



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Εργαστήριο Μη-Γραφμικών Κυκλωμάτων, Συστημάτων και Πολυπλοκότητας

Τίτλος διπλωματικής

Πτυχιακή Εργασία
του
Βασίλειου Ασημακόπουλου

Επιβλέπων: Χρήστος Βόλος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Περιληψη

Άδειο

Abstract

Empty

Ευχαριστίες

Άδειο

Περιεχόμενα

1 Θεωρητικό Υπόβαθρο	1
2 Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη	2
2.1 Για $q = -0.1$	2
2.2 Για $q = -0.3$	9
2.3 Για $q = -0.5$	13
2.4 Για $q = -0.7$	17
2.5 Για $q = -0.9$	21
2.6 Για $q = -1.2$	25
2.7 Για $q = -1.4$	29
2.8 Για $q = -1.6$	38
2.9 Για $q = -1.9$	46
2.10 Για $q = -2.1$	51
3 Παραλλαγή του sine-sinh Χάρτη	57
3.1 Για $q = -0.3$	57
3.2 Για $q = -0.5$	62
4 Παραλλαγή του Chebysev Χάρτη	70
4.1 Για $q = 0.8$	70
4.2 Για $q = 0.9$	77
5 Εφαρμογή των Χαρτών	81
A' Appendix title	82

Κατάλογος σχημάτων

2.1	Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.1$	4
2.2	Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.1$. .	4
2.3	Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του q (α' μέρος).	5
2.4	Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του q (β' μέρος).	6
2.5	Διαγράμματα της τιμής x_i με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	7
2.6	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	8
2.7	Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$	10
2.8	Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$. .	10
2.9	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	11
2.10	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	12
2.11	Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.5$	14
2.12	Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.5$. .	14
2.13	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	15
2.14	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	16
2.15	Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$	18
2.16	Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$. .	18
2.17	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	19
2.18	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	20
2.19	Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$	22
2.20	Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$	22
2.21	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	23
2.22	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	24
2.23	Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.2$	26
2.24	Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.2$. .	26
2.25	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	27
2.26	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	28
2.27	Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (α' μέρος).	30
2.28	Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (β' μέρος).	31
2.29	Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).	32
2.30	Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).	33
2.31	Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0	34
2.32	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	35
2.33	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	36
2.34	Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (γ' μέρος).	37
2.35	Διαγράμματα διακλάδωσης ,για $q = -1.6$ (α' μέρος).	40
2.36	Διαγράμματα διακλάδωσης , για $q = -1.6$ (β' μέρος).	41
2.37	Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).	42
2.38	Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).	43
2.39	Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0	44

2.40 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	44
2.41 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	45
2.42 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.9$	46
2.43 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.9$	47
2.44 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	49
2.45 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	50
2.46 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$	52
2.47 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$	52
2.48 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -2.1$	54
2.49 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	55
2.50 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	56
 3.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$	59
3.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$	59
3.3 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	60
3.4 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	61
3.5 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $b = 2$, $q = -0.5$	64
3.6 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $b = 2$, $q = -0.5$	65
3.7 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0	66
3.8 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0	67
3.9 Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0	68
3.10 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	69
 4.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.8$	71
4.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.8$	72
4.3 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του k	74
4.4 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	75
4.5 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	76
4.6 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.9$	77
4.7 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.9$	78
4.8 Διαγράμματα διακλάδωσης για $2.55 < k < 2.8$	78
4.9 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	80
4.10 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	80

Κατάλογος πινάκων

2.1	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.1$.	3
2.2	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$.	9
2.3	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$.	13
2.4	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.7$.	17
2.5	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.9$.	21
2.6	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.2$.	25
2.7	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $a = 1$, $b = 2$, $q = -1.4$ και $x_i = 0.1$	29
2.8	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.6$, για $x_i = 0.1$	39
2.9	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.9$, για $x_i = 0.1$	48
2.10	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -2.1$	53
3.1	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$	58
3.2	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$	63
4.1	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.8$	73
4.2	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.9$	79

Κεφάλαιο 1

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Κεφάλαιο 2

Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διαχριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού Λογιστικού Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μποροεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διαχλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} .

Ο Λογιστικός Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i = k * (1 + x_{i-1})^2 * (2 - x_{i-1}) \quad (2.1)$$

Στην εξίσωση (2.1) προστέθηκε ένας σταθερός όρος q . Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη,

$$x_i = k * (1 + x_{i-1})^2 * (2 - x_{i-1}) + q \quad (2.2)$$

όπου k, q : παράμετροι.

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του $x_0 = 0.1$ παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβαλλόταν στο διάστημα $[-0.1, -2.1]$. Στο διάστημα $[-0.1, -0.9]$ και στο $[-1.2, -1.6]$ μεταβαλλόταν με βήμα 0.2, ενώ στο $[-0.9, -1.2]$ και στο $[-1.6, -2.1]$ η παράμετρος μεταβαλλόταν q με βήμα 0.3. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διαχλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

2.1 Για $q = -0.1$

Στο Σχ. 2.1 παρατίθεται το διάγραμμα διαχλάδωσης του συστήματος (2.2), ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.1$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.4$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.47$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.476$ (περίοδος - 8), ενώ ο τελευταίος διπλασιασμός εμφανίζεται λίγο πιο μετά τον τρίτο για $k = 0.478$ (περίοδος - 16).

Στην συνέχεια για $k > 0.479$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.51$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.52$ (περίοδος - 6) και $k = 0.522$ (περίοδος - 11) για $k > 0.524$. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για $k = 0.555$ (περίοδος - 4). Για $k = 0.559$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 8) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 0.568$, οπότε εδώ παρατηρούμε το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας δηλαδή έχουμε μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για $k = 0.568$.

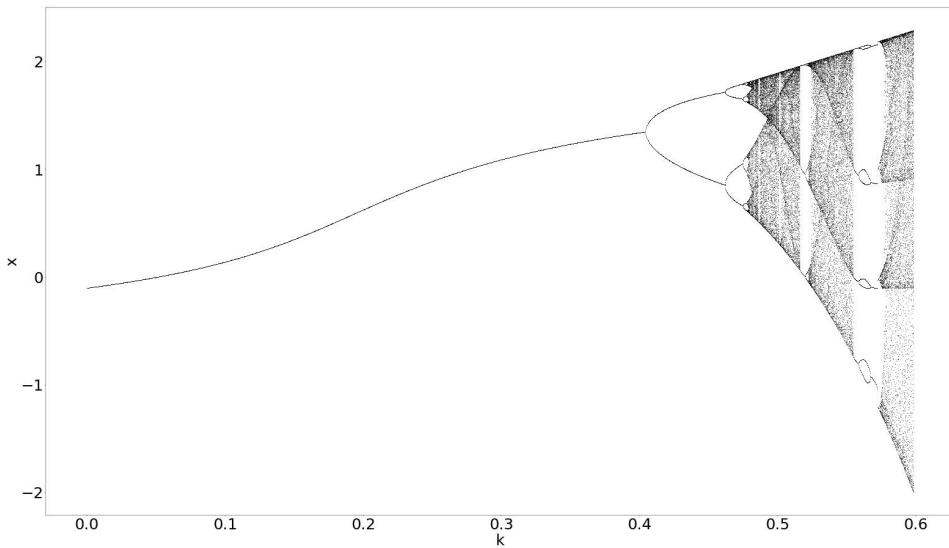
Λόγω αυτού του φαινομένου το οποίο συνεχίζει μέχρι το $q = -0.2$, μελετήθηκε περαιτέρω το σύστημα από $-0.1 < q < -0.2$. Τέλος για $k = 0.5735$ έχουμε έναν τελευταίο διπλασιασμό (περίοδος - 6) πριν ξανά εισέλθει το σύστημα για $k > 0.575$ στο χάος. Στα Σχ. 2.3, 2.4 παρατίθενται 4 διαγράμματα διακλάδωσης ($2.3\alpha'$, $2.3\beta'$, $2.4\alpha'$, $2.4\beta'$) για $0.54 < k < 0.6$. Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στην αντιμονοτονικότητα που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q . Επίσης παρατηρούμε στα διαγράμματα $2.3\beta'$, $2.4\alpha'$, $2.4\beta'$ τη δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον στο διάγραμμα $2.4\beta'$ το φαινόμενο εμφανίζεται δύο φορές για $0.560 < k < 0.568$ και $0.571 < k < 0.573$.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0.3, 0.6]$. Στο διάστημα τιμών $k = 0.522$, στο $0.51 < k < 0.522$, και στο $0.554 < k < 0.574$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

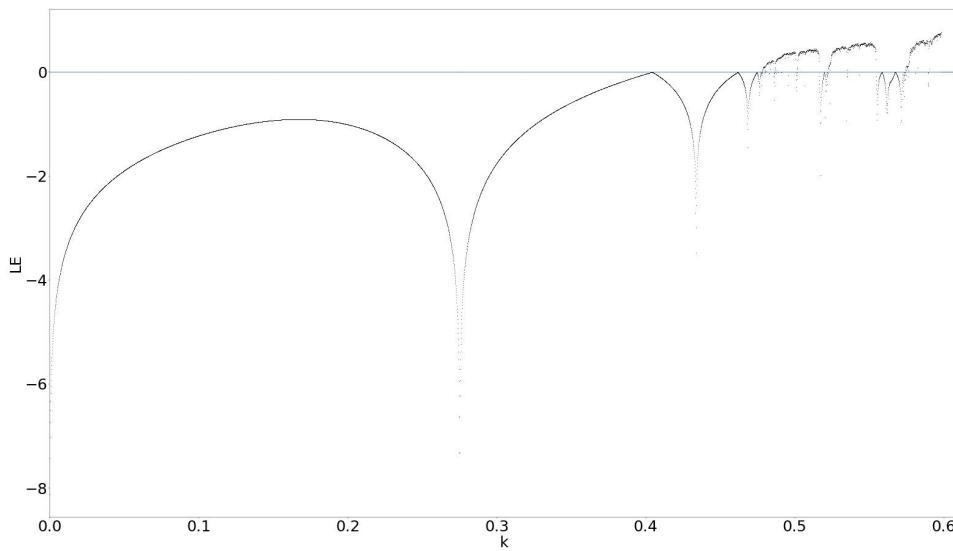
Τέλος, στον πίνακα 2.1 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.1$.

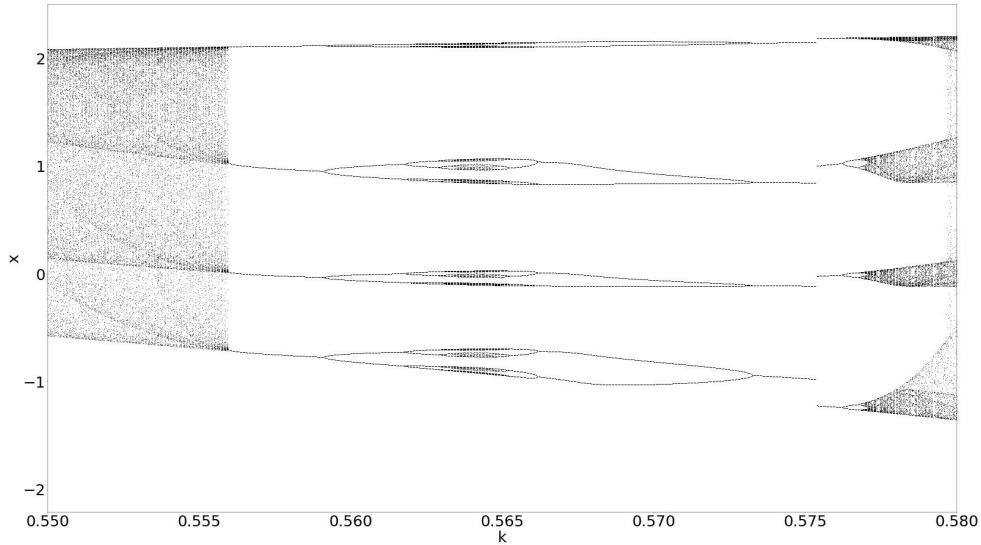
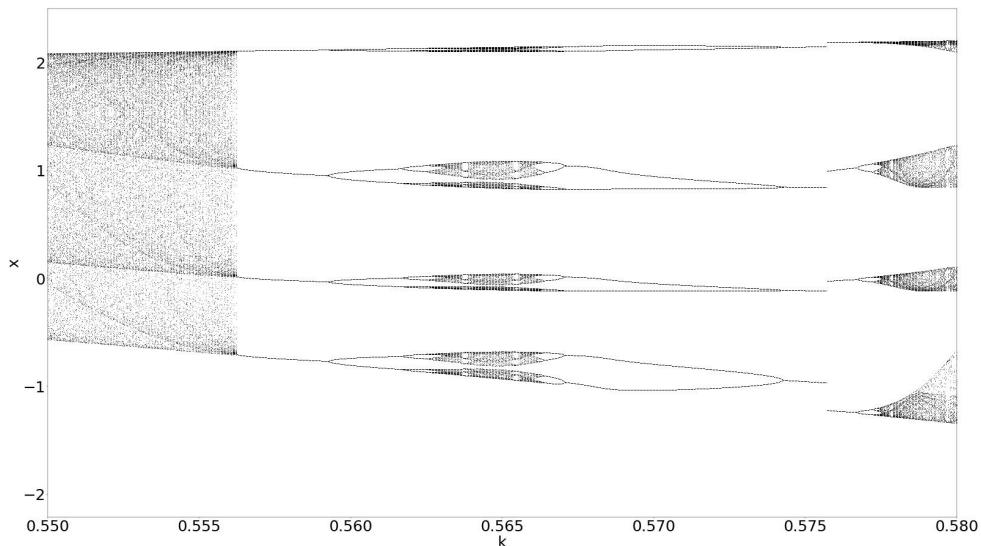
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	$2.5\alpha'$
0.41	Περίοδος - 2	$2.5\beta'$
0.476	Περίοδος - 8	$2.5\gamma'$
0.4778	Περίοδος - 16	$2.5\delta'$
0.479	Χάος	$2.5\epsilon'$
0.517	Περίοδος - 3	$2.5\Gamma'$
0.521	Περίοδος - 6	$2.5\eta'$
0.522	Περίοδος - 11	$2.6\alpha'$
0.524	Χάος	$2.6\beta'$
0.555	Περίοδος - 4	$2.6\gamma'$
0.559	Περίοδος - 8	$2.6\delta'$
0.568	Περίοδος - 4	$2.6\epsilon'$
0.5735	Περίοδος - 6	$2.6\Gamma'$
0.575	Χάος	$2.6\zeta'$



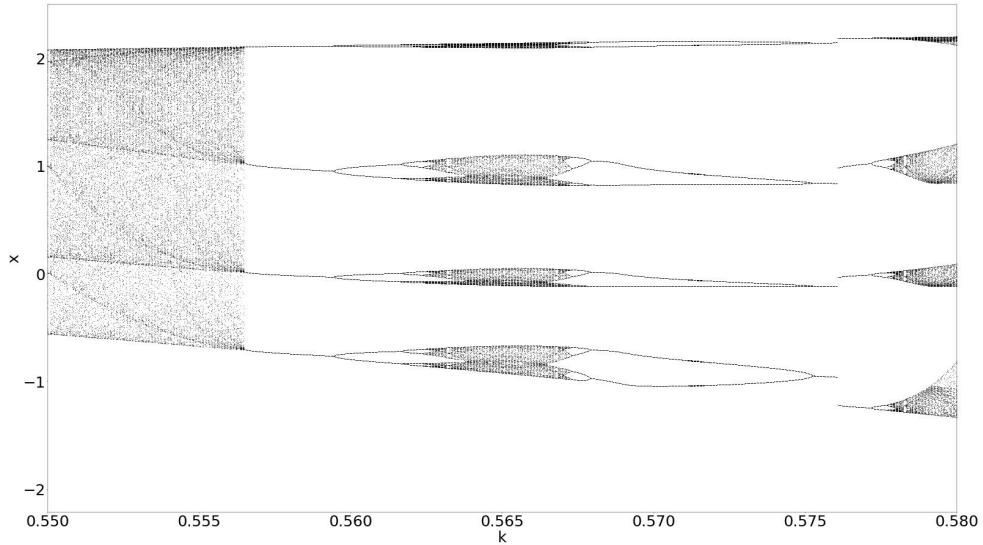
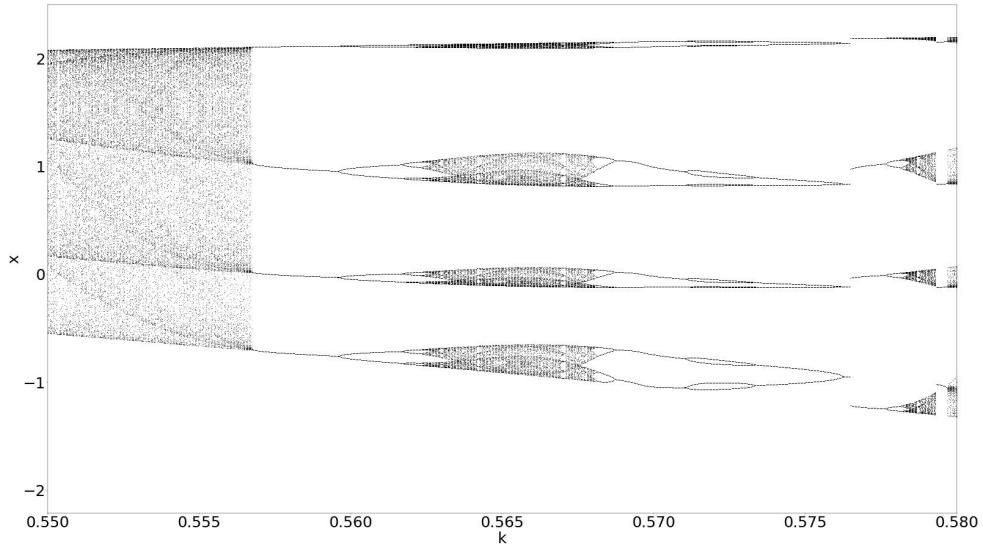
Σχήμα 2.1: Διάγραμμα διωκλάδωσης, για $q = -0.1$.



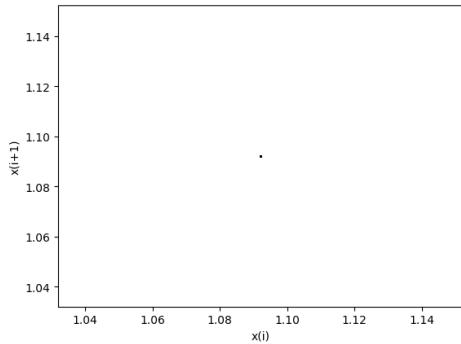
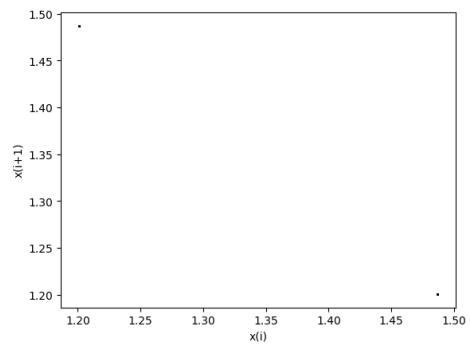
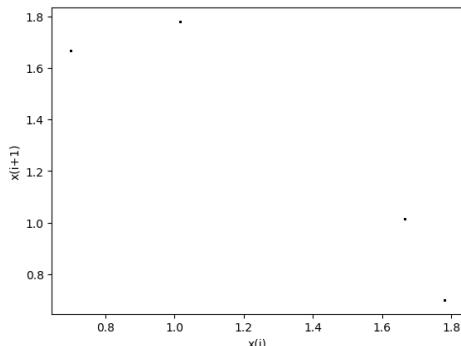
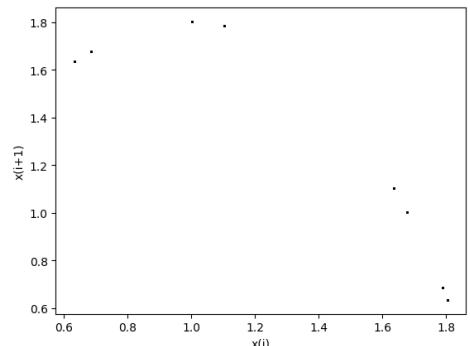
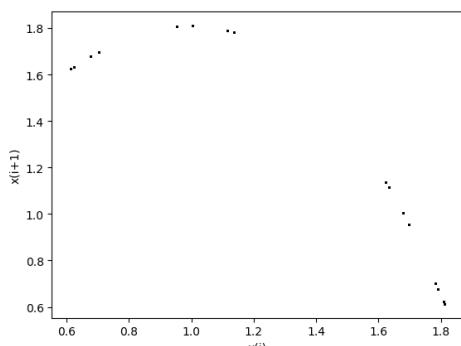
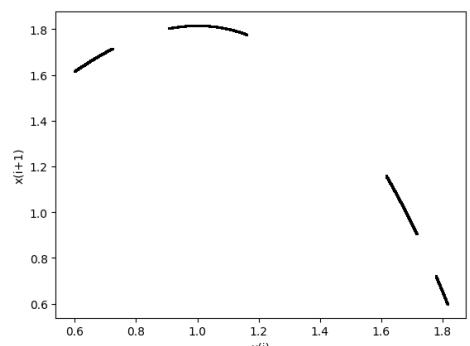
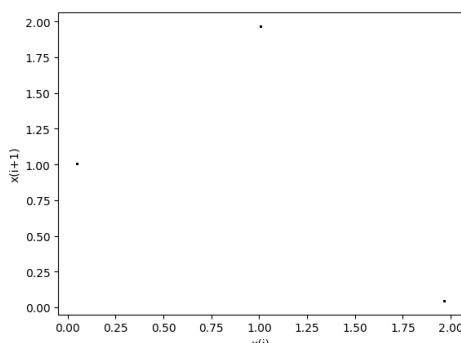
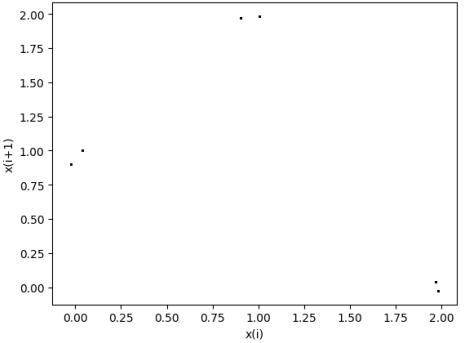
Σχήμα 2.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.1$.

(α') $\Gamma \alpha q = -0.112$ (β') $\Gamma \alpha q = -0.114$

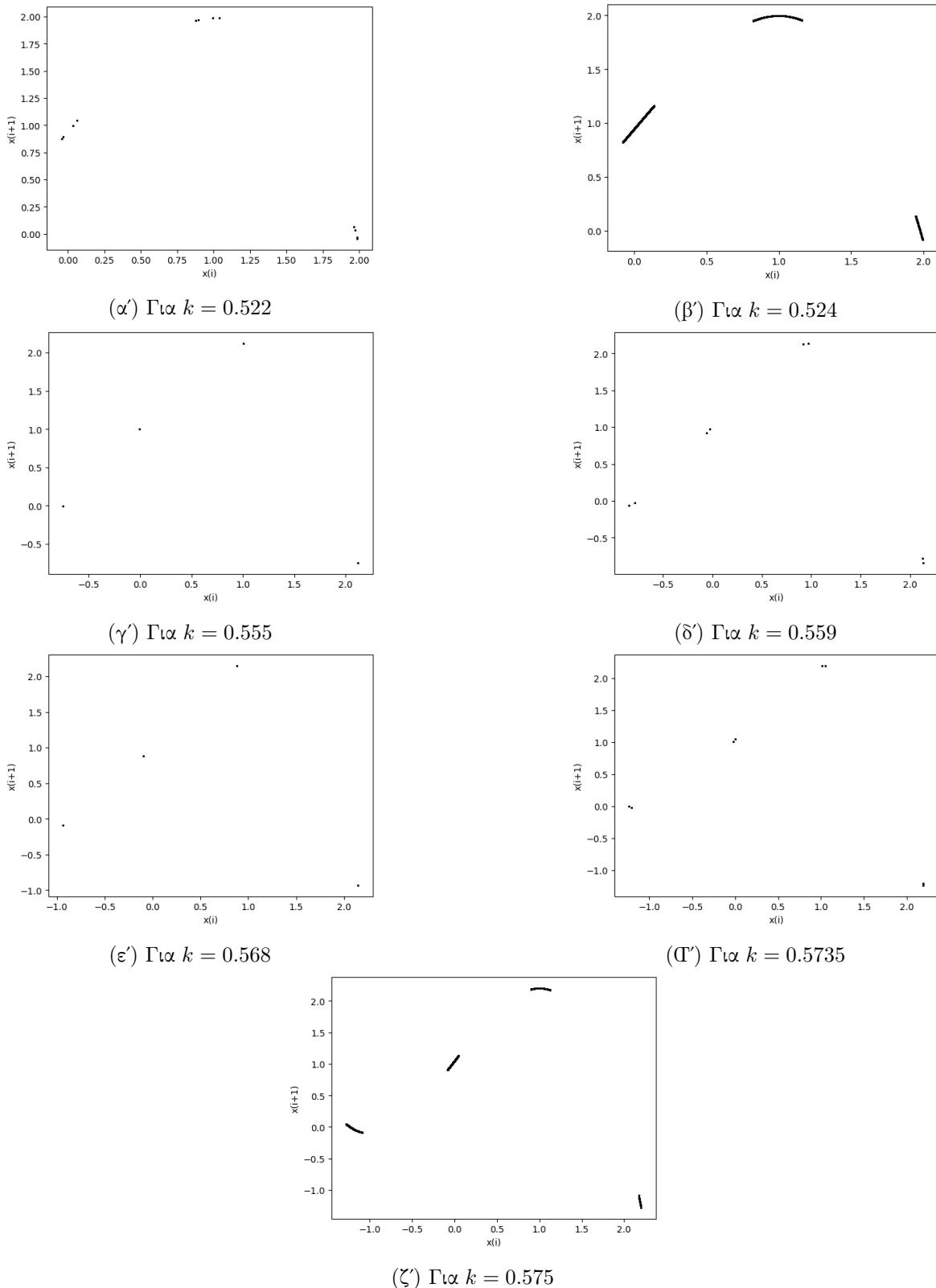
Σχήμα 2.3: Διαγράμματα διαχλάδωσης για διάφορες τιμές του q (α' μέρος).

