

okoko

asdasda



Βασίλειος Ασημακόπουλος

16/05/2022

# Ευχαριστίες

# Περίληψη

# Abstract

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Κεφάλαιο 1</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Κεφάλαιο 2</b>	<b>7</b>
2.1	Παραλλαγή του Logistic Χάρτη . . . . .	7
2.1.1	Για $q=-0.1$ . . . . .	7
2.1.2	Για $q=-0.3$ . . . . .	13
2.1.3	Για $q=-0.5$ . . . . .	17
2.1.4	Για $q=-0.7$ . . . . .	20
2.1.5	Για $q=-0.9$ . . . . .	24
2.1.6	Για $q=-1.2$ . . . . .	28
2.1.7	Για $q=-1.4$ . . . . .	32
2.1.8	Για $q=-1.6$ . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Κεφάλαιο 3</b>	<b>40</b>
<b>A'</b>	<b>Appendix title</b>	<b>41</b>

## Κεφάλαιο 1

## Κεφάλαιο 1

## Κεφάλαιο 2

## Κεφάλαιο 2

### 2.1 Παραλλαγή του Logistic Χάρτη

Μελετήθηκε η δυναμική συμπεριφορά της εξίσωσης διακριτού χρόνου:

$$x_i = k * (a + x_{i-1})^2 * (b - x_{i-1}) \quad (2.1)$$

όπου a,b,k, q:παράμετροι

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε οι παράμετροι a, b, κρατήθηκαν αρχικά σταθερές με τιμές a=1, b=2 όπως και η αρχική συνθήκη του  $x_1 = 0.1$  παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβάλλονταν στο διάστημα [0.1,1.7] με βήμα 0.2. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, ο εκθέτης Lyapunov και το διάγραμμά της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i-1}$ , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

#### 2.1.1 Για q=-0.1

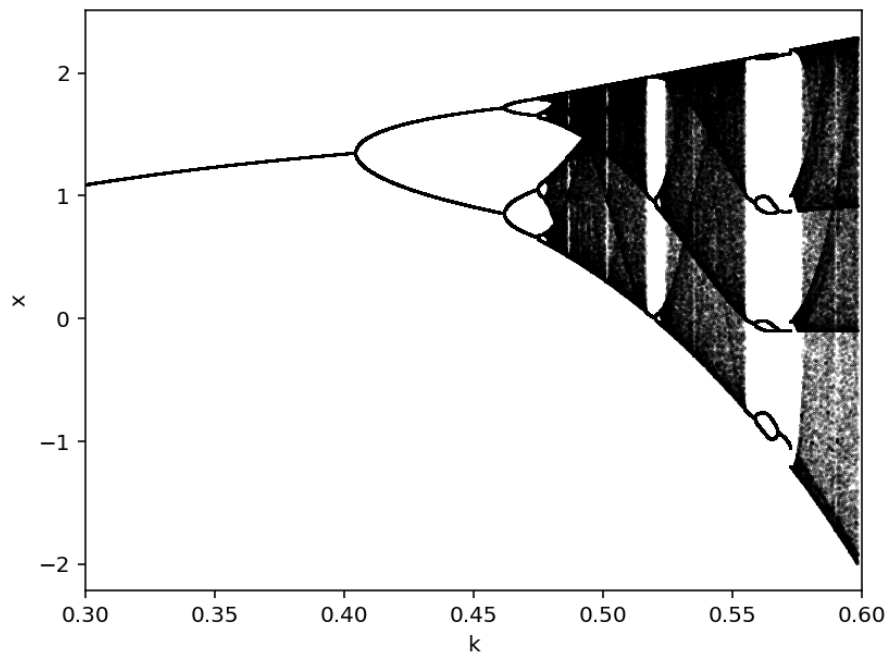
Στο σχήμα 2.1 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο k, για a=1, b=2 και q = -0.1. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για k = 0.3, ενώ για k = 0.4 εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για k=0.47 (περίοδος-4), τον τρίτο για k=0.476(περίοδος-8). Ενώ ο τελευταίος διπλασιασμός εμφανίζεται λίγο πιο μετά τον τρίτο για k=0.478 (περίοδος-16). Στην συνέχεια για k>0.479 το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για k=0.51(περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς k=0.52(περίοδος-6) και k=0.522(περίοδος-11) για k>0.524. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για k=0.555 (περίοδος-4). Για k=0.559 εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος-8) ο οποίος καταστρέφεται για k=0.567, οπότε εδώ παρατηρούμε αντιμονοτονικότητα δηλαδή έχουμε μία αναστροφή ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για k=0.568. Λόγω αυτού του φαινομένου το οποίο συνεχίζει μέχρι το q=-0.2, μελετήθηκε περαιτέρω το σύστημα από -0.1<q<-0.2. Τέλος για k=0.5735 έχουμε έναν τελευταίο διπλασιασμό(περίοδος-6) πριν ξανά εισέλθει το σύστημα για k>0.575 στο χάος. Στο σχήμα 2.2 παρατίθενται 3 διαγράμματα διακλάδωσης 2.2α', 2.2β', 2.2γ', 2.2δ' για 0.54<k<0.6. Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στην αντιμονοτονικότητα που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q. Επίσης παρατηρούμε στα διαγράμματα 2.2β', 2.2γ', 2.2δ' δημιουργία χαοτικών φουσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος

με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον στο διάγραμμα 2.2δ' το φαινόμενο εμφανίζεται δυο φορές για  $0.560 < k < 0.568$  και  $0.571 < k < 0.573$ . Επιπλέον, στο σχήμα 2.3 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0.3, 0.6]$ . Στο διάστημα τιμών  $k=0.522$ , στο  $0.51 < k < 0.522$ , και στο  $0.554 < k < 0.574$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.1 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

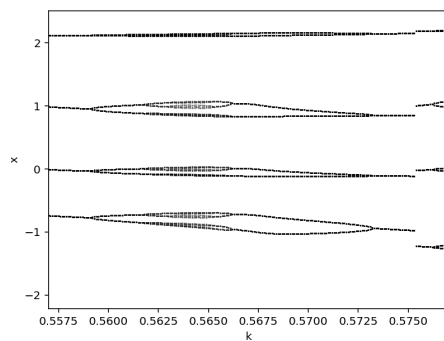
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος-1	2.4α'
0.41	Περίοδος-2	2.4β'
0.476	Περίοδος-8	2.4γ'
0.4778	Περίοδος-16	2.4δ'
0.479	Χάος	2.4ε'
0.517	Περίοδος-3	2.4Γ')
0.52	Περίοδος-6	2.4η'
0.522	Περίοδος-11	2.5α'
0.524	Χάος	2.5β'
0.555	Περίοδος-4	2.5γ'
0.559	Περίοδος-8	2.5δ'
0.568	Περίοδος-4	2.5ε'
0.5735	Περίοδος-6	2.5Γ'
0.575	Χάος	2.5ζ'

Πίνακας 2.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.1$

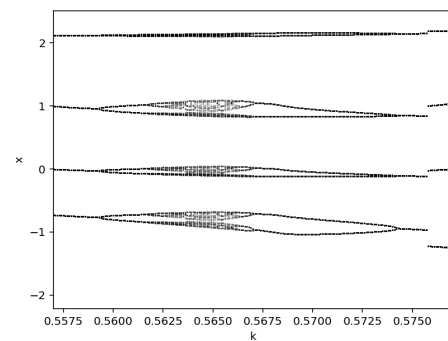




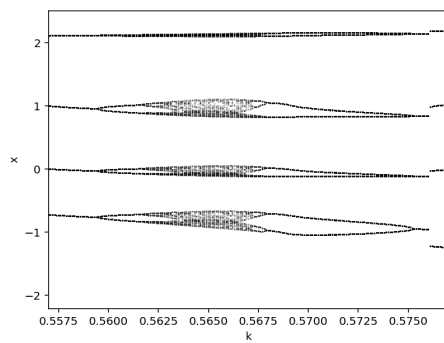
Σχήμα 2.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.1$



