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны.

Теорема доказана.

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, уточним понятие угла  $\phi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Приведем произвольные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  к общему началу  $O$  (рис. 2.14). Тогда в качестве угла  $\phi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно взять любой из двух указанных на рис. 2.14 углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В самом деле, сумма углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равна  $2\pi$ , и поэтому  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$ , а в определение скалярного произведения входит только косинус угла между векторами. Из двух углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  один заведомо не превосходит  $\pi$  (на рис. 2.14 не превосходит  $\pi$  угол  $\varphi_1$ ). Договоримся в дальнейшем под углом между двумя векторами подразумевать тот угол, который не превосходит  $\pi$ .

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.11.** Два ненулевых вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

**Доказательство.** Так как векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые, то в силу формулы (2.29) знак скалярного произведения совпадает со знаком  $\cos \phi$ . Но если угол  $\phi$  не превосходит  $\pi$ , то  $\cos \phi$  положителен тогда и только тогда, когда  $\phi$  — острый угол, и отрицателен тогда и только тогда, когда  $\phi$  — тупой угол. Теорема доказана.

**3. Алгебраические свойства скалярного произведения.** Скалярное произведение векторов обладает следующими четырьмя свойствами:

1°  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$  (переместительное свойство);

2°  $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{ab})$  (сочетательное относительно числового множителя свойство);

3°  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$  (распределительное относительно суммы векторов свойство);

4°  $\mathbf{aa} > 0$ , если  $\mathbf{a}$  — ненулевой вектор, и  $\mathbf{aa} = 0$ , если  $\mathbf{a}$  — нулевой вектор<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Отметим, что в курсе линейной алгебры вместо множества векторов рассматривают множество элементов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  любой природы. Если для элементов этого множества определены операция сложения и операция умножения на вещественное число и для этих операций справедливы те же самые свойства 1°–7°, которые установлены нами для линейных операций над векторами (см. п. 2 § 1), то указанное множество элементов называется *линейным пространством*.

Произвольное линейное пространство называется *евклидовым* пространством, если: 1) известно правило, посредством которого любым двум элементам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  этого пространства ставится в соответствие число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом  $\mathbf{ab}$ ; 2) указанное правило таково, что для скалярного произведения справедливы только что сформулированные свойства 1°–4°.

Таким образом, пространство всех геометрических векторов с определенными нами линейными операциями и скалярным произведением представляет собой один из примеров линейного евклидова пространства.

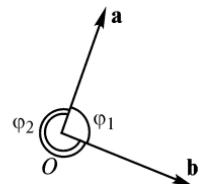


Рис. 2.14

Убедимся в справедливости этих свойств. Свойство 1° непосредственно вытекает из формулы (2.29).

Для доказательства свойства 2° воспользуемся определением 2 скалярного произведения, т.е. формулой (2.32). Учитывая, что проекция вектора на ось обладает линейным свойством  $\text{пр}_b(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \text{пр}_b \mathbf{a}$  (см. конец п. 8 и конец п. 9 § 1), получим

$$(\alpha \mathbf{a}) \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot \text{пр}_b (\alpha \mathbf{a}) = \alpha |\mathbf{b}| \cdot \text{пр}_b \mathbf{a} = \alpha \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}).$$

Тем самым свойство 2° доказано.

Для доказательства свойства 3° снова воспользуемся формулой (2.32) и линейным свойством проекции вектора на ось  $\text{пр}_c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_c \mathbf{a} + \text{пр}_c \mathbf{b}$  (см. п. 8 § 1). Получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{c} &= |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_c (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \cdot (\text{пр}_c \mathbf{a} + \text{пр}_c \mathbf{b}) = \\ &= |\mathbf{c}| \text{пр}_c \mathbf{a} + |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_c \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Нам остается доказать свойство 4°. Для этого заметим, что непосредственно из формулы (2.29) вытекает, что  $\mathbf{a}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ , т.е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату длины этого вектора*. Отсюда, в частности, вытекает, что скалярный квадрат  $\mathbf{a}\mathbf{a}$  положителен, когда вектор  $\mathbf{a}$  ненулевой, и равен нулю, когда вектор  $\mathbf{a}$  нулевой.

Доказанные свойства имеют фундаментальное значение. Они позволяют при скалярном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно, не заботясь при этом о порядке векторных множителей и сочетая числовые множители. Указанная возможность будет существенно использована в следующем пункте.

#### 4. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах.

**Теорема 2.12.** Если два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т.е.

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2. \quad (2.33)$$

Доказательство. Составим из тройки базисных векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  все возможные пары и для каждой из пар определим скалярное произведение. Учитывая, что базисные векторы являются попарно ортогональными и имеют единичную длину, получим

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{j}\mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}\mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k}\mathbf{j} = 0, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{i}\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{k} = 1.$$

Далее, учитывая, что  $\mathbf{a} = X_1 \mathbf{i} + Y_1 \mathbf{j} + Z_1 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = X_2 \mathbf{i} + Y_2 \mathbf{j} + Z_2 \mathbf{k}$ , и опираясь на установленную в предыдущем пункте возможность почлененного скалярного перемножения векторных многочленов, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} = & X_1 X_2 \mathbf{i} \mathbf{i} + X_1 Y_2 \mathbf{i} \mathbf{j} + X_1 Z_2 \mathbf{i} \mathbf{k} + Y_1 X_2 \mathbf{j} \mathbf{i} + Y_1 Y_2 \mathbf{j} \mathbf{j} + Y_1 Z_2 \mathbf{j} \mathbf{k} + \\ & + Z_1 X_2 \mathbf{k} \mathbf{i} + Z_1 Y_2 \mathbf{k} \mathbf{j} + Z_1 Z_2 \mathbf{k} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношений (2.34) вытекает формула (2.33). Теорема доказана.

**Следствие 1.** Необходимым и достаточным условием ортогональности векторов

$$\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$$

является равенство

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0.$$

Это следствие непосредственно вытекает из теоремы 2.10 и формулы (2.34).

**Следствие 2.** Угол  $\varphi$  между векторами

$$\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$$

определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (2.35)$$

В самом деле,  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ , и нам остается воспользоваться формулой (2.33) для скалярного произведения и формулой (2.27) для длины вектора.

### § 3. Векторное и смешанное произведения векторов

#### 1. Правые и левые тройки векторов и системы координат.

**Определение 1.** Три вектора называются *упорядоченными тройкой* (или просто *тройкой*), если указано, какой из этих векторов является первым, какой — вторым и какой — третьим.

При записи тройки векторов мы всегда будем располагать эти векторы в порядке их следования. Так, запись **bac** означает, что первым элементом тройки является вектор **b**, вторым — вектор **a** и третьим — вектор **c**.

**Определение 2.** Тройка некомпланарных векторов **abc** называется *правой* (*левой*), если выполнено одно из следующих трех условий:

1° если эти векторы, будучи приведены к общему началу, располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, не согнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки;

2° если после приведения к общему началу вектор **c** располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами **a** и **b**, откуда кратчайший поворот от **a** к **b** кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке);

3° если, находясь внутри телесного угла, образованного приведенными к общему началу векторами **a**, **b**, **c**, мы видим поворот от **a** к **b** и от него к **c** совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Легко проверить, что условия 1°, 2° и 3° эквивалентны между собой. Предоставляем читателю с помощью каждого из условий 1°, 2° и 3° убедиться в том, что тройка **abc**, изображенная на рис. 2.15, яв-

ляется правой, а тройка **abc**, изображенная на рис. 2.16, является левой.

**Замечание.** Понятие правой и левой тройки теряет смысл для компланарных векторов.

Если две тройки векторов либо обе являются правыми, либо обе являются левыми, то говорят, что эти тройки *одной ориентации*. В противном случае говорят, что рассматриваемые две тройки *противоположной ориентации*.

Всего из трех векторов **a**, **b** и **c** можно составить следующие шесть троек:

$$\mathbf{abc}, \quad \mathbf{bca}, \quad \mathbf{cab}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{bac}, \quad \mathbf{acb}, \quad \mathbf{cba}. \quad (2.37)$$

С помощью условия 3° определения 2 легко проверить, что *все три тройки* (2.36) *той же ориентации*, что и тройка **abc**, а *все три тройки* (2.37) *имеют ориентацию, противоположную abc*.

**Определение 3.** Аффинная или декартова система координат называется *правой* (*левой*), если три базисных вектора образуют *правую* (*левую*) тройку.

Ради определенности договоримся в дальнейшем рассматривать только *правые системы координат*.

## 2. Определение векторного произведения двух векторов.

**Определение.** Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор **c**, обозначаемый символом **c** = **[ab]** и удовлетворяющий следующим трем требованиям:

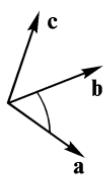


Рис. 2.15

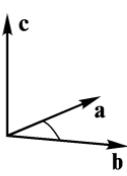


Рис. 2.16

1) длина вектора  $\mathbf{c}$  равна произведению длин векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  на синус угла  $\varphi$  между ними<sup>1)</sup>, т.е.

$$|\mathbf{c}| = |[\mathbf{ab}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi; \quad (2.38)$$

2) вектор  $\mathbf{c}$  ортогонален к каждому из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ;

3) вектор  $\mathbf{c}$  направлен так, что тройка векторов  $\mathbf{abc}$  является правой<sup>2)</sup>.

Понятие векторного произведения также родилось в механике. Если вектор  $\mathbf{b}$  изображает приложенную в некоторой точке  $M$  силу, а вектор  $\mathbf{a}$  идет из некоторой точки  $O$  в точку  $M$ , то вектор  $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$  представляет собой момент силы  $\mathbf{b}$  относительно точки  $O$ .

### 3. Геометрические свойства векторного произведения.

**Теорема 2.13.** Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

**Доказательство.** 1) Необходимость вытекает из самого определения векторного произведения: для коллинеарных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  векторное произведение по определению равно нулю (см. формулу (2.38) и сноска<sup>3)</sup>).

2) Достаточность. Пусть векторное произведение  $[\mathbf{ab}]$  равно нулю. Докажем, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны.

Прежде всего исключим тривиальный случай, когда хотя бы один из векторов  $\mathbf{a}$  или  $\mathbf{b}$  является нулевым (нулевой вектор имеет неопределенное направление, и его можно считать коллинеарным любому вектору). Если же оба вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые, то  $|\mathbf{a}| > 0$  и  $|\mathbf{b}| > 0$ , и поэтому из равенства  $[\mathbf{ab}] = 0$  и из формулы (2.38) вытекает, что  $\sin\varphi = 0$ , т.е. векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны.

Теорема доказана.

**Теорема 2.14.** Длина (или модуль) векторного произведения  $[\mathbf{ab}]$  равняется площади  $S$  параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

**Доказательство.** Так как площадь параллелограмма равна произведению смежных сторон этого параллелограмма на синус угла между ними, то теорема непосредственно вытекает из формулы (2.38).

<sup>1)</sup> В соответствии с договоренностью, принятой в п. 2 § 2, в качестве угла между векторами берем тот угол  $\varphi$ , который не превосходит  $\pi$ . При этом всегда  $\sin\varphi \geq 0$  и величина (2.38) неотрицательна. Из формулы (2.38) следует также, что в случае коллинеарных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определяемый вектор  $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$  является нулевым.

<sup>2)</sup> Требования 1) и 2) определяют вектор  $\mathbf{c}$  с точностью до двух взаимно противоположных направлений. Требование 3) отбирает одно из этих двух направлений. В случае, когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, тройка  $\mathbf{abc}$  является компланарной, но в этом случае уже из требования 1) вытекает, что  $\mathbf{c} = 0$ .

<sup>3)</sup> Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны (и, в частности, если хотя бы один из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  нулевой), формула (2.39) остается справедливой, ибо в этом случае равны нулю как векторное произведение  $[\mathbf{ab}]$ , так и площадь  $S$  построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  параллелограмма.

Чтобы получить следствие из теоремы 2.14, введем понятие орта.

**Определение.** О р т о м произвольного ненулевого вектора  $\mathbf{c}$  назовем единичный вектор, коллинеарный  $\mathbf{c}$  и имеющий одинаковое с  $\mathbf{c}$  направление.

**Следствие из теоремы 2.14.** Если  $\mathbf{e}$  — орт векторного произведения  $[\mathbf{ab}]$ , а  $S$  — площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то для векторного произведения  $[\mathbf{ab}]$  справедлива следующая формула:

$$[\mathbf{ab}] = S \mathbf{e}. \quad (2.39)$$

З а м е ч а н и е. Из определений орта и векторного произведения вытекает, что тройка  $\mathbf{abe}$  является правой (ибо тройка  $\mathbf{ab}[\mathbf{ab}]$  является правой).

Следующее свойство устанавливает важную для дальнейшего формулу.

**Теорема 2.15.** Если  $\mathbf{c}$  — какой-нибудь вектор,  $\pi$  — любая содержащая его плоскость,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, лежащий в плоскости  $\pi$  и ортогональный к  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}$  — единичный вектор, ортогональный к плоскости  $\pi$  и направленный так, что тройка  $\mathbf{ecg}$  является правой, то для любого лежащего в плоскости  $\pi$  вектора  $\mathbf{a}$  справедлива формула

$$[\mathbf{ac}] = \text{пр}_e \mathbf{a} \cdot |\mathbf{c}| \mathbf{g}. \quad (2.40)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что векторы, стоящие в левой и правой частях (2.40): 1) имеют одинаковую длину, 2) коллинеарны, 3) имеют одинаковое направление.

В силу теоремы 2.14  $|[\mathbf{ac}]| = S$ , где  $S$  — площадь построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$  параллелограмма. Длина вектора, стоящего в правой части (2.40), равна  $|\mathbf{c}| |\text{пр}_e \mathbf{a}|$ , т.е. тоже равна

$S$ , ибо если за основание указанного параллелограмма принять вектор  $\mathbf{c}$ , то высота его  $h$  будет равна  $|\text{пр}_e \mathbf{a}|$ , (рис. 2.17).

Коллинеарность векторов, стоящих в левой и правой частях (2.40), вытекает из того, что *оба эти вектора ортогональны к плоскости  $\pi$*  (вектор  $[\mathbf{ac}]$  в силу определения векторного произведения, а вектор  $\text{пр}_e \mathbf{a} \cdot |\mathbf{c}| \mathbf{g}$  в силу того, что вектор  $\mathbf{g}$  по условию ортогонален к плоскости  $\pi$ ).

Остается проверить, что векторы, стоящие в левой и правой частях (2.40), *одинаково направлены*.

Для этого достаточно заметить, что векторы  $[\mathbf{ac}]$  и  $\mathbf{g}$  одинаково направлены (противоположно направлены), когда тройка  $\mathbf{acg}$  является правой (левой), т.е. когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{e}$  лежат по одну сторону от  $\mathbf{c}$  (по разные стороны от  $\mathbf{c}$ <sup>1)</sup>) и проекция  $\text{пр}_e \mathbf{a}$  является положительной (от-

<sup>1)</sup> При этом мы исключаем тривиальный случай, когда вектор  $\mathbf{a}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{c}$ . В этом тривиальном случае  $[\mathbf{ac}] = 0$  и  $\text{пр}_e \mathbf{a} = 0$ , так что равенство (2.40) очевидно.

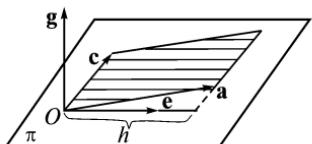


Рис. 2.17

рицательной), но это и означает, что векторы  $[\mathbf{ac}]$  и  $\text{пр}_e \mathbf{a} \cdot |\mathbf{c}| \mathbf{g}$  всегда одинаково направлены.

Теорема доказана.

**4. Смешанное произведение трех векторов.** Пусть даны три произвольных вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Если вектор  $\mathbf{a}$  векторно умножается на вектор  $\mathbf{b}$ , а затем получившийся при этом вектор  $[\mathbf{ab}]$  скалярно умножается на вектор  $\mathbf{c}$ , то в результате получается число  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c}$ , называемое смешанным произведением векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

Геометрический смысл смешанного произведения поясняет следующая теорема.

**Теорема 2.16.** Смешанное произведение  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c}$  равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , взятыму со знаком плюс, если тройка  $\mathbf{abc}$  правая, и со знаком минус, если тройка  $\mathbf{abc}$  левая. Если же векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны, то  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c}$  равно нулю.

Доказательство. Прежде всего, исключим тривиальный случай, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. В этом случае векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны<sup>1)</sup>, и нам требуется доказать, что смешанное произведение  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c}$  равно нулю. Но последнее очевидно, ибо векторное произведение  $[\mathbf{ab}]$  двух коллинеарных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равно нулю.

Остается рассмотреть случай, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны. Обозначим через  $S$  площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а через  $\mathbf{e}$  — орт векторного произведения  $[\mathbf{ab}]$ .

Тогда, как доказано в предыдущем пункте, справедлива формула (2.39). С помощью этой формулы и формулы (2.31) для скалярного произведения получим

$$[\mathbf{ab}] \mathbf{c} = (S\mathbf{e}) \mathbf{c} = S(\mathbf{ec}) = S |\mathbf{e}| \cdot \text{пр}_e \mathbf{c} = S \cdot \text{пр}_e \mathbf{c}. \quad (2.41)$$

Сначала предположим, что векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  не компланарны. Тогда  $\text{пр}_e \mathbf{c}$  с точностью до знака равна высоте  $h$  параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , при условии, что основанием служит параллелограмм, построенный на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (рис. 2.18).

Таким образом, с точностью до знака правая часть (2.41) равна объему  $V$  построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  параллелепипеда. Остается уточнить знак.

Очевидно, что  $\text{пр}_e \mathbf{c} = +h$ , если векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{c}$  лежат по одну сторону от плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , и  $\text{пр}_e \mathbf{c} = -h$ , если векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{c}$  лежат по разные стороны от указанной

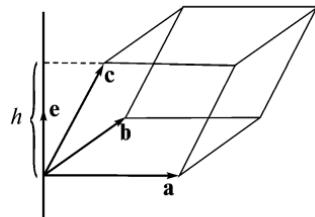


Рис. 2.18

<sup>1)</sup> Ибо среди трех некомпланарных векторов не может быть двух коллинеарных векторов (см. следствие 3 из теоремы 2.5).

плоскости. Но это означает, что  $\text{пр}_e \mathbf{c} = +h$ , если тройки  $\mathbf{abc}$  и  $\mathbf{abe}$  одной ориентации, и  $\text{пр}_e \mathbf{c} = -h$ , если указанные тройки противоположной ориентации. Так как по определению векторного произведения тройка  $\mathbf{abe}$  является правой (см. конец предыдущего пункта), то

$$\text{пр}_e \mathbf{c} = \begin{cases} +h, & \text{если } \mathbf{abc} \text{ — правая тройка,} \\ -h, & \text{если } \mathbf{abc} \text{ — левая тройка.} \end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно вставить это значение  $\text{пр}_e \mathbf{c}$  в правую часть (2.41).

В случае, когда векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны, вектор  $\mathbf{c}$  лежит в плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , откуда следует, что  $\text{пр}_e \mathbf{c} = 0$ , и по формуле (2.41)  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c} = 0$ . Теорема полностью доказана.

**Следствие 1.** Справедливо равенство  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c} = \mathbf{a} [\mathbf{bc}]$ .

В самом деле, из переместительного свойства скалярного произведения вытекает, что  $\mathbf{a} [\mathbf{bc}] = [\mathbf{bc}] \mathbf{a}$ , и достаточно доказать, что  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c} = [\mathbf{bc}] \mathbf{a}$ . С точностью до знака, последнее равенство очевидно, ибо как правая, так и левая его части с точностью до знака равны объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Но и знаки правой и левой частей последнего равенства совпадают, ибо обе тройки  $\mathbf{abc}$  и  $\mathbf{bca}$  относятся к группе троек (2.36) и имеют одинаковую ориентацию (см. п. 1).

Доказанное равенство  $[\mathbf{ab}] \mathbf{c} = \mathbf{a} [\mathbf{bc}]$  позволяет записывать смешанное произведение трех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  просто в виде  $\mathbf{abc}$ , не указывая при этом, какие именно два вектора (первые два или последние два) перемножаются векторно.

**Следствие 2.** Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

В самом деле, компланарность векторов в силу теоремы 2.16 влечет равенство нулю их смешанного произведения. Обратное вытекает из того, что для некомпланарных векторов смешанное произведение (в силу той же теоремы) равно отличному от нуля объему параллелепипеда.

**Следствие 3.** Смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно нулю.

В самом деле, такие три вектора заведомо компланарны.

**5. Алгебраические свойства векторного произведения.** Векторное произведение векторов обладает следующими четырьмя свойствами:

1°  $[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]$  (свойство антисимметричности сомножителей);

2°  $[(\alpha \mathbf{a}) \mathbf{b}] = \alpha [\mathbf{ab}]$  (сочетательное относительно числового множителя свойство);

3°  $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{c}] = [\mathbf{ac}] + [\mathbf{bc}]$  (распределительное относительно суммы векторов свойство);

4°  $[\mathbf{aa}] = 0$  для любого вектора  $\mathbf{a}$ .

Убедимся в справедливости этих свойств.

Для доказательства свойства 1° положим  $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$ ,  $\mathbf{d} = [\mathbf{ba}]$ . Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, то в силу теоремы 2.13  $\mathbf{c} = \mathbf{d} = \mathbf{0}$ , и свойство 1° доказано. Если же  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны, то векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ , во-первых, имеют одинаковую длину (в силу формулы (2.38) для длины векторного произведения) и, во-вторых, коллинеарны (в силу того, что оба вектора  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  ортогональны к плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ). Но тогда либо  $\mathbf{c} = \mathbf{d}$ , либо  $\mathbf{c} = -\mathbf{d}$ . Если бы имела место первая возможность, то по определению векторного произведения обе тройки  $\mathbf{abc}$  и  $\mathbf{bac}$  оказались бы правыми, но это невозможно, ибо в силу п. 1 эти тройки противоположной ориентации<sup>1)</sup>.

Итак,  $\mathbf{c} = -\mathbf{d}$ , и свойство 1° полностью доказано.

Для доказательства свойства 2° положим  $\mathbf{c} = [(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}]$ ,  $\mathbf{d} = \alpha[\mathbf{ab}]$  и прежде всего исключим тривиальные случаи, когда вектор  $\mathbf{a}$  коллинеарен  $\mathbf{b}$  или когда  $\alpha = 0$ . В этих случаях (в силу теоремы 2.13 и определения произведения вектора на число) мы получим, что  $\mathbf{c} = \mathbf{d} = \mathbf{0}$ , и свойство 2° доказано.

Пусть теперь векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны и  $\alpha \neq 0$ . Докажем, что и в этом случае векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  равны. Обозначим буквой  $\varphi$  угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а буквой  $\psi$  угол между векторами  $\alpha\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . По определению длины векторного произведения и произведения вектора на число можно утверждать, что

$$|\mathbf{c}| = |\alpha| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \psi, \quad |\mathbf{d}| = |\alpha| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi. \quad (2.42)$$

Учтем теперь, что могут представиться два случая: 1)  $\psi = \varphi$  (когда  $\alpha > 0$  и векторы  $\mathbf{a}$  и  $\alpha\mathbf{a}$  направлены в одну сторону; рис. 2.19); 2)  $\psi = \pi - \varphi$  (когда  $\alpha < 0$  и векторы  $\mathbf{a}$  и  $\alpha\mathbf{a}$  направлены в противоположные стороны; рис. 2.20). В обоих случаях  $\sin \psi = \sin \varphi$  и в силу формул (2.42)  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|$ , т.е. векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  имеют одинаковую длину.

Далее, очевидно, что векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  коллинеарны, ибо ортогональность к плоскости, определяемой векторами  $\alpha\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , означает ортогональность и к плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Для доказательства равенства векторов  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  остается проверить, что эти векторы имеют одинаковое направление. Пусть  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ); тогда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\alpha\mathbf{a}$  одинаково направлены (противоположно направлены), и, стало быть, векторы  $[\mathbf{ab}]$  и  $[(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}]$  также одинаково направлены (противоположно направлены), а это означает, что векторы  $\mathbf{d} = \alpha[\mathbf{ab}]$  и  $\mathbf{c} = [(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}]$  всегда одинаково направлены. Свойство 2° доказано.

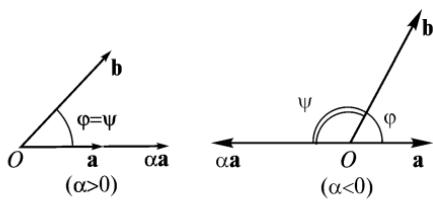


Рис. 2.19

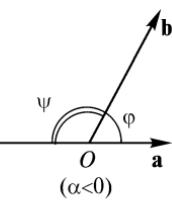


Рис. 2.20

<sup>1)</sup> Одна из этих троек входит в группу (2.36), а другая — в группу (2.37).

Переходим к доказательству с о ѹ с т в а 3°. Рассмотрим отдельно  
д в а с л у ч а я: 1) случай, когда векторы **a**, **b** и **c** компланарны; 2) слу-  
чай, когда эти векторы *не компланарны*.

В первом случае векторы **a**, **b** и **c**, будучи приведены к общему началу, располагаются в одной плоскости, которую мы обозначим буквой  $\pi$ . Пусть **e** — единичный вектор, принадлежащий плоскости  $\pi$  и ортогональный к вектору **c**, а **g** — единичный вектор, ортогональный к плоскости  $\pi$  и такой, что тройка **ecg** является правой.

Согласно теореме 2.15

$$[\mathbf{ac}] = \text{пр}_e \mathbf{a} \cdot |\mathbf{c}| \mathbf{g}, \quad [\mathbf{bc}] = \text{пр}_e \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}| \mathbf{g}, \\ [(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}] = \text{пр}_e (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot |\mathbf{c}| \mathbf{g}.$$

Свойство 3° непосредственно вытекает из последних трех формул и из линейного свойства проекции  $\text{пр}_e \mathbf{a} + \text{пр}_e \mathbf{b} = \text{пр}_e (\mathbf{a} + \mathbf{b})$  (п. 8 § 1).

Пусть теперь векторы **a**, **b** и **c** не компланарны. Так как три вектора  $[(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}]$ ,  $[\mathbf{ac}]$  и  $[\mathbf{bc}]$  ортогональны к вектору **c**, то эти три вектора компланарны, а стало быть (в силу теоремы 2.5), линейно зависимы. Но это означает, что найдутся такие числа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $v$ , хотя бы одно из которых не нуль, что справедливо равенство

$$\lambda [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{c}] = \mu [\mathbf{ac}] + v [\mathbf{bc}]. \quad (2.43)$$

Остается доказать, что  $\lambda = \mu$  и  $\lambda = v$ <sup>1)</sup>. Докажем, например, что  $\lambda = \mu$ . Для этого, пользуясь уже доказанным (в п. 3 § 2) распределительным свойством 3° скалярного произведения, умножим равенство (2.43) скалярно на вектор **b** и учтем, что смешанное произведение  $[\mathbf{bc}] \mathbf{b}$  равно нулю (в силу следствия 3 из теоремы 2.16). В результате получим

$$\lambda [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{c}] \mathbf{b} = \mu [\mathbf{ac}] \mathbf{b}.$$

Поскольку векторы **a**, **b** и **c** не компланарны, смешанное произведение  $[\mathbf{ac}] \mathbf{b}$  не равно нулю, и для доказательства равенства  $\lambda = \mu$  достаточно доказать равенство смешанных произведений  $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{c}] \mathbf{b}$  и  $[\mathbf{ac}] \mathbf{b}$ . Равенство абсолютных величин указанных смешанных произведений вытекает из того, что (в силу теоремы 2.16) эти абсолютные величины равны объемам двух параллелепипедов с равновеликими основаниями<sup>2)</sup> (на рис. 2.21 эти равновеликие основания заштрихованы штрихами

<sup>1)</sup> Так как по условию хотя бы одно из указанных чисел отлично от нуля, то, доказав, что  $\lambda = \mu = v$ , мы можем поделить равенство (2.43) на число  $\lambda = \mu = v$ , в результате чего получим свойство 3°.

<sup>2)</sup> Основанием одного параллелепипеда служит параллелограмм, построенный на векторах **a** и **b**, а другого — параллелограмм, построенный на векторах **a** + **b** и **b**. Равновеликость указанных параллелограммов вытекает из того, что они имеют общее основание, совпадающее с вектором **b**, и общую высоту, опущенную из конца вектора **a** + **b** на вектор **b**.

разных наклонов) и с общей высотой  $h$ , опущенной из конца вектора  $\mathbf{c}$  (рис. 2.21).

Равенство знаков указанных смешанных произведений вытекает из определения правой (левой) тройки с помощью условия 3° (см. п. 1), ибо из этого условия<sup>1)</sup> очевидно, что тройки  $\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b}$  и  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}\mathbf{b}$  одной ориентации. Равенство  $\lambda = \mu$  доказано.

Аналогично (посредством умножения (2.43) скалярно на вектор  $\mathbf{a}$ ) доказывается равенство  $\lambda = v$ . Свойство 3° полностью доказано.

Остается доказать свойство 4°, утверждающее, что *векторный квадрат любого вектора равен нулю*, но это свойство непосредственно вытекает из теоремы 2.13 и из того, что любой вектор  $\mathbf{a}$  коллинеарен сам с собой.

**З а м е ч а н и е.** Оба свойства 2° и 3° формулируются применительно к первому сомножителю векторного произведения. (Свойство 2° утверждает возможность сочетания числового множителя  $\alpha$  с первым множителем векторного произведения, а свойство 3° утверждает возможность распределения относительно суммы векторов первого сомножителя векторного произведения.)

Естественно возникает вопрос, справедливы ли аналогичные свойства применительно ко второму сомножителю векторного произведения, т.е. можно ли утверждать, что

$$[\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})] = \alpha [\mathbf{a}\mathbf{b}] \quad \text{и} \quad [\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})] = [\mathbf{a}\mathbf{b}] + [\mathbf{a}\mathbf{c}]. \quad (2.44)$$

Оказывается, свойства (2.44) уже являются следствиями свойств 2° и 3° и свойства антиперестановочности 1°. В самом деле, из свойств 1°, 2° и 3° вытекает, что

$$[\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})] = -[(\alpha\mathbf{b})\mathbf{a}] = -\alpha[\mathbf{b}\mathbf{a}] = \alpha[\mathbf{a}\mathbf{b}]$$

и аналогично

$$[\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})] = -[(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a}] = -\{[\mathbf{b}\mathbf{a}] + [\mathbf{c}\mathbf{a}]\} = [\mathbf{a}\mathbf{b}] + [\mathbf{a}\mathbf{c}].$$

В заключение отметим, что доказанные свойства имеют фундаментальное значение. Они позволяют при векторном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно и производить сочетание числовых множителей (но при этом необходимо либо сохранять порядок векторных множителей, либо при изменении этого порядка менять знак на противоположный!).

В следующем пункте мы будем существенно использовать эти свойства.

<sup>1)</sup> А также из того, что вектор  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  лежит в одной плоскости с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , причем «между ними».

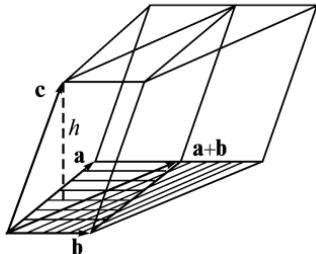


Рис. 2.21

## 6. Выражение векторного произведения в декартовых координатах.

**Теорема 2.17.** Если два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то векторное произведение этих векторов имеет вид

$$[\mathbf{ab}] = \{Y_1Z_2 - Y_2Z_1, Z_1X_2 - Z_2X_1, X_1Y_2 - X_2Y_1\}. \quad (2.45)$$

Для запоминания формулы (2.45) удобно использовать символ определителя<sup>1)</sup> и переписать эту формулу в виде

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (2.45')$$

Раскрывая определитель, стоящий в правой части (2.45'), по элементам первой строки, мы получим разложение вектора  $[\mathbf{ab}]$  по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , эквивалентное (2.45).

**Доказательство теоремы 2.17.** Составим из тройки базисных векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  все возможные пары и для каждой из пар подсчитаем векторное произведение. Учитывая, что базисные векторы взаимно ортогональны, образуют правую тройку и имеют единичную длину, получим<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} [\mathbf{ii}] &= 0, & [\mathbf{ji}] &= -\mathbf{k}, & [\mathbf{ki}] &= \mathbf{j}, \\ [\mathbf{ij}] &= \mathbf{k}, & [\mathbf{jj}] &= 0, & [\mathbf{kj}] &= -\mathbf{i}, \\ [\mathbf{ik}] &= -\mathbf{j}, & [\mathbf{jk}] &= \mathbf{i}, & [\mathbf{kk}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Далее, принимая во внимание, что  $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}$ , и опираясь на установленную в предыдущем пункте возможность почлененного векторного перемножения векторных многочленов, получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{ab}] &= X_1X_2[\mathbf{ii}] + X_1Y_2[\mathbf{ij}] + X_1Z_2[\mathbf{ik}] + Y_1X_2[\mathbf{ji}] + Y_1Y_2[\mathbf{jj}] + \\ &\quad + Y_1Z_2[\mathbf{jk}] + Z_1X_2[\mathbf{ki}] + Z_1Y_2[\mathbf{kj}] + Z_1Z_2[\mathbf{kk}]. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношений (2.46) вытекает разложение

$$[\mathbf{ab}] = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\mathbf{i} + (Z_1X_2 - Z_2X_1)\mathbf{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\mathbf{k},$$

эквивалентное равенству (2.45). Теорема доказана.

<sup>1)</sup> Теория определителей второго и третьего порядков изложена в Дополнении к главе 1.

<sup>2)</sup> При этом мы учитываем также, что векторный квадрат вектора равен нулю (свойство  $4^\circ$  из п. 5), и принимаем во внимание, что, поскольку тройка  $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$  является правой, обе тройки  $\mathbf{j} \mathbf{k} \mathbf{i}$  и  $\mathbf{k} \mathbf{i} \mathbf{j}$  являются правыми, а все три тройки  $\mathbf{j} \mathbf{i} \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{i} \mathbf{k} \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k} \mathbf{j} \mathbf{i}$  — левыми (см. п. 1, формулы (2.36) и (2.37)).

**Следствие.** Если два вектора  $\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$  и  $\mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$  коллинеарны, то координаты их пропорциональны, т.е.

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Заметим, что в знаменателях последних равенств могут стоять нули. Чтобы обойти эту трудность, мы раз и навсегда договоримся всякую пропорцию  $a/b = c/d$  понимать в смысле равенства  $ad = bc$ .

Для доказательства следствия достаточно заметить, что из равенства нулю векторного произведения и из формулы (2.45) вытекают равенства

$$Y_1 Z_2 = Y_2 Z_1, \quad Z_1 X_2 = Z_2 X_1, \quad X_1 Y_2 = X_2 Y_1,$$

которые в силу сделанного выше замечания эквивалентны доказываемым пропорциям.

## 7. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах.

**Теорема 2.18.** Если три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \quad \mathbf{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

то смешанное произведение  $\mathbf{abc}$  равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.47)$$

**Доказательство.** Так как смешанное произведение  $\mathbf{abc}$  равно скалярному произведению векторов  $[\mathbf{ab}]$  и  $\mathbf{c}$  и поскольку координаты вектора  $[\mathbf{ab}]$  определяются формулой (2.45), а координаты  $\mathbf{c}$  равны  $\{X_3, Y_3, Z_3\}$ , то в силу выражения (2.33) для скалярного произведения векторов в координатах получим

$$\mathbf{abc} = X_3(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) + Y_3(X_2 Z_1 - X_1 Z_2) + Z_3(X_1 Y_2 - X_2 Y_1).$$

Если воспользоваться выражением для определителя второго порядка и символом такого определителя, то последнее выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{abc} = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3 \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \quad (2.48)$$

Формулы (2.47) и (2.48) эквивалентны, ибо при разложении определителя, стоящего в правой части (2.47), по третьей строке получается выражение, стоящее в правой части (2.48)<sup>1)</sup>. Теорема доказана.

**Следствие.** Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов  $\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ ,  $\mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$  и  $\mathbf{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$  является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов, т.е. равенство

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

В самом деле, достаточно привлечь следствие 2 из теоремы 2.16 и воспользоваться формулой (2.47).

**8. Двойное векторное произведение.** Пусть даны три произвольных вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Если вектор  $\mathbf{b}$  векторно умножается на вектор  $\mathbf{c}$ , а вектор  $\mathbf{a}$  также векторно умножается на векторное произведение  $[\mathbf{bc}]$ , то получающийся при этом вектор  $[\mathbf{a} [\mathbf{bc}]]$  называется *двойным векторным произведением*.

**Теорема 2.19.** Для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  справедлива формула<sup>2)</sup>

$$[\mathbf{a} [\mathbf{bc}]] = \mathbf{b} (\mathbf{ac}) - \mathbf{c} (\mathbf{ab}). \quad (2.49)$$

**Доказательство.** Рассмотрим отдельно два случаев: 1) векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  коллинеарны; 2) векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  не коллинеарны.

В первом случае обозначим через  $\mathbf{c}_0$  орт вектора  $\mathbf{c}$  и учтем, что  $\mathbf{c} = |\mathbf{c}| \cdot \mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{b} = \pm |\mathbf{b}| \cdot \mathbf{c}_0$ , где знак плюс берется для случая, когда векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  одинаково направлены, а знак минус — для случая, когда  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  противоположно направлены. С помощью этих формул для  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{b}$  получим, что  $\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) = 0$ <sup>3)</sup>, т.е. правая часть (2.49) равна нулю. Но и левая часть (2.49) равна нулю, ибо векторное произведение  $[\mathbf{bc}]$  двух коллинеарных векторов равно нулю. Для первого случая теорема доказана.

Переходим к доказательству теоремы для случая, когда векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  не коллинеарны. Так как вектор  $[\mathbf{a} [\mathbf{bc}]]$  ортогонален вектору  $[\mathbf{bc}]$ , а последний ортогонален плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , то векторы  $[\mathbf{a} [\mathbf{bc}]]$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны, а поэтому (в силу следствия 1 из теоремы 2.5) вектор  $[\mathbf{a} [\mathbf{bc}]]$  можно разложить по двум неколлинеарным

<sup>1)</sup> См. формулу (Д1.16) из п. 5 Дополнения к главе 1.

<sup>2)</sup> Для запоминания этой формулы удобно следующее правило: *двойное векторное произведение равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных*. Это правило годится и для случая, когда внутреннее векторное произведение относится к первым двум векторам: с его помощью получается следующая формула  $[[\mathbf{ab}] \mathbf{c}] = \mathbf{b} (\mathbf{ac}) - \mathbf{a} (\mathbf{bc})$ , являющаяся следствием (2.49).

<sup>3)</sup> В самом деле, элементарный подсчет показывает, что как  $\mathbf{b} (\mathbf{ac})$ , так и  $\mathbf{c} (\mathbf{ab})$  равно  $\pm |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot (\mathbf{ac}_0) \cdot \mathbf{c}_0$ .

векторам  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  как по базису, т.е. найдутся вещественные числа  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что

$$[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}. \quad (2.50)$$

Остается доказать, что  $\alpha = \mathbf{a} \mathbf{c}$ ,  $\beta = -\mathbf{a} \mathbf{b}$ . Докажем, например, что  $\alpha = \mathbf{a} \mathbf{c}$ . Воспользуемся теоремой 2.15. Для этого обозначим буквой  $\pi$  плоскость, определяемую векторами  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , буквой  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, лежащий в  $\pi$  и ортогональный к  $\mathbf{c}$ , буквой  $\mathbf{g}$  — единичный вектор, ортогональный плоскости  $\pi$  и такой, что тройка  $\mathbf{e} \mathbf{c} \mathbf{g}$  является правой. По теореме 2.15

$$[\mathbf{b} \mathbf{c}] = \text{пр}_e \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}| \cdot \mathbf{g}. \quad (2.51)$$

Если  $\mathbf{c}_0$  — орт вектора  $\mathbf{c}$ , то правая тройка  $\mathbf{e} \mathbf{c}_0 \mathbf{g}$  образует *декартов прямоугольный базис*. Разложим вектор  $\mathbf{a}$  по этому базису, учитывая, что координаты равны проекциям вектора  $\mathbf{a}$  на базисные векторы:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e} \cdot \text{пр}_e \mathbf{a} + \mathbf{c}_0 \cdot \text{пр}_c \mathbf{a} + \mathbf{g} \cdot \text{пр}_g \mathbf{a}. \quad (2.52)$$

Умножая векторно (2.52) на (2.51) и учитывая, что  $[\mathbf{e} \mathbf{g}] = -\mathbf{c}_0$ ,  $[\mathbf{c}_0 \mathbf{g}] = \mathbf{e}$ ,  $[\mathbf{g} \mathbf{g}] = 0$  (сравните с формулами (2.46)), получим

$$[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = -\mathbf{c}_0 \cdot \text{пр}_e \mathbf{a} \cdot \text{пр}_e \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}| + \mathbf{e} \cdot \text{пр}_c \mathbf{a} \cdot \text{пр}_e \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}|. \quad (2.53)$$

Сравнивая формулы (2.50) и (2.53), будем иметь

$$\alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c} = -\mathbf{c}_0 \cdot \text{пр}_e \mathbf{a} \cdot \text{пр}_e \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}| + \mathbf{e} \cdot \text{пр}_c \mathbf{a} \cdot \text{пр}_e \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}|. \quad (2.54)$$

Остается умножить обе части (2.54) скалярно на  $\mathbf{e}$  и учесть, что  $\mathbf{b} \mathbf{e} = \text{пр}_e \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}_0 \mathbf{e} = 0$ ,  $\mathbf{e} \mathbf{e} = 1$ . Окончательно получим

$$\alpha \cdot \text{пр}_e \mathbf{b} = \text{пр}_c \mathbf{a} \cdot \text{пр}_e \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}| \quad \text{или} \quad \alpha = |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_c \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{c}.$$

Для доказательства равенства  $\beta = -\mathbf{a} \mathbf{b}$  следует в проведенных рассуждениях поменять ролями векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{b}$  и учесть, что  $[\mathbf{a} [\mathbf{c} \mathbf{b}]] = -[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]]$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Дадим другое доказательство теоремы 2.19, основанное на специальном выборе декартовой прямоугольной системы и на непосредственном просчете в координатах всех выражений, участвующих в формуле (2.49). Направим ось  $Oz$  вдоль вектора  $\mathbf{c}$ , а ось  $Oy$  возьмем в плоскости векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Тогда векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  будут иметь следующие координаты:

$$\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}, \quad \mathbf{b} = \{0, Y', Z'\}, \quad \mathbf{c} = \{0, 0, Z''\}.$$

Применяя формулу для векторного произведения (2.45), будем иметь  $[\mathbf{b} \mathbf{c}] = \{Y'Z'', 0, 0\}$ , а отсюда по той же формуле (2.45)

$$[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \{0, ZY'Z'', -YY'Z''\}. \quad (2.55)$$

Далее, очевидно, что  $(\mathbf{a} \mathbf{c}) = ZZ''$ ,  $(\mathbf{a} \mathbf{b}) = YY' + ZZ'$ , а поэтому

$$\mathbf{b} (\mathbf{a} \mathbf{c}) = \{0, Y'ZZ'', Z'ZZ''\}. \quad (2.56)$$

$$\mathbf{c} (\mathbf{a} \mathbf{b}) = \{0, 0, YY'Z'' + ZZ'Z''\}. \quad (2.57)$$

Из сопоставления равенств (2.55), (2.56) и (2.57) вытекает формула (2.49).

## ГЛАВА 3

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе устанавливаются формулы, по которым преобразуются координаты произвольной точки плоскости (или соответственно пространства) при переходе от одной декартовой прямоугольной системы к произвольной другой декартовой прямоугольной системе.

Мы доказываем, что координаты произвольной точки относительно первой системы являются *линейными функциями* координат той же точки  $M$  относительно второй системы.

Попутно мы устанавливаем, что если две декартовы прямоугольные системы на плоскости  $\pi$  (в пространстве) образованы парами (тройками) одной ориентации, то одна из этих систем может быть совмещена с другой посредством параллельного переноса и последующего поворота на некоторый угол  $\varphi$  в плоскости  $\pi$  (вокруг некоторой оси в пространстве).

#### **§ 1. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости**

Пусть на плоскости  $\pi$  заданы две произвольные декартовы прямоугольные системы координат: первая, определяемая началом  $O$  и базисными векторами  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , и вторая, определяемая началом  $O'$  и базисными векторами  $\mathbf{i}'$  и  $\mathbf{j}'$  (рис. 3.1).

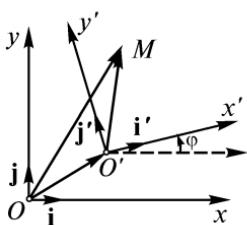


Рис. 3.1

Поставим перед собой цель — выразить координаты  $x$  и  $y$  произвольной точки  $M$  плоскости  $\pi$  относительно первой системы координат через координаты  $x'$  и  $y'$  этой же точки  $M$  относительно второй системы координат.

Заметим, что координаты  $x$  и  $y$  совпадают с координатами вектора  $OM$  в разложении его по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , а координаты  $x'$  и  $y'$  совпадают с координатами вектора  $O'M$  в разложении его по базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ , т.е.

$$\overline{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}, \quad (3.1)$$

$$\overline{O'M} = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}'. \quad (3.2)$$

Если обозначить через  $a$  и  $b$  координаты начала  $O'$  второй системы относительно первой системы, то

$$\overline{OO'} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j}. \quad (3.3)$$

Так как любой вектор на плоскости  $\pi$  можно разложить по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , то найдутся числа  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$  и  $\alpha_{22}$  такие, что

$$\mathbf{i}' = \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = \alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j}. \quad (3.4)$$

В силу правила треугольника сложения векторов (см. рис. 3.1)

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}. \quad (3.5)$$

Вставляя в правую часть (3.2) значения  $\mathbf{i}'$  и  $\mathbf{j}'$ , определяемые формулами (3.4), и после этого подставляя в (3.5) значения  $\overline{OM}$ ,  $\overline{O'M}$  и  $\overline{OO'}$ , определяемые формулами (3.1), (3.2) и (3.3), и группируя слагаемые относительно  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , получим<sup>1)</sup>

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y')\mathbf{i} + (b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y')\mathbf{j}. \quad (3.6)$$

В силу единственности разложения вектора по базису из равенства (3.6) получим искомые формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y', \\ y &= b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Мы приходим к следующему замечательному выводу: *каковы бы ни были две произвольные декартовы системы на плоскости  $\pi$ , координаты любой точки плоскости  $\pi$  относительно первой системы являются линейными функциями координат той же точки относительно второй системы.*

Установив этот фундаментальный алгебраический факт, перейдем к геометрической интерпретации полученных формул. Для этого договоримся обозначать символом  $\cos(\mathbf{ab})$  косинус угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Помножая каждое из равенств (3.4) скалярно сначала на  $\mathbf{i}$ , а затем на  $\mathbf{j}$  и учитывая, что  $\mathbf{ii} = 1$ ,  $\mathbf{jj} = 1$ ,  $\mathbf{ij} = 0$ , получим<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\widehat{\mathbf{i}\mathbf{i}}), \quad \alpha_{12} = \cos(\widehat{\mathbf{i}\mathbf{j}}), \\ \alpha_{21} &= \cos(\widehat{\mathbf{j}\mathbf{i}}), \quad \alpha_{22} = \cos(\widehat{\mathbf{j}\mathbf{j}}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Будем существенно различать следующие два случая: 1) случай, когда базисные векторы направлены так, что оба кратчайших поворота от  $\mathbf{i}$  к  $\mathbf{j}$

<sup>1)</sup> Возможность сгруппировать слагаемые относительно  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  вытекает из свойств линейных операций над векторами (см. п. 2 § 1 гл. 2).

<sup>2)</sup> Учитываем также, что скалярное произведение двух единичных векторов равно косинусу угла между ними.

от  $\mathbf{i}'$  к  $\mathbf{j}'$  совершаются в одном направлении (либо оба по часовой стрелке, либо оба против часовой стрелки); 2) случай, когда базисные векторы направлены так, что кратчайшие повороты от  $\mathbf{i}$  к  $\mathbf{j}$  и от  $\mathbf{i}'$  к  $\mathbf{j}'$  совершаются в противоположных направлениях.

В обоих случаях обозначим через  $\phi$  угол между базисными векторами  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{i}'$ , отсчитываемый в направлении, отвечающем кратчайшему повороту от  $\mathbf{i}$  к  $\mathbf{j}$ . Тогда  $\alpha_{11} = \cos \phi$ .

В первом случае угол между базисными векторами  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{j}'$  также равен  $\phi$ , и поэтому *первая система координат может быть совмещена со второй посредством параллельного переноса вдоль вектора  $OO'$  и последующего поворота в плоскости  $\pi$  вокруг начала на угол  $\phi$*

(этот случай изображен на рис. 3.1).

В втором случае угол между базисными векторами  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{j}'$  равен  $\pi - \phi$  и *первую систему координат невозможно совместить со второй посредством параллельного переноса и поворота, не выводящего из плоскости  $\pi$*  (нужно еще изменить направление оси ординат на противоположное или, что то же самое, взять изображение плоскости  $\pi$  в плоском зеркале. Второй случай изображен на рис. 3.2).

Пользуясь формулами (3.8), подсчитаем для обоих случаев коэффициенты  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$  и  $\alpha_{22}$ <sup>1)</sup>.

В первом случае получим:  $\alpha_{11} = \cos \phi$ ,  $\alpha_{22} = \cos \phi$ ,  $\alpha_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$ ,  $\alpha_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin \phi$ .

