Методи на Ойлер и Лагранж и теорема на Лайбниц. Интегрална форма на закона за запазване на масата. Уравнения на движение на равнинни стационарни безвихрови течения на идеален несвиваем флуид. Потенциал на скоростите Функция на тока. Комплексен потенциал и комплексна скорост. Примери.

Васил Иванов

11 февруари 2022 г.

Съдържание

1 Методи на Ойлер и Лагранж. Теорема на Лайбниц.

За да се опише кинематиката на абсолютно твърдите тела е достатъчно да е известно движението на три негови точки. Флуидите обаче, не могат да бъдат описани така. Това е защото те са съставени от континиум от материални точки („частици“), които до голяма степен могат да се движат независимо една от друга.

Движението на един флуид е определено напълно, ако се познава скоростта $\vec{v}$ във всяка точка от флуида, т.е. знаем „как се движи“ всяка една от тези материални точки. Тази скорост, разбира се, може да зависи от времето t. Т.е. в общия случай за движението на един флуид, разглеждан като континиум $\vec{v} = \vec{f}(t, \vec{r})$, където t - време, $\vec{r}$ - радиус-вектор на частицата.

В общия случай в 3D декартови координати $\vec{r_k} = x_k^1\vec{i} + x_k^2\vec{j} + x_k^3\vec{k}$, където $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичните базисни вектори на декартовата координатна система.

1.1 Методи на Ойлер и Лагранж

Двата основни подхода за моделиране на флуидна система при горните приближения са методите на Лагранж и Ойлер.

1.1.1 Метод на Лагранж

Този метод е директен аналог на методите за описание на кинематиката на абсолютно твърдо тяло - определя се траекторията на всяка от частиците като функция на времето. Особеността тук, както беше споменато е, че флуида се състои от „безкрайно много“ такива частици. За целта при флуидите трябва да се наложи н.у. за положението на всяка частица.

Нека за $t = t_0$, позицията е съответно: $\vec{r}(t_0) = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)_{<\vec{i},\vec{j},\vec{k}>}$, тогава координатите на всяка частица $\vec{r}(t) = (x_1, x_2, x_3)_{<\vec{i},\vec{j},\vec{k}>}$ за всеки момент от времето е функция на началното положение.

$$r(\vec{t}) = \vec{f}(t, \vec{r_k}(t_0)) \tag{1}$$

Този подход ни дава лесен начин да намерим скоростта и съответните ѝ компоненти:

$$\vec{v}(t, \vec{r_k}(t_0)) = \frac{\partial r_k(\vec{t})}{\partial t} \tag{2}$$

$$v_1(t, \vec{r_k}(t_0)) = \frac{\partial f_1}{\partial t}$$
$$v_2(t, \vec{r_k}(t_0)) = \frac{\partial f_2}{\partial t}$$
$$v_3(t, \vec{r_k}(t_0)) = \frac{\partial f_3}{\partial t}$$

Аналогично, съвсем лесно при този подход можем да намерим компонентите на ускорението от траекториите като:

$$a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \tag{3}$$

Обобщено за този подход можем да кажем, че той е начин за моделиране на флуида като проследяваме движението на една частица. Изчертавайки позицията на тази частица като функция от времето, получаваме нейната траектория. Интуитивно за този подход можем да си представяме, че се намираме в лодка и се носим по течението на една река.

1.1.2 Метод на Ойлер

Този подход се фокусира върху харектеристиките на движението, което флуида извършва в даден момент от времето в определена геометрична точка. Т.е. вече не се интересуваме от историята на движението на всяка една частица от флуида, а се концентрираме в една геометрична точка от обема му. През тази точка преминават различни флуидни частици с течението на времето. При това разглеждане, движението на флуида е напълно определено, ако сме скоростта са зададени като функции на координатите. Нека отбележим $\vec{\rho} = (x_1, x_2, x_3)_{<\vec{i},\vec{j},\vec{k}>}$, където x_i тук са координатите на разглежданата геометрична точка от обема. Тогава:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{\rho}) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= v_1 = F_1(t, x_1, x_2, x_3)\\ \frac{dx_2}{dt} &= v_2 = F_2(t, x_1, x_2, x_3)\\ \frac{dx_3}{dt} &= v_2 = F_3(t, x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

