СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”
Факултет по математика и информатика

Курсова работа

Тема: Модел на идеален топлинен контакт

Изготвил: Васил Василев Иванов,
Магистърска програма: „Изчислителна математика и математическо моделиране“

За курса:
„Математически модели и изчислителен експеримент“

София
2022 г.

1 Задача

Разглеждаме задачата за идеален топлинен контакт:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, -\infty < x < 0; 0 < t \leq T \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, 0 < x < \infty; 0 < t \leq T \quad (2)$$

Където:

$$\kappa_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i} \quad (3)$$

- κ_i - температуропроводност
- k_i - топлопроводност
- c_i - топлинен капацитет
- ρ_i - плътност на материала

Наложено е и следното прекъснато начално условие

$$u_1(x, t = 0) = 0, -\infty < x < 0 \quad (4)$$

$$u_2(x, t = 0) = u_0, 0 < x < \infty \quad (5)$$

Както и гранични условия „на безкрайност“:

$$u_1(-\infty, t) = 0, t > 0 \quad (6)$$

$$u_2(+\infty, t) = u_0, t > 0 \quad (7)$$

И условията за идеален контакт:

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), t > 0 \quad (8)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t), t > 0 \quad (9)$$

Дефинираме и „помощна константа“ β с цел олекотяване на записа:

$$\beta = \frac{\sqrt{k_2 \rho_2 c_2}}{\sqrt{k_1 \rho_1 c_1}}$$

За така поставената задача е известно и точното (аналитично решение):

$$u_1(x, t) = \frac{\beta u_0}{1 + \beta} \left[1 + erf(\frac{2}{2\sqrt{\kappa_1 t}}) \right] \quad (10)$$

$$u_2(x, t) = \frac{u_0}{1 + \beta} \left[\beta + erf(\frac{2}{2\sqrt{\kappa_2 t}}) \right] \quad (11)$$

Където:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

За целите на изследването на полученото числено решение ще използваме следните физични пареметри за различни материали:

Thermal Parameters for Various Materials

Material	ρ (g/cm^3)	c (cal/g · deg)	k (cal/cm · deg · s)
Copper	8.9	0.093	1.09
Cast Iron	7.4	0.136	0.12
Granite	2.6	0.210	0.006
Glass	2.5	0.198	0.002
Wood	0.41	0.30	0.0006
Lucite	1.18	0.35	0.0006
Cork	0.15	0.48	0.0001

Фигура 1: Термофизични константи за различни материали

2 Построяване на диференчна схема

Искаме да построим диференчна схема с втори ред на точност, т.е. $O(h^2 + \tau)$, където h - стъпката на дискретизацията по пространството и τ - стъпка на дискретизация по времето. Това създава съответни особености, предвид прекъснатото решение в точката на контакт.
Разглеждаме (точното) решението като една функция $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{ако } x \in (-\infty, 0) \\ u_2(x) & \text{ако } x \in [0, +\infty) \end{cases} \tag{12}$$

Приближеното решение за $u(x)$ в точката (x_i, t_j) от мрежата ще бележим с y_i^j. „Безкрайността" ще апроксимираме с т.нар. „актуална безкрайност", т.е. ще разглеждаме достатъчно голям интервал $[-M, M]$, за някое положително число M.
Въвеждаме мрежата:

$$\omega_{h,\tau} = \left\{ (x_i, t_j) : x_i = -M + (i-1)h, t_j = (j-1)\tau; i = \overline{1, 2n+1}, j = \overline{1, m+1}; n = \left\lceil \frac{2M}{h} \right\rceil, m = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil \right\}$$

Условията за устойчивост на схемата (т.е за h и τ) ще определим след малко. Да забележим, че при така построената мрежа, на j-тия слой по времето, стойността на приближенето решение в точката на котакт ще бъде y_{n+1}^j.