В втором случае получим:  $\alpha_{11} = \cos \phi$ ,  $\alpha_{22} = \cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$ ,  $\alpha_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$ ,  $\alpha_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$ .

Таким образом, в первом случае формулы преобразования координат (3.7) принимают вид

$$x = a + x' \cos \phi - y' \sin \phi, \quad y = b + x' \sin \phi + y' \cos \phi. \quad (3.9)$$

В втором случае соответствующие формулы преобразования принимают вид

$$x = a + x' \cos \phi + y' \sin \phi, \quad y = b + x' \sin \phi - y' \cos \phi. \quad (3.10)$$

Если мы примем договоренность рассматривать только такие системы координат, у которых кратчайший поворот от первого

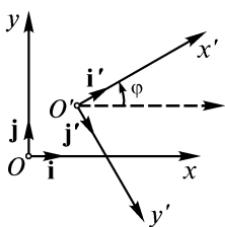


Рис. 3.2

<sup>1)</sup> Все углы отсчитываются в направлении, отвечающем кратчайшему повороту от  $\mathbf{i}$  к  $\mathbf{j}$ .

базисного вектора ко второму происходит против часовой стрелки (будем называть такие системы *правыми*), то второй случай будет исключен и любое преобразование координат будет определяться формулами (3.9).

Приходим к выводу, что, каковы бы ни были две правые системы координат  $Oxy$  и  $O'x'y'$ , первая из них может быть совмещена со второй посредством параллельного переноса вдоль вектора  $\overline{OO'}$  и последующего поворота вокруг начала на некоторый угол  $\phi$ .

Разрешая уравнения (3.9) относительно  $x'$  и  $y'$ , получим обратные формулы, выражающие координаты  $x'$  и  $y'$  любой точки  $M$  относительно второй системы через координаты ее относительно первой системы<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \phi + (y - b) \sin \phi, \\ y' &= -(x - a) \sin \phi + (y - b) \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Общее преобразование координат (3.9) распадается на сумму двух преобразований, одно из которых отвечает только параллельному переносу системы, а другое — только повороту системы вокруг начала на угол  $\phi$ .

В самом деле, полагая в формулах (3.9) угол поворота  $\phi$  равным нулю, получим *формулы преобразования координат при параллельном переносе системы вдоль вектора  $\overline{OO'} = \{a, b\}$* :

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \quad (3.12)$$

Полагая в тех же формулах (3.9) координаты  $a$  и  $b$  вектора  $\overline{OO'}$  равными нулю, получим *формулы преобразования координат при повороте системы вокруг начала на угол  $\phi$*  (в направлении против часовой стрелки)

$$x = x' \cos \phi - y' \sin \phi, \quad y = x' \sin \phi + y' \cos \phi. \quad (3.13)$$

## § 2. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве

**1. Общие формулы преобразования.** Пусть в пространстве заданы две произвольные декартовы прямоугольные системы координат: первая, определяемая началом  $O$  и базисными векторами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , и вторая, определяемая началом  $O'$  и базисными векторами  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ .

Поставим перед собой цель — выразить координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  произвольной точки  $M$  относительно первой системы через координаты  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  этой же точки  $M$  относительно второй системы.

---

<sup>1)</sup> Так как определитель системы (3.9) равен единице, то эту систему можно разрешить относительно  $x'$  и  $y'$ .

Заметим, что координаты  $x, y, z$  совпадают с координатами вектора  $\overline{OM}$  в разложении его по базису  $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$ , и координаты  $x', y', z'$  совпадают с координатами вектора  $\overline{O'M}$  в разложении его по базису  $\mathbf{i}' \mathbf{j}' \mathbf{k}'$ , т.е.

$$\overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (3.14)$$

$$\overline{O'M} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'. \quad (3.15)$$

Если обозначить через  $a, b$  и  $c$  координаты начала  $O'$  второй системы относительно первой системы, то

$$\overline{OO'} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}. \quad (3.16)$$

Так как любой вектор можно разложить по базису  $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$ , то найдутся девять чисел  $\alpha_{lm}$  ( $l = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3$ ) таких, что

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j} + \alpha_{13}\mathbf{k}, & \mathbf{j}' &= \alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} + \alpha_{23}\mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' &= \alpha_{31}\mathbf{i} + \alpha_{32}\mathbf{j} + \alpha_{33}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В силу правила треугольника сложения векторов

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}. \quad (3.18)$$

Вставляя в правую часть (3.15) значения  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  и  $\mathbf{k}'$ , определяемые формулами (3.17), и после этого подставляя в (3.18) значения  $\overline{OM}$ ,  $\overline{O'M}$  и  $\overline{OO'}$ , определяемые формулами (3.14), (3.15) и (3.16), и группируя слагаемые относительно  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ , получим

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z')\mathbf{i} + \\ &+ (b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z')\mathbf{j} + (c + \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z')\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В силу единственности разложения вектора по базису из равенства (3.19) получим искомые формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z', \\ y &= b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z', \\ z &= c + \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Итак, доказано следующее фундаментальное утверждение: *каковы бы ни были две произвольные декартовы прямоугольные системы координат, координаты  $x, y$  и  $z$  любой точки пространства относительно первой системы являются линейными функциями координат  $x', y'$  и  $z'$  той же точки относительно второй системы.*

Умножая каждое из равенств (3.17) скалярно сначала на  $\mathbf{i}$ , а затем на  $\mathbf{j}$  и на  $\mathbf{k}$ , получим следующие выражения для чисел  $\alpha_{lm}$ :

$$\alpha_{11} = \cos(\widehat{\mathbf{i}\mathbf{i}}), \quad \alpha_{12} = \cos(\widehat{\mathbf{i}\mathbf{j}}), \quad \alpha_{13} = \cos(\widehat{\mathbf{i}\mathbf{k}}),$$

$$\alpha_{21} = \cos(\widehat{\mathbf{j}\mathbf{i}}), \quad \alpha_{22} = \cos(\widehat{\mathbf{j}\mathbf{j}}), \quad \alpha_{23} = \cos(\widehat{\mathbf{j}\mathbf{k}}),$$

$$\alpha_{31} = \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{i}}), \quad \alpha_{32} = \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{j}}), \quad \alpha_{33} = \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{k}}).$$

**2. Выяснение геометрического смысла. Углы Эйлера.** Уясним геометрический смысл формул преобразования (3.20). Для вычисления чисел  $\alpha_{lm}$  и их геометрического значения предположим, что первая и вторая системы имеют общее начало (т.е.  $a = b = c = 0$ ).

Ради определенности будем считать, что обе системы  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$  являются правыми.

Введем в рассмотрение три угла, полностью характеризующие расположение осей второй системы относительно первой. Обозначим через  $u$  ось, совпадающую с линией пересечения координатной плоскости  $Oxy$  первой системы с координатной плоскостью  $Ox'y'$  второй системы и направленную так, что три направления  $Oz$ ,  $Oz'$  и  $u$  образуют правую тройку (рис. 3.3).

Пусть теперь  $\psi$  — угол между осями  $Ox$  и  $u$ , отсчитываемый в плоскости  $Oxy$  от оси  $Ox$  в направлении кратчайшего поворота от  $Ox$  к  $Oy$ ,  $\theta$  — не превосходящий  $\pi$  угол между осями  $Oz$  и  $Oz'$  и, наконец,  $\phi$  — угол между осями  $u$  и  $Ox$ , отсчитываемый в плоскости  $Ox'y'$  от оси  $u$  в направлении кратчайшего поворота от  $Ox'$  к  $Oy'$ .

Три угла  $\phi$ ,  $\psi$  и  $\theta$  называются углами Эйлера<sup>1)</sup>. Очевидно, по трем углам Эйлера и по направлениям осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  однозначно определяются направления осей  $Ox'$ ,  $Oy'$  и  $Oz'$ .

Если заданы три угла Эйлера, то преобразование первой системы  $Oxyz$  во вторую систему  $Ox'y'z'$  можно представить в виде последовательного проведения следующих трех поворотов:

1) поворота системы  $Oxyz$  на угол  $\psi$  вокруг оси  $Oz$ , переводящего эту систему в систему  $Ox_1y_1z_1$  (рис. 3.4);

2) поворота системы  $Ox_1y_1z_1$  на угол  $\theta$  вокруг оси  $Ox_1$ , переводящего эту систему в систему  $Ox_2y_2z_2$  (рис. 3.5);

3) поворота системы  $Ox_2y_2z_2$  на угол  $\phi$  вокруг оси  $Oz_2 = Oz'$ , переводящего эту систему в систему  $Ox'y'z'$  (рис. 3.6).

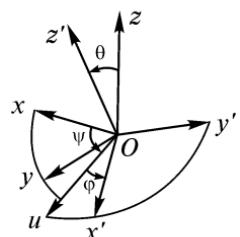


Рис. 3.3

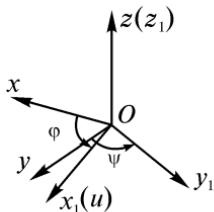


Рис. 3.4

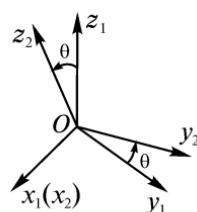


Рис. 3.5

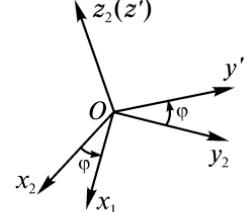


Рис. 3.6

Каждый из указанных трех поворотов производится в одной из координатных плоскостей соответствующей системы. Поэтому для

<sup>1)</sup> Леонард Эйлер (1707–1783) — великий математик, член Петербургской Академии наук, большую часть жизни провел в России, по происхождению швейцарец.

соответствующих координат при каждом таком повороте будут справедливы формулы вида (3.13) (см. § 1).

Это позволяет написать следующие формулы:

1) для первого поворота

$$x = x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi, \quad y = x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi, \quad z = z_1; \quad (3.21)$$

2) для второго поворота

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \cos \theta - z_2 \sin \theta, \quad z_1 = y_2 \sin \theta + z_2 \cos \theta; \quad (3.22)$$

3) для третьего поворота

$$x_2 = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y_2 = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \quad z_2 = z'. \quad (3.23)$$

Внося (3.23) в (3.22), а затем (3.22) в (3.21), получим

$$\begin{aligned} x &= (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \cos \psi - \\ &\quad - [(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \cos \theta - z' \sin \theta] \sin \psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \sin \psi + \\ &\quad + [(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \cos \theta - z' \sin \theta] \cos \psi, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$z = (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \sin \theta + z' \cos \theta.$$

Сравнивая формулы (3.24) с формулами (3.20) (при  $a = b = c = 0$ ), окончательно получим выражения для чисел  $\alpha_{lm}$  через углы Эйлера:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi, \\ \alpha_{12} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi, \\ \alpha_{13} &= \sin \theta \sin \varphi, \\ \alpha_{21} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi, \\ \alpha_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi, \\ \alpha_{23} &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \alpha_{31} &= \sin \psi \sin \theta, \\ \alpha_{32} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ \alpha_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Для вывода формул (3.25) мы использовали допущение, что обе системы имеют общее начало. Разумеется, отказ от этого допущения не изменит вида формул (3.25), ибо ни направление осей координат, ни величина углов Эйлера не зависят от того, где выбрано начало первой и второй систем.

*Самое общее преобразование координат представляет собой суперпозицию (последовательное проведение) параллельного перено-*

са и трех производимых в соответствующих координатных плоскостях поворотов и определяется формулами (3.20), в которых (при условии, что обе системы являются правыми) числа  $\alpha_{lm}$  выражаются через углы Эйлера по формулам (3.25).

Формулы, аналогичные (3.25), могут быть получены и для случая, когда системы  $Oxyz$  и  $O'x'y'z'$  либо обе являются левыми, либо имеют разную ориентацию.

**З а м е ч а н и е.** Если  $Oxyz$  и  $O'x'y'z'$  — две произвольные правые декартовы прямоугольные системы в пространстве, то первая из них может быть совмещена со второй посредством параллельного переноса, совмещающего их начала, и одног о поворота вокруг некоторой оси в пространстве.

Для нахождения указанной оси, во-первых, учтем, что она проходит через общее начало  $O'$  совмещенных посредством параллельного переноса систем (ибо это начало остается неподвижным при повороте), и, во-вторых, заметим, что если  $O'M'$  — произвольный вектор, лежащий на искомой оси вращения, то координаты точки  $M'$  не изменяются при повороте.

Отсюда вытекает, что для нахождения координат  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  точки  $M'$  в системе  $O'x'y'z'$  следует в системе (3.20) (взятой при  $a = b = c = 0$ ) положить  $x = x'$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ . Это приведет нас к следующей однородной системе трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - 1)x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' &= 0, \\ \alpha_{12}x' + (\alpha_{22} - 1)y' + \alpha_{32}z' &= 0, \\ \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + (\alpha_{33} - 1)z' &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

С помощью формул (3.25) можно показать, что определитель этой системы равен нулю. Стало быть, в силу п. 8 Дополнения к гл. 1 система (3.26) *имеет нетривиальные решения*, которые определяют совокупность коллинеарных векторов  $O'M'$ , лежащих на оси вращения.

Одним из таких векторов будет вектор  $\overrightarrow{O'M'_0} = \{x', y', 1\}$ , координаты  $x'$  и  $y'$  которого определяются из первых двух уравнений (3.26) при  $z' = 1$ .

### § 3. Линейные преобразования

**1. Понятие линейных преобразований плоскости.** *Линейным преобразованием плоскости  $\pi$*  называется преобразование, при котором каждая точка  $M(x, y)$  этой плоскости переходит в точку  $M'$ , координаты  $x'$ ,  $y'$  которой определяются формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Обычно говорят, что соотношения (3.27) задают линейное преобразование плоскости. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

называется *определителем линейного преобразования* (3.27). В случае  $\Delta \neq 0$  преобразование (3.27) называется *невырожденным*, а в случае  $\Delta = 0$  — *вырожденным*. Мы в дальнейшем будем рассматривать невырожденные линейные преобразования, т.е. будем считать  $\Delta \neq 0^1$ ). Такие линейные преобразования называются *аффинными*.

**З а м е ч а н и е.** Наименование *линейное преобразование* объясняется тем, что координаты  $x'$ ,  $y'$  точек  $M'$  — образов точек  $M(x, y)$  (сами эти точки называются *прообразами* точек  $M'$ ) являются линейными функциями координат  $x$ ,  $y$ . Отметим, что определение линейных преобразований инвариантно относительно выбора декартовой системы координат, поскольку координаты точки в одной декартовой системе координат выражаются линейно через ее координаты в любой другой декартовой системе координат.

**2. Аффинные преобразования плоскости.** В предыдущем пункте мы отметили, что аффинные преобразования плоскости — это линейные преобразования (3.27), для которых  $\Delta \neq 0$ . Перечислим некоторые свойства таких преобразований.

1°. *Последовательное выполнение двух аффинных преобразований является аффинным преобразованием.*

Это свойство проверяется непосредственно.

2°. *Тождественное преобразование  $x' = x$ ,  $y' = y$  также является аффинным.*

Действительно, для этого преобразования

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

3°. *Преобразование, обратное данному аффинному* (т.е. преобразование плоскости  $\pi$ , переводящее точки  $M'(x', y')$  в точки  $M(x, y)$ ), *также является аффинным*.

Докажем это свойство. Обратное преобразование может быть получено следующим образом. Найдем  $x$  и  $y$  из соотношений (3.27). Для этого перепишем их следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= x' - a_{13}, \\ a_{21}x + a_{22}y &= y' - a_{23}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>) Если  $\Delta = 0$ , то с помощью преобразования (3.27) все точки  $M(x, y)$  плоскости  $\pi$  преобразуются в точки  $M'(x', y')$ , расположенные на некоторой прямой. Действительно, если  $\Delta = 0$ , то  $a_{11} = \lambda a_{21}$ ,  $a_{21} = \lambda a_{22}$ . Поэтому, если мы умножим на  $-\lambda$  второе из соотношений (3.27) и сложим с первым, то получим  $x' - \lambda y' = a_{13} - \lambda a_{23}$ . Мы видим, что координаты  $x'$ ,  $y'$  точек  $M'$  удовлетворяют линейному уравнению, т.е. все точки  $M'$  лежат на прямой.

Решение этой системы имеет такой вид:

$$x = \Delta_x / \Delta, \quad y = \Delta_y / \Delta, \quad (3.29)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} x' - a_{13} & a_{12} \\ y' - a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & x' - a_{13} \\ a_{21} & y' - a_{23} \end{vmatrix}$$

(см. Дополнение к гл. 1, формулы (Д1.8) и (Д1.6)). Раскроем выражения для  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  по формуле (Д1.2) и подставим полученные значения в (3.29). Получим следующие выражения для обратного преобразования:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_{22}}{\Delta} x' - \frac{a_{12}}{\Delta} y' - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ y &= -\frac{a_{21}}{\Delta} x' + \frac{a_{11}}{\Delta} y' - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Видим, что обратное преобразование является линейным. Чтобы убедиться, что оно является аффинным, остается доказать, что его определитель  $\Delta' \neq 0$ . В самом деле,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\Delta^2} = \frac{\Delta}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta} \neq 0.$$

Итак, доказано, что преобразование, обратное данному аффинному, также является аффинным.

*4°. Аффинное преобразование представляет собой взаимно однозначное преобразование плоскости.*

Это означает, что каждая точка  $M'(x', y')$  есть образ единственной точки  $M(x, y)$  и в свою очередь каждая точка  $M(x, y)$  представляет собой прообраз лишь одной точки  $M'(x', y')$ .

Докажем это свойство. Предположим, что две точки  $M(x, y)$  и  $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$  преобразуются с помощью (3.27) в одну точку  $M'(x', y')$ . Тогда путем вычитания из соотношений (3.27) аналогичных соотношений для координат  $\bar{x}, \bar{y}$  точки  $\bar{M}$  получим следующую систему линейных уравнений для разностей  $x - \bar{x}, y - \bar{y}$ :

$$a_{11}(x - \bar{x}) + a_{12}(y - \bar{y}) = 0,$$

$$a_{21}(x - \bar{x}) + a_{22}(y - \bar{y}) = 0.$$

Эта система имеет нулевое решение  $x - \bar{x} = 0, y - \bar{y} = 0$ , а так как ее определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ , то это нулевое решение единственno.

Итак,  $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ , т.е. точки  $M$  и  $\bar{M}$  совпадают. Таким образом, каждая точка  $M'(x', y')$  есть образ единственной точки  $M(x, y)$ . Обращаясь к формулам (3.30), путем аналогичных рассуждений мы убедимся, что каждая точка  $M(x, y)$  представляет собой прообраз лишь одной точки  $M'(x', y')$ .

### 3. Основное свойство аффинных преобразований плоскости.

Докажем следующее утверждение:

**Теорема 3.1.** *При аффинном преобразовании плоскости каждая прямая переходит в прямую и параллельные прямые переходят в параллельные прямые.*

Доказательство. Рассмотрим на плоскости  $\pi$  прямую  $L$ , определяемую уравнением

$$Ax + By + C = 0. \quad (3.31)$$

Чтобы выяснить, что представляет собой совокупность точек  $M'(x', y')$  — образов точек  $M(x, y)$ , расположенных на прямой  $L$ , — подставим в уравнение (3.31) вместо  $x$  и  $y$  их выражения через  $x', y'$  по формулам (3.30). В результате получим соотношение вида

$$A'x' + B'y' + C' = 0. \quad (3.32)$$

Мы видим, что  $x'$  и  $y'$  удовлетворяют линейному уравнению (3.32), т.е. точки  $M'(x', y')$  расположены на прямой  $L'$ , определяемой уравнением (3.32).

Итак, доказано, что все точки прямой  $L$  при аффинном преобразовании (3.27) переходят в точки прямой  $L'$ . Так как при обратном аффинном преобразовании (3.30) все точки прямой  $L'$  перейдут в точки прямой  $L$ , то в силу взаимной однозначности аффинного преобразования (см. п. 2, свойство 4°), прямая  $L$  переходит в прямую  $L'$ . Итак, при аффинном преобразовании прямая переходит в прямую.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — параллельные прямые, а  $L'_1$  и  $L'_2$  — их образы при аффинном преобразовании (3.27) плоскости  $\pi$ . Допустим, что прямые  $L'_1$  и  $L'_2$  имеют общую точку  $M'$ . Так как аффинное преобразование взаимно однозначно, то  $M'$  — образ только одной точки  $M$ , причем  $M$  должна принадлежать и  $L_1$  и  $L_2$ , что невозможно, поскольку  $L_1$  и  $L_2$  параллельны. Следовательно,  $L'_1$  и  $L'_2$  не имеют общих точек, т.е. параллельны. Теорема доказана.

Естественно поставить вопрос о геометрическом способе задания аффинного преобразования плоскости. Определенный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение:

**Теорема 3.2.** Аффинное преобразование плоскости определено однозначно, если заданы образы трех точек, не лежащих на одной прямой и эти образы также не располагаются на одной прямой.

Доказательство. Пусть точки  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$  плоскости  $\pi$  не лежат на одной прямой и точки  $M'_1(x'_1, y'_1)$ ,  $M'_2(x'_2, y'_2)$ ,  $M'_3(x'_3, y'_3)$  этой плоскости также не лежат на одной прямой. Убедимся, что существует единственное аффинное преобразование плоскости  $\pi$ , переводящее точки  $M_1, M_2, M_3$  в точки  $M'_1, M'_2, M'_3$  соответственно.

Пусть искомое аффинное преобразование задается соотношениями (3.27) с неизвестными коэффициентами  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ . Докажем, что при наших предположениях эти коэффициенты определяются однозначно и, кроме того, определитель  $\Delta$ , вычисленный по формуле (3.28), отличен от нуля. Этим, очевидно, и будет завершено доказательство теоремы.

С помощью первой из формул (3.27) получим соотношения

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, \\x'_2 &= a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}, \\x'_3 &= a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13},\end{aligned}\tag{3.33}$$

которые можно рассматривать как систему трех линейных уравнений относительно неизвестных  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ . Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\tag{3.34}$$

отличен от нуля, так как по абсолютной величине равен площади параллелограмма, построенного на неколлинеарных векторах  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M_3}$ <sup>1)</sup>. Поэтому система (3.33) однозначно разрешима относительно  $a_{11}, a_{12}$  и  $a_{13}$ . Обращаясь ко второй из формул (3.27), с помощью аналогичных рассуждений убедимся, что и величины  $a_{21}, a_{22}$  и  $a_{23}$  определяются однозначно. Таким образом, однозначно определяется линейное преобразование (3.27), переводящее точки  $M_1, M_2$  и  $M_3$  соответственно в точки  $M'_1, M'_2$  и  $M'_3$ . Остается доказать, что определитель  $\Delta$  (см. (3.28)) полученного преобразования отличен от нуля. Обратимся к определителю

$$\begin{vmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \\ x'_3 - x'_1 & y'_3 - y'_1 \end{vmatrix}.\tag{3.35}$$

<sup>1)</sup> Так как точки  $M_1, M_2$  и  $M_3$  не лежат на одной прямой, то векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M_3}$  не коллинеарны. В системе координат  $Oxyz$  (ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости  $\pi$ ) эти векторы соответственно имеют координаты  $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0\}$  и  $\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0\}$ . Поэтому модуль векторного произведения этих векторов равен модулю определителя (3.34) и, как известно, равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах.

Этот определитель отличен от нуля, так как по абсолютной величине равен площади параллелограмма, построенного на неколлинеарных векторах  $M'_1M'_2$  и  $M'_1M'_3$ <sup>1)</sup>. С помощью первой из формул (3.27) получим для элемента  $x'_2 - x'_1$  определителя (3.35) следующее выражение:

$$x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1).$$

Аналогичные выражения получим с помощью формул (3.27) и для остальных элементов определителя (3.35). Подставляя найденные выражения для  $x'_2 - x'_1$ ,  $y'_2 - y'_1$ ,  $x'_3 - x'_1$  и  $y'_3 - y'_1$  в (3.35), после несложных преобразований получим

$$\begin{vmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \\ x'_3 - x'_1 & y'_3 - y'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (3.36)$$

Так как определители

$$\begin{vmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \\ x'_3 - x'_1 & y'_3 - y'_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

отличны от нуля, то из (3.36) следует, что и  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Аффинное преобразование, для которого  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$ ,

называется эквиаффинным, т.е. сохраняющим площади. Для таких преобразований соотношение (3.36) означает равенство площадей параллелограммов, построенных на векторах  $M_1M_2$  и  $M_1M_3$  и на векторах  $M'_1M'_2$  и  $M'_1M'_3$ .

**4. Основной инвариант аффинного преобразования плоскости.** Простым отношением трех точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на прямой  $L$  называется число

$$(ABC) = \frac{AB}{BC}, \quad (3.37)$$

которое, очевидно, равно отношению, в котором точка  $B$  делит направленный отрезок  $AC$ .

Докажем следующее утверждение:

**Теорема 3.3.** Простое отношение трех точек на прямой является инвариантом аффинного преобразования.

Иными словами, простое отношение трех точек на прямой не меняется при аффинных преобразованиях.

<sup>1)</sup> Эти векторы неколлинеарны, так как точки  $M'_1$ ,  $M'_2$  и  $M'_3$  не лежат на одной прямой. См. предыдущую сноску.

**Доказательство.** Рассмотрим три точки  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  и  $C(x_3, y_3)$  на прямой  $L$ . Из формул (1.11) гл. 1 для координат точки, делящей отрезок  $AC$  в отношении  $\lambda = AB/BC$ , получаем для рассматриваемого случая следующее выражение для  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}. \quad (3.38)$$

Пусть  $A'(x'_1, y'_1)$ ,  $B'(x'_2, y'_2)$  и  $C'(x'_3, y'_3)$  — образы точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно при аффинном преобразовании (3.27). Точка  $B'$  делит отрезок  $A'C'$  в отношении  $\lambda'$ , причем

$$\lambda' = \frac{x'_2 - x'_1}{x'_3 - x'_2}. \quad (3.39)$$

Из (3.27) получаем

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1), \\ x'_3 - x'_2 &= a_{11}(x_3 - x_2) + a_{12}(y_3 - y_2). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Из соотношений (3.38) получим, что  $x_2 - x_1 = \lambda(x_3 - x_2)$  и  $y_2 - y_1 = \lambda(y_3 - y_2)$ . Подставляя найденные значения  $x_2 - x_1$  и  $y_2 - y_1$  в первую из формул (3.40), получим

$$x'_2 - x'_1 = \lambda[a_{11}(x_3 - x_2) + a_{12}(y_3 - y_2)].$$

Подставим теперь в числитель правой части (3.39) найденное выражение для  $x'_2 - x'_1$ , а в знаменатель — выражение для  $x'_3 - x'_2$  (см. вторую формулу (3.40)). После сокращения на  $a_{11}(x_3 - x_2) + a_{12}(y_3 - y_2)$  получим  $\lambda = \lambda'$ . Так как  $\lambda = AB/BC = (ABC)$  и  $\lambda' = A'B'/B'C' = (A'B'C')$  (см. (3.37)), то  $(ABC) = (A'B'C')$ , т.е. при аффинном преобразовании простое отношение трех точек не меняется. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Простое отношение трех точек называется *основным инвариантом* аффинного преобразования, так как через него могут быть выражены все другие инварианты аффинного преобразования.

**5. Аффинные преобразования пространства.** *Аффинным преобразованием пространства* называется преобразование, при котором каждая точка  $M(x, y, z)$  пространства переходит в точку  $M'(x', y', z')$ , координаты  $x', y', z'$  которой определяются формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

причем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

считается отличным от нуля:  $\Delta \neq 0$ .

В полной аналогии со случаем плоскости доказываются следующие свойства аффинных преобразований пространства.

1°. *Последовательное выполнение аффинных преобразований пространства является аффинным преобразованием пространства.*

2°. *Тождественное преобразование является аффинным.*

3°. *Преобразование, обратное данному аффинному, также является аффинным.*

4°. *Аффинное преобразование пространства взаимно однозначно.*

Основное свойство аффинного преобразования пространства формулируется следующим образом: *при аффинном преобразовании пространства плоскости переходят в плоскости, прямые в прямые, параллельные плоскости и прямые переходят в параллельные плоскости и прямые.*

Геометрический способ задания аффинных преобразований пространства основан на следующем утверждении: *аффинное преобразование пространства определено однозначно, если заданы образы четырех точек, не лежащих на одной плоскости, и эти образы также не лежат на одной плоскости.*

Как и в случае плоскости, основным инвариантом аффинного преобразования пространства служит простое отношение трех точек.

**6. Ортогональные преобразования.** Линейное преобразование на плоскости

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned} \tag{3.42}$$

называется *ортогональным*, если выполняются соотношения

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \tag{3.43}$$

Из соотношений (3.43) следует, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому ортогональное преобразование всегда является аффинным. Докажем основное свойство ортогональных преобразований.

**Теорема 3.4.** При ортогональных преобразованиях сохраняются расстояния между точками.

**Доказательство.** Пусть точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  посредством ортогонального преобразования (3.42) переводятся соответственно в точки  $M'_1(x'_1, y'_1)$  и  $M'_2(x'_2, y'_2)$ . Требуется доказать, что отрезки  $M_1M_2$  и  $M'_1M'_2$  имеют равные длины. С помощью формул (3.42) и (3.43) получаем

$$\begin{aligned} |M'_1M'_2|^2 &= [x'_2 - x'_1]^2 + [y'_2 - y'_1]^2 = \\ &= [a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)]^2 + \\ &\quad + [a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)]^2 = \\ &= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_2 - x_1)^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - y_1)^2 + \\ &\quad + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |M_1M_2|^2. \end{aligned}$$

Итак,  $|M_1M_2| = |M'_1M'_2|$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Так как при ортогональных преобразованиях расстояния сохраняются, то любая фигура на плоскости преобразуется в равную ей фигуру <sup>1)</sup>. Иными словами, ортогональное преобразование на плоскости можно рассматривать как движение этой плоскости. При движении ортогональная система координат переходит в ортогональную систему координат. Этим можно объяснить термин *ортогональное преобразование*.

Ортогональные преобразования обладают следующими свойствами <sup>2)</sup>:

1°. *Последовательное выполнение двух ортогональных преобразований есть ортогональное преобразование.*

2°. *Тождественное преобразование  $x' = x$ ,  $y' = y$  является ортогональным преобразованием* (для этого преобразования соотношения (3.43), очевидно, выполняются).

3°. *Преобразование, обратное ортогональному, также является ортогональным.*

Линейное преобразование в пространстве

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \end{aligned} \tag{3.44}$$

<sup>1)</sup> Например, любой треугольник преобразуется в равный треугольник (равенство по трем сторонам).

<sup>2)</sup> Эти свойства становятся особенно наглядными, если рассматривать ортогональное преобразование как движение.

называется *ортогональным*, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \quad a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, \quad a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ортогональное преобразование является аффинным. Справедливо следующее основное свойство ортогональных преобразований: при таких преобразованиях сохраняются расстояния между точками. Доказательство может быть проведено в полной аналогии с доказательством теоремы 3.4.

Ортогональные преобразования в пространстве обладают следующими свойствами.

1°. *Последовательное выполнение ортогональных преобразований является ортогональным преобразованием.*

2°. *Тождественное преобразование  $x' = x, y' = y, z' = z$  — ортогональное преобразование.*

3°. *Преобразование, обратное ортогональному, также ортогональное.*

#### § 4. Проективные преобразования

*Проективными преобразованиями* на плоскости называются преобразования вида

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad (3.46)$$

коэффициенты  $a_{ij}$  которых удовлетворяют условию<sup>1)</sup>

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При проективном преобразовании (3.46) плоскости особую роль играет прямая  $L$ , определяемая уравнением

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

Для точек этой прямой знаменатели в выражениях для  $x'$  и  $y'$  (см. (3.46)) обращаются в нуль, и поэтому преобразование (3.46) не определено для точек этой прямой.

<sup>1)</sup> Геометрически это условие означает, что три прямые  $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ ,  $a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$  и  $a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$  не пересекаются в одной точке (см. п. 5 § 2 гл. 3).

Отметим, что проективное преобразование инвариантно относительно выбора декартовой системы координат, так как формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой линейны и поэтому при переходе к новой системе координат вид преобразований (3.46) не меняется. Непосредственной проверкой можно убедиться, что последовательное проведение двух проективных преобразований является проективным преобразованием, тождественное преобразование и преобразование, обратное проективному, — также проективные преобразования. При проективных преобразованиях точки, лежащие на прямой, переходят в точки, также лежащие на прямой.

Основным инвариантом проективного преобразования является так называемое *сложное (ангармоническое) отношение* ( $ABCD$ ) любых четырех точек  $A, B, C$  и  $D$  на прямой, которое определяется как частное двух простых отношений:

$$(ABCD) = (ACB) : (ADB).$$

Инвариантность сложного отношения ( $ABCD$ ) четырех точек прямой может быть обоснована так же, как и инвариантность простого отношения при аффинных преобразованиях.

*Проективными преобразованиями в пространстве* называются преобразования вида

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

$$z' = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

для которых четыре плоскости

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0,$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0,$$

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0$$

не пересекаются в одной точке.

Отметим, что проективное преобразование в пространстве не определено для точек плоскости, определяемой уравнением

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что последовательное проведение двух проективных преобразований, тождественное преобразование и преобразование, обратное проективному, — также проективные преобразования. При проективных преобразованиях точки, лежащие в одной плоскости, переходят в точки, также лежащие в одной плоскости, а точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой.

Основным инвариантом проективного преобразования в пространстве является сложное отношение  $(ABCD) = (ACB) : (ADB)$  любых четырех точек  $A, B, C$  и  $D$  на прямой.

## ГЛАВА 4

# УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе рассматривается один из важнейших вопросов аналитической геометрии — вопрос об *аналитическом представлении линии на плоскости и поверхности и линии в пространстве при помощи уравнений, связывающих их координаты*<sup>1)</sup>. Обсуждаются простейшие задачи, связанные с таким аналитическим представлением, и приводится классификация плоских линий и поверхностей. Доказывается, что порядок алгебраической линии (и соответственно поверхности) не зависит от выбора декартовой прямоугольной системы.

### § 1. Уравнение линии на плоскости

**1. Понятие об уравнении линии.** Предположим, что на плоскости  $\pi$  нам заданы: 1) декартова прямоугольная система координат  $Oxy$  и 2) некоторая линия  $L$ . Рассмотрим некоторое уравнение, связывающее две переменные величины  $x$  и  $y$ <sup>2)</sup>

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (4.1)$$

**Определение.** Уравнение (4.1) называется *уравнением линии*  $L$  (относительно заданной системы координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  любой точки, лежащей на линии  $L$ , и не удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  ни одной точки, не лежащей на линии  $L$ .

С точки зрения этого определения сама линия  $L$  представляет собой (в заданной системе координат) *геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению* (4.1).

Если (в заданной системе координат) рассматриваемое уравнение вида (4.1) является уравнением линии  $L$ , то мы будем говорить, что это уравнение *определяет линию*  $L$ .

<sup>1)</sup> По поводу самого понятия линии (или соответственно поверхности) отсылаем читателя к гл. 11 вып. 1 настоящего курса.

<sup>2)</sup> Равенство  $\Phi(x, y) = 0$ , где  $\Phi(x, y)$  — заданная функция двух переменных  $x$  и  $y$ , называется *уравнением*, если это равенство справедливо не для всех пар вещественных чисел  $x, y$ . Равенство  $\Phi(x, y) = 0$ , справедливое для всех пар вещественных чисел  $x, y$ , называется  *тождеством*.

**З а м е ч а н и е.** Нетрудно указать такое уравнение вида (4.1), которое либо определяет геометрический образ, отличный от того, что мы привыкли понимать под термином «линия», либо вообще не определяет никакого геометрического образа. Так, уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  определяет на плоскости  $Oxy$  лишь одну точку  $(0,0)$ , а уравнение  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  вообще не определяет никакого геометрического образа. Для того чтобы уравнение вида (4.1) определяло геометрический образ, отвечающий нашему привычному представлению о линии, следует, вообще говоря, подчинить функцию  $\Phi(x, y)$  некоторым ограничениям (например требованию однозначной разрешимости функционального уравнения (4.1) относительно одной из переменных). Эти ограничения выясняются в курсе математического анализа (см. вып. 1, гл. 15, § 2, п. 3).

**П р и м е р.** Убедимся в том, что уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (4.2)$$

является *уравнением окружности* радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $M_0(a, b)$ . В самом деле, точка  $M(x, y)$  лежит на указанной окружности тогда и только тогда, когда расстояние между точками  $M(x, y)$  и  $M_0(a, b)$  равно  $r$ , т.е. тогда и только тогда, когда квадрат расстояния между указанными точками  $(x - a)^2 + (y - b)^2$  равен  $r^2$ . Таким образом, координаты любой точки  $M(x, y)$ , лежащей на указанной окружности, удовлетворяют уравнению (4.2), а координаты любой точки, не лежащей на указанной окружности, не удовлетворяют уравнению (4.2).

Уравнение окружности радиуса  $r > 0$  с центром в начале координат имеет более простой вид, а именно

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (4.3)$$

**2. Параметрическое представление линии.** Для аналитического представления линии  $L$  часто бывает удобно выражать переменные координаты  $x$  и  $y$  точек этой линии при помощи третьей вспомогательной переменной (или *параметра*)  $t$ :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (4.4)$$

где функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  предполагаются непрерывными по параметру  $t$  (в некоторой области  $\{t\}$  изменения этого параметра). Исключение из двух уравнений (4.4) параметра  $t$  приводит к рассмотренному выше уравнению вида (4.1)<sup>1)</sup>.

Параметрическое представление линии на плоскости естественно возникает, если эту линию рассматривать как путь, пройденный материальной точкой, непрерывно движущейся по определенному закону. В самом деле, если переменная  $t$  представляет собой время, отсчитыва-

<sup>1)</sup> Такое исключение заведомо возможно, если хотя бы одна из функций  $x = \varphi(t)$  или  $y = \psi(t)$  имеет обратную (достаточные условия для этого см. в п. 4 § 2 гл. 15 вып. 1).

мое от некоторого начального момента, то задание закона движения и представляет собой задание координат  $x$  и  $y$  движущейся точки как некоторых непрерывных функций  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  времени  $t$ .

При м е р ы. 1) Установим параметрические уравнения окружности радиуса  $r > 0$  с центром в начале координат. Пусть  $M(x, y)$  — любая точка этой окружности, а  $t$  — угол между радиусом-вектором  $OM$  и осью  $Ox$ , отсчитываемый против часовой стрелки (рис. 4.1). Очевидно, что

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t. \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) и представляют собой параметрические уравнения рассматриваемой окружности. Параметр  $t$  может принимать любые значения, но для того чтобы точка  $M(x, y)$  один раз обошла окружность, следует ограничить область изменения параметра полусегментом  $0 \leq t < 2\pi$ . Заметим, что для исключения параметра  $t$  из уравнений (4.5) достаточно возвести в квадрат и сложить эти уравнения; мы получим при этом уравнение (4.3) предыдущего пункта.

2) Установим параметрические уравнения так называемой *циклоиды*, которая определяется как путь, описываемый одной из точек  $M$  окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой. Примем за ось  $Ox$  декартовой прямоугольной системы ту прямую, по которой катится окружность, за начало координат — одну из точек, в которых точка  $M$  катящейся окружности выходит на указанную прямую, и направим ось  $Oy$  так, чтобы ее положительная полуось лежала по ту же сторону от  $Ox$ , что и катящаяся окружность (рис. 4.2).

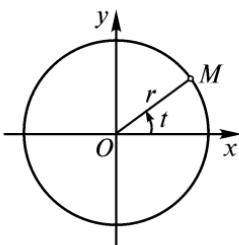


Рис. 4.1

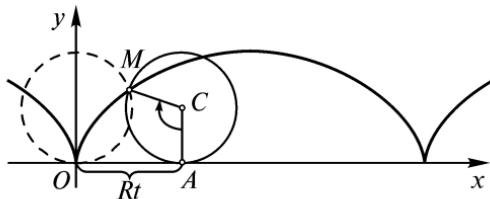


Рис. 4.2

Фиксируем произвольное положение катящейся окружности и обозначим для этого положения буквой  $C$  центр, а буквой  $A$  точку касания с осью  $Ox$ . Примем за параметр  $t$  угол, на который повернулась катящаяся окружность при перемещении из положения с точкой касания в начале координат  $O$  в положение с данной точкой касания  $A$ . Так как качение происходит без скольжения, то  $OA = Rt$ , где  $R$  — радиус окружности.

В силу того, что декартовы прямоугольные координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  равны проекциям вектора  $OM$  на оси координат (см. п. 9 § 1 гл. 2), и в

силу линейного свойства проекции вектора на ось (см. п. 8 и 9 § 1 гл. 2) получим

$$\begin{aligned}x &= \text{пр}_x \overline{OM} = \text{пр}_x \overline{OA} + \text{пр}_x \overline{AC} + \text{пр}_x \overline{CM}, \\y &= \text{пр}_y \overline{OM} = \text{пр}_y \overline{OA} + \text{пр}_y \overline{AC} + \text{пр}_y \overline{CM}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Учитывая, что угол  $ACM$ , отсчитываемый от вектора  $\overline{CA}$  в направлении по часовой стрелке (рис. 4.2), может отличаться от угла  $t$  лишь на величину, кратную  $2\pi$ , будем иметь

$$\begin{aligned}\text{пр}_x \overline{OA} &= Rt, \quad \text{пр}_x \overline{AC} = 0, \quad \text{пр}_x \overline{CM} = -R \sin t, \\\text{пр}_y \overline{OA} &= 0, \quad \text{пр}_y \overline{AC} = R, \quad \text{пр}_y \overline{CM} = -R \cos t.\end{aligned}$$

Вставляя эти значения в формулы (4.6), окончательно получим параметрические уравнения циклоиды

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(t - \cos t). \quad (4.7)$$

Параметр  $t$  в уравнениях (4.7) может принимать какие угодно значения.

**З а м е ч а н и е.** Часто линию  $L$  определяют не уравнением (4.1), а разрешенным (например, относительно  $y$ ) уравнением

$$y = f(x). \quad (4.8)$$

Подчеркнем, что определение линии разрешенным уравнением (4.8) представляет собой частный случай параметрического определения этой линии (при  $x = t$ ,  $y = f(t)$ ).

**3. Уравнение линии в различных системах координат.** Вид уравнения линии  $L$  зависит не только от вида самой линии  $L$ , но и от выбора системы координат. Уравнение линии меняется как при переходе от одной декартовой системы координат к другой, так и при переходе от декартовых к каким-нибудь другим координатам.

Если (4.1) представляет собой уравнение линии  $L$  относительно декартовой прямоугольной системы координат  $Oxy$ , то, чтобы получить уравнение той же линии  $L$  относительно любой другой системы координат, достаточно подставить в (4.1) на место  $x$  и  $y$  их выражения через новые координаты.

Так, например, линия  $L$ , определяемая в декартовой системе  $Oxy$  уравнением (4.1), в полярной системе<sup>1)</sup> будет определяться уравнением

$$\Phi_1(\rho, \varphi) = 0,$$

где введено обозначение  $\Phi_1(\rho, \varphi) = \Phi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  (см. формулы перехода от декартовых координат к полярным; гл. 1, § 4).

<sup>1)</sup> Конечно, при этом предполагается, что полюс совмещен с началом декартовых координат, а полярная ось — с осью  $Ox$ .

Использование для определения некоторых линий недекартовых систем координат объясняется тем, что уравнение линии имеет при этом более простой вид.

П р и м е р. Предположим, что ось  $u$  вращается (против часовой стрелки) вокруг неподвижной точки  $O$  и по этой вращающейся оси движется точка  $M$  так, что длина  $\rho$  вектора  $OM$  пропорциональна углу  $\phi$  поворота оси  $u$ , отсчитываемому от некоторой неподвижной оси  $Ox$  (рис. 4.3).

Линия, описываемая точкой  $M$ , называется *спиралью Архимеда*.

Если ввести полярную систему координат, поместив полюс в точку  $O$  и направив полярную ось вдоль оси  $Ox$ , то по самому определению спирали Архимеда ее уравнение имеет вид

$$\rho = a \phi, \quad (4.9)$$

где  $\rho$  — полярный радиус,  $\phi$  — полярный угол,  $a$  — коэффициент пропорциональности, который будем считать отличным от нуля. На рис. 4.3 сплошной линией изображена часть спирали Архимеда для случая  $a > 0$ , а штриховой линией — часть спирали Архимеда для случая  $a < 0$ <sup>1)</sup>.

Уравнение (4.9) спирали Архимеда в полярной системе координат отличается чрезвычайной простотой. Для того чтобы читатель убедился, насколько сложно выглядит уравнение той же спирали Архимеда в декартовой прямоугольной системе, приведем это уравнение для случая  $a > 0$ . Имея в виду,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi n & \text{при } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi + 2\pi n & \text{при } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y + 2\pi n & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , мы получим, что для случая  $a > 0$  спираль Архимеда определяется следующей бесконечной системой уравнений (номер  $n$  принимает значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= a \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi n \right) && \text{при } x > 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= a \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi + 2\pi n \right) && \text{при } x < 0, \\ |y| &= a \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y + 2\pi n \right) && \text{при } x = 0. \end{aligned}$$

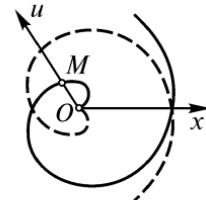


Рис. 4.3

<sup>1)</sup> Конечно, при неограниченном изменении угла  $\phi$  (в случае  $a > 0$  в положительную, а в случае  $a < 0$  в отрицательную сторону) как сплошная, так и штриховая спирали будут иметь бесчисленно много завитков, не изображенных на рис. 4.3.

**4. Два типа задач, связанных с аналитическим представлением линии.** В связи с аналитическим представлением линии возникают задачи двух типов. Задачи первого типа заключаются в изучении свойств линии при помощи заранее данного уравнения этой линии. Такое изучение проводится средствами математического анализа и выходит за рамки аналитической геометрии. В самом деле, уравнение линии устанавливает функциональную зависимость между координатами точек этой линии и задача первого типа, по существу, представляет собой геометрическое исследование графика функции (см. гл. 9 вып. 1).

Задачи второго типа заключаются в выводе уравнения линии, заранее заданной геометрически (например, линии, заданной как геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторым условиям).

Примерами задач второго типа могут служить все рассмотренные в пп. 1–3 задачи (вывод уравнения окружности, циклоиды и спиралей Архимеда).

**5. Классификация плоских линий.** Исходя из аналитического представления линий относительно декартовых прямоугольных систем координат, устанавливают следующую классификацию плоских линий.

**Определение 1.** Линия называется алгебраической, если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат она определяется уравнением

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (4.1)$$

в котором функция  $\Phi(x, y)$  представляет собой алгебраический полином<sup>1)</sup>.

**Определение 2.** Всякая неалгебраическая линия называется трансцендентной.

**Определение 3.** Алгебраическая линия называется линией порядка  $n$ , если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат эта линия определяется уравнением (4.1), в котором функция  $\Phi(x, y)$  представляет собой алгебраический полином  $n$ -й степени.

Иными словами, линией  $n$ -го порядка называется линия, определяемая в некоторой декартовой прямоугольной системе алгебраическим уравнением степени  $n$  с двумя неизвестными.

Для установления корректности определений 1, 2 и 3 необходимо доказать следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** Если линия в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением степени  $n$ , то эта линия и в любой другой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением той же степени  $n$ .

---

<sup>1)</sup> То есть сумму конечного числа слагаемых вида  $a_{kl}x^ky^l$ , где  $k$  и  $l$  — целые неотрицательные числа,  $a_{kl}$  — некоторые постоянные.

Доказательство. Предположим, что линия  $L$  в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (4.1)$$

левая часть которого представляет собой алгебраический полином степени  $n$ , т.е. сумму слагаемых вида

$$a_{kl} x^k y^l,$$

где  $k$  и  $l$  — целые неотрицательные числа, причем наибольшее значение суммы  $k + l$  равно  $n$ ,  $a_{kl}$  — некоторые постоянные, причем хотя бы для одной пары  $k$  и  $l$ , составляющих в сумме  $n$ , постоянная  $a_{kl}$  отлична от нуля.

Возьмем на той же плоскости любую новую декартову прямоугольную систему координат  $O'x'y'$ . Тогда, как доказано в § 1 гл. 3, для координат любой точки в старой и новой системах справедливы формулы преобразования (3.7). Чтобы получить уравнение линии  $L$  в новой системе  $O'x'y'$ , достаточно подставить в левую часть (4.1) на место  $x$  и  $y$  их значения, определяемые формулами (3.7). Мы получим при этом сумму слагаемых вида

$$a_{kl} (a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y')^k (b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y')^l.$$

Отсюда ясно, что уравнение линии  $L$  в новой системе  $O'x'y'$  будет представлять собой алгебраическое уравнение степени *не выше, чем  $n$* .

Если в проведенных рассуждениях поменять ролями системы  $Oxy$  и  $O'x'y'$ , то мы убедимся в том, что указанное алгебраическое уравнение (в системе  $O'x'y'$ ) имеет степень *не ниже чем  $n$*  (иначе переход от  $O'x'y'$  к  $Oxy$  повысил бы степень уравнения). Таким образом, линия  $L$  определяется в новой системе  $O'x'y'$  алгебраическим уравнением степени, *равной  $n$* . Теорема 4.1 доказана.

Примером алгебраической линии второго порядка может служить окружность, уравнение (4.3) которой в некоторой декартовой прямоугольной системе является алгебраическим уравнением второй степени. Примером трансцендентной линии может служить спираль Архимеда, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе не является алгебраическим (см. п. 3).