При този метод не се интересуваме, коя конкретна частица идва в дадената геометрична точка и как тя се движи по-нататък във времето. От математическа гледна точка, разликата тук е, че за променливи при подхода на Лагранж се разглеждат параметри описващи индивидуални частици от даден момент нататък, а при Ойлер - точките от пространството, което заема флуида. Интуитивно, методът на Ойлер е може да си представяме като да наблюдаваме фиксирана точка от реката от горния пример, стоейки на нейния бряг.

1.1.3 Връзки между двата подхода

Двата подхода целят да моделират една и съща физична система. Това означава, че трябва да съществува връзка между описанията.

За да преминем от подхода на Лагранж към подхода на Ойлер диференцираме Уравн. 2 по времето и изключим $\vec{r}(t_0)$ от уравненията. Нека $A_L(t, \vec{r}(t_0))$ е някоя хидродинамична величина при лагранжовото описание и искаме да намерим нейното представяне в ойлеровото $A_E(t, \vec{\rho_i})$, където $\vec{\rho_i}$ е радиус-векторът на $i-$ геометрична точка от обема. За да преминем към новите променливи, трябва да намерим онази частица, която в момента t се намира в геометричната точка, която ни интересува. За целта трябва да решим системата Уравн. 2 относно началните позиции $\vec{r_k}(t_0)$ и да заместим в A_L:

$$A_E(\vec{\rho_i}, t) = A_L(\vec{r_k}(\vec{\rho_i}, t_0), t) \tag{5}$$

Необходимо и достатъчно условие за съществуване на функциите $\vec{r_k}(\vec{\rho_i}, t_0)$, е якобианът на Уравн. 2 да не е нулев.

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)} \neq 0 \tag{6}$$

Преходът от описанието на Ойлер към това на Лагранж е значително по-труден, тъй като е необходимо да се интегрира системата ДУ Уравн. 4.

1.2 Формула на Лайбниц

1.2.1 Предварителни резултати

Ще приведем някои предварителни резултати, които са важни за получаването на формулата на Лайбниц. Първия е свързан с якобиана на прехода между лагранжови и ойлерови координати:

$$\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \vec{v} \tag{7}$$

Доказателство за горното може да бъде намерено на [3].

Втората важна връзка е т.нар. субстанциална (тотална) производна на дадена хидродинамична величина. Този резултат представлява на практика приложение на формулата за производна на вложена функция (*„chain rule“*), като е взето предвид, че координатите x_i са функции на времето. Нека $A(t, x_1, x_2, x_3)$ е някоя векторна или скаларна величина. Тогава прилагайки *„chain rule“*:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

Разбира се, производните $\frac{dx_i}{dt}$ не са нищо друго освен компонентите на скоростта v_i. Тогава получаваме крайно

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i} v_i \tag{8}$$

В операторен вид тази връзка има вида:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \tag{9}$$

Производната $\frac{\partial A}{\partial t}$ по метода на Ойлер се нарича местна, а $(\vec{v} \cdot \nabla)A$ се нарича конвективна производна, защото характеризира изменението на A обусловено от преместването на флуидните частици. С тези два резултата налице, можем да изведем формулата на Лайбниц.

1.2.2 Формула на Лайбниц

Нека имаме интеграла:

$$\vec{I} = \iiint_{V(t)} \vec{A} d\tau$$

Където $V(t)$ е обема, състоящ се от едни и същи флуидни частици, движещи се заедно с него. Искаме да намерим пълната производна:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{V(t)} \vec{A} d\tau\right)$$

За да правим интегрирането по един и същи обем V_0, който са заемали частиците в началния момент t_0, ще преминем към променливи на Лагранж. Тогава производната и интеграла ще комутират.

