МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(научно-исследовательский институт)»

Физтех-школа аэрокосмических технологий
Кафедра теоретической механики

Кузьмин Василий Олегович

Отчёт по задаче

Движение ракеты в нулевой гравитации

3 курс, группа Б03-903

Руководитель работы
_______________ Д. А. Притыкин
«___» _________ 2022 г.

Долгопрудный, 2022 г.

Содержание

1. Постановка задачи

Рассмотрим ракету, смоделированную как частица постоянной массы m, движущаяся в пустом пространстве с нулевой гравитацией. Пусть u - массовый расход, предполагаемый как известная функция времени, и пусть c - постоянная скорость тяги.

Уравнения движения таковы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{c}{m}u(t)\cos\vartheta(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{c}{m}u(t)\sin\vartheta(t) \end{cases}$$

1.1. Пункт 1

(Предположим, что $u(t) > 0$ для всех t). Покажите, что функционалы

$$minimize \int\limits_0^{t_f} dt \text{ или } minimize \int\limits_0^{t_f} \phi(x(t_f))$$

обеспечивают оптимальное управление

$$\tan\vartheta^*(t) = \frac{a+bt}{c+dt}$$

1.2. Пункт 2

Предположим, что ракета стартует в состоянии покоя в начале координат и мы хотим поднять ее на заданную высоту x_{2f} за заданное время T так, чтобы конечная скорость в горизонтальном направлении $x_3(T)$ была максимальной, в то время как $x_{4f} = 0$

Покажите, что оптимальное управление сводится к линейному касательному закону,

$$\tan\vartheta^*(t) = a + bt$$

2. Теория

Теория оптимального управления полезна для решения задач оптимизации непрерывного времени следующего вида:

$$max \int_0^T F(x(t), u(t), t)dt \tag{P}$$

при условии

$$\dot{x}_i = Q_i(F(x(t), u(t), t)), i = 1, ..., n \tag{1}$$

$$x_i(0) = x_{i0}, i = 1, ..., n \tag{2}$$

$$x_i(T) \geq 0, i = 1, ..., n \tag{3}$$

$$u(t) \in \Gamma, \Gamma \in R^m \tag{4}$$

где,

$x(t)$ - n-вектор переменных состояния $(x_i(t))$. Они описывают состояние системы в любой момент времени. Также обратите внимание, что $dx_i(t)/dt = \dot{x}_i$.

$u(t)$ - это m-вектор управляющих переменных. Это переменные выбора в задаче оптимизации.

$F(x(t), u(t), t)$ - это дважды непрерывно дифференцируемая целевая функция. Повсюду мы предполагаем, что эта функция аддитивна по времени.

$Q_i(x(t), u(t), t)$ - это дважды непрерывно различимые функции перехода для каждой переменной состояния.

Теперь мы можем обсудить принцип максимума Понтрягина. Этот принцип гласит, что мы можем решить оптимизационную задачу P, используя гамильтонову функцию H за один период. Версия теоремы такова:

Теорема *Для того, чтобы* $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ *были оптимальными для задачи P, необходимо, чтобы существовали постоянные* λ_0 *и непрерывные функции* $\Lambda(t) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, *где для всех* $0 \leq t \leq T$ *мы имеем* $\lambda_0 \neq 0$ *и* $\Lambda(t) \neq 0$, *так что для каждого* $0 \leq t \leq T$

$$H(x^*(t), u, \Lambda(t), t) \leq H(x^*(t), u^*(t), \Lambda(t)t)$$

где Гамильтонова функция H определяется как

$$H(x, u, \Lambda, t) = \lambda_0 F(x, u, t) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_i(x, u, t)$$

За исключением точек разрыва u_t^*,

$$\frac{\partial H()}{\partial x_i} = -\dot{\lambda}_i(t), i = 1, ..., n$$

Кроме того, $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = 1$ и, наконец, выполняются следующие условия поперечности

$$\lambda_i \geq 0, \lambda_i x_i^*(T) = 0, i = 1, ..., n$$

Предыдущая теорема предполагает, что можно решить задачу P, просто установив следующий гамильтониан текущего значения:

$$H(x, u, \Lambda, t) = F(x, u, t) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_i(x, u, t)$$

В приведенном выше примере мы называем λ_i *переменными сопряженного состояния.* Они аналогичны множителям Лагранжа.

Необходимыми условиями для достижения максимума являются:

$$\frac{\partial H()}{\partial u_k} = 0, k = 1, ..., m$$

$$\frac{\partial H()}{\partial x_i} = -\dot{\lambda}_i(t), i = 1, ..., n$$

$$\lambda_i(T) \geq 0, \lambda_i(T) x_i^*(T) = 0, i = 1, ..., n$$

Достаточными условиями для максимума являются то, что функция Гамильтона должна быть вогнутой в x и u.

