

okoko

asdasda



Βασίλειος Ασημακόπουλος

16/05/2022

# Ευχαριστίες

# Περιληψη

# Abstract

# Περιεχόμενα

<b>1 Κεφάλαιο 1</b>	<b>6</b>
<b>2 Κεφάλαιο 2</b>	<b>7</b>
2.1 Παραλλαγή του Logistic Χάρτη . . . . .	7
2.1.1 Για q=-0.1 . . . . .	7
2.1.2 Για q=-0.3 . . . . .	12
2.1.3 Για q=-0.5 . . . . .	16
2.1.4 Για q=-0.7 . . . . .	19
2.1.5 Για q=-0.9 . . . . .	22
2.1.6 Για q=-1.2 . . . . .	26
2.1.7 Για q=-1.4 . . . . .	29
2.1.8 Για q=-1.6 . . . . .	35
2.1.9 Για q=-1.9 . . . . .	41
<b>3 Κεφάλαιο 3</b>	<b>45</b>
<b>A' Appendix title</b>	<b>46</b>

## Κεφάλαιο 1

### Κεφάλαιο 1

## Κεφάλαιο 2

# Κεφάλαιο 2

### 2.1 Παραλλαγή του Logistic Χάρτη

Μελετήθηκε η δυναμική συμπεριφορά της εξίσωσης διαχριτού χρόνου:

$$x_i = k * (a + x_{i-1})^2 * (b - x_{i-1}) \quad (2.1)$$

όπου a,b,k, q: παράμετροι

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε οι παράμετροι a, b, κρατήθηκαν αρχικά σταθερές με τιμές a=1, b=2 όπως και η αρχική συνθήκη του  $x_1 = 0.1$  παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβάλλονταν στο διάστημα [0.1, 1.7] με βήμα 0.2. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διαχλάδωσης, ο εκθέτης Lyapunov και το διάγραμμά της τιμής xi σε συνάρτηση με την τιμή xi-1., τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

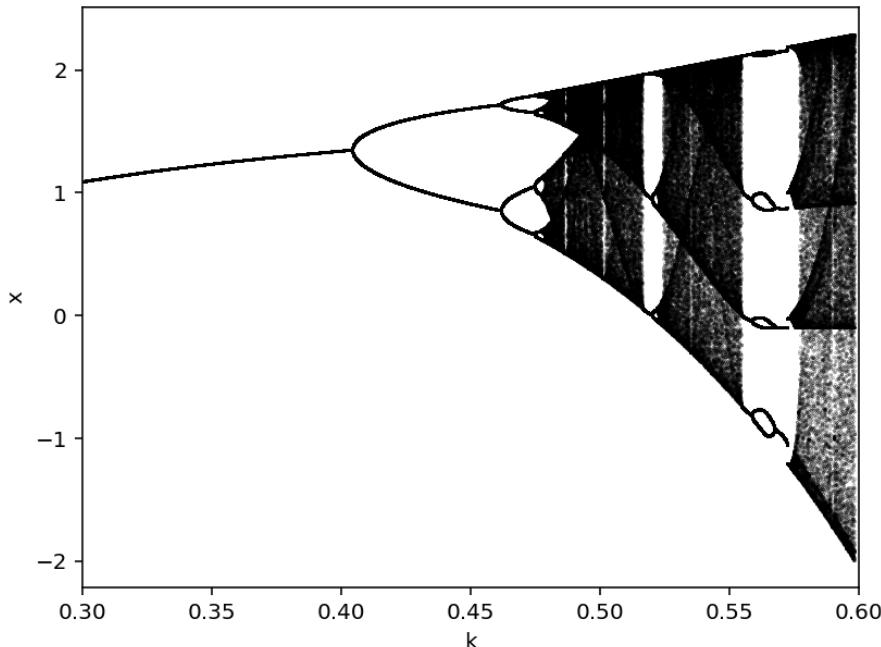
#### 2.1.1 Για q=-0.1

Στο σχήμα 2.1 παρατίθεται το διάγραμμα διαχλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο k, για a=1, b=2 και q = - 0.1. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για k = 0.3 , ενώ για k = 0.4 εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για k=0.47 (περίοδος-4) ,τον τρίτο για k=0.476(περίοδος-8) . Ενώ ο τελευταίος διπλασιασμός εμφανίζεται λίγο πιο μετά τον τρίτο για k=0.478 (περίοδος-16). Στην συνέχεια για k>0.479το σύστημα εισέρχεται στο χάος , μέχρι να εξέλθει για k=0.51(περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς k=0.52(περίοδος-6) και k=0.522(περίοδος-11) για k>0.524. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση .Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για k=0.555 (περίοδος-4). Για k=0.559 εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος-8) ο οποίος καταστρέφεται για k=0.567 , οπότε εδώ παρατηρούμε αντιμονοτονικότητα δηλαδή έχουμε μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για k=0.568. Λόγω αυτού του φαινομένου το οποίο συνεχίζει μέχρι το q=-0.2, μελετήθηκε περαιτέρω το σύστημα από  $-0.1 < q < -0.2$ . Τέλος για k=0.5735 έχουμε έναν τελευταίο διπλασιασμό(περίοδος-6) πριν ξανά εισέλθει το σύστημα για k>0.575 στο χάος. Στο σχήμα 2.2 παρατίθενται 3 διαγράμματα διαχλάδωσης 2.2α', 2.2β', 2.2γ', 2.2δ' για  $0.54 < k < 0.6$ . Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στην αντιμονοτονικότητα που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q. Επίσης παρατηρούμε στα διαγράμματα 2.2β', 2.2γ', 2.2δ' δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον στο διάγραμμα 2.2δ' το φαινόμενο εμφανίζεται δυο φορές για  $0.560 < k < 0.568$  και  $0.571 < k < 0.573$ . Επιπλέον, στο σχήμα 2.3 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0.3, 0.6]. Στο διάστημα τιμών

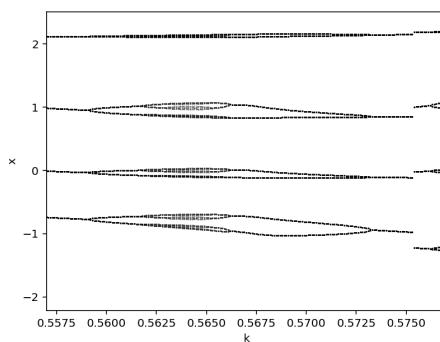
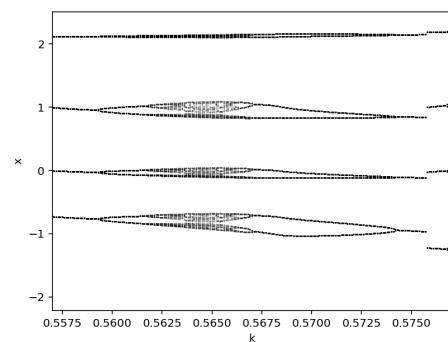
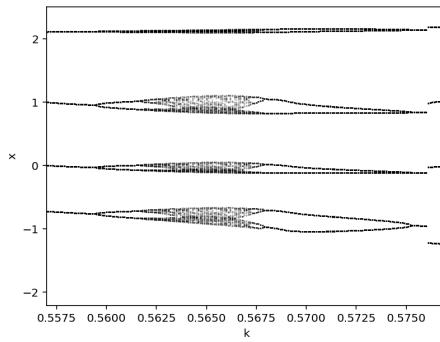
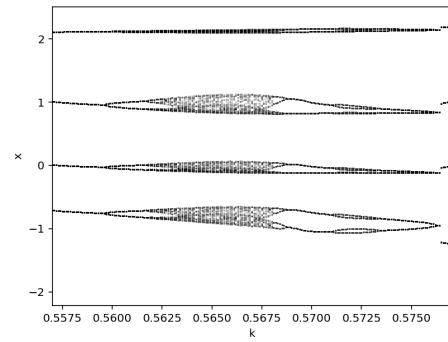
$k=0.522$ , στο  $0.51 < k < 0.522$ , και στο  $0.554 < k < 0.574$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.1 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος-1	2.4α'
0.41	Περίοδος-2	2.4β'
0.476	Περίοδος-8	2.4γ'
0.4778	Περίοδος-16	2.4δ'
0.479	Χάος	2.4ε'
0.517	Περίοδος-3	2.4Γ')
0.52	Περίοδος-6	2.4η'
0.522	Περίοδος-11	2.5α'
0.524	Χάος	2.5β'
0.555	Περίοδος-4	2.5γ'
0.559	Περίοδος-8	2.5δ'
0.568	Περίοδος-4	2.5ε'
0.5735	Περίοδος-6	2.5Γ'
0.575	Χάος	2.5ζ'

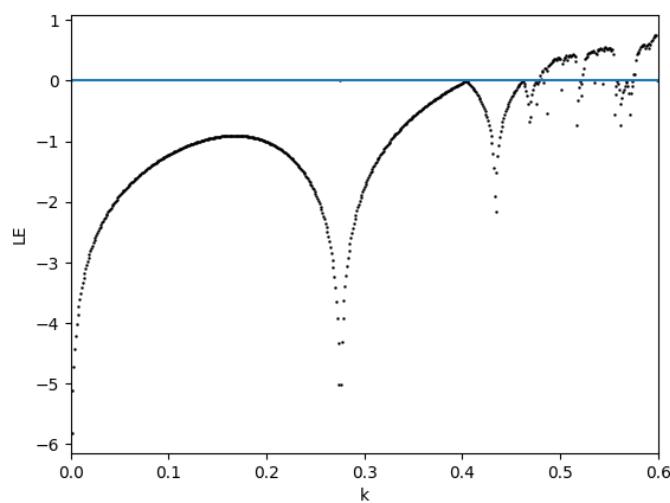
Πίνακας 2.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.1$



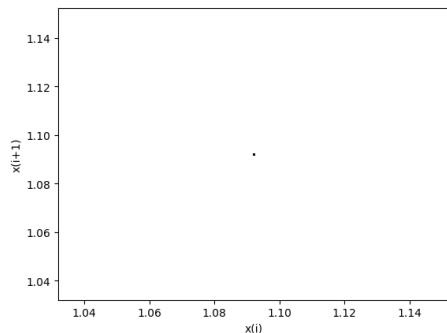
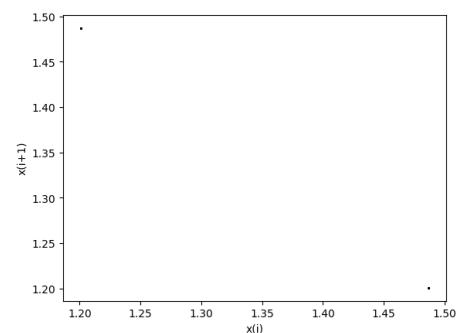
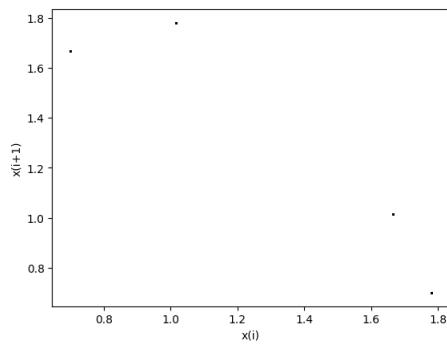
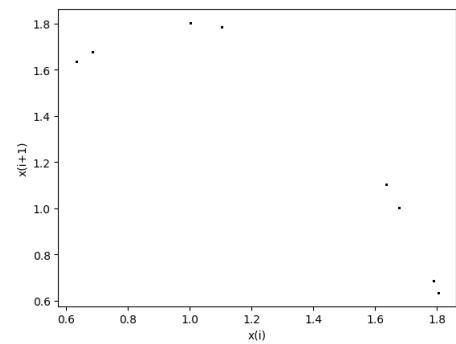
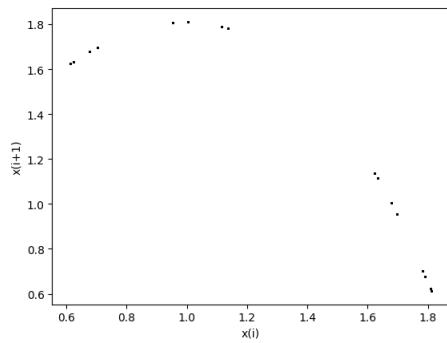
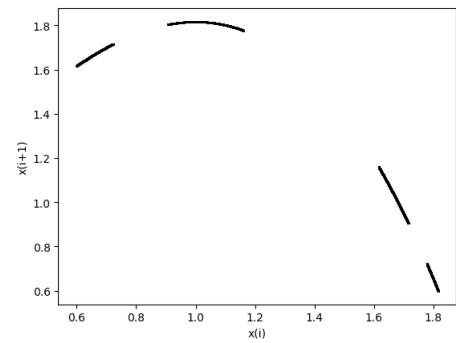
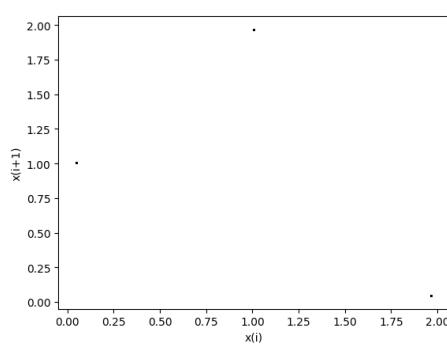
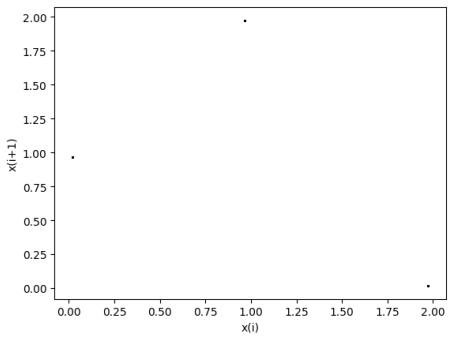
Σχήμα 2.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.1$