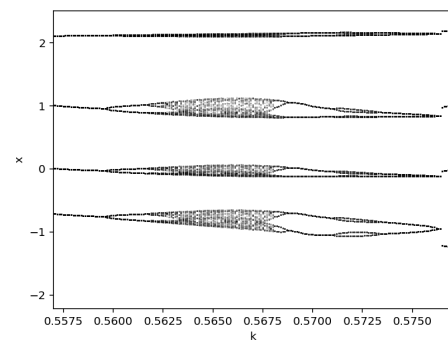
( $\alpha'$ )  $q=-0.112$



( $\beta'$ )  $q=-0.114$

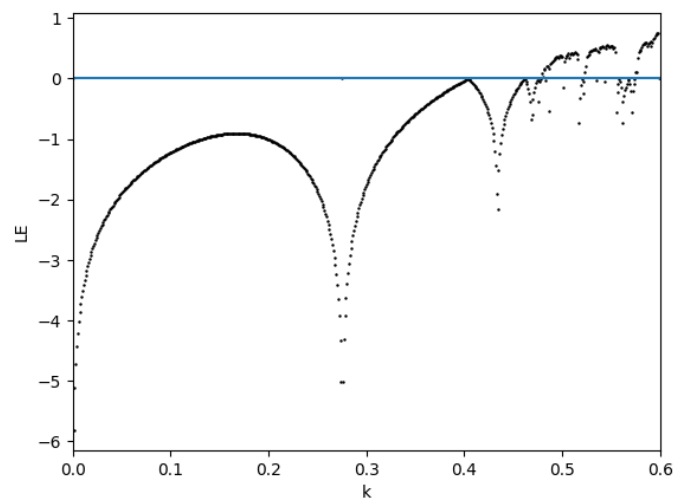


( $\gamma'$ )  $q=-0.116$

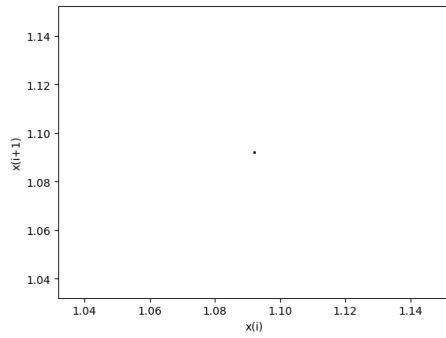
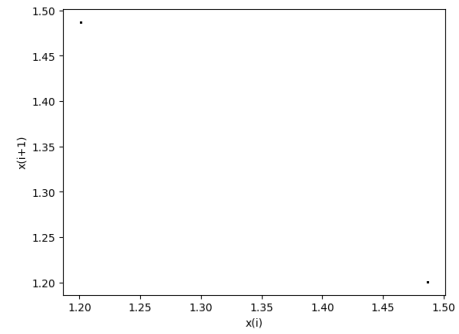
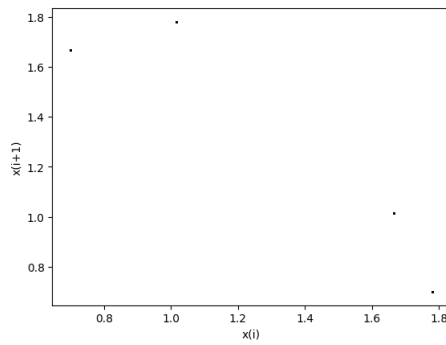
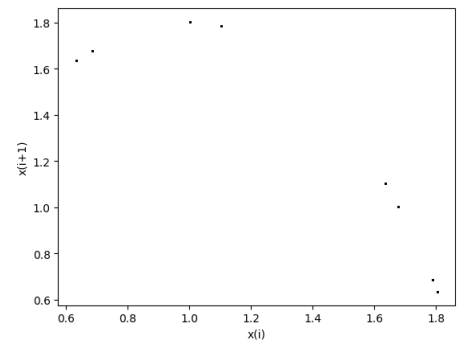
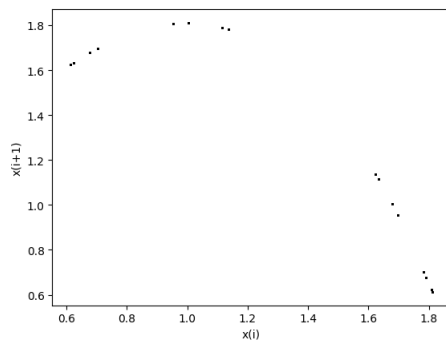
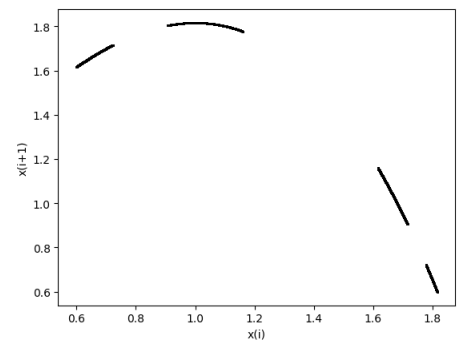
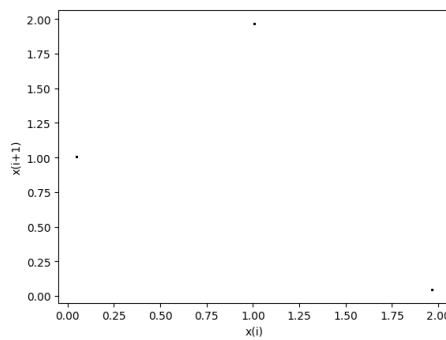
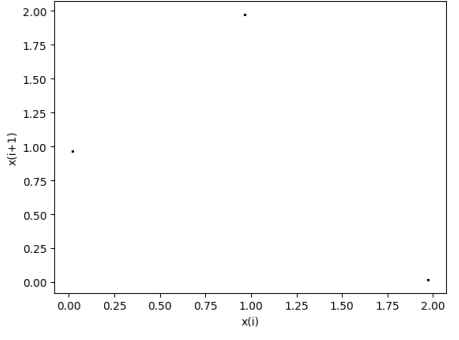


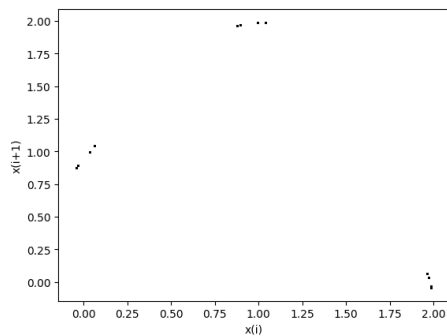
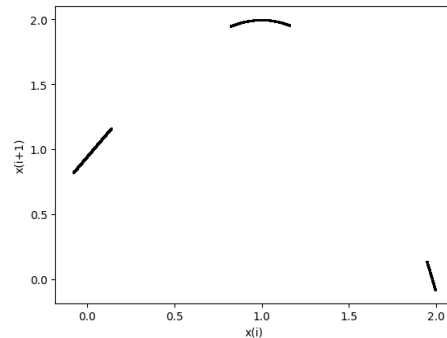
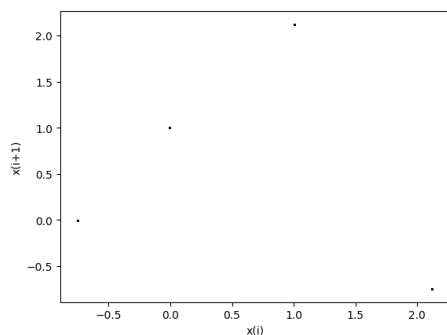
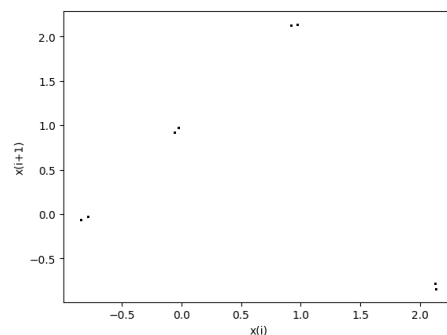
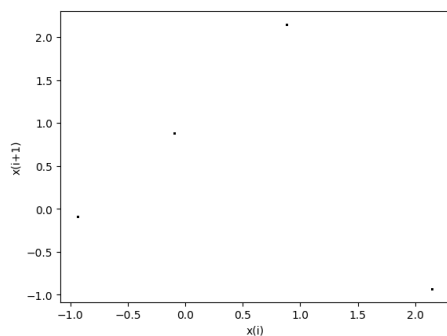
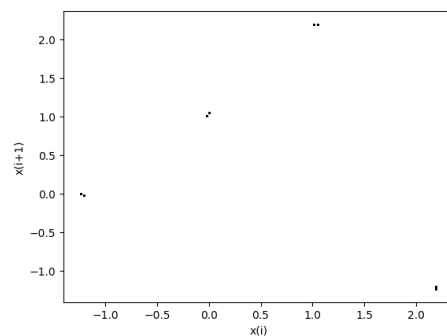
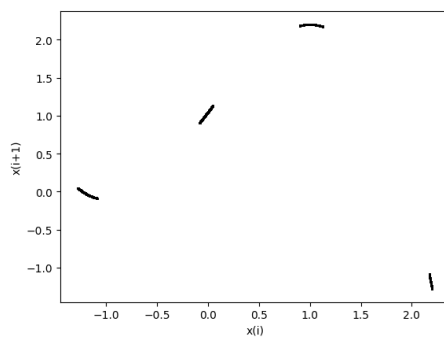
( $\delta'$ )  $q=-0.118$

Σχήμα 2.2: Διάγραμμα διακλάδωσης, για :



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.1$ .

(α') Για  $k=0.3$ (β') Για  $k=0.41$ (γ') Για  $k=0.047$ (δ') Για  $k=0.476$ (ε') Για  $k=0.4778$ (Γ') Για  $k=0.479$ (ζ') Για  $k=0.517$ (η') Για  $k=0.519$ Σχήμα 2.4: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος:

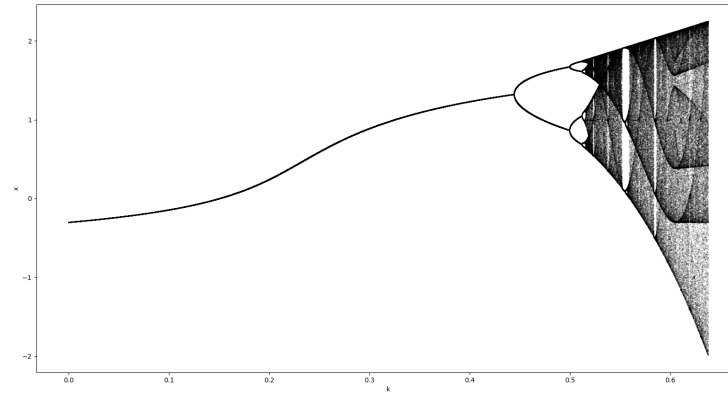
(α') Για  $k=0.522$ (β') Για  $k=0.524$ (γ') Για  $k=0.555$ (δ') Για  $k=0.559$ (ε') Για  $k=0.568$ (Γ') Για  $k=0.5735$ (ζ') Για  $k=0.575$ Σχήμα 2.5: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος:

### 2.1.2 Για $q=-0.3$

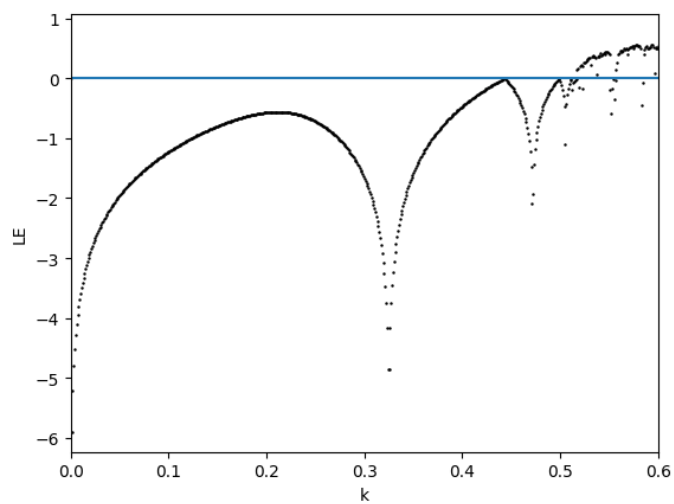
Στο σχήμα 2.6 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.3$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$ , ενώ για  $k = 0.44$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.5$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.511$  (περίοδος-8). Στην συνέχεια για  $k > 0.5165$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.551$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k=0.555$  (περίοδος-6) και  $k=0.556$  (περίοδος-12) για  $k > 0.5573$ . Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για  $k=0.583$  (περίοδος-4) και μετά από ένα διπλασιασμό για  $k=0.5846$  (Περίοδος-7) εισέρχεται για τελευταία φορά στο χάος για  $k=0.5851$ . Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.7 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.636]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.511$ , στο  $0.551 < k < 0.556$ , και στο  $0.583 < k < 0.5846$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.2 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος-1	2.4α'
0.44	Περίοδος-2	2.4β'
0.5	Περίοδος-4	2.4β'
0.511	Περίοδος-8	2.4γ'
0.5165	Χάος	2.4ε'
0.551	Περίοδος-3	2.4Γ')
0.555	Περίοδος-6	2.4η'
0.556	Περίοδος-12	2.5α'
0.5573	Χάος	2.5β'
0.583	Περίοδος-4	2.5γ'
0.5846	Περίοδος-7	2.5δ'
0.5851	Χάος	2.5ζ'