Можем вече да апроксираме основните диференциални уравнения. Използваме формулата с разлика напред за производните по времето и формулата с втори ред на точност за втората производна. С изключение на точките на контакт това е стандартна диференчна схема с грешка $O(h^2 + \tau)$ за линейна дифузионна задача. Затова можем директно да запишем:

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_1}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_1}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); j = \overline{1, m}; i = \overline{2, n} \tag{13}$$

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_2}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_2}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); j = \overline{1, m}; i = \overline{n+2, 2n} \tag{14}$$

На база тези две диференчни уравнения ще получим и условията за устойчивост на схемата. Избираме:

$$\tau < \frac{h^2}{2d}$$
$$d := max\{\kappa_1, \kappa_2\}$$

Остава да апроксираме с втори ред на точност задачата и в особената точка.

За целта ще се върнем към оригиналната дефиниция на задачата и като начало ще апроксираме производните в условието за идеален контакт с формула с грешка $O(h + \tau)$ като начало:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \frac{k_2}{k_1}\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t)$$

$$\phi_{n+1}^j = \psi_{n+1}^j$$
$$\frac{\phi_{n+1}^j - \phi_n^j}{h} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\psi_{n+2}^j - \psi_{n+1}^j}{h}$$

Където ϕ_i^j и ψ_i^j са съответните приближени решения за $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. За безизточниковото уравнение на дифузията при дифузионен коефициент **1**, лесно се показва (чрез развиване в ред на Тейлър) и допускане, че основното диференциално уравнение е изпълнено с достатъчно добра точност и върху границите (съображения за гладкост на решението), че трябва от лявата страна на горното диференчно уравнение да извадим $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, а от дясната: $-\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial u_2}{\partial t}$. Дискертизираме производните по времето в тези допълнителни членове с формулата с разлика напред и получаваме:

$$\phi_{n+1}^j = \psi_{n+1}^j$$
$$\left(\frac{\phi_{n+1}^j - \phi_n^j}{h} - \frac{\phi_{n+1}^{j+1} - \phi_{n+1}^j}{\tau}\right) = \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{\psi_{n+2}^j - \psi_{n+1}^j}{h} + \frac{\psi_{n+1}^{j+1} - \psi_{n+1}^j}{\tau}\right)$$

С помощта на системата *Mathematica* извършваме необходимите алгебрични преобразувания и се връщаме към нотацията на „общо" приближено решение y_i^j:

$$y_{n+1}^{j+1} = \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_1\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+1}^j + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\frac{(k_1+k_2)\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2}\right) y_{n+1}^j + \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+2}^j \tag{15}$$

Горното е за $j > 1$, т.е. за слоеве по времето след първия (определен от началното условие). Тогава можем да обобщим всички разсъждения дотук в следната диференчна схема, с която ще получаваме приближеното решение на задачата:

$$y_i^1 = 0, i = \overline{1,n}$$
$$y_i^1 = u_0, i = \overline{n+1, 2n+1}$$

$$j = \overline{1, m+1}:$$
$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_1}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_1}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); i = \overline{2,n}$$
$$y_{n+1}^{j+1} = \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_1\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+1}^j + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\frac{(k_1+k_2)\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2}\right) y_{n+1}^j + \frac{2\tau}{h^2}\frac{k_2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2 k_1 + \kappa_1 k_2} y_{n+2}^j$$
$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau\kappa_2}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau\kappa_2}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right); i = \overline{n+2, 2n}$$
$$y_1^{j+1} = 0$$
$$y_{2n+1}^{j+1} = u_0$$

Така написаната диференчна схема може директно да бъде инплементирана например в *Mathematica*. Кодът използван за следващите числени експерименти може да бъден намерен във файла *mmieproj-code.nb*.

3 Числени експерименти

Тъй като най-добре резултатите изчисленията за такъв динамичен процес най-лесно се визуализират като анимация, то тук ще бъдат дадени референции към части от notebook-файла, в който е имплементирано решението. Съответните секции ще бъдат отбелязани с коментар в *Mathematica* - (*Коментар*). Тъй като точното решение има особеност за $t = 0$, всички анимации визуалират $t > 0$.

3.1 Две тела с еднакви топлофизични характеристики

3.1.1 Мед-мед

Ще разгледаме първо контакта на две тела от мед - добър топлопроводник (вж. Фиг. 1). Анимациите, визуализиращи решението и грешката се намират в секцията (*Copper - copper contact*).

Литература

[1] Васил Иванов. *Github репозитория на текста + код на проекта*. URL: https://github.com/vasilvas99/MMIEproj.