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{I}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\iiint_{V(t)} \vec{A} d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\iiint_{V_0} \vec{A} J d\xi_1^0 d\xi_2^0 d\xi_2^0\right) \\
&= \left(\iiint_{V_0} \frac{d(\vec{A}J)}{dt} d\xi_1^0 d\xi_2^0 d\xi_2^0\right)
\end{aligned}$$

Трябва да се върнем обратно в Ойлерови координати. Правейки обратното преобразуване:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{I}}{dt} &= \left(\iiint_{V_0} \frac{d(\vec{A}J)}{dt} d\xi_1^0 d\xi_2^0 d\xi_2^0\right) \\
&= \iiint_{V(t)} \frac{1}{J}\frac{d(\vec{A}J)}{dt} d\tau \\
&= \iiint_{V(t)} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\vec{A}}{J}\frac{dJ}{dt} d\tau
\end{aligned}$$

Прилагайки резултатите от Пар. 1.2.1 получаваме крайно:

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{V(t)} \vec{A} d\tau\right) = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A}\nabla \cdot \vec{v}\right] d\tau \tag{10}$$

Формулата на Лайбниц е обобщение на практика на класическата формула за итеграл с променливи граници от анализа. Тази връзка обаче има ни позволява да получим някои ключови връзки в хидродинамиката. Нека $\vec{A} = 1$. Тогава итегралът:

$$V_R = \iiint_{R(t)} d\tau$$

Дава обема на флуидната област област $R(t)$. Да намерим $\frac{dV_R}{dt}$ като използваме формулата на Лайбниц:

$$\frac{dV_R}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{R(t)} d\tau\right) = \iiint_{R(t)} \nabla \cdot \vec{v} d\tau \tag{11}$$

Ще използваме класически подход от механиката на непрекъснатите среди за дефиниране на точкови величини. Делим двете страни на уравнението на мярката на областта - V_R, а за да се „освободим“ от интеграла прилагаме теоремата за средните стойности, за някоя специална точка от обема, такава че:

$$\frac{1}{V_R}\frac{V_R}{dt} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^*$$

Пускаме $V_R \to 0$, т.е. преминаваме към точкова характеристика и получаваме, че:

$$\lim_{V_R \to 0}\left(\frac{1}{V_R}\frac{dV_R}{dt}\right) = \nabla \cdot \vec{v} \tag{12}$$

Т.е. дивергенцията на полето на скоростта има смисъл на относително обемено разширение на флуиден обем.

2 Равнинни стационарни течения на идеален несвиваем флуид. Комплексен потенциал и комплексна скорост.

2.1 Равнинни стационарни течения на идеален несвиваем флуид.

2.1.1 Поставновка на задачата

За потенциалните течения, можем да представим полето на скоростите като градиент на потенциал

$$\vec{v} = \nabla\Phi$$

Където Φ е някоя скаларна функция. Причината за въвеждане на такъв потенциал е, че такива течения се анализират относително по-лесно. Замествайки горното в условието за несвиваем флуид ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$), получаваме че:
При потенциалните, несвиваеми флуиди, потенциалът Φ изпълнява уравнението на Лаплас:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

За случая на стационарно, равнинно течение можем да запишем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{14}$$

Където за равнинно, стационарно, течение: $\Phi = \Phi(x, y)$ Тогава прилагайки правилото за приозводна на сложна функция, можем да получим за пълния диференциал на потенциала:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = udx + vdy$$

За да затворим диференциалната задача, трябва да наложим съответните гранични условия.

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{\infty} = U_{\infty}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{\infty} = V_{\infty}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}\right|_{S} = 0$$

Където S е повърхнината на тялото, а $\vec{n}$ - нормалата към тази повърхнина. Това последно г.у. е условие за непроникване на флуида в тялото. Уравнението на Лаплас и горните г.у. водят до задача на Нойман с хомогенно г.у. върху повърхността.

2.1.2 Функция на тока

Въвеждаме функцията $\Psi(x, y)$, такава че:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\
v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Така Уравн. 10 бива автоматично удовлетворено. $\Psi(x, y)$ наричаме функция на тока, т.к. изолиниите $(\{(x, y) : \Psi(x, y) = const\})$ съвпадат с линиите на тока на даденото течение. Горното лесно се проверява чрез определението за линиите на тока:

$$\frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)}$$

Заместваме Уравн. 15 в горното и получаваме:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$$

С което доказахме твърдението, че изолиниите на функцията на тока са именно линиите на тока.