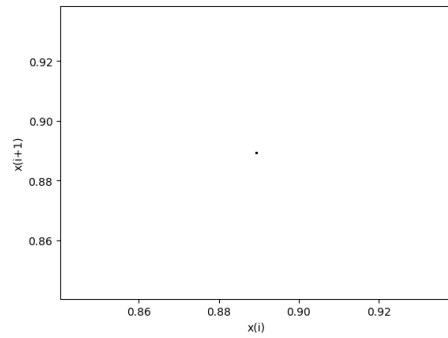
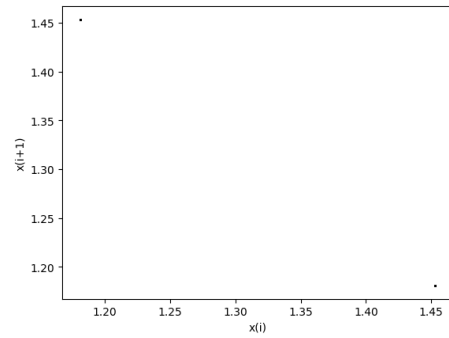
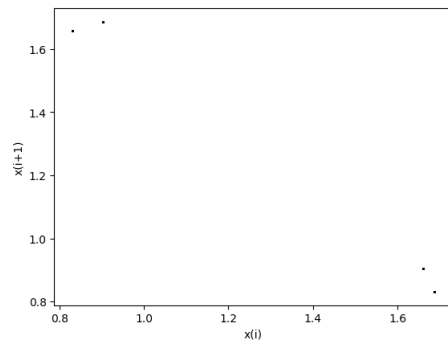
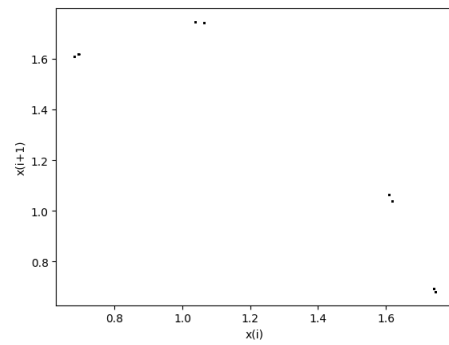
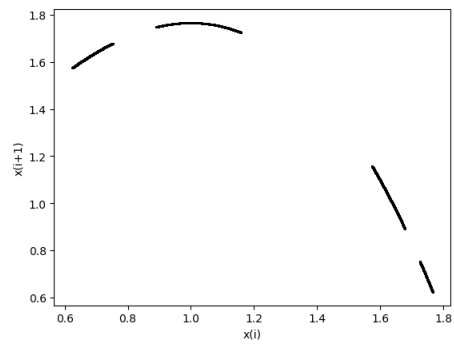
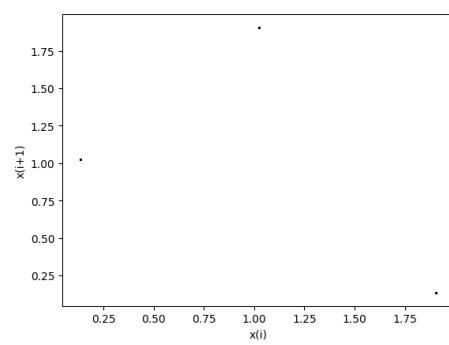
Πίνακας 2.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.3$

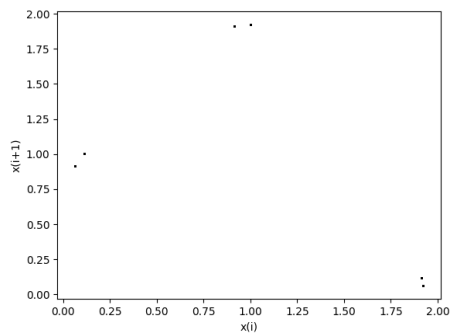
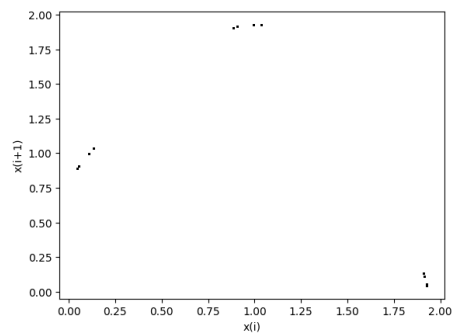
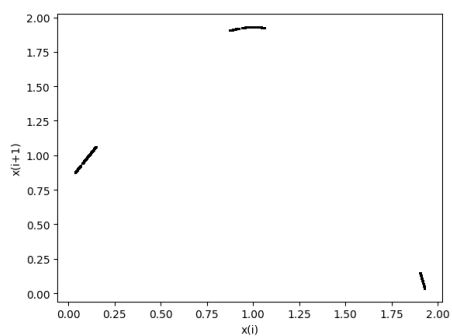
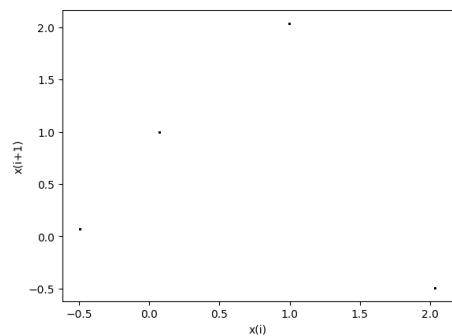
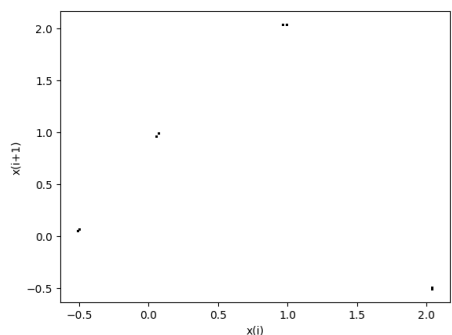
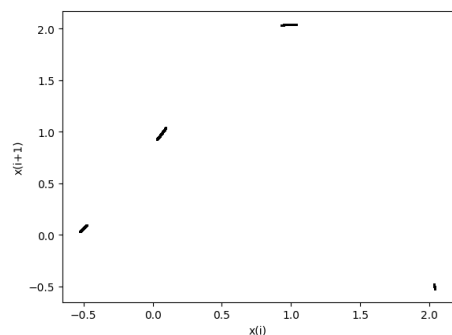


Σχήμα 2.6: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.3$



Σχήμα 2.7: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.3$

(α') Για  $k=0.3$ (β') Για  $k=0.44$ (γ') Για  $k=0.5$ (δ') Για  $k=0.511$ (ε') Για  $k=0.5165$ (ϖ') Για  $k=0.551$ Σχήμα 2.8: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α' μέρος :

(α') Για  $k=0.555$ (β') Για  $k=0.556$ (γ') Για  $k=0.5573$ (δ') Για  $k=0.583$ (ε') Για  $k=0.5846$ (Γ') Για  $k=0.5851$ Σχήμα 2.9: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β' μέρος :

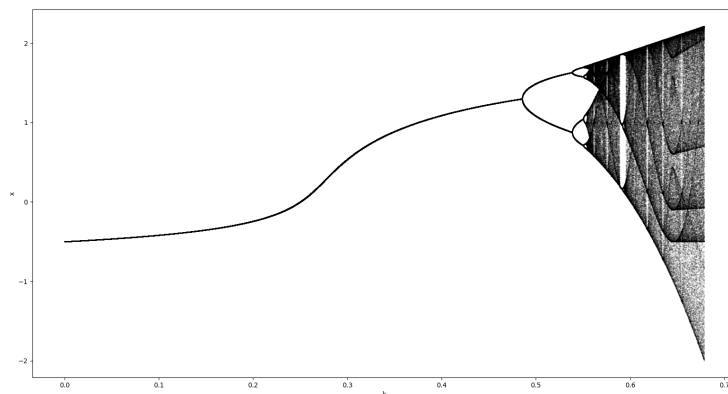


### 2.1.3 Για $q=-0.5$

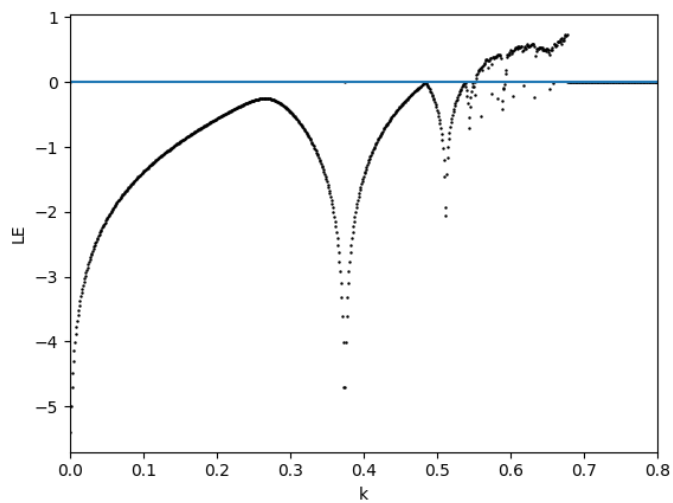
Στο σχήμα 2.10 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.5$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$ , ενώ για  $k = 0.48$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.53$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.55$  (περίοδος-8) και τον τέταρτο για  $k=0.5531$  (περίοδος-15). Στην συνέχεια για  $k>0.5534$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.59$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k=0.59377$  (περίοδος-6), για  $k>0.594$ . Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.679]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.5534$ , στο  $0.59 < k < 0.594$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.3 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος-1	2.4α'
0.48	Περίοδος-2	2.4β'
0.53	Περίοδος-4	2.4β'
0.55	Περίοδος-8	2.4γ'
0.5531	Περίοδος-15	
0.5534	Χάος	2.4ε'
0.59	Περίοδος-3	2.4Γ')
0.593	Περίοδος-6	2.4η'
0.594	Χάος	2.5β'

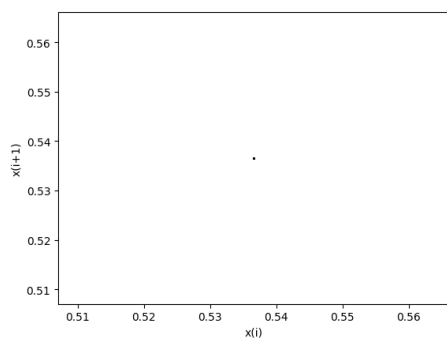
Πίνακας 2.3: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.5$



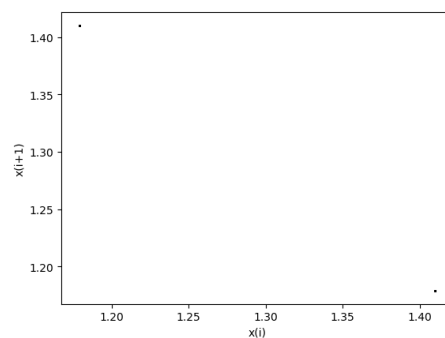
Σχήμα 2.10: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.5$



