СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „Св. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”
Факултет по математика и информатика

Курсова работа

<u>Тема:</u> Модел на идеален топлинен контакт

Изготвил: Васил Василев Иванов,
Магистърска програма: „Изчислителна математика и математическо моделиране“

За курса:
„Математически модели и изчислител експеримент“

София
2022 г.

1 Задача

Разглеждаме задачата за идеален топлинен контакт:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, -\infty < x < 0; 0 < t \leq T \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, 0 < x < \infty; 0 < t \leq T \tag{2}$$

Където:

$$\kappa_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i} \tag{3}$$

- κ_i - температуропроводност
- k_i - топлопроводност
- c_i - топлинен капацитет
- ρ_i - плътност на материала

Наложено е следното прекъснато начално условие:

$$u_1(x, t = 0) = 0, -\infty < x < 0 \tag{4}$$

$$u_2(x, t = 0) = u_0, 00 < x < \infty \tag{5}$$

Както и гранични условия „на безкрайност“:

$$u_1(-\infty, t) = 0, t > 0 \tag{6}$$

$$u_2(+\infty, t) = u_0, t > 0 \tag{7}$$

И условията за идеален контакт:

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), t > 0 \tag{8}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t), t > 0 \tag{9}$$

Дефинираме „помощна константа“ β с цел олекотяване на записа:

$$\beta = \frac{\sqrt{k_2 \rho_2 c_2}}{\sqrt{k_1 \rho_1 c_1}}$$

За така поставената задача е известно точното (аналитично решение):

$$u_1(x, t) = \frac{\beta u_0}{1 + \beta} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{2}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right) \right] \tag{10}$$

$$u_2(x, t) = \frac{u_0}{1 + \beta} \left[\beta + \operatorname{erf} \left(\frac{2}{2\sqrt{\kappa_2 t}} \right) \right] \tag{11}$$

Където:

$$\mathrm{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

За целите на изследването на полученото числено решение ще използваме следните физични пареметри за различни материали:

Thermal Parameters for Various Materials

Material	ρ (g/cm^3)	c (cal/g · deg)	k (cal/cm · deg · s)
Copper	8.9	0.093	1.09
Cast Iron	7.4	0.136	0.12
Granite	2.6	0.210	0.006
Glass	2.5	0.198	0.002
Wood	0.41	0.30	0.0006
Lucite	1.18	0.35	0.0006
Cork	0.15	0.48	0.0001

Фигура 1: Термофизични константи за различни материали

2 Построяване на диференчна схема

Искаме да построим диференчна схема с втори ред на точност, т.е. $O(h^2 + \tau)$, където h - стъпката на дискретизацията по пространството и τ - стъпка на дискретизация по времето. Това условие за грешката създава съответни проблеми, предвид прекъснатото решение в точката на контакт.
Разглеждаме (точното) решението като една функция $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{ако } x \in (-\infty, 0) \\ u_2(x) & \text{ако } x \in [0, +\infty) \end{cases} \tag{12}$$

Приближеното решение за $u(x)$ в точката (x_i, t_j) от мрежата ще бележим с y_i^j. „Безкрайността" ще апроксимираме с т.нар. „актуална безкрайност", т.е. ще разглеждаме достатъчно голям интервал $[-M, M]$, за някое положително число M.
Въвеждаме мрежата:

$$\omega_{h,\tau} = \left\{ (x_i, t_j) : x_i = -M + (i-1)h, t_j = (j-1)\tau; i = \overline{1, 2n+1}, j = \overline{1, m+1}; n = \left\lceil \frac{2M}{h} \right\rceil, m = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil \right\}$$

Условията за устойчивост на схемата (т.е за h и τ) ще определим след малко. Да забележим, че при така построената мрежа, на j-тия слой по времето, стойността на приближеното решение в точката на комакт ще бъде y_{n+1}^j.