(α') $\Gamma\alpha q = -0.116$ (β') $\Gamma\alpha q = -0.118$

Σχήμα 2.4: Διαγράμματα διαλλάσσονται για διάφορες τιμές του q (β' μέρος).

(α') $\Gamma \alpha k = 0.3$ (β') $\Gamma \alpha k = 0.41$ (γ') $\Gamma \alpha k = 0.047$ (δ') $\Gamma \alpha k = 0.476$ (ε') $\Gamma \alpha k = 0.4778$ (Γ') $\Gamma \alpha k = 0.479$ (ζ') $\Gamma \alpha k = 0.517$ (η') $\Gamma \alpha k = 0.521$

Σ χήμα 2.5: Διαγράμματα της τιμής x_i με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σχήμα 2.6: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.2 Για $q = -0.3$

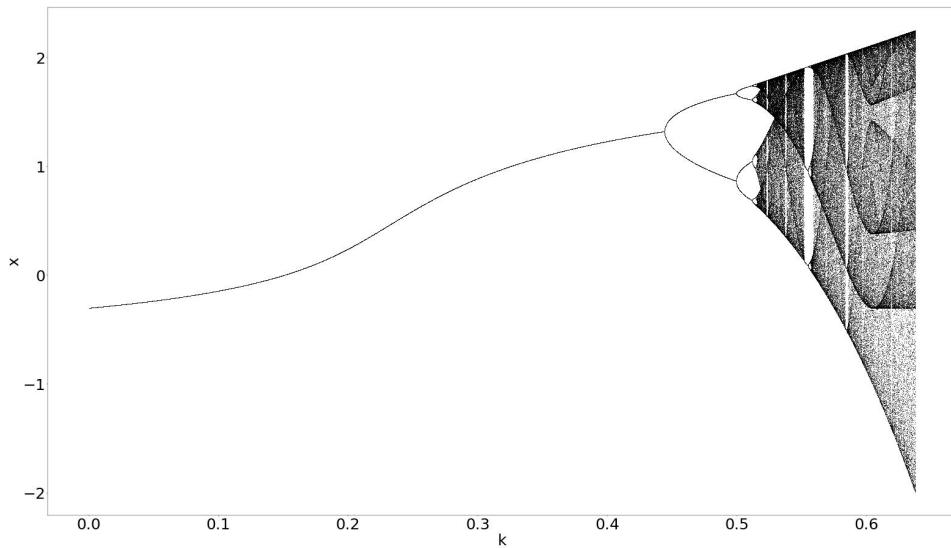
Στο Σχ. 2.7 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (2.2), ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.3$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.44$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.5$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.511$ (περίοδος - 8). Στην συνέχεια για $k > 0.5165$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.551$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.555$ (περίοδος - 6) και $k = 0.556$ (περίοδος - 12) για $k > 0.5573$. Επομένως, εμφανίζει πάλι τη συνοριακή χρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για $k = 0.583$ (περίοδος - 4) και μετά από ένα διπλασιασμό για $k = 0.5846$ (περίοδος - 7) εισέρχεται για τελευταία φορά στο χάος για $k = 0.5851$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.8 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.636]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.511$, στο $0.551 < k < 0.556$, και στο $0.583 < k < 0.5846$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

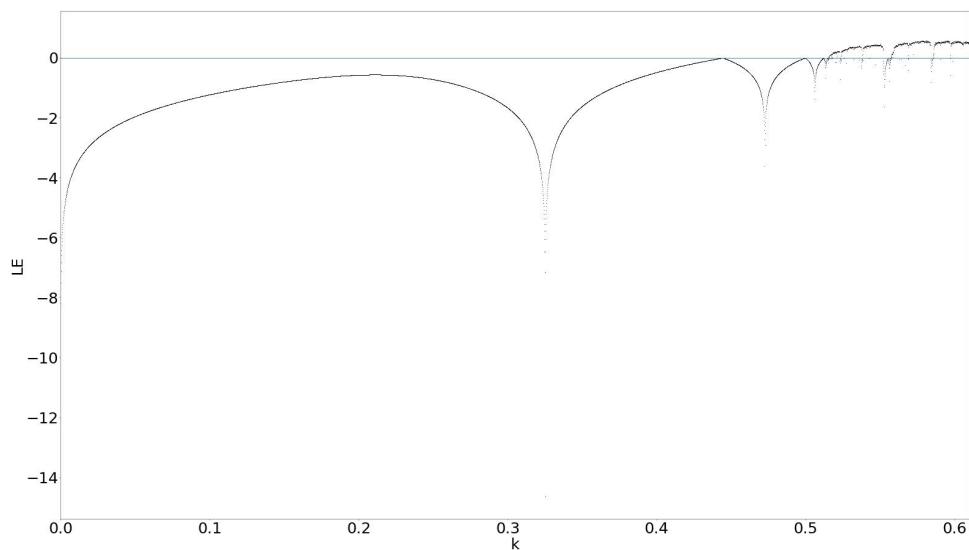
Τέλος, στον πίνακα 2.2 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$.

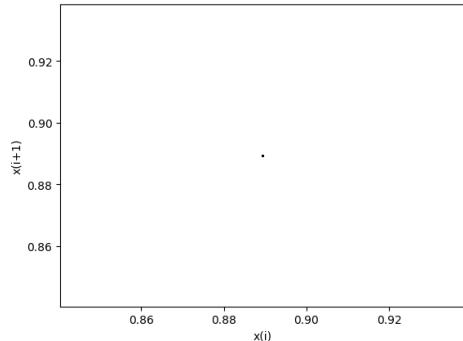
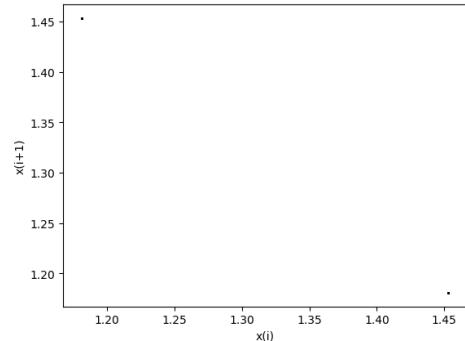
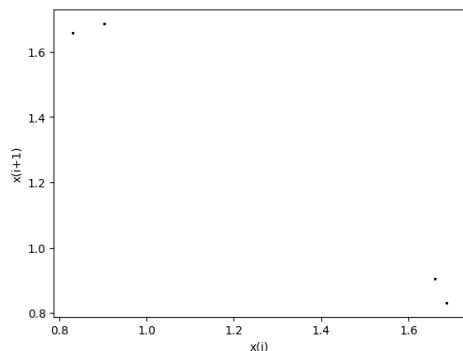
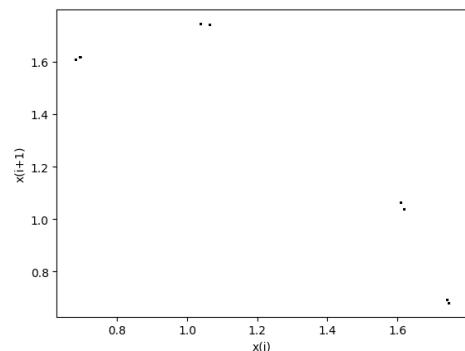
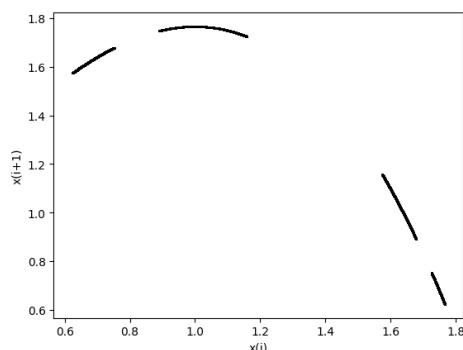
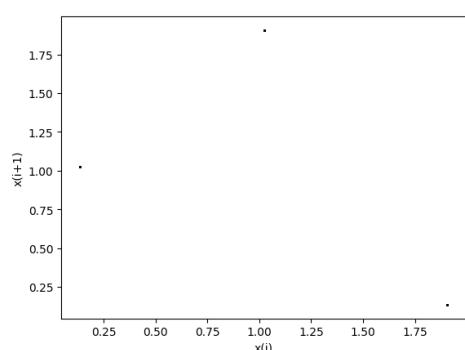
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.5α'
0.44	Περίοδος - 2	2.5β'
0.5	Περίοδος - 4	2.5β'
0.511	Περίοδος - 8	2.5γ'
0.5165	Χάος	2.5ε'
0.551	Περίοδος - 3	2.5Γ'
0.555	Περίοδος - 6	2.5η'
0.556	Περίοδος - 12	2.6α'
0.5573	Χάος	2.6β'
0.583	Περίοδος - 4	2.6γ'
0.5846	Περίοδος - 7	2.6δ'
0.5851	Χάος	2.6ζ'



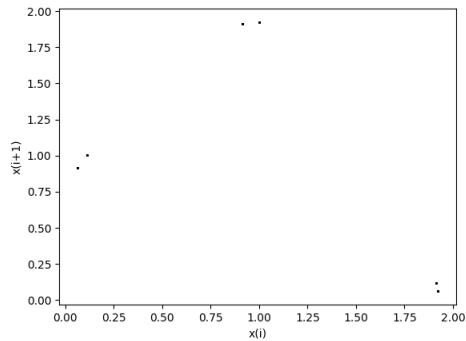
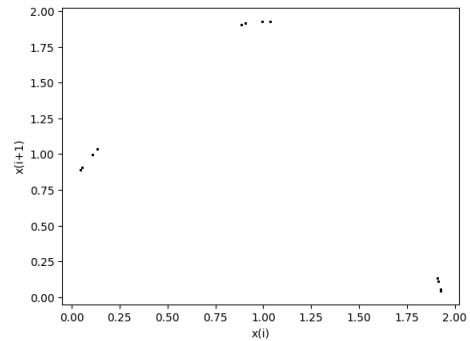
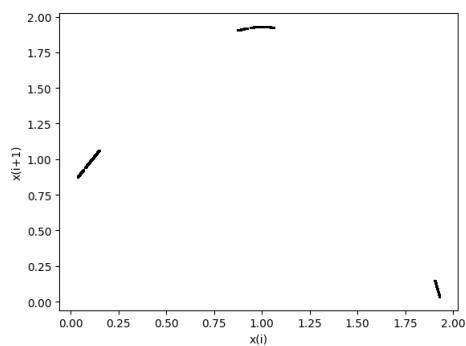
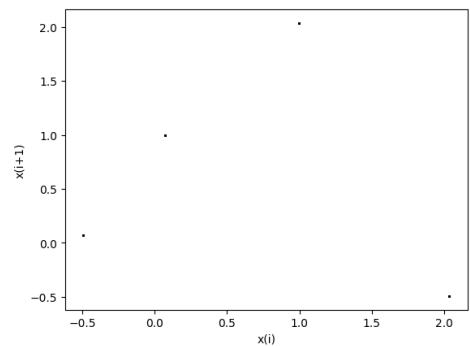
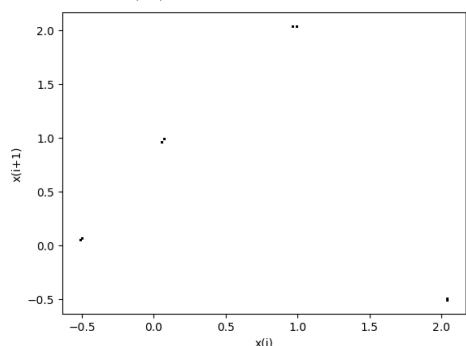
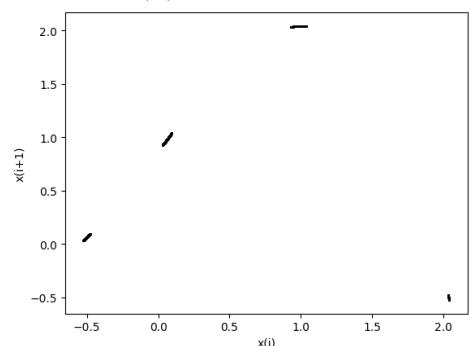
Σχήμα 2.7: Διάγραμμα διωκλάδωσης, για $q = -0.3$.



Σχήμα 2.8: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$.

(α') $\Gamma \alpha k = 0.3$ (β') $\Gamma \alpha k = 0.44$ (γ') $\Gamma \alpha k = 0.5$ (δ') $\Gamma \alpha k = 0.511$ (ε') $\Gamma \alpha k = 0.5165$ (Π') $\Gamma \alpha k = 0.551$

Σχήμα 2.9: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(α') $\Gamma\alpha k = 0.555$ (β') $\Gamma\alpha k = 0.556$ (γ') $\Gamma\alpha k = 0.5573$ (δ') $\Gamma\alpha k = 0.583$ (ε') $\Gamma\alpha k = 0.5846$ (Γ') $\Gamma\alpha k = 0.5851$

Σ χήμα 2.10: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.3 Για $q = -0.5$

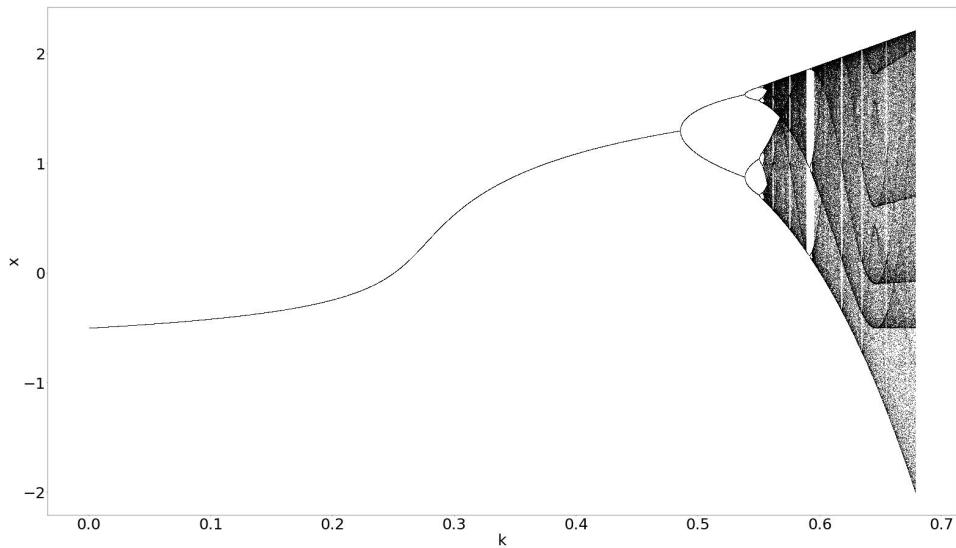
Στο Σχ. 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.5$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.48$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.53$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.55$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.5531$ (περίοδος - 16). Στη συνέχεια για $k > 0.5534$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.58$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.591$ (περίοδος - 6), για $k > 0.5927$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.12 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k , στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.679]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.5534$, στο $0.59 < k < 0.594$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

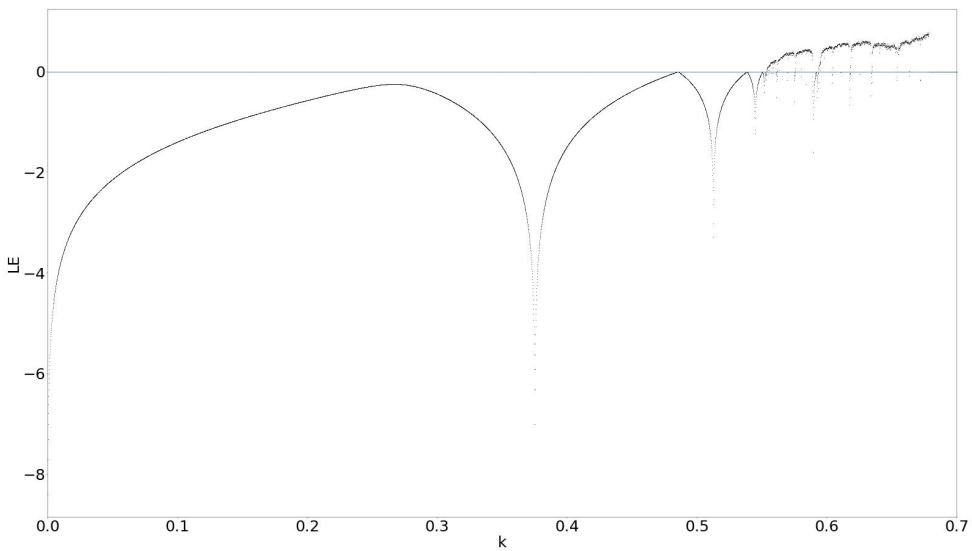
Τέλος, στον πίνακα 2.3 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.3: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$.

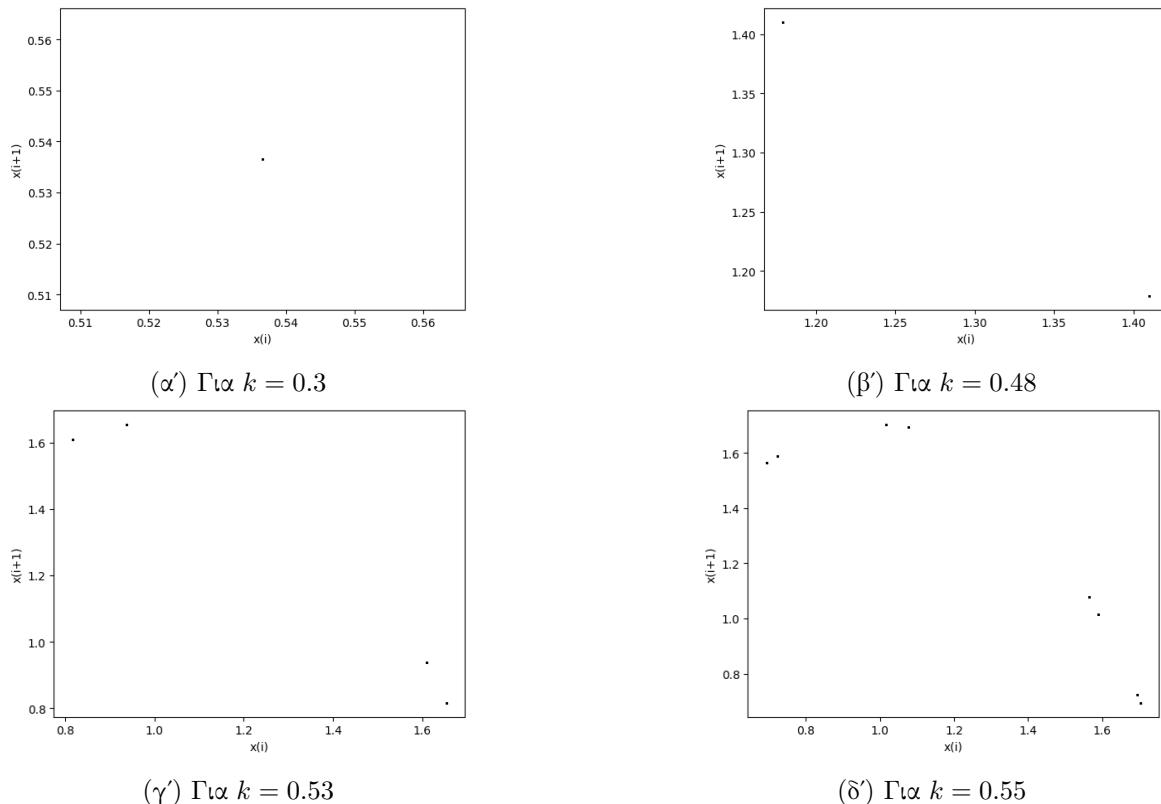
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.13α'
0.48	Περίοδος - 2	2.13β'
0.53	Περίοδος - 4	2.13γ'
0.55	Περίοδος - 8	2.13δ'
0.5531	Περίοδος - 16	2.14α'
0.5534	Χάος	2.14β'
0.58	Περίοδος - 3	2.14γ')
0.591	Περίοδος - 6	2.14δ'
0.5927	Χάος	2.14ε'



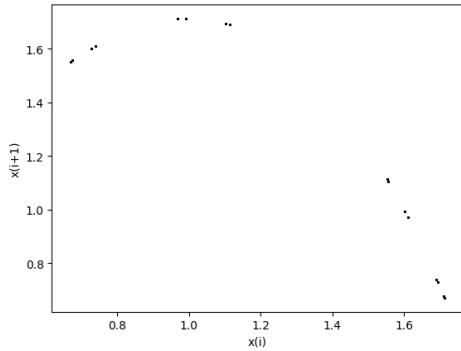
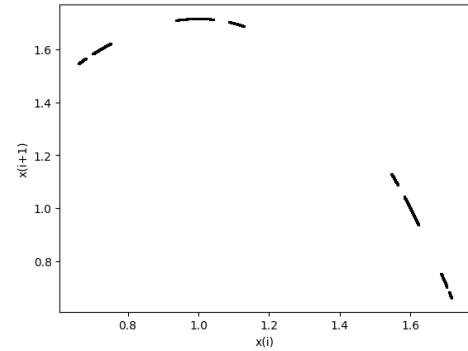
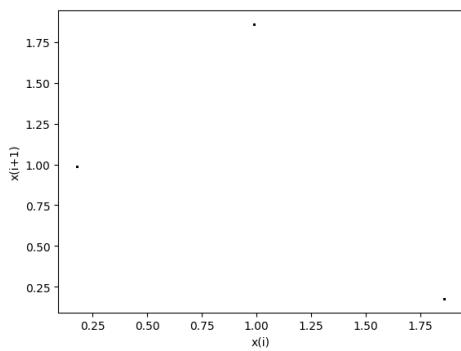
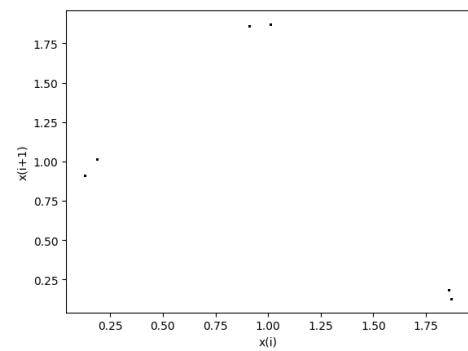
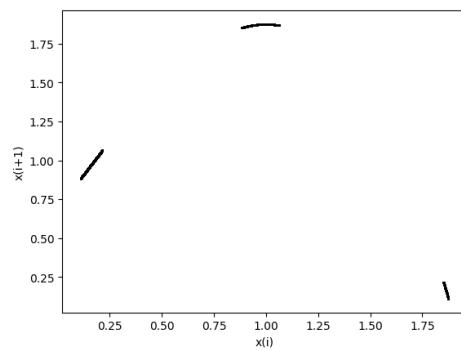
Σχήμα 2.11: Διάγραμμα διαχλάδωσης, για $q = -0.5$.



Σχήμα 2.12: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.5$.



Σχήμα 2.13: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(α') $\Gamma \alpha k = 0.5531$ (β') $\Gamma \alpha k = 0.5534$ (γ') $\Gamma \alpha k = 0.58$ (δ') $\Gamma \alpha k = 0.591$ (ε') $\Gamma \alpha k = 0.5927$

Σ χήμα 2.14: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.4 Για $q = -0.7$

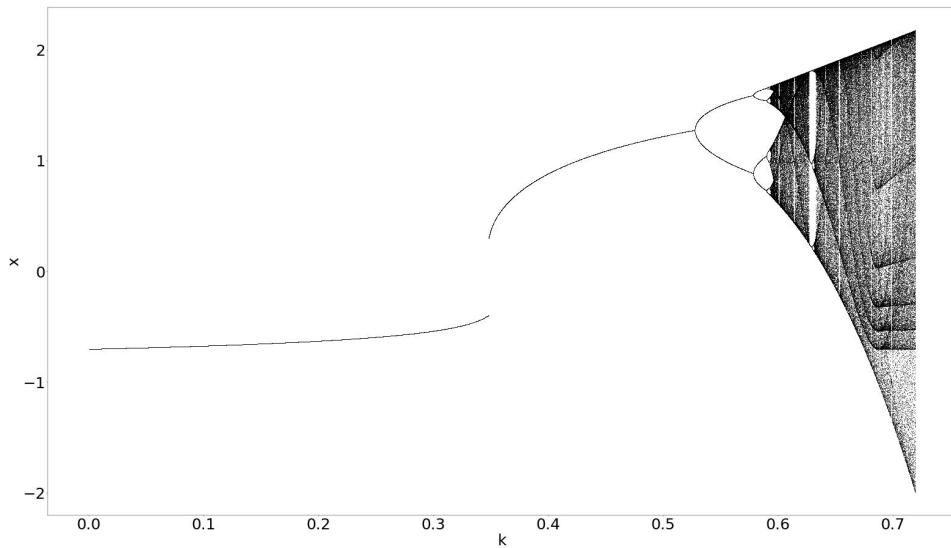
Στο Σχ. 2.15 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.7$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$ αλλά από $k[0.3469, 0.3486]$ "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά. Από $k = 3.469$ το σύστημα εισέρχεται ξανά σε περίοδο - 1. Για $k = 0.52$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.57$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.592$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.593$ (περίοδος - 15). Στη συνέχεια για $k > 0.593$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.627$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.63$ (περίοδος - 6) $k = 0.631$ (περίοδος - 11), για $k > 0.631$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.12 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.72]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.594$, στο $0.627 < k < 0.632$, παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

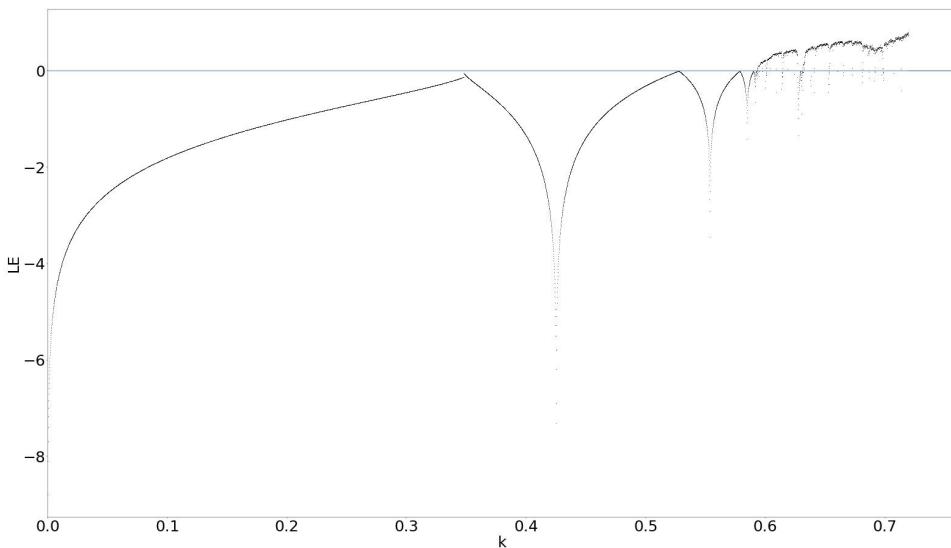
Τέλος, στον πίνακα 2.4 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.4: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.7$.