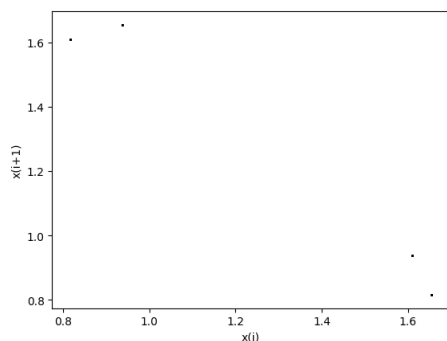
Σχήμα 2.11: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.5$



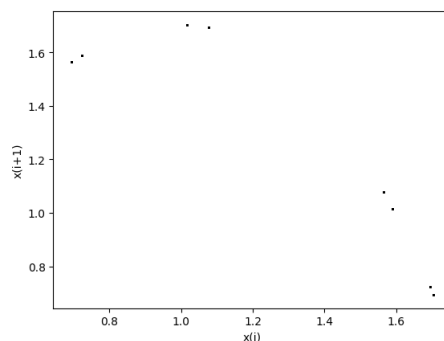
(α') Για  $k=0.3$



(β') Για  $k=0.48$

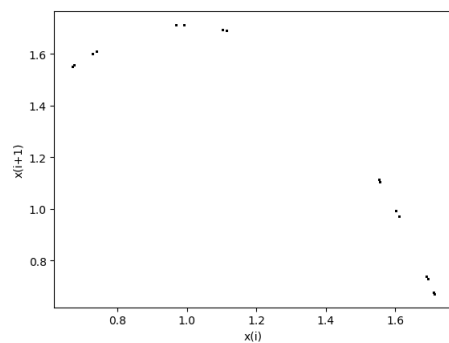
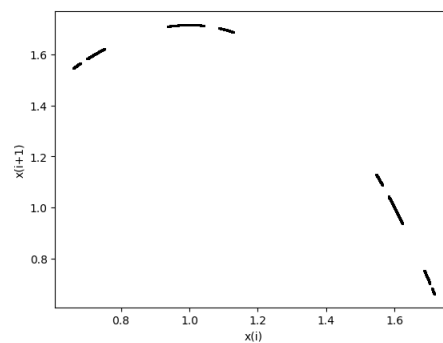
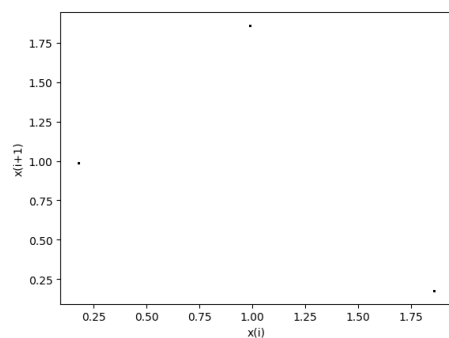
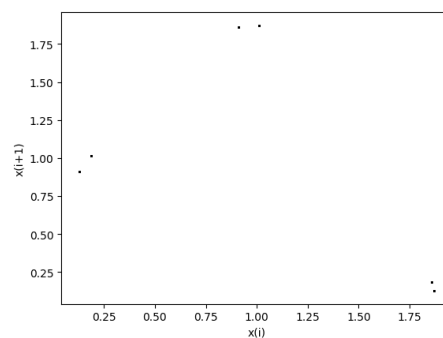
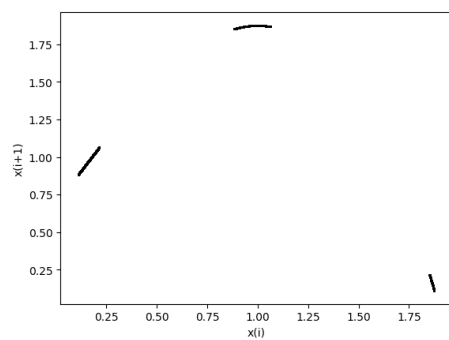


(γ') Για  $k=0.53$



(δ') Για  $k=0.55$

Σχήμα 2.12: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

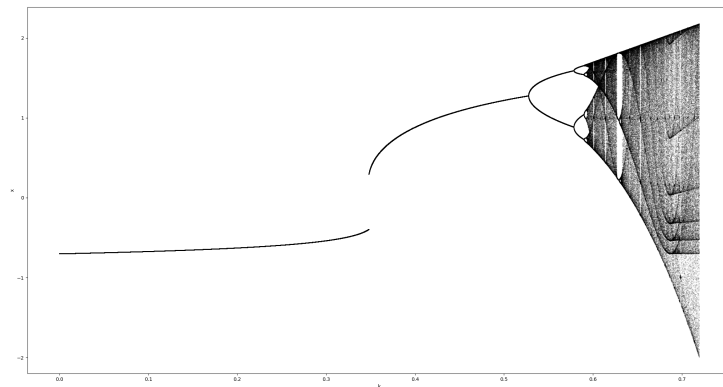
(α') Για  $k=0.5531$ (β') Για  $k=0.5534$ (γ') Για  $k=0.58$ (δ') Για  $k=0.591$ (ε') Για  $k=0.5927$ Σχήμα 2.13: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β' μέρος:

### 2.1.4 Για $q=-0.7$

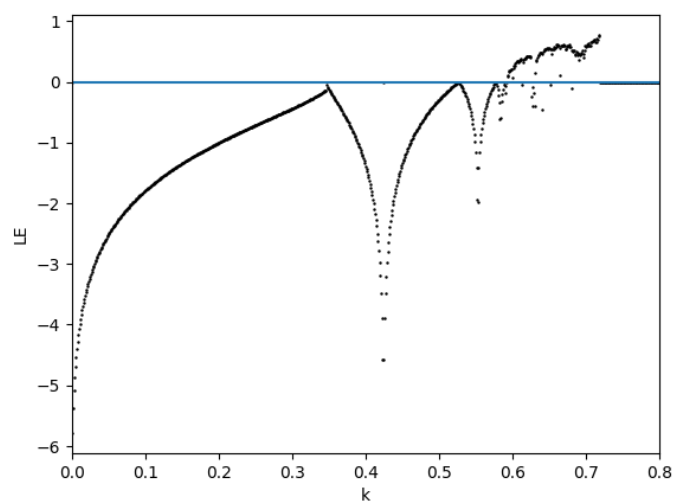
Στο σχήμα 2.14 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.7$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$  αλλά από  $k[0.3469, 0.3486]$  "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από  $k=3.469$  ξαναξεκινάει από περίοδο-1. Για  $k = 0.52$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.57$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.592$  (περίοδος-8) και τον τέταρτο για  $k=0.593$  (περίοδος-15). Στην συνέχεια για  $k>0.593$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.627$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k=0.63$  (περίοδος-6)  $k=0.631$  (περίοδος-11), για  $k>0.631$ . Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.72]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.594$ , στο  $0.627 < k < 0.632$ , παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.4 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.25	Περίοδος-1	2.16α'
0.3469	Περίοδος-1	2.16β'
0.52	Περίοδος-2	2.16γ'
0.57	Περίοδος-4	2.16δ'
0.592	Περίοδος-8	2.16ε'
0.593	Περίοδος-15	2.17α'
0.594	Χάος	2.17β'
0.627	Περίοδος-3	2.17γ'
0.630	Περίοδος-6	2.17δ'
0.631	Περίοδος-11	2.17ε'
0.632	Χάος	2.17Ϝ'

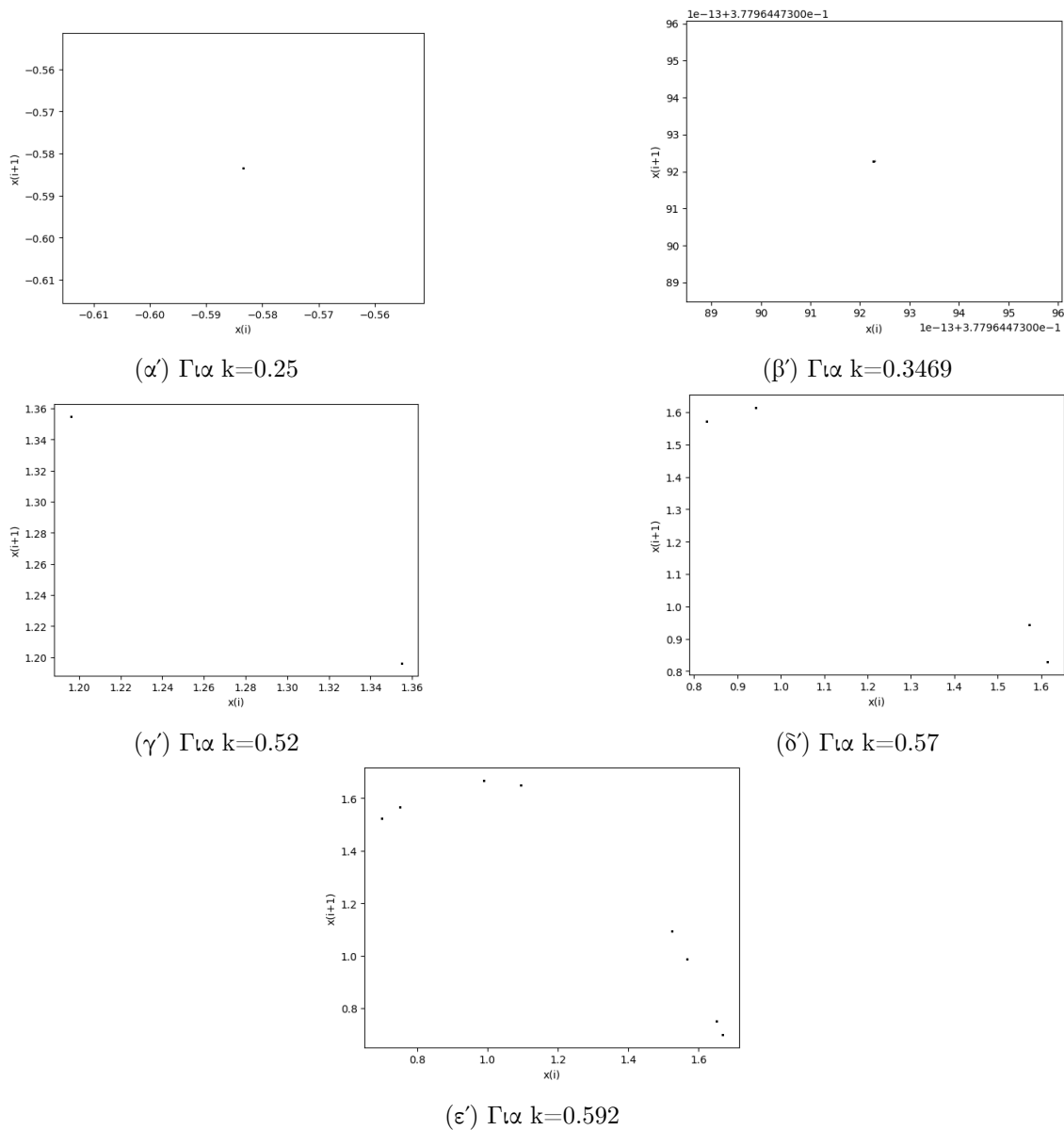
Πίνακας 2.4: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.7$