(α')  $q = -0.112$ (β')  $q = -0.114$ (γ')  $q = -0.116$ (δ')  $q = -0.118$ 

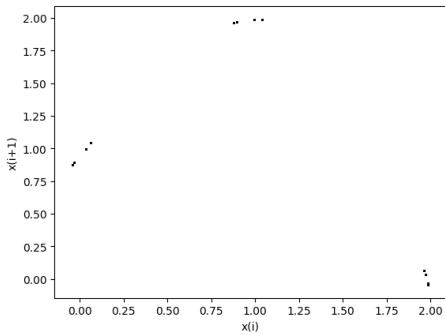
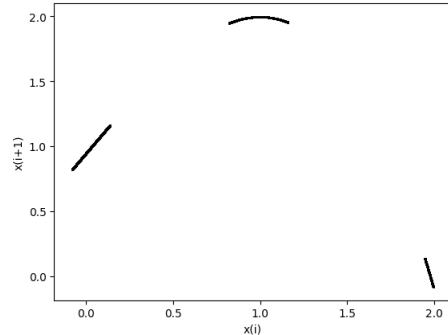
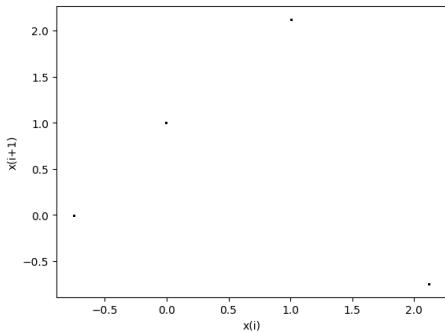
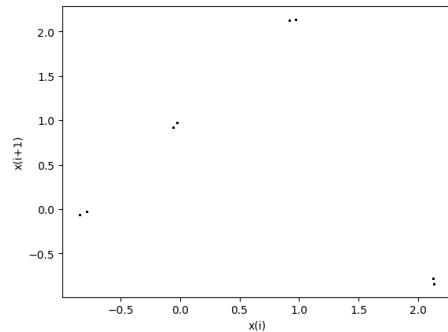
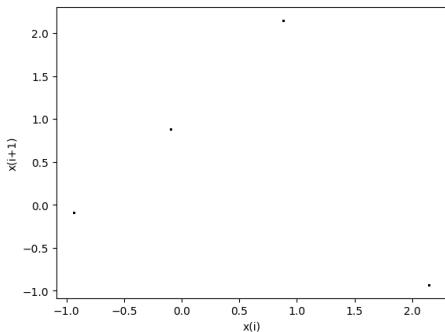
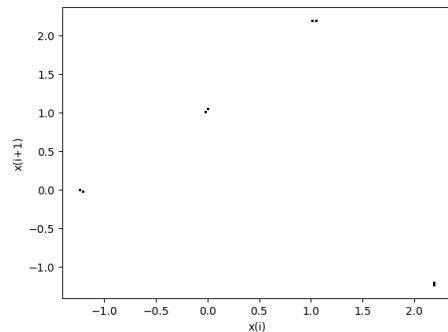
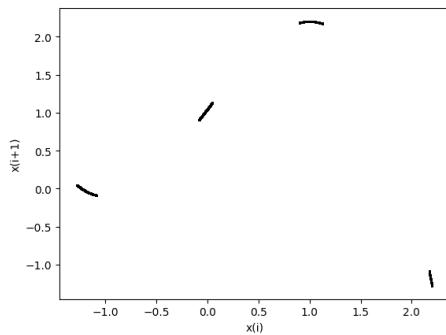
$\Sigma\chi\rho\mu\alpha\ 2.2:$  Διάγραμμα διακλάδωσης, για :



$\Sigma\chi\rho\mu\alpha\ 2.3:$  Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.1$ .

(α')  $\Gamma \alpha k=0.3$ (β')  $\Gamma \alpha k=0.41$ (γ')  $\Gamma \alpha k=0.047$ (δ')  $\Gamma \alpha k=0.476$ (ε')  $\Gamma \alpha k=0.4778$ (Γ')  $\Gamma \alpha k=0.479$ (ζ')  $\Gamma \alpha k=0.517$ (η')  $\Gamma \alpha k=0.519$ 

$\Sigma$ χήμα 2.4: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος:

(α')  $\Gamma \alpha k=0.522$ (β')  $\Gamma \alpha k=0.524$ (γ')  $\Gamma \alpha k=0.555$ (δ')  $\Gamma \alpha k=0.559$ (ε')  $\Gamma \alpha k=0.568$ (Γ')  $\Gamma \alpha k=0.5735$ (ζ')  $\Gamma \alpha k=0.575$ 

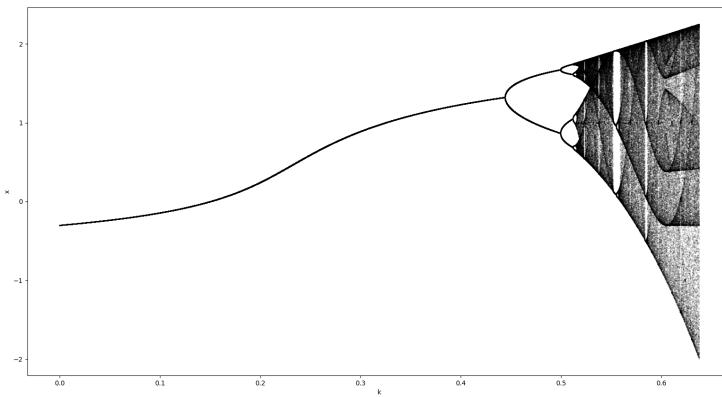
Σχήμα 2.5: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β' μέρος:

### 2.1.2 Για $q=-0.3$

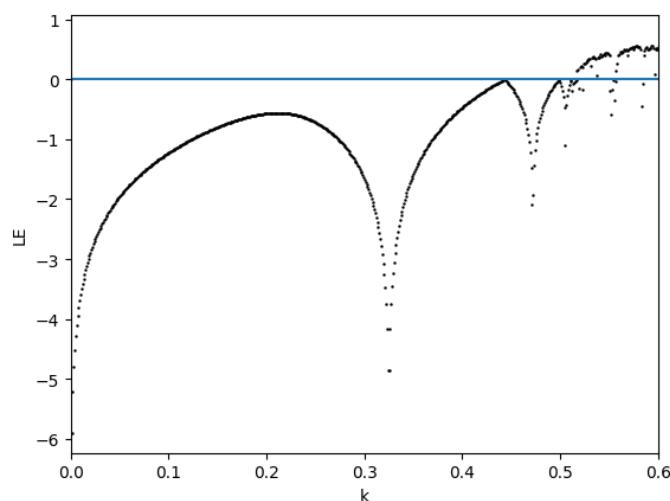
Στο σχήμα 2.6 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.3$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$ , ενώ για  $k = 0.44$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό των εμφανίζει για  $k=0.5$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.511$ (περίοδος-8). Στην συνέχεια για  $k>0.5165$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.551$ (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k=0.555$ (περίοδος-6) και  $k=0.556$ (περίοδος-12) για  $k>0.5573$ . Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για  $k=0.583$  (περίοδος-4) και μετά από ένα διπλασιασμό για  $k=0.5846$ (Περίοδος-7) είσέρχεται για τελευταία φορά στο χάος για  $k=0.5851$ . Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.7 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.636]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.511$ , στο  $0.551 < k < 0.556$ , και στο  $0.583 < k < 0.5846$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.2 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος-1	2.4α'
0.44	Περίοδος-2	2.4β'
0.5	Περίοδος-4	2.4β'
0.511	Περίοδος-8	2.4γ'
0.5165	Χάος	2.4ε'
0.551	Περίοδος-3	2.4Γ')
0.555	Περίοδος-6	2.4η'
0.556	Περίοδος-12	2.5α'
0.5573	Χάος	2.5β'
0.583	Περίοδος-4	2.5γ'
0.5846	Περίοδος-7	2.5δ'
0.5851	Χάος	2.5ζ'

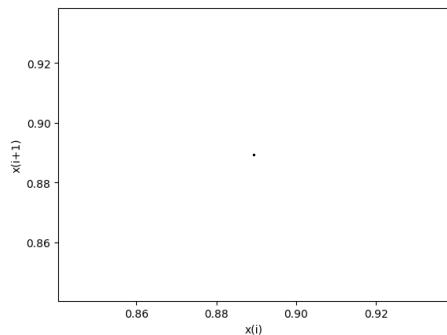
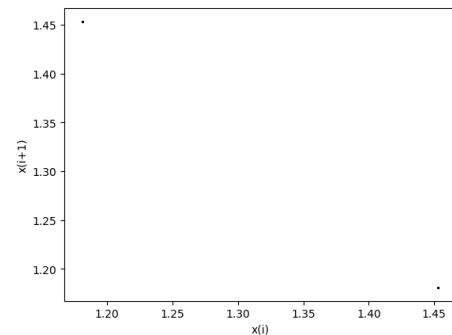
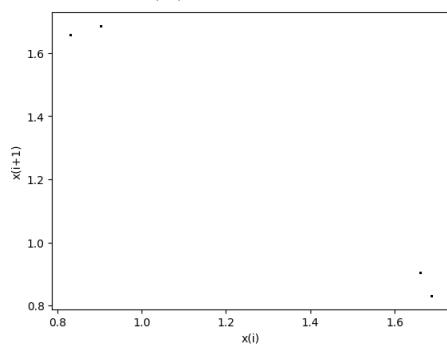
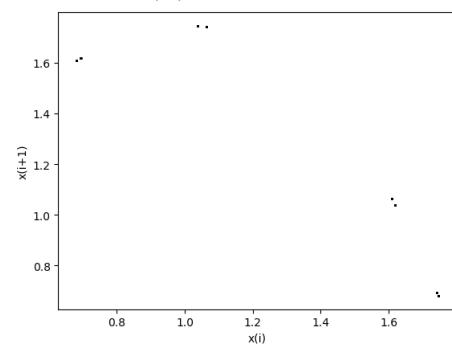
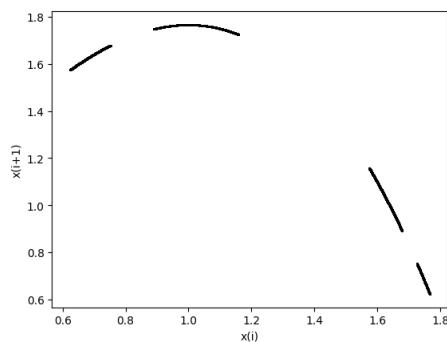
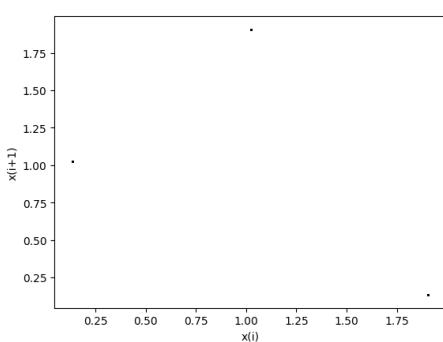
Πίνακας 2.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.3$



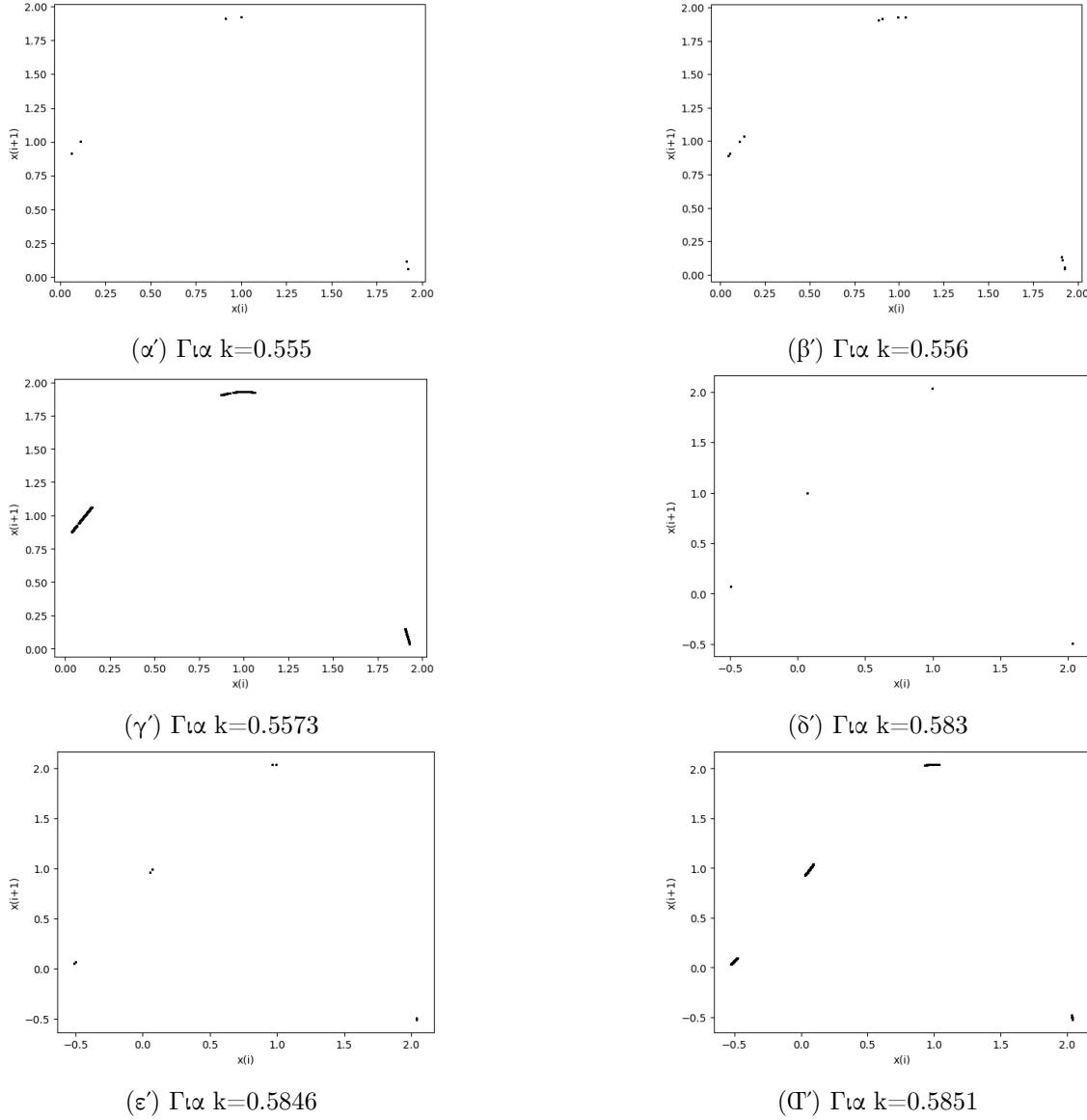
Σχήμα 2.6: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.3$