Можем вече да апроксираме основните диференциални уравнения. Използваме формулата с разлика напред за производните по времето и формулата с втори ред на точност за втората производна. С изключение на точките на контакт това е стандартна диференчна схема с грешка $O(h^2 + \tau)$ за линейна дифузионна задача. Затова можем директно да запишем:

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_1}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_1}{h^2} \left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); j = \overline{1, m}; i = \overline{2, n} \tag{13}$$

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_2}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_2}{h^2} \left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); j = \overline{1, m}; i = \overline{n+2, 2n} \tag{14}$$

На база тези две диференчни уравнения ще получим и условията за устойчивост на схемата. Избираме:

$$\tau < \frac{h^2}{2d}$$
$$d := max\left\{\kappa_1, \kappa_2\right\}$$

Остава да апроксираме с втори ред на точност задачата и в особената точка.

За целта ще се върнем към оригиналната дефиниция на задачата и като начало ще апроксираме производните в условието за идеален контакт с формула с грешка $O(h + \tau)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t)$$

$$\phi_{n+1}^{j} = \psi_{n+1}^{j}$$
$$\frac{\phi_{n+1}^{j} - \phi_{n}^{j}}{h} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\psi_{n+2}^{j} - \psi_{n+1}^{j}}{h}$$

Където ϕ_i^j и ψ_i^j са съответните приближени решения за $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. За безизточниковото уравнение на дифузията при дифузионен коефициент **1**, лесно се показва чрез развиване в ред на Тейлър и допускане, че основното диференциално уравнение е изпълнено с достатъчно добра точност и върху границите (съображения за гладкост на решението), че трябва от лявата страна на горното диференчно уравнение да извадим $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, а от дясната: $-\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial u_2}{\partial t}$. Дискертизираме производните по времето в тези допълнителни членове с формулата с разлика напред и получаваме:

$$\phi_{n+1}^{j} = \psi_{n+1}^{j}$$
$$\left(\frac{\phi_{n+1}^{j} - \phi_{n}^{j}}{h} - \frac{\phi_{n+1}^{j+1} - \phi_{n+1}^{j}}{\tau}\right) = \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{\psi_{n+2}^{j} - \psi_{n+1}^{j}}{h} + \frac{\psi_{n+1}^{j+1} - \psi_{n+1}^{j}}{\tau}\right)$$

С помощта на системата *Mathematica* извършваме необходимите алгебрични преобразувания и се връщаме към нотацията на „общо" приближено решение y_i^j:

$$y_{n+1}^{j+1} = \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_1\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+1}^{j} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\frac{(k_1+k_2)\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2}\right) y_{n+1}^{j} + \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+2}^{j} \tag{15}$$

Горното е за $j > 1$, т.е. за слоеве по времето след първия (определен от началното условие). Тогава можем да обобщим всички разсъждения дотук в следната диференчна схема, с която ще получаваме приближеното решение на задачата:

$$y_i^1 = 0, i = \overline{1,n}$$
$$y_i^1 = u_0, i = \overline{n+1, 2n+1}$$

$$j = \overline{1, m+1}:$$
$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_1}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_1}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); i = \overline{2,n}$$
$$y_{n+1}^{j+1} = \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_1\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+1}^{j} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\frac{(k_1+k_2)\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2}\right) y_{n+1}^{j} + \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+2}^{j}$$
$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_2}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_2}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); i = \overline{n+2, 2n}$$
$$y_1^{j+1} = 0$$
$$y_{2n+1}^{j+1} = u_0$$

Така написаната диференчна схема може директно да бъде инплементирана например в *Mathematica*. Кодът използван за следващите числени експерименти може да бъден намерен във файла *mmieproj-code.nb*.

3 Числени експерименти

Тъй като най-добре резултатите от изчисленията за такъв динамичен процес се визуализират като анимация, то тук ще бъдат дадени референции към части от notebook-файла, в който е имплементирано решението. Съответните секции ще бъдат отбелязани с коментар в *Mathematica* - (*Коментар*). Точното решение има особеност за $t = 0$, всички анимации визуализират $t > 0$.

3.1 Две тела с еднакви топлофизични характеристики

3.1.1 Мед-мед

Ще разгледаме първо контакта на две тела от мед - добър топлопроводник (вж. Фиг. 1). Анимациите, визуализиращи решението и грешката се намират в секцията (*Copper - Copper contact*).