Функцията на тока можем да интерпретираме лесно, като за целта нека пресметнем количеството флуид, протичащ през кривата AB в дадена равнината. От дефиницията на потока, можем лесно да запишем интегралното количество флуид:

$$Q = \int_{AB} = \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

Където е $\vec{n}$ е нормалата към кривата AB. Лесно се проверява, че $\vec{n} = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$. Прилагайки теоремата на Грийн, съвсем директно получаваме:

$$Q = \int_{AB} = \vec{v}.\vec{n} ds = \int_{AB} \nabla \Psi \cdot \vec{dr} = \int_{A}^{B} d\Psi = \Psi(B) - \Psi(A) \tag{16}$$

Това означава, че количеството течност, което се движи между две линии на тока е равно на разликата от стойностите на функцията на тока върху тези линии (консервативно поле). Освен това, лесно се вижда, че:

$$\Omega_z = (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{k} = -\nabla^2 \Psi$$

Тогава ако имаме безвихрово равнинно течение, горното преминава в уравнение на Лаплас за $\nabla^2 \Psi$. Г.у. за функцията на тока на безкрайност са на Дирихле:

$$\nabla \Psi|_{\infty} = (-V_{\infty}, U_{\infty})$$

Лесно се проверява, че нормалната компонента на скоростта на повърхността на тялото е $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Psi}{\partial s}$. За идеален флуид искаме $v_n = 0$. За г.у. на тази граница получаваме:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}|_S = 0$$
$$\therefore \Psi_S = const$$

Крайно получихме задача на Дирихле за у-нието на Лаплас, която трябва да решим за да намерим функцията на тока.

2.2 Подход на комплексния потенциал за моделиране на течения

2.2.1 Комплексен потенциал и комплексна скорост

Замествайки Уравн. 15 в пълния диференциал на потенциалната функция Φ виждаме, че потенциалната функция Φ и функцията на тока Ψ удовлетворяват условията на Коши-Риман:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Т.е. съществува функцията $F = F(z)$ на комплексната променлива $z = x + iy$, такава че:

$$F = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

$F(z)$ се нарича комплексен потенциал или характеристична функция на течението. За пълния дифернциал тогава имаме:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = u(dx + idy) - iv(dx + idy) = (u - iv)dz$$

Делим на dz двете страни и получаваме, т.нар. комплексна скорост:

$$\frac{dF}{dz} = u - iv$$

Обикновено с V се означава скоростта $V = u + iv$, а с $\bar{V} = u - iv$. Като големината и на двете скорости се дава с:

$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Лесно се вижда, че V и $\bar{V}$ са симетрични спрямо оста x. Към тази скорост можем да прилагаме всички познати техники на векторния анализ и да получаваме различни полезни резултати. Най-важният от тях е, че ако знаем комплексния потенциал

$F(z)$ можем да намерим компонентите на реалната скорост $\vec{v}$ като използваме горните дефиниции и връзки:

$$F = u + iv$$
$$\bar{V} = \frac{dF}{dz}$$
$$\vec{v} = (\Re(\bar{V}), -\Im(\bar{V}))$$

От равенствата на Коши-Риман можем да получим условието за ортогоналност на линиите на тока и потенциалните линии:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = 0 \tag{17}$$

2.2.2 Примери за моделиране на флуидни течения

Пример 1 Нека $F(z) = Uz$, където $U \in \Re$ и $U > 0$, то можем да разделим потенциала на:

$$\Phi(x, y) = Ux$$
$$\Psi(x, y) = Uy$$

Тогава за скоростта получаваме директно $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = U = const$. Линиите на тока тогава са $y = const$ (успоредни на оста x)

Пример 2 Нека имаме математическото течение:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} ln(z) \tag{18}$$

За $Q \in \Re$, сменяйки към полярна форма на z:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} ln(re^{-}(i\theta)) = \frac{Q}{2\pi}(ln(r) + i\theta)$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} lnr$$
$$\Psi = \frac{Q}{2\pi}\theta$$

Тук лесно пък се вижда, че линиите на тока са лъчите $\theta = const$, а компонентите на скоростта са съответно:

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = \left(\frac{Q}{2\pi r}, 0\right)_{<r,\theta>}$$

При $Q > 0$ скоростта е насочена навън от центъра на к.с. и течението се нарича източник. Q се нарича производителност на източника. В противен случай, когато $Q < 0$ течението се нарича бездна.