**Замечание.** Будем называть алгебраическую линию  $L$  *распадающейся*, если алгебраический полином  $\Phi(x, y)$  степени  $n \geq 2$ , стоящий в левой части уравнения этой линии, распадается на произведение  $\Phi_1(x, y)\Phi_2(x, y)$  двух алгебраических полиномов  $\Phi_1(x, y)$  и  $\Phi_2(x, y)$  степеней  $k \geq 1$  и  $n - k \geq 1$  соответственно.

Из равенства  $\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y)\Phi_2(x, y)$  очевидно, что координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  удовлетворяют уравнению  $\Phi(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда эти координаты удовлетворяют хотя бы одному из уравнений  $\Phi_1(x, y) = 0$  или  $\Phi_2(x, y) = 0$ . Это означает, что линия  $L$ , определяемая уравнением  $\Phi(x, y) = 0$ , распадается на две линии: линию  $L_1$ , определяемую уравнением  $\Phi_1(x, y) = 0$ , и линию  $L_2$ , определяемую уравнением  $\Phi_2(x, y) = 0$ .

Так, линия четвертого порядка, определяемая уравнением

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4 = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0,$$

распадается на две окружности, определяемые уравнениями  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  и  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ . Линия четвертого порядка, определяемая уравнением

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0,$$

распадается на две «слившиеся» окружности, определяемые уравнением второго порядка  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . В отношении этой последней линии следует договориться, какое из чисел 2 или 4 мы будем понимать под ее порядком,

**6. О пересечении двух линий.** Важную роль в аналитической геометрии играет задача о нахождении точек пересечения двух произвольных линий  $L_1$  и  $L_2$ , определяемых уравнениями  $\Phi_1(x, y) = 0$  и  $\Phi_2(x, y) = 0$  соответственно. Так как искомые точки пересечения в случае, если они существуют, должны одновременно лежать как на линии  $L_1$ , так и на линии  $L_2$ , то координаты этих точек должны удовлетворять каждому из уравнений  $\Phi_1(x, y) = 0$  и  $\Phi_2(x, y) = 0$ .

Таким образом, для нахождения координат всех точек пересечения следует решить систему уравнений

$$\Phi_1(x, y) = 0, \quad \Phi_2(x, y) = 0. \quad (4.10)$$

Каждое решение системы (4.10) определяет точку пересечения линий  $L_1$  и  $L_2$ . Если система (4.10) не имеет решений, то линии  $L_1$  и  $L_2$  не пересекаются.

Так, для нахождения точек пересечения двух окружностей, определяемых уравнениями  $x^2 + y^2 = 1$  и  $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ , решаем систему уравнений

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad (x - 1)^2 + y^2 - 2 = 0. \quad (4.11)$$

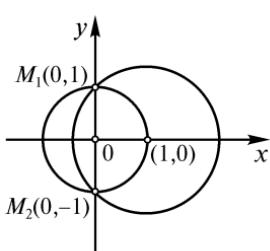


Рис. 4.4

Вычитая из первого уравнения (4.11) второе, получим  $2x = 0$ , откуда  $x = 0$ . Вставляя это значение  $x$  в первое уравнение, найдем, что  $y = \pm 1$ . Получаем две точки пересечения  $M_1(0, 1)$  и  $M_2(0, -1)$  (рис. 4.4).

Можно доказать, что если  $L_1$  и  $L_2$  — две нераспадающиеся алгебраические линии порядков  $m$  и  $n$  соответственно и если одна из этих линий не содержитя целиком в другой, то эти линии имеют не более чем  $m \cdot n$  точек пересечения (см. любой курс высшей алгебры).

## § 2. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

**1. Понятие об уравнении поверхности.** Предположим, что нам заданы: 1) декартова прямоугольная система координат  $Oxyz$  в простран-

стве и 2) некоторая поверхность  $S$ . Рассмотрим некоторое уравнение, связывающее три переменные величины  $x, y$  и  $z$ :

$$\Phi(x, y, z) = 0. \quad (4.12)$$

**Определение.** Уравнение (4.12) называется *уравнением поверхности  $S$*  (относительно заданной системы координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты  $x, y$  и  $z$  любой точки, лежащей на поверхности  $S$ , и не удовлетворяют координаты  $x, y$  и  $z$  ни одной точки, не лежащей на поверхности  $S$ .

С точки зрения этого определения сама поверхность  $S$  представляет собой (в заданной системе координат) *геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (4.12)*.

Если (в заданной системе координат) рассматриваемое уравнение (4.12) является уравнением поверхности  $S$ , то мы будем говорить, что это уравнение *определяет поверхность  $S$* .

Конечно, не всякое уравнение с тремя переменными вида (4.12) определяет геометрический образ, отвечающий нашему привычному представлению о поверхности (и вообще определяет реальный геометрический образ: рассмотрите уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ). Чтобы уравнение вида (4.12) определяло геометрический образ, отвечающий нашему представлению о поверхности, следует, вообще говоря, подчинить функцию  $\Phi(x, y, z)$  некоторым ограничениям (например, требованию однозначной разрешимости функционального уравнения (4.12) относительно одной из переменных). Эти ограничения выясняются в курсе математического анализа (см. вып. 1, гл. 15, § 2).

Аналогично определяется уравнение поверхности  $S$  в любой другой (не обязательно декартовой прямоугольной) системе координат. Если (4.12) представляет собой уравнение поверхности  $S$  в декартовой прямоугольной системе координат  $Oxyz$ , то, чтобы получить уравнение той же поверхности  $S$  относительно любой другой системы координат, достаточно подставить в (4.12) на место  $x, y$  и  $z$  их выражение через новые координаты.

Использование для определения некоторых поверхностей недекартовых систем координат объясняется тем, что уравнение поверхности имеет при этом более простой вид.

Легко убедиться в том, что в декартовой прямоугольной системе  $Oxyz$  уравнение сферы радиуса  $R > 0$  с центром в точке  $M_0(a, b, c)$  имеет вид<sup>1)</sup>

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (4.13)$$

В самом деле, точка  $M(x, y, z)$  лежит на указанной сфере тогда и только тогда, когда квадрат расстояния между точками  $M(x, y, z)$  и  $M_0(a, b, c)$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

<sup>1)</sup> Эта сфера определяется как геометрическое место точек  $M(x, y, z)$ , расстояние каждой из которых от точки  $M_0(a, b, c)$  равно  $R$ .

равен  $R^2$ . В случае, когда центром  $M_0$  сферы служит начало координат (т.е.  $a = 0, b = 0, c = 0$ ), уравнение (4.13) принимает более простой вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (4.14)$$

Если ввести сферические координаты  $r, \theta, \phi$ , связанные с декартовыми координатами так, как указано в п. 3 § 4 гл. 1, то уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат принимает вид  $r = R$ .

Это последнее уравнение, сразу вытекающее из геометрического определения сферы, может быть получено и посредством подстановки в (4.14) на место  $x, y$  и  $z$  их выражений через сферические координаты.

**2. Уравнения линии в пространстве.** Линию в пространстве естественно рассматривать как пересечение двух поверхностей, т.е. как *геометрическое место точек, находящихся одновременно на двух поверхностях*.

Если  $\Phi_1(x, y, z) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, z) = 0$  суть уравнения двух поверхностей, пересечением которых является данная линия  $L$ , то: 1) координаты любой точки, лежащей на линии  $L$ , удовлетворяют обоим указанным уравнениям; 2) обоим указанным уравнениям не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на линии  $L$ .

Таким образом, *два уравнения*

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0 \quad (4.15)$$

совместно определяют линию  $L$ , т.е. являются уравнениями этой линии.

Разумеется, данную линию  $L$  можно представить двумя уравнениями бесчисленным множеством способов: вместо данных двух поверхностей можно взять любую пару поверхностей, пересекающихся по той же линии  $L$ . Аналитически это означает, что вместо системы (4.15) можно взять любую эквивалентную систему.

Например, уравнения двух сфер

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 10$$

совместно определяют лежащую в плоскости  $Oxy$  окружность радиусом, равным единице, с центром в начале координат. Ту же самую окружность можно определить и двумя уравнениями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + \left(z - \sqrt{R^2 - 1}\right)^2 = R^2,$$

во втором из которых в качестве  $R$  можно взять любое вещественное число, превосходящее единицу.

**3. Цилиндрические и конические поверхности.** Предположим, что в пространстве задана декартова прямоугольная система координат  $Oxyz$ .

*Определение 1.* Поверхность  $S$  называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси  $Oz$ , если

она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси  $Oz$ , целиком лежит на поверхности  $S$ .

Любую целиком лежащую на цилиндрической поверхности  $S$  прямую называют *образующей* этой поверхности.

Совершенно аналогично определяются цилиндрические поверхности с образующими, параллельными осям  $Ox$  или  $Oy$ .

**Определение 2.** Поверхность  $S$  называется *конической с вершиной в начале координат  $O$* , если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности и отличная от начала координат точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , прямая линия, проходящая через точку  $M_0$  и через начало координат  $O$ , целиком лежит на поверхности  $S$ .

Постараемся выяснить, какими уравнениями определяются цилиндрические и конические поверхности.

Ради определенности будем рассматривать цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси  $Oz$ .

Докажем, что *всякое уравнение вида*

$$F(x, y) = 0, \quad (4.16)$$

*связывающее две переменные  $x$  и  $y$  и не содержащее  $z$ , определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси  $Oz$ .*

Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — любая точка, лежащая на поверхности  $S$ , определяемой уравнением (4.16). Тогда координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (4.16), т.е. справедливо равенство

$$F(x_0, y_0) = 0. \quad (4.17)$$

Достаточно доказать, что любая точка  $M$  прямой, проходящей через  $M_0$  и параллельной оси  $Oz$ , также лежит на поверхности  $S$ , т.е. имеет координаты, удовлетворяющие уравнению (4.16).

Какова бы ни была точка  $M$  прямой, проходящей через  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и параллельной оси  $Oz$ , ее абсцисса и ордината те же, что и у точки  $M_0$ , т.е. равны соответственно  $x_0$  и  $y_0$ , а аппликата  $z$  имеет какое угодно значение. Но в уравнение (4.16) входят только абсцисса и ордината, а они в силу равенства (4.17) удовлетворяют этому уравнению.

Тем самым доказано, что  $S$  — цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси  $Oz$ .

Заметим, что на координатной плоскости  $Oxy$  уравнения (4.16) определяет плоскую линию, которую обычно называют *направляющей* рассматриваемой цилиндрической поверхности. В пространстве эта линия определяется двумя уравнениями:

$$F(x, y) = 0, \quad z = 0,$$

первое из которых определяет рассматриваемую цилиндрическую поверхность, а второе — координатную плоскость  $Oxy$ <sup>1)</sup>.

В качестве примера приведем уравнение  $x^2 + y^2 = r^2$ , определяющее круглый цилиндр с образующей, параллельной оси  $Oz$ , и с направляющей, представляющей собой лежащую в плоскости  $Oxy$  окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Перейдем к выяснению вида уравнения конической поверхности.

Напомним, что определенная для любых значений аргументов функция  $F(x, y, z)$  называется *однородной функцией (степени  $n$ )*, если, каково бы ни было вещественное число  $k$ , справедливо равенство

$$F(kx, ky, kz) = k^n F(x, y, z). \quad (4.18)$$

Докажем, что *уравнение*

$$F(x, y, z) = 0, \quad (4.19)$$

в котором  $F(x, y, z)$  является однородной функцией любой степени  $n$ , определяет коническую поверхность.

Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — любая отличная от начала координат точка, лежащая на поверхности  $S$ , определяемой уравнением (4.19). Тогда справедливо равенство

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (4.20)$$

Достаточно доказать, что, какова бы ни была точка  $M(x, y, z)$ , лежащая на прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и через начало координат  $O$ , координаты  $x, y$  и  $z$  этой точки удовлетворяют уравнению (4.19).

Так как векторы  $\overline{OM}$  и  $\overline{OM}_0$  коллинеарны (как лежащие на одной прямой) и вектор  $\overline{OM}_0$  является ненулевым, найдется (в силу теоремы 2.1) вещественное число  $k$  такое, что  $\overline{OM} = k \cdot \overline{OM}_0$ . На основании линейных свойств координат вектора (см. п. 8 § 1 гл. 2) можно утверждать, что координаты вектора  $\overline{OM}$  равны соответствующим координатам вектора  $\overline{OM}_0$ , умноженным на число  $k$ , т.е.

$$x = kx_0, \quad y = ky_0, \quad z = kz_0.$$

Из последних равенств и из того, что  $F(x, y, z)$  (как однородная функция некоторой степени  $n$ ) удовлетворяет соотношению (4.18), получим

$$F(x, y, z) = F(kx_0, ky_0, kz_0) = k^n F(x_0, y_0, z_0),$$

а отсюда в силу равенства (4.20) окончательно будем иметь

$$F(x, y, z) = 0.$$

Доказательство того, что поверхность  $S$ , определяемая уравнением (4.19) с однородной функцией  $F(x, y, z)$ , является конической, завершено.

<sup>1)</sup> Ибо уравнению  $z = 0$  удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на плоскости  $Oxy$ , и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой плоскости.

Заметим, что прямые, целиком лежащие на конической поверхности, называются ее *образующими* и что все образующие (как это видно из проведенного доказательства) проходят через начало координат  $O$ .

Простейшим примером конической поверхности может служить круглый конус, определяемый уравнением  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Эта поверхность исследуется в п. 4 § 3 гл. 7. Функция  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ , задающая ее уравнение, является однородной функцией второго порядка.

**4. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве.** В п. 2 мы рассматривали линию в пространстве как пересечение двух поверхностей. Возможен и очень естествен с кинематической точки зрения и другой подход к понятию линии в пространстве, основанный на рассмотрении этой линии как пути, пройденного материальной точкой, непрерывно движущейся по определенному закону.

Как и для случая плоской линии (см. п. 2 § 1), этот подход приводит к *параметрическому* представлению линии в пространстве, заключающемуся в том, что координаты  $x, y$  и  $z$  любой точки данной линии задаются как непрерывные функции некоторого параметра  $t$  (представляющего собой время). Итак, при таком подходе координаты  $x, y, z$  любой точки линии  $L$  задаются как три функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (4.21)$$

определенные и непрерывные в некотором промежутке изменения параметра  $t$ .

Конечно, этот способ определения линии в пространстве эквивалентен определению ее в виде пересечения двух поверхностей. Чтобы убедиться в этом, предположим, что хотя бы одна (например, третья) из функций (4.21) допускает обратную. В таком случае из третьего равенства (4.21) получим, что  $t = \chi^{-1}(z)$ , и, подставляя это значение  $t$  в первые два равенства (4.21), получим уравнения двух поверхностей

$$x = \varphi[(\chi^{-1}(z))], \quad y = \psi[(\chi^{-1}(z))],$$

пересечением которых служит данная линия.

В качестве примера приведем параметрические уравнения окружности радиуса  $r > 0$ , лежащей в координатной плоскости  $Oxy$  и имеющей центр в начале координат. В декартовой прямоугольной системе на плоскости  $Oxy$  такая окружность определяется одним уравнением  $x^2 + y^2 = r^2$  (см. п. 1 § 1), в пространстве же эта окружность определяется двумя уравнениями:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0,$$

первое из которых определяет цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит рассматриваемая окружность и образующая которой параллельна оси  $Oz$ , а второе уравнение определяет координатную плоскость  $Oxy$ .

Из п. 2 § 1 мы уже знаем, что на плоскости  $Oxy$  параметрические уравнения окружности  $x^2 + y^2 = r^2$  имеют вид  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ , где  $0 \leq t < 2\pi$ .

Очевидно, та же окружность в пространстве задается тремя уравнениями:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = 0,$$

причем параметр  $t$  пробегает полусегмент  $0 \leq t < 2\pi$ .

Для параметрического задания поверхности координаты любой точки этой поверхности должны быть заданы как функции не одного, а двух параметров  $p$  и  $q$ . Убедимся в том, что три уравнения

$$x = \Phi(p, q), \quad y = \Psi(p, q), \quad z = \chi(p, q) \quad (4.22)$$

определяют в пространстве некоторую поверхность.

Для этого предположим, что хотя бы одна пара из трех уравнений (4.22) может быть разрешена относительно параметров  $p$  и  $q$ . Допустим, например, что из первых двух уравнений (4.22)  $p$  и  $q$  могут быть выражены как функции  $x$  и  $y$ :  $p = \Phi_1(x, y)$ ,  $q = \Phi_2(x, y)$ .

Вставляя эти значения  $p$  и  $q$  в третье уравнение (4.22), мы получим уравнение с тремя переменными:

$$z - \chi[\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)] = 0,$$

определяющее, как нам известно, некоторую поверхность<sup>1)</sup>.

В качестве примера приведем параметрические уравнения сферы радиуса  $r > 0$  с центром в начале координат:

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi.$$

Здесь параметры  $\theta$  и  $\varphi$  представляют собой угловые сферические координаты (долготу и широту) точек поверхности сферы (см. § 4 гл. 1). Для того чтобы все точки сферы обходились один раз, следует ограничить область изменения параметров промежутками  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

**5. Классификация поверхностей.** В полной аналогии с классификацией плоских кривых устанавливают следующую классификацию поверхностей.

**Определение 1.** Поверхность называется алгебраической, если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат она определяется алгебраическим уравнением с тремя переменными.

**Определение 2.** Всякая не алгебраическая поверхность называется трансцендентной.

**Определение 3.** Алгебраическая поверхность называется поверхностью порядка  $n$ , если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат она определяется алгебраическим уравнением степени  $n$  с тремя переменными.

---

<sup>1)</sup> Конечно, при этом требуются некоторые ограничения.

Для установления корректности этих определений необходимо доказать следующее утверждение.

**Теорема 4.2.** *Если поверхность в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением степени  $n$ , то эта поверхность и в любой другой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением той же степени  $n$ .*

Доказательство теоремы 4.2 вполне аналогично доказательству теоремы 4.1 и опирается на доказанное в § 2 гл. 3 утверждение: *каковы бы ни были две произвольные декартовые прямоугольные системы координат, координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  любой точки пространства относительно первой системы являются линейными функциями координат  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  той же точки относительно второй системы.* С помощью этого утверждения и рассуждений, полностью аналогичных тем, которые проводятся при доказательстве теоремы 4.1, мы получим, что если поверхность  $S$  в некоторой декартовой прямоугольной системе  $Oxyz$  определяется алгебраическим уравнением степени  $n$ , то эта поверхность в любой другой декартовой прямоугольной системе  $O'x'y'z'$  определяется алгебраическим уравнением степени не выше  $n$ . Поменяв ролями системы  $Oxyz$  и  $O'x'y'z'$ , мы завершим доказательство теоремы 4.2.

**З а м е ч а н и е 1.** Так же как и в случае плоской линии, вводится понятие *распадающейся* алгебраической поверхности.

**З а м е ч а н и е 2.** Пространственная линия называется *алгебраической*, если она может быть определена как пересечение двух алгебраических поверхностей.

Всякая не алгебраическая линия называется *трансцендентной*.

**6. О пересечении поверхностей и линий в пространстве.** Для отыскания точек пересечения поверхностей или линий (или поверхностей и линий) следует рассмотреть совместно уравнения, определяющие указанные геометрические объекты. Решение полученной при этом системы и определит нам координаты всех точек пересечения. Если полученная система не имеет решений, то точек пересечения нет.

Так, например, если заданы две линии, первая из которых определяется уравнениями  $\Phi_1(x, y, z) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, z) = 0$ , а вторая — уравнениями  $\Phi_3(x, y, z) = 0$  и  $\Phi_4(x, y, z) = 0$ , то координаты точек пересечения этих двух линий (в случае, если точки пересечения существуют) обязаны быть решением системы четырех уравнений с тремя неизвестными:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0,$$

$$\Phi_3(x, y, z) = 0, \quad \Phi_4(x, y, z) = 0.$$

Так как число неизвестных меньше числа уравнений, то последняя система, вообще говоря, не имеет решений, т.е. две линии в пространстве, вообще говоря, не пересекаются.

**7. Заключительные замечания.** Линии и поверхности выше второго порядка не входят в учебные курсы аналитической геометрии (им посвящены специальные курсы). В нашем курсе мы ограничимся изучением плоских линий и поверхностей первого и второго порядков.

В гл. 5 будут рассмотрены линии и поверхности первого порядка (их называют также *линейными образами*<sup>1)</sup>). В гл. 6 изучаются плоские линии второго порядка, в гл. 7 — поверхности второго порядка.

---

<sup>1)</sup> Термин «линейный» объясняется тем, что в левой части уравнения первого порядка стоит линейная функция.

## ГЛАВА 5

### ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ

Эта глава посвящена всестороннему изучению прямых линий на плоскости и плоскостей и прямых линий в пространстве.

Убедившись в том, что этими объектами исчерпываются все линейные образы (т.е. геометрические объекты, определяемые линейными уравнениями), мы вводим в рассмотрение различные виды уравнений прямой и плоскости и останавливаемся на их использовании для решения важнейших задач.

#### **§ 1. Различные виды уравнения прямой на плоскости**

**1. Общее уравнение прямой.** Докажем сначала, что *если на плоскости  $\pi$  задана произвольная прямая линия  $L$  и фиксирована произвольная декартова прямоугольная система  $Oxy$ , то прямая  $L$  определяется в этой системе уравнением первой степени.*

Достаточно доказать, что прямая  $L$  определяется уравнением первой степени *при каком-то одном специальном выборе* декартовой прямоугольной системы на плоскости  $\pi$ , ибо тогда она будет определяться уравнением первой степени и при любом выборе декартовой прямоугольной системы на плоскости  $\pi$  (в силу теоремы 4.1). Направим ось  $Ox$  вдоль прямой  $L$ , а ось  $Oy$  перпендикулярно к ней. Тогда уравнением прямой будет *уравнение первой степени*  $y = 0$ . В самом деле, этому уравнению будут удовлетворять координаты любой точки, лежащей на прямой  $L$ , и не будут удовлетворять координаты ни одной точки, не лежащей на прямой  $L$ .

Утверждение доказано.

Докажем теперь, что *если на плоскости  $\pi$  фиксирована произвольная декартова прямоугольная система  $Oxy$ , то всякое уравнение первой степени с двумя переменными  $x$  и  $y$  определяет относительно этой системы прямую линию*.

В самом деле, пусть фиксирована произвольная декартова прямоугольная система  $Oxy$  и задано уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0, \quad (5.1)$$

в котором  $A$ ,  $B$  и  $C$  — какие угодно постоянные, причем из постоянных  $A$  и  $B$  хотя бы одна отлична от нуля. Уравнение (5.1) заведомо имеет

хотя бы одно решение  $x_0, y_0$ <sup>1)</sup>, т.е. существует хотя бы одна точка  $M_0(x_0, y_0)$ , координаты которой удовлетворяют уравнению (5.1):

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \quad (5.2)$$

Вычитая из уравнения (5.1) тождество (5.2), мы получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (5.3)$$

*эквивалентное уравнению* (5.1). Достаточно доказать, что уравнение (5.3) определяет относительно системы  $Oxy$  некоторую прямую. Мы докажем, что *уравнение* (5.3) (а стало быть, и (5.1)) *определяет прямую*  $L$ , *проходящую через точку*  $M_0(x_0, y_0)$  *и перпендикулярную вектору*  $\mathbf{n} = \{A, B\}$  (так как  $A$  и  $B$  одновременно не равны нулю, то вектор  $\mathbf{n}$  *ненулевой*).

В самом деле, если точка  $M(x, y)$  лежит на указанной прямой  $L$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению (5.3), ибо в этом случае векторы  $\mathbf{n} = \{A, B\}$  и  $M_0M = \{x - x_0, y - y_0\}$  ортогональны и их скалярное произведение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) \quad (5.4)$$

равно нулю. Если же точка  $M(x, y)$  не лежит на указанной прямой  $L$ , то ее координаты не удовлетворяют уравнению (5.3), ибо в этом случае векторы  $\mathbf{n}$  и  $M_0M$  не ортогональны, и поэтому их скалярное произведение (5.4) не равно нулю. Утверждение доказано.

*Уравнение* (5.1) *с произвольными коэффициентами*  $A, B$  *и*  $C$  *такими, что*  $A$  *и*  $B$  *не равны нулю одновременно, называется общим уравнением прямой.* Мы доказали, что прямая, определяемая общим уравнением (5.1), ортогональна к вектору  $\mathbf{n} = \{A, B\}$ . Этот последний вектор мы будем называть *нормальным вектором прямой* (5.1).

Заметим, что *если два общих уравнения*  $Ax + By + C = 0$  *и*  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  *определяют одну и ту же прямую, то найдется такое число*  $t$ , *что справедливы равенства*

$$A_1 = At, \quad B_1 = Bt, \quad C_1 = Ct, \quad (5.5)$$

*т.е. коэффициенты*  $A_1, B_1, C_1$  *второго уравнения равны соответствующим коэффициентам*  $A, B$  *и*  $C$  *первого уравнения, умноженным на некоторое число*  $t$ .

В самом деле, по условию прямые, определяемые уравнениями  $Ax + By + C = 0$  и  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ , сливаются. Стало быть, нормальные векторы  $\mathbf{n} = \{A, B\}$  и  $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1\}$  коллинеарны. Так как, кроме того, вектор  $\mathbf{n}$  ненулевой, найдется (в силу теоремы 2.1) число  $t$  такое, что

<sup>1)</sup> В самом деле,  $A$  и  $B$  одновременно не равны нулю. Пусть, например,  $B \neq 0$ . Тогда, взяв произвольное  $x_0$ , мы получим из уравнения (5.1)  $y_0 = -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}$ .

$\mathbf{n} = \mathbf{n}t$ , а отсюда и из линейного свойства координат вектора вытекают первые два из равенств (5.5). Докажем справедливость и последнего равенства (5.5). Слившиеся прямые имеют общую точку  $M_0(x_0, y_0)$ , так что  $Ax_0 + By_0 + C = 0$  и  $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ . Умножая первое из этих равенств на  $t$  и вычитая из него второе равенство, будем иметь  $(At - A_1)x_0 + (Bt - B_1)y_0 + (Ct - C_1) = 0$ . Отсюда в силу первых двух равенств (5.5)  $Ct - C_1 = 0$ , т.е.  $C_1 = Ct$ .

## 2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках.

Общее уравнение прямой (5.1) называется *неполным*, если все его коэффициенты  $A, B$  и  $C$  отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений.

1)  $C = 0$ , уравнение  $Ax + By = 0$  определяет прямую, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2)  $B = 0$ , уравнение  $Ax + C = 0$  определяет прямую, параллельную оси  $Oy$  (поскольку нормальный вектор этой прямой  $\mathbf{n} = \{A, 0\}$  ортогонален оси  $Oy$ ).

3)  $A = 0$ , уравнение  $By + C = 0$  определяет прямую, параллельную оси  $Ox$  (поскольку нормальный вектор этой прямой  $\mathbf{n} = \{0, B\}$  ортогонален оси  $Ox$ ).

4)  $B = 0$  и  $C = 0$ , уравнение  $Ax = 0$  определяет ось  $Oy$  (в самом деле, эта прямая параллельна оси  $Oy$  и проходит через начало координат).

5)  $A = 0$ ,  $C = 0$ , уравнение  $By = 0$  определяет ось  $Ox$  (ибо эта прямая параллельна оси  $Ox$  и проходит через начало координат).

Рассмотрим теперь *полное* уравнение прямой (5.1) и покажем, что оно может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (5.6)$$

называемому *уравнением прямой в отрезках*.

В самом деле, так как все коэффициенты  $A, B$  и  $C$  отличны от нуля, мы можем переписать уравнение (5.1) в виде

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$

и затем положить  $a = -C/A$ ,  $b = -C/B$ .

Заметим, что в уравнении «в отрезках» (5.6) числа  $a$  и  $b$  имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях  $Ox$  и  $Oy$  соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат, рис. 5.1). Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения прямой, определяемой уравнением (5.6), с

осами координат. Например, точка пересечения с осью  $Ox$  определяется из совместного рассмотрения уравнения прямой (5.6) с уравнением  $y = 0$  оси  $Ox$ . Мы получим координаты точки пересечения  $x = a$ ,  $y = 0$ . Аналогично устанавливается, что координаты точки пересечения прямой (5.6) с осью  $Oy$  имеют вид  $x = 0$ ,  $y = b$ .

Уравнение прямой в виде «отрезков» удобно использовать для построения этой прямой на чертеже.

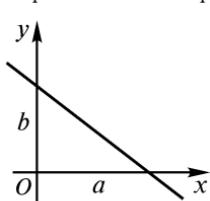


Рис. 5.1

**3. Каноническое<sup>1)</sup> уравнение прямой.** Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой.

Поставим перед собой задачу: найти уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M_1(x_1, y_1)$  и имеющей заданный направляющий вектор  $\mathbf{q} = \{l, m\}$ .

Очевидно, точка  $M(x, y)$  лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$  и  $\mathbf{q} = \{l, m\}$  коллинеарны, т.е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны (см. следствие из теоремы 2.17):

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) и есть искомое уравнение прямой. Это уравнение называют обычно *каноническим уравнением прямой*.

Заметим, что в каноническом уравнении (5.7) один из знаменателей  $l$  или  $m$  может оказаться равным нулю (оба числа  $l$  и  $m$  равняться нулю не могут, ибо вектор  $\mathbf{q} = \{l, m\}$  ненулевой). Так как всякую пропорцию  $a/b = c/d$  мы договорились понимать как равенство  $ad = bc$ , *обращение в нуль одного из знаменателей в (5.7) означает обращение в нуль и соответствующего числителя*. В самом деле, если, например,  $l = 0$ , то, поскольку  $m \neq 0$ , из равенства  $l(y - y_1) = m(x - x_1)$  заключаем, что  $x - x_1 = 0$ .

В заключение запишем *уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$*  (конечно, эти точки считаются отличными друг от друга). Так как за направляющий вектор такой прямой можно взять вектор  $\mathbf{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$  и прямая проходит через точку  $M_1(x_1, y_1)$ , то из канонического уравнения (5.6) получим уравнение искомой прямой в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (5.8)$$

<sup>1)</sup> Термин «канонический» (от греческого κανών — правило, предписание, образец) понимается здесь как «типовой», «традиционный».

**4. Параметрические уравнения прямой.** Параметрические уравнения прямой элементарно получаются из канонического уравнения этой прямой. Примем за параметр  $t$  величину, стоящую в левой и в правой частях (5.7). Так как один из знаменателей (5.7) отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать *какие угодно значения*, то областью изменения параметра  $t$  является вся вещественная ось:  $-\infty < t < \infty$ .

Мы получим  $x - x_1 = lt$ ,  $y - y_1 = mt$  или окончательно

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt. \quad (5.9)$$

Уравнения (5.9) и есть искомые *параметрические уравнения прямой*. Уравнения (5.9) допускают наглядную механическую интерпретацию. Если считать, что параметр  $t$  — это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения (5.9) определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью  $v = \sqrt{l^2 + m^2}$  (такое движение происходит по инерции).

**5. Прямая с угловым коэффициентом.** Рассмотрим любую прямую, *не параллельную оси  $Ox$* . Введем понятие угла наклона этой прямой к оси  $Ox$ . Предположим, что рассматриваемая прямая пересекает ось  $Ox$  в точке  $A$  (рис. 5.2). Возьмем на оси  $Ox$  произвольную точку  $M$ , лежащую по ту сторону от точки  $A$ , куда направлена ось  $Ox$ , а на рассматриваемой прямой произвольную точку  $N$ , лежащую по ту сторону от точки  $A$ , куда направлена ось  $Oy$ . Угол  $\alpha = \angle NAM$  назовем *углом наклона данной прямой к оси  $Ox$* .

Если прямая параллельна оси  $Ox$  или совпадает с ней, то угол наклона этой прямой к оси  $Ox$  мы будем считать равным нулю.

Тангенс угла наклона прямой к оси  $Ox$  назовем *угловым коэффициентом* этой прямой. Если обозначить буквой  $k$  угловой коэффициент данной прямой, а буквой  $\alpha$  угол наклона этой прямой к оси  $Ox$ , то по определению можно записать  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

Заметим, что для прямой, параллельной оси  $Ox$ , угловой коэффициент равен нулю, а для прямой, перпендикулярной оси  $Ox$ , угловой коэффициент не существует (в последнем случае иногда формально говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность»).

Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M_1(x_1, y_1)$  и имеющей данный угловой коэффициент  $k$ .

Для этого докажем сначала следующее утверждение: *если прямая не параллельна оси  $Oy$  и имеет направляющий вектор  $\mathbf{q} = \{l, m\}$ , то угловой коэффициент этой прямой  $k$  равен  $k = m/l$ .*

Пусть  $\alpha$  — угол наклона прямой к оси  $Ox$ , а  $\theta$  — угол наклона направляющего вектора  $\mathbf{q} = \{l, m\}$  к оси  $Ox$ . Так как прямая может быть

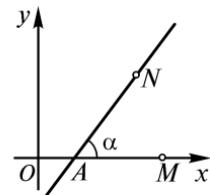


Рис. 5.2

наклонена к оси  $Ox$  под острым или под тупым углом и ее направляющий вектор  $\mathbf{q}$  может иметь два противоположных направления, то возможны четыре случая, изображенных на рис. 5.3. В случаях 1) и 3)  $\theta = \alpha$  и для проекций на оси вектора  $\mathbf{q}$  справедливы формулы

$$l = |\mathbf{q}| \cos \theta,$$

$$m = |\mathbf{q}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\mathbf{q}| \sin \theta.$$

В случаях 2) и 4)  $\theta = \pi - \alpha$  и для проекций вектора  $\mathbf{q}$  справедливы формулы  $l = |\mathbf{q}| \cos \theta$ ,  $m = -|\mathbf{q}| \sin \theta$ .

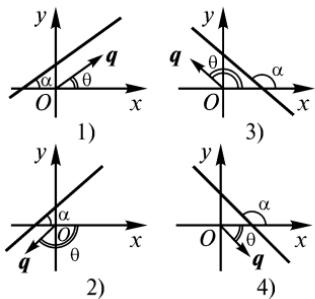


Рис. 5.3

Таким образом, в случаях 1) и 3)  $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha$  и  $m/l = \operatorname{tg} \theta$ , а в случаях 2) и 4)  $\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \alpha$  и  $m/l = -\operatorname{tg} \theta$ .

Стало быть, во всех четырех случаях  $\operatorname{tg} \alpha = m/l$ , и утверждение доказано.

Для того чтобы вывести *уравнение прямой, проходящей через заданную точку  $M_1(x_1, y_1)$  и имеющей заданный угловой коэффициент  $k$* , умножим обе части канонического уравнения (5.7) на  $t$  и учтем, что  $m/l = k$ .

Получим искомое уравнение в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (5.10)$$

Если теперь обозначить через  $b$  постоянную  $b = y_1 - kx_1$ , то уравнение (5.10) примет вид

$$y = kx + b. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. В этом уравнении  $k$  обозначает угловой коэффициент данной прямой, а  $b$  представляет собой величину отрезка, отсекаемого данной прямой на оси  $Oy$ , начиная от начала координат.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть совместно уравнение (5.11) и уравнение  $x = 0$  оси  $Oy$  и найти координаты точки пересечения оси  $Oy$  и прямой (5.11):  $x = 0$ ,  $y = b$  (рис. 5.4).

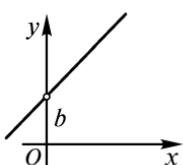


Рис. 5.4

## 6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

а) Пусть сначала две прямые  $L_1$  и  $L_2$  заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Так как нормальным вектором прямой  $L_1$  является вектор  $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ , а нормальным вектором прямой  $L_2$  является вектор  $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ , то задача об определении угла между прямыми  $L_1$  и  $L_2$  сводится к определению угла  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ <sup>1)</sup>.

Из определения скалярного произведения  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2| \cos \varphi$  и из выражения в координатах длин векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  и их скалярного произведения получим

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (5.12)$$

Итак, угол  $\varphi$  между прямыми  $L_1$  и  $L_2$  определяется с помощью формулы (5.12).

Условие параллельности прямых  $L_1$  и  $L_2$ , эквивалентное условию коллинеарности векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид<sup>2)</sup>

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (5.13)$$

Условие перпендикулярности прямых  $L_1$  и  $L_2$  может быть извлечено из формулы (5.12) (при  $\cos \varphi = 0$ ) или выражено равенством нулю скалярного произведения  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ . Оно имеет вид

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (5.14)$$

б) Пусть теперь две прямые  $L_1$  и  $L_2$  заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых  $L_1$  и  $L_2$  служат векторы  $\mathbf{q}_1 = \{l_1, m_1\}$  и  $\mathbf{q}_2 = \{l_2, m_2\}$ , то в полной аналогии со случаем а) мы получим

1) формулу для угла  $\varphi$  между прямыми  $L_1$  и  $L_2$ :

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}; \quad (5.12')$$

2) условие параллельности прямых  $L_1$  и  $L_2$ :

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}; \quad (5.13')$$

<sup>1)</sup> Любые две пересекающиеся прямые образуют два угла, в сумме равных  $\pi$ . Нам достаточно определить одни из них.

<sup>2)</sup> При этом, как и выше, мы понимаем пропорцию  $a/b = c/d$  в смысле равенства  $ad = bc$ .

3) условие перпендикулярности прямых  $L_1$  и  $L_2$ :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \quad (5.14')$$

в) Пусть, наконец, две прямые  $L_1$  и  $L_2$  заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2 x + b_2.$$

Если  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы наклона прямых  $L_1$  и  $L_2$  к оси  $Ox$ , а  $\varphi$  — один из углов между этими прямыми, то из элементарных соображений (рис. 5.5) вытекает, что

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Мы получаем следующую формулу для определения угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (5.12'')$$

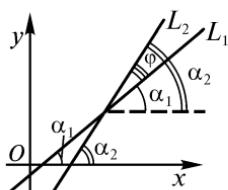


Рис. 5.5

Если в этой формуле поменять местами  $k_1$  и  $k_2$  (от чего фактически лишь изменится знак на противоположный), то эта формула определит нам *другой угол* между прямыми, смежный по отношению к прежнему углу (эти два угла в сумме составляют  $\pi$  и тангенсы их отличаются лишь знаком).

Прямые параллельны, когда тангенс угла между ними равен нулю, т.е. *условие параллельности имеет вид*

$$k_1 = k_2 \quad (5.13'')$$

(при этом числитель в (5.12'') равен нулю, а знаменатель строго положителен).

Условие перпендикулярности прямых  $L_1$  и  $L_2$  также можно получить из (5.12''). Оно отвечает случаю, когда тангенс угла  $\varphi$  не существует, т.е. случаю обращения знаменателя формулы (5.12'') в нуль:  $k_1 k_2 + 1 = 0$ .

Итак, *условие перпендикулярности прямых  $L_1$  и  $L_2$  имеет вид*

$$k_1 = -1/k_2. \quad (5.14'')$$

**7. Нормированное уравнение прямой. Отклонение точки от прямой.** Рассмотрим какую угодно прямую  $L$ . Проведем через начало

координат  $O$  прямую  $n$ , перпендикулярную  $L$ , и обозначим буквой  $P$  точку пересечения указанных прямых (рис. 5.6). На прямой  $n$  возьмем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , направление которого совпадает с направлением отрезка  $OP$  (в случае совпадения точек  $O$  и  $P$  направление  $\mathbf{n}$  выберем произвольно).

Поставим перед собой цель — *выразить уравнение прямой  $L$  через два параметра:* 1) длину  $p$  отрезка  $OP$ ; 2) угол  $\theta$  между вектором  $\mathbf{n}$  и осью  $Ox$ .

Так как  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, то его координаты, соответственно равные его проекциям на оси координат, имеют вид<sup>1)</sup>

$$\mathbf{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\}. \quad (5.15)$$

Очевидно, точка  $M(x, y)$  лежит на рассматриваемой прямой  $L$  тогда и только тогда, когда проекция вектора  $\overline{OM}$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}$ , равна  $p$ , т.е. при условии

$$\operatorname{pr}_n \overline{OM} = p. \quad (5.16)$$

Так как  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, то в силу определения 2 скалярного произведения (см. п. 1 § 2 гл. 2)

$$\operatorname{pr}_n \overline{OM} = \mathbf{n} \cdot \overline{OM}. \quad (5.17)$$

Имея в виду, что  $\overline{OM} = \{x, y\}$ , а вектор  $\mathbf{n}$  определяется равенством (5.15), мы получим следующее выражение для скалярного произведения этих векторов:

$$\mathbf{n} \cdot \overline{OM} = x \cos \theta + y \sin \theta. \quad (5.18)$$

Из сопоставления (5.16), (5.17) и (5.18) вытекает, что точка  $M(x, y)$  лежит на прямой  $L$  тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют уравнению

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0; \quad (5.19)$$

(5.19) и есть искомое уравнение прямой  $L$  (выраженное через два параметра:  $\theta$  и  $p$ ). Это уравнение называется *нормированным уравнением прямой*.

Введем теперь фундаментальное понятие *отклонения произвольной точки  $M$  от данной прямой  $L$* . Пусть число  $d$  обозначает расстояние от точки  $M$  до прямой  $L$ . Назовем отклонением  $\delta$  точки  $M$  от прямой  $L$  число  $+d$  в случае, когда точка  $M$  и начало координат  $O$  лежат по разные стороны от прямой  $L$ , и число  $-d$  в случае, когда  $M$  и  $O$  лежат по одну сторону от  $L$ .

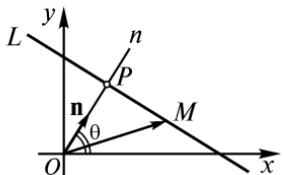


Рис. 5.6

<sup>1)</sup> В силу того, что проекция вектора на любую ось равна модулю этого вектора, умноженному на косинус угла наклона к оси (см. п. 8 § 1 гл. 2).

Если же начало координат  $O$  лежит на прямой  $L$ , мы положим отклонение равным  $+d$  в случае, когда  $M$  лежит по ту сторону от  $L$ , куда направлен вектор  $\mathbf{n}$ , и равным  $-d$  в противном случае.

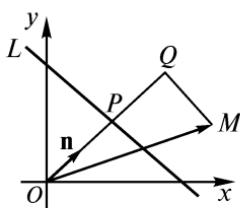


Рис. 5.7

Выясним геометрический смысл левой части уравнения (5.19) при любых  $x$  и  $y$ .

**Теорема 5.1.** Левая часть нормированного уравнения прямой (5.19) равна отклонению точки  $M$  с координатами  $x, y$  от прямой  $L$ , определяемой уравнением (5.19).

Доказательство. Спроецируем точку  $M$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}$ . Пусть  $Q$  — проекция точки  $M$ . Отклонение  $\delta$  точки  $M$  от прямой  $L$  равно  $PQ$ , где  $PQ$  обозначает величину направленного отрезка  $\overrightarrow{PQ}$  оси, определяемой вектором  $\mathbf{n}$ . Далее, из основного тождества (см. гл. 1) очевидно (рис. 5.7), что

$$\delta = PQ = OQ - OP = OQ - p. \quad (5.20)$$

Но  $OQ = \text{пр}_n \overline{OM}$ , а последняя проекция в силу формул (5.17) и (5.18) равная  $x \cos \theta + y \sin \theta$ . Итак,

$$OQ = x \cos \theta + y \sin \theta. \quad (5.20')$$

Сопоставляя формулы (5.20') и (5.20), получим

$$\delta = x \cos \theta + y \sin \theta - p. \quad (5.21)$$

Теорема доказана.

Теорема 5.1 приводит нас к следующему правилу: для нахождения отклонения  $\delta$  точки  $M(x_0, y_0)$  от прямой  $L$  следует в левую часть нормированного уравнения прямой  $L$  подставить на место  $x$  и  $y$  координаты  $x_0$  и  $y_0$  точки  $M$ .

Разумеется, это правило позволяет отыскивать и расстояние от точки  $M$  до прямой  $L$ , ибо расстояние равно модулю отклонения.

В заключение укажем алгоритм приведения общего уравнения прямой  $Ax + By + C = 0$  к нормированному виду (5.19).

Так как указанное общее уравнение и уравнение (5.19) должны определять одну и ту же прямую, то (в силу замечания в конце п. 1) найдется число  $t$  такое, что

$$tA = \cos \theta, \quad tB = \sin \theta, \quad tC = -p. \quad (5.22)$$

Возвышая в квадрат первые два равенства и затем складывая их, получим  $t^2(A^2 + B^2) = 1$ , откуда

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (5.23)$$

Остается уточнить, какой из знаков  $\pm$  следует взять в формуле (5.23). Так как по смыслу расстояние  $r$  всегда неотрицательно, то из третьего равенства (5.22) заключаем, что знак  $t$  противоположен знаку  $C$ .

Итак, для приведения общего уравнения прямой  $Ax + By + C = 0$  к нормированному виду (5.19) следует умножить его на нормирующий множитель (5.23), знак которого противоположен знаку  $C$ .

**8. Уравнение пучка прямых.** Совокупность лежащих на данной плоскости  $\pi$  прямых, проходящих через некоторую точку  $S$  этой плоскости, принято называть *пучком прямых с центром в  $S$* .

Центр  $S$  пучка прямых полностью определяется заданием двух различных прямых этого пучка. Зная центр пучка  $S(x_1, y_1)$ , легко написать уравнение любой прямой этого пучка: для этого можно, например, использовать уравнение (5.10) прямой, проходящей через точку  $S(x_1, y_1)$  и имеющей заданный угловой коэффициент  $k$ . Однако при решении задач представляется удобным уметь писать уравнение любой прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых, не вычисляя координат этой точки пересечения.

В этом пункте и решается задача о нахождении уравнения пучка прямых, центром которого служит точка пересечения двух данных прямых, определяемых уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Докажем следующую основную теорему.

**Теорема 5.2.** Если  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  суть уравнения двух различных прямых, пересекающихся в некоторой точке  $S$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — какие угодно не равные одновременно нулю числа, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (5.24)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точку  $S$ . Более того, какова бы ни была наперед заданная проходящая через точку  $S$  прямая, она определяется уравнением (5.24) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ .

Доказательство. Прежде всего установим, что при любых  $\alpha$  и  $\beta$ , не равных одновременно нулю, равенство (5.24) представляет собой уравнение первого порядка (т.е. в этом равенстве хотя бы один из коэффициентов при  $x$  или при  $y$  не равен нулю). Собирая в равенстве (5.24) коэффициенты при  $x$  и  $y$ , перепишем это равенство в виде

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0. \quad (5.24')$$

Если бы имели место равенства  $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$  и  $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$ , то из этих равенств, предполагая, например, что  $\alpha \neq 0$ <sup>1)</sup>, мы получили бы

$$A_1/A_2 = -\beta/\alpha, \quad B_1/B_2 = -\beta/\alpha, \quad \text{т.е.} \quad A_1/A_2 = B_1/B_2.$$

<sup>1)</sup> По условию одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  отлично от нуля.

Последнее равенство (см. п. 6) есть *условие параллельности* прямых, определяемых уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , и противоречит предположению о том, что эти прямые пересекаются и не совпадают.

Итак, (5.24) при любых  $\alpha$  и  $\beta$ , не равных одновременно нулю, представляет собой уравнение первой степени, определяющее (в силу результатов п. 1) некоторую прямую.

Эта прямая заведомо проходит через точку  $S(x_0, y_0)$  пересечения двух прямых, определяемых уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

В самом деле, так как  $S(x_0, y_0)$  принадлежит каждой из двух указанных прямых, то справедливы равенства

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0,$$

из которых вытекает, что при любых  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0,$$

т.е. координаты  $x_0$  и  $y_0$  точки  $S$  удовлетворяют уравнению (5.24).

Остается доказать, что, какова бы ни была наше заданная проходящая через точку  $S$  прямая, она определяется уравнением (5.24) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ . Наперед заданная проходящая через точку  $S(x_0, y_0)$  прямая однозначно определяется заданием еще одной отличной от  $S$  точки  $M^*(x^*, y^*)$ , ей принадлежащей. Таким образом, достаточно доказать, что не равные одновременно нулю  $\alpha$  и  $\beta$  можно выбрать так, что координаты  $x^*$ ,  $y^*$  наперед заданной точки  $M^*$  будут удовлетворять уравнению (5.24) при этих  $\alpha$  и  $\beta$ . Подставляя в (5.24) на место  $x$  и  $y$  координаты  $x^*$  и  $y^*$  точки  $M^*$ , получим равенство

$$\alpha(A_1x^* + B_1y^* + C_1) + \beta(A_2x^* + B_2y^* + C_2) = 0. \quad (5.25)$$

Прежде всего заметим, что (5.25) представляет собой *уравнение относительно  $\alpha$  и  $\beta$* . В самом деле, оба выражения в круглых скобках, являющиеся коэффициентами при  $\alpha$  и  $\beta$ , обратиться в нуль не могут, ибо это означало бы, что две прямые, определяемые уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , проходят через точку  $M^*$ . (Последнее невозможно в силу того, что эти прямые не совпадают и проходят через точку  $S$ , отличную от  $M^*$ .) Итак, хотя бы одна из круглых скобок в (5.25) отлична от нуля. Пусть, например,  $A_1x^* + B_1y^* + C_1 \neq 0$ . Тогда, задав произвольно  $\beta \neq 0$ , мы определим из уравнения (5.25) коэффициент  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{A_2x^* + B_2y^* + C_2}{A_1x^* + B_1y^* + C_1} \beta.$$

При указанных  $\alpha$  и  $\beta$  прямая, определяемая уравнением (5.24), проходит через точку  $M^*(x^*, y^*)$ . Случай, когда отлична от нуля вторая из круглых скобок в (5.25), рассматривается аналогично. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Так как в уравнении пучка (5.24) хотя бы одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  отлично от нуля, то можно записывать уравнение пучка *не с двумя* коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ , *а с одним* коэффициентом  $\lambda$ , равным их отношению. Так, если отлично от нуля  $\alpha$ , то, поделив (5.24) на  $\alpha$  и положив  $\lambda = \beta/\alpha$ , мы получим уравнение пучка в виде

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (5.26)$$

Следует, однако, отметить, что уравнение (5.26) содержит все прямые, проходящие через точку пересечения прямых, определяемых уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , *за исключением одной прямой — прямой, определяемой уравнением*  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  (она не получится из (5.26) ни при каком  $\lambda$ ).