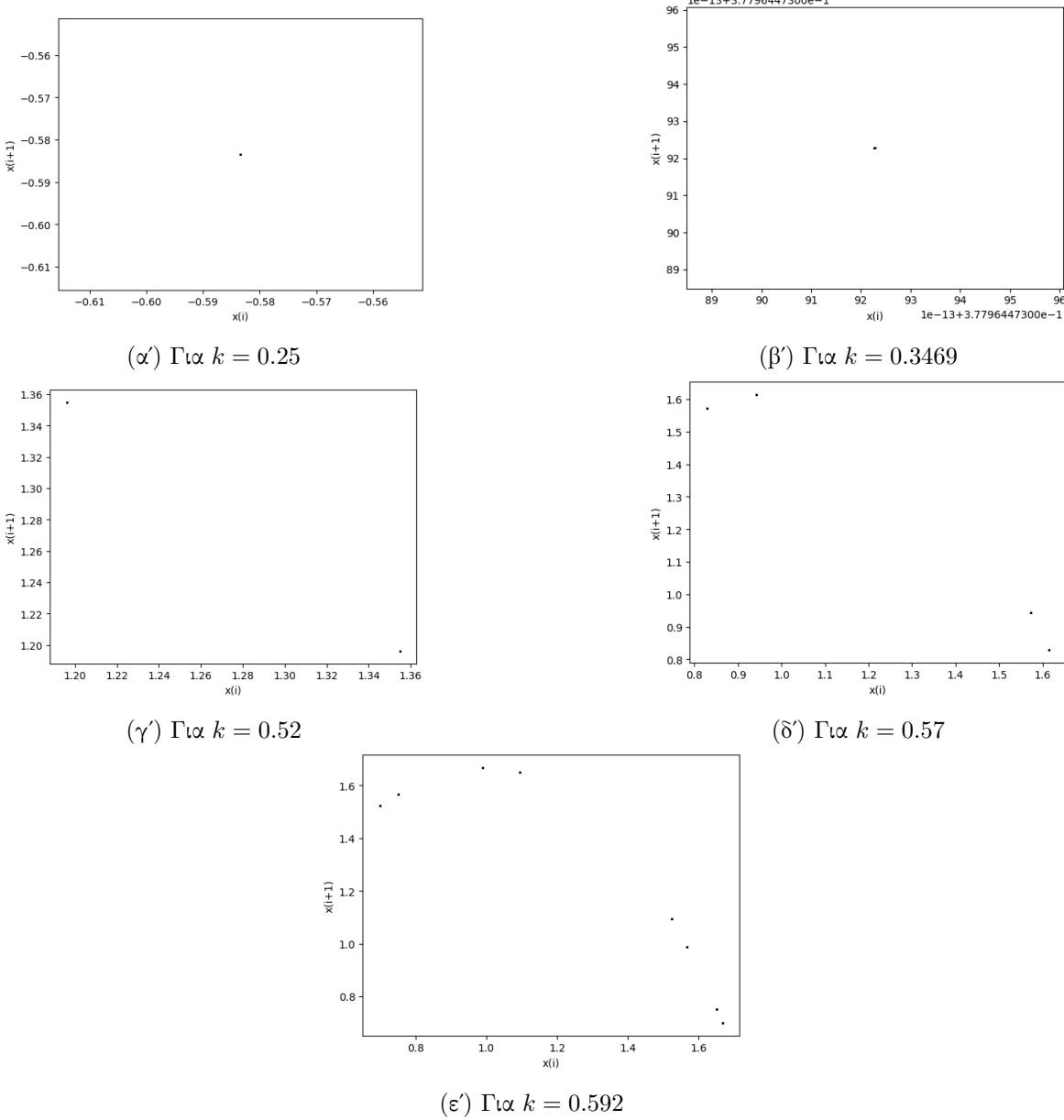
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.25	Περίοδος - 1	2.17α'
0.3469	Περίοδος - 1	2.17β'
0.52	Περίοδος - 2	2.17γ'
0.57	Περίοδος - 4	2.17δ'
0.592	Περίοδος - 8	2.17ε'
0.593	Περίοδος - 15	2.18α'
0.594	Χάος	2.18β'
0.627	Περίοδος - 3	2.18γ'
0.630	Περίοδος - 6	2.18δ'
0.631	Περίοδος - 11	2.18ε'
0.632	Χάος	2.18Γ'



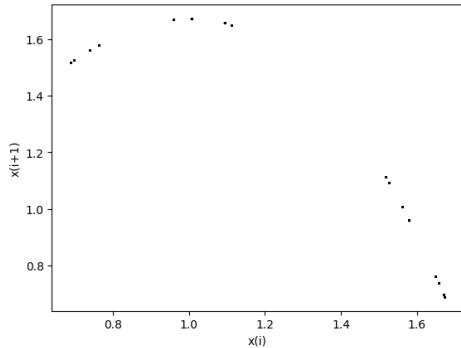
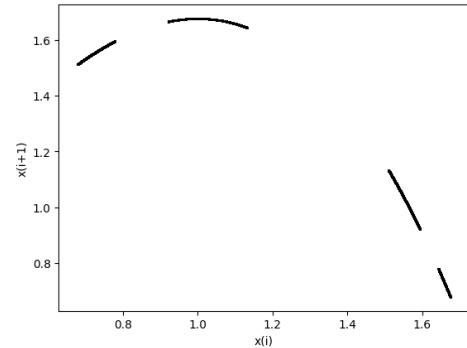
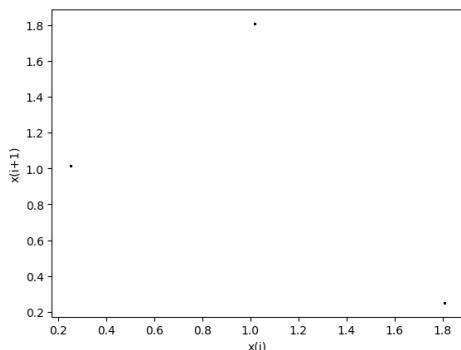
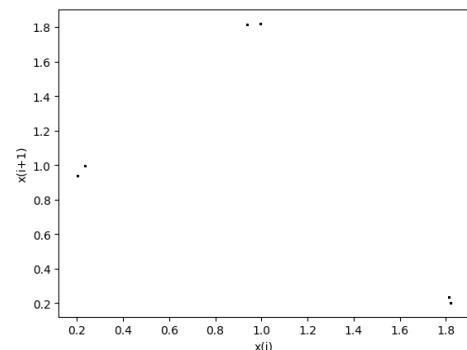
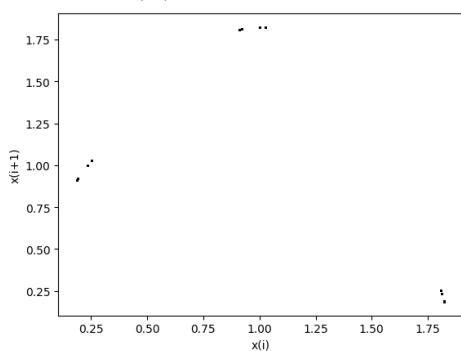
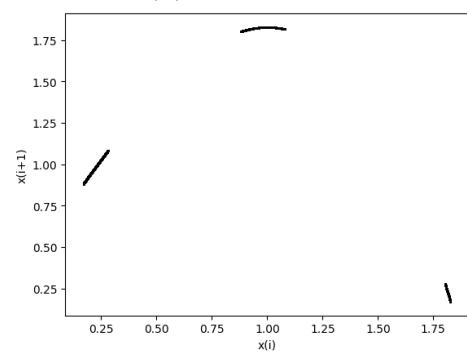
Σχήμα 2.15: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.16: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$.



Σ χήμα 2.17: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(α') $\chi\alpha k = 0.593$ (β') $\Gamma\alpha k = 0.594$ (γ') $\Gamma\alpha k = 0.627$ (δ') $\Gamma\alpha k = 0.63$ (ε') $\Gamma\alpha k = 0.631$ (Π') $\Gamma\alpha k = 0.632$

Σχήμα 2.18: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.5 Για $q = -0.9$

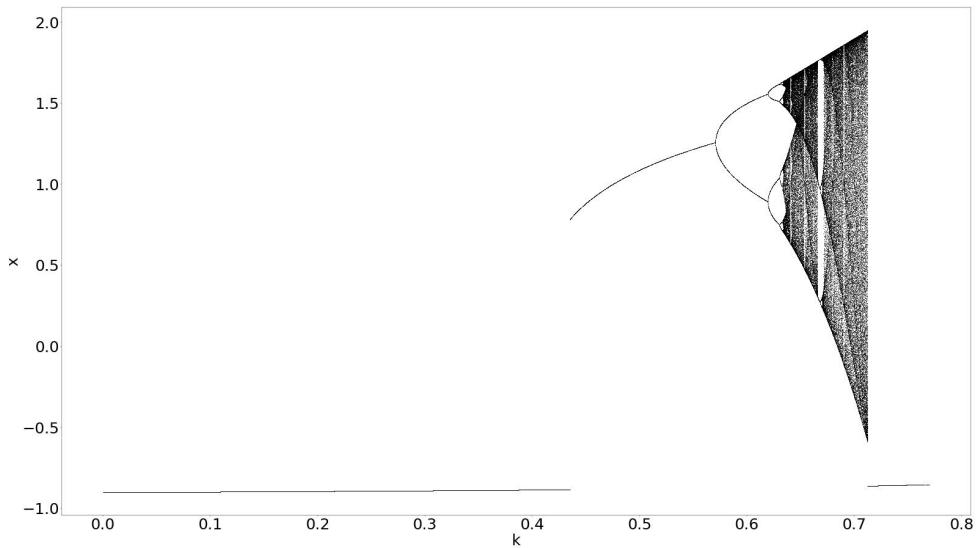
Στο Σχ. 2.19 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.9$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$ αλλά στο διάστημα τιμών $0.43 < k < 0.436$ "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά. Οπότε το σύστημα εμφανίζει πάλι το φαινόμενο της υστέρησης. Από $k = 3.436$ το σύστημα εμφανίζει πάλι περιοδική συμπεριφορά περίοδο - 1. Για $k = 0.57$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.62$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.63$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.633$ (περίοδος - 16). Στην συνέχεια για $k > 0.635$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.665$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από έναν νέο διπλασιασμό $k = 0.668$ (περίοδος - 6), για $k > 0.671$. Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για $k = 0.72$ (περίοδος - 1). Για $q = -0.7$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο σχήμα 2.20 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.77]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.635$, στο $0.665 < k < 0.671$ και $0.72 < k < 0.77$ παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

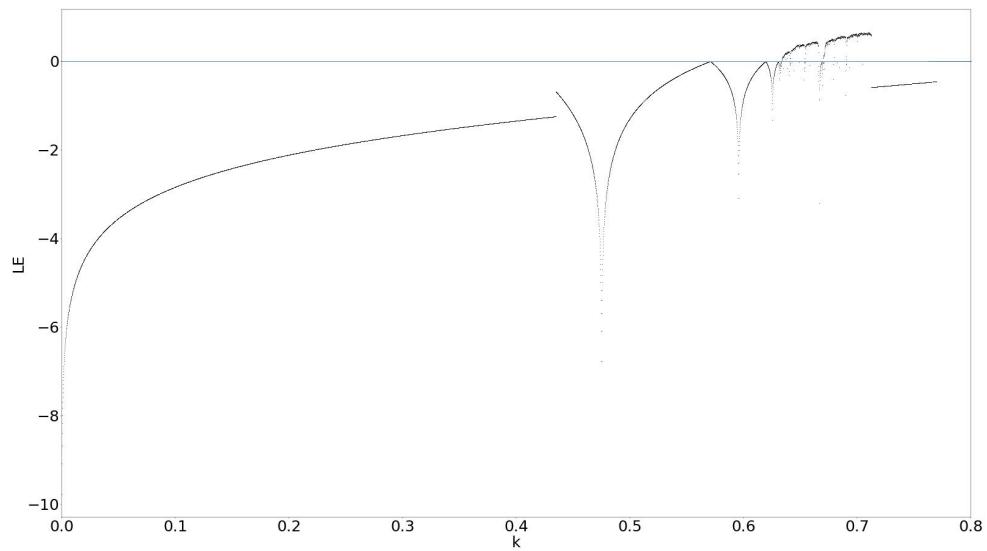
Τέλος, στον πίνακα 2.5 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.5: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.9$.

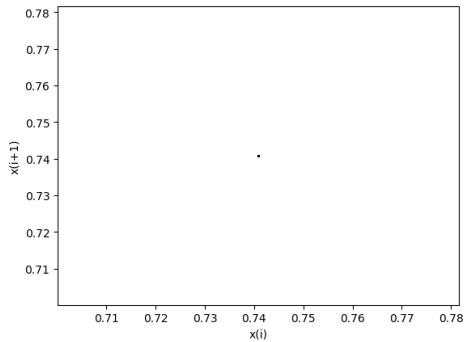
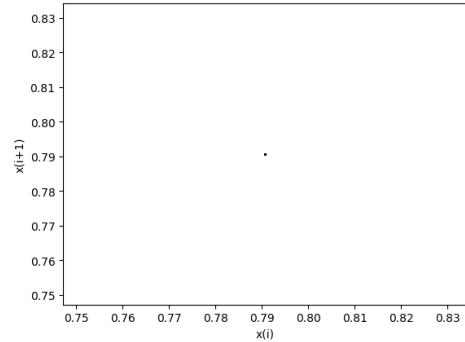
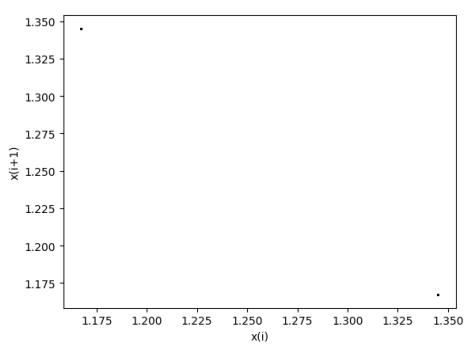
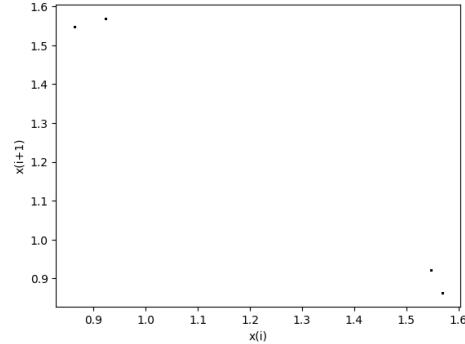
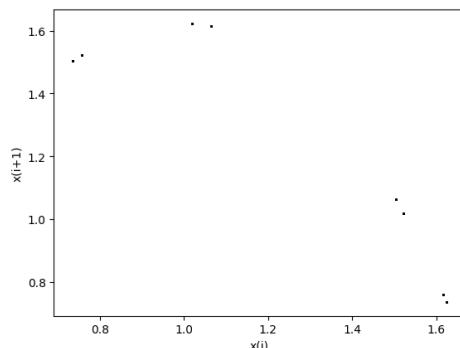
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.43	Περίοδος - 1	2.21α'
0.436	Περίοδος - 1	2.21β'
0.57	Περίοδος - 2	2.21γ'
0.62	Περίοδος - 4	2.21δ'
0.63	Περίοδος - 8	2.21ε'
0.633	Περίοδος - 16	2.22α'
0.635	Χάος	2.22β'
0.665	Περίοδος - 3	2.22γ'
0.668	Περίοδος - 6	2.22δ'
0.671	Χάος	2.22ε'
0.72	Περίοδος - 1	2.22Γ'



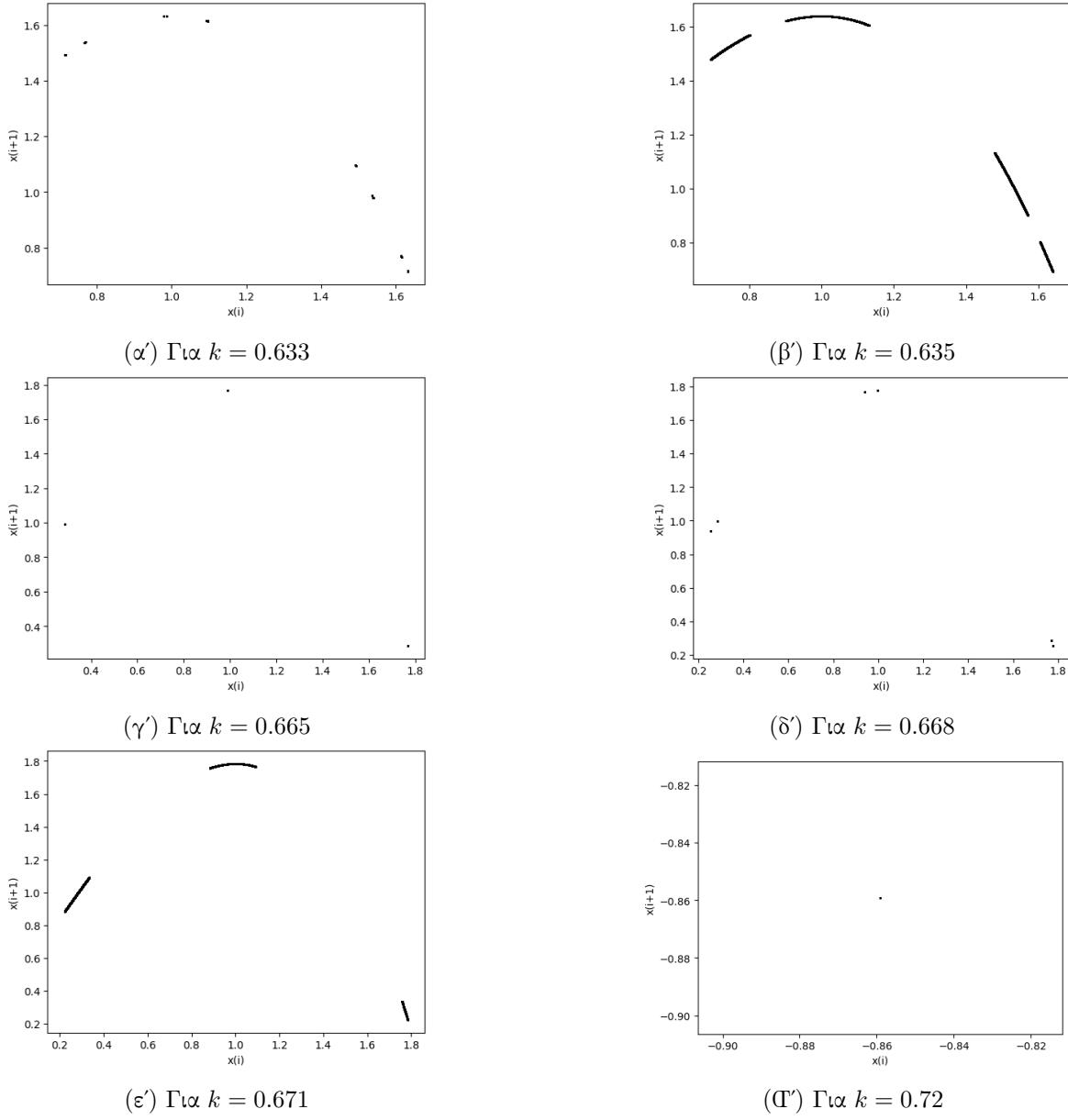
Σχήμα 2.19: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.20: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$

(α') $\Gamma \alpha k = 0.43$ (β') $\Gamma \alpha k = 0.436$ (γ') $\Gamma \alpha k = 0.57$ (δ') $\Gamma \alpha k = 0.62$ (ε') $\Gamma \alpha k = 0.63$

Σχήμα 2.21: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σχήμα 2.22: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.6 Για $q = -1.2$

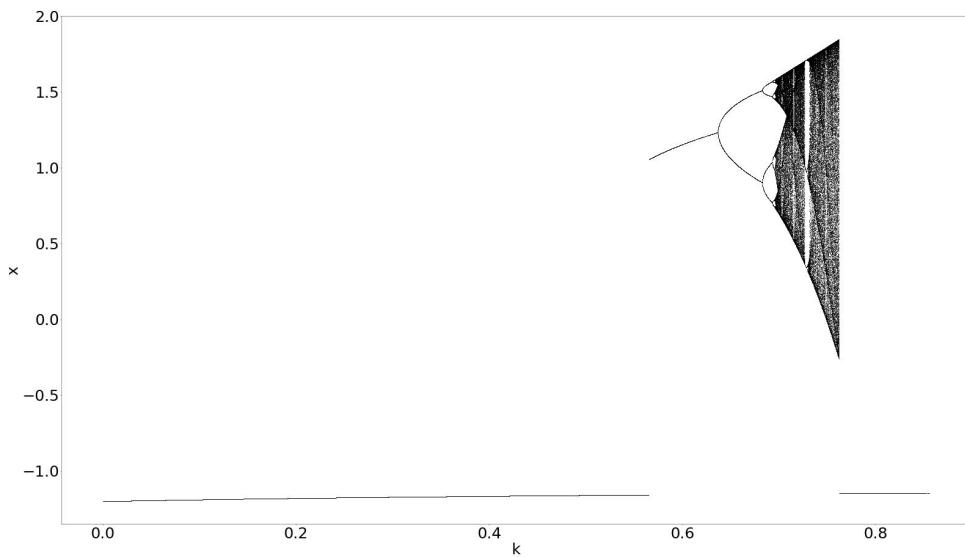
Στο Σχ. 2.23 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.2$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.55$, αλλά στο διάστημα τιμών $0.56 < k < 0.566$ "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά, εμφανίζοντας το φαινόμενο της υστέρησης. Από $k = 0.566$ το σύστημα εμφανίζει πάλι περιοδική συμπεριφορά περίοδο - 1. Για $k = 0.63$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.67$ (περίοδος - 4) και τον τρίτο για $k = 0.69$ (περίοδος - 8). Στη συνέχεια για $k > 0.696$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.726$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από ένα διπλασιασμό $k = 0.729$ (περίοδος - 6), για $k > 0.731$. Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για $k = 0.762$ (περίοδος - 1). Για $q = -1.2$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου, ενώ παρατηρείται και εσωτερική κρίση ελκυστή για $k = 0.726$ αλλά και για $k = 0.762$.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.24 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.77]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.69$, στο $0.726 < k < 0.731$ και στο $0.72 < k < 0.8574$ παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

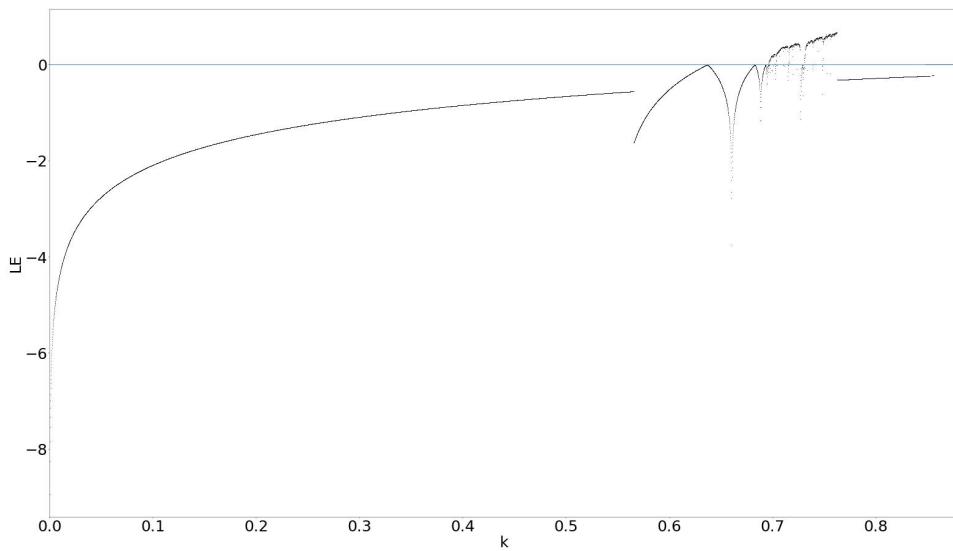
Τέλος, στον πίνακα 2.6 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.6: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.2$.