Пример 3 Нека:

$$F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} lnz, \Gamma \neq 0, \Gamma \in \Re$$

Умножаваме и делим на i и сменяме към полярни координати. Получаваме за потенциала:

$$F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - i\frac{\Gamma}{2\pi} lnr$$

Тогава, аналогично на предния пример:

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$
$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} lnr$$

И за скоростта получаваме (в полярни координати):

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = \left(0, \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\right)_{<r,\theta>} \tag{19}$$

Линиите на тока тук пък са $r = const$. Това са окръжности, центрирани около началото на к.с. и това е течение от вида „концентриран вихър“. При $\Gamma > 0$, $v_\theta > 0$ и флуидът циркулира по часовниката стрелка, в противен случай - обратно на часовниката стрелка. За да „отместим“ концентрирания вихър от началото можем да зададем комплексния потенциал като:

$$F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} ln(z - a), \Gamma \neq 0, \Gamma \in \Re$$

Пример 4 Нека $\epsilon > 0$ и нека в $(-\epsilon, 0)$ поставим източник, а в $(\epsilon, 0)$ поставим бездна. На такава система, комплексният потенциал можем да запишем като:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} ln(z + \epsilon) - \frac{Q}{2\pi} ln(z - \epsilon) \tag{20}$$

Търсим комплесният потенциал на течение, което се получава при граничния преход, такъв че:

$$\lim_{\epsilon\to 0, Q\to\infty} Q.2\epsilon = M (Q > 0), M < \infty \tag{21}$$

Взимайки Уравн. 20 и извършвайки въпросния граничен преход:

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{\epsilon\to 0, Q\to\infty} \left[\frac{Q}{2\pi} ln(z+\epsilon) - \frac{Q}{2\pi} ln(z-\epsilon)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} Q.2\epsilon \lim \frac{ln(z+\epsilon) - ln(z+-\epsilon)}{2\epsilon} \\ &= \frac{M}{2\pi}\frac{d}{dz}(lnz) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \end{aligned}$$

Умножаваме и делим по комплексно спрегнатото на z - $\bar{z}$ и извършваме действията, при което получаваме:

$$F(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{22}$$

За потенциалната функция и функцията на тока имаме (в декартови и полярни координати):

$$\Phi(x,y) = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi}\frac{cos\theta}{r}$$
$$\Psi(x,y) = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{sin\theta}{r}$$

Линиите на тока тогава ще са изолиините:

$$\frac{y}{x^2+y^2} = const = C$$

Записвайки горното като имплицитно зададена крива крива:

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{C} = 0$$

Добавяйки към двете страни $\frac{1}{4C^2}$ и допълвайки квадрата, получаваме квадратичната крива:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2} \tag{23}$$

Това са окръжности, преминаващи през координатното начало и имащи центрове върху координатна ос. В това течение, центърът на к.с. е едновременно източник и бездна. Такова течение се нарича дипол. Величината M се нарича диполен момент. Ако се доближат два дипола с противоположни знаци и се извърши съответния граничен преход, ще се получи дипол от втори ред. Така може да се построят диполи от произволно висок ред, нарчени мултиполи. Теченията съответстващи на тези мултиполи са потенциални и техниките за техния анализ са аналогични на тези разгледани в настоящия пример.

Литература

[1] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2001.

[2] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen и David R. Dowling. *Fluid mechanics*. Elsevier, 2016.

[3] Запрян Запрянов. “Методи на Ойлер и Лагранж”. В: *Хидродинамика*. 1-е изд. Т. 1. Унив. изд. Св. Климент Охридски, 1996, с. 14—15.