## § 2. Некоторые задачи на прямую линию на плоскости

Выше уже был рассмотрен ряд задач на прямую линию на плоскости (нахождение угла между двумя прямыми, установление условий параллельности и перпендикулярности двух прямых, вычисление отклонения и расстояния точки от прямой, нахождение уравнения прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых).

В этом параграфе мы рассмотрим ряд задач, развивающих и углубляющих материал предыдущего параграфа.

**1. Нахождение прямой, проходящей через данную точку  $M_1(x_1, y_1)$  и составляющей заданный угол  $\phi$  с данной прямой  $y = k_1x + b_1$ .** Будем искать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1)$  и составляющей заданный угол  $\phi$  с прямой, определяемой уравнением  $y = k_1x + b_1$ , в форме (5.10):

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Прямая (5.10) проходит через точку  $M_1(x_1, y_1)$ , и нам остается выбрать ее угловой коэффициент  $k$  так, чтобы она составляла угол  $\phi$  с прямой  $y = k_1x + b_1$ . Заметим, что, взяв уравнение искомой прямой в виде (5.10), мы исключаем из рассмотрения прямую  $x = x_1$ , проходящую через точку  $M_1(x_1, y_1)$  и перпендикулярную оси  $Ox$ . Так как искомая прямая  $y = kx + (y_1 - kx_1)$  и прямая  $y = k_1x + b_1$  составляют угол  $\phi$ , то в силу формулы (5.12'')

$$\pm \operatorname{tg} \phi = \frac{k - k_1}{1 + kk_1}.$$

Из последнего уравнения определяем угловой коэффициент  $k$  искомой прямой:  $k - k_1 = \pm \operatorname{tg} \varphi \pm kk_1 \operatorname{tg} \varphi$ , и, стало быть, при  $(1 \pm k_1 \operatorname{tg} \varphi) \neq 0$  получим

$$k = \frac{k_1 \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp k_1 \operatorname{tg} \varphi}. \quad (5.27)$$

В случае, если знаменатель в формуле (5.27) обращается в нуль, угловой коэффициент не существует, и искомую прямую, очевидно, следует определить уравнением  $x = x_1$ .

Итак, окончательно, получаем уравнения двух искомых прямых:

$$1) y - y_1 = \frac{k_1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - k_1 \operatorname{tg} \varphi}(x - x_1) \text{ и } y - y_1 = \frac{k_1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + k_1 \operatorname{tg} \varphi}(x - x_1) \text{ при } k_1 \operatorname{tg} \varphi \neq \pm 1;$$

$$2) y - y_1 = \frac{k_1 + \operatorname{tg} \varphi}{2}(x - x_1) \text{ и } x = x_1 \text{ при } k_1 \operatorname{tg} \varphi = -1;$$

$$3) x = x_1 \text{ и } y - y_1 = \frac{k_1 - \operatorname{tg} \varphi}{2}(x - x_1) \text{ при } k_1 \operatorname{tg} \varphi = 1.$$

**2. Нахождение биссектрис углов, образованных данными прямыми.** Запишем уравнения двух прямых в нормированном виде. Пусть это будут

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0 \quad \text{и} \quad x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 - p_1 = 0.$$

Левые части этих уравнений равны отклонениям  $\delta_1$  и  $\delta_2$  точки  $M(x, y)$  соответственно от первой и от второй прямых. На одной из биссектрис (отвечающей тому углу, в котором лежит начало координат) эти отклонения равны и по модулю, и по знаку; на другой биссектрисе отклонения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  равны по модулю и противоположны по знаку. Таким образом, уравнения искомых биссектрис имеют вид

$$(x \cos \theta + y \sin \theta - p) - (x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 - p_1) = 0,$$

$$(x \cos \theta + y \sin \theta - p) + (x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 - p_1) = 0.$$

**3. Условия, при которых данная прямая пересекает данный отрезок  $AB$ .** Запишем уравнение прямой в нормированном виде:  $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$  и, подставив в левую часть последнего уравнения сначала координаты точки  $A$ , а затем координаты точки  $B$ , найдем отклонения  $\delta_A$  и  $\delta_B$  соответственно точек  $A$  и  $B$  от данной прямой. Для того чтобы данная прямая пересекала отрезок  $AB$ , необходимо и достаточно, чтобы точки  $A$  и  $B$  лежали по разные стороны от этой прямой, т.е. необходимо и достаточно, чтобы отклонения  $\delta_A$  и  $\delta_B$  имели разные знаки.

**4. Определение местоположения данной точки  $M$  и начала координат  $O$  относительно углов, образованных двумя данными прямыми.** Пусть заданы две пересекающиеся прямые и требуется оп-

ределить: в одном, в смежных или в вертикальных углах, образованных этими прямыми, лежат данная точка  $M$  и начало координат  $O$ . Запишем уравнения данных прямых в нормированном виде и, подставив в левые части указанных уравнений координаты точки  $M$ , вычислим отклонения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  точки  $M$  от первой и второй прямых соответственно. По определению отклонения точка  $M$  и начало координат  $O$  лежат в одном углу, если оба отклонения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  отрицательны, в вертикальных углах, если отклонения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  оба положительны, и в смежных углах, если  $\delta_1$  и  $\delta_2$  имеют разные знаки.

**5. Условие пересечения трех прямых в одной точке.** Найдем условие, необходимое и достаточное для того, чтобы три прямые, определяемые уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0,$$

пересекались в одной и только в одной точке.

Так как мы ищем условия, при которых точка пересечения только одна, то необходимо предполагать, что из трех данных прямых *какие-нибудь две прямые пересекаются в одной точке* (ибо в противном случае у трех прямых либо вовсе не будет точек пересечения, либо будет их бесконечно много). Таким образом, необходимо требовать, чтобы из трех определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad (5.28)$$

хотя бы один был отличен от нуля.

Ради определенности предположим, что *первые две* из указанных трех прямых пересекаются в одной точке (т.е. предположим, что отличен от нуля первый из определителей (5.28)). Тогда, для того чтобы три прямые пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы третья прямая  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$  принадлежала пучку, образованному первыми двумя прямыми

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

В силу замечания в конце п. 1 § 1 найдется некоторое число (обозначим его  $-\gamma$ ) такое, что все коэффициенты последнего уравнения равны соответствующим коэффициентам уравнения  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ , умноженным на это число, т.е.

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = -\gamma A_3, \quad \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0,$$

$$\alpha B_1 + \beta B_2 = -\gamma B_3, \quad \text{или} \quad \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 = 0,$$

$$\alpha C_1 + \beta C_2 = -\gamma C_3, \quad \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0.$$

Последние равенства представляют собой однородную систему трех уравнений относительно трех неизвестных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Так как образующие пучок коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  не равны нулю одновременно, то указанная система обязана иметь *нетривиальное* решение, для чего необходимо и достаточно (см. Дополнение к гл. 1, п. 8), чтобы определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad (5.29)$$

был равен нулю.

Итак, для того чтобы три прямые, определяемые уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  и  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ , пересекались в одной и только в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль определитель (5.29) и был отличен от нуля хотя бы один из определителей (5.28).

Мы пришли к этому утверждению, предположив, что первые две из указанных трех прямых пересекаются в одной точке. К этому же результату приводит и предположение о том, что пересекаются в одной точке любые другие две из указанных трех прямых (впрочем, последнее ясно из соображений симметрии).

**6. Нахождение прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых и удовлетворяющей еще одному условию.** Пусть требуется найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух неколлинеарных<sup>1)</sup> прямых, определяемых уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , и, кроме того, удовлетворяющей одному из следующих трех условий: а) отсекающей на осях отрезки равной длины; б) параллельной заданной прямой  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ ; в) перпендикулярной заданной прямой  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ .

Искомая прямая принадлежит пучку

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (5.30)$$

Для определения постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  (а точнее, их отношения) будем использовать дополнительное условие.

В случае а) мы должны собрать в (5.30) коэффициенты при  $x$  и  $y$  и приравнять друг другу модули этих коэффициентов (мы приравниваем друг другу не сами коэффициенты при  $x$  и  $y$ , а их модули, так как требуется, чтобы отсекаемые на осях отрезки имели равную длину, а не величину). В результате получим уравнение  $|\alpha A_1 + \beta A_2| = |\beta B_2 + \alpha B_1|$  или  $\alpha(A_1 \mp B_1) = -\beta(A_2 \mp B_2)$ . Заметим, что обе круглые скобки обратиться в нуль не могут (так как прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

<sup>1)</sup> Прямые называются *неколлинеарными*, если они не параллельны и не совпадают.

не коллинеарны), и, стало быть, из последнего равенства, задавая произвольно один из коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , мы найдем другой из этих коэффициентов.

В случае б) учтем, что у двух параллельных прямых коэффициенты при  $x$  и  $y$  пропорциональны (см. § 1, п. 6, условие (5.13)).

Таким образом, мы получим

$$\frac{\alpha A_1 + \beta A_2}{A_3} = \frac{\alpha B_1 + \beta B_2}{B_3} \quad \text{или} \quad \alpha(A_1 B_3 - B_1 A_3) = \beta(B_2 A_3 - A_2 B_3).$$

Заметим, что в последнем равенстве обе круглые скобки не могут обращаться в нуль (иначе бы прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  оказались коллинеарными), и поэтому из последнего равенства, задавая произвольно один из коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , мы найдем другой из этих коэффициентов.

В случае в) используем для прямой (5.30) и прямой  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$  условие *перпендикулярности* (5.14) (см. § 1, п. 6). В результате получим  $(\alpha A_1 + \beta A_2)A_3 + (\alpha B_1 + \beta B_2)B_3 = 0$  или  $\alpha(A_1 A_3 + B_1 B_3) = -\beta(A_2 A_3 + B_2 B_3)$ . Заметим, что обращение в нуль обеих круглых скобок последнего равенства невозможно (иначе мы получили бы, что  $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$  и прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  коллинеарны). Таким образом, задавая в указанном равенстве произвольно один из коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , мы определим из него другой из этих коэффициентов.

### § 3. Различные виды уравнения плоскости

**1. Общее уравнение плоскости.** Содержание этого пункта полностью аналогично содержанию п. 1 § 1. Мы докажем два утверждения.

1°. *Если в пространстве задана произвольная плоскость  $\pi$  и фиксирована произвольная декартова прямоугольная система  $Oxyz$ , то плоскость  $\pi$  определяется в этой системе уравнением первой степени.*

2°. *Если в пространстве фиксирована произвольная декартова прямоугольная система  $Oxyz$ , то всякое уравнение первой степени с тремя переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$  определяет относительно этой системы плоскость.*

Для доказательства первого утверждения достаточно установить, что плоскость  $\pi$  определяется уравнением первой степени *при каком-то одном специальном выборе* декартовой прямоугольной системы, ибо тогда она определяется уравнением первой степени *и при любом другом выборе* декартовой прямоугольной системы (в силу теоремы 4.2). Расположим оси  $Ox$  и  $Oy$  в плоскости  $\pi$ , а ось  $Oz$  направим перпендикулярно этой плоскости. Тогда уравнением плоскости  $\pi$  будет *уравнение первой степени* ( $z = 0$ ). В самом деле, этому уравнению будут удовлетворять

координаты любой точки, лежащей на плоскости  $\pi$ , и не будут удовлетворять координаты ни одной точки, не лежащей на плоскости  $\pi$ . Утверждение  $1^\circ$  доказано.

Для доказательства утверждения  $2^\circ$  фиксируем произвольную декартову прямоугольную систему  $Oxyz$  и рассмотрим произвольное уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5.31)$$

в котором  $A, B, C$  и  $D$  — какие угодно постоянные, причем из *постоянных  $A, B$  и  $C$  хотя бы одна отлична от нуля*. Уравнение (5.31) *заведомо имеет хотя бы одно решение  $x_0, y_0, z_0$* <sup>1)</sup>, т.е. существует хотя бы одна точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , координаты которой удовлетворяют уравнению (5.31):

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (5.32)$$

Вычитая из уравнения (5.31) тождество (5.32), получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (5.33)$$

*эквивалентное уравнению (5.31).* Достаточно доказать, что уравнение (5.33) определяет относительно системы  $Oxyz$  некоторую плоскость. Мы докажем, что *уравнение (5.33) (а стало быть, и уравнение (5.31)) определяет плоскость  $\pi$ , проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярную вектору  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$*  (так как хотя бы одна из постоянных  $A, B$  и  $C$  не равна нулю, то вектор  $\mathbf{n}$  ненулевой).

В самом деле, если точка  $M(x, y, z)$  лежит на указанной плоскости  $\pi$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению (5.33), ибо в этом случае векторы  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$  и  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$  ортогональны и их скалярное произведение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \quad (5.34)$$

равно нулю. Если же точка  $M(x, y, z)$  не лежит на указанной плоскости  $\pi$ , то ее координаты не удовлетворяют уравнению (5.33), ибо в этом случае векторы  $\mathbf{n}$  и  $\overrightarrow{M_0M}$  не ортогональны и поэтому их скалярное произведение (5.34) не равно нулю. Утверждение  $2^\circ$  доказано.

*Уравнение (5.31) с произвольными коэффициентами  $A, B, C$  и  $D$  такими, что из коэффициентов  $A, B$  и  $C$  хотя бы один отличен от нуля, называется общим уравнением плоскости.*

Мы доказали, что *плоскость, определяемая общим уравнением (5.31), ортогональна к вектору  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ .* Этот последний вектор мы будем называть *нормальным вектором плоскости (5.31)*.

<sup>1)</sup> В самом деле, хотя бы одна из постоянных  $A, B, C$  отлична от нуля. Пусть, например,  $C \neq 0$ . Тогда, взяв произвольные  $x_0$  и  $y_0$ , получим из уравнения (5.31)  $z_0 = -\frac{A}{C}x_0 - \frac{B}{C}y_0$ .

Заметим, что если два общих уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

определяют одну и ту же плоскость, то найдется такое число  $t$ , что справедливы равенства

$$A_1 = At, \quad B_1 = Bt, \quad C_1 = Ct, \quad D_1 = Dt,$$

т.е. коэффициенты  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  второго уравнения равны соответствующим коэффициентам  $A, B, C$  и  $D$  первого уравнения, умноженным на некоторое число  $t$ .

Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству утверждения, содержащегося в замечании в конце п. 1 § 1. Мы предоставляем читателю провести его самому.

**2. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках.** Общее уравнение плоскости (5.31) называется *неполным*, если все его коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений:

1)  $D = 0$ , уравнение  $Ax + By + Cz = 0$  определяет плоскость, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2)  $A = 0$ , уравнение  $By + Cz + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Ox$  (поскольку нормальный вектор этой плоскости  $\mathbf{n} = \{0, B, C\}$  перпендикулярен оси  $Ox$ ).

3)  $B = 0$ , уравнение  $Ax + Cz + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Oy$  (ибо этой оси перпендикулярен нормальный вектор  $\mathbf{n} = \{A, 0, C\}$ ).

4)  $C = 0$ , уравнение  $Ax + By + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Oz$  (ибо этой оси перпендикулярен нормальный вектор  $\mathbf{n} = \{A, B, 0\}$ ).

5)  $A = 0, B = 0$ , уравнение  $Cz + D = 0$  определяет плоскость, параллельную координатной плоскости  $Oxy$  (ибо эта плоскость параллельна осям  $Ox$  и  $Oy$ ).

6)  $A = 0, C = 0$ , уравнение  $By + D = 0$  определяет плоскость, параллельную координатной плоскости  $Oxz$  (ибо эта плоскость параллельна осям  $Ox$  и  $Oz$ ).

7)  $B = 0, C = 0$ , уравнение  $Ax + D = 0$  определяет плоскость, параллельную координатной плоскости  $Oyz$  (ибо эта плоскость параллельна осям  $Oy$  и  $Oz$ ).

8)  $A = 0, B = 0, D = 0$ , уравнение  $Cz = 0$  определяет координатную плоскость  $Oxy$  (ибо плоскость параллельна  $Oxy$  и проходит через начало координат).

9)  $A = 0, C = 0, D = 0$ , уравнение  $By = 0$  определяет координатную плоскость  $Oxz$  (ибо плоскость параллельна  $Oxz$  и проходит через начало координат).

10)  $B = 0, C = 0, D = 0$ , уравнение  $Ax = 0$  определяет координатную плоскость  $Oyz$  (ибо плоскость параллельна  $Oyz$  и проходит через начало координат).

Рассмотрим теперь *полное* уравнение плоскости (5.31) и покажем, что оно может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (5.35)$$

называемому *уравнением плоскости в отрезках*.

В самом деле, так как все коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  отличны от нуля, мы можем переписать уравнение (5.31) в виде

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$$

и затем положить  $a = -D/A, b = -D/B, c = -D/C$ .

Заметим, что в уравнении «в отрезках» (5.35) числа  $a, b$  и  $c$  имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, кото-

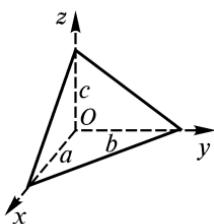


Рис. 5.8

рые отсекает плоскость на осях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат, см. рис. 5.8). Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения плоскости, определяемой уравнением (5.35), с осями координат. Например, точка пересечения с осью  $Ox$  определяется из совместного рассмотрения уравнения плоскости (5.35) с уравнениями  $y = 0$  и  $z = 0$  оси  $Ox$ . Мы получим координаты точки пересечения  $x = a, y = 0, z = 0$ . Аналогично устанавливается, что координаты точки пересечения плоскости (5.35) с осью  $Oy$  равны  $x = 0, y = b, z = 0$  и с осью  $Oz$  равны  $x = 0, y = 0, z = c$ .

**3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.** Пусть две плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  заданы общими уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Очевидно, вопрос об определении угла между указанными плоскостями сводится к определению угла  $\varphi$  между их нормальными векторами  $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$  и  $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Любые две пересекающиеся плоскости образуют два угла, в сумме равных  $\pi$ . Нам достаточно определить один из этих углов.

Из определения скалярного произведения  $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2| \cos \varphi$  и из выражения в координатах длин векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  и их скалярного произведения, получим

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (5.36)$$

Итак, угол  $\varphi$  между плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$  определяется с помощью формулы (5.36).

*Условие параллельности* плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , эквивалентное условию коллинеарности векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид<sup>1)</sup>

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (5.37)$$

*Условие перпендикулярности* плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  может быть извлечено из формулы (5.36) (при  $\cos \varphi = 0$ ) или выражено равенством нулю скалярного произведения векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ . Оно имеет вид

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (5.38)$$

**4. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой.** Поставим перед собой цель — вывести уравнение плоскости, проходящей через три различные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ , не лежащие на одной прямой. Так как указанные три точки не лежат на одной прямой, векторы  $\overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$  и  $\overline{M_1 M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$  не коллинеарны, а поэтому точка  $M(x, y, z)$  лежит в одной плоскости с точками  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overline{M_1 M_2}$ ,  $\overline{M_1 M_3}$  и  $\overline{M_1 M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$  компланарны, т.е. тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих трех векторов равно нулю (см. гл. 2, § 3, п. 4).

Используя выражение смешанного произведения в координатах, мы получим необходимое и достаточное условие принадлежности  $M(x, y, z)$  указанной плоскости в виде (см. гл. 2, § 3, п. 7)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.39)$$

<sup>1)</sup> При этом, как и всюду выше, мы понимаем всякую пропорцию  $a/b = c/d$  в смысле равенства  $ad = bc$ .

Уравнение первой степени (5.39) и является уравнением искомой плоскости.

**5. Нормированное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости.** Рассмотрим какую угодно плоскость  $\pi$ . Проведем через начало координат  $O$  прямую  $n$ , перпендикулярную плоскости  $\pi$ , и обозначим буквой  $P$  точку пересечения прямой  $n$  и плоскости  $\pi$  (рис. 5.9). На прямой  $n$  возьмем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , направление которого совпадает с направлением отрезка  $OP$  (в случае совпадения точек  $O$  и  $P$  направление  $\mathbf{n}$  выберем произвольно).

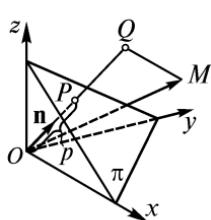


Рис. 5.9

Поставим перед собой цель — выразить уравнение плоскости  $\pi$  через следующие параметры: 1) длину  $p$  отрезка  $OP$ ; 2) углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  наклона вектора  $\mathbf{n}$  к осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Так как  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, то его координаты, соответственно равные его проекциям на оси координат, имеют вид<sup>1)</sup>

$$\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}. \quad (5.40)$$

Очевидно, точка  $M(x, y, z)$  лежит на рассматриваемой плоскости  $\pi$  тогда и только тогда, когда проекция вектора  $OM$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}$ , равна  $p$ , т.е. при условии

$$\operatorname{пр}_n \overline{OM} = p. \quad (5.41)$$

Так как  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, то в силу определения 2 скалярного произведения (см. п. 1 § 2 гл. 2)

$$\operatorname{пр}_n \overline{OM} = \mathbf{n} \cdot \overline{OM}. \quad (5.42)$$

Имея в виду, что  $\overline{OM} = \{x, y, z\}$ , а вектор  $\mathbf{n}$  определяется равенством (5.40), мы получим следующее выражение для скалярного произведения этих векторов:

$$\mathbf{n} \cdot \overline{OM} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (5.43)$$

Из сопоставления (5.41), (5.42) и (5.43) вытекает, что точка  $M(x, y, z)$  лежит на плоскости  $\pi$  тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют уравнению

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (5.44)$$

(5.44) и есть искомое уравнение плоскости  $\pi$ , выраженное через параметры  $p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Это уравнение называется *нормированным уравнением плоскости*.

<sup>1)</sup> В силу того, что проекция вектора на любую ось равна модулю этого вектора, умноженному на косинус угла наклона к оси (см. п. 8 § 1 гл. 2).

Введем теперь фундаментальное понятие *отклонения произвольной точки  $M$  от данной плоскости  $\pi$* . Пусть число  $d$  обозначает расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\pi$ .

*Назовем отклонением  $\delta$  точки  $M$  от плоскости  $\pi$  число  $+d$  в случае, когда точка  $M$  и начало координат  $O$  лежат по разные стороны от плоскости  $\pi$ , и число  $-d$  в случае, когда  $M$  и  $O$  лежат по одну сторону от  $\pi$ .*

Если же начало координат  $O$  лежит на плоскости  $\pi$ , положим отклонение равным  $+d$  в случае, когда  $M$  лежит по ту сторону от  $\pi$ , куда направлен вектор  $\mathbf{n}$ , и равным  $-d$  в противном случае.

Имеет место следующее важное утверждение.

**Теорема 5.3.** *Левая часть нормированного уравнения плоскости (5.44) равна отклонению точки  $M$  с координатами  $x, y, z$  от плоскости  $\pi$ , определяемой уравнением (5.44).*

Доказательство. Спроектируем точку  $M$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}$ . Пусть  $Q$  — проекция точки  $M$  (рис. 5.9). Отклонение  $\delta$  точки  $M$  от плоскости  $\pi$  равно  $PQ$ , где  $PQ$  обозначает величину направленного отрезка  $PQ$  оси, определяемой вектором  $\mathbf{n}$ . Далее, из основного тождества (см. гл. 1) очевидно (см. рис. 5.9), что

$$\delta = PQ = OQ - OP = OQ - p. \quad (5.45)$$

Но  $OQ = \text{пр}_n \overline{OM}$ , а последняя проекция в силу формул (5.42) и (5.43) равна  $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$ . Итак,

$$OQ = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (5.46)$$

Сопоставляя формулы (5.45) и (5.46), получим  $\delta = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p$ . Теорема доказана.

Теорема 5.3 приводит нас к следующему правилу: для нахождения отклонения  $\delta$  точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  от плоскости  $\pi$  следует в левую часть нормированного уравнения плоскости  $\pi$  подставить на место  $x, y$  и  $z$  координаты  $x_0, y_0$  и  $z_0$  точки  $M_0$ .

Разумеется, это правило позволяет отыскивать и расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\pi$ , ибо расстояние равно модулю отклонения.

В заключение укажем алгоритм приведения общего уравнения плоскости (5.31) к нормированному виду (5.44). Так как указанное общее уравнение и уравнение (5.44) должны определять *одну и ту же плоскость*, то (в силу замечания в конце п. 1 этого параграфа) найдется число  $t$  такое, что

$$tA = \cos \alpha, \quad tB = \cos \beta, \quad tC = \cos \gamma, \quad tD = -p. \quad (5.47)$$

Возвышая в квадрат первые три равенства (5.47), складывая их и учитывая, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице (см. п. 9 § 1 гл. 2), получим  $t^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1$ , откуда

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (5.48)$$

Остается уточнить, какой из знаков  $\pm$  следует взять в формуле (5.48). Так как по смыслу расстояние  $p$  всегда неотрицательно, то из последнего равенства (5.47) заключаем, что знак  $t$  противоположен знаку  $D$ .

Итак, для приведения общего уравнения плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  к нормированному виду (5.44) следует умножить его на нормирующий множитель (5.48), знак которого противоположен знаку  $D$ .

**6. Пучки и связки плоскостей.** Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую  $L$ , называется *пучком плоскостей* (с центром в  $L$ ).

В полной аналогии с теоремой 5.2, относящейся к пучку прямых, доказывается следующее утверждение:

Если  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  суть уравнения двух различных и не параллельных плоскостей, пересечением которых служит некоторая прямая  $L$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — какие угодно не равные одновременно нулю числа, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (5.49)$$

есть уравнение плоскости, проходящей через прямую  $L$ . Более того, какова бы ни была наперед заданная проходящая через прямую  $L$  плоскость, она определяется уравнением (5.49) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ .

Доказательство этого утверждения (не содержащее по сравнению с доказательством теоремы 5.2 никаких новых идей) представляем читателю.

Сформулированное утверждение позволяет задавать прямую  $L$ , являющуюся линией пересечения двух не совпадающих и не параллельных плоскостей  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , не только двумя уравнениями этих плоскостей, но и любыми двумя различными уравнениями пучка (5.49) (полученными при каких угодно  $\alpha$  и  $\beta$ ).

Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  называется *связкой плоскостей* (с центром в  $M_0$ ).

Легко убедиться в том, что *уравнение связки с центром в  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (5.50)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — какие угодно числа, не равные одновременно нулю.

В самом деле, всякая плоскость, определяемая уравнением (5.50), проходит через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . С другой стороны, если  $\pi$  — наперед заданная плоскость, проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , то эта плоскость однозначно определяется заданием, кроме точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , еще нормального вектора  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$  и потому определяется уравнением (5.33) (см. п. 1 этого параграфа), совпадающим с уравнением (5.50).

## § 4. Прямая линия в пространстве

**1. Канонические уравнения прямой в пространстве.** Выше (см. п. 6 предыдущего параграфа) уже отмечалось, что прямую линию в пространстве, являющуюся линией пересечения двух различных и не параллельных плоскостей, определяемых уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ <sup>1)</sup>, можно задавать либо двумя уравнениями этих плоскостей, либо двумя любыми различными уравнениями пучка

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

(отвечающими произвольно взятым числам  $\alpha$  и  $\beta$ ).

При решении многих задач более удобным является специальный вид уравнений прямой в пространстве, к выводу которого мы и переходим.

Договоримся называть любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, *направляющим вектором* этой прямой.

Выведем *уравнения прямой, проходящей через данную точку пространства  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и имеющей заданный направляющий вектор  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$* . Для этого заметим, что точка  $M(x, y, z)$  лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы  $M_1M = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$  и  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$  коллинеарны, т.е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны (см. следствие из теоремы 2.17)

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \quad (5.51)$$

Уравнения (5.51) суть искомые уравнения прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и коллинеарной вектору  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$ . Эти уравнения принято называть *каноническими уравнениями* прямой.

Заметим, что в канонических уравнениях (5.51) одно или два из чисел  $l, m$  и  $n$  могут оказаться равными нулю (все три числа  $l, m$  и  $n$  равняться нулю не могут, так как вектор  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$  ненулевой). Так как всякую пропорцию  $a/b = c/d$  мы договорились понимать как равенство  $ad = bc$ , *обращение в нуль одного из знаменателей в (5.51) означает обращение в нуль и соответствующего числителя*. В самом деле, пусть, например,  $l = 0$ , а  $n \neq 0$  (хотя бы одно из трех чисел  $l, m$  и  $n$  не равно нулю). Тогда из пропорции  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{z - z_1}{n}$ , эквивалентной равенству  $(x - x_1)n = (z - z_1)l$ , заключаем, что  $x - x_1 = 0$ .

В заключение покажем, как прямую, заданную уравнениями двух различных и не параллельных плоскостей

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

<sup>1)</sup> Из п. 3 §3 следует, что для того, чтобы плоскости, определяемые уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , не совпадали и не были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы нарушилась хотя бы одна из пропорций  $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$ .

привести к каноническому виду (5.51). Достаточно найти: 1) хотя бы одну точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , через которую проходит прямая (5.52); 2) направляющий вектор  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$  прямой (5.52).

Начнем с нахождения координат  $x_1, y_1, z_1$  точки  $M_1$ , через которую проходит прямая (5.52). Так как плоскости, определяемые уравнениями (5.52), не параллельны и не сливаются, то нарушается хотя бы одна из

пропорций  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ . Это означает, что хотя бы один из трех определятелей второго порядка

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ отличен от нуля}$$

(см. Дополнение к гл. 1 п. 1). Пусть ради определенности отличен от нуля

определитель  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ . Тогда, взяв вместо  $z$  произвольное число  $z_1$  и подставив его в уравнения (5.52), определим из системы (5.52) соответствующие этому  $z_1$  значения  $x_1$  и  $y_1$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{B_1(C_2z_1 + D_2) - B_2(C_1z_1 + D_1)}{A_1B_2 - A_2B_1}, \\ y_1 &= \frac{A_2(C_1z_1 + D_1) - A_1(C_2z_1 + D_2)}{A_1B_2 - A_2B_1}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

В частности, можно взять  $z_1 = 0$ . Тогда, воспользовавшись формулами (5.53), мы получим, что прямая (5.52) проходит через точку

$$M_1\left(\frac{B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{A_2D_1 - A_1D_2}{A_1B_2 - A_2B_1}, 0\right).$$

Для нахождения координат  $l, m, n$  направленного вектора  $\mathbf{q}$  прямой (5.52) заметим, что вектор  $\mathbf{q}$  ортогонален каждому из нормальных векторов  $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$  и  $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$  плоскостей (5.52), так что можно положить вектор  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$  равным векторному произведению  $[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2]$ . Пользуясь выражением векторного произведения в координатах (см. п. 6 § 3 гл. 2), мы получим:  $l = B_1C_2 - B_2C_1$ ,  $m = C_1A_2 - C_2A_1$ ,  $n = A_1B_2 - A_2B_1$ .

Таким образом, для случая, когда отличен от нуля определитель

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ , канонические уравнения прямой (5.52) имеют вид

$$\frac{x - \frac{B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - \frac{A_2D_1 - A_1D_2}{A_1B_2 - A_2B_1}}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{z}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Аналогично записываются канонические уравнения прямой (5.52) для

случая, когда отличен от нуля определитель  $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$  или  $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ .

**2. Уравнения прямой, проходящей через две различные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .** Эти уравнения имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Для получения их достаточно заметить, что прямая проходит через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и имеет направляющий вектор  $\mathbf{q} = M_1M_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ , и воспользоваться каноническими уравнениями (5.51).

**3. Параметрические уравнения прямой в пространстве.** Параметрические уравнения прямой в пространстве элементарно получаются из канонических уравнений (5.51) этой прямой. Примем за параметр  $t$  каждое из отношений (5.51). Так как один из знаменателей (5.51) отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать *какие угодно значения*, то областью изменения параметра  $t$  является вся вещественная ось:  $-\infty < t < +\infty$ . Мы получим  $x - x_1 = lt, y - y_1 = mt, z - z_1 = nt$ , или окончательно

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt. \quad (5.54)$$

Уравнения (5.54) и есть искомые *параметрические уравнения прямой*. Если принять параметр  $t$  за время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения (5.54) определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью  $v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$  (такое движение происходит по инерции).

**4. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.** Пусть две прямые в пространстве  $L_1$  и  $L_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Тогда задача определения угла между этими прямыми сводится к определению угла  $\varphi$  между их направляющими векторами:

$$\mathbf{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{q}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}.$$

Пользуясь определением скалярного произведения  $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = |\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2| \cos \varphi$  и выражением в координатах указанного скалярного произведения и длин векторов  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$ , мы получим для определения угла  $\varphi$  следующую формулу:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (5.55)$$

*Условие параллельности прямых*  $L_1$  и  $L_2$ , эквивалентное условию коллинеарности векторов  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$ , заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид<sup>1)</sup>

$$l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2. \quad (5.56)$$

*Условие перпендикулярности прямых*  $L_1$  и  $L_2$  может быть извлечено из формулы (5.55) (при  $\cos \varphi = 0$ ) или выражено равенством нулю скалярного произведения  $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$ . Оно имеет вид

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (5.57)$$

### 5. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости.

Две прямые в пространстве  $L_1$  и  $L_2$  могут: 1) пересекаться; 2) быть параллельными; 3) скрещиваться. В первых двух случаях прямые  $L_1$  и  $L_2$  лежат в одной плоскости.

Установим условие принадлежности одной плоскости двух прямых, заданных каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Очевидно, что для принадлежности двух указанных прямых одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора  $\overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ ,  $\mathbf{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$  и  $\mathbf{q}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$  были компланарны, для чего в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение указанных трех векторов равнялось нулю. Записывая смешанное произведение указанных трех векторов в координатах (см. п. 7 § 3 гл. 2), приходим к следующему необходимому и достаточному условию принадлежности двух прямых  $L_1$  и  $L_2$  одной плоскости

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.58)$$

Если прямые  $L_1$  и  $L_2$  удовлетворяют условию (5.58), то они либо пересекаются, либо параллельны. Так как условие параллельности прямых  $L_1$  и  $L_2$  имеет вид (5.56), то для пересечения прямых  $L_1$  и  $L_2$  необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условию (5.58) и чтобы нарушалась хотя бы одна из пропорций  $l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2$ .

**6. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.** Рассмотрим плос-

<sup>1)</sup> Как и всюду выше, любую пропорцию  $a/b = c/d$  понимаем в смысле равенства  $ad = bc$ .

кость  $\pi$ , заданную общим уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , и прямую  $L$ , заданную каноническими уравнениями  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ .

Поскольку угол  $\phi$  между прямой  $L$  и плоскостью  $\pi$  является дополнительным к углу  $\psi$  между направляющим вектором прямой  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$  и нормальным вектором плоскости  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$  (рис. 5.10), то из определения скалярного произведения  $\mathbf{q}\mathbf{n} = |\mathbf{q}| |\mathbf{n}| \cos \psi$  и из равенства  $\cos \psi = \sin \phi$  мы получим для определения угла  $\phi$  между прямой  $L$  и плоскостью  $\pi$  следующую формулу:

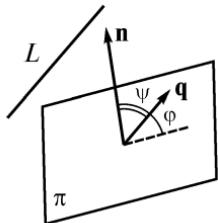


Рис. 5.10

$$\sin \phi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

*Условие параллельности прямой  $L$  и плоскости  $\pi$*  (включающее в себя принадлежность  $L$  к  $\pi$ ) эквивалентно условию перпендикулярности векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{q}$  и выражается равенством нулю скалярного произведения этих векторов:

$$Al + Bm + Cn = 0. \quad (5.59)$$

*Условие перпендикулярности прямой  $L$  и плоскости  $\pi$*  эквивалентно условию параллельности векторов  $n$  и  $q$  и выражается пропорциональностью координат этих векторов<sup>1)</sup>:

$$A/l = B/m = C/n.$$

**7. Условия принадлежности прямой**  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$  **к плоскости**  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Эти условия выражаются двумя равенствами:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad (5.60)$$

первое из которых означает, что точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , через которую проходит прямая, принадлежит плоскости, а второе есть условие параллельности прямой и плоскости (5.59).

**8. Связка прямых.** Совокупность всех прямых, проходящих через данную точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , называется связкой прямых (с центром в точке  $M_1$ ). Легко убедиться в том, что уравнения связки прямых с центром в точке  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  имеют вид

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \quad (5.61)$$

где  $l, m$  и  $n$  — какие угодно числа, не равные одновременно нулю.

<sup>1)</sup> Как всегда, всякую пропорцию  $a/b = c/d$  понимаем в смысле равенства  $ad = bc$ .

В самом деле, всякая прямая, определяемая уравнениями (5.61), проходит через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . С другой стороны, если  $L$  — наперед заданная прямая, проходящая через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , то эта прямая однозначно определяется заданием, кроме точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , еще направляющего вектора  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$  и потому определяется каноническими уравнениями (5.51), совпадающими с уравнениями (5.61).

## § 5. Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве

**1. Условие пересечения трех плоскостей в одной и только в одной точке.** Для того чтобы три плоскости, соответственно определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.62)$$

пересекались в одной и только в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы был отнесен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (5.63)$$

В самом деле, в этом и только в этом случае система (5.62) имеет единственное решение (см. Дополнение к гл. 1).

**2. Нахождение биссектральных плоскостей двугранного угла, образованного двумя данными плоскостями.** Запишем уравнения двух данных плоскостей в нормированном виде. Пусть это будут:  $x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1 = 0$  и  $x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2 = 0$ .

Левые части этих уравнений соответственно равны отклонениям  $\delta_1$  и  $\delta_2$  точки  $M(x, y, z)$  от первой и от второй плоскостей. На одной из биссектральных плоскостей (отвечающей тому двугранному углу, в котором лежит начало координат) эти отклонения равны и по модулю, и по знаку, на другой биссектральной плоскости отклонения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  равны по модулю и противоположны по знаку.

Таким образом, уравнения искомых биссектральных плоскостей имеют вид

$$\begin{aligned} (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1) - \\ - (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2) &= 0, \\ (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1) + \\ + (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2) &= 0. \end{aligned}$$

**3. Условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок  $AB$ .** Записав уравнение данной плоскости в нормированном виде и подставив в левую часть последнего уравнения сначала координаты точки  $A$ , а затем координаты точки  $B$ , найдем отклонения  $\delta_A$  и  $\delta_B$  точек  $A$  и  $B$  соответственно от данной плоскости.

Для того чтобы данная плоскость пересекала отрезок  $AB$ , необходимо и достаточно, чтобы точки  $A$  и  $B$  лежали по разные стороны от плоскости, т.е. необходимо и достаточно, чтобы отклонения  $\delta_A$  и  $\delta_B$  имели разные знаки.

**4. Определение местоположения двух данных точек  $A$  и  $B$  относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями.** Пусть заданы две пересекающиеся плоскости и требуется определить: в одном, в смежных или в вертикальных углах, образованных двумя данными плоскостями, лежат две данные точки  $A$  и  $B$ .

Записав уравнения данных плоскостей в нормированном виде, вычислим отклонения  $\delta_A^{(1)}$  и  $\delta_A^{(2)}$  точки  $A$  от первой и второй плоскостей и отклонения  $\delta_B^{(1)}$  и  $\delta_B^{(2)}$  точки  $B$  от первой и второй плоскостей. По знакам этих четырех отклонений заключаем, по одну или по разные стороны от каждой из плоскостей лежит каждая из точек  $A$  и  $B$ . Очевидно, если точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от первой плоскости и по одну сторону от второй плоскости, то эти точки лежат в одном углу, образованном данными плоскостями. Если точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от одной плоскости и по разные стороны от другой плоскости, то эти точки лежат в смежных углах. Если, наконец, точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны и от той, и от другой плоскости, то эти точки лежат в вертикальных углах.

**5. Уравнения прямой, проходящей через данную точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и перпендикулярной данной плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .** Эти уравнения имеют вид  $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$ , ибо направляющим вектором искомой прямой служит нормальный вектор плоскости  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ .

**6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и параллельной заданной плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ .** Это уравнение имеет вид  $A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0$ . В самом деле, искомая плоскость принадлежит связке плоскостей (5.50) и имеет тот же нормальный вектор  $\mathbf{n} = \{A_1, B_1, C_1\}$ , что и данная плоскость.

**7. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярной заданной прямой**  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ . Это уравнение имеет вид  $l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$ . В самом деле, искомая плоскость принадлежит связке плоскостей (5.50) и имеет в качестве нормального вектора направляющий вектор заданной прямой  $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$ .

**8. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую**  
 $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$  и через заданную не лежащую на этой прямой точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Искомая плоскость принадлежит связке плоскостей (5.50), т.е. определяется уравнением  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ . Используя условия (5.60) принадлежности данной прямой к искомой плоскости, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) &= 0, \\ Al + Bm + Cn &= 0. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  по условию не лежит на данной прямой. Это означает, что нарушается хотя бы одна из пропорций  $\frac{x_1 - x_0}{l} = \frac{y_1 - y_0}{m} = \frac{z_1 - z_0}{n}$ , и поэтому из системы (5.64) два из коэффициентов  $A, B, C$  можно определить через третий. Выбрав затем произвольно этот третий коэффициент (например, положив его равным единице), мы получим уравнение искомой плоскости.

**9. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую**  
 $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$  и параллельной другой данной прямой  
 $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ <sup>1)</sup>). Пусть  $Ax + By + Cz + D = 0$  — уравнение искомой плоскости. Используя условия (5.60) принадлежности данной прямой к искомой плоскости, получим  $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ ,  $Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0$ . Кроме того, используя условие (5.59) параллельности искомой плоскости и второй данной прямой, получим  $Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0$ . В результате получим систему трех уравнений:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0,$$

$$Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0,$$

из которой три из коэффициентов  $A, B, C, D$  могут быть выражены через четвертый (в силу того, что две данные прямые не параллельны и нарушается хотя бы одна из пропорций  $l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2$ ), получим, что хотя бы один из определителей третьего порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \end{vmatrix}$$

<sup>1)</sup> Предполагается, что две данные прямые не параллельны.

отличен от нуля, и поэтому какие-то три из коэффициентов  $A, B, C, D$  можно выразить через четвертый). Положив указанный четвертый коэффициент равным единице, мы получим уравнение искомой плоскости.

**10. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую  $L_1$  и перпендикулярной заданной плоскости  $\pi$ .** Эта задача сводится к предыдущей. Чтобы убедиться в этом, мы сначала через точки  $M_1$  прямой  $L_1$  проведем прямую  $L_2$ , перпендикулярную плоскости  $\pi$  (такая задача решена в п. 5), и затем через прямую  $L_1$  проведем плоскость, параллельную прямой  $L_2$ .

**11. Уравнения перпендикуляра, опущенного из заданной точки  $M_0$  на данную прямую  $L_1$ .** Искомый перпендикуляр представляет собой линию пересечения двух плоскостей: 1) плоскости, проходящей через точку  $M_0$  и прямую  $L_1$  (такая плоскость найдена в п. 8); 2) плоскости, проходящей через точку  $M_0$  и перпендикулярной к прямой  $L_1$  (такая плоскость найдена в п. 7).

**12. Нахождение расстояния от данной точки  $M_0$  до данной прямой  $L_1$ .** В предыдущем пункте найдены уравнения перпендикуляра  $L_2$ , опущенного из точки  $M_0$  на прямую  $L_1$ . Решая совместно уравнения прямых  $L_1$  и  $L_2$ , мы найдем точку  $M_1$  основания указанного перпендикуляра, а затем искомое расстояние, равное длине отрезка  $\overline{M_0 M_1}$ .

**13. Нахождение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым  $L_1$  и  $L_2$ .** Проведем через прямую  $L_1$  плоскость  $\pi_0$ , параллельную прямой  $L_2$  (эта задача решена в п. 9). После этого проведем две плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , перпендикулярные плоскости  $\pi_0$  и проходящие через прямые  $L_1$  и  $L_2$  соответственно (см. п. 10). Искомый перпендикуляр представляет собой линию пересечения плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

**14. Нахождение кратчайшего расстояния между двумя данными скрещивающимися прямыми  $L_1$  и  $L_2$ .** Для решения этой задачи достаточно построить плоскость  $\pi_0$ , указанную в предыдущем пункте, и найти расстояния от любой точки прямой  $L_2$  до плоскости  $\pi_0$ .

## ГЛАВА 6

### ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе изучаются геометрические свойства *эллипса*, *гиперболы* и *параболы*, представляющих собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершины. Эти линии часто встречаются в различных вопросах естествознания. Например, движение материальной точки под воздействием центрального поля силы тяжести происходит по одной из этих линий.

Исследуются также кривые второго порядка, т.е. линии, определяемые в декартовых координатах, алгебраическими уравнениями второй степени.

В частности, выясняется, что эллипс, гипербола и парабола являются такими линиями и что этими тремя линиями и изученными в предыдущей главе линейными образами исчерпываются все линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени.

#### **§ 1. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы**

В начале этой главы мы говорили о том, что *эллипс*, *гипербола* и *парабола* представляют собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину. Именно, если секущая плоскость пересекает все прямолинейные образующие одной полости конуса, то в сечении получится линия, называемая *эллипсом* (рис. 6.1 а). Если секущая плоскость пересекает образующие обеих полостей конуса, то в сечении получится линия, называемая *гиперболой* (рис. 6.1 б). И, наконец, если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса (на 6.1 в — это образующая *AB*), то в сечении получится линия, называемая *параболой*. Рисунок 6.1 дает читателю наглядное представление о форме рассматриваемых линий.

В этом параграфе даются специальные определения эллипса, гиперболы и параболы, основанные на их *фокальных свойствах*, и выводятся так называемые *канонические уравнения* этих кривых. Ниже, в п. 4 § 3, будет установлена равносильность этих специальных определений и определений эллипса, гиперболы и параболы как конических сечений.

##### **1. Эллипс.**

**Определение.** Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксиро-

ванных точек  $F_1$  и  $F_2$  этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная<sup>1)</sup>.

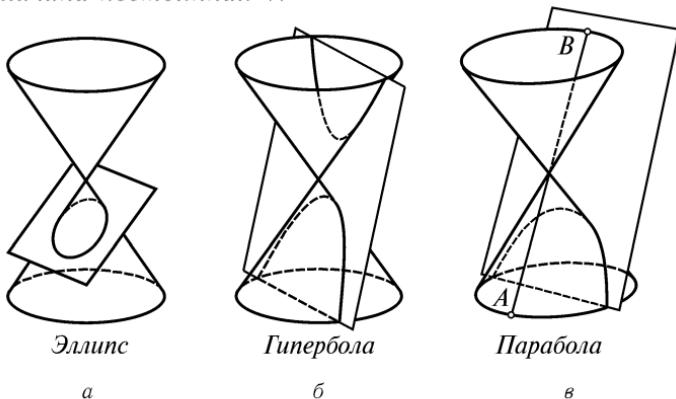


Рис. 6.1

При этом не исключается совпадение фокусов эллипса. Очевидно, если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

Для вывода канонического уравнения эллипса выберем начало  $O$  декартовой системы координат в середине отрезка  $F_1F_2$ , а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим так, как указано на рис. 6.2 (если фокусы  $F_1$  и  $F_2$  совпадают, то  $O$  совпадает с  $F_1$  и  $F_2$ , а за ось  $Ox$  можно взять любую ось, проходящую через  $O$ ).

Пусть длина отрезка  $F_1F_2$  равна  $2c$ . Тогда в выбранной системе координат точки  $F_1$  и  $F_2$  соответственно имеют координаты  $(-c, 0)$  и  $(c, 0)$ . Обозначим через  $2a$  постоянную, о которой говорится в определении эллипса. Очевидно,  $2a > 2c$ , т.е.  $a > c$ . Пусть  $M$  — точка плоскости с координатами  $(x, y)$  (рис. 6.2). Обозначим через  $r_1$  и  $r_2$  расстояния от точки  $M$  до точек  $F_1$  и  $F_2$  соответственно. Согласно определению эллипса *равенство*

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (6.1)$$

является необходимым и достаточным условием расположения точки  $M(x, y)$  на данном эллипсе.

Используя формулу расстояния между двумя точками (см. формулу (1.8) п. 2 § 3 гл. 1), получим

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (6.2)$$

<sup>1)</sup> Если  $M$  — точка эллипса (рис. 6.2), то  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ , а так как сумма двух сторон  $MF_1$  и  $MF_2$  треугольника  $MF_1F_2$  больше третьей стороны  $F_1F_2 = 2c$ , то  $2a > 2c$ . Случай  $2a = 2c$  естественно исключить, так как тогда точка  $M$  располагается на отрезке  $F_1F_2$  и эллипс вырождается в отрезок.