Добър избор за време за изчисленията и актуална безкрайност са $T_{max} = 20\ s$, $X_{max} = 50\ cm$. Резултатът от пресмятанията е очакваният такъв - получаваме решението за дифузионната задача за едно тяло, с н.у. функцията на Хевисайд (функция-стъпка).

В началото грешката е голяма, от една страна поради особеността на точното решение, а от друга - заради факта, че дифузията все още не е „загладила“ профила на решението. След малък интервал от време, двете решения - точно и числено стават напрактика неразличими. Във визуализацията на грешката се вижда, как тя бързо и рязко намалява, като „дифундира“ в областта. Това е очаквано, тъй като дифузионният оператор е линеен.

Също очаквано - топлината в добър топлопроводник се разпространява бързо, което е и част от обяснението за описаното бързо намаляване на разликата между точното и приближено решение.

3.1.2 Дърво-Дърво

Тук секцията е (*Wood - Wood contact*). Разсъжденията и в този случай са аналогични на горния, като единствено актуалната безкрайност е намалена до $X_{max} = 20\ cm$.

Очаквано за изолатор, топлината се разпространява значително по-бавно - съответно профила на решението се заглажда доста по-бавно, както и грешката намалява по-бавно.

3.2 Две тела с различни топлофизични характеристики

3.2.1 Мед-дърво и дърво-мед

Съответните секции са (*Copper - Wood contact*) и (*Wood - Copper contact*). Тоест кое е „студеното“ и кое - „топлото“ тяло има значение за решението на задачата. За времето за пресмятане и актуална безкрайност избираме същите като в Пар. 3.1.2.

В предните два случая, може да се види лесно, че точката на контакт е с температурата приблизително $\frac{u_0}{2}$. В двата случая на тела с разнородни топлофизични характеристики, температурата на точката на контакт е по-близо до температурата на медта (по-добрият топлопроводник).

Другият интересен факт е, че температурата на медта на практика е постоянна и равна на началната в целия интервал, в който разглеждаме задачата, а в дървото виждаме ясен дифузионен режим на разпространение на топлината. Това е физически смислен резултат - топлината в по-добрия топлопроводник се разпространява толкова бързо, че за времето, в което топлината започне да се разпространява в дървото, всякакви температурни разлики в медта са компенсирани. Това се вижда добре и от грешката - през цялото време в медта грешката е на практика 0, тъй като в нея температурата остава почти непроменена, а в дървото и грешката „дифундира" бавно в интервала.

3.2.2 Гранит-дърво и дърво-гранит

Ще изберем два изолатора, но двата имат порядък разлика в температуропроводността. Секциите са (*Granite - Wood contact*) и (*Wood - Granite contact*).

Ситуацията е междинна на горните - за два еднакви и два със значително различни топлофизични характеристики материала. Точката на контакт отново е с температура по-близка до тази на материала с по-голяма температуропроводност - в случая гранита. Тук и в двата материала има видим дифузионен профил на разпространението на топлината, намаляването на грешката също е относително симетрично.

3.2.3 Мед-чугун и чугун-мед

Секциите са: (*Copper - Cast Iron*) и (*Cast Iron - Copper contact*). Тук пък имаме добри топлопроводници, които имат температуропроводност с порядък разлика. Резултатът до голяма степен преповтаря горните. Интересно е обаче да отбележим, че профила на разпространение на топлината в „студеното" тяло е гладък и има форма наподобяваща e^{-x}. Тук топлината „навлязла" в студеното тяло се разпространява бързо и „топлото" тяло не е с постоянна температура навсякъде в областта. Подобна ситуация наблюдаваме и при грешката - има асиметричен профил, отново е по-голяма при по-студеното тяло, но не е толкова асиметрична, колкото в разгледания граничен случай в началото на секцията.

Литература

[1] Васил Иванов. *Github репозитория на текста + код на проекта*. URL: https://github.com/vasilvas99/MMIEproj.