Σχήμα 2.7: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.3$

(α')  $\Gamma\alpha k=0.3$ (β')  $\Gamma\alpha k=0.44$ (γ')  $\Gamma\alpha k=0.5$ (δ')  $\Gamma\alpha k=0.511$ (ε')  $\Gamma\alpha k=0.5165$ (Π')  $\Gamma\alpha k=0.551$ 

$\Sigma$ χήμα 2.8: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α' μέρος :



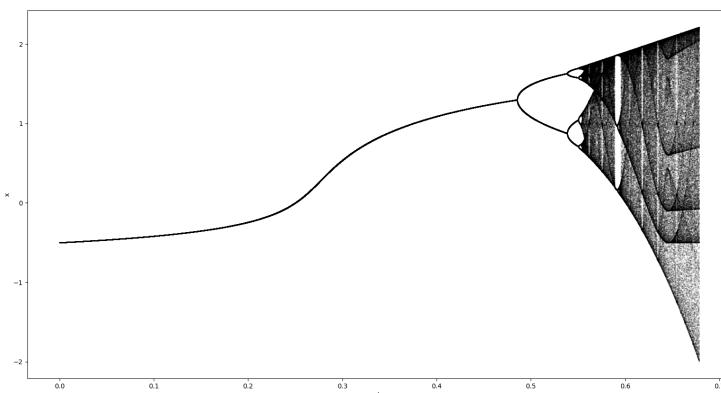
Σχήμα 2.9: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β' μέρος :

### 2.1.3 Για $q=-0.5$

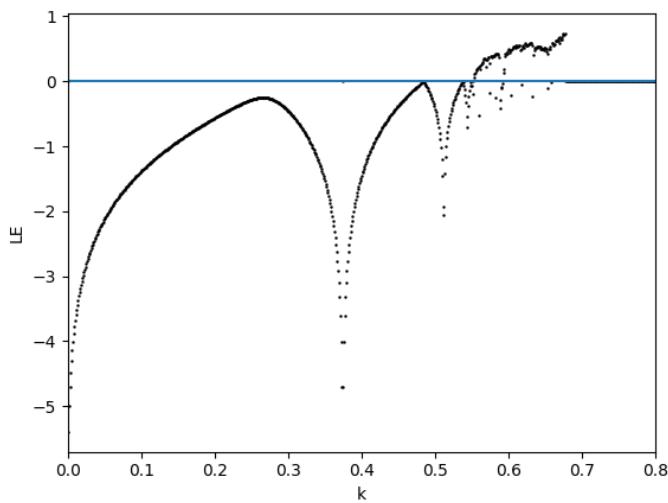
Στο σχήμα 2.10 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.5$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$ , ενώ για  $k = 0.48$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.53$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.55$  (περίοδος-8) και τον τέταρτο για  $k=0.5531$  (περίοδος-15). Στην συνέχεια για  $k>0.5534$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.59$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k=0.59377$  (περίοδος-6), για  $k>0.594$ . Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.679]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.5534$ , στο  $0.59 < k < 0.594$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.3 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος-1	2.4α'
0.48	Περίοδος-2	2.4β'
0.53	Περίοδος-4	2.4β'
0.55	Περίοδος-8	2.4γ'
0.5531	Περίοδος-15	
0.5534	Χάος	2.4ε'
0.59	Περίοδος-3	2.4Γ')
0.593	Περίοδος-6	2.4η'
0.594	Χάος	2.5β'

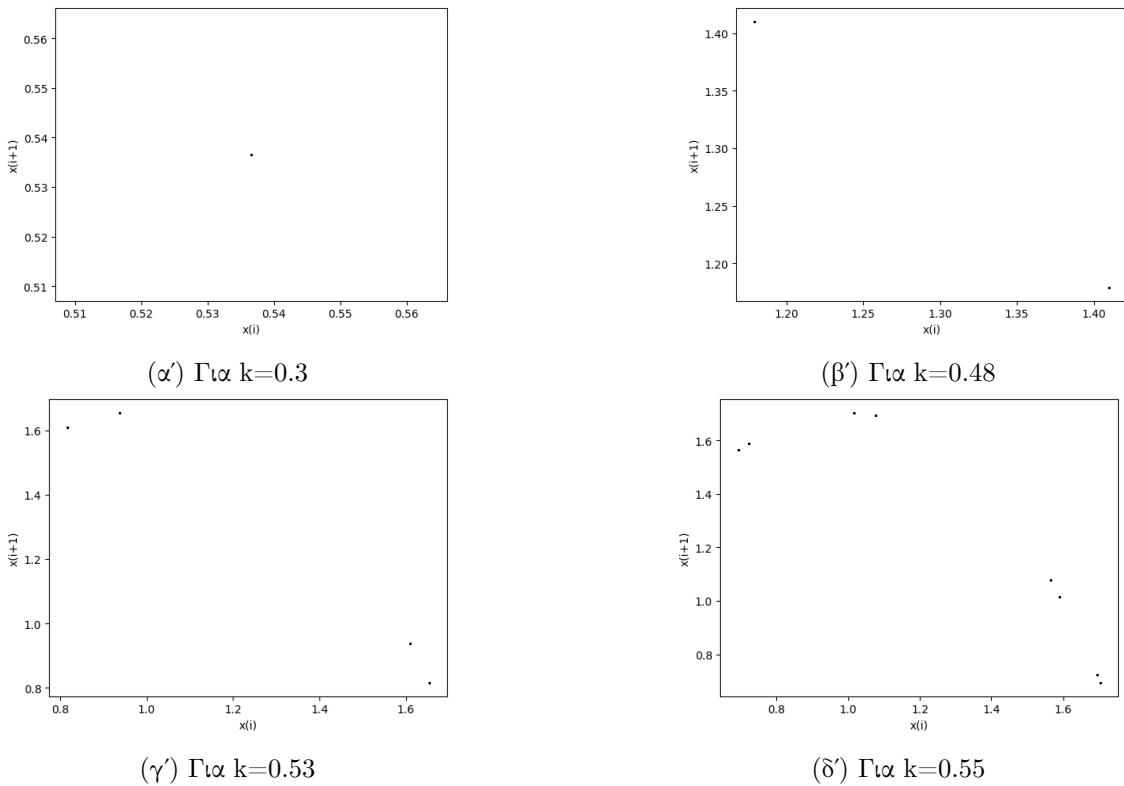
Πίνακας 2.3: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.5$



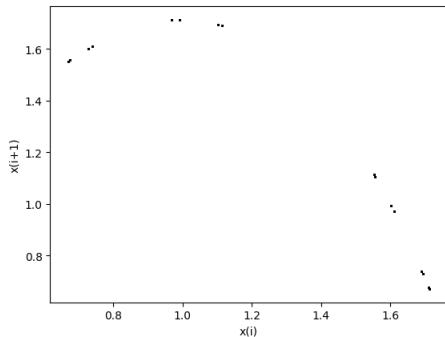
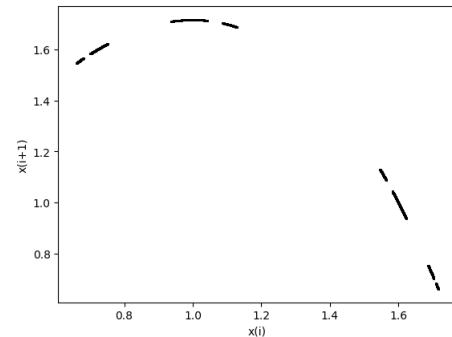
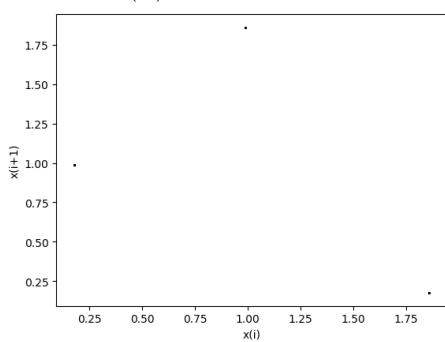
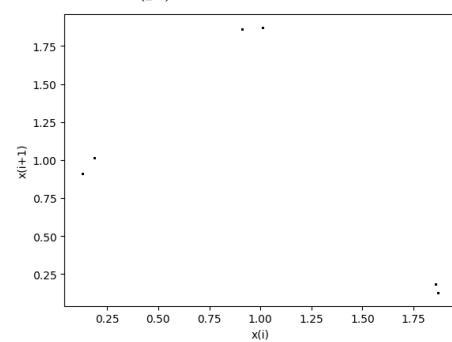
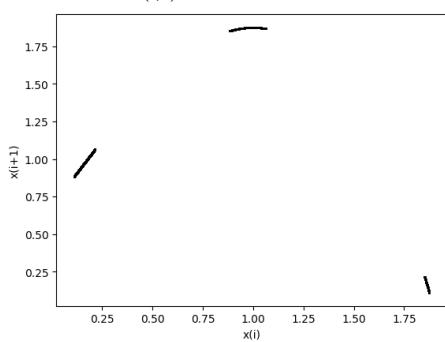
Σχήμα 2.10: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.5$



Σχήμα 2.11: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.5$



Σχήμα 2.12: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α')  $\Gamma\alpha$   $k=0.5531$ (β')  $\Gamma\alpha$   $k=0.5534$ (γ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.58$ (δ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.591$ (ε')  $\Gamma\alpha$   $k=0.5927$ 

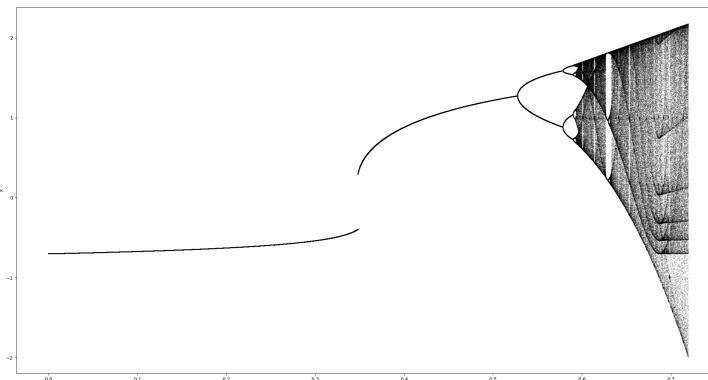
$\Sigma$ χήμα 2.13: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β' μέρος:

### 2.1.4 Για $q=-0.7$

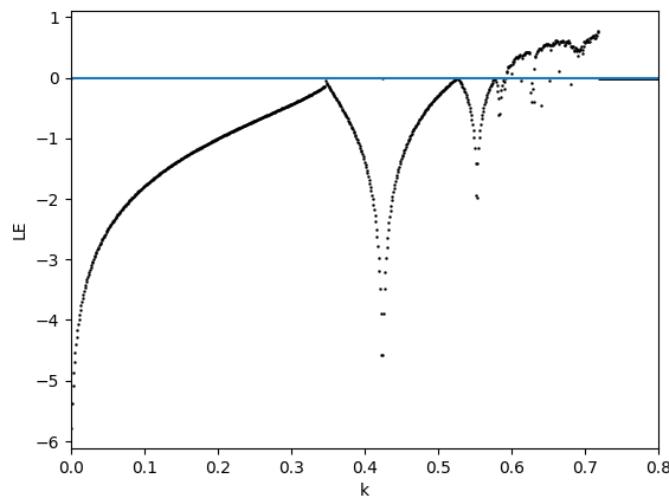
Στο σχήμα 2.14 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.7$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$  αλλά από  $k[0.3469, 0.3486]$  "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από  $k=3.469$  ξαναξεκινάει από περίοδο-1. Για  $k = 0.52$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.57$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.592$  (περίοδος-8) και τον τέταρτο για  $k=0.593$  (περόδος-15). Στην συνέχεια για  $k > 0.593$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.627$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k=0.63$  (περίοδος-6)  $k=0.631$  (περίοδος-11), για  $k > 0.631$ . Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.72]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.594$ , στο  $0.627 < k < 0.632$ , παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.4 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.25	Περίοδος-1	2.16α'
0.3469	Περίοδος-1	2.16β'
0.52	Περίοδος-2	2.16γ'
0.57	Περίοδος-4	2.16δ'
0.592	Περίοδος-8	2.16ε'
0.593	Περίοδος-15	2.17α'
0.594	Χάος	2.17β'
0.627	Περίοδος-3	2.17γ'
0.630	Περίοδος-6	2.17δ'
0.631	Περίοδος-11	2.17ε'
0.632	Χάος	2.17Γ'