Из (6.1) и (6.2) вытекает, что соотношение

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (6.3)$$

представляет собой необходимое и достаточное условие расположения точки  $M$  с координатами  $x$  и  $y$  на данном эллипсе. Поэтому соотношение (6.3) можно рассматривать как уравнение эллипса. Путем стандартного приема «уничтожения радикалов» это уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.4)$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ } ^1). \quad (6.5)$$

Так как уравнение (6.4) представляет собой алгебраическое следствие уравнения эллипса (6.3), то координаты  $x$  и  $y$  любой точки  $M$  эллипса будут удовлетворять и уравнению (6.4). Поскольку при алгебраических преобразованиях, связанных с избавлением от радикалов, могли появиться «лишние корни», мы должны убедиться в том, что любая точка  $M$ , координаты которой удовлетворяют уравнению (6.4), располагается на данном эллипсе. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что величины  $r_1$  и  $r_2$  для каждой точки удовлетворяют соотношению (6.1). Итак, пусть координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  удовлетворяют уравнению (6.4). Подставляя значение  $y^2$  из (6.4) в правую часть выражения (6.2) для  $r_1$ , после несложных

преобразований найдем, что  $r_1 = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}$ . Так как  $a + \frac{c}{a}x > 0$  <sup>2)</sup>, то  $r_1 = a + \frac{c}{a}x$ . Совершенно аналогично найдем, что  $r_2 = a - \frac{c}{a}x$ . Таким образом, для рассматриваемой точки  $M$

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x, \quad (6.6)$$

т.е.  $r_1 + r_2 = 2a$ , и поэтому точка  $M$  располагается на эллипсе. Уравнение (6.4) называется каноническим уравнением эллипса. Величины  $a$  и  $b$  называются соответственно большой и малой полуосами эллипса (наименование «большая» и «малая» объясняется тем, что  $a > b$ ).

**З а м е ч а н и е.** Если полуоси эллипса  $a$  и  $b$  равны, то эллипс представляет собой окружность, радиус которой равен  $R = a = b$ , а центр совпадает с началом координат.

<sup>1)</sup> Напомним, что  $a > c$ , и поэтому  $a^2 - c^2 > 0$ .

<sup>2)</sup> Поскольку  $|x| \leq a$  и  $c/a < 1$ . Заметим, что неравенство  $|x| \leq a$  непосредственно вытекает из уравнения (6.4), из которого ясно, что  $x^2/a^2 \leq 1$ .

## 2. Гипербола.

*Определение.* Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которой абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная<sup>1)</sup>.

Для вывода канонического уравнения гиперболы выберем начало координат в середине отрезка  $F_1F_2$ , а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим так, как указано на рис. 6.2. Пусть длина отрезка  $F_1F_2$  равна  $2c$ . Тогда в выбранной системе координат точки  $F_1$  и  $F_2$  соответственно имеют координаты  $(-c, 0)$  и  $(c, 0)$ . Обозначим через  $2a$  постоянную, о которой говорится в определении гиперболы. Очевидно,  $2a < 2c$ , т.е.  $a < c$ <sup>2)</sup>.

Пусть  $M$  — точка плоскости с координатами  $(x, y)$  (рис. 6.2). Обозначим через  $r_1$  и  $r_2$  расстояния  $MF_1$  и  $MF_2$ . Согласно определению гиперболы равенство

$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (6.7)$$

является необходимым и достаточным условием расположения точки  $M$  на данной гиперbole.

Используя выражения (6.2) для  $r_1$  и  $r_2$  и соотношение (6.7), получим следующее необходимое и достаточное условие расположения точки  $M$  с координатами  $x$  и  $y$  на данной гиперbole:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a. \quad (6.8)$$

Используя стандартный прием «уничтожения радикалов», приведем уравнение (6.8) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.9)$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (6.10)$$

Мы должны убедиться в том, что уравнение (6.9), полученное путем алгебраических преобразований уравнения (6.8), не приобрело новых корней. Для этого достаточно доказать, что для каждой точки  $M$ , координаты

<sup>1)</sup> Фокусы  $F_1$  и  $F_2$  гиперболы естественно считать различными, ибо если указанная в определении гиперболы постоянная не равна нулю, то нет ни одной точки плоскости при совпадении  $F_1$  и  $F_2$ , которая бы удовлетворяла требованиям определения гиперболы. Если же эта постоянная равна нулю и  $F_1$  совпадает с  $F_2$ , то любая точка плоскости удовлетворяет требованиям определения гиперболы.

<sup>2)</sup> Если  $M$  — точка гиперболы, то  $|MF_1| - |MF_2| = 2a$ , а так как разность двух сторон  $MF_1$  и  $MF_2$  треугольника  $MF_1F_2$  меньше третьей стороны  $F_1F_2 = 2c$ , то  $2a > 2c$ . Случай  $2a = 2c$  естественно исключить, так как тогда точка  $M$  располагается на прямой  $F_1F_2$  вне отрезка  $F_1F_2$  и гипербола вырождается в два луча.

$x$  и  $y$  которой удовлетворяют уравнению (6.9), величины  $r_1$  и  $r_2$  удовлетворяют соотношению (6.7). Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были сделаны при выводе формул (6.6), найдем для интересующих нас величин  $r_1$  и  $r_2$  следующие выражения<sup>1)</sup>:

$$r_1 = \begin{cases} a + \frac{c}{a}x & \text{при } x > 0, \\ -a - \frac{c}{a}x & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} -a + \frac{c}{a}x & \text{при } x > 0, \\ a - \frac{c}{a}x & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Таким образом, для рассматриваемой точки  $M$  имеем  $|r_1 - r_2| = 2a$ , и поэтому она располагается на гиперболе.

Уравнение (6.9) называется *каноническим уравнением гиперболы*. Величины  $a$  и  $b$  называются соответственно действительной и мнимой полуосами гиперболы.

### 3. Парабола.

**Определение.** *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки  $F$  этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости.

Указанная в определении точка  $F$  называется *фокусом параболы*, а фиксированная прямая — *директрисой*<sup>2)</sup> параболы. Для вывода канонического уравнения параболы выберем начало  $O$  декартовой системы координат в середине отрезка  $FD$ , представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса  $F$  на директрису<sup>3)</sup>, а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим так, как указано

на рис. 6.3. Пусть длина отрезка  $FD$  равна  $p$ . Тогда в выбранной системе координат точка  $F$  имеет координаты  $(p/2, 0)$ . Пусть  $M$  — точка плоскости с координатами  $(x, y)$ . Обозначим через  $r$  расстояние от  $M$  до  $F$ , а через  $d$  — расстояние от  $M$  до директрисы (рис. 6.3). Согласно определению параболы *равенство*

$$r = d \quad (6.12)$$

<sup>1)</sup> При этом мы должны учесть, что  $|x| \geq a$  и  $c/a > 1$ . Заметим, что неравенство  $|x| \geq a$  непосредственно вытекает из уравнения (6.9).

<sup>2)</sup> Слово *директриса* означает *направляющая*.

<sup>3)</sup> Естественно считать, что фокус  $F$  не лежит на директрисе, ибо в противном случае точки плоскости, для которых были бы выполнены условия определения параболы, располагались на прямой, проходящей через  $F$  перпендикулярно директрисе, т.е. парабола выродилась бы в прямую.

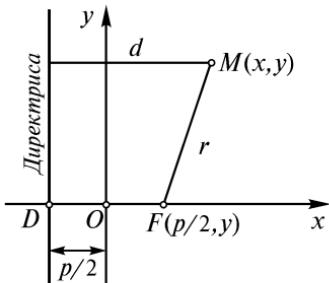


Рис. 6.3

является необходимым и достаточным условием расположения точки  $M$  на данной параболе. Так как

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \frac{p}{2} + x \text{ } ^1), \quad (6.13)$$

то, согласно (6.12), соотношение

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x \quad (6.14)$$

представляет собой необходимое и достаточное условие расположения точки  $M$  с координатами  $x$  и  $y$  на данной параболе. Поэтому соотношение (6.14) можно рассматривать как уравнение параболы. Путем стандартного приема «уничтожения радикалов» это уравнение приводится к виду

$$y^2 = 2px. \quad (6.15)$$

Убедимся в том, что уравнение (6.15), полученное путем алгебраических преобразований уравнения (6.14), не приобрело новых корней. Для этого достаточно доказать, что для каждой точки  $M$ , координаты  $x$  и  $y$  которой удовлетворяют уравнению (6.15), величины  $r$  и  $d$  равны (выполнено соотношение (6.12)).

Из соотношения (6.15) вытекает, что абсциссы  $x$  рассматриваемых точек неотрицательны, т.е.  $x \geq 0$ . Для точек с неотрицательными абсциссами  $d = \frac{p}{2} + x$ . Найдем теперь выражение для расстояния  $r$  от точки  $M$  до  $F$ . Подставляя  $y$  из выражения (6.15) в правую часть выражения для  $r$  (6.13) и учитывая, что  $x \geq 0$ , найдем, что  $r = \frac{p}{2} + x$ . Таким образом, для рассматриваемых точек  $r = d$ , т.е. они располагаются на параболе.

Уравнение (6.15) называется *каноническим уравнением параболы*. Величина  $p$  называется *параметром параболы*.

## § 2. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям

Мы уже имеем наглядное представление о форме эллипса, гиперболы и параболы (см. рис. 6.1). Исследование канонических уравнений этих линий позволяет выяснить свойства, более точно характеризующие их форму.

---

<sup>1)</sup> Эта формула верна лишь для точек с неотрицательными абсциссами  $x$ . Для точек с отрицательными абсциссами, как легко видеть, выполняется соотношение  $r > d$ , и поэтому такие точки можно исключить из рассмотрения.

**1. Исследование формы эллипса.** Для удобства запишем еще раз каноническое уравнение эллипса (6.4):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.4)$$

При этом будем считать  $a > b$ .

1°. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса)<sup>1)</sup>. Действительно, в уравнении (6.4) величины  $x$  и  $y$  фигурируют в четных степенях. Следовательно, если координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  удовлетворяют уравнению (6.4) (т.е. точка  $M$  располагается на эллипсе), то этому уравнению удовлетворяют координаты  $(-x, y)$  и  $(x, -y)$  симметричных ей точек относительно осей координат и координаты  $(-x, -y)$  точки, симметричной  $M$  относительно начала координат (рис. 6.4).

Таким образом, если эллипс задан своим каноническим уравнением (6.4), то главными осями этого эллипса являются оси координат, а центром эллипса — начало координат. Точки пересечения эллипса с главными осями называются вершинами эллипса. Точки  $A, B, C, D$  на рис. 6.4 — вершины эллипса. Очевидно, эти вершины имеют соответственно координаты  $(-a, 0), (0, b), (a, 0), (0, -b)$ .

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, длины отрезков, образованных пересечением эллипса с главными осями, равны  $2a$  и  $2b$ . Так как  $2a > 2b$ , то главная ось, образующая в пересечении с эллипсом отрезок  $2a$ , называется большой осью эллипса. Другая главная ось называется малой осью эллипса.

Если эллипс задан уравнением (6.4), то при  $a > b$  большой осью будет ось  $Ox$ , а малой — ось  $Oy$ . При  $b > a$  большой осью будет ось  $Oy$ , а малой — ось  $Ox$ .

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, фокусы эллипса располагаются на его большой оси.

2°. Весь эллипс содержится внутри прямоугольника  $|x| \leq a, |y| \leq b$  (на рис. 6.4 этот прямоугольник не заштрихован). В самом деле, из канонического уравнения (6.4) вытекает, что  $x^2/a^2 \leq 1$  и  $y^2/b^2 \leq 1$ . Эти неравенства, очевидно, эквивалентны неравенствам  $|x| \leq a$  и  $|y| \leq b$ .

3°. Эллипс может быть получен посредством равномерного сжатия окружности. Рассмотрим окружность (рис. 6.5), заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.16)$$

<sup>1)</sup> Если эллипс представляет собой окружность, то любая прямая, проходящая через центр окружности, является осью симметрии. Отметим, что центром эллипса является точка пересечения главных осей.

Произведем теперь равномерное сжатие плоскости к оси  $Ox$ , т.е. такое преобразование, при котором точка с координатами  $(x, y)$  перейдет в точку с координатами  $(\bar{x}, \bar{y})$ , причем  $\bar{x} = x$ , а  $\bar{y} = \frac{b}{a}y$ . Очевидно, при этом преобразовании окружность (6.16) перейдет в кривую, определяемую уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , т.е. в эллипс.

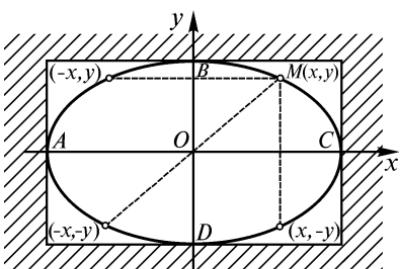


Рис. 6.4

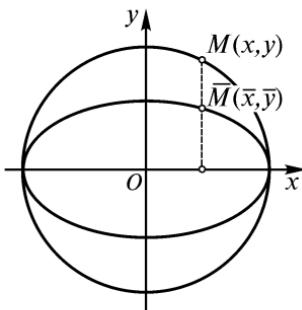


Рис. 6.5

**2. Исследование формы гиперболы.** Обратимся к каноническому уравнению гиперболы (6.9)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1°. Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются вершинами гиперболы. Эта ось называется действительной осью гиперболы.

Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и поэтому называется мнимой осью гиперболы.

Таким образом, мнимая ось гиперболы разделяет плоскость на правую и левую полуплоскости, в которых расположены симметричные относительно этой оси правая и левая ветви гиперболы.

Справедливость указанного свойства симметрии гиперболы вытекает из того, что в уравнении (6.9) величины  $x$  и  $y$  фигурируют в четных степенях. Следовательно, если координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  удовлетворяют уравнению (6.9) (т.е. точка  $M$  располагается на гиперболе), то этому уравнению удовлетворяют координаты  $(-x, y)$  и  $(x, -y)$  симметричных ей точек относительно осей координат и координаты  $(-x, -y)$  точки, симметричной  $M$  относительно начала координат (рис. 6.6).

Таким образом, если гипербола задана своим каноническим уравнением (6.9), то главными осями этой гиперболы являются оси координат, а центром гиперболы — начало координат.

Убедимся теперь, что ось  $Ox$  является действительной осью гиперболы, точки  $A(-a, 0)$  и  $B(a, 0)$  — вершинами гиперболы и ось  $Oy$  является мнимой осью гиперболы. Для этого достаточно доказать, что ось  $Ox$  пересекает гиперболу в точках  $A$  и  $B$ , а ось  $Oy$  не имеет общих точек с гиперболой.

Так как ординаты точек оси  $Ox$  равны нулю, то для выяснения величины абсцисс точек пересечения этой оси с гиперболой нужно в уравнении (6.9) положить  $y = 0$ . После этого мы получим уравнение  $x^2/a^2 = 1$ , из которого находятся абсциссы точек пересечения оси  $Ox$  с гиперболой. Полученное уравнение имеет решения  $x = -a$  и  $x = a$ . Следовательно, ось  $Ox$  пересекает гиперболу (т.е. является ее действительной

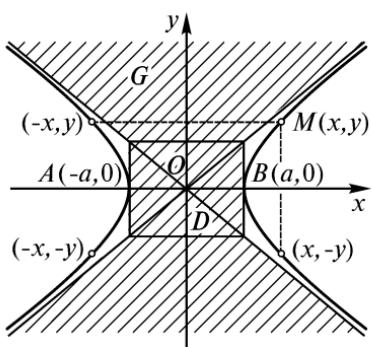


Рис. 6.6

осью) в точках  $A(-a, 0)$  и  $B(a, 0)$  (т.е. эти точки и есть вершины гиперболы). Поскольку абсциссы точек оси  $Oy$  равны нулю, то для ординат точек пересечения этой оси с гиперболой получаем из (6.9) уравнение  $-y^2/b^2 = 1$ , которое не имеет действительных решений. Следовательно, ось  $Oy$  является мнимой осью гиперболы.

**З а м е ч а н и е.** Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.

2°. Рассмотрим область  $G$ , которая получена объединением прямоугольника  $D$ , координаты  $x$  и  $y$  точек которого удовлетворяют неравенствам  $|x| < a$ ,  $|y| < b$ , и тех двух углов, образованных диагоналями этого прямоугольника, в которых располагается мнимая ось гиперболы (на рис. 6.6 эта область заштрихована). Убедимся, что в области  $G$  нет точек гиперболы.

Разобьем область  $G$  на две части  $G_1$  и  $G_2$ , где  $G_1$  представляет собой полосу, абсциссы  $x$  точек которой удовлетворяют неравенству  $|x| < a$ , а  $G_2$  — остальная часть области  $G$ <sup>1)</sup>. Очевидно, в полосе  $G_1$  нет точек гиперболы, так как абсциссы  $x$  точек, расположенных на гиперболе, удовлетворяют неравенству  $|x| \geq a$ <sup>2)</sup>. Обратимся теперь к точкам области  $G_2$ . Заметим, что каждая точка  $G_2$  либо лежит на диагонали прямоугольника  $D$ , либо за его диагональю<sup>3)</sup>. Поскольку диагонали  $D$  опре-

<sup>1)</sup> Область  $G_1$  представляет собой, очевидно, полосу, заключенную между безгранично продолженными вертикальными сторонами прямоугольника  $D$ . Область  $G_2$  состоит из четырех частей, каждая из которых располагается в одном из координатных углов.

<sup>2)</sup> Из канонического уравнения гиперболы вытекает, что  $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$ , т.е.  $x^2/a^2 \geq 1$ . Последнее неравенство эквивалентно неравенству  $|x| \geq a$ .

<sup>3)</sup> Будем говорить, что точка  $M$  плоскости лежит за диагональю прямоугольника  $D$ , если перпендикуляр, опущенный из  $M$  на ось  $Ox$ , пересекает эту диагональ.

деляются уравнениями  $y = \frac{b}{a}x$  и  $y = -\frac{b}{a}x$ , то координаты  $x$  и  $y$  точек  $G_2$  в силу их расположения удовлетворяют неравенству  $b/a \leq |y|/|x|^1$ ). Из этого неравенства вытекает неравенство  $|x|/a \leq |y|/b$ , из которого в свою очередь следуют неравенства  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 0 < 1$ , а так как для точек гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , то в области  $G_2$  нет точек гиперболы.

3°. Установим важное свойство гиперболы, связанное с ее расположением относительно диагоналей прямоугольника  $D$ , о котором говорилось выше.

В общих чертах это свойство заключается в том, что ветви гиперболы приближаются к диагоналям прямоугольника  $D$ .

В силу симметрии гиперболы *это свойство достаточно выяснить для части гиперболы, расположенной в первой четверти*. Координаты  $x$  и  $y$  точек гиперболы, расположенных в первой четверти, удовлетворяют условиям  $x \geq a$ ,  $y \geq 0$ <sup>2</sup>). Обращаясь к уравнению (6.9), мы видим, что при указанных условиях это уравнение эквивалентно соотношению

$$y = b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}. \quad (6.17)$$

Иными словами, рассматриваемая часть гиперболы представляет собой график функции (6.17)<sup>3</sup>). Легко убедиться, что эта функция может быть представлена в следующей форме:

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (6.18)$$

Обратимся теперь к диагонали прямоугольника  $D$ , расположенной в первой четверти. Она определяется уравнением

$$Y = \frac{b}{a}x. \quad (6.19)$$

Сравним величины ординат  $Y$  и  $y$  рассматриваемой диагонали и части гиперболы для одного и того же значения  $x$ , т.е. рассмотрим разность  $Y - y$  (рис. 6.7 a). Используя соотношения (6.18) и (6.19), получим

$$Y - y = \frac{b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (6.20)$$

<sup>1)</sup> Абсциссы  $x$  точек  $G_2$  не равны нулю.

<sup>2)</sup> В силу свойства 2° гиперболы (6.9) абсциссы ее точек удовлетворяют условию  $|x| \geq a$ . Для точек первой четверти это условие может быть записано в виде  $x \geq a$ .

<sup>3)</sup> По поводу понятия *график функции* см. вып. 1, гл. 1, § 2, п. 4.

Из соотношения (6.20) следует, что при  $x \rightarrow 0$  разность  $Y - y$  стремится к нулю. Абсолютная величина  $|Y - y|$  равна длине отрезка  $MN$  (рис. 6.7 а). Так как расстояние  $MP$  от точки  $M$  гиперболы до рассматриваемой диагонали не превышает длины отрезка  $MN$ , то при удалении точки  $M$  гиперболы в бесконечность (т.е. при  $x \rightarrow 0$ ) расстояние  $MP$  стремится к нулю. Следовательно, рассматриваемая часть ветви гиперболы приближается к соответствующей диагонали прямоугольника  $D$ . В силу симметрии аналогичным свойством обладают и другие части гиперболы, расположенные во второй, третьей и четвертой четвертях.

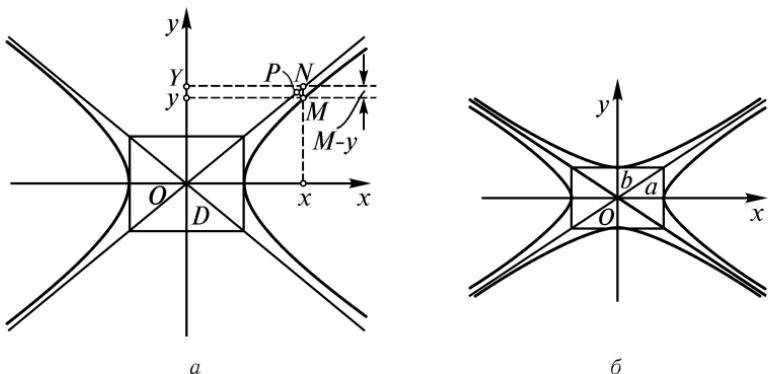


Рис. 6.7

Диагонали прямоугольника  $D$  обычно называются *асимптотами гиперболы*. Отметим, что асимптоты гиперболы определяются уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (6.21)$$

4°. Наряду с гиперболой (6.9) рассматривают так называемую *сопряженную по отношению к ней гиперболу*. Сопряженная гипербола определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (6.22)$$

На рис. 6.7 б изображены гипербола (6.9) и сопряженная ей гипербола (6.22). Очевидно, что сопряженная гипербола имеет те же асимптоты, что и данная. Иными словами, асимптоты сопряженной гиперболы определяются уравнениями (6.21). Заметим, что гипербола (6.9) в свою очередь является сопряженной по отношению к гиперболе (6.22).

<sup>1)</sup> Чтобы убедиться, что уравнение (6.22) определяет гиперболу, достаточно положить  $x = \bar{y}$ ,  $y = \bar{x}$  и умножить обе части этого уравнения на  $-1$ .

**3. Исследование формы параболы.** Обратимся к каноническому уравнению параболы (6.15):

$$y^2 = 2px. \quad (6.15)$$

1°. Парабола имеет ось симметрии (ось параболы). Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Действительно, в уравнении (6.15) величина  $y$  фигурирует в четной степени. Следовательно, если координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  удовлетворяют уравнению (6.15) (т.е. точка  $M$  располагается на параболе), то этому уравнению удовлетворяют координаты  $(x, -y)$  симметричной ей точки относительно оси  $Ox$  (рис. 6.8). Таким образом, если парабола задана своим каноническим уравнением (6.15), то осью этой параболы является ось  $Ox$ . Очевидно, вершиной параболы является начало координат.

2°. Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости  $Oxy$ . В самом деле, так как  $p > 0$ , то уравнению (6.15) удовлетворяют координаты точек лишь с неотрицательными абсциссами. Такие точки располагаются в правой полуплоскости.

3°. Из рассуждений п. 3 § 1 этой главы вытекает, что директриса параболы, определяемой каноническим уравнением (6.15), имеет уравнение

$$y = -p/2. \quad (6.23)$$

4°. Любые две параболы подобны друг другу. Пусть  $y^2 = 2px$  и  $y^2 = 2p^*x$  — канонические уравнения этих парабол в декартовой системе  $Oxy$ ;  $y = kx$  — уравнение произвольной прямой, проходящей через  $O$ , а  $(x, y)$  и  $(x^*, y^*)$  — координаты точек пересечения этой прямой с параболами. Используя канонические уравнения, получим  $x = 2p/k^2$ ,  $y = \pm 2p/k$ ,  $x^* = 2p^*/k^2$ ,  $y^* = \pm 2p^*/k$ . Из последних формул вытекает, что  $\frac{x}{x^*} = p/p^*$ ,  $\frac{y}{y^*} = p/p^*$ . Но эти равенства означают подобие рассматриваемых парабол относительно точки  $O$ .

5°. Отметим, что кривая  $y^2 = 2px$  при  $p < 0$  также является параболой, которая целиком располагается в левой полуплоскости плоскости  $Oxy$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить  $x$  на  $-x$  и  $-p$  на  $p$ .

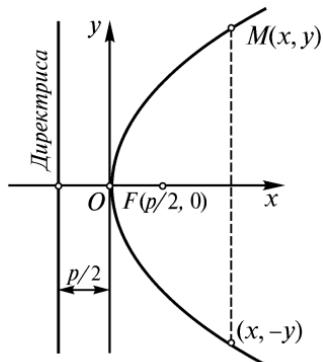


Рис. 6.8

### § 3. Директрисы эллипса, гиперболы и параболы

Определение параболы, данное в п. 3 § 1 этой главы, базировалось на свойстве этой кривой, которое связано с ее фокусом и директрисой.

Это свойство можно сформулировать также и следующим образом: *пара-  
бola есть геометрическое место точек плоскости, для которых от-  
ношение расстояния до фокуса к расстоянию до отвечающей этому  
фокусу директрисы есть величина постоянная, равная единице.*

Оказывается, отличный от окружности эллипс и гипербола обладают аналогичным свойством: *для каждого фокуса<sup>1)</sup> эллипса или гиперболы можно указать такую прямую, называемую директрисой, что отношение расстояния от точек этих кривых до фокуса к расстоянию до отвечающей этому фокусу директрисы есть величина постоянная.*

Данный параграф посвящен выяснению этого свойства эллипса и гиперболы.

**1. Эксцентриситет эллипса и гиперболы.** Обратимся к эллипсу (гиперболе). Пусть  $c$  — половина расстояния между фокусами эллипса<sup>2)</sup> (гиперболы),  $a$  — большая полуось эллипса (действительная полуось гиперболы).

**Определение.** *Эксцентриситет эллипса (гиперболы) называется величина  $e$ , равная отношению  $c/a$ :*

$$e = c/a. \quad (6.24)$$

**Замечание 1.** Учитывая связь величины  $c$  с длинами  $a$  и  $b$  большой и малой полуосей эллипса (с длинами действительной и мнимой полуосей гиперболы) (см. формулы (6.5) и (6.10)), легко получить следующие выражения для эксцентриситета  $e$ :

$$\text{для эллипса } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (6.25)$$

$$\text{для гиперболы } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \quad (6.25')$$

Из формул (6.25) и (6.25') вытекает, что *эксцентриситет эллипса меньше единицы, а эксцентриситет гиперболы больше единицы<sup>3)</sup>.*

Отметим, что *эксцентриситет окружности равен нулю* (для окружности  $b = a$ ).

**Замечание 2.** Два эллипса (две гиперболы), имеющих одинаковый эксцентриситет, подобны. В самом деле, из формулы (6.25) для эксцентриситета эллипса (из формулы (6.25') для эксцентриситета гиперболы) вытекает, что эллипсы с одинаковым эксцентриситетом имеют одинаковое отношение  $b/a$  малой и большой полуосей (гиперболы с

<sup>1)</sup> Напомним, что отличный от окружности эллипс и гипербола имеют по два фокуса.

<sup>2)</sup> Если эллипс представляет собой окружность, то  $c = 0$ .

<sup>3)</sup> Напомним, что величина  $b$  как для эллипса, так и для гиперболы не равна нулю.

одинаковым эксцентриситетом имеют одинаковое отношение  $b/a$  мнимой и действительной полуосей). Такие эллипсы (гиперболы) подобны<sup>1)</sup>.

**З а м е ч а н и е 3.** Эксцентриситет эллипса можно рассматривать как меру его «вытянутости»: чем больше эксцентриситет  $e$  (см. формулу (6.25)), тем меньше отношение  $b/a$  малой полуоси эллипса  $b$  к его большой полуоси  $a$ . На рис. 6.9 изображены эллипсы с разными эксцентриситетами, но с одинаковой большой полуосью  $a$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Эксцентриситет гиперболы можно рассматривать как числовую характеристику величины раствора угла между ее асимптотами. В самом деле, отношение  $b/a$  равно тангенсу половины угла между асимптотами гиперболы.

## 2. Директрисы эллипса и гиперболы.

**1°. Директрисы эллипса.** Мы выяснили, что любой, отличный от окружности эллипс имеет большую и малую оси и центр — точку пересечения этих осей (см. п. 1 § 2 этой главы). Обозначим через  $c$  половину расстояния между фокусами  $F_1$  и  $F_2$  эллипса, через  $a$  его большую полуось и через  $O$  его центр (рис. 6.10).

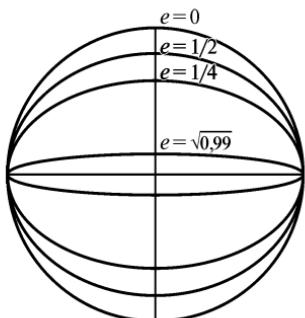


Рис. 6.9

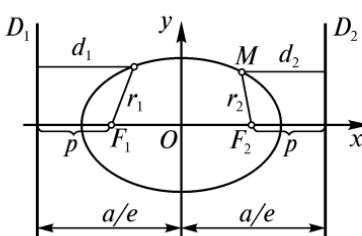


Рис. 6.10

Пусть  $e$  — эксцентриситет этого эллипса (так как эллипс отличен от окружности, то  $e \neq 0$ ) и  $\pi$  — плоскость, в которой расположен эллипс. Малая ось эллипса разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Обозначим через  $\pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) ту из этих полуплоскостей, в которой лежит фокус  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ).

**Определение.** *Директрисой*  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) *эллипса, отвечающей фокусу*  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ), *называется прямая, расположенная в полуплоскости*  $\pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) *перпендикулярно большой оси эллипса на расстоянии*  $a/e$  *от его центра.*

**З а м е ч а н и е 1.** Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат в середине отрезка  $F_1F_2$ , а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим так,

<sup>1)</sup> Чтобы убедиться в этом, достаточно расположить эти эллипсы (соответственно гиперболы) так, чтобы их центры и одноименные главные оси совпадали. Тогда из канонических уравнений легко следует подобие кривых с равными отношениями  $b/a$ .

как указано на рис. 6.10. Тогда, очевидно, *уравнения директрис*  $D_i (i=1, 2)$  эллипса можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{уравнение директрисы } D_1: & \quad x = -a/e, \\ \text{уравнение директрисы } D_2: & \quad x = a/e. \end{aligned} \quad (6.26)$$

**З а м е ч а н и е 2.** *Директрисы эллипса расположены вне эллипса.* Действительно, эллипс расположен в прямоугольнике  $|x| \leq a, |y| \leq b$  (см. п. 1 § 2 этой главы и рис. 6.4), стороны которого перпендикулярны большой и малой осям эллипса.

Из определения директрисы вытекает, что они параллельны двум перпендикулярным большой оси эллипса сторонам этого прямоугольника. Поскольку упомянутые стороны отстоят от центра эллипса на расстоянии  $a$ , а директрисы — на расстоянии  $a/e > a (0 < e < 1)$ , то директрисы расположены вне прямоугольника, а следовательно, и вне эллипса.

**З а м е ч а н и е 3.** Мы только что выяснили, что директрисы расположены вне эллипса. Отсюда вытекает, что *точки эллипса и его центр расположены по одну сторону от каждой из его директрис.*

**З а м е ч а н и е 4.** Обозначим через  $p$  расстояние от фокуса эллипса до соответствующей этому фокусу директрисы. Поскольку расстояние от центра эллипса до директрисы равно  $a/e$ , а расстояние от центра эллипса до фокуса равно  $c$ , то  $p$  равно  $\frac{a}{e} - c$ <sup>1)</sup>. Так как  $c = ae$ , то для  $p$  получаем следующее выражение:

$$p = a \left( \frac{1}{e} - 1 \right) = a \frac{1 - e^2}{e}. \quad (6.27)$$

Докажем теорему, выясняющую важное свойство отличного от окружности эллипса и его директрис.

**Теорема 6.1.** *Отношение расстояния  $r_i$  от точки  $M$  эллипса до фокуса  $F_i$  к расстоянию  $d_i$  от этой точки до отвечающей этому фокусу директрисы  $D_i$  равно эксцентриситету  $e$  этого эллипса.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы эллипса<sup>2)</sup>. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, как это указано в замечании 1 этого пункта (см. рис. 6.10). В п. 1 § 1 этой главы мы выяснили, что при таком выборе системы координат расстояния  $r_1$  и  $r_2$  от точки  $M(x, y)$  эллипса до фокусов  $F_1$  и  $F_2$  определяются формулами (6.6). Так как отношение  $c/a$  равно эксцентриситету  $e$  этого эллипса, то для  $r_1$  и  $r_2$  мы получим выражения

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex. \quad (6.28)$$

<sup>1)</sup> Напомним, что центр эллипса и его фокусы расположены на большой оси, которая перпендикулярна директрисам. Поэтому с учетом расположения центра, фокуса и отвечающей ему директрисы (рис. 6.10)  $p$  равно  $a/e - c$ .

<sup>2)</sup> Так как эллипс отличен от окружности, то его фокусы не совпадают.

Найдем теперь расстояния  $d_i$  от точки  $M$  эллипса до директрис  $D_i$ . Используя уравнения директрис  $D_i$  (см. формулы (6.26)), легко убедиться в том, что нормированные уравнения директрис имеют вид (см. п. 7 § 1 гл. 5):

$$\text{нормированное уравнение директрисы } D_1: -x - \frac{a}{e} = 0, \quad (6.29)$$

$$\text{нормированное уравнение директрисы } D_2: x - \frac{a}{e} = 0.$$

Так как точка  $M(x, y)$  эллипса и начало координат находятся по одну сторону от каждой из директрис (см. замечание 3 этого пункта), то расстояние  $d_1$  и  $d_2$  от точки  $M(x, y)$  до директрис  $D_1$  и  $D_2$  равны соответствующим отклонениям  $M(x, y)$  от  $D_1$  и  $D_2$ , взятым со знаком минус, и мы получим (в силу (6.29) и теоремы 5.1):

$$d_1 = \frac{a + ex}{e}, \quad d_2 = \frac{a - ex}{e}. \quad (6.30)$$

Используя формулы (6.28) и (6.30), найдем, что

$$r_i / d_i = e, \quad i = 1, 2.$$

Теорема доказана.

*2°. Директрисы гиперболы.* Обозначим через  $c$  половину расстояния между фокусами  $F_1$  и  $F_2$  гиперболы, через  $a$  ее действительную полуось и через  $O$  ее центр (рис. 6.11). Пусть  $e$  — эксцентриситет этой гиперболы и  $\pi$  — плоскость, в которой расположена гипербола. Мнимая ось гиперболы разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Обозначим через  $\pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) ту из этих полуплоскостей, в которой лежит фокус  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ).

**Определение.** *Директрисой  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) гиперболы, отвечающей фокусу  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ), называется прямая, расположенная в полуплоскости  $\pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) перпендикулярно действительной оси гиперболы на расстоянии  $a/e$  от ее центра.*

**Замечание 5.** Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат в середине отрезка  $F_1F_2$ , а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим так, как указано на рис. 6.11. Тогда, очевидно, *уравнения директрис  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) гиперболы можно записать следующим образом:*

$$\begin{aligned} \text{уравнение директрисы } D_1: & \quad x = -a/e, \\ \text{уравнение директрисы } D_2: & \quad x = a/e. \end{aligned} \quad (6.31)$$

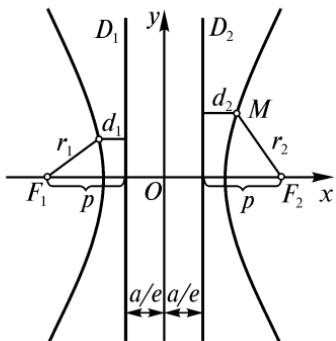


Рис. 6.11

**З а м е ч а н и е 6.** Директрисы гиперболы целиком расположены в области  $G$ , не содержащей точек гиперболы (см. 2° п. 2 § 2 этой главы и рис. 6.6). В самом деле, в 2° п. 2 § 2 этой главы мы убедились, что полоса  $G_1$ , определяемая в выбранной в замечании 5 системе координат  $Oxy$  неравенством  $|x| < a$ , содержитя в области  $G$ . Но эта полоса содержит директрисы гиперболы, так как, согласно (6.31), для точек директрис  $|x| = \frac{a}{e} < a$ , ибо для гиперболы  $e > 1$ . Расположение директрис гиперболы указано на рис. 6.11.

**З а м е ч а н и е 7.** Только что сделанное замечание позволяет обосновать расположение директрис гиперболы, указанное на рис. 6.11. Именно, очевидно, что *точки левой (правой) ветви гиперболы и ее центр  $O$  расположены по разные стороны от директрисы  $D_1$  ( $D_2$ ), а точки правой (левой) ветви гиперболы и ее центр  $O$  расположены по одну сторону от директрисы  $D_1$  ( $D_2$ )*.

**З а м е ч а н и е 8.** Обозначим через  $p$  расстояние от фокуса гиперболы до соответствующей этому фокусу директрисы. Поскольку расстояние от центра гиперболы до директрисы равно  $a/e$ , а расстояние от центра гиперболы до фокуса равно  $c$ , то  $p = c - \frac{a}{e}$ <sup>1)</sup>. Так как  $c = ae$ , то для  $p$  получаем формулу

$$p = a \left( e - \frac{1}{e} \right) = a \frac{e^2 - 1}{e}. \quad (6.32)$$

Докажем теорему, выясняющую важное свойство гиперболы и ее директрис.

**Теорема 6.2.** *Отношение расстояния  $r_i$  от точки  $M$  гиперболы до фокуса  $F_i$  к расстоянию  $d_i$  от этой точки до отвечающей этому фокусу директрисы  $D_i$  равно эксцентриситету  $e$  этой гиперболы.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нужно рассмотреть следующие четыре случая: 1) точка  $M$  находится на левой ветви гиперболы, исследуется фокус  $F_1$  и директриса  $D_1$ ; 2) точка  $M$  находится на правой ветви гиперболы; исследуется фокус  $F_1$  и директриса  $D_1$ ; 3) точка  $M$  находится на левой ветви, исследуется фокус  $F_2$  и директриса  $D_2$ ; 4) точка  $M$  находится на правой ветви, исследуется фокус  $F_2$  и директриса  $D_2$ . Так как рассуждения для каждого из случаев однотипны, то мы ограничимся лишь первым случаем.

Расположим систему координат так, как это указано в замечании 5 этого пункта. Так как абсцисса  $x$  любой точки  $M(x, y)$  левой ветви гиперболы отрицательна, то расстояние  $r_1$  от этой точки до фокуса  $F_1$ , со-

<sup>1)</sup> Напомним, что центр гиперболы и ее фокусы расположены на действительной оси, которая перпендикулярна директрисам. Поэтому с учетом расположения центра, фокуса и отвечающей ему директрисы (см. рис. 6.11)  $p = c - \frac{a}{e}$ .

гласно формулам (6.11), равно  $-a - \frac{c}{a}x$ . Так как  $c/a = e$ , то для  $r_1$  получим выражение

$$r_1 = -a - ex. \quad (6.33)$$

Директриса  $D_1$  определяется первым из уравнений (6.31). Согласно п. 7 § 1 гл. 5 нормированное уравнение этой директрисы имеет вид

$$-x - \frac{a}{e} = 0. \quad (6.34)$$

Так как точка  $M$  левой ветви гиперболы и начало координат находятся по разные стороны от директрисы  $D_1$  (см. замечание 7 этого пункта), то расстояние  $d_1$  от точки  $M$  до директрисы  $D_1$  равно отклонению  $M$  от  $D_1$ , и мы получим (в силу (6.34) и теоремы 5.1)

$$d_1 = \frac{-a - ex}{e}. \quad (6.35)$$

Используя формулы (6.33) и (6.35), найдем, что  $r_1/d_1 = e$ . Для первого случая теорема доказана. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

**3. Определение эллипса и гиперболы, основанное на их свойстве по отношению к директрисам.** Теоремы 6.1 и 6.2, доказанные в предыдущем пункте, выясняют свойство отличного от окружности эллипса и гиперболы, связанное с директрисами этих кривых. Убедимся в том, что это свойство эллипса и гиперболы может быть принято в качестве их определения. Рассмотрим в плоскости  $\pi$  точку  $F$  и прямую  $D$  (рис. 6.12). Будем предполагать, что точка  $F$  не лежит на прямой  $D$ . Докажем следующее утверждение.

**Теорема 6.3.** Геометрическое место  $\{M\}$  точек  $M$  плоскости  $\pi$ , для которых отношение  $e$  расстояния  $r$  до точки  $F$  к расстоянию  $d$  до прямой  $D$  есть величина постоянная, представляет собой эллипс (при  $e < 1$ ) или гиперболу (при  $e > 1$ ).

При этом точка  $F$  называется фокусом, а прямая  $D$  — директрисой рассматриваемого геометрического места.

Доказательство. Убедимся, что в некоторой, специально выбранной системе координат геометрическое место точек, удовлетворяющее требованиям сформулированной теоремы, определяется при  $e < 1$

уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (т.е. является эллипсом), а при  $e > 1$  — уравнением

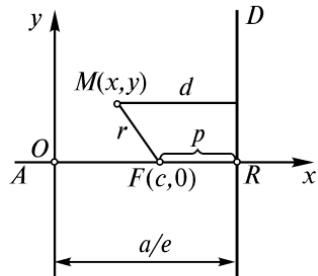


Рис. 6.12

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (т.е. является гиперболой)<sup>1)</sup>. Пусть  $R$  — точка пересечения прямой  $D$  и прямой  $A$ , проходящей через  $F$  перпендикулярно  $D$  (рис. 6.12). На прямой  $A$  выберем положительное направление от  $F$  к  $R$  при  $e < 1$  и от  $R$  к  $F$  при  $e > 1$  (на рис. 6.12 показан случай  $e < 1$ ). Так как дальнейшие рассуждения для случая  $e > 1$  и  $e < 1$  идентичны, мы проведем их подробно для  $e < 1$ , т.е. для случая, определяющего эллипс. Обозначим через  $p$  расстояние между точками  $F$  и  $R$ . Вспоминая расположение директрисы эллипса относительно его центра (см. п. 2 этого параграфа), естественно выбрать начало  $O$  координат на прямой  $A$  слева от точки  $R$  на расстоянии  $a/e$ . При заданных  $e$  и  $p$  величина  $a/e$  может быть определена при помощи формулы (6.27) (см. также замечание 4 п. 2 этого параграфа). Иными словами, естественно положить

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (6.36)$$

Будем теперь считать прямую  $A$  с выбранным началом  $O$  и направлением от  $F$  к  $R$  осью абсцисс. Ось ординат направим так, как указано на рис. 6.12. В выбранной системе координат фокус  $F$  имеет координаты  $(c, 0)$ , где

$$c = p \frac{e^2}{1 - e^2}, \quad (6.37)$$

а директриса  $D$  определяется уравнением

$$x = \frac{a}{e} = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (6.38)$$

Перейдем теперь к выводу уравнения рассматриваемого геометрического места точек. Пусть  $M$  — точка плоскости с координатами  $(x, y)$  (см. рис. 6.12). Обозначим через  $r$  расстояние от точки  $M$  до фокуса  $F$  и через  $d$  расстояние от точки  $M$  до директрисы  $D$ . Соотношение

$$r/d = e \quad (6.39)$$

является необходимым и достаточным условием расположения точки  $M$  на геометрическом месте  $\{M\}$ .

Используя формулу расстояния между двумя точками  $M$  и  $F$  (см. формулу (1.8) п. 2 § 3 гл. 1) и формулу для расстояния от точки  $M$  до прямой  $D$  (см. п. 7 § 1 гл. 5), получим

$$r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad (6.40)$$

<sup>1)</sup> Эти уравнения, как было выяснено в § 1 этой главы, являются уравнениями эллипса и гиперболы.

<sup>2)</sup> Формула (6.37) вытекает из формулы  $c = RO - RF$  и формул  $RF = p$  и  $RO = \frac{a}{e} = \frac{p}{1 - e^2}$ .

$$d = \frac{a}{e} - x^{-1}. \quad (6.41)$$

Из (6.39), (6.40) и (6.41) вытекает, что соотношение

$$\frac{\frac{p}{1-e^2} - x}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = e \quad (6.42)$$

представляет собой необходимое и достаточное условие расположения точки  $M$  с координатами  $x$  и  $y$  на геометрическом месте  $\{M\}$ . Поэтому соотношение (6.42) является уравнением геометрического места  $\{M\}$ . Путем стандартного приема «уничтожения радикалов», а также используя формулы (6.36) и (6.37), это уравнение легко привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.43)$$

где  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Для завершения доказательства нам нужно убедиться в том, что в процессе преобразования уравнения (6.42) в уравнение (6.43) не появилась «лишние корни».

Рассуждая, как и в п. 1 § 1 этой главы, мы убеждаемся, что расстояние  $r$  от точки  $M$ , координаты  $x$  и  $y$  которой удовлетворяют уравнению (6.43), до точки  $F(c, 0)$  может быть вычислено по формуле  $r = a - \frac{c}{a}x$ .

Используя соотношение (6.37) и формулу  $a = \frac{pe}{1-e^2}$ , получим для  $r$  следующее выражение:

$$r = a - ex. \quad (6.44)$$

Так как точка  $M$ , координаты  $x$  и  $y$  которой удовлетворяют (6.43), расположена слева от прямой  $D$  (для таких точек  $x \leq a$ , а для точек прямой  $D$ :  $x = a/e$ , где  $e < 1$ ), то для расстояния  $d$  от  $M$  до  $D$  справедлива формула (6.41). Отсюда и из формулы (6.44) вытекает, что для рассматриваемых точек  $M$  выполняется соотношение  $r/d = e$ , т.е. уравнение (6.43) является уравнением геометрического места  $\{M\}$ . Аналогично рассматривается случай  $e > 1$ .

**З а м е ч а н и е.** Используя доказанную теорему и определение параболы, мы можем сформулировать следующее определение отличного от окружности эллипса, гиперболы и параболы.

<sup>1)</sup> Формула (6.41) верна лишь для точек  $M(x, y)$ , расположенных слева от прямой  $D$ . Однако точки, расположенные справа от прямой  $D$ , равно как и точки прямой  $D$ , можно исключить из рассмотрения, так как для этих точек  $r/d \geq 1$ , а мы рассматриваем точки, для которых  $r/d = e < 1$ .

**Определение.** Геометрическое место  $\{M\}$  точек  $M$  плоскости  $\pi$ , для которых отношение  $e$  расстояния  $r$  до точки  $F$  этой плоскости к расстоянию  $d$  до прямой  $D$ , расположенной в плоскости  $\pi$ , есть величина постоянная, представляет собой либо эллипс (при  $0 < e < 1$ ), либо параболу (при  $e = 1$ ), либо гиперболу (при  $e > 1$ ). Точка  $F$  называется фокусом, прямая  $D$  — директрисой, а  $e$  — эксцентриситетом геометрического места  $\{M\}$ .

**4. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения.** В начале этой главы указывалось, что эллипс, гипербола и парабола представляют собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину. В этом пункте мы докажем теорему, обосновывающую справедливость этого утверждения.

**Теорема 6.4.** Пусть  $L$  — кривая, являющаяся эллипсом<sup>1)</sup>, гиперболой или параболой. Можно указать такой круговой конус  $K$  и такую плоскость  $\pi$ , что линия пересечения плоскости  $\pi$  с конусом  $K$  представляет собой кривую  $L$ .

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, сделаем следующее замечание.

**Замечание.** Пусть  $L^*$  — линия пересечения конуса  $K$  с некоторой плоскостью  $\pi^*$ , не проходящей через вершину конуса, а  $L$  — линия, подобная  $L^*$ . Найдется также плоскость  $\pi$ , линией пересечения которой с  $K$  будет линия  $L$ .

Существование такой плоскости очевидно, ибо параллельные плоскости пересекают конус  $K$  по подобным линиям, коэффициент подобия которых равен отношению расстояний от вершины конуса до этих плоскостей.

**Доказательство** теоремы 6.4. Очевидно, линия пересечения конуса  $K$  с плоскостью, перпендикулярной его оси и не проходящей через его вершину, представляет собой окружность, т.е. эллипс, эксцентриситет  $e$  которого равен нулю.

Рассмотрим плоскость  $\pi^*$ , не перпендикулярную оси  $AB$  конуса  $K$  и не проходящую через его вершину  $O$  (рис. 6.13). Пусть  $L^*$  — линия пересечения этой плоскости и конуса. Впишем в конус сферу  $S$ , касающуюся плоскости  $\pi^*$  в точке  $F$ . Пусть  $\omega$  — плоскость окружности  $R$ , по которой сфера  $S$  касается конуса  $K$ , и  $D$  — прямая, по которой пересекаются плоскости  $\pi^*$  и  $\omega$ . Убедимся, что  $L^*$  удовлетворяет требованиям определения, сформулированного в предыдущем пункте, т.е. является либо отличным от окружности эллипсом, либо параболой, либо гиперболой.

В процессе рассуждений выясним, что в зависимости от наклона плоскости  $\pi^*$  и от величины угла, который составляют образующие конуса с его осью, кривая  $L^*$  может иметь любой положительный эксцентриситет  $e$ . Этим, очевидно, и будет завершено доказательство теоремы, так как любые две кривые второго порядка<sup>2)</sup> с одинаковым эксцентриситетом подобны (см. пп. 3 и 4 § 2 этой главы и замечание 2 п. 1 § 3

<sup>1)</sup> При этом эллипс может представлять собой окружность.

<sup>2)</sup> То есть эллипс, гипербола или парабола.