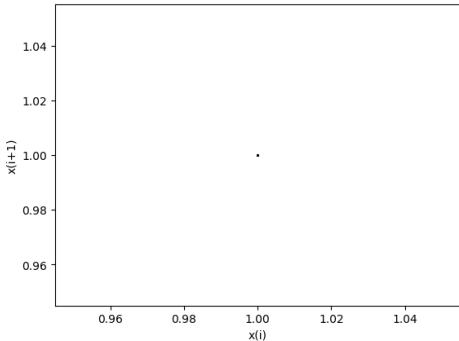
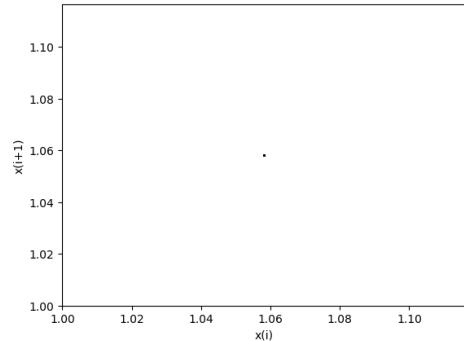
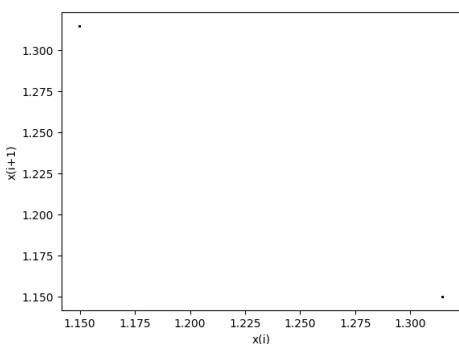
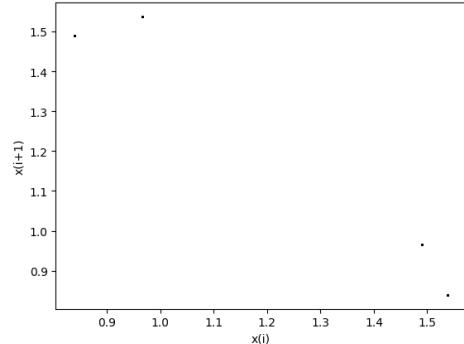
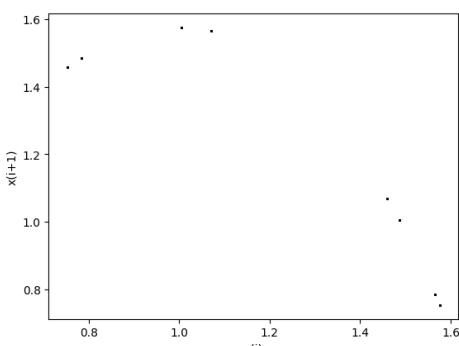
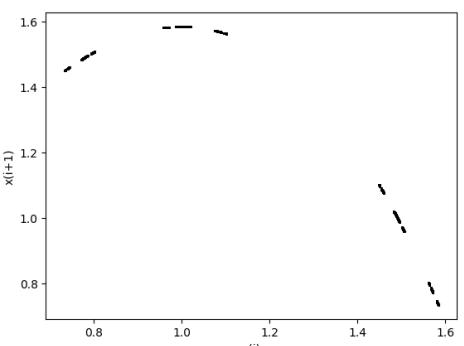
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.55	Περίοδος - 1	2.25α'
0.566	Περίοδος - 1	2.25β'
0.63	Περίοδος - 2	2.25γ'
0.68	Περίοδος - 4	2.25δ'
0.69	Περίοδος - 8	2.25ε'
0.696	Χάος	2.25Γ'
0.726	Περίοδος - 3	2.26α'
0.729	Περίοδος - 6	2.26β'
0.731	Χάος	2.26γ'
0.762	Περίοδος - 1	2.26δ'



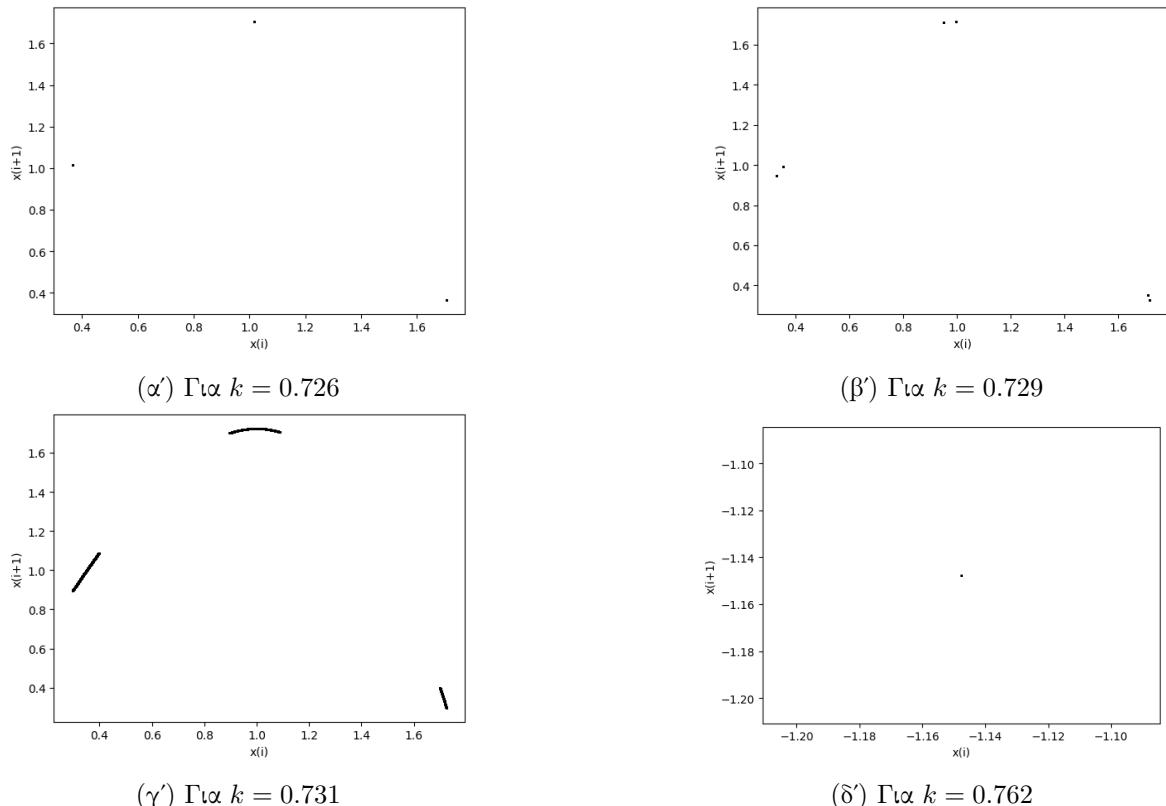
Σχήμα 2.23: Διάγραμμα διαχλάδωσης, για $q = -1.2$.



Σχήμα 2.24: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.2$.

(α') $\Gamma \alpha k = 0.55$ (β') $\Gamma \alpha k = 0.566$ (γ') $\Gamma \alpha k = 0.63$ (δ') $\Gamma \alpha k = 0.68$ (ε') $\Gamma \alpha k = 0.69$ (Π') $\Gamma \alpha k = 0.696$

Σχήμα 2.25: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σ χήμα 2.26: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.7 Για $q = -1.4$

Στα Σχ. 2.27 , 2.28 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $a = 1$, $b = 2$, $q = -1.4$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.27α' ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης 2.27β' ($x_0 = 0.5$), 2.28α' ($x_0 = 1$), 2.28β' ($x_0 = -0.1$) παρατηρείται ότι για $q = -1.4$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα αντίστοιχα διαγράμματα Lyapunov 2.29α', 2.29β', 2.30α', 2.30β', όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης 2.31, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

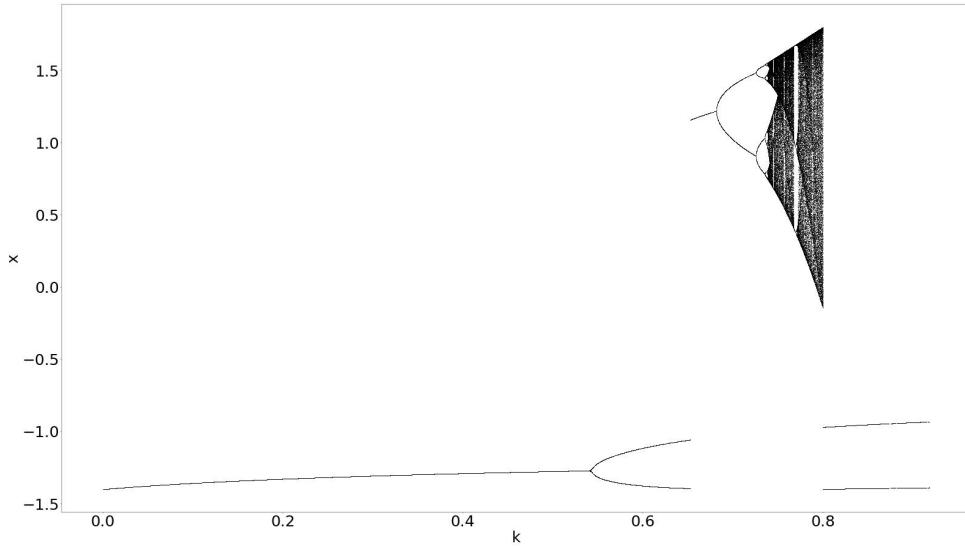
Στον πίνακα 2.7 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.27α'. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγράμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επίσης παρατηρείται η εσωτερική χρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (0.744, 0.7565 , 0.768 , 0.8), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.27α' στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-2, αλλά και από περίοδο - 2 σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8.

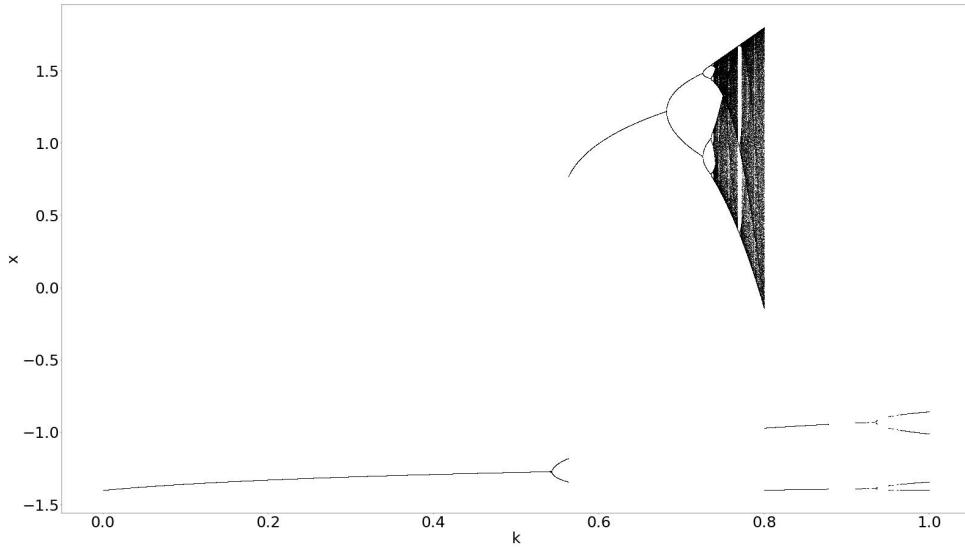
Τέλος, στο σχήμα 2.29α' παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.91]. Οι τιμές του πίνακα 2.7 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.29α' όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.7: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $a = 1$, $b = 2$, $q = -1.4$ και $x_i = 0.1$

Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.4	Περίοδος - 1	2.32α'
0.54	Περίοδος - 2	2.32β'
0.65	Περίοδος - 1	2.32γ'
0.68	Περίοδος - 2	2.32δ'
0.726	Περίοδος - 4	2.32ε'
0.737	Περίοδος - 8	2.32Γ'
0.738	Περίοδος - 15	2.33α'
0.739	Χάος	2.33β'
0.744	Περίοδος - 6	2.33γ'
0.746	Χάος	2.33δ'
0.7565	Περίοδος - 5	2.33ε'
0.757	Χάος	2.33Γ'
0.768	Περίοδος - 3	2.33ζ'
0.77	Περίοδος - 6	2.33η'
0.78	Χάος	2.34α'
0.8	Περίοδος - 2	2.34β'

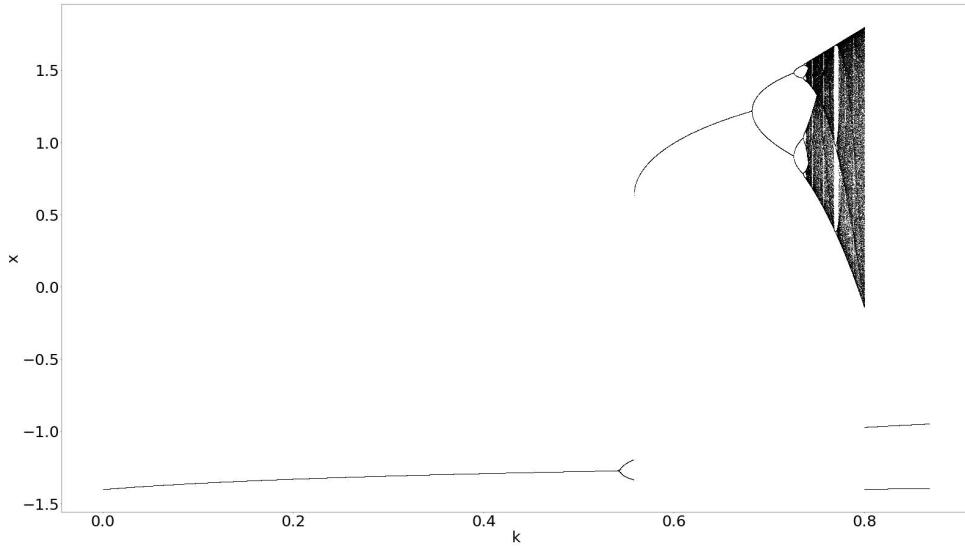


(α') $x_0 = 0.1$

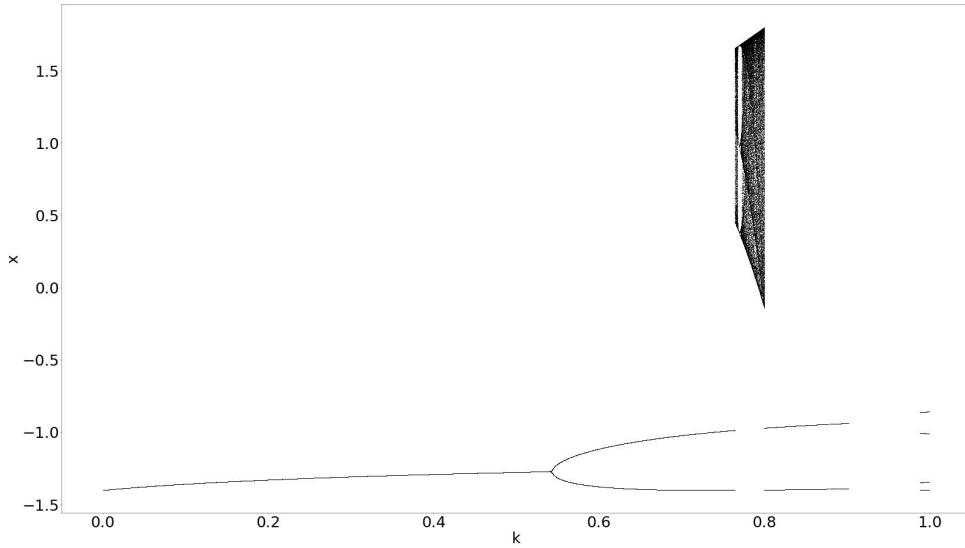


(β') $x_0 = 0.5$

Σ χήμα 2.27: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (α' μέρος).

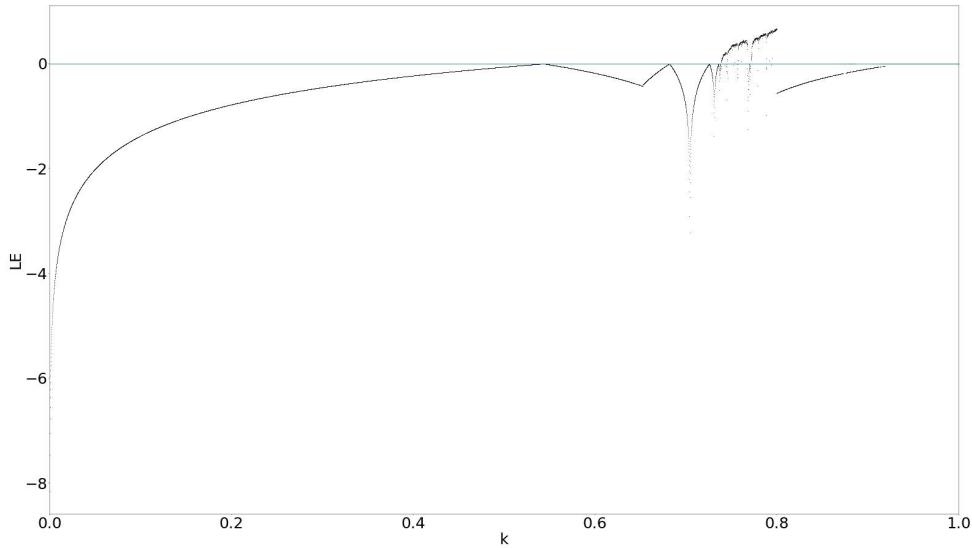
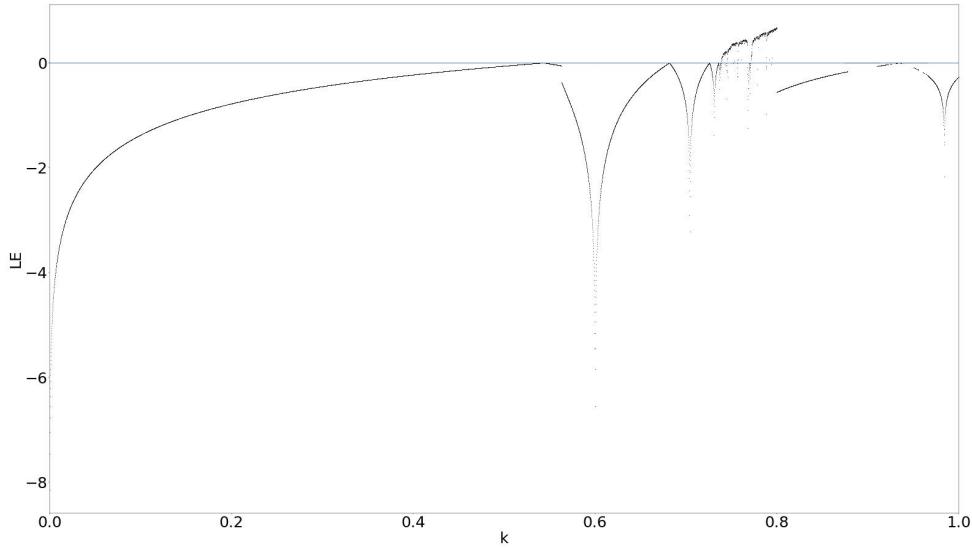


(α') $x_0 = 1$

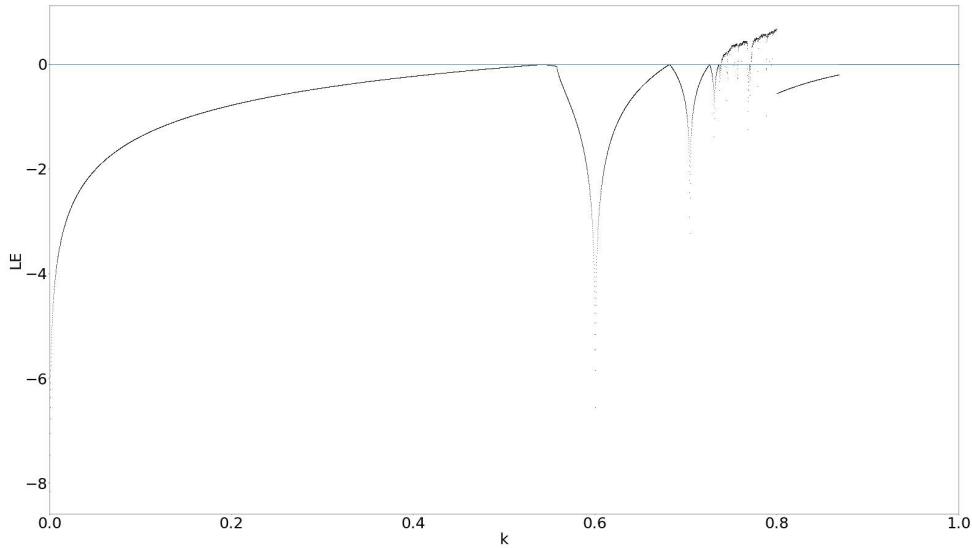
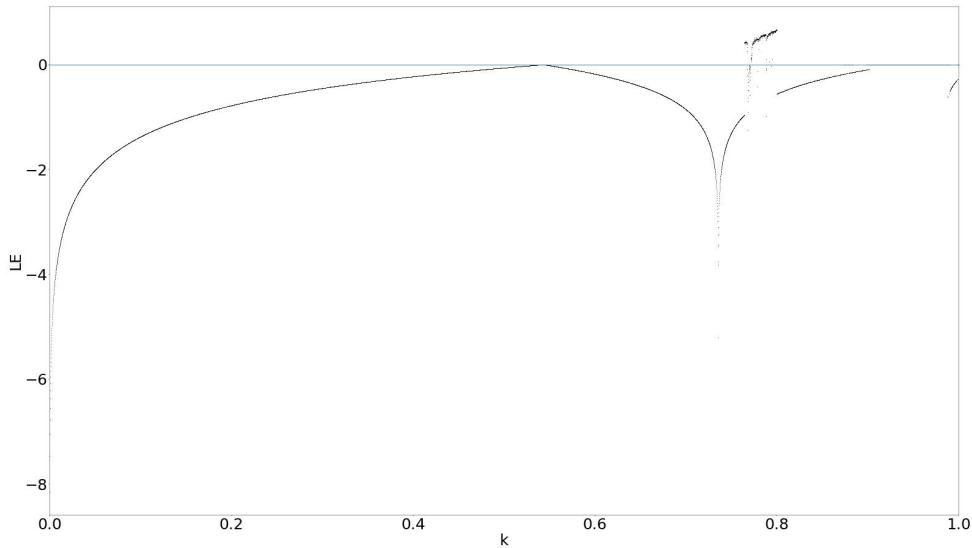


(β') $x_0 = -0.1$

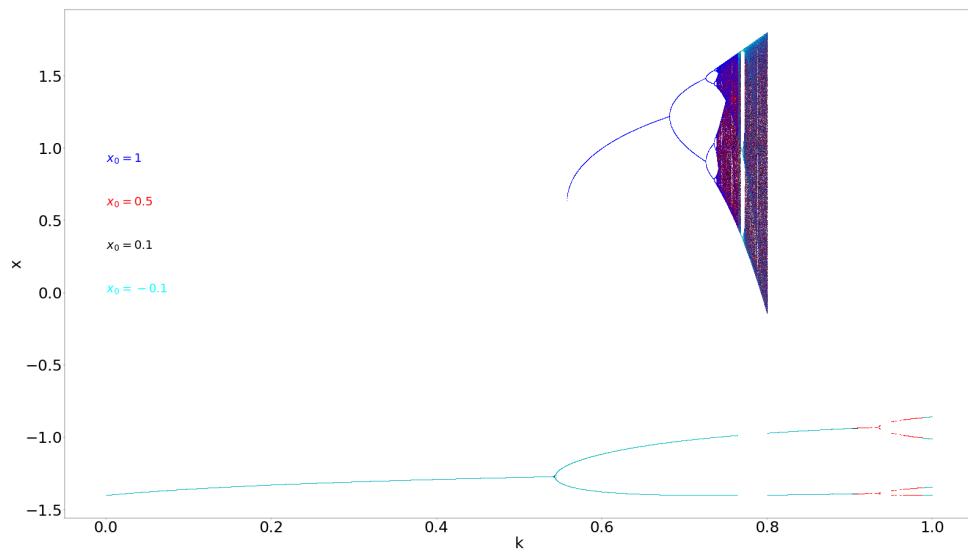
Σ χήμα 2.28: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (β' μέρος).