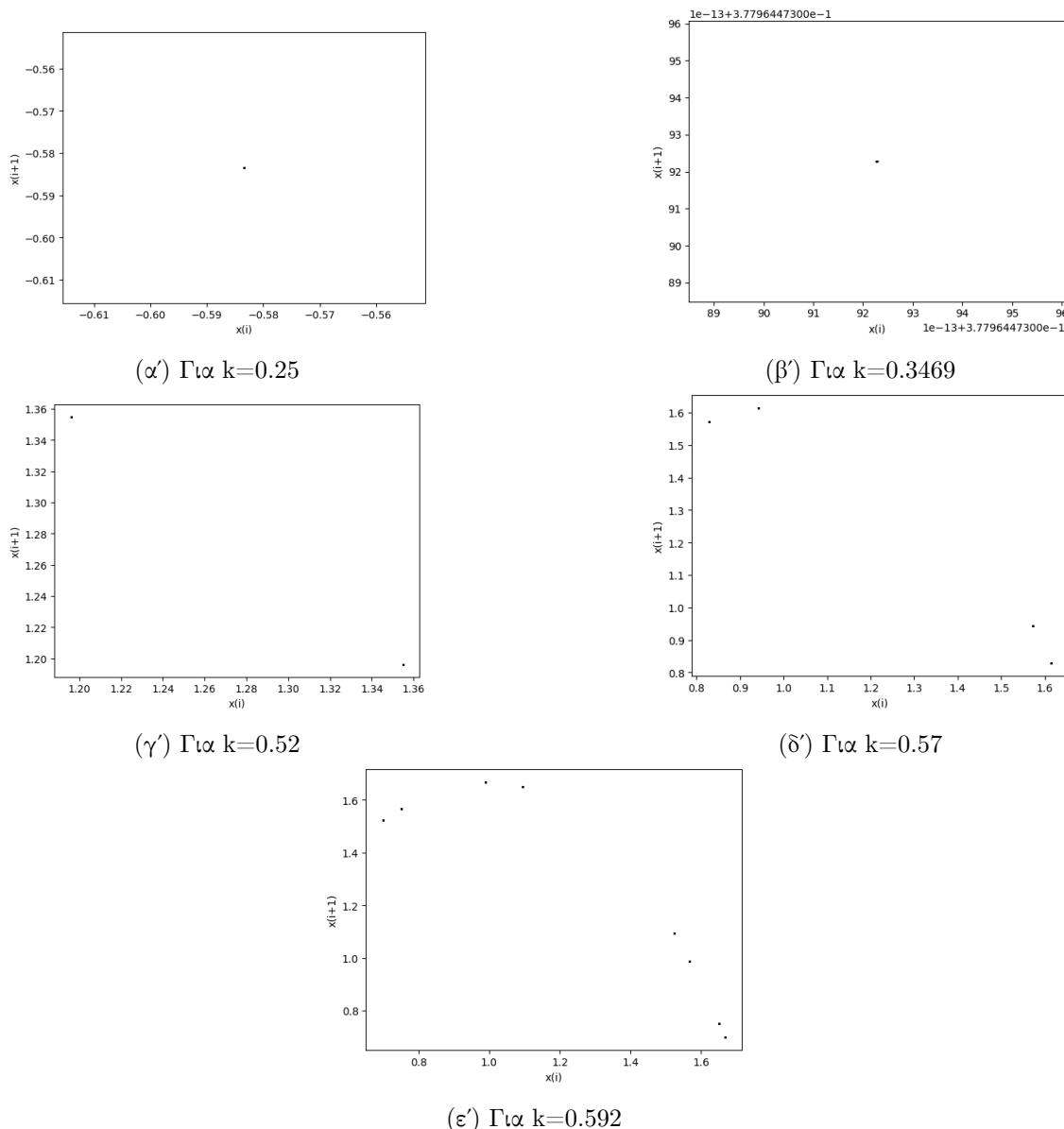
Πίνακας 2.4: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.7$



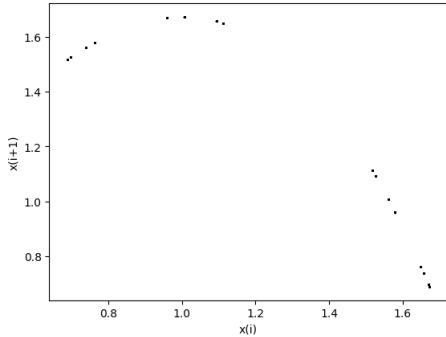
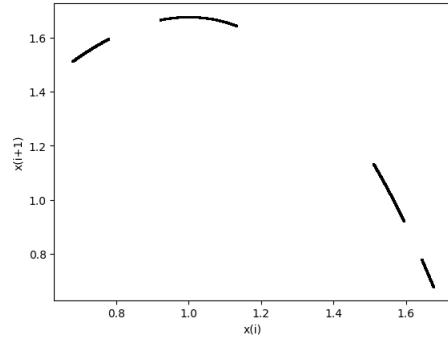
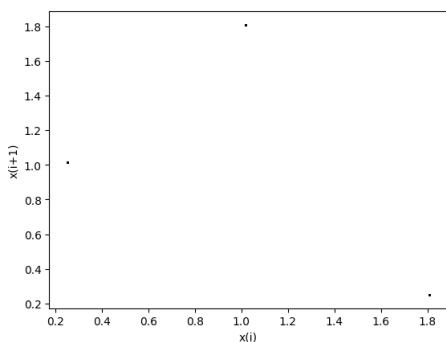
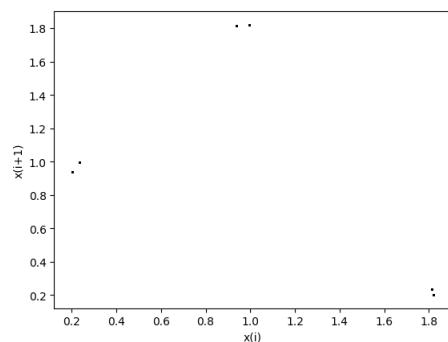
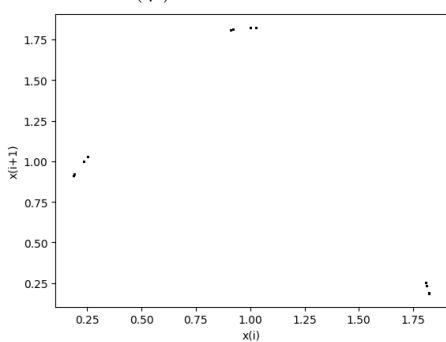
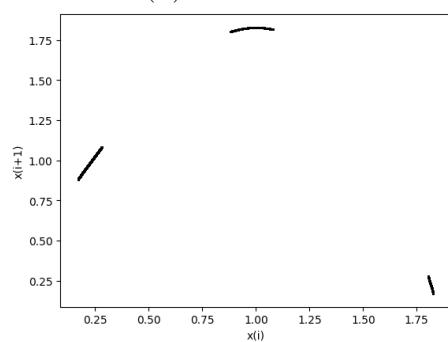
Σχήμα 2.14: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.7$



Σχήμα 2.15: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.7$ .



Σχήμα 2.16: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α')  $\Gamma\alpha$   $k=0.593$ (β')  $\Gamma\alpha$   $k=0.594$ (γ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.627$ (δ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.63$ (ε')  $\Gamma\alpha$   $k=0.631$ (Π')  $\Gamma\alpha$   $k=0.632$ 

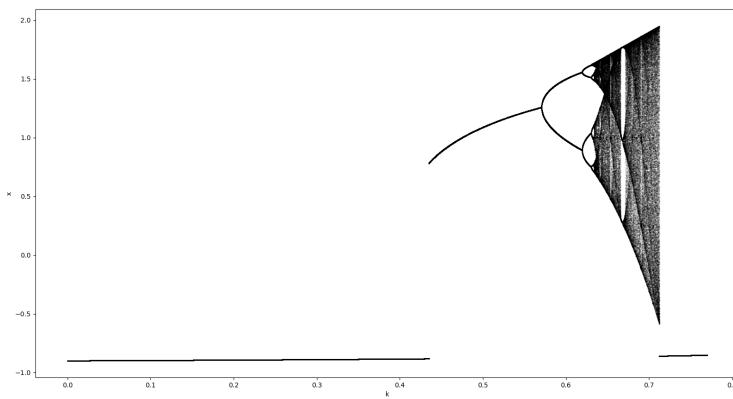
$\Sigma$ χήμα 2.17: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος :

### 2.1.5 Για $q=-0.9$

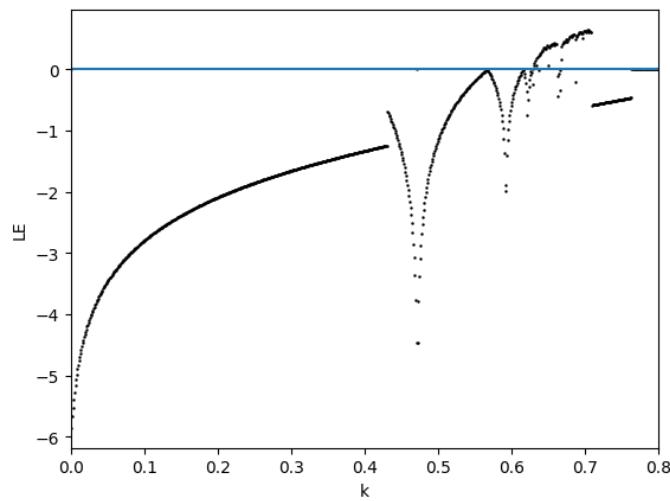
Στο σχήμα 2.18 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.9$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$  αλλά από  $k[0.43, 0.436]$  "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από  $k=3.436$  ξαναξεκινάει από περίοδο-1. Για  $k = 0.57$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.62$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.63$  (περίοδος-8) και τον τέταρτο για  $k=0.633$  (περίοδος-16). Στην συνέχεια για  $k > 0.635$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.665$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από ένα διπλασιασμό  $k=0.668$  (περίοδος-6), για  $k > 0.671$ . Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για  $k=0.72$  (περίοδος-1). Για  $q=-0.9$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.19 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.77]. Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.635$ , στο  $0.665 < k < 0.671$  και  $0.72 < k < 0.77$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.5 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.43	Περίοδος-1	2.20α'
0.436	Περίοδος-1	2.20β'
0.57	Περίοδος-2	2.20γ'
0.62	Περίοδος-4	2.20δ'
0.63	Περίοδος-8	2.20ε'
0.633	Περίοδος-16	2.21α'
0.635	Χάος	2.21β'
0.665	Περίοδος-3	2.21γ'
0.668	Περίοδος-6	2.21δ'
0.671	Χάος	2.21ε'
0.72	Περίοδος-1	2.21Γ'

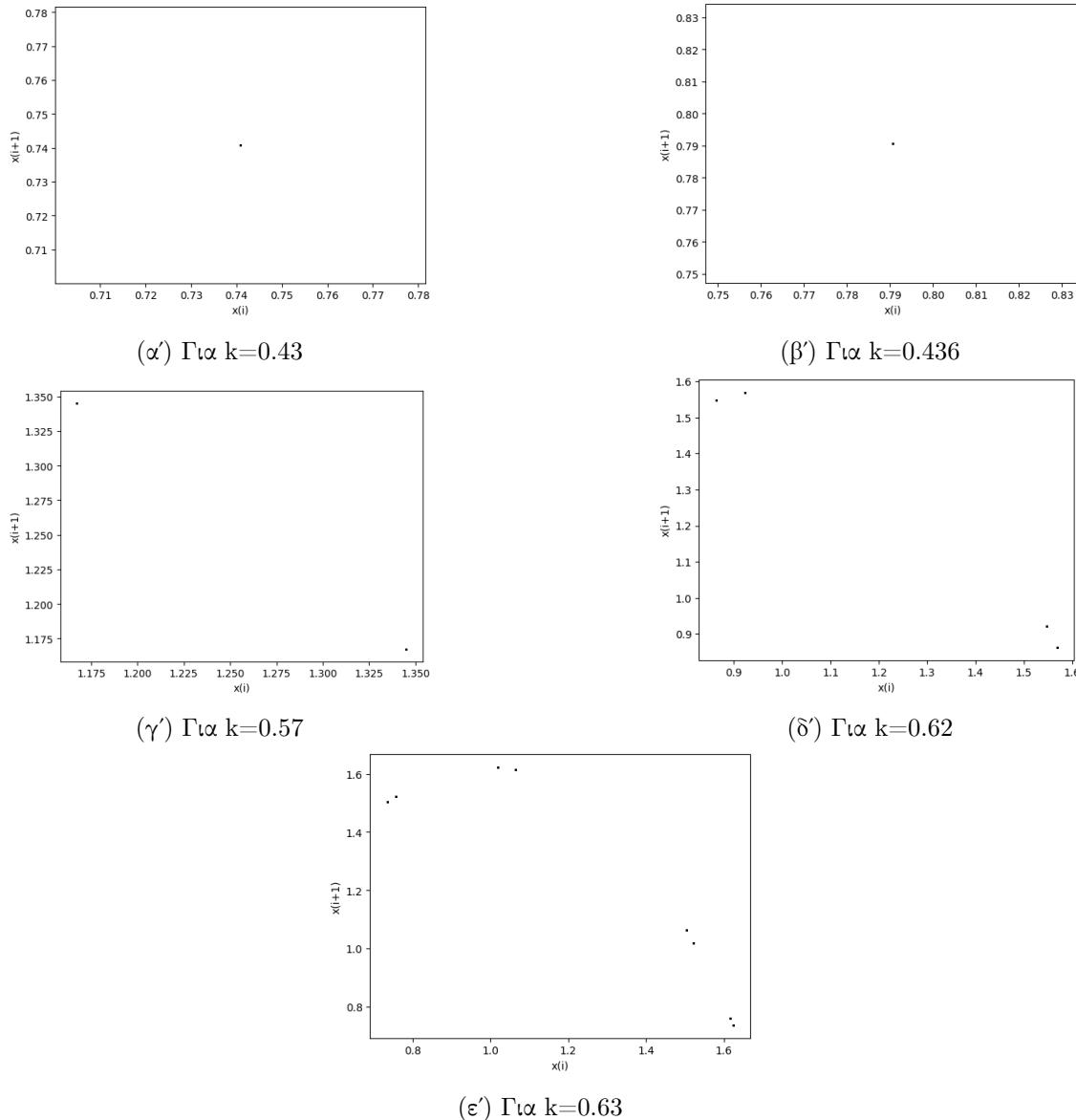
Πίνακας 2.5: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$