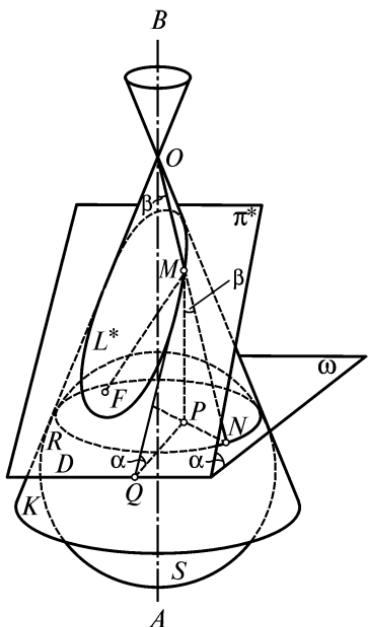


Рис. 6.13

этой главы), а согласно сделанному перед доказательством теоремы замечанию, любая кривая  $L$ , подобная линии  $L^*$  пересечения конуса  $K$  с плоскостью  $\pi^*$ , также представляет собой линию пересечения этого конуса с некоторой плоскостью  $\pi$ .

Пусть  $M$  — произвольная точка кривой  $L^*$ ,  $MP$  — перпендикуляр из этой точки на плоскость  $\omega$ ,  $MQ$  — перпендикуляр из  $M$  на прямую  $D$ ,  $MF$  — отрезок, соединяющий точки  $M$  и  $F$ ,  $MN$  — отрезок образующей конуса (эта образующая проходит через точку  $M$ , а  $N$  — точка пересечения с окружностью  $R$ ). Так как  $MF$  и  $MN$  — касательные к сфере  $S$  из одной точки  $M$ , то  $|MF| = |MN|$ .

Обозначим через  $\beta$  угол, который составляет образующая конуса  $K$  с его осью, а через  $\alpha$  — угол между плоскостями  $\pi^*$  и  $\omega$ . Очевидно, значения  $\beta$  заключены в пределах  $0 < \beta < \pi/2$ , а значения  $\alpha$  — в пределах  $0 < \alpha \leq \pi/2$ <sup>1)</sup>.

Из рассмотрения треугольников  $MPN$  и  $MPQ$ , а также из равенства  $|MN| = |MF|$  вытекает, что

$$|MF| = |MP| / \cos \beta, \quad |MQ| = |MP| / \sin \alpha.$$

Таким образом, для любой точки  $M$  кривой  $L^*$  справедливо равенство

$$|MF| / |MQ| = \sin \alpha / \cos \beta.$$

Поскольку для заданного конуса  $K$  и фиксированной плоскости  $\pi^*$  отношение  $\sin \alpha / \cos \beta$  не зависит от точки  $M$ , то для кривой  $L^*$  выполнены условия определения предыдущего пункта, т.е. эта кривая  $L^*$  является либо отличным от окружности эллипсом, либо гиперболой, либо параболой. При этом эксцентриситет  $e$  кривой  $L^*$  может быть вычислен по формуле

$$e = \sin \alpha / \cos \beta. \quad (6.45)$$

Докажем, что путем выбора углов  $\alpha$  и  $\beta$  можно получить для  $e$  любое положительное значение. Выберем, во-первых,  $\beta$  так, чтобы величина  $e \cos \beta$  была меньше 1. Такой выбор  $\beta$  возможен, так как  $\beta$  — любое число из интервала  $(0, \pi/2)$ . Остается выбрать  $\alpha$  так, чтобы выполнялось равенство  $\sin \alpha = e \cos \beta$  (эта формула представляет собой записанную иначе формулу (6.45)). Очевидно, достаточно положить  $\alpha = \arcsin(e \cos \beta)$ . Теорема доказана.

**5. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.** Обратимся сначала к окружности радиуса  $R$ . Если полюс полярной системы поместить в центр окружности, а полярную ось — произвольно в плоскости окружности, то, очевидно, искомое полярное уравнение будет иметь вид

$$\rho = R. \quad (6.46)$$

Рассмотрим теперь кривую  $L$ , представляющую собой отличный от окружности эллипс или параболу. Пусть  $F$  — фокус кривой  $L$ ,  $D$  — отвечающая этому фокусу директриса,  $p$  — расстояние от  $F$  до  $D$  и  $e$  — эксцентриситет  $L$ . Пусть полюс полярной системы координат совпадает с  $F$ , а полярная ось перпендикулярна  $D$  и направлена так, как указано на рис. 6.14. Пусть  $M$  — любая точка  $L$ . Согласно определению  $L$  (см. п. 3 этого параграфа)

$$\frac{|FM|}{|MP|} = e. \quad (6.47)$$

<sup>1)</sup>  $\alpha \neq 0$ , так как плоскость  $\pi^*$  не перпендикулярна оси конуса.

Так как  $|FM| = \rho$ , а  $|MP| = |PN + NM| = p + \rho \cos \varphi$ <sup>1)</sup>, то из (6.47) находим следующее выражение для  $\rho$ :

$$\rho = \frac{pe}{1 - e \cos \varphi}. \quad (6.48)$$

Соотношение (6.48), представляет собой *полярное уравнение отличного от окружности эллипса или параболы*.

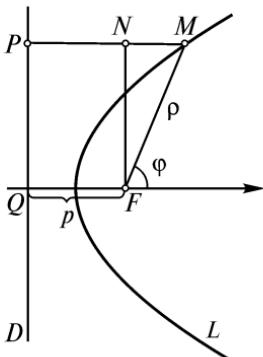


Рис. 6.14

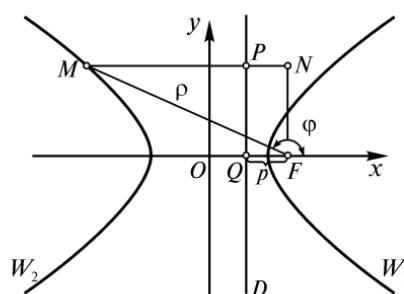


Рис. 6.15

Обратимся теперь к гиперболе. Пусть  $F$  — один из ее фокусов,  $D$  — отвечающая этому фокусу директриса,  $p$  — расстояние от  $F$  до  $D$ ,  $e$  — эксцентризитет гиперболы. Пусть  $W_1$  — ветвь гиперболы, отвечающая фокусу  $F$ , а  $W_2$  — другая ветвь гиперболы (на рис. 6.15  $F$  — правый фокус гиперболы и  $W_1$  — правая ее ветвь).

Рассуждая, как и в случае эллипса или параболы, легко убедиться, что полярное уравнение ветви  $W_1$  гиперболы имеет вид (6.48). Для ветви  $W_2$  полярное уравнение имеет иной вид. Заметим, во-первых, что для точек  $M$  ветви  $W_2$  справедливо соотношение (6.47). Выражения для  $|FM|$  и  $|MP|$  имеют следующий вид:

$$|FM| = \rho, \quad |MP| = |MN - PN| = -\rho \cos \varphi - p^2. \quad (6.49)$$

Используя формулы (6.49), найдем из (6.47) следующее полярное уравнение ветви  $W_2$ :

$$\rho = \frac{-pe}{1 + e \cos \varphi}.$$

Таким образом, *полярное уравнение гиперболы* имеет вид

$$\rho = \begin{cases} \frac{pe}{1 - e \cos \varphi} & \text{для ветви } W_1, \\ \frac{-pe}{1 + e \cos \varphi} & \text{для ветви } W_2. \end{cases} \quad (6.50)$$

<sup>1)</sup> Эта формула верна и в случае, когда  $M$  находится левее  $FN$ , ибо в этом случае  $\cos \varphi < 0$ .

<sup>2)</sup> Так как для ветви  $W_2$  угол  $\varphi$  тупой, то  $\cos \varphi < 0$ , и поэтому  $MN = -\rho \cos \varphi$ .

**З а м е ч а н и е.** Знаменатель в правой части соотношений (6.48) и (6.50) не обращается в нуль. В случае эллипса, когда  $0 < e < 1$ , это очевидно. Для параболы  $e = 1$ , но  $\phi$  изменяется на интервале  $(0, 2\pi)$ , и поэтому  $|e \cos \phi| < 1$ . В случае гиперболы легко убедиться, что для ветви  $W_1$  угол  $\phi$  изменяется на интервале  $\left(\arccos \frac{1}{e}, 2\pi - \arccos \frac{1}{e}\right)$ , и поэтому произведение  $e \cos \phi$  либо заключено между нулем и единицей, либо отрицательно. Для ветви  $W_2$  угол  $\phi$  изменяется на  $\left(\arccos\left(-\frac{1}{e}\right), 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)\right)$ . Для этих значений  $\phi$  выражение  $e \cos \phi$  отрицательно, но больше 1 по абсолютной величине.

#### § 4. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

**1. Уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе.** Убедимся, что каждая из кривых  $L$ , являющаяся эллипсом, гиперболой или параболой, представляет собой объединение графиков двух функций. Рассмотрим, например, каноническое уравнение эллипса (6.4). Из этого уравнения следует, что часть эллипса, точки которой имеют неотрицательные ординаты  $y$ , есть график функции

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{при } -a \leq x \leq a, \quad (6.51)$$

а часть эллипса, точки которой имеют неположительные ординаты, есть график функции

$$y = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{при } -a \leq x \leq a. \quad (6.52)$$

Обращаясь к каноническому уравнению гиперболы (6.9), найдем, что гипербола представляет собой объединение графиков функций

$$y = b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad \text{и} \quad y = -b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad \text{при } x \geq a \quad \text{и} \quad x \leq -a, \quad (6.53)$$

а из канонического уравнения параболы (6.15) вытекает, что эта кривая есть объединение графиков функций

$$y = \sqrt{2px} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{2px} \quad \text{при } x > 0. \quad (6.54)$$

Рассмотрим теперь вопрос о касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Естественно, что касательные к этим кривым будут также касательными к графикам функций (6.51)–(6.54). Вопрос о касательных к графикам функций подробно рассмотрен в вып. 1 настоящего курса (см. вып. 1, гл. 5, § 1, п. 4). Найдем, например, уравнение касательной к эллипсу в его точке  $M(x, y)$ , считая при этом  $y \neq 0$  (пусть ради определенности  $y > 0$ ). Пусть  $X, Y$  — текущие координаты точки касательной. Так как ее угловой коэффициент  $k = y'$ ,

где  $y' = -\frac{xb}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$  — производная функции (6.51), вычисленная в точке  $x$ , то уравнение касательной имеет вид<sup>1)</sup>

$$Y - y = -\frac{xb}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} (X - x). \quad (6.55)$$

<sup>1)</sup> См. гл. 5, уравнение (5.10).

Учитывая, что точка  $M(x, y)$  лежит на эллипсе (т.е. ее координаты  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнениям (6.51) и (6.4)), получим после несложных преобразований уравнение касательной к эллипсу в следующей форме:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1. \quad (6.56)$$

Рассуждая аналогично для случая гиперболы и параболы, получим следующие уравнения касательных к этим кривым:

$$\text{для гиперболы: } \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1, \quad (6.57)$$

$$\text{для параболы: } Yy = p(X + x). \quad (6.58)$$

**З а м е ч а н и е 1.** В предыдущих рассуждениях был исключен случай  $y = 0$ . В соответствующих точках эллипса, гиперболы и параболы касательные вертикальны. Легко убедиться, что уравнения (6.56)–(6.58) справедливы и в этом случае.

**З а м е ч а н и е 2.** Отметим, что касательная к эллипсу имеет с ним только одну общую точку — точку касания. Аналогичным свойством обладают касательные к гиперболе и параболе.

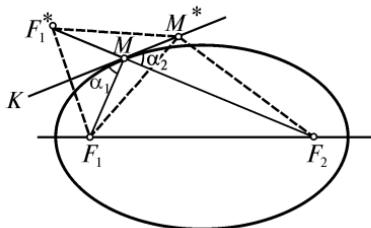


Рис. 6.16

$F_1^*$  — зеркальное отражение фокуса  $F_1$  относительно касательной  $K$  в точке  $M$ . Соединим  $F_1^*$  с  $M$  и  $F_2$ . Так как  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , то точка  $M^*$  пересечения прямой  $F_1^*F_2$  с касательной  $K$  не совпадает с точкой  $M$ . Поэтому

$$|F_1M^*| + |F_2M^*| = |F_1^*F_2| < |F_1M| + |F_2M| = 2a \quad (6.59)$$

( $a$  — длина большой полуоси эллипса). Будем теперь перемещать точку  $M^*$  по касательной  $K$  от точки  $M$ . При таком перемещении сумма  $|F_1M^*| + |F_2M^*|$  неограниченно увеличивается. В начальный момент перемещения эта сумма, согласно (6.59), была меньше  $2a$ . Поэтому в некоторый момент эта сумма будет равна  $2a$ , а это означает, что на касательной  $K$ , кроме точки  $M$ , будет еще одна точка  $M^*$  эллипса, отличная от  $M$ . Согласно замечанию 2 предыдущего пункта этого не может быть. Таким образом, указанное выше свойство эллипса действительно справедливо.

Совершенно аналогично устанавливаются следующие оптические свойства гиперболы и параболы:

1°. *Лучи света, исходящие из одного фокуса  $F_1$  гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого ее фокуса  $F_2$*  (рис. 6.17).

2°. *Лучи света, исходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы образуют пучок, параллельный оси параболы* (рис. 6.18).

**З а м е ч а н и е 1.** Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы широко используются в инженерном деле. В частности, оптическое свойство параболы используется при конструировании прожекторов, антенн и телескопов.

**З а м е ч а н и е 2.** Назовем *фронтом волны* точечного источника света  $F$  линию, для всех точек  $Q$  которой путь, проделанный световым лучом, пришедшим из источника

**2. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.** Установим следующее оптическое свойство эллипса: *лучи света, исходящие из одного фокуса  $F_1$  эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус  $F_2$*  (рис. 6.16). Геометрически указанное свойство означает, что отрезки  $MF_1$  и  $MF_2$  образуют с касательной в точке  $M$  эллипса равные углы.

Допустим, что эллипс не обладает указанным свойством, т.е.  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  (рис. 6.16). Пусть

$F$  в точку  $Q$ , одинаков. Если волна, вышедшая из точечного источника  $F$ , не претерпевает отражений, то фронт ее, очевидно, будет представлять собой окружность. Если же указанная волна отражается от некоторой кривой  $L$ , то форма ее фронта меняется в зависимости от вида кривой  $L$ . Парабола обладает следующим замечательным свойством: *фронт  $\Phi$  отраженной от параболы волны при условии расположения источника света в фокусе  $F$  параболы представляет собой прямую, параллельную директрисе  $D$  этой параболы* (рис. 6.18).

В самом деле, рассмотрим прямую  $\Phi$ , параллельную директрисе  $D$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка этой прямой. Из оптического свойства параболы вытекает, что если  $FM$  — падающий луч, приходящий после отражения в точку  $Q$ , то отраженный луч  $MQ$

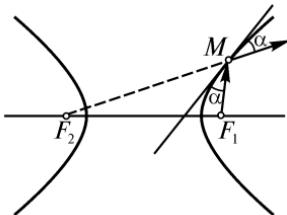


Рис. 6.17

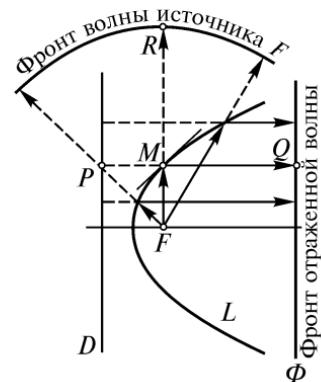


Рис. 6.18

перпендикулярен директрисе  $D$ . Обозначим через  $P$  точку пересечения луча  $MQ$  с директрисой  $D$ . Очевидно, сумма  $|QM| + |MF|$  равна  $|QM| + |MP|$ <sup>1)</sup>. Так как  $|QM| + |MP| = d$ , где  $d$  — не зависящее от точки  $Q$  расстояние между прямыми  $\Phi$  и  $D$ , то для любой точки  $Q$  линии  $\Phi$  сумма  $|QM| + |MF|$  одна и та же (равна  $d$ ), т.е.  $\Phi$  — фронт отраженной волны.

## § 5. Кривые второго порядка

Обращаясь к каноническим уравнениям эллипса, гиперболы и параболы (см. уравнения (6.4), (6.9) и (6.15) этой главы), мы видим, что перечисленные кривые представляют собой *алгебраические линии второго порядка* (см. гл. 4, § 1, п. 5). Естественно поставить вопрос о том, *какие еще линии являются алгебраическими линиями второго порядка*. Этот вопрос и рассматривается в настоящем параграфе.

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (6.60)$$

Линия  $L$ , определяемая этим уравнением (т.е. алгебраическая линия второго порядка), рассматриваемая как геометрический объект<sup>2)</sup>, не

<sup>1)</sup> Согласно определению параболы (см. п. 3 § 1 этой главы).

<sup>2)</sup> Может оказаться, что уравнение (6.60) не определяет линии: этому уравнению могут удовлетворять координаты лишь одной точки или не найдется ни одной точки, координаты которой удовлетворяют (6.60). Однако и в этом случае мы будем говорить о геометрических объектах, определяемых уравнением (6.60), называя эти объекты *вырожденными* или *мнимыми*. Подробнее об этих вопросах см. в гл. 4.

меняется, если от данной декартовой прямоугольной системы координат перейти к другой декартовой системе координат.

Отметим, что *исходное уравнение* (6.60) и *уравнение, полученное после преобразования координат, алгебраически эквивалентны* (см. п. 5 § 1 гл. 4). Можно ожидать, что при специальном выборе декартовой системы координат уравнение (6.60) примет настолько простой вид, что геометрическая характеристика линии  $L$  не будет представлять затруднений.

Этим методом мы воспользуемся для выяснения всех типов линий второго порядка. В процессе рассуждений мы укажем правила, с помощью которых выбирается система координат, в которой уравнение линии  $L$  выглядит наиболее просто. Мы сформулируем также признаки, позволяющие узнать тип линии второго порядка по ее исходному уравнению.

**1. Преобразование коэффициентов уравнения линии второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат.** Так как переход от одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости к другой декартовой прямоугольной системе координат может быть осуществлен путем некоторого параллельного переноса системы координат и последующего поворота (включая в поворот и зеркальное отражение (см. § 1 гл. 3)), мы рассмотрим отдельно вопрос о преобразовании коэффициентов уравнения (6.60) при параллельном переносе и при повороте. При этом, конечно, будем считать, что в *уравнении* (6.60) *по крайней мере один из коэффициентов*  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  или  $a_{22}$  *отличен от нуля*.

Условимся о следующей терминологии: группу слагаемых  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  левой части (6.60) будем называть *группой старших членов* этого уравнения, а группу слагаемых  $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$  будем называть *линейной частью* уравнения (6.60). При этом коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  будем называть *коэффициентами группы старших членов*, а коэффициенты  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  и  $a_{33}$  — *коэффициентами линейной части* (6.60). Коэффициент  $a_{33}$  обычно называется *свободным членом* уравнения (6.60).

1°. *Преобразование коэффициентов при параллельном переносе.* Пусть декартова прямоугольная система координат  $O'x'y'$  получена параллельным переносом системы  $Oxy$  вдоль вектора  $OO'$ . Как известно, старые и новые координаты точки связаны соотношениями

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad (6.61)$$

где  $x_0$ ,  $y_0$  — координаты начала  $O'$  в системе  $Oxy$  (см. гл. 3, § 1, формулы (3.12)). Подставляя выражения (6.61) для  $x$  и  $y$  в левую часть (6.60), мы получим уравнение  $L$  в системе  $O'x'y'$ . Очевидно, это уравнение имеет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad (6.62)$$

где

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Обращаясь к уравнению (6.62), мы можем сделать следующий важный вывод: *при параллельном переносе системы координат коэффициенты группы старших членов не изменяются, а коэффициенты группы линейных членов преобразуются по формулам (6.63).*

**З а м е ч а н и е 1.** Используя первую и вторую из формул (6.63), можно, очевидно, выражению для  $a'_{33}$  придать следующий вид:

$$a'_{33} = (a'_{13} + a_{13})x_0 + (a'_{23} + a_{23})y_0 + a_{33}. \quad (6.64)$$

**2°. Преобразование коэффициентов при повороте.** Пусть декартова прямоугольная система координат  $Ox'y'$  получена поворотом системы  $Oxy$  на угол  $\varphi$  (при этом не исключается поворот на угол  $\varphi$ , равный нулю). Как известно, старые и новые координаты точки связаны соотношениями

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \quad (6.65)$$

(см. гл. 3, § 1, формулы (3.13)). Подставляя выражения (6.65) для  $x$  и  $y$  в левую часть (6.60) и группируя коэффициенты при различных степенях  $x'$  и  $y'$ , мы получим уравнение  $L$  в системе  $Ox'y'$ . Очевидно, это уравнение имеет вид

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad (6.66)$$

где <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{12} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\ a'_{12} &= -\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi, \\ a'_{22} &= -a_{12} \sin 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\ a'_{13} &= a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi, \\ a'_{23} &= a_{23} \cos \varphi - a_{13} \sin \varphi, \\ a'_{33} &= a_{33}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

<sup>1)</sup> При выводе этих формул использовались равенства  $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$ ,  $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ ,  $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$ .

Мы можем сделать следующий важный вывод:

*При повороте системы координат коэффициенты  $a'_{11}$ ,  $a'_{12}$ ,  $a'_{22}$  группы старших членов уравнения (6.66) выражаются лишь через угол  $\varphi$  поворота и через коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  группы старших членов уравнения (6.60); коэффициенты  $a'_{13}$  и  $a'_{23}$  уравнения (6.60) выражаются лишь через угол  $\varphi$  и коэффициенты  $a_{13}$  и  $a_{23}$  уравнения (6.60); свободный член не изменяется (т.е.  $a'_{33} = a_{33}$ ).*

**З а м е ч а н и е 2.** Обозначим через  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно величины

$$\sqrt{a_{12}^2 + \left[ \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \right]^2}, \quad \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \quad \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}.$$

Введем, далее, угол  $\alpha$ , считая  $\cos \alpha = \frac{a_{12}}{A}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})}{A}$  при  $A \neq 0$  и  $\alpha = 0$  при  $A = 0$ , и угол  $\beta$ , считая  $\cos \beta = a_{23}/C$ ,  $\sin \beta = a_{13}/C$  при  $C \neq 0$  и  $\beta = 0$  при  $C = 0$ <sup>1)</sup>. Тогда, очевидно, выражения (6.67) для коэффициентов  $a'_{ij}$  можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= A \sin(2\varphi + \alpha) + B, \\ a'_{12} &= A \cos(2\varphi + \alpha), \\ a'_{22} &= -A \sin(2\varphi + \alpha) + B, \\ a'_{13} &= C \sin(\varphi + \beta), \\ a'_{23} &= C \cos(\varphi + \beta), \\ a'_{33} &= a_{33}. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Отметим, что величины  $A$ ,  $B$  и  $C$  и углы  $\alpha$  и  $\beta$  не зависят от  $\varphi$ .

**2. Инварианты уравнения линии второго порядка. Понятие типа линии второго порядка.** Назовем *инвариантом* уравнения (6.60) линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат такую функцию  $f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33})$  от коэффициентов  $a_{ij}$  этого уравнения, значения которой не меняются при переходе к новой декартовой прямоугольной системе координат. Таким образом, если  $f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33})$  — инвариант и  $a'_{ij}$  — коэффициенты уравнения линии второго порядка в новой системе декартовых координат, то

$$f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}) = f(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{33}).$$

Докажем следующую теорему.

<sup>1)</sup> Известно, что, каковы бы ни были величины  $P$  и  $Q$ , удовлетворяющие условию  $P^2 + Q^2 \neq 0$ , можно найти такой угол  $\gamma$ , что  $\cos \gamma = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$  и  $\sin \gamma = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$ .

**Теорема 6.5.** Величины

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (6.69)$$

являются инвариантами уравнения (6.60) линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат.

**Доказательство.** Очевидно, инвариантность величин  $I_1, I_2, I_3$  достаточно доказать отдельно для параллельного переноса системы координат и для поворота.

Рассмотрим сначала параллельный перенос системы координат. Мы установили в 1° предыдущего пункта, что при этом преобразовании координат коэффициенты группы старших членов не изменяются. Поэтому не изменяются и величины  $I_1$  и  $I_2$ . Займемся величиной  $I_3$ . В новой системе координат  $O'x'y'$  величина  $I_3$  равна

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Вычитая из последней строки этого определителя первую строку, умноженную на  $x_0$ , и вторую, умноженную на  $y_0$  ( $x_0$  и  $y_0$  — координаты нового начала  $O'$ ), и используя при этом выражения для  $a'_{13}$  и  $a'_{23}$  формул (6.63) и выражение (6.64) для  $a'_{33}$ , найдем, что этот определитель равен <sup>1)</sup>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если теперь вычесть из последнего столбца полученного определителя первый столбец, умноженный на  $x_0$ , и второй, умноженный на  $y_0$ , и использовать при этом выражения для  $a'_{13}$  и  $a'_{23}$  из формул (6.63), то в результате получится определитель, стоящий в правой части выражения для  $I_3$  в формулах (6.69). Итак, инвариантность  $I_3$  при параллельном переносе системы координат доказана.

Рассмотрим теперь поворот декартовой системы координат. В 2° предыдущего пункта мы нашли, что при этом преобразовании коэффициенты  $a'_{ij}$  уравнения линии  $L$  в новой системе связаны с коэффициентами  $a_{ij}$  уравнения этой линии в старой системе с помощью формул (6.68)

<sup>1)</sup> Напомним, что при указанных преобразованиях значение определителя не меняется (см. Дополнение к гл. I).

(см. замечание 2 предыдущего пункта). Докажем теперь инвариантность  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . Имеем, согласно (6.68),

$$I'_1 = a'_{11} + a'_{22} = 2B = a_{11} + a_{22},$$

$$I'_2 = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}^2 = B^2 - A^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Таким образом, инвариантность  $I_1$  и  $I_2$  доказана. Обратимся теперь к

$$I'_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам последнего столбца, учитывая только что доказанную инвариантность  $I_2$ , т.е. равенство

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = I_2$$

и равенство  $a'_{33} = a_{33}$  (см. последнюю из формул (6.67)), получим

$$I'_3 = a'_{13} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{22} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} - a'_{23} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} + a_{33}I_2. \quad (6.70)$$

Согласно формулам (6.68) первое слагаемое в правой части (6.70) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} a'_{13} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{22} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} &= C \sin(\varphi + \beta) \begin{vmatrix} A \cos(2\varphi + \alpha) & -A \sin(2\varphi + \alpha) + B \\ C \sin(\varphi + \beta) & C \cos(\varphi + \beta) \end{vmatrix} = \\ &= C^2 \sin(\varphi + \beta) \{A \cos(\varphi + \alpha - \beta) - B \sin(\varphi + \beta)\}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Совершенно аналогично получается равенство

$$a'_{23} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} = C^2 \cos(\varphi + \beta) \{A \sin(\varphi + \alpha - \beta) + B \cos(\varphi + \beta)\}. \quad (6.72)$$

Из соотношений (6.70)–(6.72) получаем

$$I'_3 = AC^2 \sin(2\beta - \alpha) - BC^2 + a_{33}I_2. \quad (6.73)$$

Так как величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $I_2$  не зависят от угла  $\varphi$  (это вытекает из инвариантности  $I_2$  и замечания 2 предыдущего пункта), то из (6.73) следует, что  $I'_3$  также не зависит от угла  $\varphi$ , т.е. при любом значении  $\varphi$  имеет одно и то же значение. Но  $a'_{ij} = a_{ij}$  при  $\varphi = 0$ , и поэтому  $I'_3 = I_3$ . Таким образом, инвариантность  $I_3$  также установлена. Теорема доказана.

Геометрические характеристики линий второго порядка и их расположение вполне определяются значениями инвариантов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . В зависимости от знака инварианта  $I_2$  эти линии разделяют на следующие три типа:

- эллиптический тип, если  $I_2 > 0$ ,
- гиперболический тип, если  $I_2 < 0$ ,
- параболический тип, если  $I_2 = 0$ .

Очевидно, тип линии не меняется при изменении декартовой системы координат. Ниже мы дадим полную классификацию каждого из указанных типов линий.

**3. Центр линии второго порядка.** В предыдущем пункте мы установили, что при параллельном переносе декартовой системы изменяются лишь коэффициенты группы линейных членов уравнения линии второго порядка.

Попытаемся найти такую декартову систему координат  $O'x'y'$  (полученную параллельным переносом системы  $Oxy$ ), в которой уравнение (6.62) данной линии  $L$  второго порядка не содержало бы слагаемых  $2a'_{13}x'$  и  $2a'_{23}y'$ , т.е. коэффициенты  $a'_{13}$  и  $a'_{23}$  были бы равны нулю. Пусть  $x_0$  и  $y_0$  — координаты начала  $O'$  искомой системы. Обращаясь к формулам (6.63), найдем, что величины  $x_0$ ,  $y_0$  представляют собой решение следующей системы линейных уравнений:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \quad (6.74)$$

Уравнения (6.74) называются *уравнениями центра линии второго порядка*, а точка  $O'$  с координатами  $(x_0, y_0)$ , где  $x_0$  и  $y_0$  — решения системы (6.74), называется *центром* этой линии.

Поясним смысл наименования «центр» линии. Пусть начало координат перенесено в центр  $O'$ . Тогда уравнение линии  $L$  примет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0. \quad (6.75)$$

Пусть точка  $M(x', y')$  расположена на  $L$ . Это означает, что ее координаты  $x'$  и  $y'$  удовлетворяют уравнению (6.75). Очевидно, точка  $M^*(-x', -y')$ , симметричная с  $M$  относительно  $O'$ , также расположена на  $L$ , ибо ее координаты также удовлетворяют уравнению (6.75). Таким образом, если у линии  $L$  существует центр  $O'$ , то относительно центра точки  $L$  располагаются симметрично парами, т.е. центр линии  $L$  является ее центром симметрии.

**З а м е ч а н и е 3.** Если линия  $L$  второго порядка имеет центр, то инварианты  $I_2$ ,  $I_3$  и свободный член  $a'_{33}$  в уравнении (6.75) связаны соотношением

$$I_3 = I_2 a'_{33}. \quad (6.76)$$

В самом деле, в силу инвариантности  $I_3$  получим в системе координат  $O'x'y'$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Из последней формулы и вытекает соотношение (6.76).

Наличие центра у линии второго порядка связано с разрешимостью уравнений центра (6.74). Если уравнения центра имеют единственное решение, то линию  $L$  второго порядка будем называть *центрированной*<sup>1)</sup>. Так как определитель системы (6.74) равен  $I_2$ , а необходимым и достаточным условием существования единственного решения этой системы является неравенство нулю ее определителя, то мы можем сделать следующий важный вывод: линии эллиптического типа ( $I_2 > 0$ ) и гиперболического типа ( $I_2 < 0$ ) — и только эти линии — являются центральными.

**Замечание 4.** Если начало координат перенесено в центр  $O'$  центральной линии  $L$  второго порядка, то уравнение этой линии будет иметь вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \quad (6.77)$$

Действительно, после переноса начала в центр уравнение линии примет вид (6.75). Так как для центральной линии  $I_2 \neq 0$ , то из формулы (6.76) найдем, что  $a'_{33} = I_3/I_2$ . Подставляя это выражение для  $a'_{33}$  в формулу (6.75), мы получим уравнение (6.77).

**4. Стандартное упрощение любого уравнения линии второго порядка путем поворота осей.** Докажем, что любое уравнение (6.60) линии  $L$  второго порядка путем специального поворота координатной системы может быть приведено к уравнению, в котором не будет содержаться слагаемое  $2a'_{12}x'y'$ , т.е. коэффициент  $a'_{12}$  будет равен нулю. Такое упрощение уравнения второго порядка мы будем называть *стандартным*.

Естественно, мы будем предполагать, что в исходном уравнении (6.60) коэффициент  $a_{12}$  не равен нулю, ибо в случае  $a_{12} = 0$  поставленный вопрос является решенным.

Пусть  $\phi$  — угол поворота искомой повернутой системы координат. Обращаясь ко второй из формул (6.67), найдем, что искомый угол  $\phi$  является решением следующего тригонометрического уравнения:

$$-\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\phi + a_{12}\cos 2\phi = 0, \quad (6.78)$$

---

<sup>1)</sup> Таким образом, центральная линия имеет единственный центр.

в котором, по предположению,  $a_{12} \neq 0$ . При этом предположении очевидно, что (6.78) имеет следующее решение:

$$\operatorname{ctg} 2\phi = (a_{11} - a_{22})/2a_{12}. \quad (6.79)$$

Итак, если мы повернем систему координат на угол  $\phi$ , определенный из равенства (6.79), то в повернутой системе координат уравнение линии  $L$  не будет содержать слагаемого  $2a'_{12}x'y'$  и, кроме того, согласно формулам (6.67),  $a'_{33} = a_{33}$ . Иными словами, это уравнение будет иметь следующий вид:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \quad (6.80)$$

**5. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка ( $I_2 \neq 0$ ). Классификация центральных линий.** Выводы, сделанные в предыдущих двух пунктах, позволяют решить вопрос о классификации всех центральных линий второго порядка. Решение этого вопроса мы проведем по следующей схеме. Во-первых, путем переноса начала координат в центр линии (6.60) мы приведем ее уравнение к виду (6.77). После этого произведем стандартное упрощение уравнения (6.77):

1) если  $a_{12} = 0$ , то оставим систему координат  $O'x'y'$  неизменной и изменим лишь обозначение  $x'$  на  $x''$ ,  $y'$  на  $y''$ ,  $a_{ij}$  на  $a''_{ij}$ ;

2) если  $a_{12} \neq 0$ , то перейдем к повернутой системе координат  $O'x''y''$ , вычисляя угол поворота  $\phi$  по формуле (6.79) и используя при этом формулы (6.67) (с заменой  $a'_{ij}$  на  $a''_{ij}$ ) и формулу (6.80). В обоих указанных случаях найдем, что уравнение любой центральной линии  $L$  в системе координат  $O'x''y''$  имеет вид

$$a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \quad (6.81)$$

Дальнейшая классификация линий основывается на анализе уравнения (6.81). При этом используется связь коэффициентов  $a''_{11}$  и  $a''_{22}$  с инвариантами  $I_1$  и  $I_2$ .

Рассмотрим отдельно линии эллиптического типа и линии гиперболического типа.

1°. *Линии эллиптического типа ( $I_2 > 0$ ).* Обратимся к исходному уравнению (6.60) линии  $L$  эллиптического типа. Так как  $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , то  $a_{11}a_{22} > 0$ , т.е. коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$  оба отличны от нуля и имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком  $I_1$ , поскольку  $I_1 = a_{11} + a_{22}$ . Без ущерба для общности можно считать оба эти коэффициента положительными (этого всегда можно добиться нормировкой исходного уравнения (6.60), т.е. умножением его на  $-1$  (при такой нормировке знак инварианта  $I_1$  станет положительным, знак инварианта  $I_2$  не меняется)).

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 6.6.** Пусть уравнение (6.60) линии  $L$  эллиптического типа ( $I_2 > 0$ ) нормировано так, что  $I_1 > 0$ . Тогда при  $I_3 < 0$  это уравнение представляет собой эллипс. При  $I_3 = 0$  уравнению (6.60) удовлетворяют координаты лишь одной точки. При  $I_3 > 0$  уравнению (6.60) не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости.

При  $I_3 = 0$  уравнение (6.60) называется *уравнением вырожденного эллипса*. При  $I_3 > 0$  (6.60) называется *уравнением мнимого эллипса*.

Доказательство. Так как для уравнения (6.81)  $I_1 = a''_{11} + a''_{22}$ , а  $I_2 = a''_{11}a''_{22}$ , то из условия  $I_1 > 0$  и  $I_2 > 0$  вытекает положительность  $a''_{11}$  и  $a''_{22}$ . Поэтому уравнение (6.81) линии  $L$  может быть записано следующим образом:

$$\text{при } I_3 < 0 \quad \frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a''_{11}}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a''_{22}}}\right)^2} = 1, \quad (6.82)$$

$$\text{при } I_3 = 0 \quad \frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{22}}}\right)^2} = 0, \quad (6.83)$$

$$\text{при } I_3 > 0 \quad \frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2 a''_{11}}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2 a''_{22}}}\right)^2} = -1. \quad (6.84)$$

Очевидно, что уравнение (6.82), отвечающее случаю  $I_3 < 0$ , представляет собой каноническое уравнение эллипса с полуосами  $\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a''_{11}}}$  и  $\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a''_{22}}}$ .

Уравнению (6.83), отвечающему случаю  $I_3 = 0$ , удовлетворяют координаты лишь одной точки  $x'' = 0, y'' = 0$ . Уравнению (6.84) не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости, ибо левая часть этого уравнения не отрицательна, а правая отрицательна. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что каждое из уравнений (6.82), (6.83), (6.84) эквивалентно исходному уравнению (6.60) соответственно для случаев  $I_3 < 0, I_3 = 0, I_3 > 0$ , и поэтому сделанные выше геометрические выводы для уравнений (6.82), (6.83) и (6.84) справедливы и для уравнения (6.60). Теорема доказана.

**Замечание 5.** Остановимся подробнее на случае, когда уравнение (6.60) эллиптического типа определяет эллипс. При этом мы будем считать, что это уравнение нормировано так, что  $I_1 > 0$ . Координаты  $(x_0, y_0)$  центра этого эллипса представляют собой решение системы

мы (6.74). Так как новая ось  $O'x''$  является одной из главных осей эллипса (это вытекает из того, что в системе  $O'x''y''$  уравнение эллипса имеет канонический вид, и поэтому оси координат  $O'x''$  и  $O'y''$  совпадают с главными осями эллипса (см. п. 1 § 2 этой главы)), то угол наклона  $\varphi$  этой оси со старой осью  $Ox$  может быть найден по формуле (6.79). Наконец, из уравнения (6.82) вытекает, что полуоси эллипса

равны  $\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a_{11}''}}$  и  $\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a_{22}''}}$ , причем коэффициенты  $a_{11}''$  и  $a_{22}''$  выражаются

через коэффициенты  $a_{ij}$  исходного уравнения (6.60) (см. первую и третью формулы (6.67); при этом нужно положить  $a_{11}'' = a_{11}'$  и  $a_{22}'' = a_{22}'$ ).

Итак, зная инварианты и формулы преобразования координат, можно вычислить полуоси эллипса и выяснить его расположение относительно исходной системы координат  $Oxy$ .

2°. Линии гиперболического типа ( $I_2 < 0$ ). Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 6.7.** Уравнение (6.60) линии  $L$  гиперболического типа при  $I_3 \neq 0$  представляет собой гиперболу, а при  $I_3 = 0$  — пару пересекающихся прямых.

Доказательство. Так как для уравнения (6.81)  $I_2 = a_{11}'' a_{22}''$ , то из условия  $I_2 < 0$  вытекает, что  $a_{11}''$  и  $a_{22}''$  имеют разные знаки. Для определенности будем считать  $a_{11}'' > 0$ ,  $a_{22}'' < 0$  (случай  $a_{11}'' < 0$ ,  $a_{22}'' > 0$  рассматривается аналогично). Тогда уравнение (6.81) может быть записано следующим образом:

$$\text{при } I_3 < 0 \quad \frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2 a_{11}''}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 (-a_{22}'')}}\right)^2} = -1, \quad (6.85)$$

$$\text{при } I_3 = 0 \quad \frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}''}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{-a_{22}''}}\right)^2} = 0, \quad (6.86)$$

$$\text{при } I_3 > 0 \quad \frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a_{11}''}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 (-a_{22}'')}}\right)^2} = 1. \quad (6.87)$$

Очевидно, уравнение (6.85), отвечающее случаю  $I_3 < 0$ , представляет собой каноническое уравнение гиперболы, для которой ось  $Oy$  является действительной осью, а ось  $Ox$  — мнимой осью, причем мнимая и действительная полуоси этой гиперболы соответственно равны  $\sqrt{\frac{I_3}{I_2 a_{11}''}}$  и  $\sqrt{\frac{I_3}{I_2 (-a_{22}'')}}$ .

Уравнение (6.87), отвечающее случаю  $I_3 > 0$ , также представляет собой каноническое уравнение гиперболы, для которой ось  $Ox$  является действительной осью, а ось  $Oy$  — мнимой осью, причем мнимая и действительная полуоси этой гиперболы соответственно равны  $\sqrt{\frac{-I_3}{I_2(-a''_{22})}}$  и  $\sqrt{\frac{-I_3}{I_2a''_{11}}}$ .

Уравнение (6.86), отвечающее случаю  $I_3 = 0$ , можно записать в виде

$$\left( \frac{x''}{\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}} + \frac{y''}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{22}}}}} \right) \left( \frac{x''}{\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}} - \frac{y''}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{22}}}}} \right) = 0.$$

Этому последнему уравнению удовлетворяют лишь координаты точек, расположенных на прямых

$$\frac{x''}{\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}} + \frac{y''}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{22}}}}} = 0, \quad \frac{x''}{\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}} - \frac{y''}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{22}}}}} = 0.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что каждое из уравнений (6.85)–(6.87) эквивалентно исходному уравнению (6.60) соответственно для случаев  $I_3 < 0$ ,  $I_3 = 0$ ,  $I_3 > 0$ , и поэтому сделанные выше геометрические выводы для уравнений (6.85)–(6.87) справедливы и для уравнения (6.60). Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 6.** Остановимся подробнее на случае, когда уравнение (6.60) гиперболического типа определяет гиперболу, т.е. когда  $I_3 \neq 0$ .

Координаты  $(x_0, y_0)$  центра этой гиперболы представляют собой решение системы (6.74). Угол наклона  $\varphi$  оси  $Ox'$  (являющейся либо действительной, либо мнимой осью гиперболы) со старой осью  $Ox$  может быть найден по формуле (6.79). Наконец, в процессе доказательства теоремы были указаны величины действительной и мнимой полуосей гиперболы. Их значения вычисляются через  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $a''_{11}$  и  $a''_{22}$ . Коэффициенты  $a''_{11}$  и  $a''_{22}$  выражаются через коэффициенты  $a_{ij}$  исходного уравнения (6.60) (см. первую и третью формулы (6.67); при этом нужно положить  $a''_{11} = a'_{11}$  и  $a''_{22} = a'_{11}$ ). Уравнения асимптот гиперболы без труда могут быть найдены по ее каноническим уравнениям (6.85) или (6.87).

Итак, зная инварианты и формулы преобразования координат, можно вычислить действительную и мнимую полуоси гиперболы и выяснить ее расположение относительно исходной системы координат  $Oxy$ .

## 6. Упрощение уравнения линии параболического типа ( $I_2 = 0$ ).

**Классификация линий параболического типа.** Заметим, во-первых, что для уравнения (6.60) параболического типа инвариант  $I_1$  отличен от нуля. В самом деле, если  $I_1 = a_{11} + a_{22} = 0$ , то  $I_1^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} = 0$ ,

т.е.  $a_{11}a_{22} = -\frac{a_{11}^2}{2} - \frac{a_{22}^2}{2}$ . Так как  $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ , то, используя только что полученное выражение для  $a_{11}a_{22}$ , найдем, что  $-\frac{a_{11}^2}{2} - \frac{a_{22}^2}{2} = a_{12}^2$ , откуда следует, что  $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$ . Но, по предположению, по крайней мере один из коэффициентов  $a_{11}, a_{22}, a_{12}$  отличен от нуля. Итак,  $J \neq 0$ .

Произведем стандартное упрощение уравнения (6.60): 1) если  $a_{12} = 0$ , то оставим систему координат  $Oxy$  неизменной и изменим лишь обозначение  $x$  на  $x'$ ,  $y$  на  $y'$ ,  $a_{ij}$  на  $a'_{ij}$ ; 2) если  $a_{12} \neq 0$ , то перейдем к повернутой системе координат  $Ox'y'$ , вычисляя угол поворота по формуле (6.79) и используя при этом формулы (6.67). В обоих указанных случаях уравнение (6.60) примет вид (6.80). Так как для уравнения (6.80)  $I_1 = a'_{11} + a'_{22}$ ,  $I_2 = a'_{11}a'_{22}$ , то из условия  $I_1 \neq 0, I_2 = 0$  вытекает, что один из коэффициентов  $a'_{11}$  и  $a'_{22}$  равен нулю, а другой не равен нулю.

Для определенности будем считать  $a'_{11} = 0, a'_{22} \neq 0$  (случай  $a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$  рассматривается аналогично). При этом предположении  $I_1 = a'_{22}$ , так как  $I_1 = a'_{11} + a'_{22}$ . Итак, уравнение линии (6.60) параболического типа после стандартного упрощения может быть записано в следующей форме<sup>1)</sup>:

$$I_1y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \quad (6.88)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (6.88) может быть достигнуто путем специального параллельного переноса системы координат  $Ox'y'$ . Предварительно перепишем (6.88) в следующей форме:

$$I_1 \left( y' + \frac{a'_{23}}{I_1} \right)^2 + 2a'_{13}x' + a_{33} - \frac{a'_{23}^2}{I_1} = 0. \quad (6.89)$$

Вид уравнения (6.89) подсказывает, как выбрать специальный параллельный перенос системы координат  $Ox'y'$ . Нам нужно, чтобы первое слагаемое  $I_1 \left( y' + \frac{a'_{23}}{I_1} \right)^2$  в левой части (6.89) имело вид  $I_1y''^2$ , а остальные слагаемые сохранили свой вид. Поэтому следует положить  $y''$  равным  $y' + \frac{a'_{23}}{I_1}$ , а  $x''$  равным  $x'$ . Итак, перейдем теперь к новой системе координат, полученной путем следующего параллельного переноса:

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{I_1}. \quad (6.90)$$

<sup>1)</sup> Если  $a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$ , то  $I_1 = a'_{11}$  и вместо уравнения (6.88) мы получим уравнение  $I_1x'^2 + 2a'_{13}x' + a'_{23}y' + a_{33} = 0$ , которое путем изменения обозначений  $x'$  на  $y'$ ,  $y'$  на  $x'$ ,  $a'_{13}$  на  $a'_{23}$  и  $a'_{23}$  на  $a'_{13}$  переходит в уравнение (6.88).

Введем обозначения

$$a''_{13} = a'_{13}, \quad a''_{33} = a_{33} - \frac{a'^2_{23}}{I_1}. \quad (6.91)$$

В силу соотношений (6.89), (6.90) и (6.91) уравнение линии  $L$  параболического типа в новой системе координат  $O''x''y''$  примет вид

$$I_1 y''^2 + 2a''_{13} x'' + a''_{33} = 0. \quad (6.92)$$

Докажем теперь следующее утверждение.

**Теорема 6.8.** Уравнение (6.60) линии  $L$  параболического типа при  $I_3 \neq 0$  представляет собой параболу, а при  $I_3 = 0$  — либо пару параллельных действительных прямых (которые могут быть слившимися), либо пару мнимых параллельных прямых<sup>1)</sup>.

Доказательство. Выясним вопрос о связи между величинами  $a''_{13}$  и  $I_3$ . Для уравнения (6.92) имеем

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & I_1 & 0 \\ a''_{13} & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = -I_1 a'^2_{13}. \quad (6.93)$$

Так как  $I_1 \neq 0$ , то при  $I_3 \neq 0$  и  $a''_{13} \neq 0$ , если же  $I_3 = 0$ , то и  $a''_{13} = 0$ . Используя этот вывод, мы можем записать уравнение (6.92) следующим образом:

при  $I_3 \neq 0$  (т.е. при  $a''_{13} \neq 0$ )

$$I_1 y''^2 + 2a''_{13} \left( x'' + \frac{a''_{33}}{2a''_{13}} \right) = 0, \quad (6.94)$$

при  $I_3 = 0$  (т.е. при  $a''_{13} = 0$ )

$$I_1 y''^2 + a''_{33} = 0. \quad (6.95)$$

Очевидно, уравнение (6.94), отвечающее случаю  $I_3 = 0$ , представляет собой параболу. Чтобы убедиться в этом, совершим следующий параллельный перенос системы координат:

$$X = x'' + \frac{a''_{33}}{2a''_{13}}, \quad Y = y'', \quad (6.96)$$

и введем обозначение

$$p = |a''_{13}/I_1|.$$

Тогда вместо (6.94) мы получим уравнение  $Y^2 = 2pX$  или  $Y^2 = -2pX$ , которое является каноническим уравнением параболы.

<sup>1)</sup> Термин «мнимые параллельные прямые» будет разъяснен в процессе доказательства.

Уравнение (6.95), отвечающее случаю  $I_3 = 0$ , может быть записано так:

$$y''^2 = -a''_{33}/I_1. \quad (6.98)$$

Если  $-a''_{33}/I_1 > 0$ , то уравнение (6.98) представляет собой пару параллельных прямых:  $y'' = \sqrt{-a''_{33}/I_1}$  и  $y'' = -\sqrt{-a''_{33}/I_1}$ ; если  $-a''_{33}/I_1 = 0$ , то (6.98) представляет собой ось  $Ox''$ , уравнение которой  $y'' = 0$  (это уравнение можно рассматривать как предельный случай при  $a''_{33} \rightarrow 0$ , т.е. как пару слившихся прямых). Если, наконец,  $-a''_{33}/I_1 < 0$ , то уравнению (6.98) не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости, т.е. геометрический образ является мнимым. Обычно говорят, что в последнем случае уравнение (6.98) определяет пару *мнимых параллельных прямых*. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 7.** Для случая  $I_3 \neq 0$ , когда уравнение (6.60) параболического типа определяет параболу, читатель без труда найдет параметр  $p$  этой параболы и ее расположение относительно исходной координатной системы  $Oxy$ . Для этого нужно использовать переход от уравнений (6.60) к уравнению (6.88), описанный в начале этого пункта, и формулы (6.90), (6.91), (6.96), (6.97).