(α') $\Gamma \alpha x_0 = 0.1$ (β') $\Gamma \alpha x_0 = 0.5$

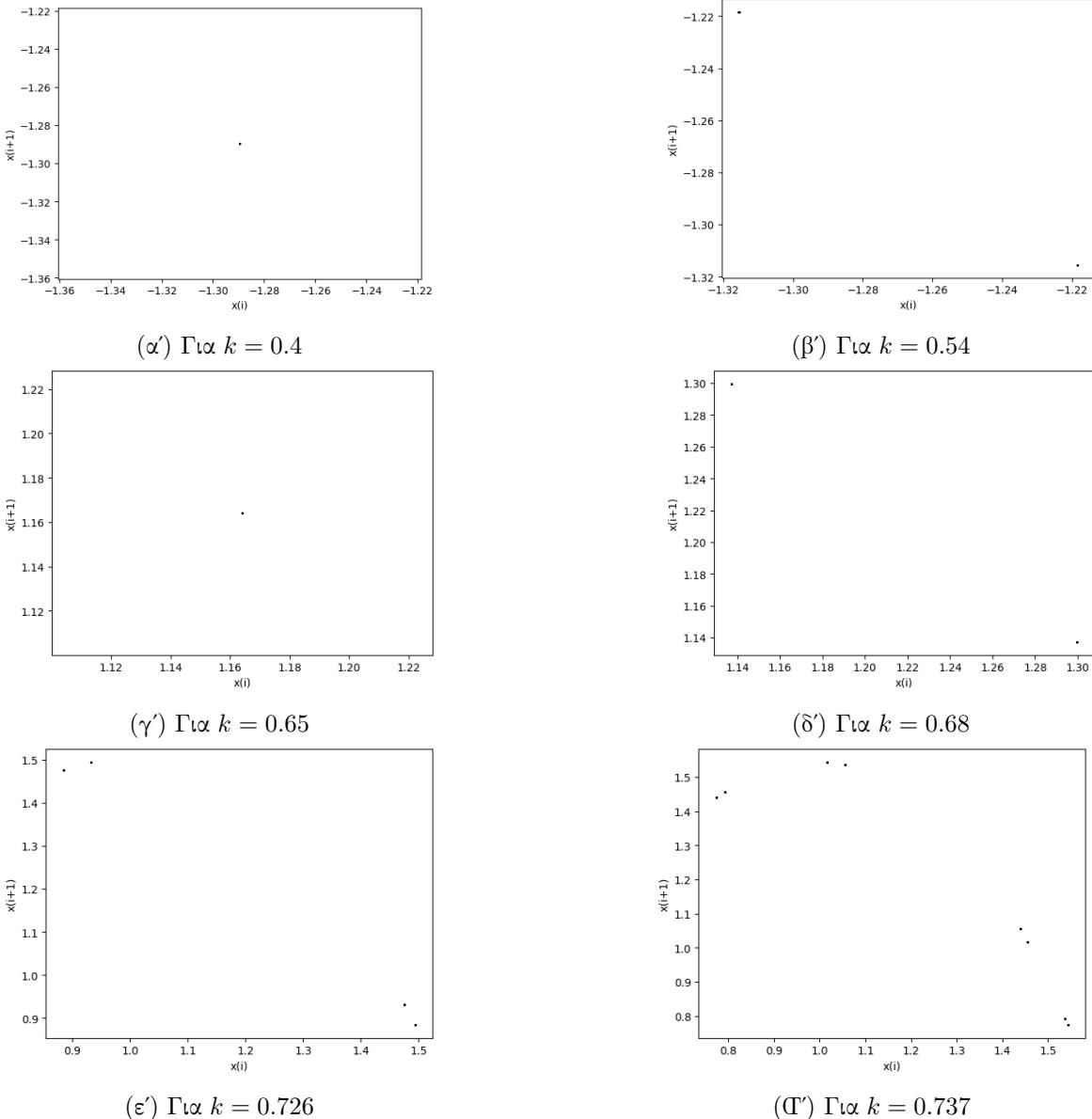
Σχήμα 2.29: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).

(α') $\Gamma \alpha x_0 = 1$ (β') $\Gamma \alpha x_0 = -0.1$

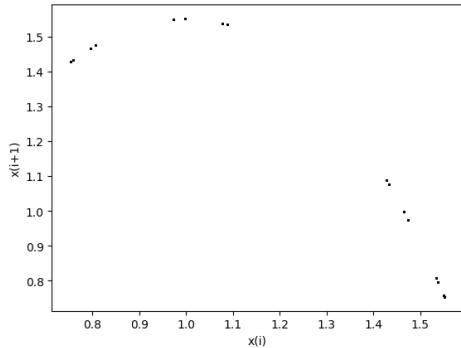
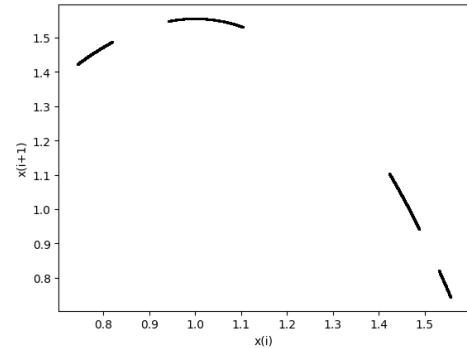
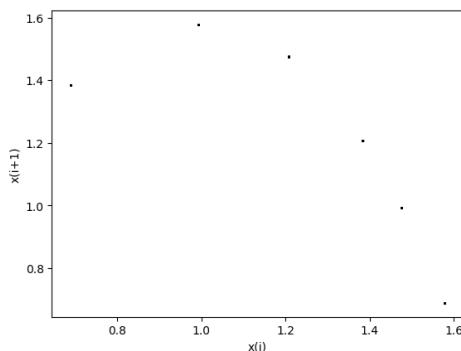
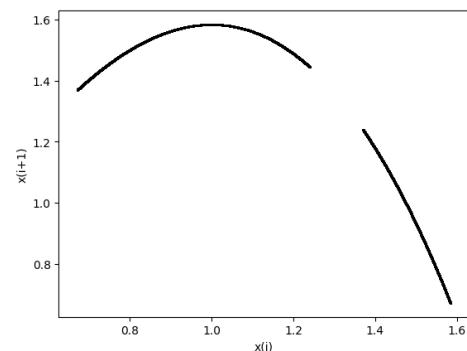
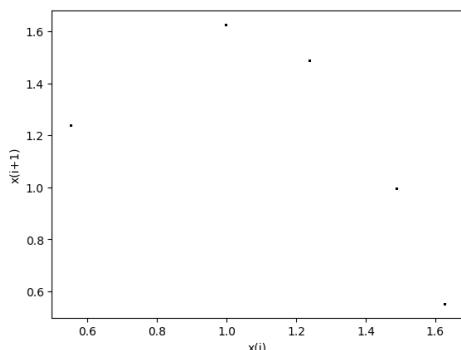
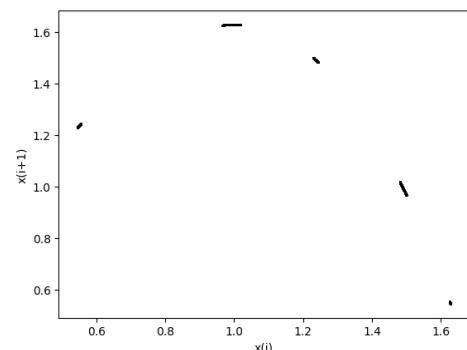
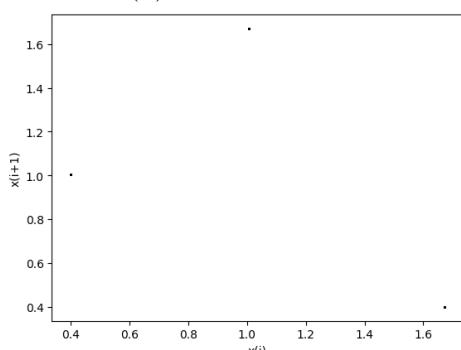
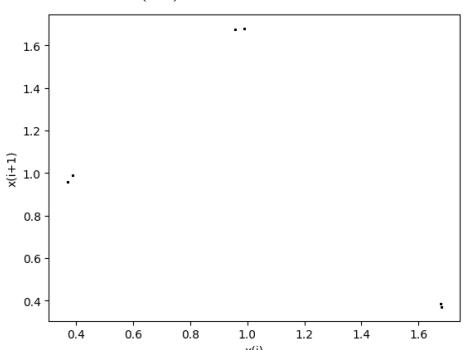
Σχήμα 2.30: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).



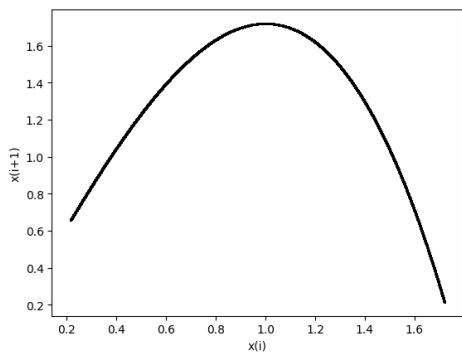
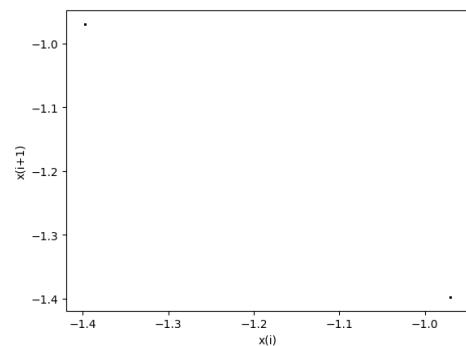
Σχήμα 2.31: Διάγραμμα διαιλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0



$\Sigma\chi_2.32$: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(α') $\Gamma \alpha k = 0.738$ (β') $\Gamma \alpha k = 0.739$ (γ') $\Gamma \alpha k = 0.744$ (δ') $\Gamma \alpha k = 0.746$ (ε') $\Gamma \alpha k = 0.7565$ (η') $\Gamma \alpha k = 0.757$ (ζ') $\Gamma \alpha k = 0.768$ (η') $\Gamma \alpha k = 0.77$

Σ χήμα 2.33: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

(α') Για $k = 0.78$.(β') Για $k = 0.8$.

Σχήμα 2.34: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (γ' μέρος).

2.8 Για $q = -1.6$

Στα Σχ. 2.35, 2.36 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.6$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.35α' ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης 2.35β' ($x_0 = 0.5$), 2.35γ' ($x_0 = 1$), 2.36α' ($x_0 = 1.5$), 2.36β' ($x_0 = 2$), 2.36γ' ($x_0 = -0.1$) παρατηρείται ότι για $q = -1.6$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα Lyapunov 2.37α', 2.37β', 2.37γ', 2.38α', 2.38β', 2.38γ', όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης 2.39, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

Στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.35α' εμφανίζονται κάποιες διακοπές της γραφικής παράστασης στην περιοχή του χάους. Αυτό οφείλεται στο ότι η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αποκλίνει σε πολύ μεγάλες τιμές.

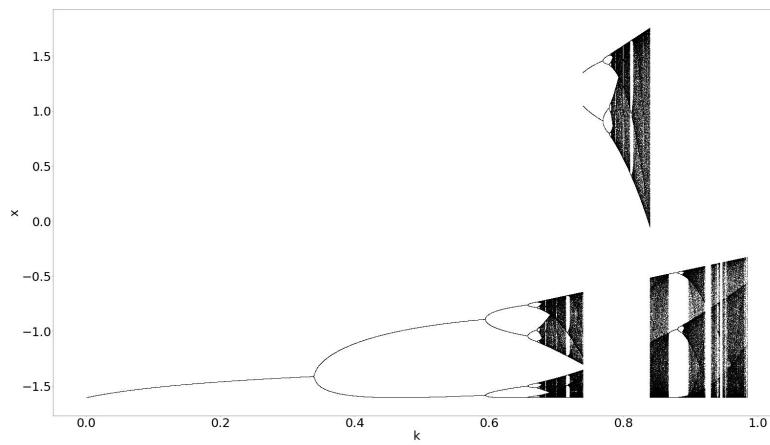
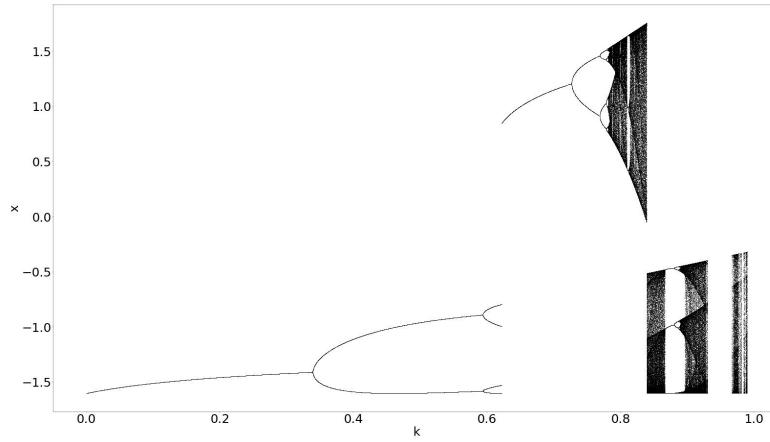
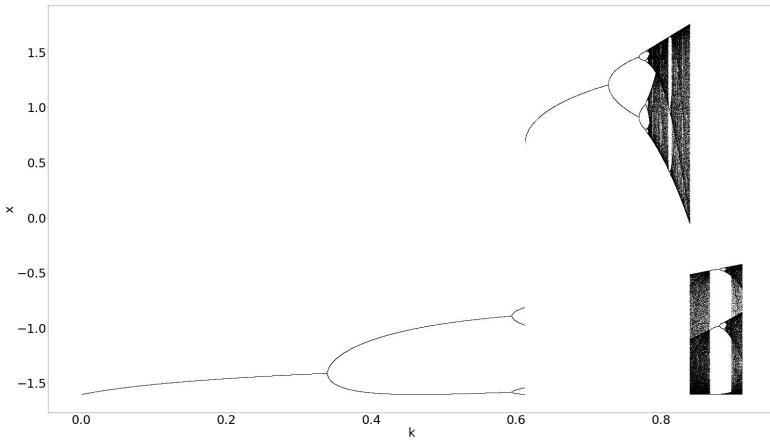
Στον πίνακα 2.8 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.35α'.

Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (0.683, 0.7, 0.715, 0.74, 0.788, 0.799, 0.81, 0.94), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.35α' στα κενά μεταξύ χάους και περιοδικής συμπεριφοράς, όπως και στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-2. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

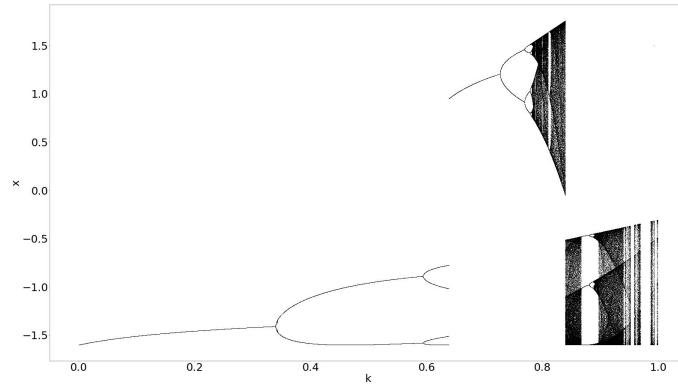
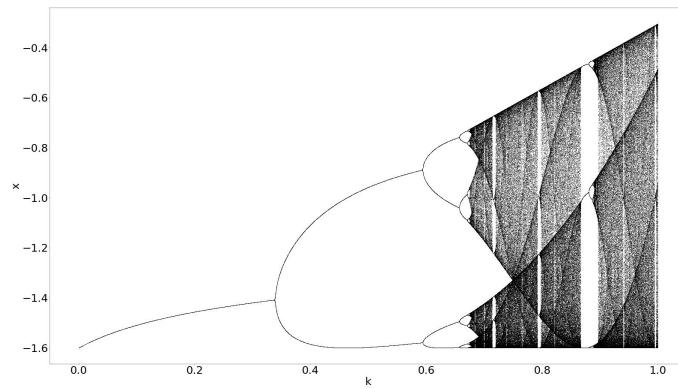
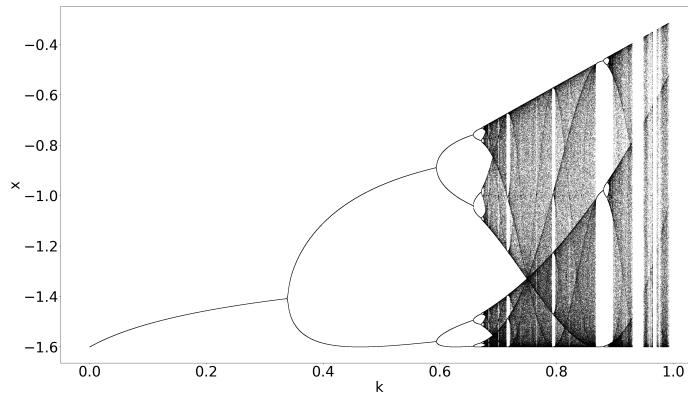
Τέλος, στο σχήμα 2.36β' παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.982]. Οι τιμές του πίνακα 2.8 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.35α' όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.8: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.6$, για $x_i = 0.1$

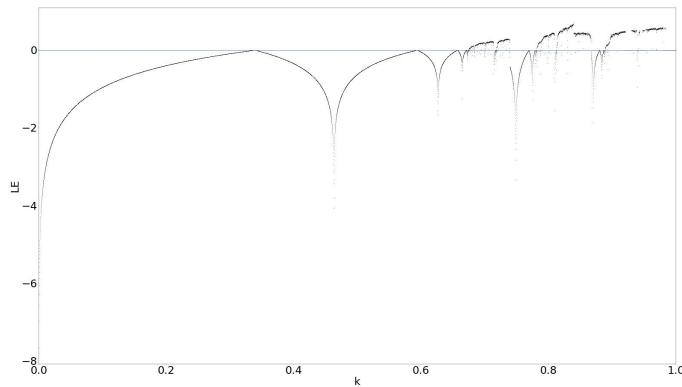
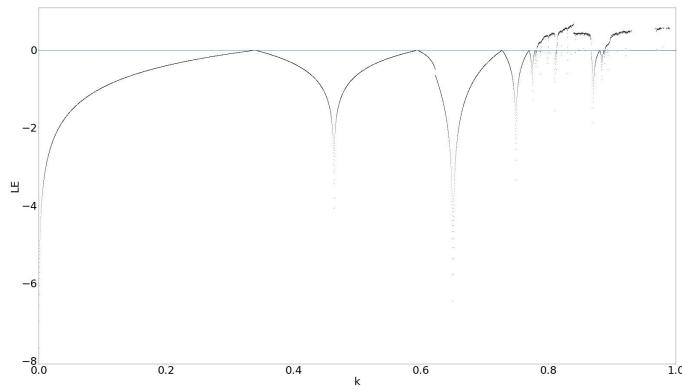
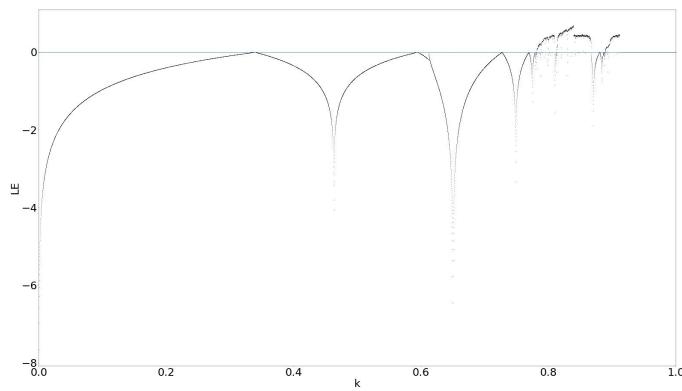
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.31	Περίοδος - 1
0.34	Περίοδος - 2
0.595	Περίοδος - 4
0.66	Περίοδος - 8
0.671	Περίοδος - 12
0.675	Χαός
0.683	Περίοδος - 12
0.685	Χάος
0.7	Περίοδος - 18
0.71	Χάος
0.715	Περίοδος - 6
0.716	Περίοδος - 12
0.717	Χάος
0.74	Περίοδος - 2
0.77	Περίοδος - 4
0.779	Περίοδος - 8
0.782	Χάος
0.788	Περίοδος - 20
0.789	Χάος
0.799	Περίοδος - 5
0.8	Χάος
0.81	Περίοδος - 3
0.812	Περίοδος - 6
0.813	Χάος
0.8393	Κενό
0.867	Περίοδος - 3
0.88	Περίοδος - 6
0.886	Περίοδος - 10
0.889	Χάος
0.92	Κενό
0.94	Περίοδος - 5
0.942	Χάος
0.943	Κενό
0.948	Χάος

 $(\alpha') \Gamma \alpha x_0 = 0.1$  $(\beta') \Gamma \alpha x_0 = 0.5$  $(\gamma') \Gamma \alpha x_0 = 1$

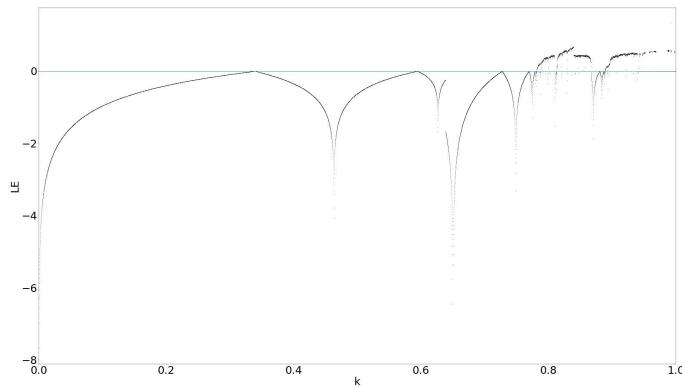
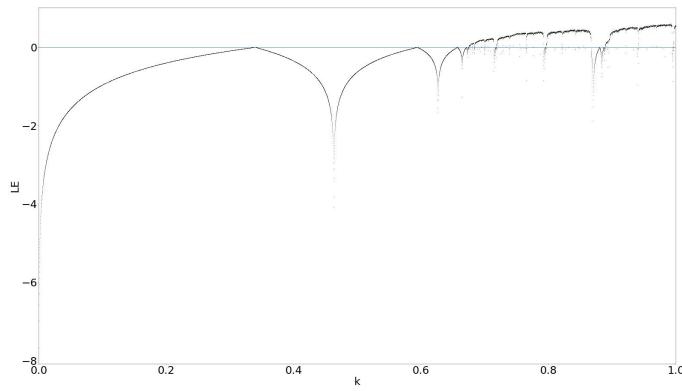
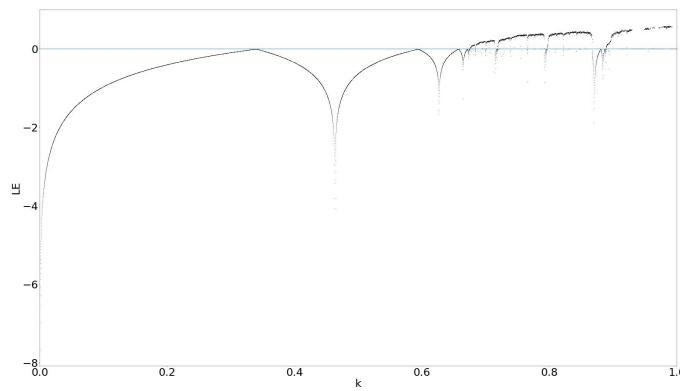
Σχήμα 2.35: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.6$ (α' μέρος).

(α') $\Gamma\alpha x_0 = 1.5$ (β') $\Gamma\alpha x_0 = 2$ (γ') $\Gamma\alpha x_0 = -0.1$

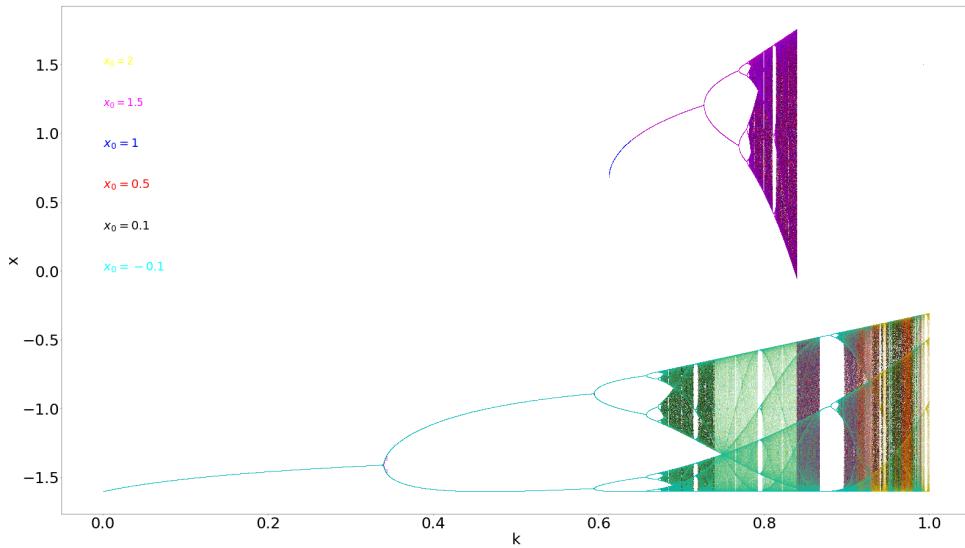
$\Sigma\chi\mu\alpha 2.36$: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.6$ (β' μέρος).