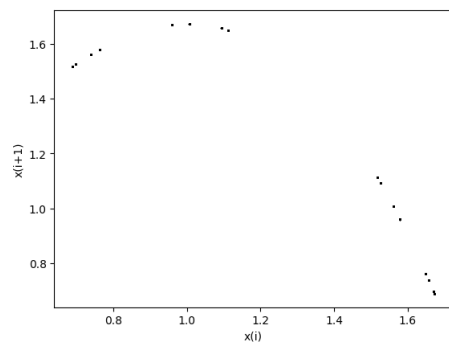
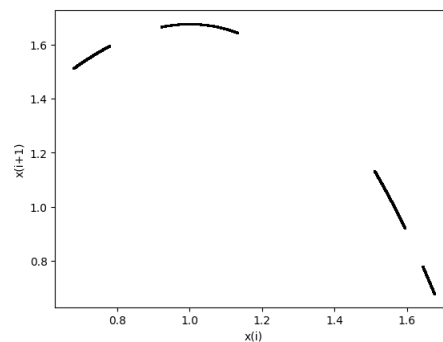
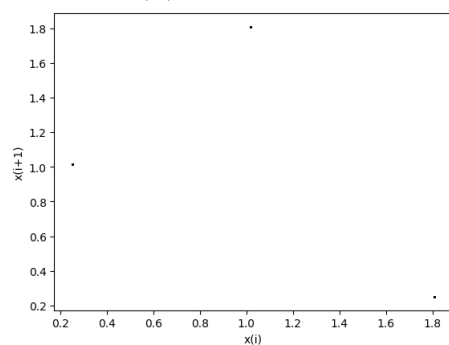
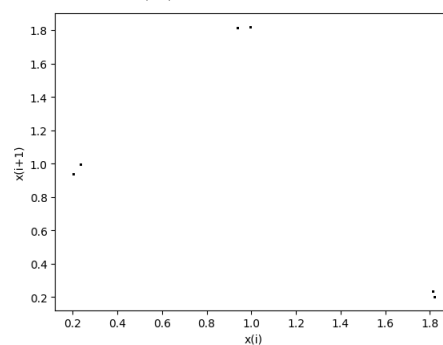
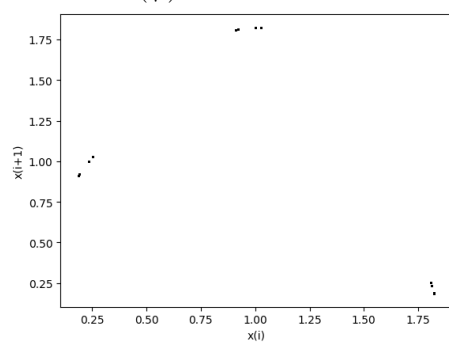
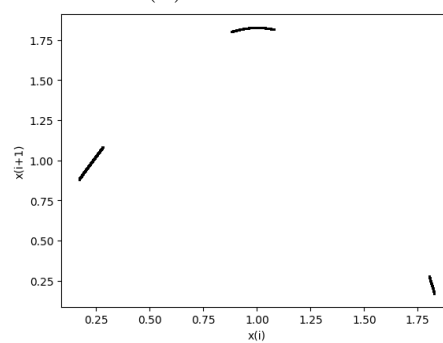
Σχήμα 2.14: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.7$



Σχήμα 2.15: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.7$ .



Σχήμα 2.16: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α') Για  $k=0.593$ (β') Για  $k=0.594$ (γ') Για  $k=0.627$ (δ') Για  $k=0.63$ (ε') Για  $k=0.631$ (Γ') Για  $k=0.632$ Σχήμα 2.17: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β' μέρος :

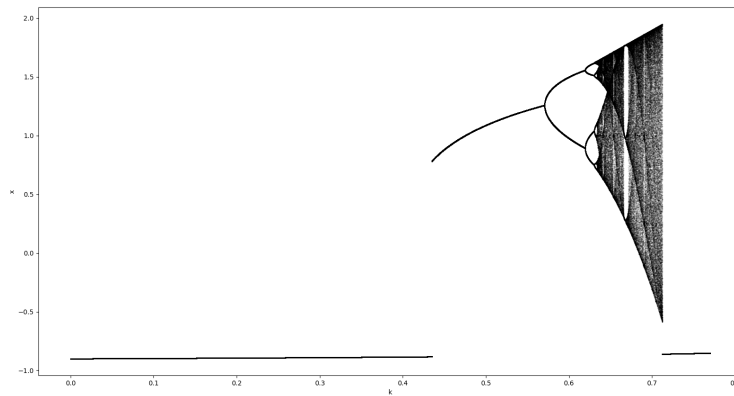
### 2.1.5 Για $q=-0.9$

Στο σχήμα 2.18 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -0.9$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.3$  αλλά από  $k[0.43,0.436]$  "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από  $k=0.436$  ξαναξεκινάει από περίοδο-1. Για  $k = 0.57$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.62$  (περίοδος-4), τον τρίτο για  $k=0.63$  (περίοδος-8) και τον τέταρτο για  $k=0.633$  (περίοδος-16). Στην συνέχεια για  $k>0.635$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.665$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από ένα διπλασιασμό  $k=0.668$  (περίοδος-6), για  $k>0.671$ . Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για  $k=0.72$  (περίοδος-1). Για  $q=-0.9$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.19 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών  $Lyapunov$  για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.77]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.635$ , στο  $0.665 < k < 0.671$  και  $0.72 < k < 0.77$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης  $Lyapunov$  είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης  $Lyapunov$  υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.5 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

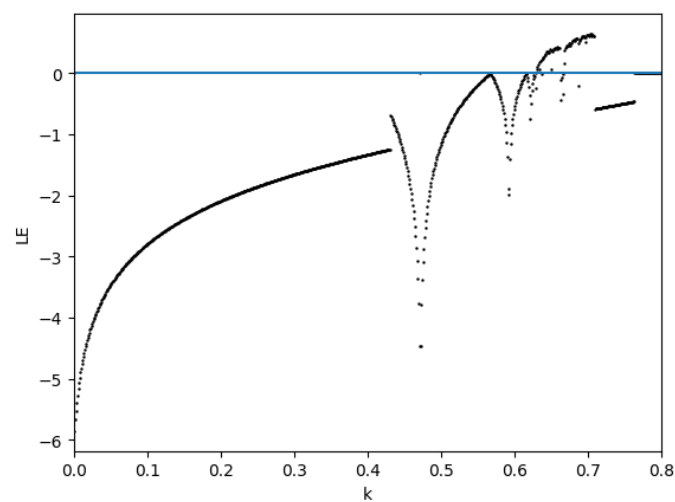
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.43	Περίοδος-1	2.20α'
0.436	Περίοδος-1	2.20β'
0.57	Περίοδος-2	2.20γ'
0.62	Περίοδος-4	2.20δ'
0.63	Περίοδος-8	2.20ε'
0.633	Περίοδος-16	2.21α'
0.635	Χάος	2.21β'
0.665	Περίοδος-3	2.21γ'
0.668	Περίοδος-6	2.21δ'
0.671	Χάος	2.21ε'
0.72	Περίοδος-1	2.21ϐ'

Πίνακας 2.5: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$

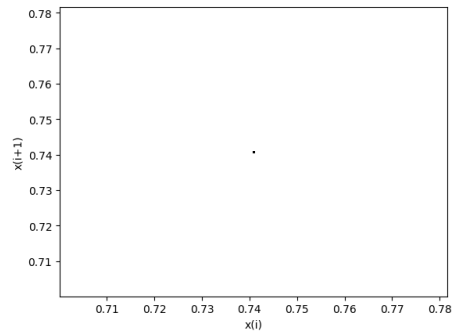
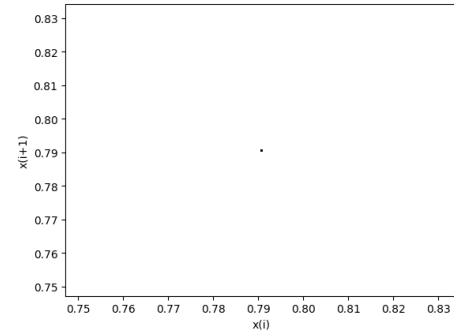
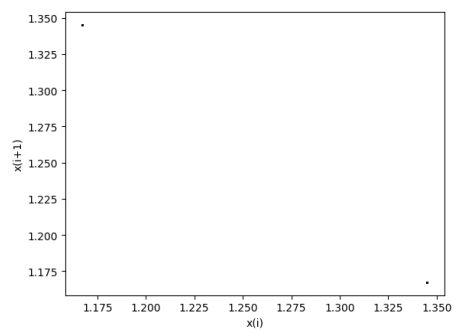
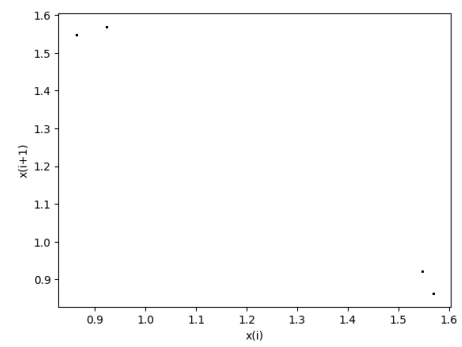
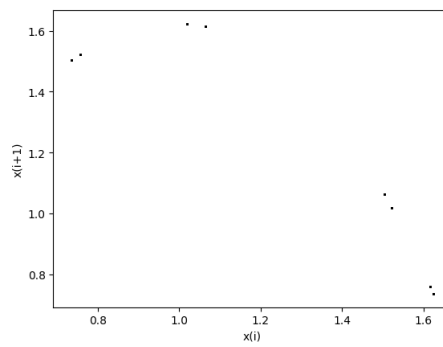