**7. Распадающиеся кривые второго порядка.** Линии  $L$  второго порядка, определяемую уравнением (6.60), будем называть *распадающейся*, если левая часть этого уравнения может быть представлена в виде произведения двух многочленов первой степени. Очевидно, если в данной декартовой прямоугольной системе координат линия  $L$  является распадающейся, то она будет распадающейся в любой другой декартовой прямоугольной системе координат: при преобразовании координат многочлен первой степени остается многочленом первой степени и каждый многочлен-сомножитель преобразуется независимо от других сомножителей. Это свойство многочленов позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие распадения кривой второго порядка.

**Теорема 6.9.** Для того чтобы линия  $L$  второго порядка была распадающейся, необходимо и достаточно обращение в нуль инварианта  $I_3$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Мы доказали (см. теоремы 6.6–6.8), что уравнение любой линии  $L$  второго порядка может быть приведено к одному из видов (6.82)–(6.87), (6.94) и (6.95).

Распадающимися среди этих линий являются лишь те, для которых  $I_3 = 0$  и, наоборот, если  $I_3 = 0$ , то уравнение линии приводится к виду, из которого, очевидно, следует свойство распадения. Теорема доказана.

## ГЛАВА 7

### ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе мы познакомимся с понятием и основными типами поверхностей второго порядка. Кроме того, будут указаны способы исследования таких поверхностей.

#### § 1. Понятие поверхности второго порядка

В силу определений 1 и 3 из п. 5 § 2 гл. 4 *п о в е р х н о с т ь ю S в т о р о г о п о р я д к а*, будем называть геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (7.1)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{13}$  отличен от нуля.

Уравнение (7.1) будем называть общим уравнением поверхности второго порядка.

Очевидно, поверхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект<sup>1)</sup>, не меняется, если от данной декартовой прямоугольной системы координат перейти к другой декартовой системе координат. Отметим, что исходное уравнение (7.1) и уравнение, полученное после преобразования координат, алгебраически эквивалентны.

Ниже мы убедимся, что для каждого уравнения (7.1) можно указать такую специальную систему координат, в которой уравнение (7.1) примет столь простой вид, что геометрическая характеристика поверхности  $S$  не будет представлять затруднений.

Используя этот метод, мы дадим полное описание всех типов поверхностей второго порядка.

---

<sup>1)</sup> Может оказаться, что уравнение (7.1) не определяет поверхности: этому уравнению могут удовлетворять лишь координаты точек, расположенных на прямой линии, или координаты лишь одной точки, или не найдется ни одной точки, координаты которой удовлетворяют (7.1). Однако и в этих случаях мы будем говорить о геометрических объектах, называя их соответственно *вырожденными* или *мнимыми*.

**1. Преобразование коэффициентов уравнения поверхности второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат.** Рассмотрим отдельно параллельный перенос и поворот координатных осей.

Условимся о следующей терминологии: группу слагаемых

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz$$

левой части (7.1) будем называть *группой старших членов* этого уравнения, а группу слагаемых

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

будем называть *линейной частью* уравнения (7.1). При этом коэффициенты  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$  будем называть *коэффициентами группы старших членов*, а коэффициенты  $a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$  — *коэффициентами линейной части* (7.1). Коэффициент  $a_{44}$  обычно называется *свободным членом* уравнения (7.1).

Рассмотрим сначала параллельный перенос декартовой системы координат. Как известно, старые и новые координаты точки связаны соотношениями

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0, \quad (7.2)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — координаты нового начала  $O'$  в старой системе  $Oxyz$  (см. гл. 3, формулы (3.20)). Подставляя выражения (7.2) для  $x, y, z$  в левую часть (7.1), получим уравнение  $S$  в новой системе  $O'x'y'z'$ . Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{13}x'z' + \\ + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где

$$\begin{aligned} a'_{14} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}, \\ a'_{24} &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}, \\ a'_{34} &= a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}, \\ a'_{44} &= a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{23}y_0z_0 + \\ &\quad + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Обращаясь к уравнению (7.3), мы можем сделать следующий важный вывод: *при параллельном переносе системы координат коэффициенты группы старших членов не изменяются, а коэффициенты группы линейных членов преобразуются по формулам (7.4).*

Рассмотрим теперь о в о р о т декартовой системы координат.

Как известно, старые и новые координаты точки связаны соотношениями (см. гл. 3, формулы (3.20))

$$\begin{aligned}x &= m_{11}x' + m_{12}y' + m_{13}z', \\y &= m_{21}x' + m_{22}y' + m_{23}z', \\z &= m_{31}x' + m_{32}y' + m_{33}z',\end{aligned}\quad (7.5)$$

где  $m_{ij} = m_{ji}$  суть косинусы углов, которые составляют друг с другом старые и новые координатные оси. Подставляя выражения (7.5) для  $x$ ,  $y$  и  $z$  в левую часть (7.1) и группируя коэффициенты при различных степенях  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ , мы получим уравнение  $S$  в системе  $O'x'y'z'$ .

Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z' + \\+ 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.\end{aligned}\quad (7.6)$$

Легко убедиться в справедливости следующего важного вывода о структуре коэффициентов  $a'_{ij}$ : при повороте системы координат коэффициенты группы старших членов уравнения (7.6) выражаются лишь через величины  $m_{ij}$ , фигурирующие в соотношениях (7.5), и через коэффициенты группы старших членов уравнения (7.1); коэффициенты  $a'_{14}$ ,  $a'_{24}$ ,  $a'_{34}$  уравнения (7.6) выражаются лишь через величины  $m_{ij}$  и коэффициенты  $a_{14}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{34}$  уравнения (7.1); свободный член не изменяется (т.е.  $a'_{44} = a_{44}$ ). При этом, если в исходном уравнении все коэффициенты  $a_{14}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{34}$  были равны нулю, то все коэффициенты  $a'_{14}$ ,  $a'_{24}$ ,  $a'_{34}$  также будут равны нулю. Из выводов этого пункта следует, что путем параллельных переносов можно упрощать группу линейных членов уравнения (7.1), не меняя при этом коэффициентов группы старших членов, а путем поворотов системы можно упрощать группу старших членов этого уравнения.

**2. Инварианты уравнения поверхности второго порядка.** Справедливо следующее утверждение:

Величины

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами уравнения (7.1) поверхности второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат.

Доказательство этого утверждения приведено в выпуске «Линейная алгебра» настоящего курса.

**3. Центр поверхности второго порядка.** Попытаемся найти такую декартову систему координат  $O'x'y'z'$  (полученную параллельным переносом системы  $Oxyz$ ), в которой уравнение (7.3) данной поверхности  $S$  второго порядка не содержало бы слагаемых  $2a'_{14}x'$ ,  $2a'_{24}y'$  и  $2a'_{34}z'$ , т.е. коэффициенты  $a'_{14}$ ,  $a'_{24}$  и  $a'_{34}$  были бы равны нулю. Пусть  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  — координаты начала  $O'$  искомой системы. Обращаясь к формулам (7.4), найдем, что величины  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  представляют собой решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Уравнения (7.7) называются *уравнениями центра поверхности второго порядка*, а точка  $O'$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ , где  $x_0, y_0$  и  $z_0$  — решения системы (7.7), называется *центром* этой поверхности.

Допустим, что поверхность  $S$  второго порядка имеет центр  $O'$  (т.е. система (7.7) имеет решение  $(x_0, y_0, z_0)$ ). Перенесем начало координат в центр  $O'$ . Так как при параллельном переносе коэффициенты группы старших членов не изменяются и начало координат переносится в центр, то уравнение поверхности  $S$  в системе  $O'x'y'z'$  примет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + \\ + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z' + a'_{44} = 0. \end{aligned} \quad (7.7')$$

Очевидно, если точка  $M(x', y', z')$  расположена на поверхности  $S$  (т.е. ее координаты  $x', y', z'$  удовлетворяют уравнению (7.7')), то и точка  $M^*(-x', -y', -z')$ , симметричная с  $M$  относительно  $O'$ , также расположена на  $S$ . Таким образом, если у поверхности  $S$  существует центр  $O'$ , то *относительно центра точки  $S$  располагаются симметричными парами, т.е. центр поверхности является ее центром симметрии*.

Наличие центра у поверхности второго порядка связано с разрешимостью уравнений центра (7.7). *Если уравнения центра имеют единственное решение, то поверхность  $S$  второго порядка будем называть центральной*<sup>1)</sup>.

Отметим, что центральными поверхностями являются лишь те, для которых инвариант  $I_3$  отличен от нуля, ибо этот инвариант равен определителю системы (7.7) уравнений центра.

**4. Стандартное упрощение любого уравнения поверхности второго порядка путем поворота осей.** Докажем, что в некоторой

<sup>1)</sup> Таким образом, центральная поверхность имеет единственный центр.

декартовой прямоугольной системе координат уравнение данной поверхности  $S$  второго порядка не содержит слагаемых  $2a'_{12}x'y'$ ,  $2a'_{23}y'z'$  и  $2a'_{13}x'z'$ , т.е. в уравнении поверхности  $S$  коэффициенты  $a'_{12}$ ,  $a'_{23}$  и  $a'_{13}$  равны нулю.

Обозначим через  $F$  группу старших членов уравнения (7.1)

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz, \quad (7.8)$$

и рассмотрим значения  $F$  в точках сферы  $\pi$  радиуса 1 с центром в начале координат. Иными словами, рассмотрим значения  $P(x, y, z)$  для всех тех значений  $x, y$  и  $z$ , которые связаны соотношением <sup>1)</sup>

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (7.9)$$

Пусть  $P$  — та точка сферы  $\pi$ , в которой значение  $F(x, y, z)$  является максимальным <sup>2)</sup>. Направим новую ось  $Oz'$  из начала координат в точку  $P$ , а оси  $Ox'$  и  $Oy'$  перпендикулярно оси  $Oz'$ . Очевидно, в системе координат  $Ox'y'z'$  точка  $P$  имеет координаты  $(0, 0, 1)$ .

Так как в новой системе координат  $Ox'y'z'$  выражение для  $F$  имеет вид <sup>3)</sup>

$$F = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z', \quad (7.10)$$

а сфера  $\pi$  определяется уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad (7.11)$$

то значения  $F$  в точках  $\pi$  могут быть получены с помощью (7.10) для всех тех значений  $(x', y', z')$ , которые связаны соотношением (7.11). В частности, максимальное значение  $F$  будет в точке  $(0, 0, 1)$ .

Убедимся, что в выражении (7.10) группы старших членов в системе  $Ox'y'z'$  коэффициенты  $a'_{23}$  и  $a'_{13}$  равны нулю. Докажем, например, что  $a'_{13} = 0$  (доказательство равенства  $a'_{23} = 0$  проводится аналогично). Для этой цели рассмотрим значения  $F$  в точках окружности  $L$ , являющейся линией пересечения сферы (7.11) с плоскостью  $y' = 0$ , т.е. с плоскостью  $Ox'z'$ . Пусть  $\Theta$  — угол, который образует радиус-вектор точки  $M$  на окружности  $L$  с осью  $Oz'$ . Координаты  $x', y', z'$  точки  $M$ , очевидно, равны

$$x' = \sin \Theta, \quad y' = 0, \quad z' = \cos \Theta. \quad (7.12)$$

<sup>1)</sup> Соотношение (7.9) представляет собой уравнение сферы радиуса 1 с центром в начале координат.

<sup>2)</sup> Сфера  $\pi$  является замкнутым ограниченным множеством и служит областью задания непрерывной функции  $F$  трех переменных  $x, y$  и  $z$ . Отсюда следует существование на сфере  $\pi$  такой точки  $P$ , в которой  $F$  имеет максимальное значение (см. вып. I курса, гл. 14, теорему 14.7).

<sup>3)</sup> Напомним, что при повороте коэффициенты группы старших членов выражаются лишь через величины  $m_{ij}$ , фигурирующие в соотношениях (7.5), и через коэффициенты группы старших членов в выражении (7.8) (см. п. 1 этого параграфа).

Подставляя эти значения  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  в (7.10), получим следующее выражение для  $F$  в точках  $L$ :

$$\begin{aligned} F &= a'_{11} \sin^2 \theta + a'_{33} \cos^2 \theta + 2a'_{13} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \frac{a'_{11} + a'_{33}}{2} + \frac{a'_{33} - a'_{11}}{2} \cos 2\theta + a'_{13} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Таким образом, значения  $F$  в точках  $L$  могут быть представлены в виде функции (7.13) угла  $\theta$ . Эта функция имеет при  $\theta = 0$  максимальное значение (из формул (7.12) следует, что значению  $\theta = 0$  отвечает точка с координатами  $(0, 0, 1)$ , в которой значение  $F$  максимально). Отсюда вытекает, что производная функции (7.13) равна нулю в точке  $\theta = 0$ . Дифференцируя (7.13) по  $\theta$  и полагая в полученном выражении  $\theta = 0$ , получим равенство  $2a'_{13} = 0$ , из которого вытекает равенство нулю коэффициента  $a'_{13}$ . Для доказательства равенства  $a'_{23} = 0$  нужно рассмотреть значения  $F$  на окружности  $N$ , являющейся линией пересечения сферы (7.11) с плоскостью  $x' = 0$ , и повторить проведенные выше рассуждения. Итак, в системе координат  $Ox'y'z'$  группа  $F$  старших членов уравнения поверхности  $S$  второго порядка имеет вид

$$F = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2, \quad (7.14)$$

причем на выбор осей  $Ox'$  и  $Oy'$  не накладывалось никаких требований, кроме требований перпендикулярности оси  $Oz'$ . Иными словами, при повороте системы  $Ox'y'z'$  вокруг оси  $Oz'$  на любой угол группа  $F$  старших членов будет иметь вид (7.14). При этом координаты  $x'$  и  $y'$  преобразуются по формулам поворота системы координат на плоскости, а координата  $z'$  не меняется. Поэтому можно выбрать такую систему координат, в которой коэффициент  $a'_{12}$  при произведении  $x'y'$  будет равен нулю.

Итак, мы убедились в том, что существует такая система прямоугольных декартовых координат  $Ox'y'z'$ , в которой уравнение поверхности  $S$  имеет вид

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0. \quad (7.15)$$

Приведение уравнения (7.1) поверхности  $S$  к виду (7.15) мы будем называть *стандартным упрощением уравнения поверхности*.

## § 2. Классификация поверхностей второго порядка

**1. Классификация центральных поверхностей.** Пусть  $S$  — центральная поверхность второго порядка. Перенесем начало координат в центр этой поверхности, а затем произведем стандартное упрощение

уравнения этой поверхности. Используя выводы пп. 1, 3 и 4 § 1 этой главы, легко убедиться, что в результате указанных операций уравнение поверхности примет вид<sup>1)</sup>

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0. \quad (7.16)$$

Так как инвариант  $I_3$  для центральной поверхности отличен от нуля и его значение, вычисленное для уравнения (7.16), равно  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ , то коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  и  $a_{33}$  удовлетворяют условию

$$a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0, \quad a_{33} \neq 0. \quad (7.17)$$

Возможны следующие случаи.

1°. Коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  одного знака, а коэффициент  $a_{44}$  отличен от нуля. В этом случае поверхность  $S$  называется *эллипсоидом*.

Если коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{44}$  одного знака, то левая часть (7.16) ни при каких значениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  не обращается в нуль, т.е. уравнению поверхности  $S$  не удовлетворяют координаты никакой точки. В этом случае поверхность  $S$  называется *мнимым эллипсоидом*.

Если знак коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  противоположен знаку коэффициента  $a_{44}$ , то поверхность  $S$  называется *вещественным эллипсоидом*. В дальнейшем термином «эллипсоид» будем называть лишь *вещественный эллипсоид*.

Обычно уравнение эллипса записывают в канонической форме. Очевидно, числа  $-a_{44}/a_{11}$ ,  $-a_{44}/a_{22}$ ,  $-a_{44}/a_{33}$  положительны<sup>2)</sup>. Обозначим эти числа соответственно  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ . После несложных преобразований уравнение эллипса (7.16) можно записать в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.18)$$

Уравнение (7.18) называется *каноническим уравнением эллипса*.

Если эллипс задан своим каноническим уравнением (7.18), то оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  называются его *главными осями*.

2°. Из четырех коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{44}$  два одного знака, а два других — противоположного. В этом случае поверхность  $S$  называется *однополостным гиперболоидом*.

Обычно уравнение однополостного гиперболоида записывают в канонической форме. Пусть, ради определенности,  $a_{11} > 0$ ,  $a_{22} > 0$ ,  $a_{33} < 0$ ,  $a_{44} < 0$ . Тогда числа  $-a_{44}/a_{11}$ ,  $-a_{44}/a_{22}$ ,  $a_{44}/a_{33}$  положительны. Обозначим эти числа соответственно  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ . После несложных преобразова-

<sup>1)</sup> При этом окончательную систему координат мы обозначим  $Oxyz$ .

<sup>2)</sup> Согласно (7.17) и определению эллипса коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{44}$  не равны нулю и знак  $a_{44}$  противоположен знаку  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ .

ний уравнение (7.16) однополостного гиперболоида можно записать в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.19)$$

Уравнение (7.19) называется *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*.

Если однополостный гиперболоид задан своим каноническим уравнением (7.19), то оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  называются его *главными осями*.

**З а м е ч а н и е 1.** Если знаки коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{44}$  распределены иначе, чем в рассмотренном случае, то каноническое уравнение (17.19) легко может быть получено путем переименования осей координат.

$3^\circ$ . *Знак одного из первых трех коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{44}$  противоположен знаку остальных коэффициентов.* В этом случае поверхность  $S$  называется *двуполостным гиперболоидом*.

Запишем уравнение двуполостного гиперболоида в канонической форме. Пусть ради определенности  $a_{11} < 0$ ,  $a_{22} < 0$ ,  $a_{33} > 0$ ,  $a_{44} < 0$ . Тогда  $a_{44}/a_{11} > 0$ ,  $a_{44}/a_{22} > 0$ ,  $-a_{44}/a_{33} > 0$ . Обозначим эти числа соответственно через  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ . После несложных преобразований уравнение (7.16) двуполостного гиперболоида можно записать в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (7.20)$$

Уравнение (7.20) называется *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*.

Если двуполостный гиперболоид задан своим каноническим уравнением, то оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  называются его *главными осями*.

**З а м е ч а н и е 2.** Если знаки коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{44}$  распределены иначе, чем в рассмотренном случае, то каноническое уравнение (7.20) легко может быть получено путем переименования осей координат.

$4^\circ$ . *Коэффициент  $a_{44}$  равен нулю.* В этом случае поверхность  $S$  называется *конусом второго порядка*.

Если коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  одного знака, то левая часть (7.16) обращается в нуль ( $a_{44} = 0$ ) лишь для  $x = y = z = 0$ , т. е. уравнению поверхности  $S$  удовлетворяют координаты только одной точки. В этом случае поверхность  $S$  называется *мнимым конусом второго порядка*. Если коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  имеют разные знаки, то поверхность  $S$  является *вещественным конусом второго порядка*.

Обычно уравнение вещественного конуса второго порядка записывают в канонической форме. Пусть ради определенности  $a_{11} > 0$ ,  $a_{22} > 0$ ,  $a_{33} < 0$ . Обозначим  $1/a_{11}$ ,  $1/a_{22}$ ,  $-1/a_{33}$  соответственно через  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ . Тогда уравнение (7.16) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (7.21)$$

Уравнение (7.21) называется *каноническим уравнением вещественного конуса второго порядка*.

**З а м е ч а н и е 3.** Если знаки коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  распределены иначе, чем в рассмотренном случае, то каноническое уравнение (7.21) легко может быть получено путем переименования осей координат.

**З а м е ч а н и е 4.** В следующем параграфе мы докажем, что вещественный конус второго порядка образован прямыми линиями, проходящими через фиксированную точку.

**2. Классификация нецентральных поверхностей второго порядка.** Пусть  $S$  — нецентральная поверхность второго порядка, т.е. поверхность, для которой инвариант  $I_3$  равен нулю (см. п. 3 § 1 этой главы). Произведем стандартное упрощение уравнения этой поверхности. В результате уравнение поверхности примет вид (7.15). Так как инвариант  $I_3 = 0$  и его значение, вычисленное для уравнения (7.15), равно  $a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33}$  то один или два из коэффициентов  $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$  равны нулю<sup>1)</sup>. В соответствии с этим рассмотрим следующие возможные случаи.

1°. *Один из коэффициентов  $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$  равен нулю.* Ради определенности будем считать, что  $a'_{33} = 0$  (если равен нулю какой-либо другой из указанных коэффициентов, то можно перейти к рассматриваемому случаю путем переименования осей координат). Перейдем от координат  $x', y', z'$  к новым координатам  $x, y, z$  по формулам

$$x = x' + \frac{a'_{14}}{a'_{11}}, \quad y = y' + \frac{a'_{24}}{a'_{22}}, \quad z = z'. \quad (7.22)$$

Подставляя  $x', y', z'$ , найденные из (7.22), в левую часть (7.15) и заменивая затем  $a'_{11}$  на  $a_{11}$ ,  $a'_{22}$  на  $a_{22}$ ,  $a'_{33}$  на  $p$  и  $a'_{44}$  на  $q$ , получим следующее уравнение поверхности  $S$  в новой системе координат  $Oxyz$ :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2pz + q = 0. \quad (7.23)$$

1) Пусть  $p = 0, q = 0$ . Поверхность  $S$  распадается на пару плоскостей

$$x \pm \sqrt{-a_{22}/a_{11}} y = 0.$$

При этом, очевидно, эти плоскости будут *мнимыми*, если знаки  $a_{11}$  и  $a_{22}$  *одинаковы*, и *вещественными*, если знаки  $a_{11}$  и  $a_{22}$  *различны*.

2) Пусть  $p = 0, q \neq 0$ . Уравнение (7.23) принимает вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + q = 0. \quad (7.24)$$

Известно (см. п. 3 § 2 гл. 4), что *уравнение (7.24) является уравнением цилиндра с образующими, параллельными оси Oz*. При этом, если  $a_{11}, a_{22}$  и  $q$  имеют одинаковый знак, то левая часть (7.24) отлична от нуля для любых  $x$  и  $y$ , т.е. *цилиндр будет мнимым*. Если же среди коэффициентов  $a_{11}$ ,

<sup>1)</sup> Все перечисленные коэффициенты не могут быть равны нулю, так как при преобразовании координат порядок уравнения не изменяется (см. гл. 4).

$a_{22}$  и  $q$  имеются коэффициенты разных знаков, то цилиндр будет вещественным. Отметим, что в случае, когда  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют одинаковые знаки, а  $q$  — противоположный, то величины  $-q/a_{11}$  и  $-q/a_{22}$  положительны. Обозначая их соответственно через  $a^2$  и  $b^2$ , мы приведем уравнение (7.24) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7.25)$$

Таким образом, в отмеченном случае мы имеем *эллиптический цилиндр*. В случае, когда  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют различные знаки, получим *гиперболический цилиндр*. Легко убедиться, что уравнение гиперболического цилиндра может быть приведено к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7.26)$$

3) Пусть  $p \neq 0$ . Произведем параллельный перенос системы координат, выбирая новое начало в точке с координатами  $\left(0, 0 - \frac{q}{2p}\right)$ . При этом оставим старые обозначения координат  $x, y, z$ . Очевидно, для того чтобы получить уравнение поверхности  $S$  в новой системе координат, достаточно заменить в уравнении (7.23)  $z$  на  $z - \frac{q}{2p}$ . Получим следующее уравнение:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2pz = 0. \quad (7.27)$$

Уравнение (7.27) определяет так называемые *параболоиды*. Причем, если  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют одинаковый знак, то параболоид называется *эллиптическим*. Обычно уравнение эллиптического параболоида записывают в канонической форме:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (7.28)$$

Уравнение (7.28) легко получается из (7.27). Если  $a_{11}$  и  $a_{22}$  имеют разные знаки, то параболоид называется *гиперболическим*. Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (7.29)$$

Это уравнение также легко может быть получено из (7.27).

2°. *Два из коэффициентов  $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$  равны нулю.* Ради определенности будем считать, что  $a'_{11} = 0$  и  $a'_{22} = 0$  (если равны нулю какие-либо другие два из указанных коэффициентов, то можно перейти к рассматриваемому случаю путем переименования осей координат). Перейдем от  $x', y', z'$  к новым координатам  $x, y, z$  по формулам

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' + \frac{a'_{34}}{a'_{33}}. \quad (7.30)$$

Подставляя  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ , найденные из (7.30), в левую часть (7.15) и заменяя затем  $a'_{33}$  на  $a_{33}$ ,  $a'_{14}$  на  $p$ ,  $a'_{24}$  на  $q$  и  $a'_{44}$  на  $r$ , получим следующее уравнение поверхности  $S$  в новой системе координат  $Oxyz$ :

$$a_{33}z^2 + 2px + 2qy + r = 0. \quad (7.31)$$

1) Пусть  $p = 0$ ,  $q = 0$ . Поверхность  $S$  распадается на пару параллельных плоскостей

$$z = \pm\sqrt{-r/a_{33}}. \quad (7.32)$$

При этом, очевидно, эти плоскости будут мнимыми, если знаки  $a_{33}$  и  $r$  одинаковы, и вещественными, если знаки  $a_{33}$  и  $r$  различны, причем при  $r = 0$  эти плоскости сливаются в одну.

2) Хотя бы один из коэффициентов  $p$  или  $q$  отличен от нуля. В этом случае повернем систему координат вокруг оси  $Oz$  так, чтобы новая ось абсцисс стала параллельной плоскости  $2px + 2qy + r = 0$ . Легко убедиться, что при таком выборе системы координат, при условии сохранения обозначения  $x$ ,  $y$  и  $z$  для новых координат точек, уравнение (7.31) примет вид

$$a_{33}z^2 + 2q'y = 0, \quad (7.33)$$

которое является уравнением параболического цилиндра с образующими, параллельными новой оси  $Ox$ .

### § 3. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям

**1. Эллипсоид.** Для исследования формы эллипсоида обратимся к его каноническому уравнению (7.18) (см. п. 1 предыдущего параграфа)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.18)$$

Из уравнения (7.18) вытекает, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат — центром симметрии. Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  называются полуосами эллипсоида и представляют собой длины отрезков, от начала координат до точек пересечения эллипсоида с осями координат. Эллипсоид представляет собой ограниченную поверхность, заключенную, как это видно из (7.18), в параллелепипеде  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ ,  $|z| \leq c$ . Чтобы более наглядно представить себе форму эллипсоида, выясним форму линий пересечения его плоскостями, параллельными какой-либо из координатных плоскостей.

Ради определенности рассмотрим линии  $L_h$  пересечения эллипсоида с плоскостями

$$z = h, \quad (7.34)$$

параллельными плоскости  $Oxy$ . Уравнение проекции  $L_h^*$  линии  $L_h$  на плоскости  $Oxy$  получается из уравнения (7.18), если положить в нем  $z = h$ . Таким образом, уравнение этой проекции имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \quad (7.35)$$

Если положить

$$a^* = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad (7.36)$$

то уравнение (7.35) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (7.37)$$

т.е.  $L_h^*$  представляет собой эллипс с полуосами  $a^*$  и  $b^*$ , которые могут быть вычислены по формулам (7.36). Так как  $L_h$  получается «подъемом»  $L_h^*$  на высоту  $h$  по оси  $Oz$  (см. (7.34)), то и  $L_h$  представляет собой эллипс.

Представление об эллипсоиде можно получить следующим образом. Рассмотрим на плоскости  $Oxy$  семейство эллипсов (7.37) (рис. 7.1), полуоси  $a^*$  и  $b^*$  которых зависят от  $h$  (см. (7.36)), и каждый такой эллипс снабдим отметкой  $h$ , указывающей, на какую высоту по оси  $Oz$  должен быть «поднят» этот эллипс. Мы получим своего рода «карту» эллипсоида. Используя эту «карту», легко представить себе пространственный вид эллипсоида. На рис. 7.2 изображен эллипсоид.

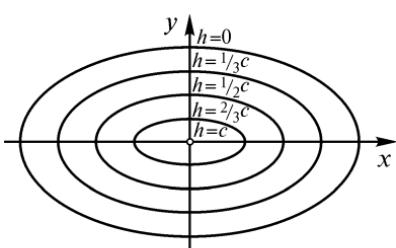


Рис. 7.1

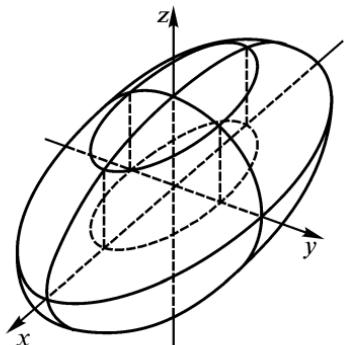


Рис. 7.2

Эллипсоид может быть получен равномерным сжатием сферы относительно двух перпендикулярных плоскостей. Именно, если  $a$  — наибольшая полуось эллипсоида, то он может быть получен из сферы<sup>1)</sup>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

<sup>1)</sup> Очевидно, сфера представляет собой эллипсоид с равными полуосями.

равномерным сжатием ее сначала относительно плоскости  $Oxy$  с коэффициентом сжатия  $b/a$ , а затем относительно плоскости  $Oxz$  с коэффициентом сжатия  $c/a$ .

В заключение отметим, что линии пересечения эллипсоида с плоскостями представляют собой эллизы.

В самом деле, такая линия представляет собой ограниченную линию второго порядка<sup>1)</sup> (ограниченность линии вытекает из ограниченности эллипса), единственной же ограниченной линией второго порядка является эллипс.

## 2. Гиперболоиды.

1°. Однополостный гиперболоид. Обратимся к каноническому уравнению (7.19) однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.19)$$

Из уравнения (7.19) вытекает, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат — центром симметрии однополостного гиперболоида.

Рассмотрим линии  $L_h$  пересечения однополостного гиперболоида плоскостями  $z = h$ . Уравнение проекции  $L_h^*$  такой линии на плоскость  $Oxy$  получается из уравнения (7.19), если положить в нем  $z = h$ . Полагая

$$a^* = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad (7.38)$$

найдем, что уравнение этой проекции имеет вид

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (7.39)$$

т.е.  $L_h^*$  представляет собой эллипс с полуосями  $a^*$  и  $b^*$ .

Рассмотрим «карту» расположенной над плоскостью  $Oxy$  части однополостного гиперболоида<sup>2)</sup>, т.е. семейство эллипсов (7.39), каждый из которых снабжен отметкой  $h$ , указывающей, на какую высоту по оси  $Oz$  должен быть поднят этот эллипс (рис. 7.3). Обращаясь к карте однополостного гиперболоида, мы видим, что наименьший из рассматриваемых эллипсов (7.39) получается для  $h = 0$  (см. также формулы (7.38)).

Этот эллипс называется *горловым*. С увеличением  $h$  размеры эллипса (7.39) неограниченно увеличиваются. Таким образом, однополостный ги-

<sup>1)</sup> Преобразуем систему координат так, чтобы в новой системе координат  $Ox'y'z'$  секущая плоскость определялась уравнением  $z' = 0$ . После такого преобразования эллипсоид будет определяться уравнением второго порядка. Полагая в этом уравнении  $z' = 0$ , мы получим уравнение второго порядка линии пересечения эллипсоида и плоскости  $z' = 0$ .

<sup>2)</sup> Расположенная под плоскостью  $Oxy$  часть однополостного гиперболоида симметрична рассматриваемой части относительно этой плоскости.

перболоид представляет собой поверхность, состоящую из *одной* полости и подобную трубке, неограниченно расширяющейся в положительном и отрицательном направлении по оси  $Oz$  (рис. 7.4). Отметим, что сечения однополостного гиперболоида плоскости  $Oyz$  и  $Oxz$  представляют собой гиперболы, определяемые соответственно уравнениями

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Эти гиперболы изображены на рис. 7.4.

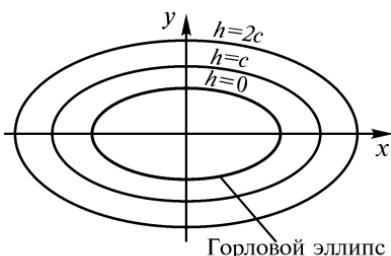


Рис. 7.3

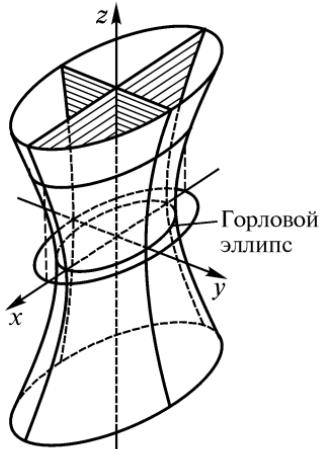


Рис. 7.4

*2°. Двуполостный гиперболоид.* Из канонического уравнения (7.20)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (7.20)$$

двуполостного гиперболоида вытекает, что *координатные плоскости являются его плоскостями симметрии, а начало координат — его центром симметрии*.

Линии  $L_h$  пересечения двуполостного гиперболоида плоскостями  $z = h$  представляют собой эллипсы, уравнения проекций которых на плоскость  $Oxy$  имеют вид

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (7.40)$$

где

$$a^* = a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b^* = b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}. \quad (7.41)$$

Из формул (7.41) вытекает, что секущая плоскость  $z = h$  начинает пересекать двуполостный гиперболоид лишь при  $|h| \geq c$ <sup>1)</sup>. Иными словами, в слое между плоскостями  $z = -c$  и  $z = c$  не содержится точек рассматриваемой поверхности; в силу симметрии относительно плоскости  $Oxy$  она состоит из *двух полостей*, расположенных вне указанного выше слоя.

<sup>1)</sup> При  $|h| < c$  подкоренное выражение в формулах (7.41) отрицательно.

На рис. 7.5 изображена «карта» верхней полости двуполостного гиперболоида. Из формул (7.41) следует, что при увеличении  $h$  эллипсы (7.40) неограниченно увеличиваются, так что полости двуполостного гиперболоида представляют собой бесконечные чаши. На рис. 7.6 изображен двуполостный гиперболоид. Отметим, что сечения двуполостного гиперболоида плоскостями  $Oyz$  и  $Oxz$  представляют собой гиперболы (см. рис. 7.6).

### 3. Параболоиды.

1°. Эллиптический параболоид. Обращаясь к каноническому уравнению (7.28) эллиптического параболоида

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (7.28)$$

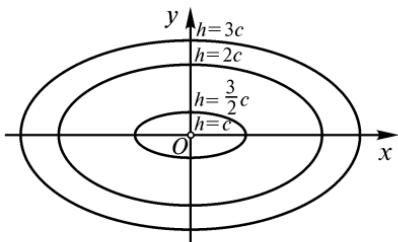


Рис. 7.5

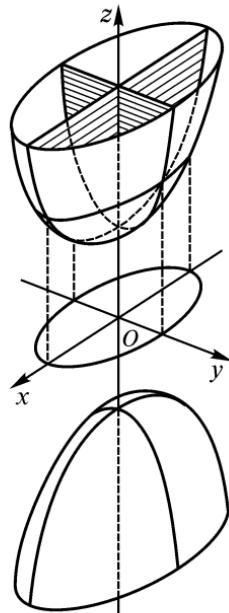


Рис. 7.6

мы видим, что для него  $Oxz$  и  $Oyz$  являются плоскостями симметрии. Ось  $Oz$ , представляющая линию пересечения этих плоскостей, называется осью эллиптического параболоида. Из уравнения (7.28) вытекает, что эллиптический параболоид расположен в полупространстве  $z \geq 0$ . Линии

$L_h$  пересечения эллиптического параболоида плоскостями  $z = h$ ,  $h > 0$ , представляют собой эллипсы, проекции  $L_h^*$  которых на плоскости  $Oxy$  определяются уравнением

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (7.42)$$

где

$$a^* = a\sqrt{h}, \quad b^* = b\sqrt{h}. \quad (7.43)$$

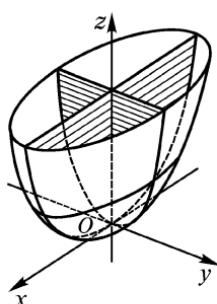


Рис. 7.7

Из формулы (7.43) следует, что при увеличении  $h$  эллипсы (7.42) неограниченно увеличиваются, так что эллиптический параболоид представляет собой бесконечную чашу. На рис. 7.7 изображен эллиптический параболоид.

Обратимся к сечениям эллиптического параболоида плоскостями  $y = h$  и  $x = h$ , параллельными соответственно координатным плоскостям  $Oxz$  и  $Oyz$ .

Плоскость  $x = h$ , например, пересекает эллиптический параболоид по параболе

$$z - \frac{h^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}, \quad x = h. \quad (7.44)$$

Очевидно, парабола (7.44) получается таким параллельным переносом параболы

$$z = y^2/b^2, \quad x = 0, \quad (7.45)$$

представляющей собой сечение эллиптического параболоида плоскостью  $x = 0$ , при котором ее вершина, имеющая координаты  $(0, 0, 0)$ , переходит в точку с координатами  $(x = h, y = 0, z = h^2/a^2)$ . Иными словами, эллиптический параболоид образуется путем параллельного перемещения параболы (7.45), когда ее вершина движется вдоль параболы  $z = x^2/a^2, y = 0$ , представляющей собой сечение эллиптического параболоида плоскостью  $y = 0$ .

Совершенно аналогично можно убедиться в том, что эллиптический параболоид может быть получен путем параллельного перемещения параболы, представляющей собой сечение параболоида плоскостью  $y = 0$  вдоль сечения плоскостью  $x = 0$ .

2°. Гиперболический параболоид. Из канонического уравнения (7.29)

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (7.29)$$

гиперболического параболоида вытекает, что *плоскости  $Oxz$  и  $Oyz$  являются плоскостями симметрии*. Ось  $Oz$  называется осью гиперболического параболоида.

Линии  $z = h$  пересечения гиперболического параболоида с плоскостями  $z = h$  представляют собой при  $h > 0$  гиперболы

$$\frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}} = 1 \quad (7.46)$$

с полуосами

$$a^* = a\sqrt{h}, \quad b^* = b\sqrt{h}. \quad (7.47)$$

а при  $h < 0$  — сопряженные гиперболы для гипербол (7.46)

$$\frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}} = 1 \quad (7.48)$$

с полуосами

$$a^* = a\sqrt{-h}, \quad b^* = b\sqrt{-h}. \quad (7.49)$$

Используя формулы (7.46)–(7.49), легко построить «карту» гиперболического параболоида (рис. 7.8). Отметим еще, что плоскость  $z = 0$  пересекает гиперболический параболоид по двум прямым:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (7.50)$$

Из формул (7.47) и (7.49) вытекает, что прямые (7.50) являются асимптотами гипербол (7.46) и (7.48).

Карта гиперболического параболоида дает представление о его пространственной форме (рис. 7.9). Как и в случае эллиптического параболоида, можно убедиться в том, что гиперболический параболоид может быть получен путем параллельного перемещения параболы, представляющей собой сечение плоскостью  $Oxz$  ( $Oyz$ ), когда ее вершина движется вдоль параболы, являющейся сечением параболоида плоскостью  $Oyz$  ( $Oxz$ ).

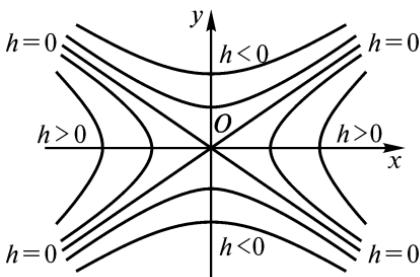


Рис. 7.8

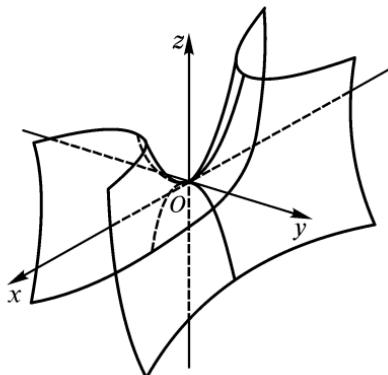


Рис. 7.9

#### 4. Конус и цилиндры второго порядка.

1°. *Конус второго порядка.* В предыдущем параграфе мы назвали вещественным конусом второго порядка поверхность  $S$ , определяемую уравнением (7.21):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Убедимся, что вещественный конус  $S$  образован прямыми линиями, проходящими через начало  $O$  координат. Естественно называть точку  $O$  вершиной конуса.

Для доказательства сформулированного утверждения, очевидно, достаточно установить, что прямая  $L$ , соединяющая произвольную, отличную от начала координат точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  конуса (7.21) и начало координат  $O$  (рис. 7.10), целиком располагается на конусе, т.е. ко-

ординаты  $(x, y, z)$  любой точки  $M$  прямой  $L$  удовлетворяют уравнению (7.21).

Так как точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  лежит на конусе (7.21), то

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0. \quad (7.51)$$

Координаты  $(x, y, z)$  любой точки  $M$  прямой  $L$  равны соответственно  $t x_0, t y_0, t z_0$ , где  $t$  — некоторое число. Подставляя эти значения для  $x, y$  и  $z$  в левую часть (7.21), вынося  $t^2$  за скобки и учитывая (7.51), мы убедимся в том, что  $M$  лежит на конусе. Таким образом, утверждение доказано. Представление о форме конуса может быть получено методом сечений. Легко убедиться, что сечения конуса плоскостями  $z = h$  представляют собой эллипсы с полуосами  $a^* = \frac{a}{c}h, b^* = \frac{b}{c}h$ .

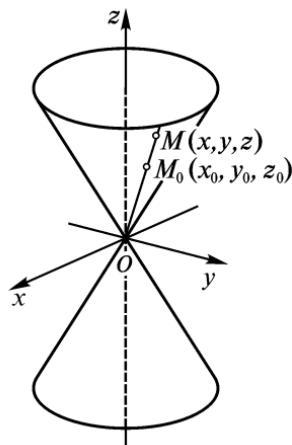


Рис. 7.10

2°. *Цилиндры второго порядка.* В процессе классификации поверхностей второго порядка нам встретились эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры. Уравнения этих поверхностей соответственно имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px^1). \quad (7.52)$$

Рисунок 7.11 дает представление о форме этих цилиндров.

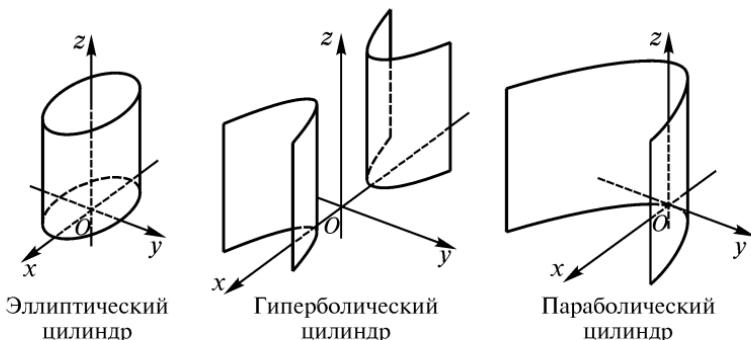


Рис. 7.11

<sup>1)</sup> Уравнение параболического цилиндра  $y = 2px$  легко получается из уравнения (7.33) путем переименования осей координат и простых арифметических операций.

Заметим, что цилиндры (7.52) состоят из прямых линий, параллельных оси  $Oz$ .

**5. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.** Кроме конуса и цилиндров, поверхностями второго порядка, состоящими из прямолинейных образующих, являются однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Более точно, справедливо следующее утверждение.

*Через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходят две различные прямые линии, целиком располагающиеся на указанных поверхностях.*

Таким образом, однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид покрыты двумя различными семействами прямолинейных образующих. На рисунках 7.12 и 7.13 показано расположение прямолинейных образующих соответственно на однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде.

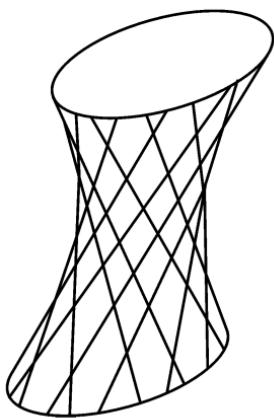


Рис. 7.12

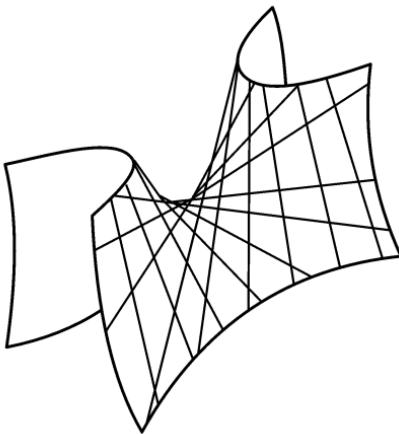


Рис. 7.13

Рассмотрим сначала однополостный гиперболоид, заданный своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.19)$$

Очевидно, любая прямая  $\Gamma_\lambda$ , определяемая как линия пересечения плоскостей

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \quad (7.53)$$

при любом отличном от нуля значении  $\lambda$  целиком располагается на гиперболоиде (7.19), ибо уравнение (7.19) представляет собой алгебраи-

ческое следствие уравнений (7.53) (уравнение (7.19) получается из уравнений (7.53) путем их перемножения). Прямая  $\Gamma_\infty: 1 - \frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$  соответствует уравнениям (7.53) при  $\lambda = \infty$ . Точно так же легко убедиться, что любая прямая  $\Gamma_\lambda^*$ , определяемая как линия пересечения плоскостей

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b},$$

куда включается прямая  $\Gamma_\infty^*: 1 + \frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ , соответствующая  $\lambda = \infty$ , при любом значении  $\lambda$  располагается на гиперболоиде (7.19).

Нетрудно заметить, что прямые  $\Gamma_\lambda$  и  $\Gamma_\lambda^*$  различны. Таким образом, на однополостном гиперболоиде имеются два различных семейства прямых  $\Gamma_\lambda$  и  $\Gamma_\lambda^*$ . Для завершения доказательства утверждения достаточно убедиться, что через любую точку гиперболоида проходит некоторая прямая семейства  $\Gamma_\lambda$  и некоторая прямая семейства  $\Gamma_\lambda^*$ . Мы ограничимся доказательством этого лишь для семейства  $\Gamma_\lambda$ , ибо для семейства  $\Gamma_\lambda^*$  доказательство аналогично.

Пусть точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  находится на гиперболоиде (7.20), так что

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \quad (7.54)$$

Если точка  $M_0$  лежит на прямой  $\Gamma_\infty$  или  $\Gamma_0$ , то утверждение очевидно. В противном случае выберем такое значение  $\lambda$ , чтобы числа  $x_0, y_0, z_0$  удовлетворяли первому из уравнений (7.53), и обозначим его через  $\lambda_0$ . Таким образом,

$$\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = \lambda_0 \left(1 - \frac{y_0}{b}\right). \quad (7.55)$$

Убедимся, что при выбранном значении  $\lambda = \lambda_0$  числа  $x_0, y_0, z_0$  удовлетворяют и второму из уравнений (7.53), что означает, что точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , принадлежащая гиперболоиду, принадлежит также и прямой (7.53). Допустим, что это не так. Тогда

$$\lambda_0 \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) \neq 1 + \frac{y_0}{b}. \quad (7.56)$$

Перемножая (7.55) и (7.56), получим неравенство

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \neq 1 - \frac{y_0^2}{b^2},$$

которое противоречит соотношению (7.54). Таким образом, прямая  $\Gamma_{\lambda_0}$  располагается на гиперболоиде и проходит через заданную его точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Совершенно аналогично рассуждая, можно убедиться, что гиперболический параболоид  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  покрыт двумя семействами прямых  $\Pi_\lambda$  и  $\Pi_\lambda^*$ , которые соответственно задаются уравнениями

$$z = \lambda \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \quad \lambda = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

и

$$z = \lambda \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right), \quad \lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad \text{где } \lambda \in (-\infty, \infty).$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ПРОБЛЕМЫ ОСНОВАНИЙ ГЕОМЕТРИИ И ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ

#### § 1. Аксиомы элементарной геометрии

Будем рассматривать три множества объектов любой природы: объекты первого множества будем именовать *точками* и обозначать большими латинскими буквами  $A, B, C, \dots$ , объекты второго множества будем именовать *прямыми* и обозначать малыми латинскими буквами  $a, b, c, \dots$ , объекты третьего множества будем именовать *плоскостями* и обозначать греческими буквами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .

Будем считать, что в рассматриваемых множествах каким-либо способом определены с оотношения между объектами, выражаемые тремя терминами: *принадлежит*, *лежит между* и *конгруэнтен*<sup>1)</sup>. Например, точка  $A$  принадлежит прямой  $a$  или плоскости  $\alpha$ ; точка  $B$ , принадлежащая прямой  $a$ , лежит между принадлежащими той же прямой точками  $A$  и  $C$ ; отрезок прямой  $a$ , ограниченный принадлежащими этой прямой точками  $A$  и  $B$ , конгруэнтен отрезку прямой  $b$ , ограниченному принадлежащими этой прямой точками  $C$  и  $D$ .

Будем требовать, чтобы указанные соотношения удовлетворяли формулируемым ниже в аддати аксиомам<sup>2)</sup>.

Все аксиомы разделяются на пять групп.

Группа I содержит восемь аксиом принадлежности.

Группа II содержит четыре аксиомы порядка.

Группа III содержит пять аксиом конгруэнтности.

Группа IV содержит две аксиомы непрерывности.

Группа V содержит одну аксиому параллельности.

Переходим к формулировке аксиом по группам. Одновременно будем указывать некоторые утверждения, вытекающие из формулируемых аксиом. Это поможет нам выяснить основные принципы логического развертывания геометрии и обосновать возможность установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек прямой и множеством всех вещественных чисел, т.е. обосновать метод координат.