(α') Για $x_0 = 0.1$ (β') Για $x_0 = 0.5$ (γ') Για $x_0 = 1$

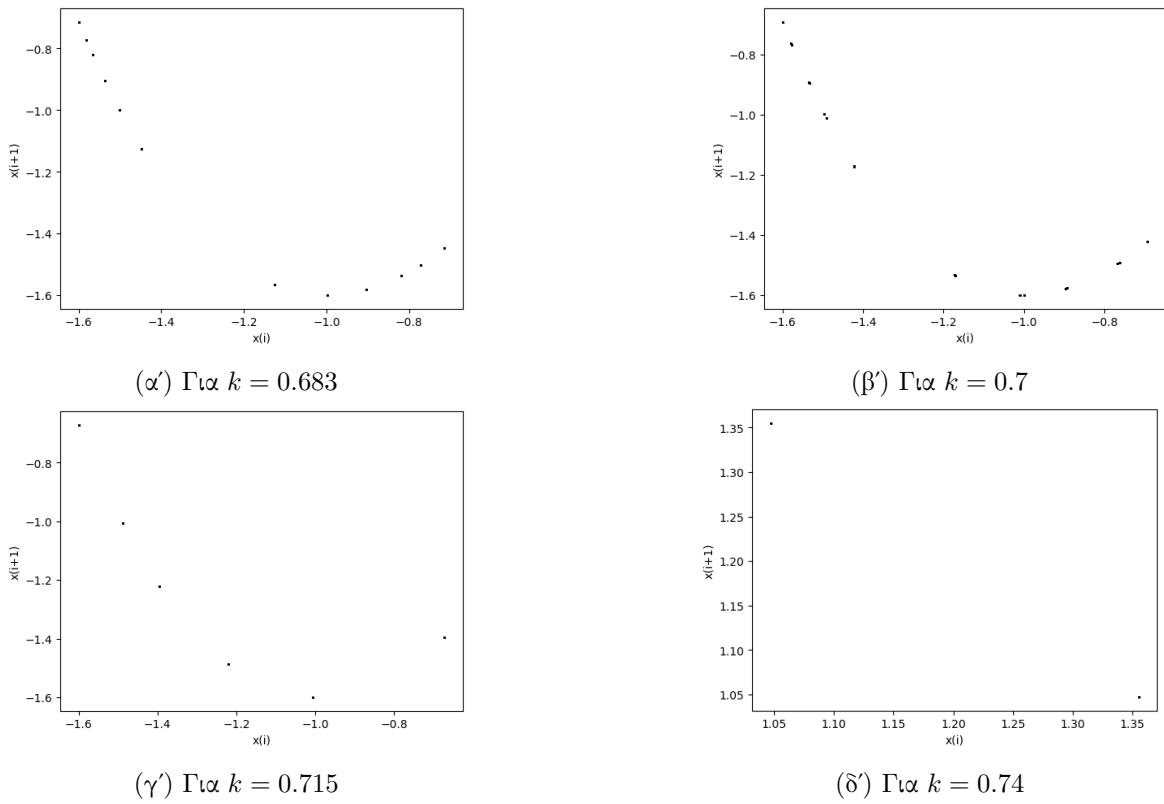
Σχήμα 2.37: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).

(α') $\Gamma\alpha x_0 = 1.5$ (β') $x_0 = 2$ (γ') $x_0 = -0.1$

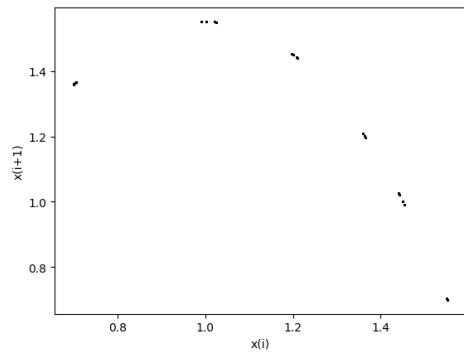
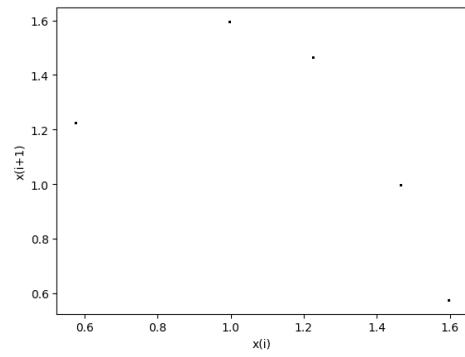
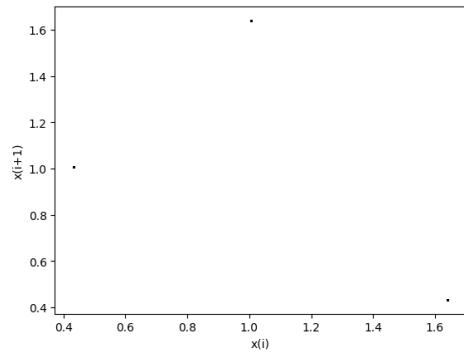
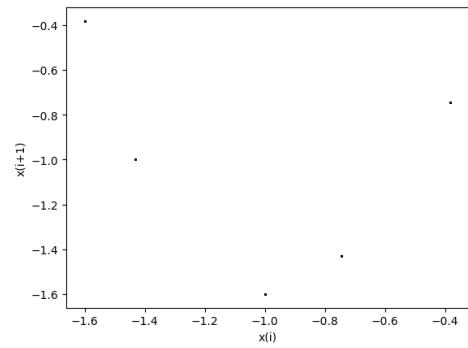
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).



Σχήμα 2.39: Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0 .



Σχήμα 2.40: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

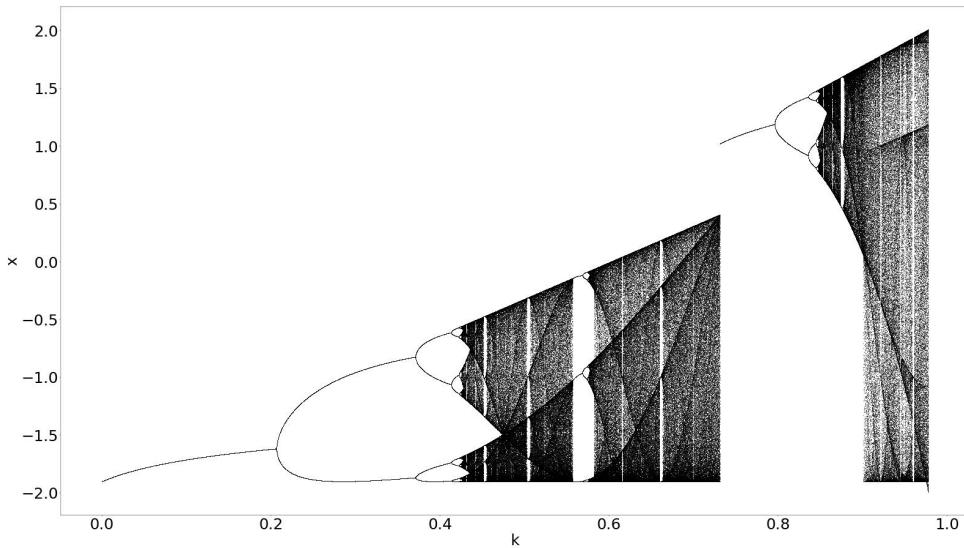
(α') $\Gamma \alpha k = 0.788$ (β') $\Gamma \alpha k = 0.799$ (γ') $\Gamma \alpha k = 0.8$ (δ') $\Gamma \alpha k = 0.94$

Σ χήμα 2.41: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

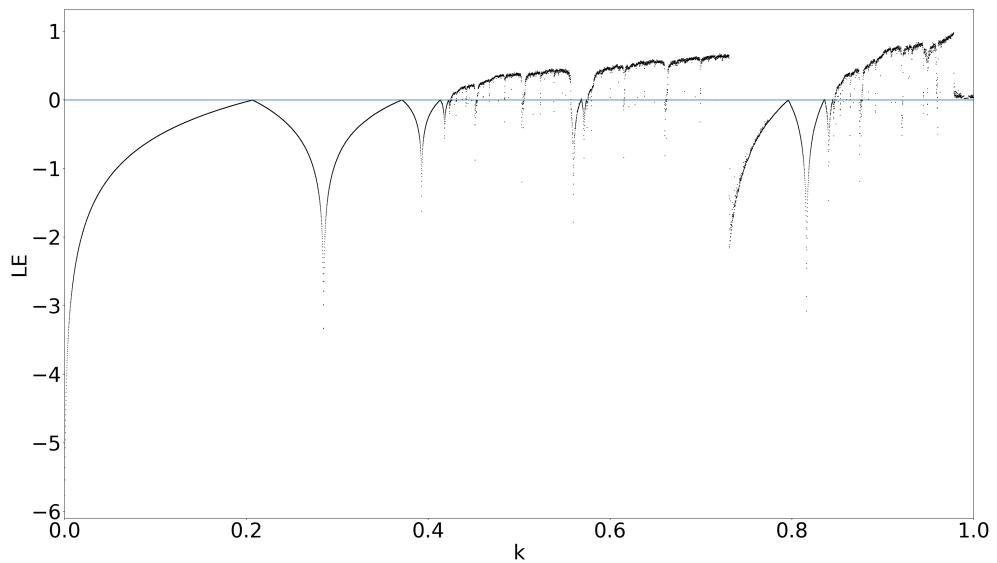
2.9 Για $q = -1.9$

Στο Σχ. 2.42 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.9$. Στον πίνακα 2.9 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.42. Επίσης παρατηρείται εσωτερική χρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($(0.431, 0.452, 0.484, 0.503, 0.56, 0.615, 0.66, 0.74, 0.875, 0.921, 0.949, 0.9597)$), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.42, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.9, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Τέλος, στο σχήμα 2.43 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.978]$. Οι τιμές του πίνακα 2.9 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.42 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



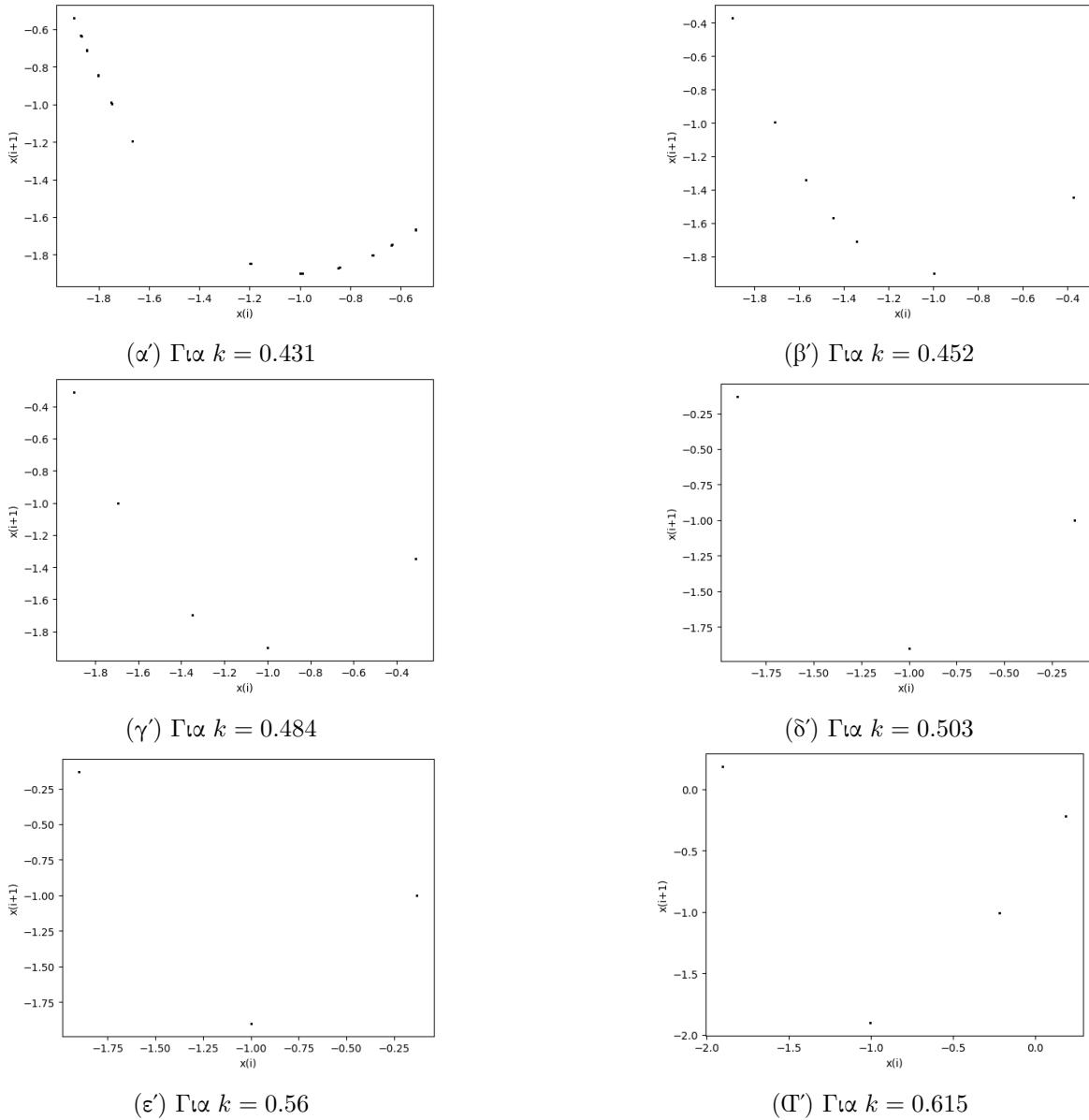
Σχήμα 2.42: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.9$.



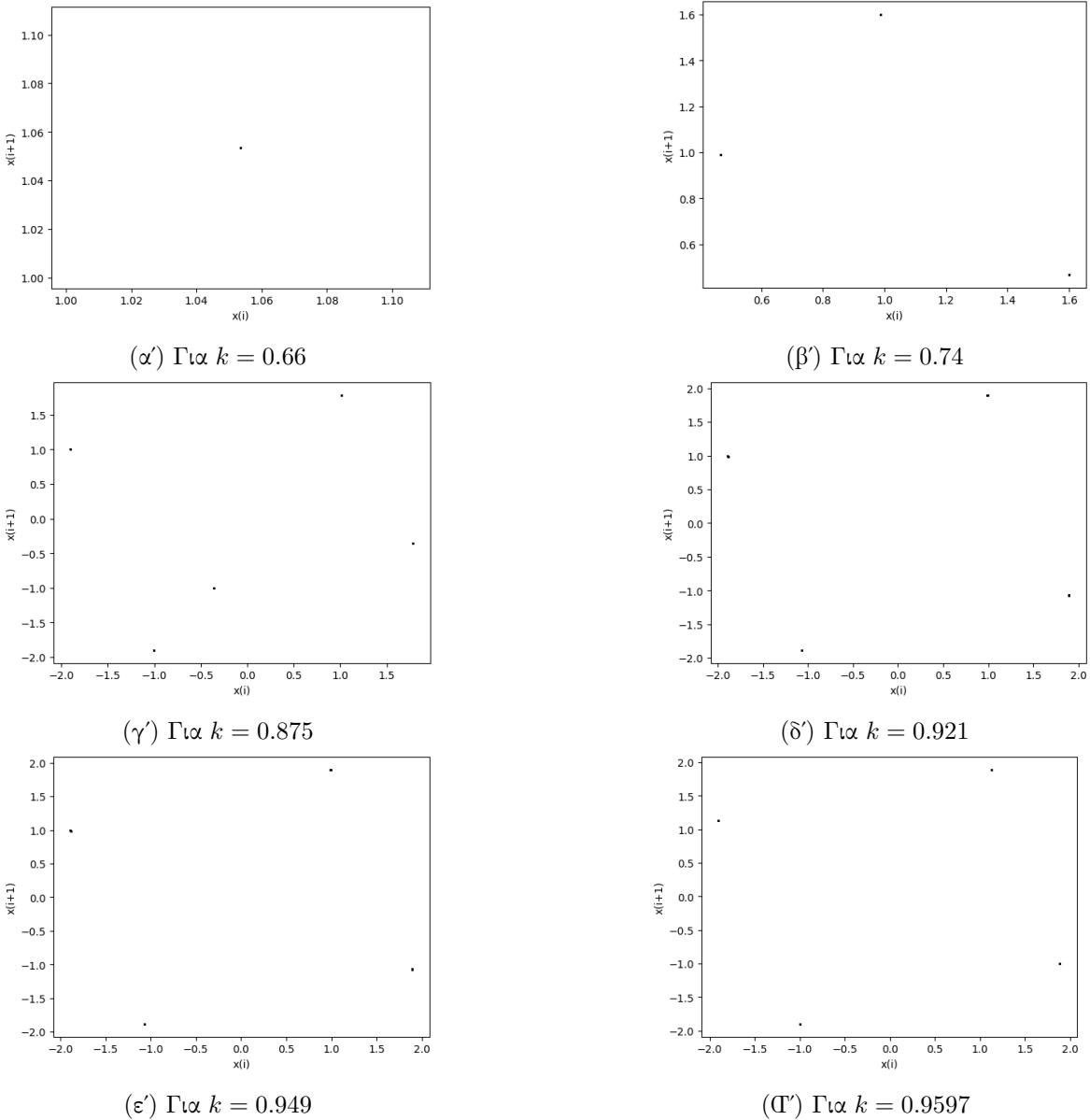
Σχήμα 2.43: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.9$.

Πίνακας 2.9: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.9$, για $x_i = 0.1$

Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.21	Περίοδος - 2
0.37	Περίοδος - 4
0.41	Περίοδος - 8
0.422	Περίοδος - 16
0.426	Χαός
0.431	Περίοδος - 17
0.432	Χάος
0.452	Περίοδος - 5
0.454	Περίοδος - 11
0.455	Χάος
0.484	Περίοδος - 7
0.485	Χάος
0.503	Περίοδος - 5
0.504	Περίοδος - 9
0.506	Χάος
0.56	Περίοδος - 3
0.57	Περίοδος - 6
0.574	Περίοδος - 11
0.577	Χάος
0.615	Περίοδος - 5
0.616	Χάος
0.66	Περίοδος - 4
0.661	Περίοδος - 7
0.663	Χάος
0.74	Περίοδος - 1
0.796	Περίοδος - 2
0.83	Περίοδος - 4
0.844	Περίοδος - 8
0.846	Περίοδος - 14
0.848	Χάος
0.875	Περίοδος - 3
0.8752	Περίοδος - 5
0.878	Χάος
0.921	Περίοδος - 5
0.922	Χαός
0.949	Περίοδος - 6
0.951	Χάος
0.9597	Περίοδος - 4
0.961	Χαός



Σ χήμα 2.44: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



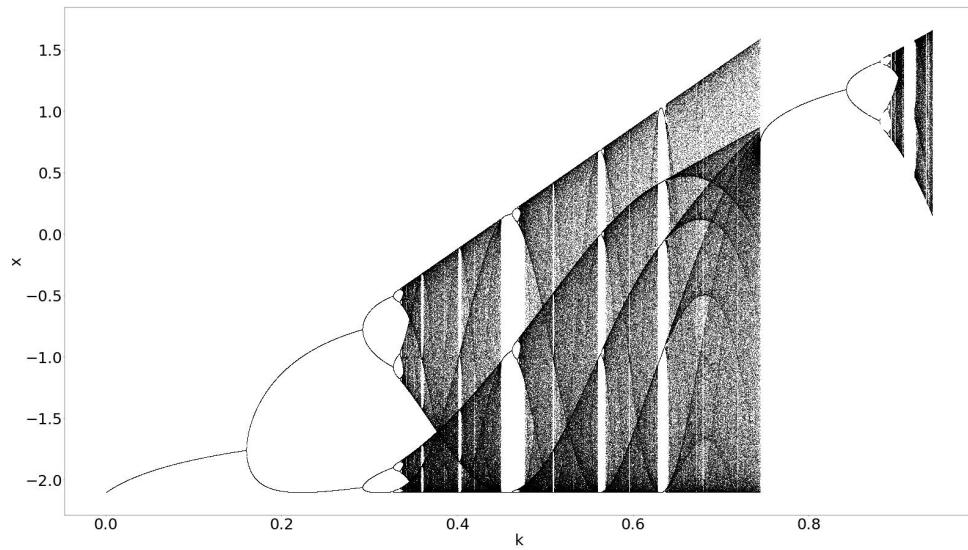
Σχήμα 2.45: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.10 Για $q = -2.1$

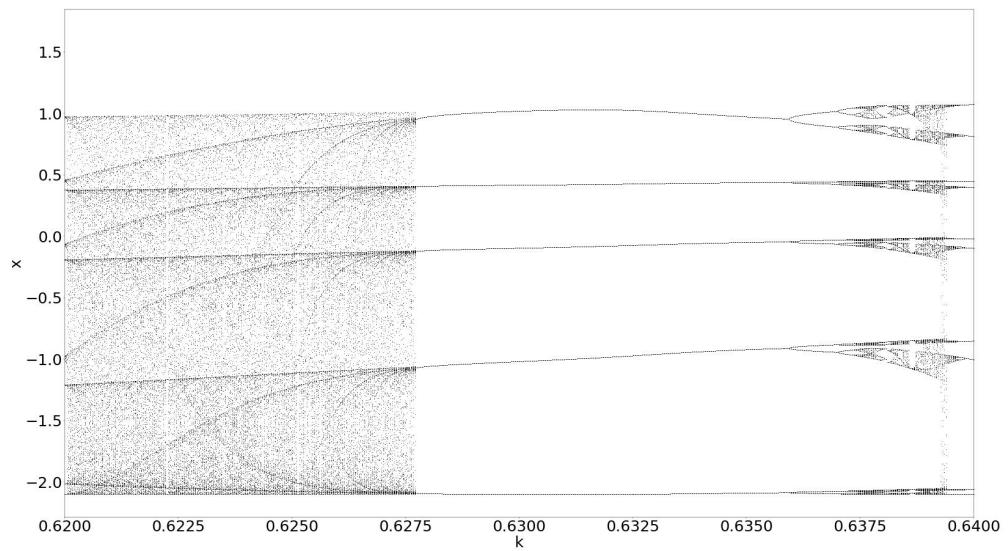
Στο Σχ. 2.46 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.9$. Στον πίνακα 2.10 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.48. Επίσης παρατηρείται εσωτερική χρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($0.358, 0.4, 0.45, 0.507, 0.558, 0.627, 0.638, 0.6384, 0.745, 0.921, 0.949, 0.9597$), όπως και το φανόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.48, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.10.

Επίσης στο Σχ. 2.48 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης για $0.626 < k < 0.641$. Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στο φανόμενο της αντιμονοτονικότητας που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q . Επίσης παρατηρούμε στο εστιασμένο διάγραμμα τη δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Αυτό επιβεβαιώνεται από τον πίνακα 2.10 όπου από το $k = 0.636$ (περίοδος - 10) μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.6371$ (περίοδος - 20), $k = 0.6374$ (περίοδος - 40), εμφανίζεται χαοτική φυσαλίδα για $k = 0.6377$ (χάος). Μέτα το σύστημα εξέρχεται από το χάος για $k = 0.638$ (περίοδος - 40) με αντίστροφο διπλασιασμό. Ενώ για $k = 0.6383$ (χάος) διακόπτεται ο αντίστροφος διπλασιασμός και το σύστημα εισέρχεται στο χάος. Για $k = 0.6384$ (περίοδος - 30) εξέρχεται από το χάος για να ξανά εμφανίσει τελικά χάος για $k = 0.639$. Για αυτές τις τιμές του k παράχθηκαν τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Τέλος, στο Σχ. 2.47 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.94]$. Οι τιμές του πίνακα 2.10 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.47 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



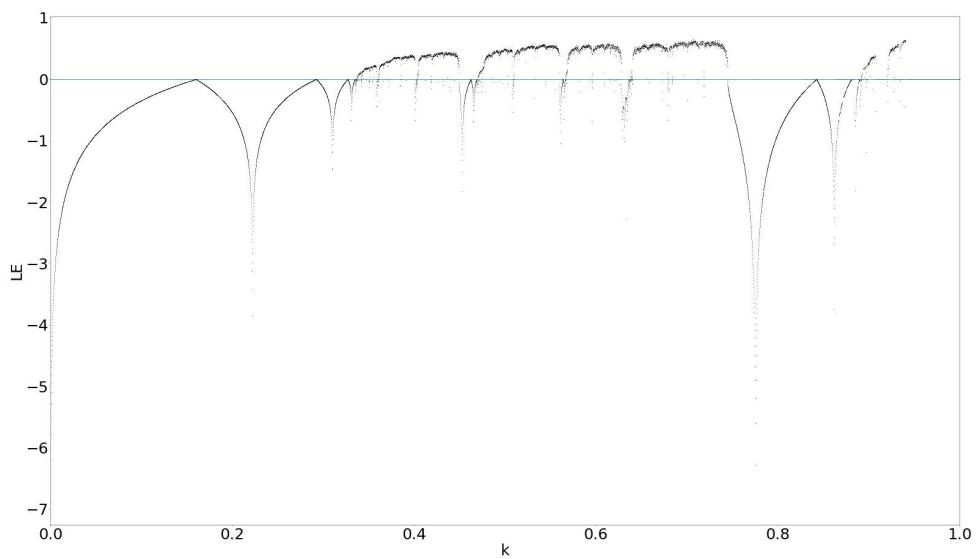
Σχήμα 2.46: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$.