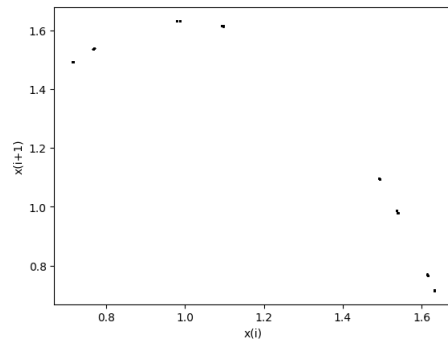
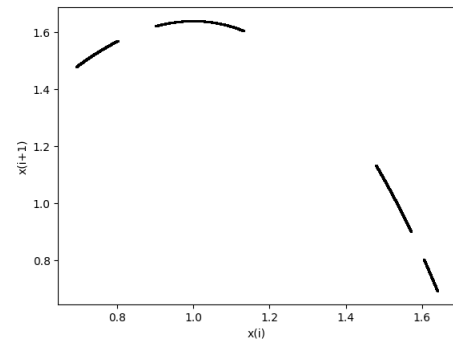
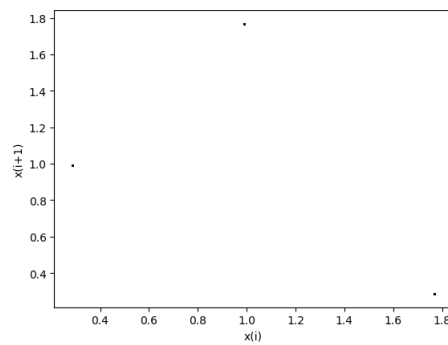
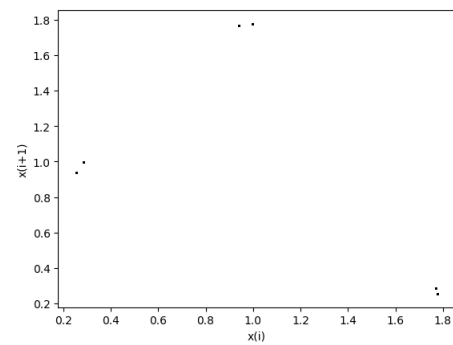
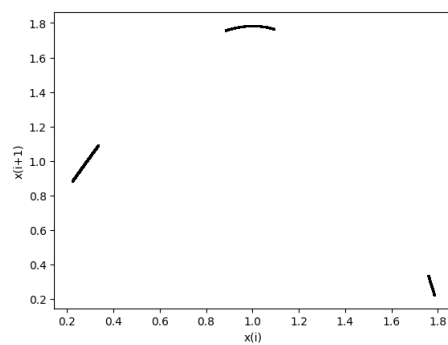
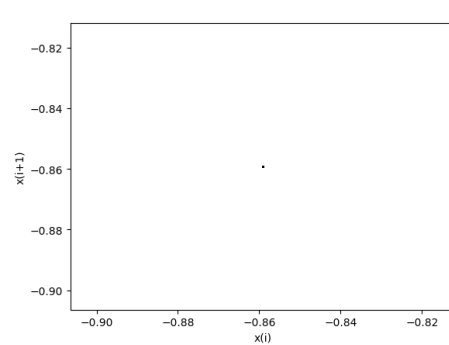


Σχήμα 2.18: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$



Σχήμα 2.19: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$

(α') Για  $k=0.43$ (β') Για  $k=0.436$ (γ') Για  $k=0.57$ (δ') Για  $k=0.62$ (ε') Για  $k=0.63$ Σχήμα 2.20: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος:

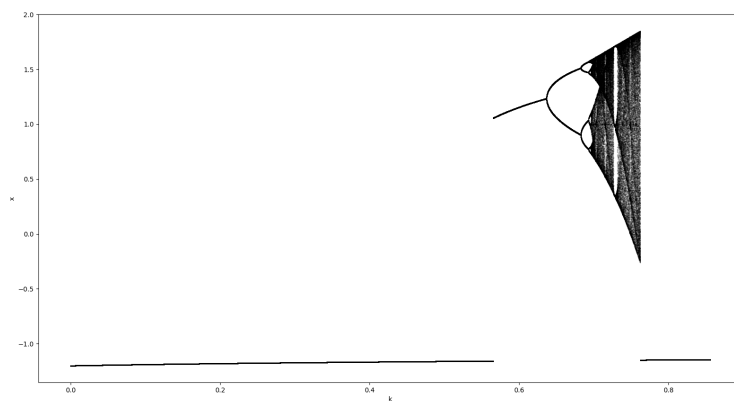
(α) Για  $k=0.633$ (β) Για  $k=0.635$ (γ) Για  $k=0.665$ (δ) Για  $k=0.668$ (ε) Για  $k=0.671$ (Γ) Για  $k=0.72$ Σχήμα 2.21: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος:

### 2.1.6 Για $q=-1.2$

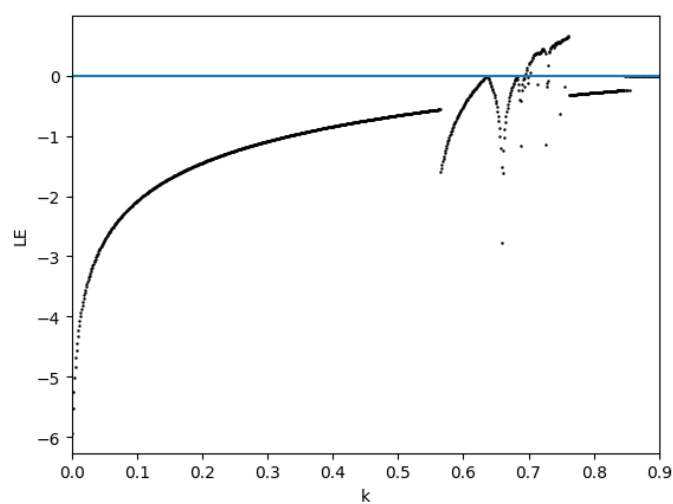
Στο σχήμα 2.22 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.1, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q = -1.2$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο-1 για  $k = 0.55$  αλλά από  $k[0.56, 0.566]$  "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Απο  $k=0.566$  ξαναξεκινάει από περίοδο-1. Για  $k = 0.63$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k=0.67$  (περίοδος-4) και τον τρίτο για  $k=0.69$  (περίοδος-8). Στην συνέχεια για  $k>0.696$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k=0.726$  (περίοδος-3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από ένα διπλασιασμό  $k=0.729$  (περίοδος-6), για  $k>0.731$ . Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για  $k=0.762$  (περίοδος-1). Για  $q=-1.2$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου, ενώ παρατηρείται και εσωτερική κρίση ελκυστή για  $k=0.726$  αλλά και για  $k=0.762$ . Επιπλέον, στο σχήμα 2.23 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.77]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.69$ , στο  $0.726 < k < 0.731$  και  $0.72 < k < 0.8574$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον Πίνακα 2.6 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.55	Περίοδος-1	2.24α'
0.566	Περίοδος-1	2.24β'
0.63	Περίοδος-2	2.24γ'
0.68	Περίοδος-4	2.24δ'
0.69	Περίοδος-8	2.24ε'
0.696	Χάος	2.24Ϝ'
0.726	Περίοδος-3	2.25α'
0.729	Περίοδος-6	2.25β'
0.731	Χάος	2.25γ'
0.762	Περίοδος-1	2.25δ'

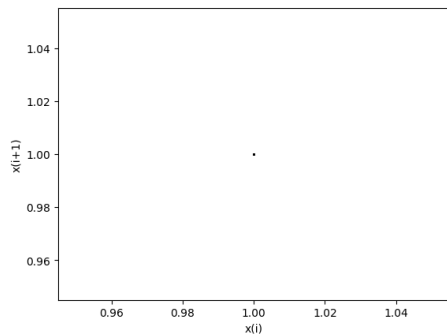
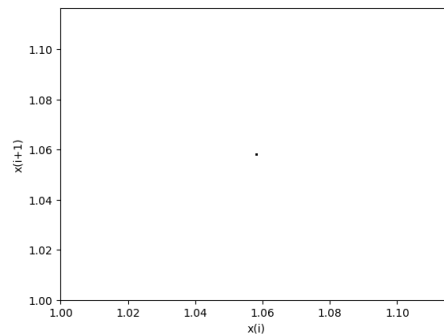
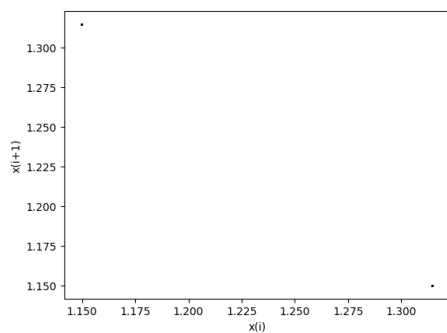
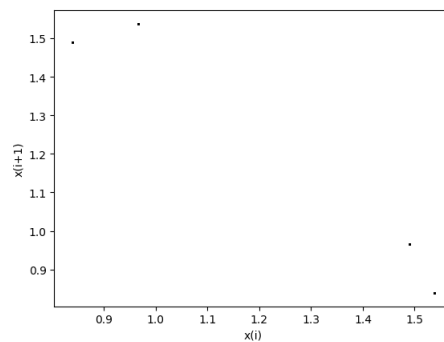
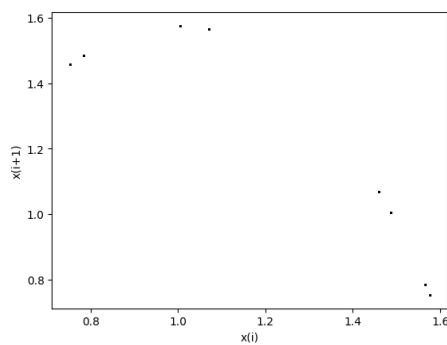
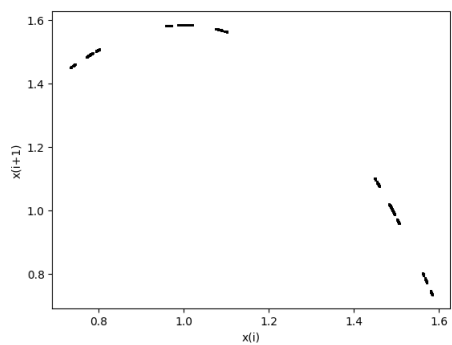
Πίνακας 2.6: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-0.9$

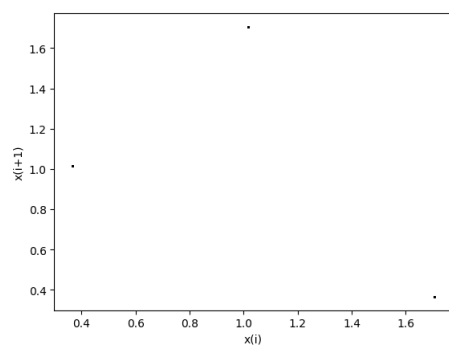
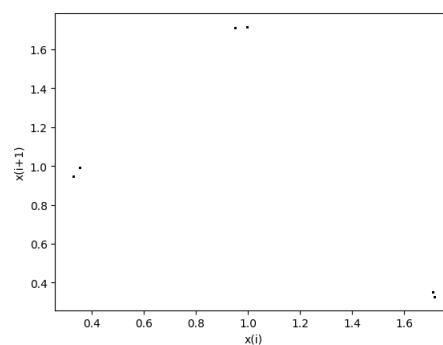
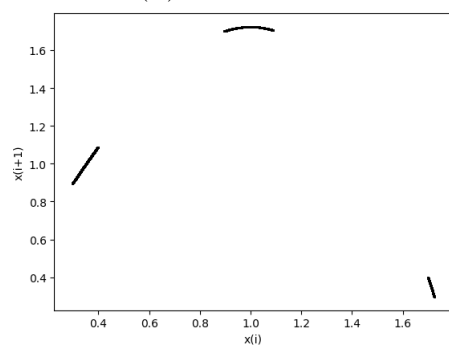
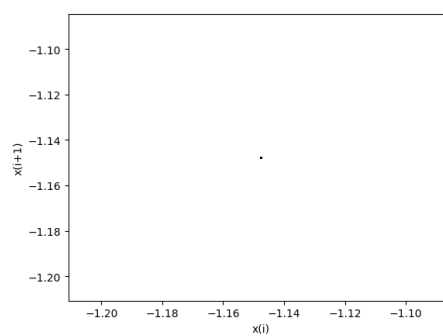