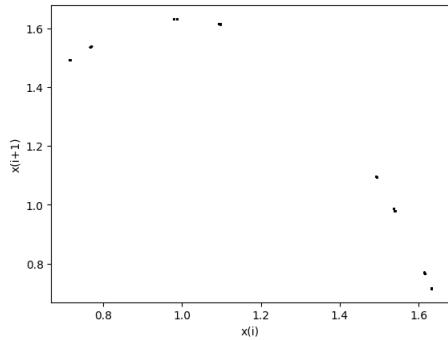
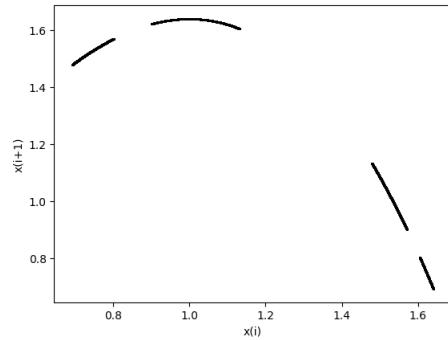
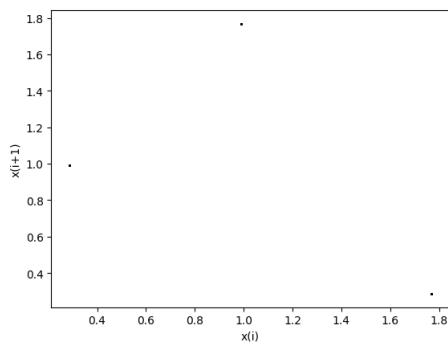
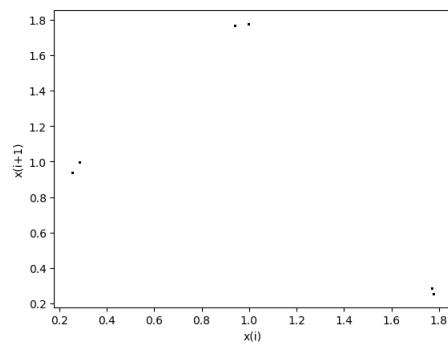
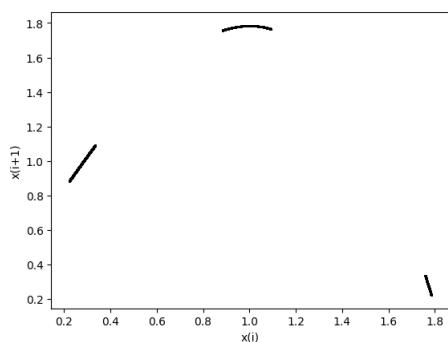
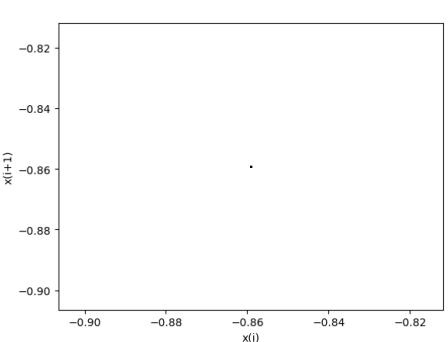
Σχήμα 2.18: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$



Σχήμα 2.19: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$



$\Sigma$ χήμα 2.20: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος:

(α')  $\Gamma\alpha$   $k=0.633$ (β')  $\Gamma\alpha$   $k=0.635$ (γ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.665$ (δ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.668$ (ε')  $\Gamma\alpha$   $k=0.671$ (Π')  $\Gamma\alpha$   $k=0.72$ 

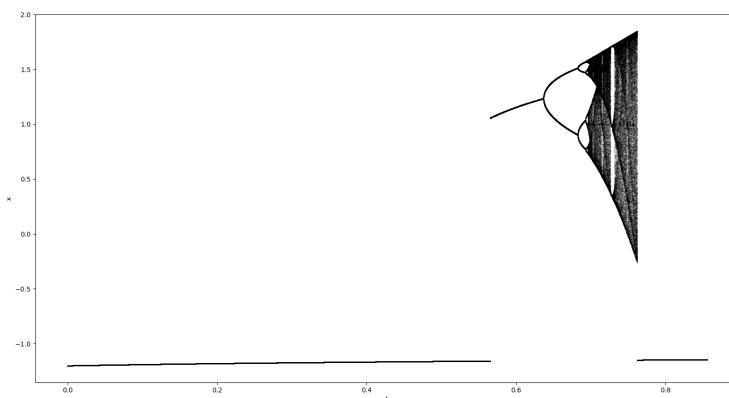
$\Sigma\chi\eta\mu\alpha$  2.21: Διαιγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος:

### 2.1.6 Για $q=-1.2$

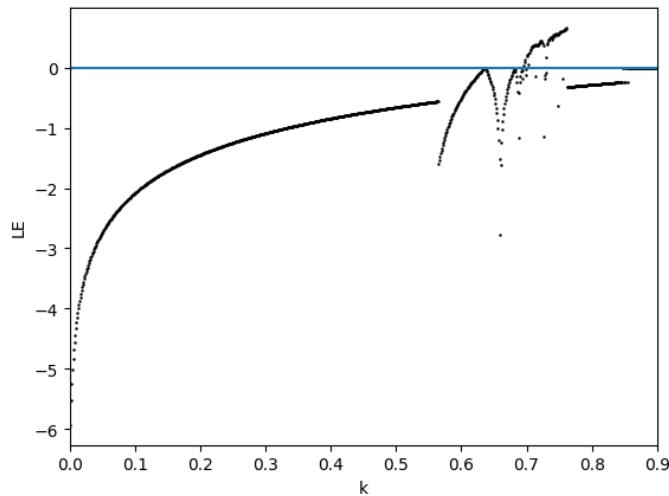
Στο σχήμα 2.22 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -1.2$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.55$  αλλά από  $k[0.56,0.566]$  "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από  $k=0.566$  ξαναξεκινάει από περίοδο-1. Για  $k = 0.63$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.67$  (περίοδος-4) και τον τρίτο για  $k=0.69$  (περίοδος-8). Στην συνέχεια για  $k>0.696$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.726$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από ένα διπλασιασμό  $k=0.729$  (περίοδος-6), για  $k>0.731$ . Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για  $k=0.762$  (περίοδος-1). Για  $q=-1.2$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου, ενώ παρατηρείται και εσωτερική κρίση ελκυστήρα για  $k=0.726$  αλλά και για  $k=0.762$ . Επιπλέον, στο σχήμα 2.23 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.77]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.69$ , στο  $0.726 < k < 0.731$  και  $0.72 < k < 0.8574$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.6 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.55	Περίοδος-1	2.24α'
0.566	Περίοδος-1	2.24β'
0.63	Περίοδος-2	2.24γ'
0.68	Περίοδος-4	2.24δ'
0.69	Περίοδος-8	2.24ε'
0.696	Χάος	2.24Γ'
0.726	Περίοδος-3	2.25α'
0.729	Περίοδος-6	2.25β'
0.731	Χάος	2.25γ'
0.762	Περίοδος-1	2.25δ'

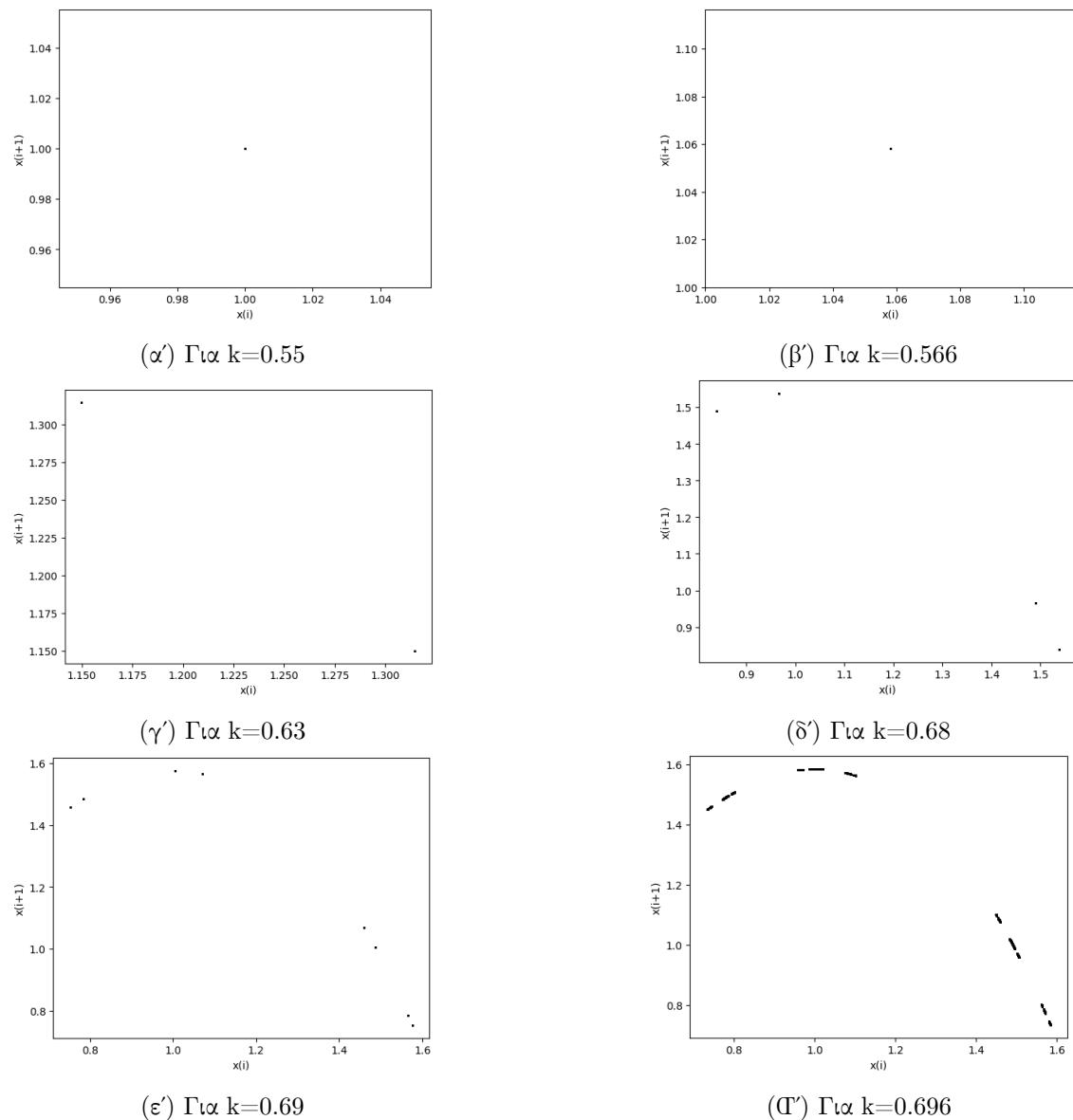
Πίνακας 2.6: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$ .



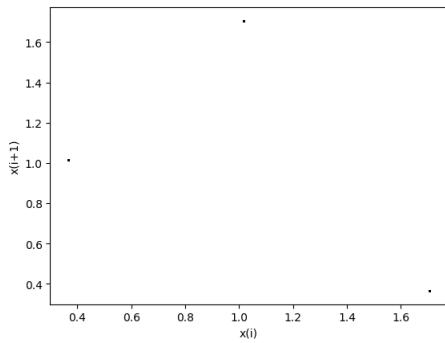
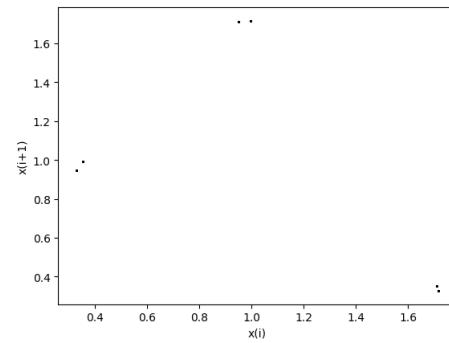
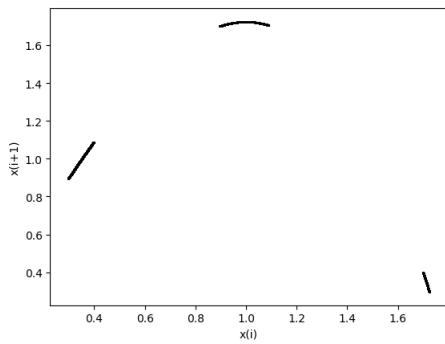
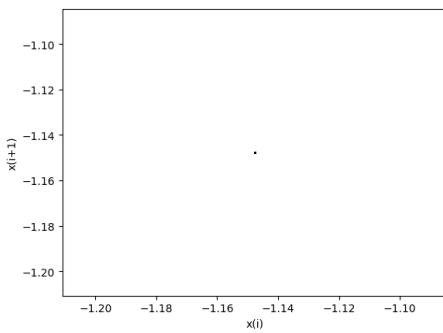
Σχήμα 2.22: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.2$



Σχήμα 2.23: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.2$



Σχήμα 2.24: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α') Για  $k=0.726$ (β') Για  $k=0.729$ (γ') Για  $k=0.731$ (δ') Για  $k=0.762$ 

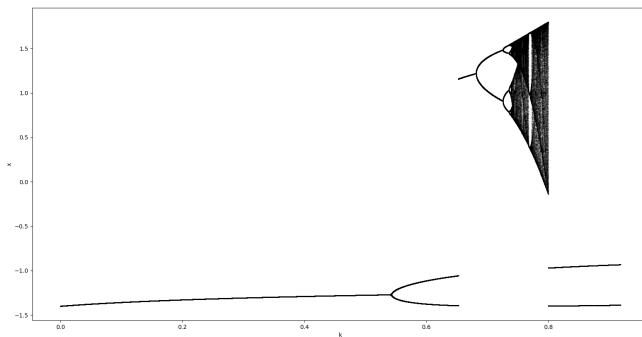
$\Sigma$ χήμα 2.25: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος :