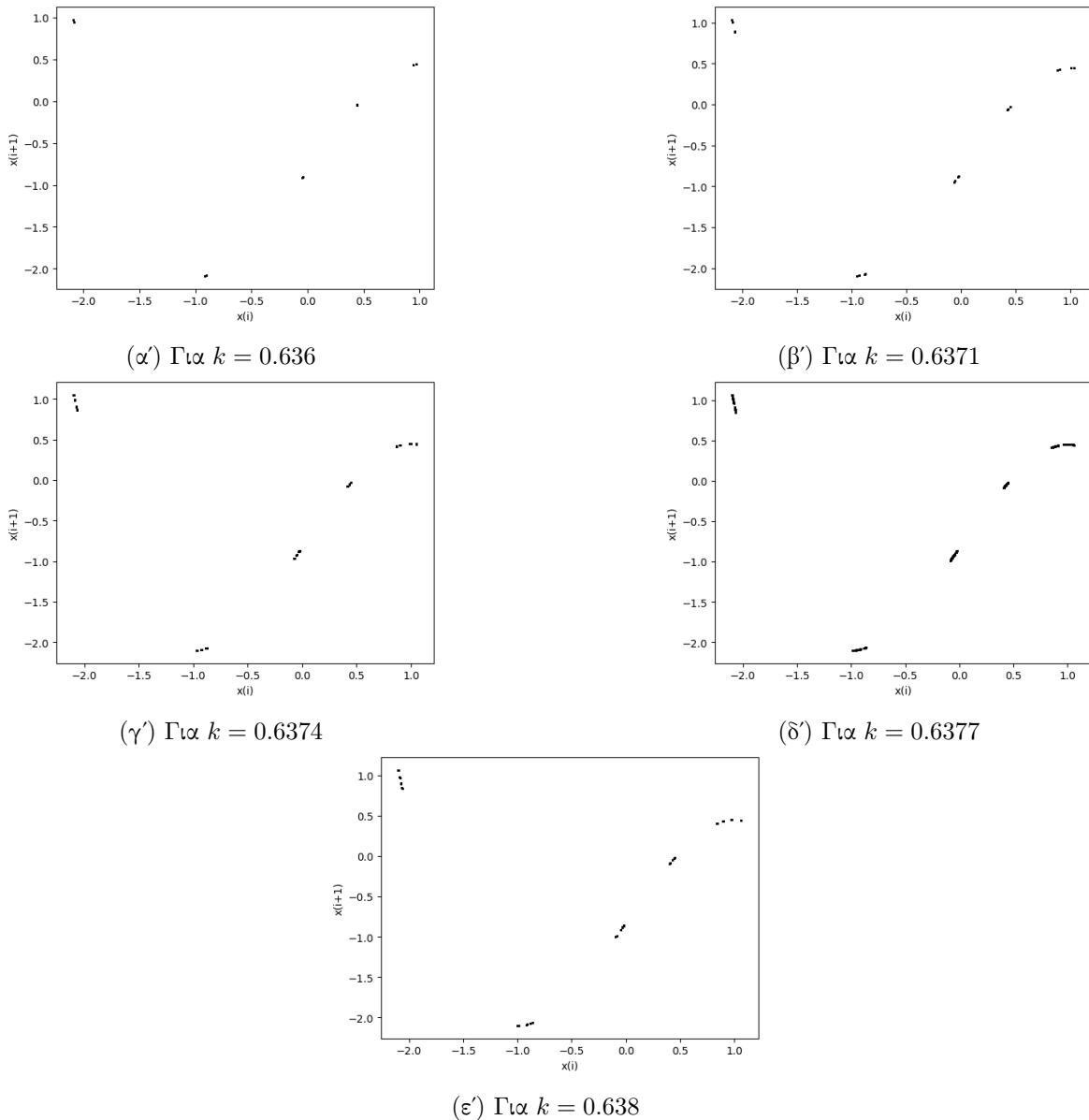
Σχήμα 2.47: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$.

Πίνακας 2.10: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -2.1$

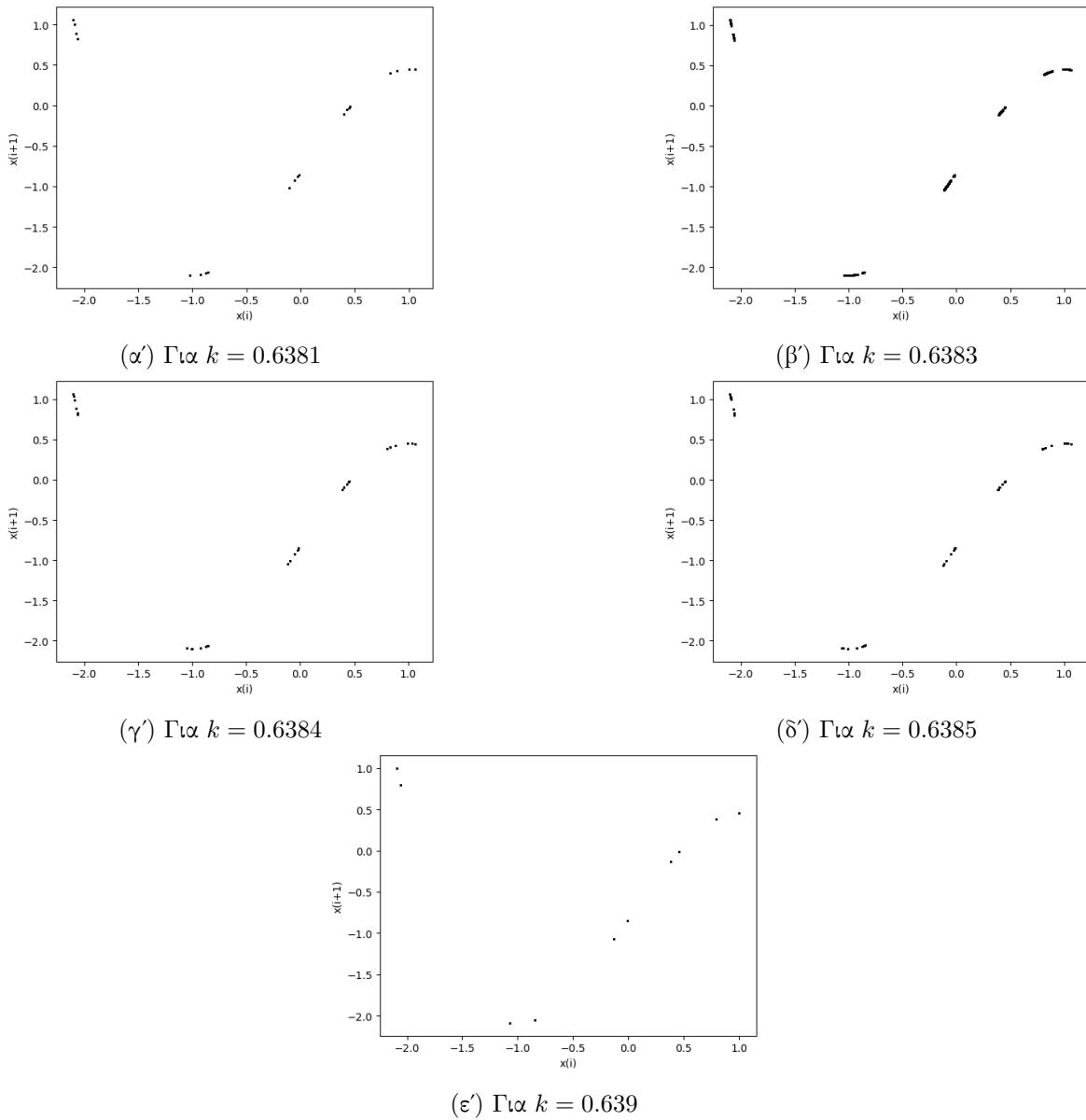
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.16	Περίοδος - 2
0.29	Περίοδος - 4
0.32	Περίοδος - 8
0.334	Περίοδος - 16
0.337	Χαός
0.358	Περίοδος - 6
0.36	Χάος
0.4	Περίοδος - 5
0.402	Περίοδος - 10
0.403	Χάος
0.45	Περίοδος - 3
0.46	Περίοδος - 6
0.468	Περίοδος - 12
0.47	Χάος
0.507	Περίοδος - 5
0.508	Περίοδος - 10
0.51	Χάος
0.558	Περίοδος - 4
0.56	Περίοδος - 8
0.568	Χάος
0.627	Περίοδος - 5
0.636	Περίοδος - 10
0.6371	Περίοδος - 20
0.6374	Περίοδος - 40
0.6377	Χάος
0.638	Περίοδος - 40
0.6381	Περίοδος - 20
0.6383	Χάος
0.6384	Περίοδος - 30
0.6835	Περίοδος - 40
0.6836	Περίοδος - 10
0.64	Χάος
0.745	Περίοδος - 1
0.8426	Περίοδος - 2
0.88	Περίοδος - 4
0.889	Περίοδος - 8
0.89	Χάος



Σχήμα 2.48: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -2.1$.



Σχήμα 2.49: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σ χήμα 2.50: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

Κεφάλαιο 3

Παραλλαγή του sine-sinh Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διακριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού *sine-sinh-sine* Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μποροεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} .

Ο *sine-sinh* Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i = k * \sin \pi * \sinh \pi * \sin \pi * x_{i-1} \quad (3.1)$$

Στην εξίσωση (3.1) προστέθηκε ένας σταθερός όρος q . Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη,

$$x_i = k * \sin k * \sinh q * \sin 2 * x_{i-1} \quad (3.2)$$

όπου $k, q : \text{παράμετροι}$.

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του $x_0 = 0.1$ παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβαλλόταν στο διάστημα $[-0.3, -0.5]$ με βήμα 0.2. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

3.1 Για $q = -0.3$

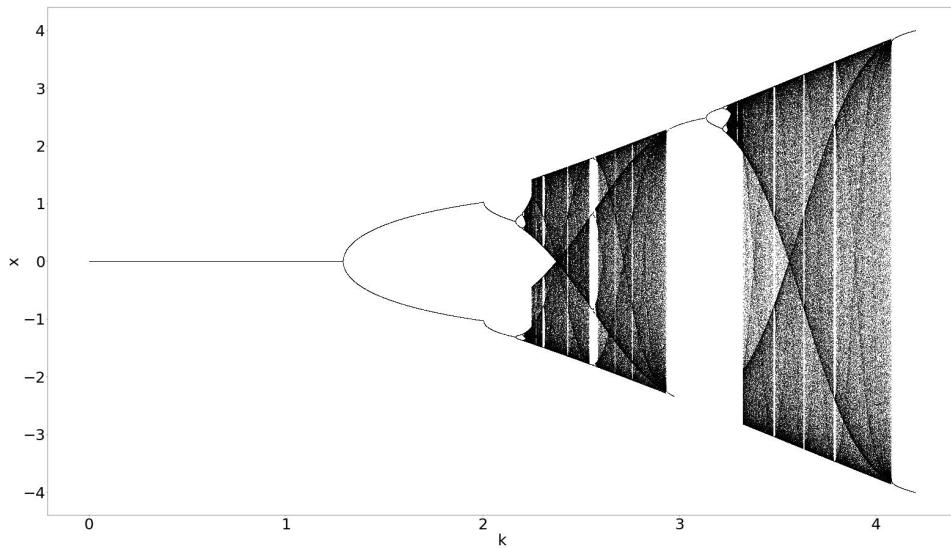
Στο Σχ. 3.1 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 3.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.3$. Στον πίνακα 3.1 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 3.1. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (2.27, 2.31, 2.43, 2.671, 2.76, 2.935, 3.293, 3.48, 3.629, 3.79), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 3.1, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1 και περίοδο - 2. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά

τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 3.1, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα 3.3, 3.4 των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

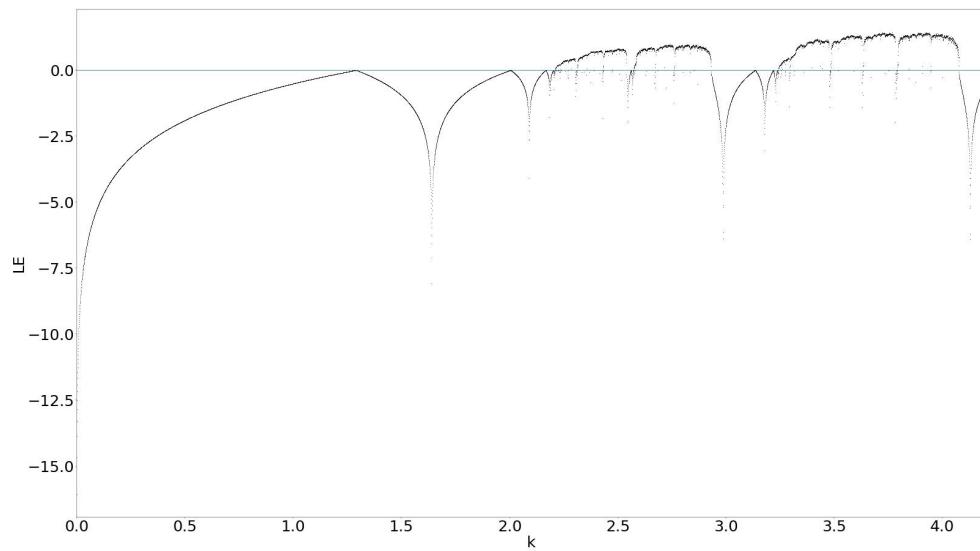
Τέλος, στο σχήμα 3.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 4.2]$. Οι τιμές του πίνακα 3.1 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 3.1 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 3.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$

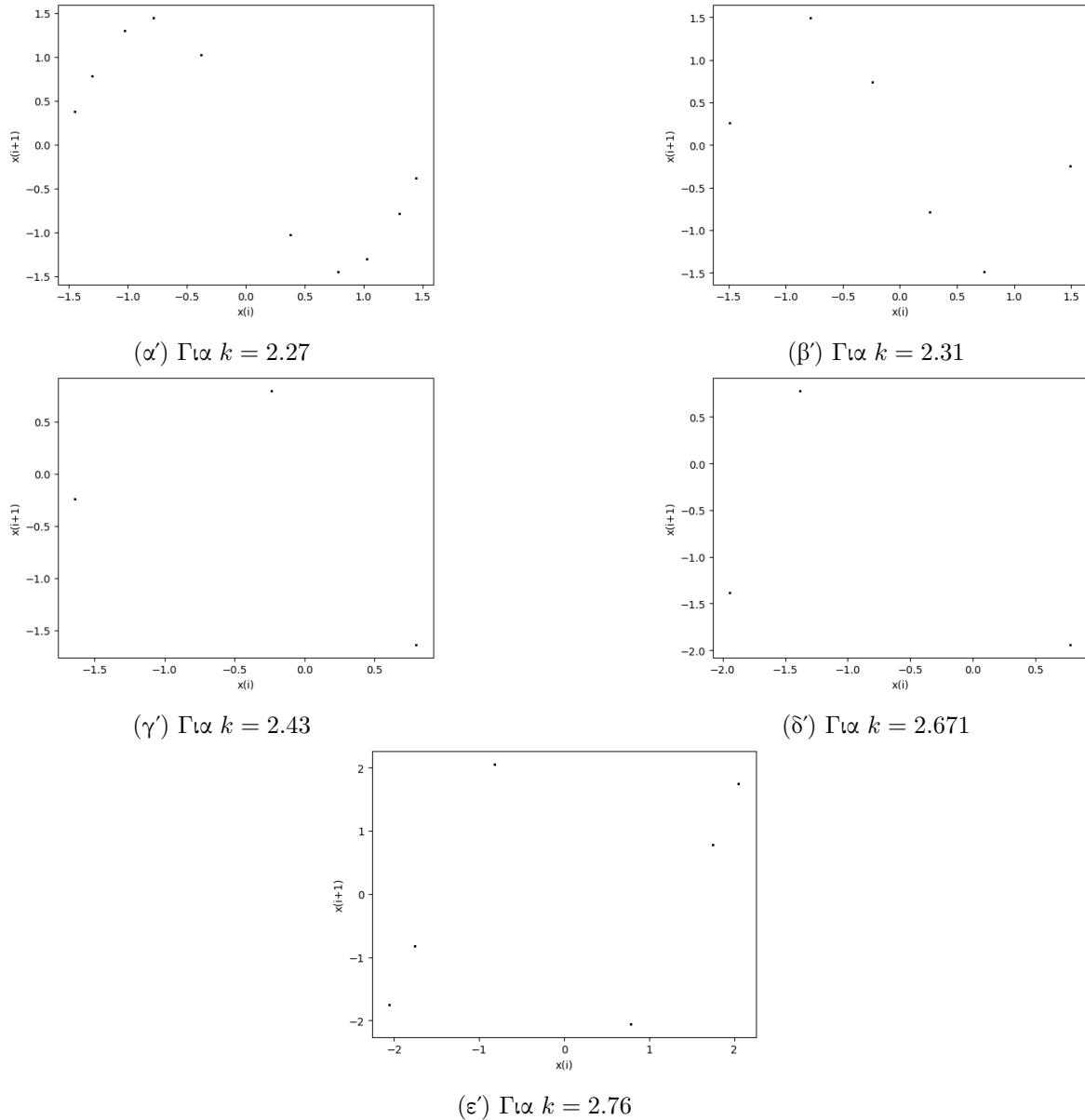
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.25	Περίοδος - 1
1.287	Περίοδος - 2
2.17	Περίοδος - 4
2.2	Περίοδος - 8
2.21	Χάος
2.27	Περίοδος - 10
2.272	Χάος
2.31	Περίοδος - 6
2.32	Χάος
2.43	Περίοδος - 3
2.435	Χάος
2.671	Περίοδος - 3
2.672	Περίοδος - 6
2.675	Χάος
2.76	Περίοδος - 6
2.77	Χάος
2.935	Περίοδος - 1
3.14	Περίοδος - 2
3.22	Περίοδος - 4
3.238	Περίοδος - 8
3.24	Χάος
3.293	Περίοδος - 3
3.294	Περίοδος - 6
3.295	Χάος
3.48	Περίοδος - 4
3.49	Χάος
3.629	Περίοδος - 2
3.632	Περίοδος - 4
3.643	Χάος
3.79	Περίοδος - 4
3.8	Χάος
4.09	Περίοδος - 2



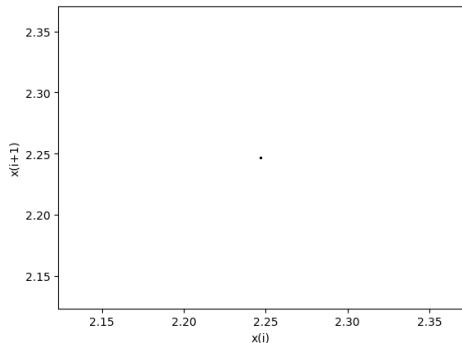
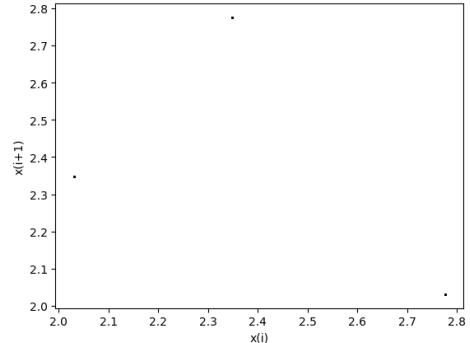
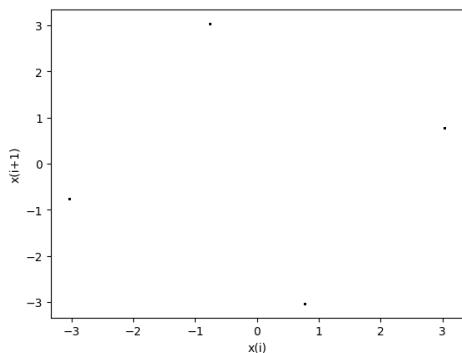
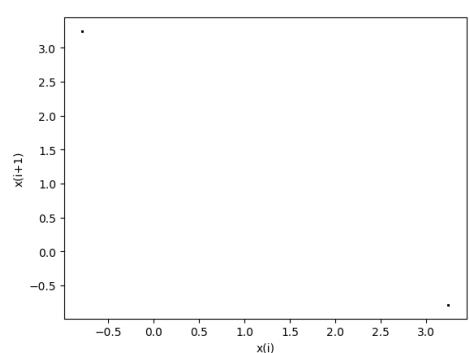
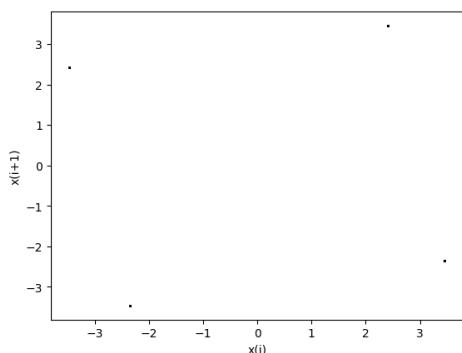
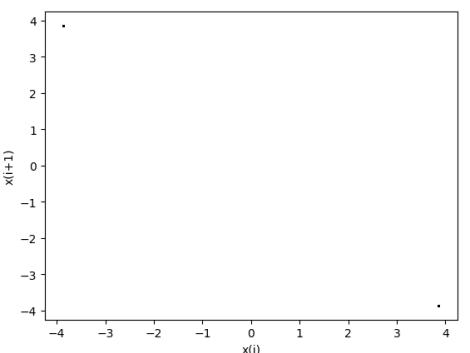
Σχήμα 3.1: Διάγραμμα διωκλάδωσης, για $q = -0.3$.



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$.



Σχήμα 3.3: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(α') $\Gamma \alpha k = 2.935$ (β') $\Gamma \alpha k = 3.293$ (γ') $\Gamma \alpha k = 3.48$ (δ') $\Gamma \alpha k = 3.629$ (ε') $\Gamma \alpha k = 3.79$ (Γ') $\Gamma \alpha k = 4.09$

Σχήμα 3.4: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

3.2 Για $q = -0.5$

Στο Σχ. 3.5 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 3.2, ως προς την παράμετρο k , για $b = 2$, $q = -0.5$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 3.5α' ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης 3.5β' ($x_0 = 0.5$), 3.5γ' ($x_0 = 1$), παρατηρείται ότι για $q = -0.5$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα αντίστοιχα διαγράμματα Lyapunov 3.6α', 3.6β', 3.6γ', όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης 3.8α', όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

Στον πίνακα 3.2 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 3.5α'. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα 3.10 προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

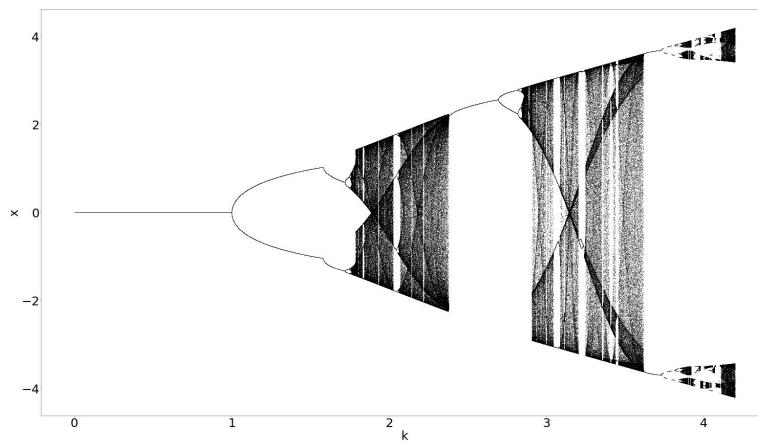
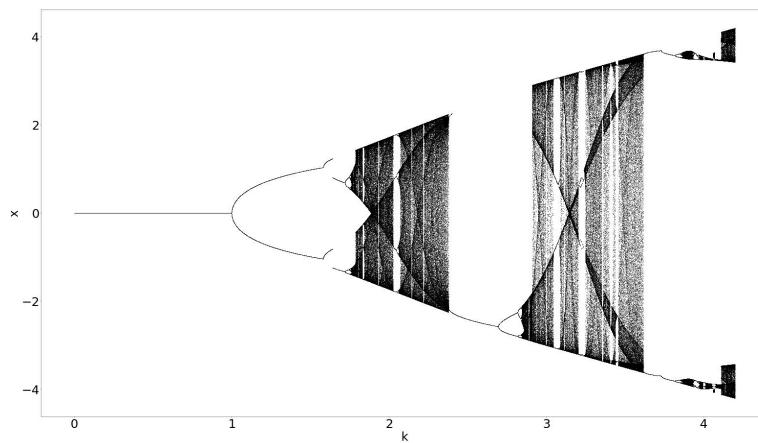
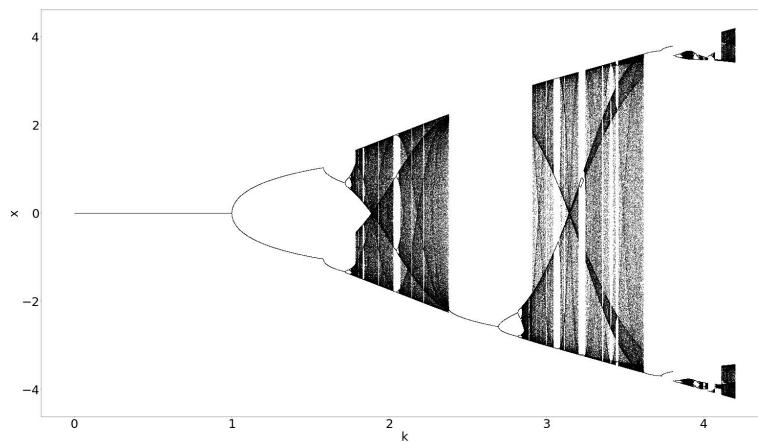
Επίσης παρατηρείται η εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (1.773, 1.8, 1.831, 1.93, 2.03, 2.141, 2.2, 2.38, 2.88, 2.99, 3.04, 3.2, 3.35, 3.4, 3.44, 3.62, 3.93), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 3.5α' στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-1, και εμφανίζεται στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 2 . Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 3.2.

Επιπλέον παρατηρούμε στα διαγράμματα 3.7α', 3.7β', 3.7γ' το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Συγκεκριμένα στο διάγραμμα 3.7α' εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου.) για $k = 3.84$ της οποίας η εξέλιξη φαίνεται στα υπόλοιπα δύο διαγράμματα 3.7β', 3.7γ' όπου για διαφορετικά x_0 διαχρίνεται καλύτερα. Ακόμη στο διάγραμμα 3.5γ' το φαινόμενο εμφανίζεται άλλη μία φορά για $3.95 < k < 4.05$. Μεταξύ αυτών των χαοτικών φυσαλίδων παρατηρούμε και τις δύο περιπτώσεις του φαινομένου δηλαδή τον ορθό και τον ανάστροφο διπλασιασμό. Στα σχήματα 3.8α', 3.8β', 3.8γ' παρατηρείται ότι για $k = 3.206$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 4) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 3.23$, οπότε εδώ παρατηρούμε το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας δηλαδή έχουμε μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για $k = 3.23$.