Σχήμα 2.22: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.2$



Σχήμα 2.23: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.2$

(α') Για  $k=0.55$ (β') Για  $k=0.566$ (γ') Για  $k=0.63$ (δ') Για  $k=0.68$ (ε') Για  $k=0.69$ (Γ') Για  $k=0.696$ Σχήμα 2.24: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

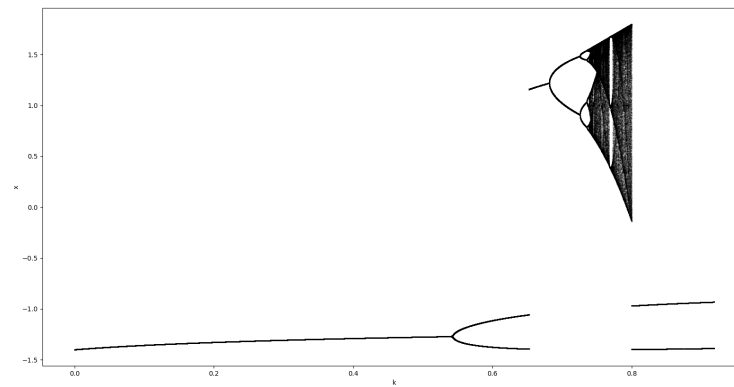
(α') Για  $k=0.726$ (β') Για  $k=0.729$ (γ') Για  $k=0.731$ (δ') Για  $k=0.762$ Σχήμα 2.25: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος :

### 2.1.7 Για $q=-1.4$

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.4	Περίοδος-1	2.34α'
0.54	Περίοδος-2	2.34β'
0.65	Περίοδος-1	2.34γ'
0.68	Περίοδος-2	2.34δ'
0.726	Περίοδος-4	2.34ε'
0.737	Περίοδος-8	2.34Ϛ'
0.738	Περίοδος-15	2.35α'
0.739	Χάος	2.35β'
0.744	Περίοδος-6	2.35γ'
0.746	Χάος	2.35δ'
0.7565	Περίοδος-5	2.35ε'
0.757	Χάος	2.35Ϛ'
0.768	Περίοδος-3	2.35ζ'
0.77	Περίοδος-6	2.35η'
0.78	Χάος	2.36α'
0.8	Περίοδος-2	2.36β'

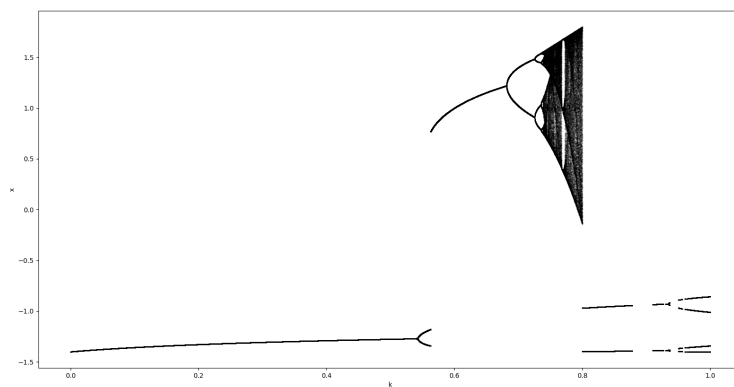
Πίνακας 2.7: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.4$

$[0,0.91]$

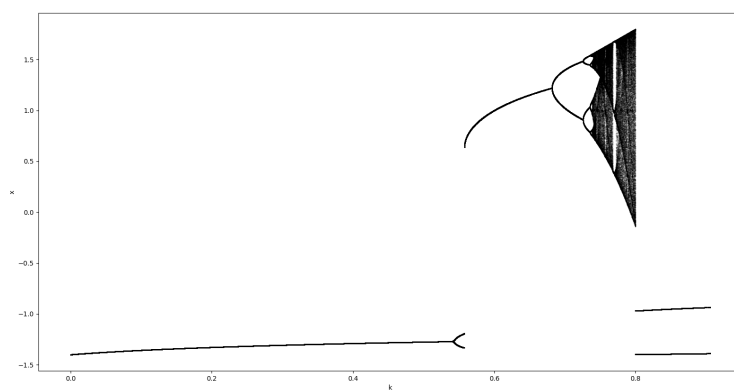


Σχήμα 2.26: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και  $x_0 = 0.1$

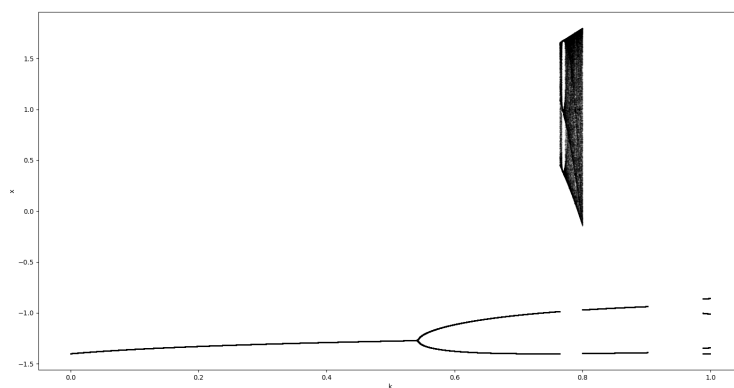




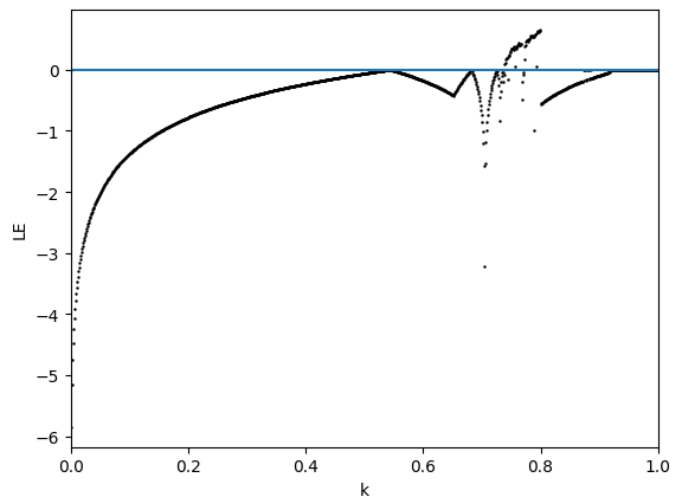
Σχήμα 2.27: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και  $x_0 = 0.5$



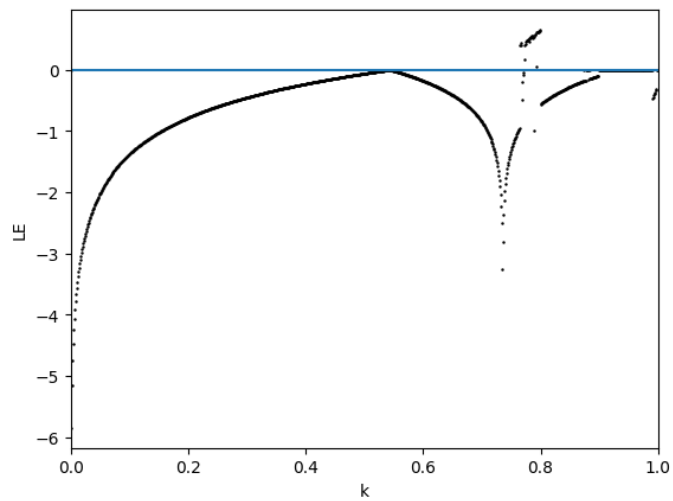
Σχήμα 2.28: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και  $x_0 = 1$



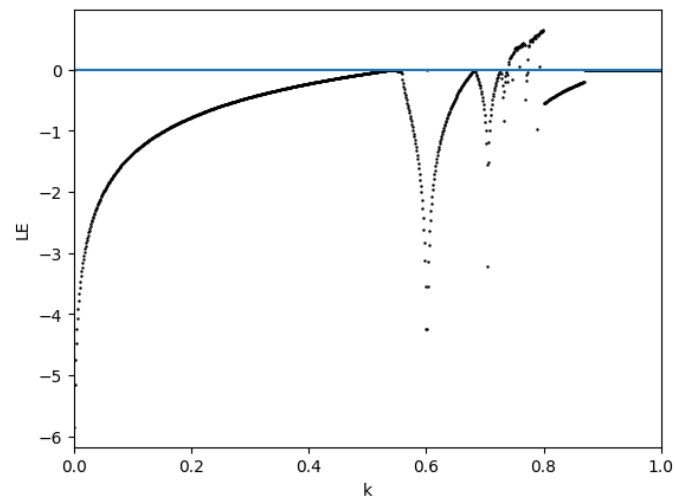
Σχήμα 2.29: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $q=-1.4$  και  $x_0 = -0.1$



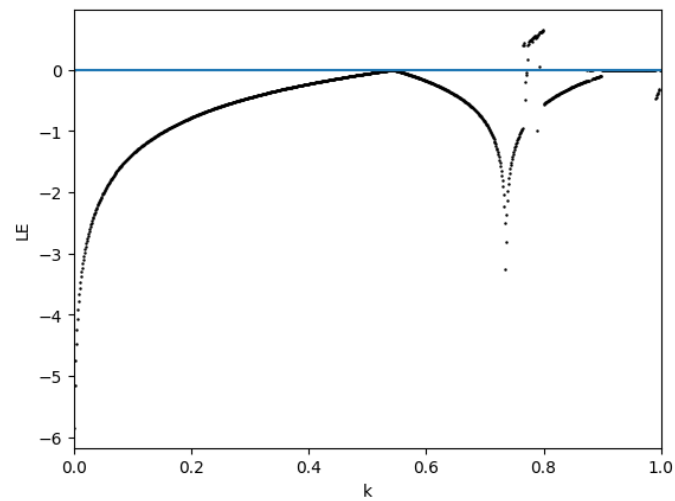
Σχήμα 2.30: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$   $.q=-1.4$  και  $x_0 = 0.1$