#### 1. Аксиомы принадлежности.

**I. 1.** Каковы бы ни были две точки  $A$  и  $B$ , существует прямая  $a$ , которой принадлежат обе эти точки.

<sup>1)</sup> То есть «равен».

<sup>2)</sup> Во всем остальном как природа самих объектов, так и способ задания соотношений между этими объектами являются произвольными.

**I, 2.** Каковы бы ни были две различные точки  $A$  и  $B$ , существует не более одной прямой, которой принадлежат эти точки.

**I, 3.** Каждой прямой  $a$  принадлежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

Указанные три аксиомы исчерпывают список аксиом принадлежности планиметрии. Следующие пять аксиом вместе с указанными тремя аксиомами завершают список аксиом принадлежности стереометрии.

**I, 4.** Каковы бы ни были три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не принадлежащие одной прямой, существует плоскость  $\alpha$ , которой принадлежат эти три точки. Каждой плоскости принадлежит хотя бы одна точка.

**I, 5.** Каковы бы ни были три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не принадлежащие одной прямой, существует не более одной плоскости, которой принадлежат эти точки.

**I, 6.** Если две принадлежащие прямой  $a$  различные точки  $A$  и  $B$  принадлежат некоторой плоскости  $\alpha$ , то каждая принадлежащая прямой  $a$  точка принадлежит указанной плоскости.

**I, 7.** Если существует одна точка  $A$ , принадлежащая двум плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ , то существует по крайней мере еще одна точка  $B$ , принадлежащая этим плоскостям.

**I, 8.** Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

С целью использования привычной для нас геометрической терминологии договоримся отождествлять между собой следующие выражения: 1) «точка  $A$  принадлежит прямой  $a$  (плоскости  $\alpha$ )»; 2) «прямая  $a$  (плоскость  $\alpha$ ) проходит через точки  $A$ », 3) «точка  $A$  лежит на прямой  $a$  (на плоскости  $\alpha$ )»; 4) «точка  $A$  является точкой прямой  $a$  (плоскости  $\alpha$ )» и т.п.

С помощью указанных аксиом уже могут быть доказаны некоторые теоремы. Так, из аксиомы I, 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** Две различные прямые не могут иметь больше одной общей точки.

Представляем читателю доказательство следующих утверждений, вытекающих из аксиом I, 1–8<sup>1)</sup>.

**Теорема 2.** Две плоскости либо совсем не имеют общих точек, либо имеют общую прямую, на которой лежат все их общие точки.

**Теорема 3.** Плоскость и не лежащая на ней прямая не могут иметь больше одной общей точки.

**Теорема 4.** Через прямую и не лежащую на ней точку или через две различные прямые с общей точкой проходит одна и только одна плоскость.

---

<sup>1)</sup> В случае возникновения затруднений отсылаем читателя к книге Н.В. Ефимова «Высшая геометрия». — М.: Наука, 1978.

**Теорема 5.** Каждая плоскость содержит по крайней мере три точки.

## 2. Аксиомы порядка.

**II, 1.** Если точка  $B$  прямой  $a$  лежит между точками  $A$  и  $C$  той же прямой, то  $A, B$  и  $C$  — различные точки указанной прямой, причем  $B$  лежит также и между  $C$  и  $A$ .

**II, 2.** Каковы бы ни были две различные точки  $A$  и  $C$ , на определяемой ими прямой существует по крайней мере одна точка  $B$  такая, что  $C$  лежит между  $A$  и  $B$ .

**II, 3.** Среди любых трех различных точек одной прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Сформулированные три аксиомы относятся к расположению геометрических объектов на прямой и поэтому называются *линейными аксиомами порядка*. Формулируемая ниже последняя аксиома порядка относится к расположению геометрических объектов на *плоскости*. Для того чтобы сформулировать эту аксиому, введем понятие отрезка.

Пару различных точек  $A$  и  $B$  назовем *отрезком* и будем обозначать символом  $AB$  или  $BA$ . Точки  $A$  и  $B$  будем называть *концами* отрезка  $AB$ . Точки прямой, определяемой  $A$  и  $B$ , лежащие между  $A$  и  $B$ , будем называть *внутренними точками* или просто *точками* отрезка  $AB$ . Остальные точки указанной прямой будем называть *внешними* точками отрезка  $AB$ .

**II, 4 (аксиома Паша).** Если  $A, B$  и  $C$  — три точки, не лежащие на одной прямой, и  $a$  — некоторая прямая в плоскости, определяемой этими точками, не содержащая ни одной из указанных точек и проходящая через некоторую точку отрезка  $AB$ , то эта прямая проходит также либо через некоторую точку отрезка  $AC$ , либо через некоторую точку отрезка  $BC$ .

Подчеркнем, что из одних аксиом порядка II, 1–4 еще не вытекает, что любой отрезок имеет внутренние точки. Однако, привлекая еще аксиомы принадлежности I, 1–3, можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 6.** Каковы бы ни были две различные точки  $A$  и  $B$ , на прямой, ими определяемой, существует по крайней мере одна точка  $C$ , лежащая между  $A$  и  $B$ .

Предлагаем читателю, опираясь на аксиомы I, 1–8 принадлежности и аксиомы II, 1–4 порядка, последовательно доказать следующие утверждения<sup>1)</sup>.

**Теорема 7.** Среди любых трех различных точек одной прямой всегда существует одна точка, лежащая между двумя другими.

**Теорема 8.** Если точки  $A, B$  и  $C$  не принадлежат одной прямой и если некоторая прямая  $a$  пересекает<sup>2)</sup> какие-либо два из отрезков

<sup>1)</sup> Впрочем, доказательство всех приводимых ниже утверждений можно найти в книге Н.В. Ефимова «Высшая геометрия» (см. сноску на с. 206).

<sup>2)</sup> Под термином «прямая пересекает отрезок» мы подразумеваем, что указанная прямая содержит некоторую внутреннюю точку этого отрезка.

*AB, BC и AC, то эта прямая не пересекает третий из указанных отрезков.*

**Теорема 9.** *Если В лежит на отрезке AC и С — на отрезке BD, то В и С лежат на отрезке AD.*

**Теорема 10.** *Если С лежит на отрезке AD, а В — на отрезке AC, то В лежит также на отрезке AD, а С — на отрезке BD.*

**Теорема 11.** *Между любыми двумя различными точками прямой существует бесконечно много других ее точек.*

**Теорема 12.** *Пусть каждая из точек С и D лежит между точками A и B. Тогда если М лежит между С и D, то М лежит и между A и B.*

**Теорема 13.** *Если точки С и D лежат между точками A и B, то все точки отрезка CD принадлежат отрезку AB (в этом случае мы будем говорить, что отрезок CD лежит внутри отрезка AB).*

**Теорема 14.** *Если точка С лежит между точками A и B, то: 1) никакая точка отрезка AC не может быть точкой отрезка CB, 2) каждая отличная от С точка отрезка AB принадлежит либо отрезку AC, либо отрезку CB.*

Указанные утверждения позволяют *упорядочить множество точек любой прямой и выбрать на этой прямой направление.*

Будем говорить, что две различные точки *A* и *B* прямой *a* лежат по *разные стороны* (*по одну сторону*) от третьей точки *O* той же прямой, если точка *O* лежит (не лежит) между *A* и *B*. Из указанных выше утверждений вытекает следующая теорема.

**Теорема 15.** *Произвольная точка *O* каждой прямой *a* разбивает все остальные точки этой прямой на два непустых класса так, что любые две точки прямой *a*, принадлежащие одному и тому же классу, лежат по одну сторону от *O*, а любые две точки, принадлежащие разным классам, лежат по разные стороны от *O*.*

Таким образом, задание на любой прямой двух различных точек *O* и *E* определяет на этой прямой *луч* или *полупрямую OE*, обладающую тем свойством, что любая ее точка и точка *E* лежат по одну сторону от *O*.

Выбрав на прямой *a* две различные точки *O* и *E*, мы можем теперь определить *порядок следования* точек на прямой по следующему правилу: 1) если *A* и *B* — любые точки луча *OE*, то будем говорить, что *A* *предшествует* *B*, если *A* лежит между *O* и *B*; 2) будем говорить, что точка *O* *предшествует* любой точке луча *OE*; 3) будем говорить, что любая точка, не принадлежащая лучу *OE*, *предшествует* как точке *O*, так и любой точке, принадлежащей лучу *OE*; 4) если *A* и *B* — любые точки, не принадлежащие лучу *OE*, то мы будем говорить, что *A* *предшествует* *B*, если *B* лежит между *A* и *O*.

Легко проверить, что для выбранного порядка следования точек прямой *a* справедливо *свойство транзитивности*: если *A* *предшествует* *B*, а *B* *предшествует* *C*, то *A* *предшествует* *C*.

Аксиомы, приведенные выше, позволяют упорядочить и точки, принадлежащие произвольной плоскости  $\alpha$ . Предлагаем читателю доказать следующее утверждение<sup>1)</sup>.

**Теорема 16.** Каждая прямая  $a$ , принадлежащая плоскости  $\alpha$ , разделяет не лежащие на ней точки этой плоскости на два непустых класса так, что любые две точки  $A$  и  $B$  из разных классов определяют отрезок  $AB$ , содержащий точку прямой  $a$ , а любые две точки  $A$  и  $A'$  из одного класса определяют отрезок  $AA'$ , внутри которого не лежит ни одна точка прямой  $a$ .

В соответствии с утверждением этой теоремы мы будем говорить, что точки  $A$  и  $A'$  (одного класса) лежат в плоскости  $\alpha$  по одну сторону от прямой  $a$ , а точки  $A$  и  $B$  (разных классов) лежат в плоскости  $\alpha$  по разные стороны от прямой  $a$ .

### 3. Аксиомы конгруэнтности.

**III, 1.** Если  $A$  и  $B$  — две точки на прямой  $a$ ,  $A'$  — точка на той же прямой или на другой прямой  $a'$ , то по данную от точки  $A'$  сторону прямой  $a'$  найдется, и притом только одна, точка  $B'$  такая, что отрезок  $A'B'$  конгруэнтен отрезку  $AB$ . Каждый отрезок  $AB$  конгруэнтен отрезку  $BA$ <sup>2)</sup>.

**III, 2.** Если отрезки  $A'B'$  и  $A''B''$  конгруэнтны одному и тому же отрезку  $AB$ , то они конгруэнтны и между собой.

**III, 3.** Пусть  $AB$  и  $BC$  — два отрезка прямой  $a$ , не имеющие общих внутренних точек,  $A'B'$  и  $B'C'$  — два отрезка той же прямой или другой прямой  $a'$ , также не имеющие общих внутренних точек. Тогда, если отрезок  $AB$  конгруэнтен отрезку  $A'B'$ , а отрезок  $BC$  конгруэнтен отрезку  $B'C'$ , то отрезок  $AC$  конгруэнтен отрезку  $A'C'$ .

Сформулированные три аксиомы относятся к конгруэнтности отрезков. Для формулировки двух следующих аксиом нам понадобится понятие угла и его внутренних точек.

Пара полупрямых  $h$  и  $k$ , выходящих из одной и той же точки  $O$  и не лежащих на одной прямой, называется углом и обозначается символом  $\angle(h, k)$  или  $\angle(k, h)$ .

Если полупрямые  $h$  и  $k$  задаются двумя своими точками  $OA$  и  $OB$ , то мы будем обозначать угол символом  $\angle AOB$  или  $\angle BOA$ .

В силу теоремы 4 любые два луча  $h$  и  $k$ , составляющие угол  $\angle(h, k)$ , определяют, и притом единственную, плоскость  $\alpha$ .

<sup>1)</sup> В случае затруднений см. книгу Н. В. Ефимова «Высшая геометрия» (см. сноску на с. 206).

<sup>2)</sup> Из этой аксиомы вытекает возможность перемещения отрезка  $AB$  вдоль прямой, на которой он лежит (с сохранением его длины и направления). Будем говорить, что направленный отрезок  $CD$  получен в результате перемещения направленного отрезка  $AB$ , если отрезок  $CD$  конгруэнтен отрезку  $AB$  и если либо отрезок  $AD$  лежит внутри отрезка  $BC$ , либо отрезок  $BC$  лежит внутри отрезка  $AD$ .

*Внутренними точками*  $\angle(h, k)$  будем называть те точки плоскости  $\alpha$ , которые, во-первых, лежат по ту сторону от прямой, содержащей луч  $h$ , что и любая точка луча  $k$ , и, во-вторых, лежат по ту сторону от прямой, содержащей луч  $k$ , что и любая точка луча  $h$ .

**III, 4.** *Пусть даны*  $\angle(h, k)$  *на плоскости*  $\alpha$ , *прямая*  $a'$  *на этой же или на какой-либо другой плоскости*  $\alpha'$  *и задана определенная сторона*  $\alpha'$  *относительно прямой*  $a'$ . *Пусть*  $h'$  — *луч прямой*  $a'$ , *исходящий из некоторой точки*  $O'$ . *Тогда на плоскости*  $\alpha'$  *существует один и только один луч*  $k'$  *такой, что*  $\angle(h, k)$  *конгруэнтен*  $\angle(h', k')$ , *и при этом все внутренние точки*  $\angle(h', k')$  *лежат по заданную сторону от прямой*  $a'$ . *Каждый угол конгруэнтен самому себе.*

**III, 5.** *Пусть*  $A, B$  *и*  $C$  — *три точки, не лежащие на одной прямой,*  $A', B'$  *и*  $C'$  — *другие три точки, также не лежащие на одной прямой. Тогда, если отрезок*  $AB$  *конгруэнтен отрезку*  $A'B'$ , *отрезок*  $AC$  *конгруэнтен отрезку*  $A'C'$  *и*  $\angle BAC$  *конгруэнтен*  $\angle B'A'C'$ , *то*  $\angle ABC$  *конгруэнтен*  $\angle A'B'C'$  *и*  $\angle ACB$  *конгруэнтен*  $\angle A'C'B'$ .

Договоримся теперь о сравнении неконгруэнтных отрезков и углов.

Будем говорить, что отрезок  $AB$  *больше* отрезка  $A'B'$ , если на прямой, определяемой точками  $A$  и  $B$ , найдется лежащая между этими точками точка  $C$  такая, что отрезок  $AC$  конгруэнтен отрезку  $A'B'$ . Будем говорить, что отрезок  $AB$  *меньше* отрезка  $A'B'$ , если отрезок  $A'B'$  *больше* отрезка  $AB$ .

Тот факт, что отрезок  $AB$  *меньше* отрезка  $A'B'$  (конгруэнтен отрезку  $A'B'$ ), символически будем записывать так:

$$AB < A'B' \quad (AB = A'B').$$

Будем говорить, что  $\angle AOB$  *больше*  $\angle A'O'B'$ , если в плоскости, определяемой  $\angle AOB$ , найдется луч  $OC$ , все точки которого являются внутренними точками  $\angle AOB$ , такой, что  $\angle AOC$  конгруэнтен  $\angle A'O'B'$ . Будем говорить, что  $\angle AOB$  *меньше*  $\angle A'O'B'$ , если  $\angle A'O'B'$  *больше*  $\angle AOB$ .

С помощью аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности можно доказать целый ряд классических теорем элементарной геометрии. Сюда относятся: 1) три широко известные теоремы о конгруэнтности (равенстве) двух треугольников; 2) теорема о конгруэнтности вертикальных углов; 3) теорема о конгруэнтности всех прямых углов; 4) теорема о единственности перпендикуляра, опущенного из точки на прямую; 5) теорема о единственности перпендикуляра, восстановленного из данной точки прямой; 6) теорема о внешнем угле треугольника; 7) теорема о сравнении перпендикуляра и наклонной.

Предлагаем читателю самому последовательно доказать только что перечисленные теоремы.

**4. Аксиомы непрерывности.** С помощью аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности мы произвели сравнение отрезков, позволяющее заключить, каким из трех знаков  $<$ ,  $=$  или  $>$  связаны данные два отрезка.

Указанных аксиом, однако, недостаточно: 1) для обоснования возможности измерения отрезков, позволяющего поставить в соответствие каждому отрезку определенное вещественное число; 2) для обоснования того, что указанное соответствие является взаимно однозначным.

Для проведения такого обоснования следует присоединить к аксиомам I, II, III две аксиомы непрерывности.

**IV, 1 (аксиома Архимеда).** Пусть  $AB$  и  $CD$  — произвольные отрезки. Тогда на прямой, определяемой точками  $A$  и  $B$ , существует конечное число точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , расположенных так, что точка  $A_1$  лежит между  $A$  и  $A_2$ , точка  $A_2$  лежит между  $A_1$  и  $A_3$ , ..., точка  $A_{n-1}$  лежит между  $A_{n-2}$  и  $A_n$ , причем отрезки  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  конгруэнтны отрезку  $CD$  и точка  $B$  лежит между  $A$  и  $A_n$ .

**IV, 2 (аксиома линейной полноты).** Совокупность всех точек произвольной прямой  $a$  нельзя пополнить новыми объектами (точками) так, чтобы: 1) на дополненной прямой были определены соотношения «лежит между» и «конгруэнтен», определен порядок следования точек и справедливы аксиомы конгруэнтности III, 1–3 и аксиома Архимеда IV, 1; 2) по отношению к прежним точкам прямой определенные на дополненной прямой соотношения «лежит между» и «конгруэнтен» сохраняли старый смысл.

Мы сейчас докажем, что присоединение к аксиомам I, 1–3, II и III, 1–3 аксиомы Архимеда IV, 1 позволяет поставить в соответствие каждой точке произвольной прямой  $a$  определенное вещественное число  $x$ , называемое координатой этой точки, а присоединение еще и аксиомы линейной полноты IV, 2 позволяет утверждать, что координаты всех точек прямой  $a$  исчерпывают множество всех вещественных чисел.

**5. Обоснование метода координат.** Прервем на время изложение аксиом геометрии, чтобы на основании уже изложенных аксиом дать обоснование метода координат на прямой.

Сначала докажем следующее утверждение.

**Первая основная теорема.** Аксиомы I, 1–3, II, III, 1–3 и аксиома IV, 1 Архимеда позволяют ввести на любой прямой  $a$  координаты так, что выполнены следующие требования:

1°. Каждой точке  $M$  прямой  $a$  соответствует определенное вещественное число  $x$ , называемое ее координатой.

2°. Разным точкам соответствуют разные координаты, причем точка  $M_2$  лежит между  $M_1$  и  $M_3$  тогда и только тогда, когда либо  $x_1 < x_2 < x_3$ , либо  $x_1 > x_2 > x_3$  (здесь  $x_1, x_2$  и  $x_3$  — координаты точек  $M_1, M_2$  и  $M_3$  соответственно).

3°. Отрезки  $M_1M_2$  и  $M'_1M'_2$  конгруэнтны тогда и только тогда, когда  $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$  (здесь  $x_1, x_2, x'_1$  и  $x'_2$  — координаты точек  $M_1, M_2, M'_1$  и  $M'_2$  соответственно).

4°. Если вещественные числа  $x_1$  и  $x_2$  представляют собой координаты некоторых точек, то и вещественное число  $x_1 \pm x_2$  представляет собой координату некоторой точки.

Доказательство. Выберем на прямой  $a$  произвольную точку  $O$  в качестве начала координат и произвольную отличную от  $O$  точку  $E$  в качестве точки с координатой единица. Пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $a$ . Ради определенности предположим, что  $M$  лежит с той же стороны от  $O$ , что и  $E$  (аксиомы I, 1–3, II и III, 1–3 обеспечивают возможность установления порядка следования точек на прямой  $a$ ). Каковы бы ни были целое положительное число  $n$  и целое неотрицательное число  $m$ , мы можем, откладывая отрезок  $OM$  в одном и том же направлении последовательно  $n$  раз, построить отрезок  $n \cdot OM$  и аналогично построить отрезок  $m \cdot OE$  (возможность откладывать конгруэнтный отрезок в любом направлении и брать сумму конгруэнтных отрезков, не имеющих общих внутренних точек, вытекает из аксиом I, 1–3, II и III, I–3).

В силу только что упомянутых аксиом любые два отрезка мы можем сравнивать. Стало быть, и отрезки  $n \cdot OM$  и  $m \cdot OE$  при различных  $n$  и  $m$  будут связаны либо знаком  $<$ , либо знаком  $\geq$ .

Рассмотрим все возможные рациональные числа  $m/n$ . Их можно разбить на два класса, относя к *верхнему классу* те из них, для которых

$$n \cdot OM < m \cdot OE, \quad (\text{П.1})$$

и к *нижнему классу* те, для которых

$$n \cdot OM \geq m \cdot OE. \quad (\text{П.2})$$

Убедимся в том, что эти два класса однозначно определяют вещественное число  $x$ , которое мы и поставим в соответствие точке  $M$  и назовем ее *координатой*.

Сначала убедимся в том, что *любое рациональное число из верхнего класса больше любого рационального числа из нижнего класса*. Приводя, любые два рациональных числа из разных классов к общему знаменателю и обозначая последний через  $n$ , мы из (П.1) и (П.2) получим, что числитель числа из верхнего класса больше числителя числа из нижнего класса. Отсюда и вытекает, что число из верхнего класса больше числа из нижнего класса.

Далее заметим, что *оба класса не являются пустыми*: нижнему классу заведомо принадлежит рациональное число нуль, а для установления непустоты верхнего класса достаточно положить  $n = 1$  и заметить, что аксиома Архимеда IV, 1 гарантирует существование такого натурального числа  $m$ , что при  $n = 1$  справедливо неравенство (П.1).

В силу теоремы о точных гранях непустого ограниченного сверху (снизу) множества<sup>1)</sup> существует точная верхняя грань  $\underline{x}$  рациональных чисел нижнего класса и точная нижняя грань  $\bar{x}$  рациональных чисел верхнего класса.

Убедимся в том, что эти грани  $\underline{x}$  и  $\bar{x}$  заключены между как угодно близкими рациональными числами и поэтому совпадают. Достаточно доказать, что существуют как угодно близкие числа разных классов, а это вытекает из того, что для как угодно большого номера  $n$  найдется номер  $m$  такой, что рациональное число  $(m+1)/n$  принадлежит верхнему классу, а рациональное число  $m/n$  принадлежит нижнему классу<sup>2)</sup>.

Положим теперь  $x = \underline{x} = \bar{x}$  и поставим вещественное число  $x$  в соответствие точке  $M$ , назвав его координатой этой точки. Требование 1° обосновано.

*Пусть теперь  $M_1$  и  $M_2$  — какие угодно две точки, лежащие по ту же сторону от  $O$ , что и  $E$ , и такие, что  $M_1$  лежит между  $O$  и  $M_2$ , т.е.  $OM_2 > OM_1$ . Докажем, что если  $x_1$  и  $x_2$  — координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  соответственно, то  $x_2 > x_1$ .*

Выберем номер  $n$  настолько большим, чтобы разность отрезков  $OM_2$  и  $OM_1$ , повторенная  $n$  раз, превзошла отрезок  $OE$  (это можно сделать в силу все той же аксиомы Архимеда IV, 1). Тогда, обозначая через  $m$  наибольшее целое число, для которого

$$n \cdot OM_1 \geq m \cdot OE,$$

мы получим, что

$$n \cdot OM_1 < (m+1) \cdot OE, \quad (\text{П.3})$$

и в силу сделанного выше выбора номера  $n$

$$n \cdot OM_2 > (m+1) \cdot OE. \quad (\text{П.4})$$

Из (П.3) заключаем, что рациональное число  $(m+1)/n$  относится к верхнему классу по отношению к точке  $M_1$ , т.е.  $(m+1)/n \geq x_1$ , а из (П.4) заключаем, что то же самое рациональное число  $(m+1)/n$  относится к нижнему классу по отношению к точке  $M_2$ , и поэтому  $x_2 > (m+1)/n$ . Тем самым неравенство  $x_2 > x_1$  доказано.

Если теперь мы имеем на прямой  $a$  какое угодно число точек, идущих в порядке  $O, M_1, M_2, \dots, M_n$  (в сторону  $E$ )<sup>3)</sup>, то из только что доказанного утверждения для координат этих точек получим  $O < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Тем самым для случая расположения точек по ту же сторону от  $O$ , что и  $E$ , требование 2° доказано. Для точек  $M$ , лежащих на прямой  $a$  по

<sup>1)</sup> См. вып. 1, теорему 2.1.

<sup>2)</sup> Тот факт, что для любого номера  $n$  найдется указанный номер  $m$  (такой, что справедливо (П.1)), снова вытекает из аксиомы Архимеда IV, 1.

<sup>3)</sup> В дальнейшем эта сторона именуется *положительной*.

другую сторону от  $O$ , совершенно аналогично вводятся отрицательные координаты и повторением тех же рассуждений мы устанавливаем требования  $1^\circ$  и  $2^\circ$  в общем виде.

Для установления требований  $3^\circ$  и  $4^\circ$  мы сначала докажем, что если на прямой  $a$  в положительную сторону от  $O$  взяты точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M$ , причем  $M_1$  лежит между  $O$  и  $M$  и отрезки  $M_1M$  и  $OM_2$  конгруэнтны, то  $x = x_1 + x_2$  (здесь  $x$ ,  $x_1$  и  $x_2$  — координаты точек  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$  соответственно).

Возьмем из нижних классов, отвечающих координатам  $x_1$  и  $x_2$ , два произвольных рациональных числа, обозначив их (после приведения к общему знаменателю  $n$ ) соответственно через  $m_1/n$  и  $m_2/n$ . Тогда

$$n \cdot OM_1 \geq m_1 \cdot OE, \quad n \cdot OM_2 \geq m_2 \cdot OE.$$

Складывая последние два неравенства, получим

$$n \cdot OM \geq (m_1 + m_2) \cdot OE. \quad (\text{П.5})$$

Точнее говоря, в левой части (П.5) мы получим сумму  $n$  раз отложенного отрезка  $OM_1$  и  $n$  раз отложенного отрезка  $OM_2$ , но после перегруппировки слагаемых мы и получим  $n$  раз повторенную сумму отрезков  $OM_1$  и  $OM_2$ , т.е.  $n \cdot OM$ <sup>1)</sup>.

Из неравенства (П.5) заключаем, что рациональное число  $\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$  принадлежит нижнему классу, отвечающему координате  $x$ .

Совершенно аналогично, взяв любые рациональные числа  $m_1/n$  и  $m_2/n$  из верхних классов, отвечающих координатам  $x_1$  и  $x_2$ , мы убедимся в том, что рациональное число  $\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$  принадлежит верхнему классу, отвечающему координате  $x$ .

Но тогда из определения суммы вещественных чисел и из того, что рациональные числа как из верхнего, так и из нижнего классов как угодно точно приближают соответствующую координату, мы получим, что вещественное число  $x$  равно сумме  $x_1 + x_2$ .

Тем самым нами доказано, что отложить от точки  $M_1$  с координатой  $x_1$  (в положительную сторону) отрезок  $OM_2$  — это все равно, что построить точку  $M$  с координатой  $x$ , удовлетворяющей условию  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_2 > 0$  — координата точки  $M_2$ .

Это утверждение мы доказали для случая  $x_1 > 0$ , но легко распространить его и на общий случай (предоставляем это читателю). Из дока-

<sup>1)</sup> То, что в геометрической сумме отрезков мы можем, не меняя суммы, переставлять слагаемые, вытекает из следующих соображений. Достаточно убедиться в возможности перестановки для двух слагаемых, а это непосредственно вытекает из аксиомы III, 3, в формулировке которой ничего не сказано о порядке, в котором «приставляются» друг к другу слагаемые отрезки  $A'B'$  и  $B'C'$ . При любом их порядке сумма  $A'C'$  конгруэнтна отрезку  $AC$ .

занного утверждения сразу же вытекает требование  $4^\circ$ , а для доказательства утверждения  $3^\circ$  достаточно заметить, что откладывание данного отрезка равносильно добавлению к координате точки постоянного слагаемого. Первая основная теорема полностью доказана<sup>1)</sup>.

**З а м е ч а н и е.** Особо подчеркнем, что в первой основной теореме *не утверждается*, что каждому вещественному числу  $x$  соответствует определенная точка на прямой (т.е. не утверждается, что соответствие между точками прямой и вещественными числами является взаимно однозначным).

Мы сейчас увидим, что это невозможно доказать, опираясь только на аксиомы I, 1–3, II, III, 1–2 и IV, 1 и не привлекая аксиому линейной полноты IV, 2.

**Вторая основная теорема.** *Пусть справедливы аксиома I, 1–3, II, III, 1–3, IV, 1 и на прямой  $a$  введены координаты. Тогда, для того чтобы каждому вещественному числу  $x$  отвечала некоторая точка прямой  $a$ , т.е. для того, чтобы между всеми точками прямой  $a$  и всеми вещественными числами существовало взаимно однозначное соответствие, необходимо и достаточно, чтобы была справедлива аксиома линейной полноты IV, 2.*

**Доказательство.** 1) **Достаточность.** Докажем, что если существуют вещественные числа  $x$ , которым не отвечает никакая точка прямой  $a$ , то аксиома IV, 2 заведомо несправедлива.

Пусть существуют указанные вещественные числа  $x$ . Каждое из них мы назовем *новой точкой* и присоединим все новые точки к совокупности прежних точек прямой  $a$ .

На пополненной прямой (назовем ее  $\tilde{a}$ ) уже каждому вещественному числу отвечает точка, и обратно.

Определим на  $\tilde{a}$  соотношения «лежит между» и «конгруэнтен». Будем говорить, что точка  $M_2$  прямой  $a$  лежит между  $M_1$  и  $M_3$ , если либо  $x_1 < x_2 < x_3$ , либо  $x_1 > x_2 > x_3$ , где под  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  нужно понимать координату соответствующей точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ , если эта точка прежняя, и саму эту точку, если она новая. Очевидно, что в применении к прежним точкам определенное на  $\tilde{a}$  соотношение «лежит между» сохраняет старый смысл.

Будем говорить, что отрезок  $M_1M_2$  прямой  $\tilde{a}$  конгруэнтен отрезку той же прямой  $M'_1M'_2$ , если  $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$ , где под  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x'_1$  и  $x'_2$  нужно понимать координату соответствующей точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M'_1$  и  $M'_2$ , если эта точка прежняя, и саму эту точку, если она новая. Снова очевидно, что в применении к прежним точкам определенное на  $\tilde{a}$  соотношение «конгруэнтен» сохраняет старый смысл.

---

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что при доказательстве первой основной теоремы аксиомы I, 1–3 и II использовались лишь для установления порядка следования точек на прямой.

Очевидно также, что для точек пополненной прямой  $\tilde{a}$  определен порядок следования и справедливы аксиомы конгруэнтности III, 1–3 и аксиома Архимеда IV, 1.

Тем самым мы установили возможность пополнения прямой, противоречащую аксиоме линейной полноты IV, 2.

Достаточность доказана.

**2. Н е о б х о д и м о с т ь.** Докажем, что если аксиома линейной полноты IV, 2 не имеет места, то координаты всех точек прямой  $a$  не исчерпывают всех вещественных чисел.

Если аксиома VI, 2 не имеет места, то существует пополненная новыми точками прямая  $\tilde{a}$ , для всех точек которой определены соотношения «лежит между» и «конгруэнтен», определен порядок следования и справедливы аксиомы конгруэнтности III, 1–3 и аксиома Архимеда IV, 1. В силу первой основной теоремы на пополненной прямой  $\tilde{a}$  можно ввести координаты (в этой теореме аксиомы I, 1–3 и II использовались лишь в форме возможности установления на данной прямой порядка следования точек).

Мы получим, что каждой точке пополненной прямой  $\tilde{a}$  отвечает определенное вещественное число, причем разным точкам отвечают различные вещественные числа. Но отсюда следует, что те вещественные числа, которые отвечают точкам, производящим пополнение, не будут соответствовать ни одной точке исходной прямой  $a$ . Необходимость доказана. Вторая основная теорема полностью доказана.

**6. Аксиома параллельности.** Самая последняя аксиома играет в геометрии фундаментальную роль, определяя разделение геометрии на две логически непротиворечивые и взаимно исключающие друг друга системы: евклидову и неевклидову геометрии.

В геометрии Евклида эта аксиома формулируется так:

**V.** Пусть  $a$  — произвольная прямая и  $A$  — точка, лежащая вне прямой  $a$ , тогда в плоскости  $\alpha$ , определяемой точкой  $A$  и прямой  $a$ , существует не более одной прямой, проходящей через  $A$  и не пересекающей  $a$ .

Долгое время геометры выясняли вопрос о том, не является ли аксиома параллельности V следствием всех остальных аксиом I, II, III, IV. Этот вопрос был решен Лобачевским<sup>1)</sup>, который доказал, что аксиома V не является следствием аксиом I–IV.

По-другому результат Лобачевского можно сформулировать так: если к аксиомам I–IV присоединить утверждение, отрицающее справедливость аксиомы V, то следствия всех этих положений будут составлять логически непротиворечивую систему (неевклидову геометрию Лобачевского).

---

<sup>1)</sup> Николай Иванович Лобачевский — великий русский математик (1793–1856).

Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского излагается в § 3 настоящего Приложения.

Здесь же мы отметим, что систему следствий, вытекающих из одних только аксиом I–IV, обычно называют *абсолютной геометрией*. Абсолютная геометрия является общей частью как евклидовой, так и неевклидовой геометрий, ибо все предложения, которые могут быть доказаны только с помощью аксиом I–IV, верны как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского (примеры таких предложений читатель найдет в предыдущих пунктах).

## § 2. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Евклида

Наметим схему доказательства непротиворечивости всех пяти групп аксиом геометрии Евклида.

Ради простоты ограничимся доказательством непротиворечивости планиметрии Евклида, т.е. установим непротиворечивость системы аксиом I, I–3, II–V.

Для доказательства достаточно построить какую-нибудь конкретную реализацию совокупности объектов, удовлетворяющих всем указанным аксиомам.

Мы построим так называемую *декартову* или *арифметическую* реализацию совокупности объектов, удовлетворяющих аксиомам планиметрии. Тем самым вопрос о непротиворечивости планиметрии Евклида будет сведен к вопросу о непротиворечивости арифметики.

Назовем *точкой* любую упорядоченную пару вещественных чисел  $(x, y)$ , а *прямой* — отношение трех вещественных чисел  $(u : v : w)$  при условии, что  $u^2 + v^2 \neq 0$ <sup>1)</sup>.

Будем говорить, что точка  $(x, y)$  принадлежит прямой  $(u : v : w)$ , если справедливо равенство

$$ux + vy + w = 0. \quad (\text{П.6})$$

Докажем справедливость аксиом I, 1–3.

Каковы бы ни были две различные точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , прямая <sup>2)</sup>  $(y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1 y_2 - x_2 y_1)$ , как легко убедиться, содержит эти точки (аксиома I, 1).

Далее из уравнений

$$ux_1 + vy_1 + w = 0, \quad ux_2 + vy_2 + w = 0$$

<sup>1)</sup> Отношением  $(u : v : w)$  называется совокупность трех вещественных чисел  $u, v, w$  при условии, что при любом  $\lambda \neq 0$  совокупности  $u, v, w$  и  $\lambda u, \lambda v, \lambda w$  рассматриваются как тождественные.

<sup>2)</sup> Так как точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  различны, то  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \neq 0$ .

вытекает, что  $u : v : w = (y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1 y_2 - x_2 y_1)$ , так что точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  определяется *только одна* прямая  $(u : v : w)$  (аксиома I, 2).

Наконец, справедливость аксиомы I, 3 вытекает из того, что уравнение (П.6) с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  всегда имеет бесчисленное множество решений и не всякая пара  $x$  и  $y$  есть решение уравнения (П.6).

Теперь определим соотношение «лежит между». Так как  $u^2 + v^2 \neq 0$ , то либо  $u \neq 0$ , либо  $v \neq 0$ .

Если  $v \neq 0$ , то будем говорить, что точка  $(x_2, y_2)$  *лежит между*  $(x_1, y_1)$  и  $(x_3, y_3)$ , если либо  $x_1 < x_2 < x_3$ , либо  $x_1 > x_2 > x_3$ . Если же  $v = 0$  (при этом *заведомо*  $u \neq 0$ ), то будем говорить, что точка  $(x_2, y_2)$  *лежит между*  $(x_1, y_1)$  и  $(x_3, y_3)$ , если либо  $y_1 < y_2 < y_3$ , либо  $y_1 > y_2 > y_3$ .

Справедливость аксиом II, 1–3 проверяется тривиально. Несколько кропотливую проверку аксиомы Паша II, 4 мы опустим.

Обратимся теперь к определению соотношения «конгруэнтен». С этой целью рассмотрим так называемое *ортогональное преобразование*. Преобразование

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2, \quad (\text{П.7})$$

переводящее произвольную точку  $(x, y)$  в определенную точку  $(x', y')$ , называется *ортогональным*, если выполнены соотношения

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \quad (\text{П.8})$$

Легко доказать, что всякой ортогональное преобразование (П.7), (П.8) можно представить в одной из следующих форм: либо в виде

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1, \quad y' = \beta x + \alpha y + c_2, \quad (\text{П.9})$$

либо в виде

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1, \quad y' = \beta x - \alpha y + c_2, \quad (\text{П.10})$$

причем в обоих случаях  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Преобразования (П.9) и (П.10) обычно называют *ортогональными преобразованиями* соответственно *первого* и *второго рода*.

Пусть даны произвольная прямая  $(u : v : w)$  и на ней некоторая точка  $(x_0, y_0)$ , так что  $ux_0 + vy_0 + w = 0$ .

Легко убедиться в том, что совокупность точек  $(x, y)$ , где

$$x = x_0 + vt, \quad y = y_0 - ut, \quad (\text{П.11})$$

принадлежит прямой  $(u : v : w)$  для любого вещественного числа  $t$ . Далее ясно, что при  $t > 0$  все указанные точки  $(x, y)$  лежат по одну сторону от точки  $(x_0, y_0)$ , а при  $t < 0$  эти точки лежат по другую сторону от  $(x_0, y_0)$ .

Иными словами, уравнения (П.11) при всевозможных положительных  $t$  определяют все точки полупрямой, исходящей из точки  $(x_0, y_0)$  и лежащей на прямой  $(u : v : w)$ . Эту полупрямую мы будем обозначать символом  $(x_0, y_0, v, -u)$ .

Оказывается, всякое ортогональное преобразование (как первого, так и второго рода) переводит любую полупрямую снова в полупрямую. Более точно, справедливо следующее утверждение: *ортогональное преобразование* (П.9) или (П.10) *переводит полупрямую*  $(x_0, y_0, v, -u)$  в *полупрямую*  $(x'_0, y'_0, v', -u')$ , где для случая преобразования (П.9)

$$x'_0 = \alpha x_0 - \beta y_0 + c_1, \quad y'_0 = \beta x_0 + \alpha y_0 + c_2,$$

$$v' = \alpha v + \beta u, \quad u' = -\beta v - \alpha u,$$

и для случая преобразования (П.10)

$$x'_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 + c_1, \quad y'_0 = \beta x_0 - \alpha y_0 + c_2,$$

$$v' = \alpha v - \beta u, \quad u' = -\beta v - \alpha u,$$

Теперь назовем отрезок  $AB$  *конгруэнтным* отрезку  $A'B'$ , если существует ортогональное преобразование, которое переводит точку  $A$  в точку  $A'$ , а точку  $B$  в точку  $B'$ . Угол  $\angle(h, k)$  назовем *конгруэнтным*  $\angle(h', k')$ , если существует ортогональное преобразование, переводящее полупрямую  $h$  в полупрямую  $h'$  и полупрямую  $k$  в полупрямую  $k'$ .

Далее нужно перейти к проверке аксиом III, 1–5. Аксиома III, 2 вытекает из групповых свойств ортогонального преобразования, в силу которых как последовательное проведение двух ортогональных преобразований, так и преобразование, обратное к ортогональному, снова являются ортогональными преобразованиями. Проверка остальных аксиом группы III требует кропотливой техники и использования указанного выше утверждения, и мы ее опустим.

Что же касается аксиом непрерывности, то аксиома Архимеда IV, 1 проверяется непосредственно, а справедливость аксиомы полноты IV, 2 вытекает из того, что между всеми точками любой прямой и всеми вещественными числами можно установить взаимно однозначное соответствие (см. вторую основную теорему из п. 5 § 1).

Нам остается еще проверить справедливость аксиомы параллельности V. Пусть  $(u : v : w)$  — произвольная прямая и  $(x_0, y_0)$  — точка вне ее, так что  $ux_0 + vy_0 + w \neq 0$ .

Пусть  $(u' : v' : w')$  — прямая, проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ , т.е. удовлетворяющая условию

$$u'x_0 + v'y_0 + w' = 0. \quad (\text{П. 12})$$

Поскольку эта прямая не пересекает прямую ( $u : v : w$ ), должна быть несовместна система уравнений

$$u'x + v'y + w' = 0, \quad ux + vy + w = 0. \quad (\text{П. 13})$$

Из несовместности системы (П.13) заключаем, что  $u' : u = v' : v$ , или, что то же самое,  $u' = \lambda u$ ,  $v' = \lambda v$ , где  $\lambda$  — некоторое число. Но тогда из (П.12) получим  $w' = -\lambda(ux_0 + vy_0)$ , т.е.  $u' : v' : w' = u : v : -(ux_0 + vy_0)$ . Итак, отношения  $u' : v' : w'$  однозначно определены, т.е. существует единственная прямая ( $u' : v' : w'$ ), проходящая через  $(x_0, y_0)$  и не пересекающая прямой ( $u : v : w$ ).

Тем самым доказательство непротиворечивости планиметрии Евклида завершено.

**З а м е ч а н и е.** Аналогично доказывается непротиворечивость стереометрии Евклида. Для этого мы называем *точкой* любую упорядоченную тройку вещественных чисел  $(x, y, z)$ , *прямой* — совокупность всех троек  $(x, y, z)$ , элементы  $x, y, z$  которых связаны системой двух линейных уравнений, *плоскостью* — совокупность всех троек  $(x, y, z)$ , элементы  $x, y, z$  которых удовлетворяют одному линейному уравнению.

### § 3. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского

Для простоты ограничимся доказательством непротиворечивости планиметрии Лобачевского, т.е. построим конкретную реализацию совокупности объектов, удовлетворяющих аксиомам I, I–III, II–IV и аксиоме, отрицающей справедливость V. Для построения указанной реализации мы будем опираться на уже установленную нами непротиворечивость планиметрии Евклида, т.е. сведем вопрос о непротиворечивости планиметрии Лобачевского к вопросу о непротиворечивости планиметрии Евклида. Излагаемая в этом параграфе модель принадлежит А. Пуанкаре<sup>1)</sup>.

Рассмотрим на евклидовой плоскости горизонтальную прямую  $x$  и опирающуюся на нее *верхнюю* полуплоскость.

Все точки этой верхней полуплоскости мы назовем *неевклидовыми точками*, а все лежащие в верхней полуплоскости полуокружности с центром на прямой  $x$  и все вертикальные полу прямые, исходящие из точек прямой  $x$ , назовем *неевклидовыми прямыми* (кстати, указанные полу прямые удобно рассматривать как полуокружности бесконечно большого радиуса).

---

<sup>1)</sup> Анри Пуанкаре — французский математик (1854–1912).

Мы определим между неевклидовыми точками и неевклидовыми прямыми соотношения «принадлежит», «лежит между» и «конгруэнтен» и убедимся в справедливости в с е х аксиом а б с о л у т н о й г е о м е т р и и (т.е. аксиом I, 1–3, II–IV). После этого мы покажем, что в построенной модели справедлива аксиома параллельности Лобачевского (т.е. отрицание аксиомы V Евклида).

Мы будем говорить, что неевклидова точка  $A$  принадлежит неевклидовой прямой  $a$ , если точка верхней полуплоскости  $A$  лежит на полуокружности  $a$ .

Справедливость аксиом I, 1–3 устанавливается тривиально. Так, аксиомы I, 1 и I, 2 эквивалентны утверждению, что через две точки верхней полуплоскости можно провести только одну окружность, имеющую центр на прямой  $x$ . Аксиома I, 3 эквивалентна утверждению, что на любой полуокружности имеются по крайней мере две точки и имеется хотя бы одна точка вне этой полуокружности.

Перейдем к установлению соотношения «лежит между». Пусть  $A, B, C$  — три точки неевклидовой прямой, изображаемой полуокружностью  $a$ . Будем говорить, что точка  $B$  (в неевклидовом смысле) лежит между  $A$  и  $C$ , если  $B$  на полуокружности  $a$  лежит между  $A$  и  $C$  (в евклидовом смысле).

При таком определении соотношения «лежит между» легко устанавливается справедливость аксиом II, 1–3. Впрочем, порядку следования точек на неевклидовой прямой, изображаемой полуокружностью  $a$ , можно придать и более наглядный вид. Выпуская из центра  $O$  полуокружности  $a$  всевозможные лучи, мы с помощью этих лучей можем взаимно однозначно спроектировать все точки полуокружности  $a$  на все точки некоторой прямой  $y$ , параллельной  $x$  и лежащей выше полуокружности  $a$ .

Тогда порядок следования точек неевклидовой прямой  $a$  соответствует порядку следования образов этих точек на прямой  $y$ . Попутно докажем, что все точки любой неевклидовой прямой  $a$  находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством всех вещественных чисел.

Нам еще следует проверить аксиому II, 4 Паша, но доказательство этой аксиомы является наглядно вполне очевидным, и мы его опустим.

Теперь мы перейдем к определению соотношения «конгруэнтен». В надлежащем его определении и состоит остроумие модели Пуанкаре. Не вдаваясь в детали, остановимся на основных идеях определения этого соотношения.

Введем в рассмотрение специальное преобразование евклидовой плоскости, известное под названием *инверсии*. Пусть фиксирована произвольная окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $A$ . *Инверсией относительно указанной окружности* называется такое преобразование

точек плоскости, при котором любая, отличная от  $A$  точка плоскости  $M$  переходит в точку  $M'$ , лежащую на одном с точкой  $M$  луче, выходящем из  $A$ , и такую, что выполнено условие  $AM' \cdot AM = r^2$ .

Назовем неевклидов отрезок  $AB$  *конгруэнтным* неевклидову отрезку  $A'B'$ , если существует такая последовательность инверсий, что их произведение отображает евклидову круговую дугу  $AB$  в круговую дугу  $A'B'$ .

*Неевклидовым углом* будем называть совокупность двух неевклидовых полупрямых, исходящих из одной точки.

Назовем неевклидов угол  $\angle(h', k')$  *конгруэнтным* неевклидову углу  $\angle(h, k)$ , если существует такая последовательность инверсий, что их произведение отображает стороны первого угла на стороны второго.

После принятых определений проверка аксиом конгруэнтности III, 1–5 превращается в техническую работу, которую мы можем опустить.

Проверка аксиомы Архимеда IV, 1 также не вызывает никаких трудностей и использует лишь свойства инверсий.

Последняя аксиома абсолютной геометрии — аксиома полноты IV, 2 справедлива вследствие того, что (как это установлено выше) между всеми точками любой «неевклидовой прямой» и всеми вещественными числами можно установить взаимно однозначное соответствие (см. вторую основную теорему из п. 5 § 1).

Итак, для нашей модели справедливы все аксиомы абсолютной геометрии (I, 1–3, II–IV).

Как же обстоит дело с аксиомой параллельности V? Возьмем любую «неевклидову прямую», изображаемую полуокружностью  $a$ , и любую точку  $A$ , ей не принадлежащую. Легко проверить, что через точку  $A$  проходит бесконечно много различных полуокружностей, имеющих центры на прямой  $x$  и не имеющих общих точек с полуокружностью  $a$ .

Это означает, что в рассматриваемой нами модели справедлива аксиома параллельности Лобачевского.

Тем самым мы завершили доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского и одновременно показали, что аксиома параллельности V Евклида не является следствием аксиом I, 1–3, II–IV абсолютной геометрии.

#### **§ 4. Заключительные замечания о проблемах аксиоматики**

При изучении любой системы аксиом естественно возникают следующие три проблемы: 1) проблема непротиворечивости системы аксиом; 2) проблема минимальности системы аксиом (выясняющая вопрос о том, не является ли каждая из рассматриваемых аксиом следствием остальных); 3) проблема полноты системы аксиом (принято систему аксиом

называть *полной*, если между элементами двух любых ее реализаций можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее установленные между элементами соотношения).

В § 3 и 4 мы установили непротиворечивость системы аксиом как геометрии Евклида, так и геометрии Лобачевского.

Проблема минимальности системы аксиом геометрии является очень трудоемкой и требует обстоятельного исследования. Примером такого исследования является установленный нами факт, что аксиома параллельности V не является следствием остальных аксиом.

Полнота системы аксиом геометрии устанавливается посредством введения для любой реализации координатной системы и последующего установления взаимно однозначного соответствия (с сохранением всех соотношений) между точками, прямыми и плоскостями данной реализации (в координатной записи) и декартовой реализации, изученной в § 2.

Учебное издание

*ИЛЬИН Владимир Александрович  
ПОЗНЯК Эдуард Генрихович*

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Серия: «Курс высшей математики и математической физики»

Редактор *Д.А. Миртова*  
Оригинал-макет: *О.А. Пелипенко*

ЛП № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 04.06.04.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 14. Уч.-изд. л. 15,76. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерperiодика»  
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru)  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3  
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс: (8172) 72-60-72  
E-mail: [form.pfp@votel.ru](mailto:form.pfp@votel.ru) <http://www.vologda/~pfpv>

ISBN 5-9221-0511-6

A standard linear barcode representing the ISBN number 5-9221-0511-6. The barcode is oriented vertically and is positioned next to the ISBN number.

9 785922 105118