3. Решение задачи

3.1. Решения пункта 1

Для начала, построим Гамильтониан:

$$H(t, x, \vartheta, \lambda) = 1 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 \frac{c}{m} u(t) \cos(\vartheta) + \lambda_4 \frac{c}{m} u(t) \sin(\vartheta)$$

Посчитаем производную Гамильтониана по $u(t)$:

$$H_u = \lambda_3 \frac{c}{m} \cos\vartheta + \lambda_4 \frac{c}{m} \sin`\vartheta = 0$$

Придем к уравнению, $\lambda_3 \cos\vartheta + \lambda_4 \sin\vartheta = 0$

Преобразуем его,

$$\lambda_3 \cos\vartheta + \lambda_4 \cos\vartheta = \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \cos\vartheta + \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \sin\vartheta \right) = \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \cos(\alpha - \vartheta)$$

где α мы определили через косинус и синус, то есть $\cos\alpha = \lambda_3/\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}$, $\sin\alpha = \lambda_4/\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}$

Таким образом мы получили оптимальное управление: $\vartheta^*(t) = -(\alpha(\lambda(t))+\frac{\pi}{2})$

Сопряженное уравнение имеет вид (слева) и соответствующие им проинтегрированные уравнения (справа):

$$\begin{cases} \dot{\lambda_1}(t) = 0 & \lambda_1(t) = c_1 \\ \dot{\lambda_2}(t) = 0 & \lambda_2(t) = c_2 \\ \dot{\lambda_3}(t) = -\lambda_1(t) & \lambda_3(t) = -c_1 t + c_3 \\ \dot{\lambda_1}(t) = -\lambda_2(t) & \lambda_4(t) = -c_2 t + c_4 \end{cases}$$

Подставляя данные значения в тангенс для угла оптимального управления и заменяя константы на значения, как у нас в задании (для визуального удобства) мы получаем:

$$\tan\vartheta^* = \frac{\sin\vartheta^*}{\cos\vartheta^*} = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \frac{c_4 - c_2 t}{c_3 - c_1 t} = \frac{a+bt}{c+dt}$$

Решим также задачу, как было показано на паре.

Составим функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(t,x,\vartheta,p) = p_{x_1}x_3 + p_{x_2}x_4 + p_{x_3}\frac{c}{m}u(t)\cos(\vartheta) + p_{x_4}\frac{c}{m}u(t)\sin(\vartheta)$$

Наше управление входит в уравнение через синус и косинус, поэтому решение логично искать в виде тангенса $\tan\vartheta^*$:

А теперь запишем дифференциальное уравнение для сопряжённых переменных:

$$\begin{cases} \dot{p_{x_1}}(t) = 0 & p_{x_1}(t) = c_1 \\ \dot{p_{x_2}}(t) = 0 & p_{x_2}(t) = c_2 \\ \dot{p_{x_3}}(t) = -p_{x_1}(t) & p_{x_3}(t) = -c_1 t + c_3 \\ \dot{p_{x_4}}(t) = -p_{x_2}(t) & p_{x_4}(t) = -c_2 t + c_4 \end{cases}$$

Так как у нас не даны граничные условия, так как ракета движется свободно в пространстве (задача с незакреплеными концами), мы не можем явно определить константы.

Так же, как и в примере выше воспользуемся производной по $u(t)$, чтобы найти минимум нашей функции и получим $p_{x_3}\cos\vartheta + p_{x_4}\sin\vartheta = 0$

Подставляя в решение уравнения выше найденные сопряженные переменные мы получаем ответ:

$$\tan\vartheta^* = \frac{a+bt}{c+dt}$$

3.2. Решение пункта 2

Проблема второго пункта заключается в том, что у нас добавляется условие $min(-x_3(T))$ (т.е $\Phi(x_{t_f}, t_f) = -x_3(T))$

Тогда запишем граничные условия на правом крае (терминальное условие):

$$\begin{cases} x_2(T) = x_{2f} \\ x_4(T) = 0 \end{cases}$$

где $x_1(T)$ и $x_3(T)$ могут выбираться любыми. $x_{2f}(T)$ и $x_4(T) = 0$ заданные в условии граничные значения (достижение определенной высоты и нулевое значение координаты по горизонтали)

В добавлении к уже существующим условиям задачи пункта 1 у нас добавляются условия трансверсальности. Они отличаются от тех что были записаны на лекции. Там мы рассматривали так называемые *Boundary-Value Problem*. В нащей задаче появляется не только граничное условие $x_4(T) = 0$, но и условие на достижение максимальной скорости $\dot{x}_3(T) \to max$. Граничное условие, на котором помимо оыбкновенного граничного условия задана еще и производная, причем граничные условия на одном краю (в нашем случает при $t = T$) называется *Two-Point Boundary-Value Problem*. Тогда условие трансверсальности запишется в виде:

$$p(t_f) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \perp S_f(t_f)$$

где S_{t_f} - аналог терминального многообразия из нашей лекции. Оно записывается как:

$$S_{t_f} = \begin{cases} G_1(x) = 0 (G_1(x) = x_2 - x_{2f}) \\ G_2(x) = 0 (G_2(x) = x_4) \end{cases}$$

Тогда, чтобы это условие у нас выполнялось, мы запишем:

$$\begin{pmatrix} p_{x_1}(T) \\ p_{x_2}(T) \\ p_{x_3}(T) + 1 \\ p_{x_4}(T) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} k_i \nabla_x G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \\ 0 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Левая часть это посчитанное выражение $p(t_f) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_f, x(t_f))$, а правая, это условие, при котором выполняется условие поперечности (такое решение взято в интернете)

Теперь мы можем подставить в данное равенство посчитанные в пункте 1 сопряженные уравнения (опущу данные вычисления, так как они громоздкие, но при этом легко проводятся) и получить, что $c_1 = 0$, $c_3 = -1$, c_2 и c_4 произвольные константы (мы заменим их на a и b, чтобы видеть, что мы получили точно такой же ответ, как и в задаче)

Подставляя наши результаты в оптимальное управление получим:

$$\tan \vartheta^* = a + bt$$