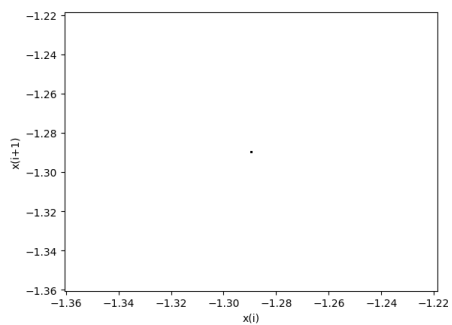
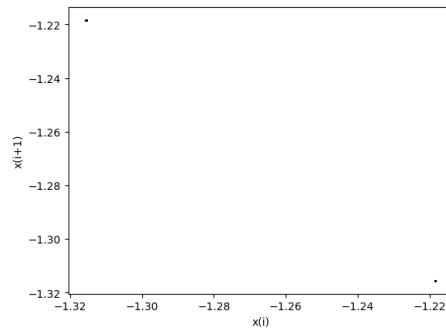
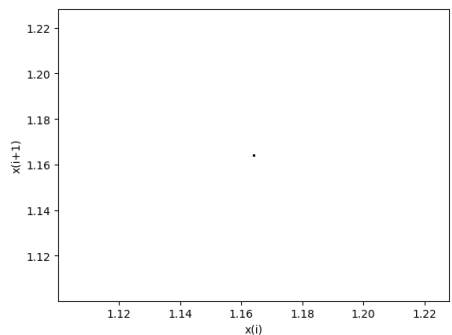
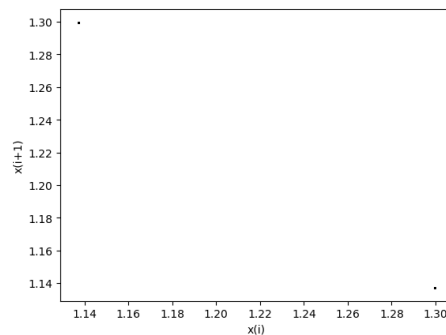
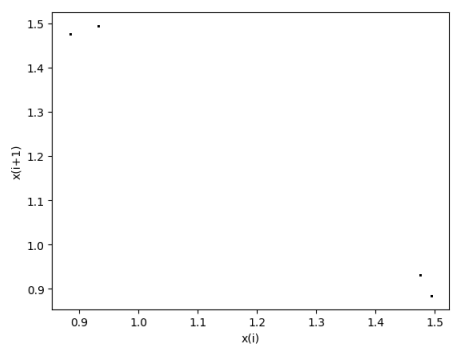
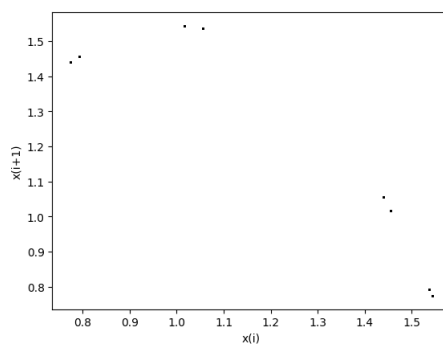
Σχήμα 2.31: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$   $.q=-1.4$  και  $x_0 = 0.5$

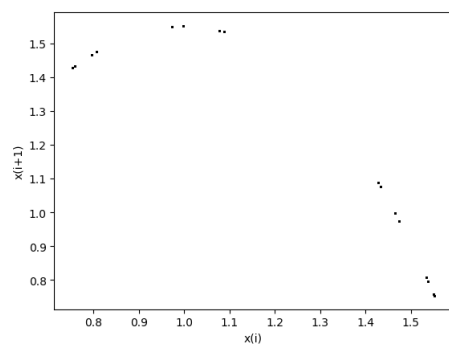
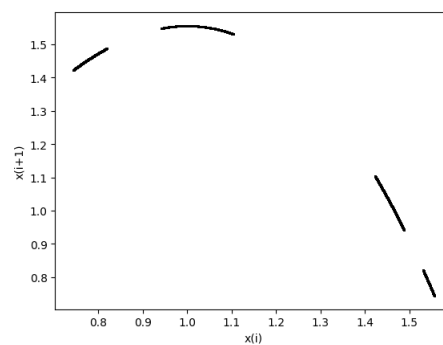
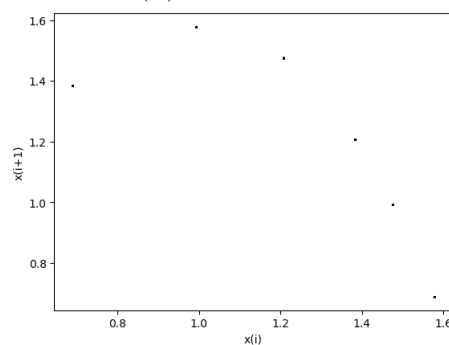
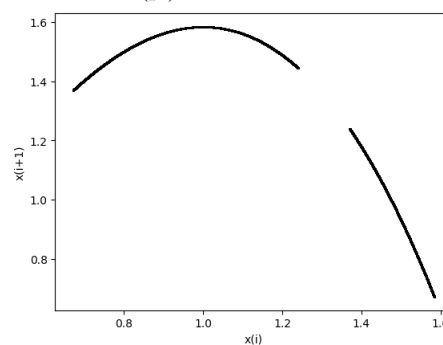
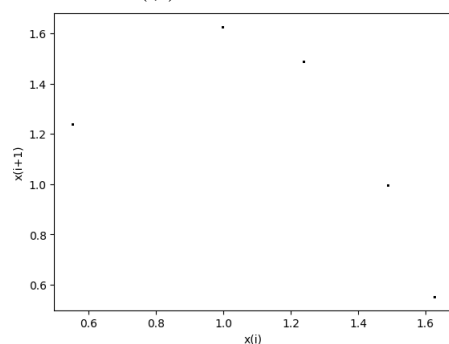
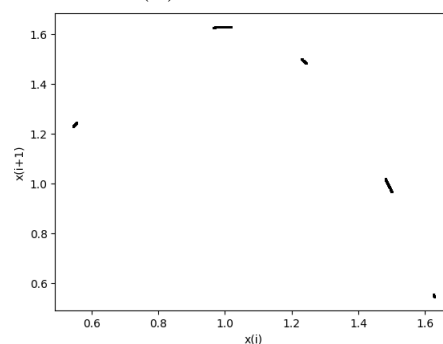
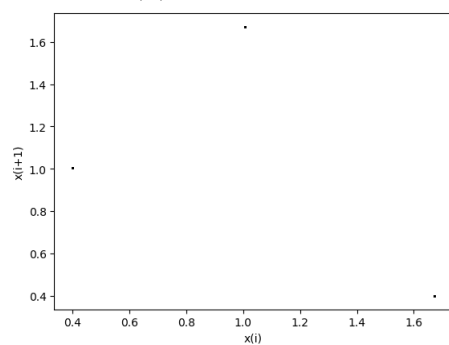
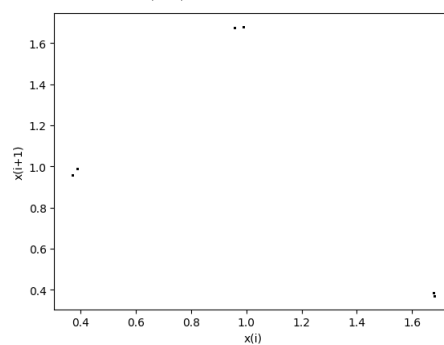


Σχήμα 2.32: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$   $.q=-1.4$  και  $x_0 = 1$

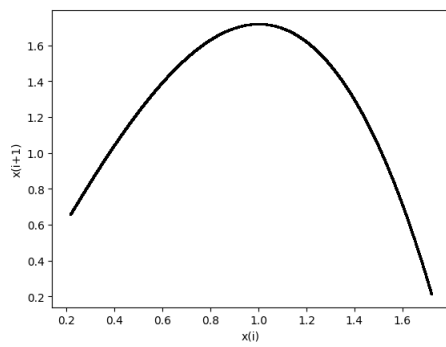
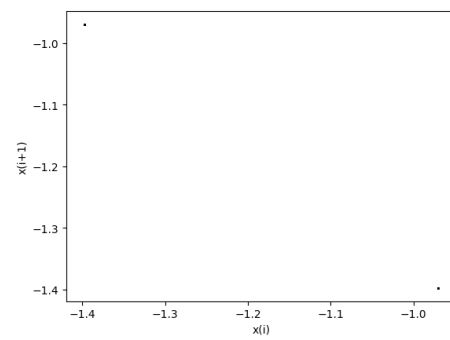


Σχήμα 2.33: Διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $a=1$ ,  $b=2$   $.q=-1.4$  και  $x_0 = -0.1$

(α') Για  $k=0.4$ (β') Για  $k=0.54$ (γ') Για  $k=0.65$ (δ') Για  $k=0.68$ (ε') Για  $k=0.726$ (Γ') Για  $k=0.737$ Σχήμα 2.34: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  α'μέρος :

(α') Για  $k=0.738$ (β') Για  $k=0.739$ (γ') Για  $k=0.744$ (δ') Για  $k=0.746$ (ε') Για  $k=0.7565$ (Γ') Για  $k=0.757$ (ζ') Για  $k=0.768$ (η') Για  $k=0.77$ 

Σχήμα 2.35: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  β'μέρος :

(α') Για  $k=0.78$ (β') Για  $k=0.8$ Σχήμα 2.36: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  γ' μέρος :

2.1.8 Για  $q=-1.6$ 

Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.31	Περίοδος-1	2.34α'
0.34	Περίοδος-2	2.34β'
0.595	Περίοδος-4	2.34γ'
0.66	Περίοδος-8	2.34δ'
0.671	Περίοδος-15	2.34ε'
0.675	Χάος	2.34Γ'
0.683	Περίοδος-12	2.35α'
0.685	Χάος	2.35β'
0.69	Περίοδος-10	2.35γ'
0.7	Χάος	2.35δ'
0.713	Περίοδος-6	2.35ε'
0.716	Περίοδος-11	2.35Γ'
0.717	Χάος	2.35ζ'
0.739	Περίοδος-2	2.36β'
0.77	Περίοδος-4	2.35η'
0.779	Περίοδος-8	2.36α'
0.782	Χάος	2.36β'
0.788	Περίοδος-6	2.36β'
0.789	Χάος	2.36β'
0.799	Περίοδος-5	2.36β'
0.8	Χάος	2.36β'
0.81	Περίοδος-3	2.36β'
0.812	Περίοδος-6	2.36β'
0.813	Χάος	2.36β'
0.8393	Κενό	2.36β'
0.867	Περίοδος-3	2.36β'
0.88	Περίοδος-6	2.36β'
0.886	Περίοδος-10	2.36β'
0.889	Χάος	2.36β'
0.92	Κενό	2.36β'
0.94	Περίοδος-52.36β'	
0.942	Χάος	2.36β'
0.943	Κενό	2.36β'
0.948	Χάος	2.36β'

Πίνακας 2.8: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k, για  $a=1$ ,  $b=2$  και  $q=-1.4$

## Κεφάλαιο 3

## Κεφάλαιο 3



## Παράρτημα Α΄

## Appendix title