### 2.1.7 Για $q=-1.4$

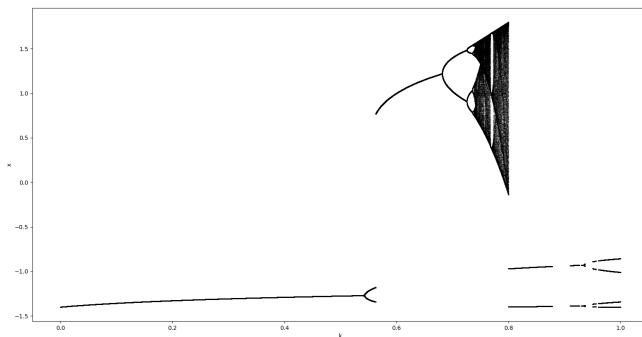
Στο σχήμα 2.27 παρατίθονται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q = -1.4$  και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό  $x_0$ . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.26 $\alpha'$  ( $x_0 = 0.1$ ) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσεις 2.26 $\beta'$  ( $x_0 = 0.5$ ), 2.26 $\gamma'$  ( $x_0 = 1$ , 2.26 $\delta'$  ( $x_0 = -0.1$ ) πατατηρείται ότι για  $q = -1.4$  εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Αυτό το φαινόμενο επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα Lyapunov 2.27 $\alpha'$ , 2.27 $\beta'$ , 2.27 $\gamma'$ , 2.27 $\delta'$ . Στον Πίνακα 2.7 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιές τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική συμπεριφορά ή χαοτική, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.26 $\alpha'$ . Επίσης οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγράμματων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . πό τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  (0.744, 0.7565, 0.768, 0.8), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.26 $\alpha'$  στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-2, αλλά και από περίοδο-2 σε περίοδο-1. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8 Τέλος, στο σχήμα 2.27 $\alpha'$  παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.91]. Οι τιμές του πίνακα 2.7 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχουν σε τιμές του διαγράμματος 2.27 $\alpha'$  όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.4	Περίοδος-1	2.28 $\alpha'$
0.54	Περίοδος-2	2.28 $\beta'$
0.65	Περίοδος-1	2.28 $\gamma'$
0.68	Περίοδος-2	2.28 $\delta'$
0.726	Περίοδος-4	2.28 $\epsilon'$
0.737	Περίοδος-8	2.28 $\Gamma'$
0.738	Περίοδος-15	2.29 $\alpha'$
0.739	Χάος	2.29 $\beta'$
0.744	Περίοδος-6	2.29 $\gamma'$
0.746	Χάος	2.29 $\delta'$
0.7565	Περίοδος-5	2.29 $\epsilon'$
0.757	Χάος	2.29 $\Gamma'$
0.768	Περίοδος-3	2.29 $\zeta'$
0.77	Περίοδος-6	2.29 $\eta'$
0.78	Χάος	2.30 $\alpha'$
0.8	Περίοδος-2	2.30 $\beta'$

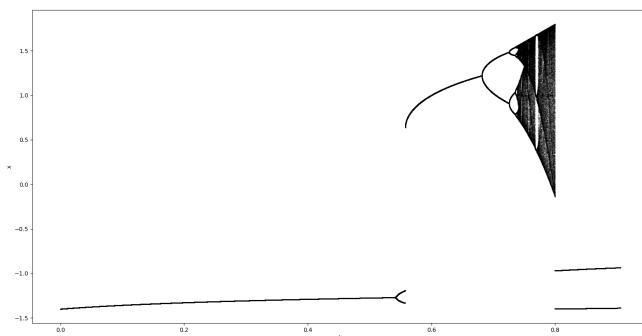
Πίνακας 2.7: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και  $x_i = 0.1$



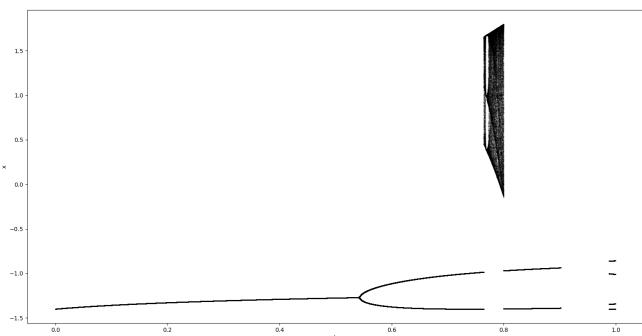
( $\alpha'$ )  $x_0 = 0.1$



( $\beta'$ )  $x_0 = 0.5''$

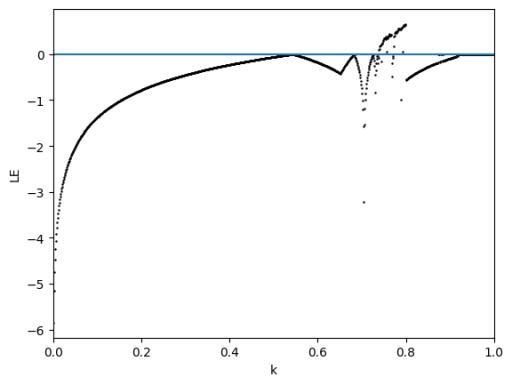
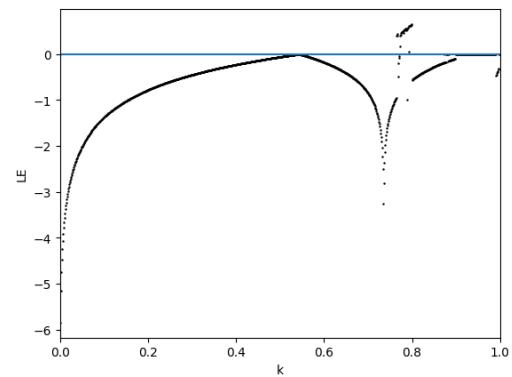
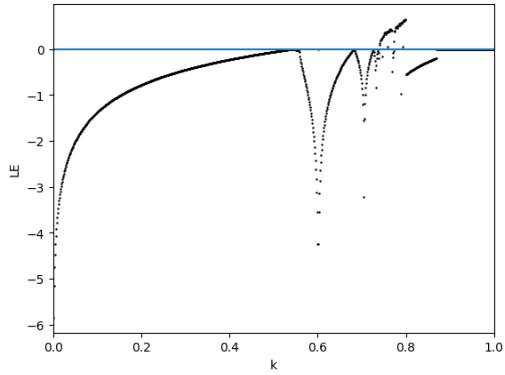
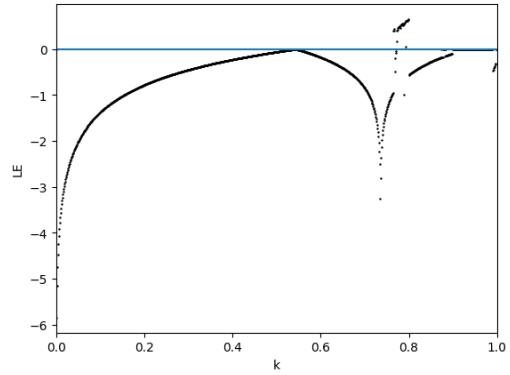


( $\gamma'$ )  $x_0 = 1$

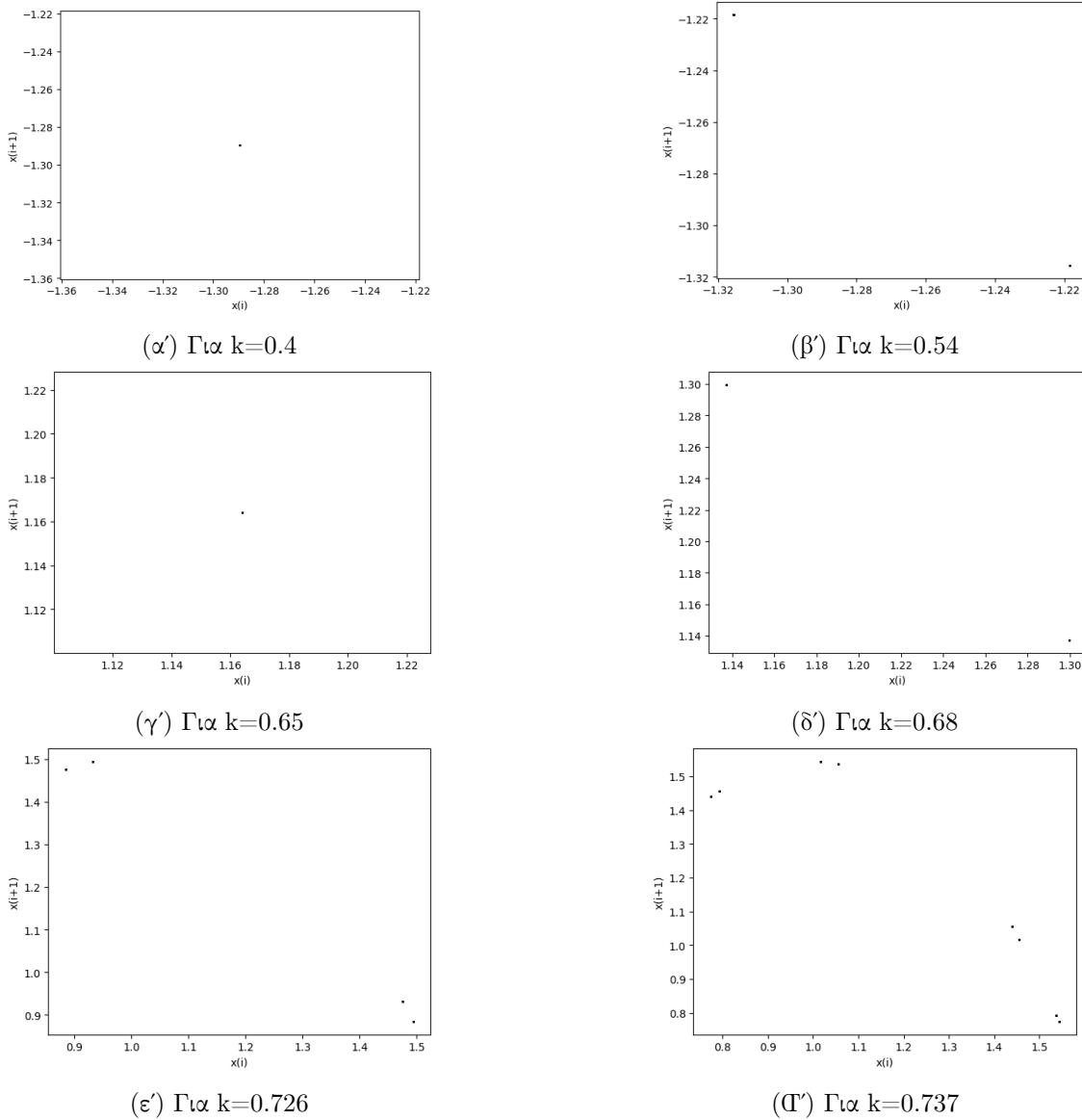


( $\delta'$ )  $x_0 = -0.1$

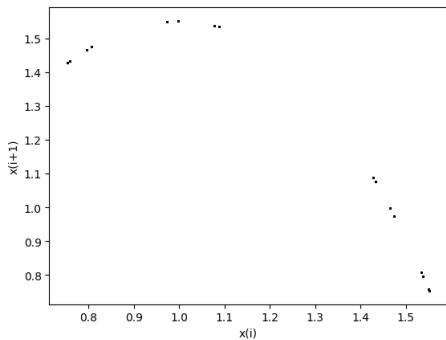
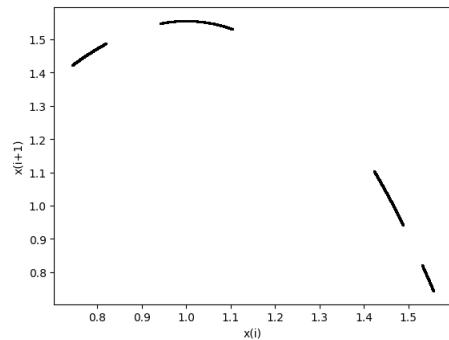
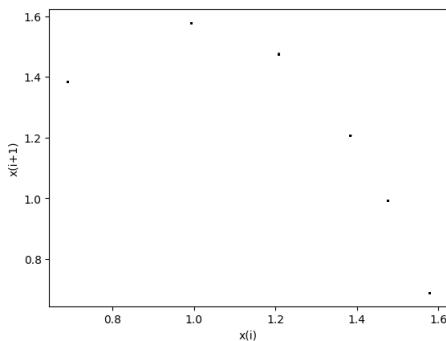
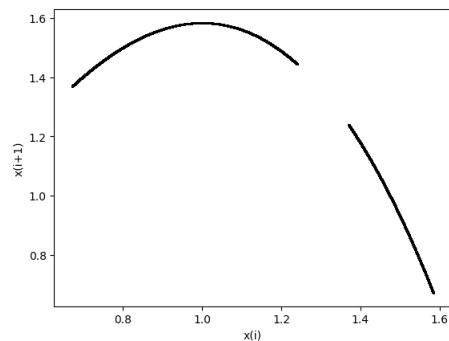
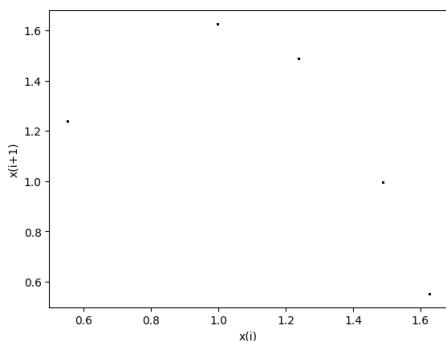
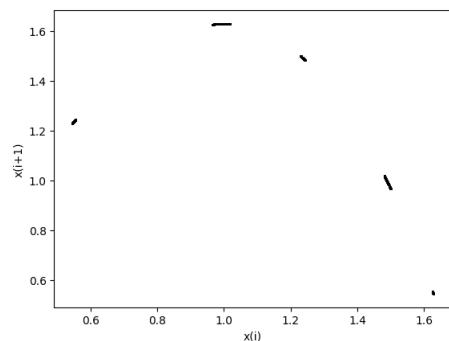
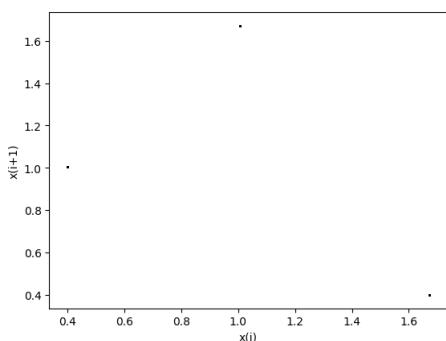
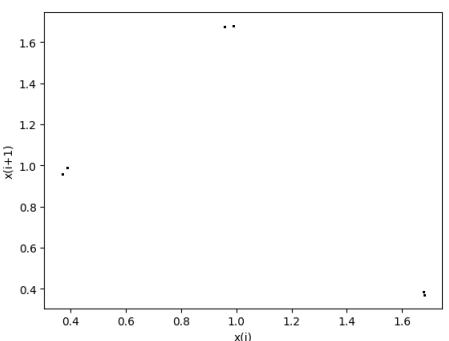
$\Sigma\chi\nu\mu\alpha$  2.26: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και για:

(α')  $x_0 = 0.1$ (β')  $x_0 = 0.5$ (γ')  $x_0 = 1$ (δ')  $x_0 = -0.1$ 

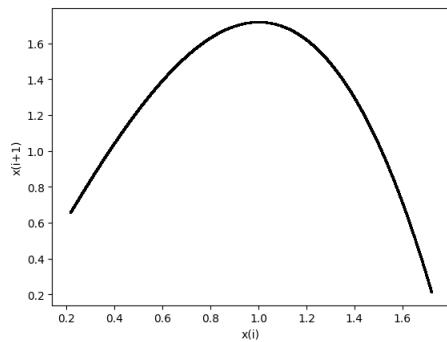
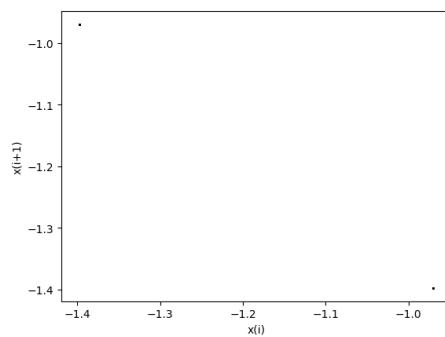
Σχήμα 2.27: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και για:



$\Sigma$ χήμα 2.28: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α')  $\Gamma\alpha k=0.738$ (β')  $\Gamma\alpha k=0.739$ (γ')  $\Gamma\alpha k=0.744$ (δ')  $\Gamma\alpha k=0.746$ (ε')  $\Gamma\alpha k=0.7565$ (Π')  $\Gamma\alpha k=0.757$ (ζ')  $\Gamma\alpha k=0.768$ (η')  $\Gamma\alpha k=0.77$ 

$\Sigma$ χήμα 2.29: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος :

(α') Για  $k=0.78$ (β') Για  $k=0.8$ 

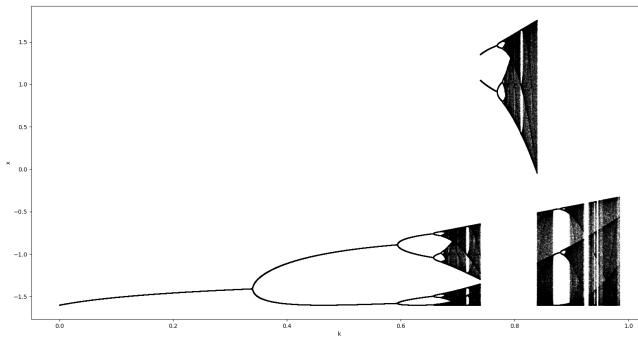
Σχήμα 2.30: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  γι' μέρος :

### 2.1.8 Για $q=-1.6$

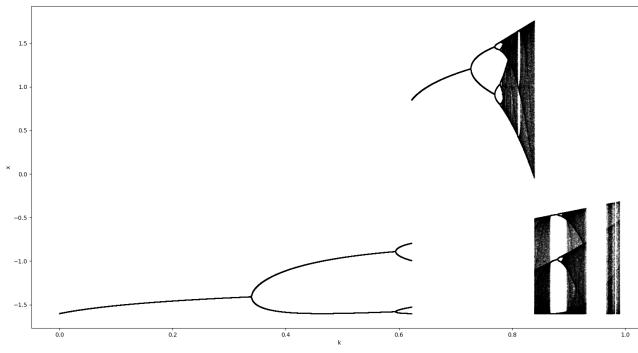
Στα σχήματα 2.32,2.33 παρατίθονται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q = -1.6$  και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό  $x_0$ . Συγχρίνοντας το διάγραμμα 2.31α' ( $x_0 = 0.1$ ) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσεις 2.31β' ( $x_0 = 0.5$ ), 2.31γ' ( $x_0 = 1$ ), 2.31δ' ( $x_0 = 1.5$ ), 2.32α' ( $x_0 = 2$ ), 2.32β' ( $x_0 = -0.1$ ) πατατηρείται ότι για  $q = -1.6$  εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Αυτό το φαινόμενο επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα Lyapunov 2.33α', 2.33β', 2.33γ', 2.33δ', 2.34α', 2.34β'. Στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.31α' εμφανίζονται κάποιες διακοπές της γραφικής παράστασης στην περιοχή του χάους. Αυτό οφείλεται στο ότι η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αποκλίνει σε πολύ μεγάλες τιμές. Στον Πίνακα 2.8 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιές τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.31α'. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  (0.683, 0.7, 0.715, 0.74, 0.788, 0.799, 0.81, 0.94), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.31α' στα κενά μεταξύ χάους και περιοδικής συμπεριφοράς, όπως και στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-2. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8 Τέλος, στο σχήμα 2.32α' παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.982]$ . Οι τιμές του πίνακα 2.8 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχουν σε τιμές του διαγράμματος 2.31α' όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.31	Περίοδος-1
0.34	Περίοδος-2
0.595	Περίοδος-4
0.66	Περίοδος-8
0.671	Περίοδος-12
0.675	Χάος
0.683	Περίοδος-12
0.685	Χάος
0.7	Περίοδος-18
0.71	Χάος
0.715	Περίοδος-6
0.716	Περίοδος-12
0.717	Χάος
0.74	Περίοδος-2
0.77	Περίοδος-4
0.779	Περίοδος-8
0.782	Χάος
0.788	Περίοδος-20
0.789	Χάος
0.799	Περίοδος-5
0.8	Χάος
0.81	Περίοδος-3
0.812	Περίοδος-6
0.813	Χάος
0.8393	Κενό
0.867	Περίοδος-3
0.88	Περίοδος-6
0.886	Περίοδος-10
0.889	Χάος
0.92	Κενό
0.94	Περίοδος-5
0.942	Χάος
0.943	Κενό
0.948	Χάος

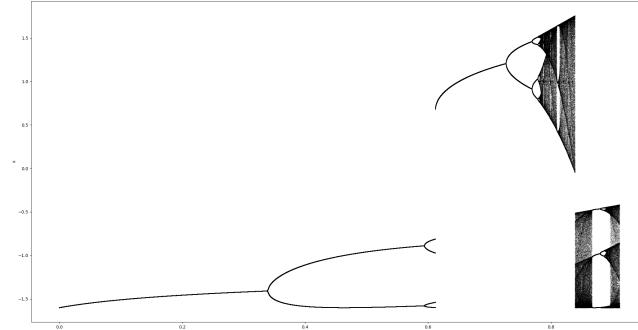
Πίνακας 2.8: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k, για a=1, b=2 και q=-1.6, για  $x_i = 0.1$



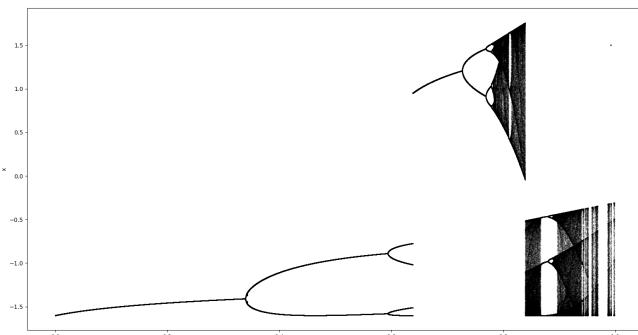
( $\alpha'$ )  $x_0 = 0.1$



( $\beta'$ )  $x_0 = 0.5$

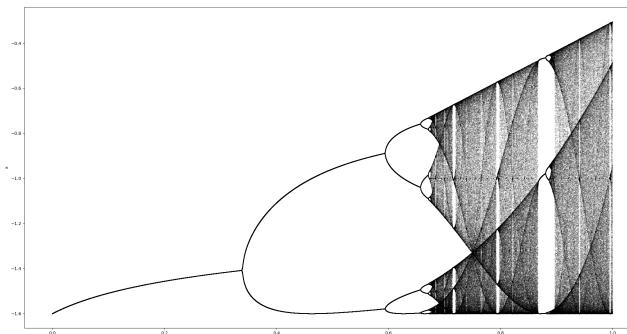


( $\gamma'$ )  $x_0 = 1$

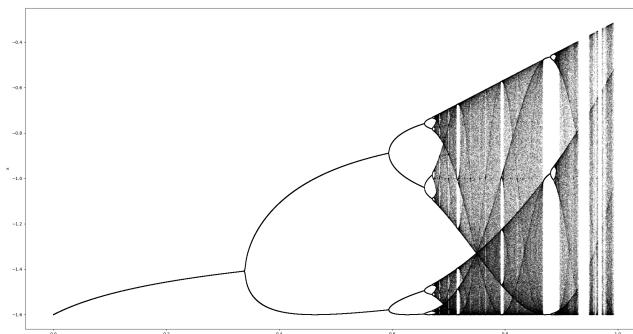


( $\delta'$ )  $x_0 = -1.5$

$\Sigma\chi\eta\mu\alpha$  2.31: Διάγραμμα διακλάδωσης ( $\alpha'$  μέρος), για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.6$  και για:

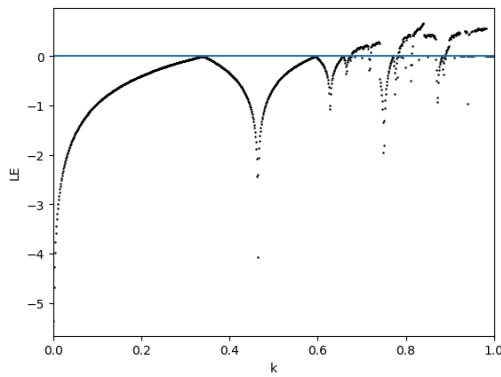
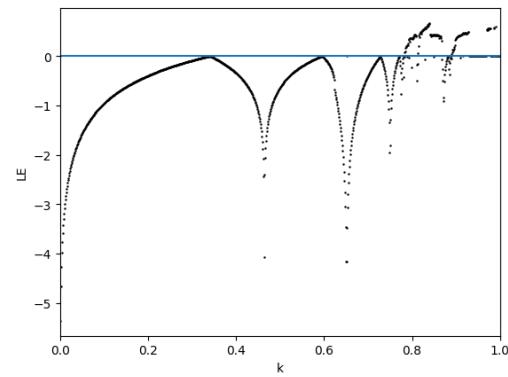
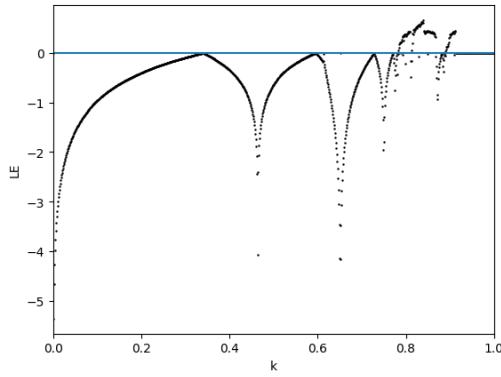
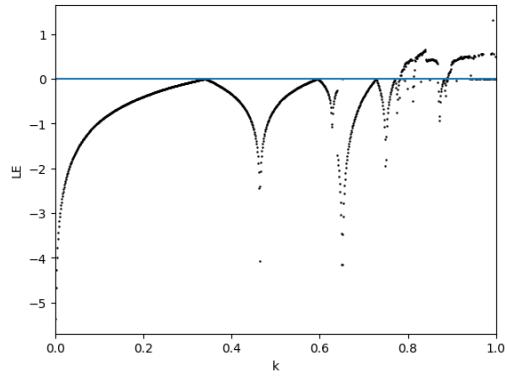


( $\alpha'$ )  $x_0 = 2$

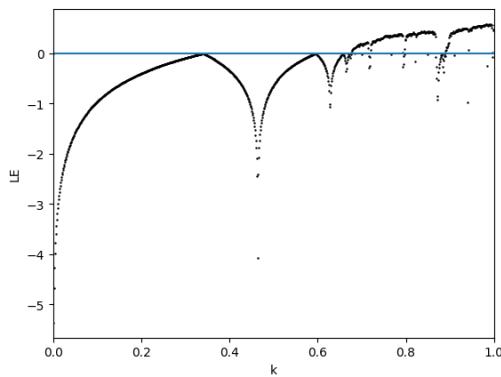
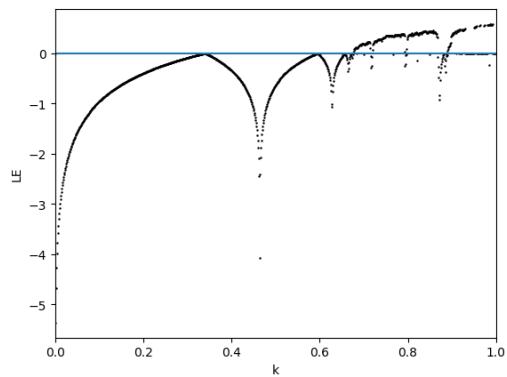


( $\beta'$ )  $x_0 = -0.1$

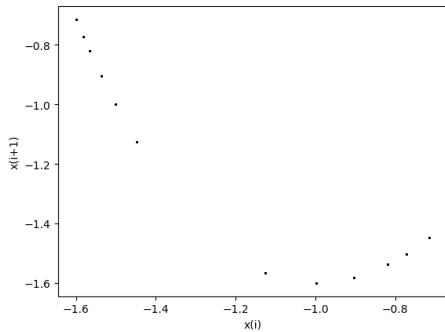
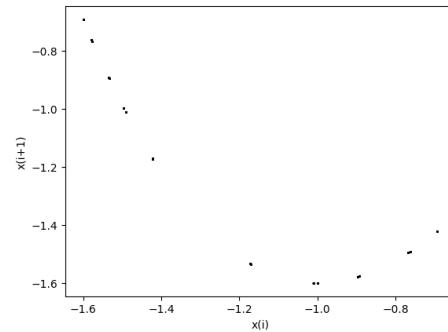
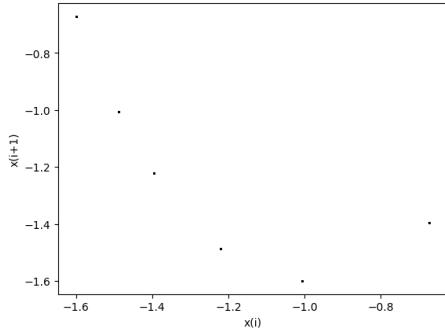
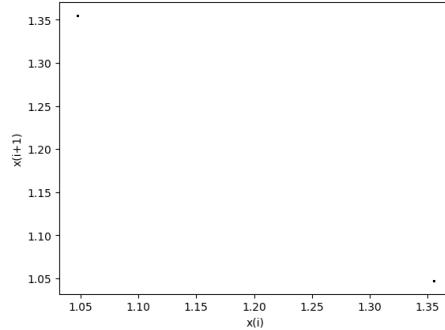
Σχήμα 2.32: Διάγραμμα διαιλάδωσης ( $\beta'$ μέρος), για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.6$  και για:

(α')  $x_0 = 0.1$ (β')  $x_0 = 0.5$ (γ')  $x_0 = 1$ (δ')  $x_0 = 1.5$ 

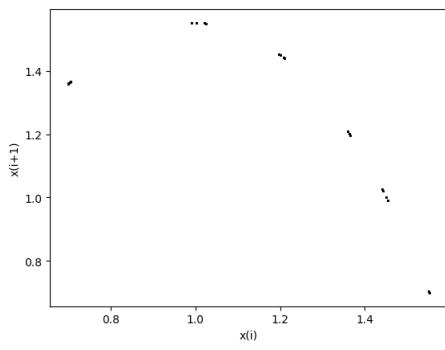
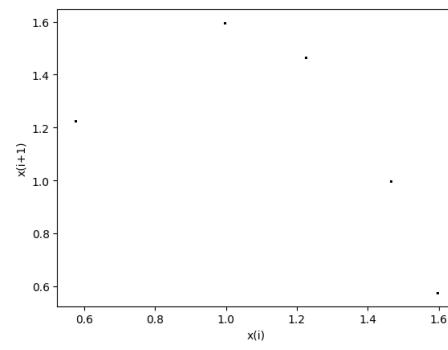
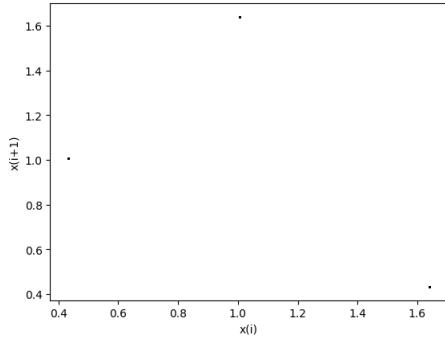
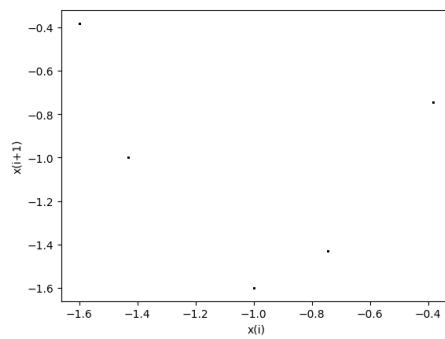
**Σχήμα 2.33:** Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ (α' μέρος), για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και για:

(α')  $x_0 = 2$ (β')  $x_0 = -0.1$ 

**Σχήμα 2.34:** Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ (β' μέρος), για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και για:

(α')  $\Gamma\alpha$   $k=0.683$ (β')  $\Gamma\alpha$   $k=0.7$ (γ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.715$ (δ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.74$ 

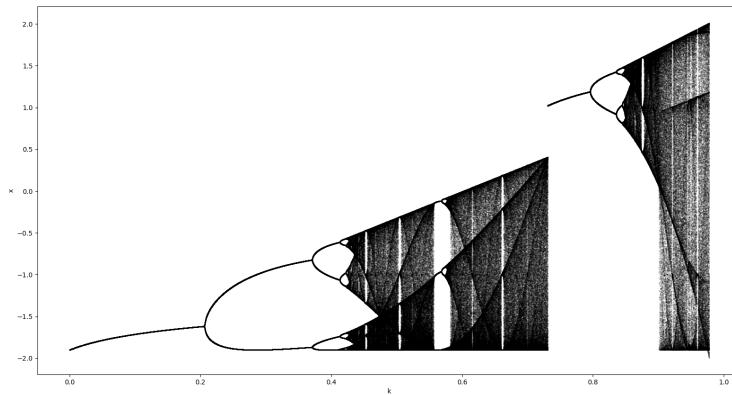
$\Sigma\chi\acute{\mu}\mu\alpha$  2.35: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α')  $\Gamma\alpha$   $k=0.788$ (β')  $\Gamma\alpha$   $k=0.799$ (γ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.8$ (δ')  $\Gamma\alpha$   $k=0.94$ 

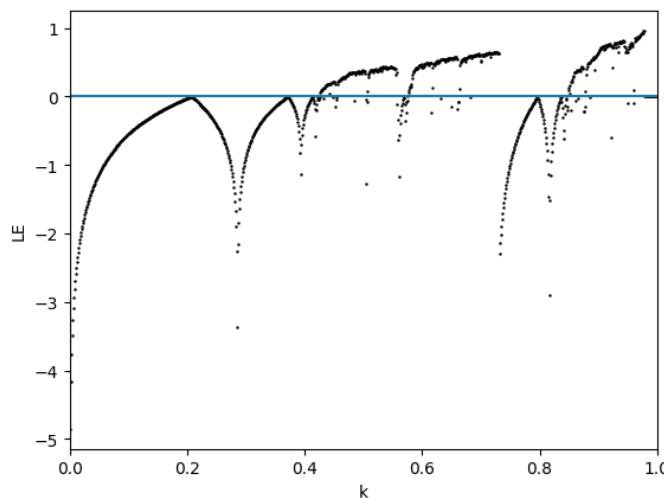
$\Sigma\chi\acute{\mu}\mu\alpha$  2.36: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος :

### 2.1.9 Για $q=-1.9$

Στο σχήμα 2.37 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -1.9$ . Στον Πίνακα 2.9 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιές τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.37. Επίσης οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος. Επίσης παρατηρείται εσωτερική χρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  ( $0.431, 0.452, 0.484, 0.503, 0.56, 0.615, 0.66, 0.74, 0.875, 0.921, 0.949, 0.9597$ ), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.37, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-1. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.9 Τέλος, στο σχήμα 2.38 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.978]$ . Οι τιμές του πίνακα 2.9 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχουν σε τιμές του διαγράμματος 2.37 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



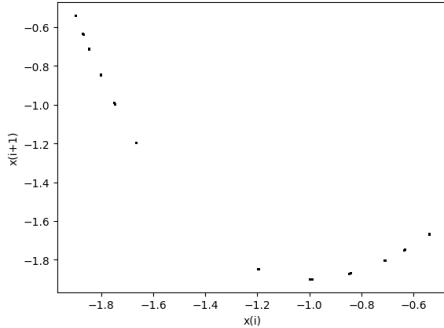
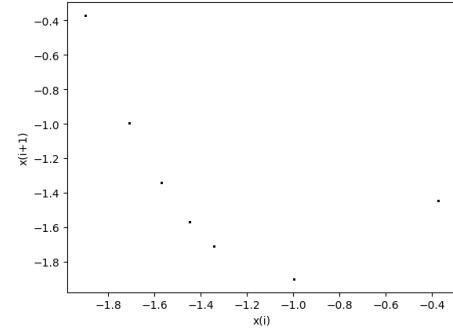
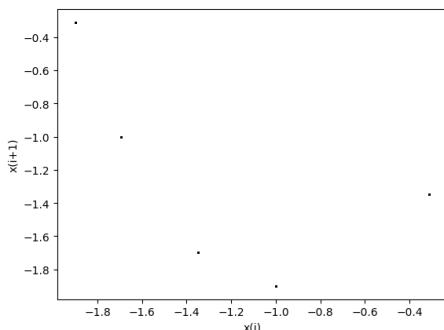
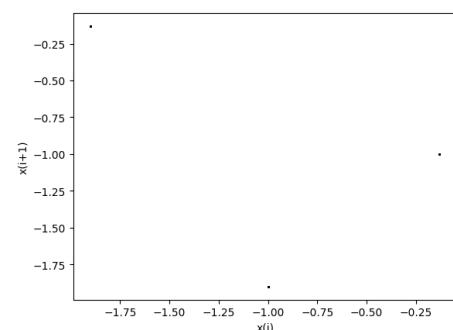
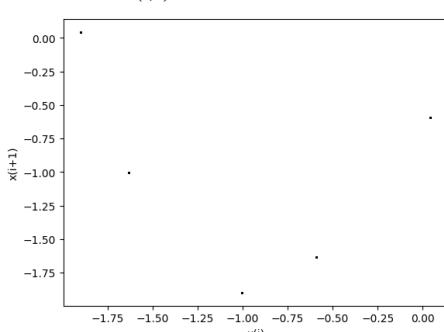
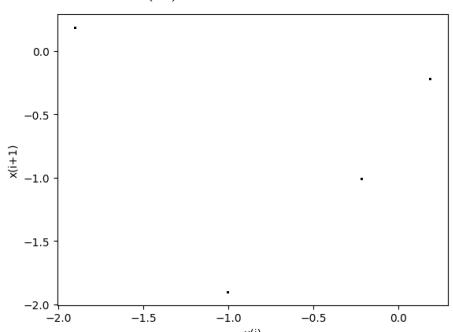
Σχήμα 2.37: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.9$



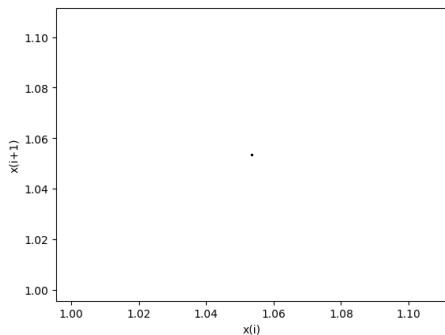
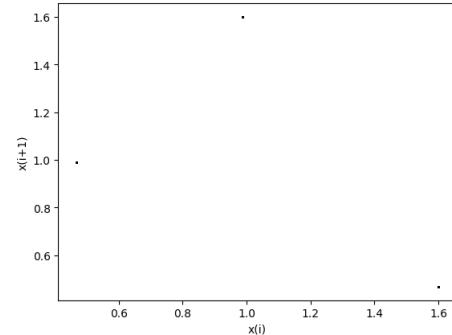
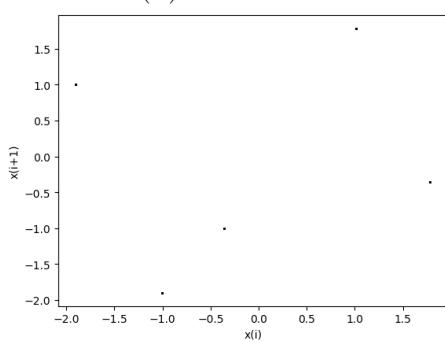
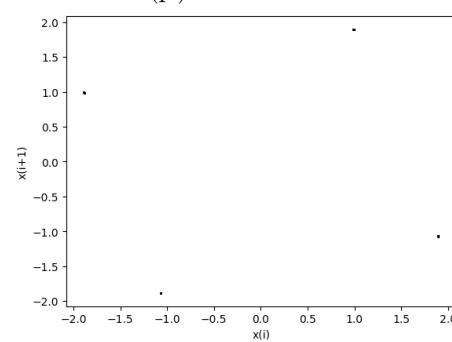
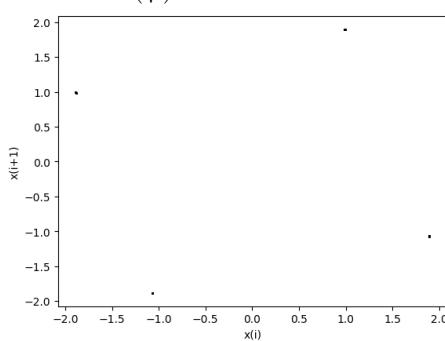
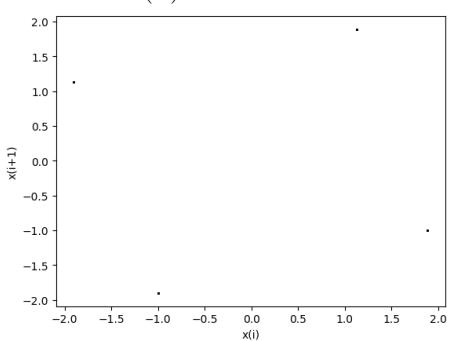
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.9$

Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος-1
0.21	Περίοδος-2
0.37	Περίοδος-4
0.41	Περίοδος-8
0.422	Περίοδος-16
0.426	Χαός
0.431	Περίοδος-17
0.432	Χάος
0.452	Περίοδος-5
0.454	Περίοδος-11
0.455	Χάος
0.484	Περίοδος-7
0.485	Χάος
0.503	Περίοδος-5
0.504	Περίοδος-9
0.506	Χάος
0.56	Περίοδος-3
0.57	Περίοδος-6
0.574	Περίοδος-11
0.577	Χάος
0.615	Περίοδος-5
0.616	Χάος
0.66	Περίοδος-4
0.661	Περίοδος-7
0.663	Χάος
0.74	Περίοδος-1
0.796	Περίοδος-2
0.83	Περίοδος-4
0.844	Περίοδος-8
0.846	Περίοδος-14
0.848	Χάος
0.875	Περίοδος-3
0.8752	Περίοδος-5
0.878	Χάος
0.921	Περίοδος-5
0.922	Χαός
0.949	Περίοδος-6
0.951	Χάος
0.9597	Περίοδος-4
0.961	Χαός

Πίνακας 2.9: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.9$ , για  $x_i = 0.1$

(α')  $\Gamma\alpha k=0.431$ (β')  $\Gamma\alpha k=0.452$ (γ')  $\Gamma\alpha k=0.484$ (δ')  $\Gamma\alpha k=0.503$ (ε')  $\Gamma\alpha k=0.56$ (Π')  $\Gamma\alpha k=0.615$ 

**Σχήμα 2.39:** Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α')  $\Gamma\alpha k=0.66$ (β')  $\Gamma\alpha k=0.74$ (γ')  $\Gamma\alpha k=0.875$ (δ')  $\Gamma\alpha k=0.921$ (ε')  $\Gamma\alpha k=0.949$ (Γ')  $\Gamma\alpha k=0.9597$ 

$\Sigma$ χήμα 2.40: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος :

## Κεφάλαιο 3

## Κεφάλαιο 3

Παράρτημα Α'

Appendix title