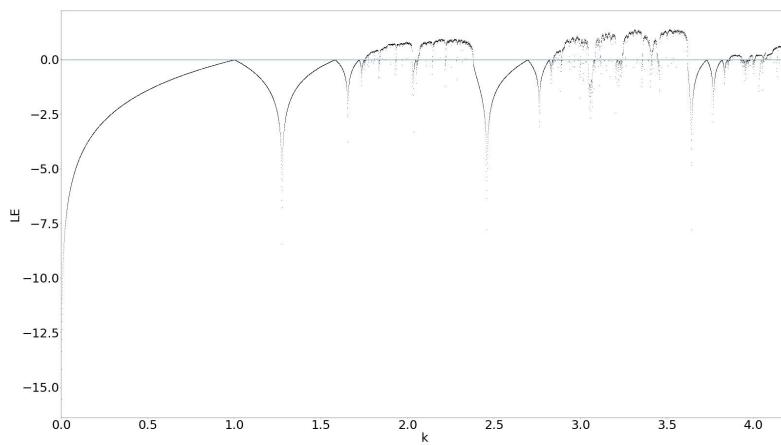
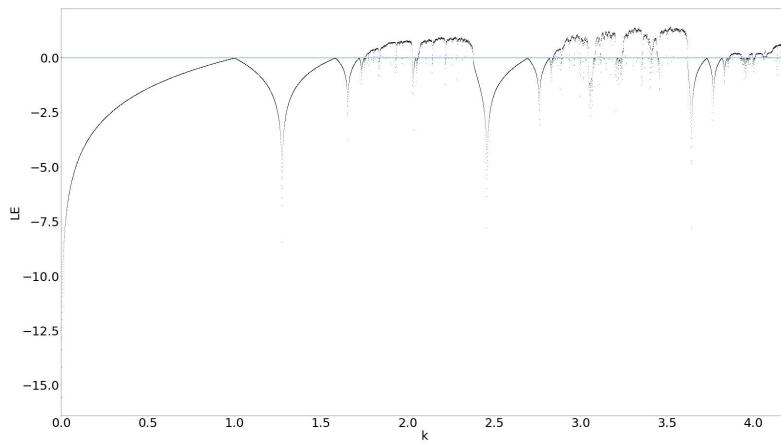
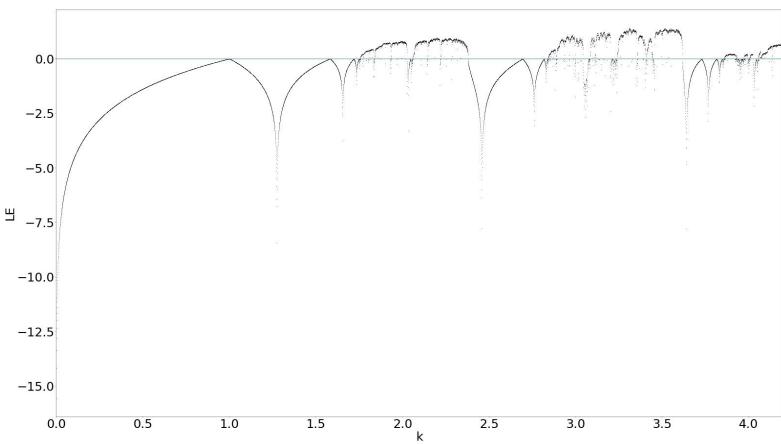
Τέλος, στο σχήμα 2.29α' παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 4.2]$. Οι τιμές του πίνακα 3.2 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 3.6α' όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 3.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$

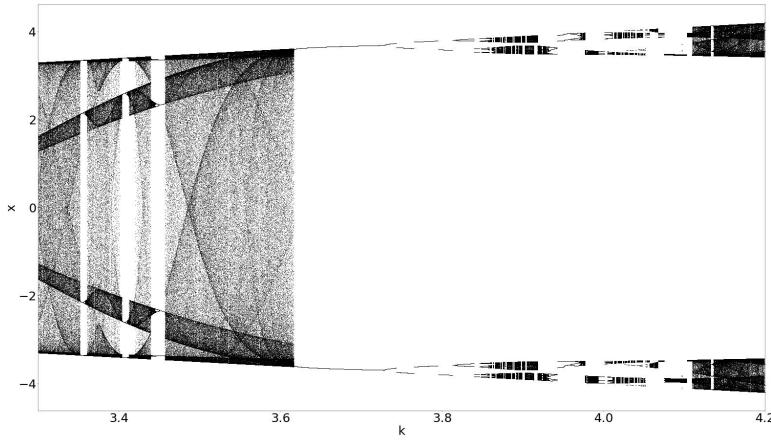
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.25	Περίοδος - 1
1	Περίοδος - 2
1.7	Περίοδος - 4
1.748	Περίοδος - 8
1.75	Χάος
1.773	Περίοδος - 6
1.774	Περίοδος - 12
1.775	Χάος
1.8	Περίοδος - 10
1.806	Χάος
1.831	Περίοδος - 6
1.84	Χάος
1.93	Περίοδος - 6
1.935	Χάος
2.03	Περίοδος - 4
2.06	Χάος
2.141	Περίοδος - 6
2.144	Χάος
2.2	Περίοδος - 6
2.25	Χάος
2.38	Περίοδος - 1
2.69	Περίοδος - 2
2.81	Περίοδος - 4
2.83	Περίοδος - 8
2.84	Χάος
2.88	Περίοδος - 3
2.89	Χάος
2.99	Περίοδος - 6
3	Περίοδος - 12
3.01	Χάος
3.04	Περίοδος - 4
3.08	Χάος
3.2	Περίοδος - 2
3.206	Περίοδος - 4
3.23	Περίοδος - 2
3.24	Χάος
3.35	Περίοδος - 4
3.36	Χάος
3.4	Περίοδος - 4
3.41	Χάος
3.44	Περίοδος - 4
3.45	Χάος
3.62	Περίοδος - 2
3.8	Περίοδος - 4
3.84	Χάος
3.94	Περίοδος - 8
3.95	Περίοδος - 4
3.96	Περίοδος - 8
3.97	Περίοδος - 16
3.98	Χάος
Βασίλειος Ασημακόπουλος	Περίοδος - 6
4	Περίοδος - 6
4.05	Περίοδος - 4
4.07	Χάος


 $(\alpha') x_0 = 0.1$

 $(\beta') x_0 = 0.5$

 $(\gamma') x_0 = 1$

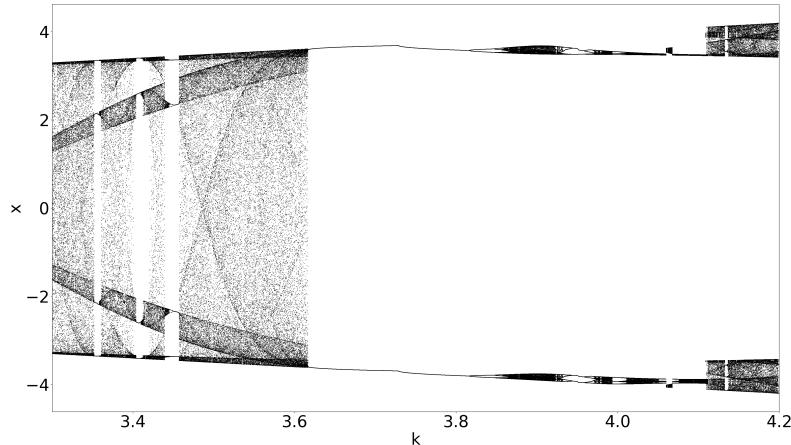
Σχήμα 3.5: Διαγράμματα διωχλάδωσης, για $b = 2$, $q = -0.5$

(α') $\Gamma\alpha x_0 = 0.1$ (β') $\Gamma\alpha x_0 = 0.5$ (γ') $\Gamma\alpha x_0 = 1$

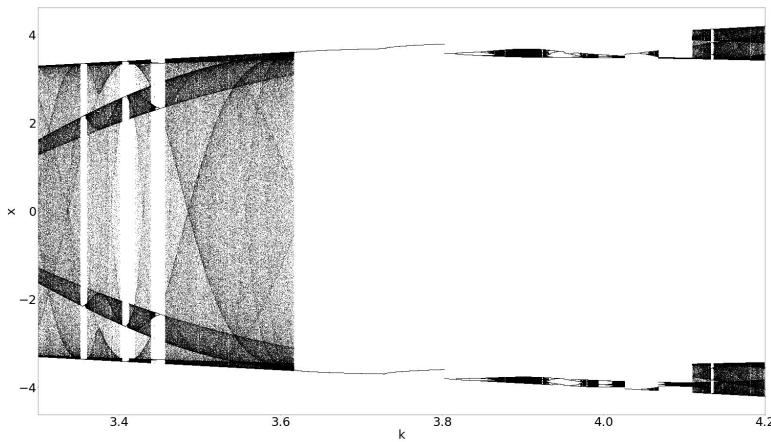
Σχήμα 3.6: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $b = 2$, $q = -0.5$.



(α') $x_0 = 0.1$

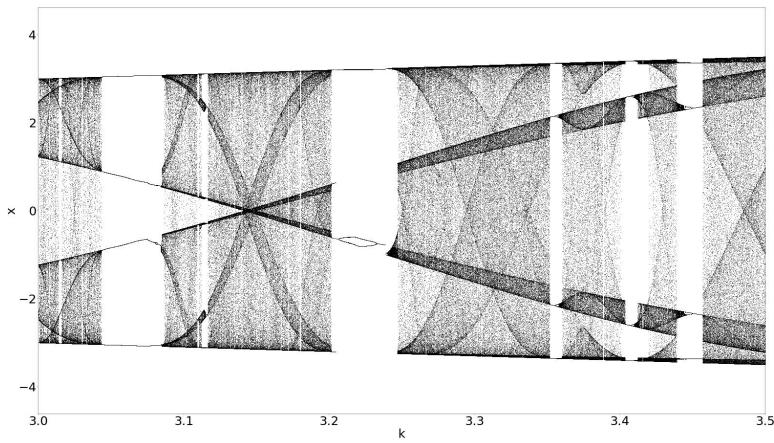
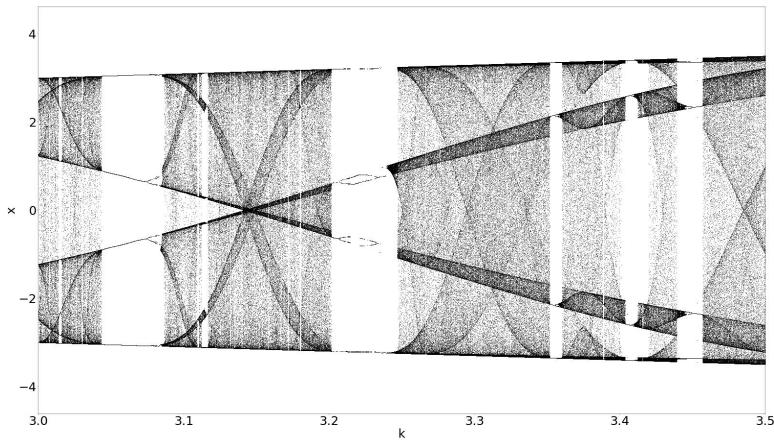
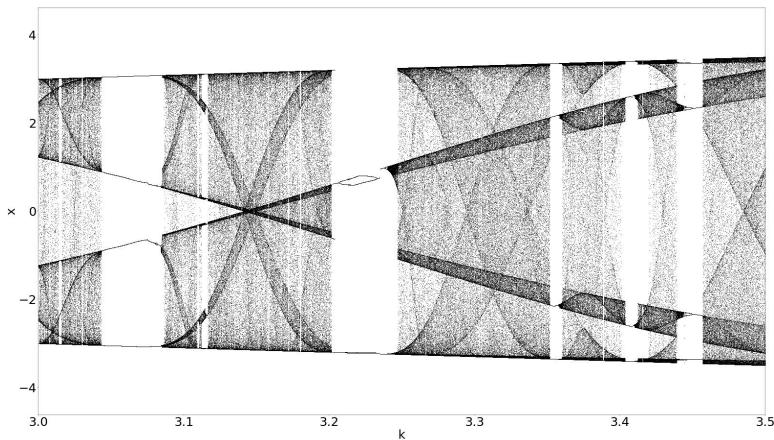


(β') $x_0 = 0.5$

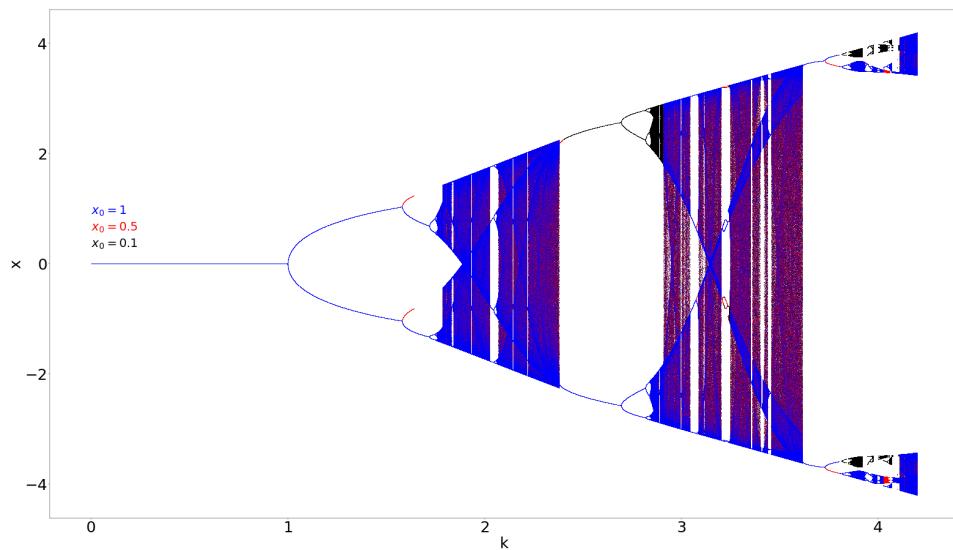


(γ') $x_0 = 1$

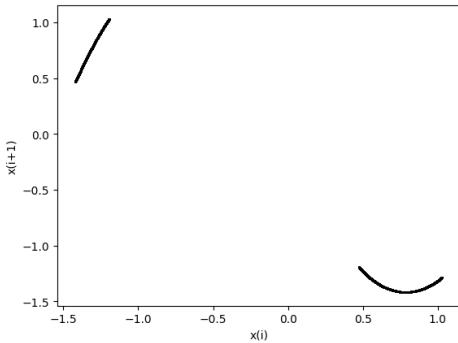
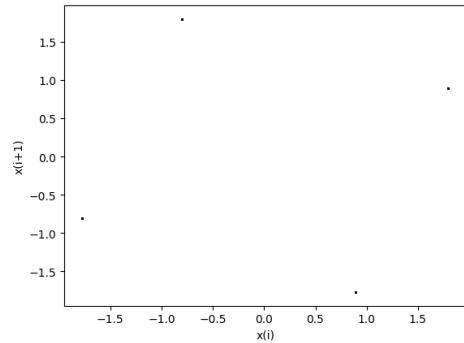
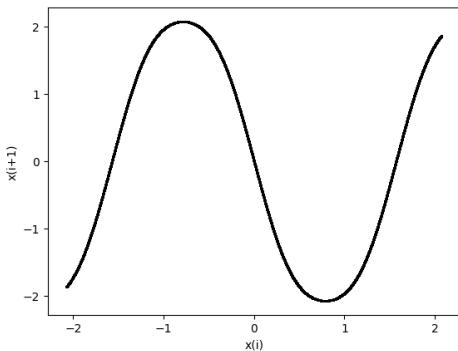
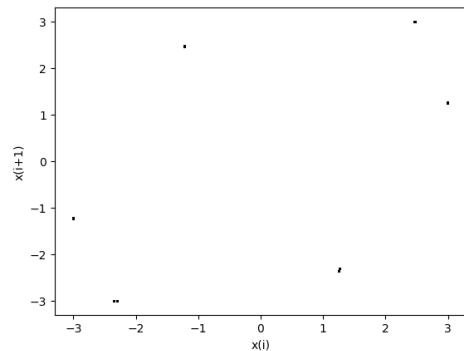
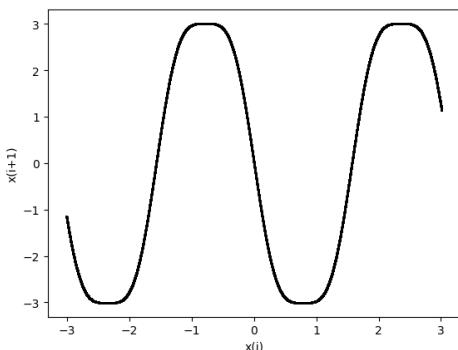
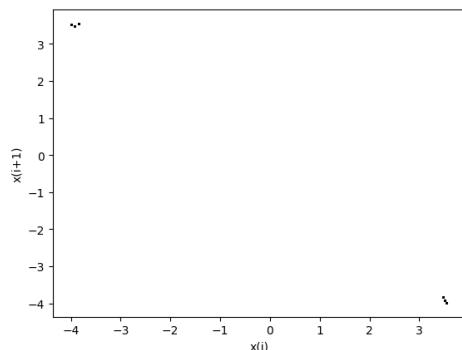
Σχήμα 3.7: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0 .


 $(\alpha') x_0 = 0.1$

 $(\beta') x_0 = 0.5$

 $(\gamma') x_0 = 1$

Σχήμα 3.8: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0 .



Σχήμα 3.9: Διάγραμμα διαχλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0

(α') $\Gamma\alpha k = 1.775$ (β') $\Gamma\alpha k = 2.03$ (γ') $\Gamma\alpha k = 2.25$ (δ') $\Gamma\alpha k = 3$ (ε') $\Gamma\alpha k = 3.01$ (Γ') $\Gamma\alpha k = 4$

Σχήμα 3.10: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

Κεφάλαιο 4

Παραλλαγή του Chebysev Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διαχριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού Chebysev Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μποροεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} .

Ο Chebysev Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i = \cos k * \arccos x_{i-1} \quad (4.1)$$

Στην εξίσωση (4.1) προστέθηκε ένας σταθερός όρος q . Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη,

$$x_i = \cos k^q \arccos q * x_{i-1} \quad (4.2)$$

όπου $k, q : \text{παράμετροι}$.

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του $x_0 = 0.1$ παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβαλλόταν στο διάστημα $[0.8, -0.9]$ με βήμα 0.1. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράγθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

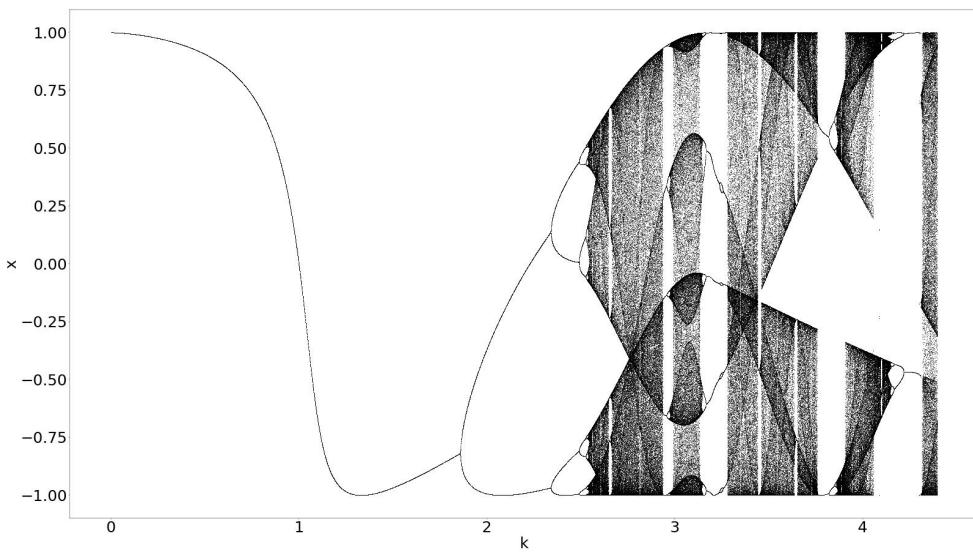
4.1 Για $q = 0.8$

Στο Σχ. 4.1 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 4.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = 0.8$. Στον πίνακα 4.1 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 3.1. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (2.65, 2.938, 3.147, 3.45, 3.642, 3.776, 3.886, 4.1, 4.155), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 3.1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 4.1, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα 4.4, 4.5

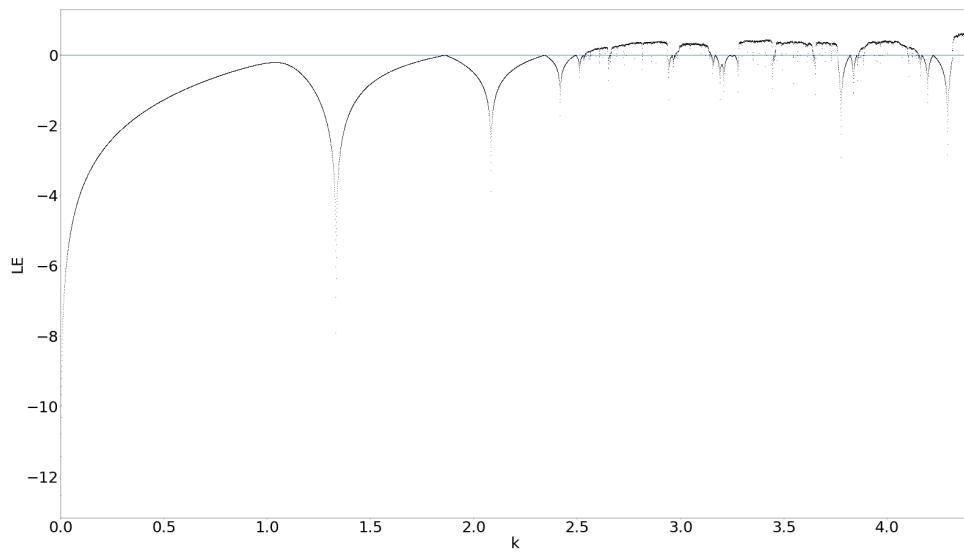
των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επιπλέον παρατηρούμε στο Σχ. 4.3, το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Στα τρία διαγράμματα 4.3β', 4.3γ' 4.3 εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου.). Συγκεκριμένα στο διάγραμμα 4.3 παρατηρούμε ότι ενδιάμεσα του βασικού ορθού διπλασιασμού εμφανίζεται ένας ακόμα υπό την μορφή εσωτερικής κρίσης για $k = 3.886$ και $k = 4.1$. Ακόμη στο διάγραμμα 4.3γ' το φαινόμενο εμφανίζεται άλλη μία φορά για $3.17 < k < 3.258$, όπου παρατηρείται ότι για $k = 3.17$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 10) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 3.258$.

Τέλος, στο σχήμα 4.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 4.4]$. Οι τιμές του πίνακα 4.1 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 4.1 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



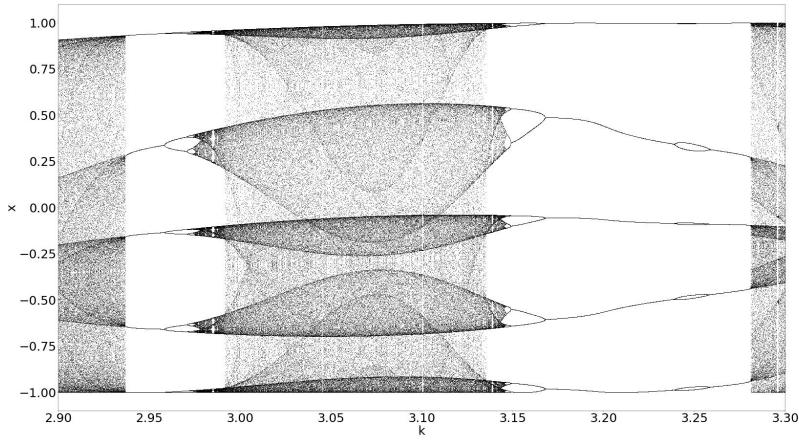
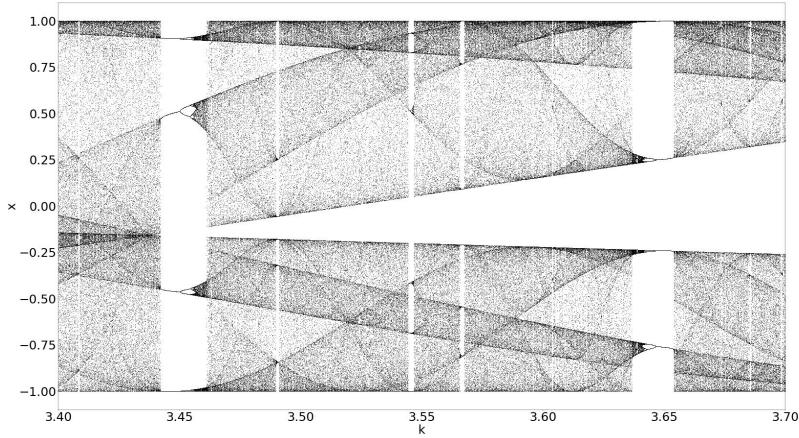
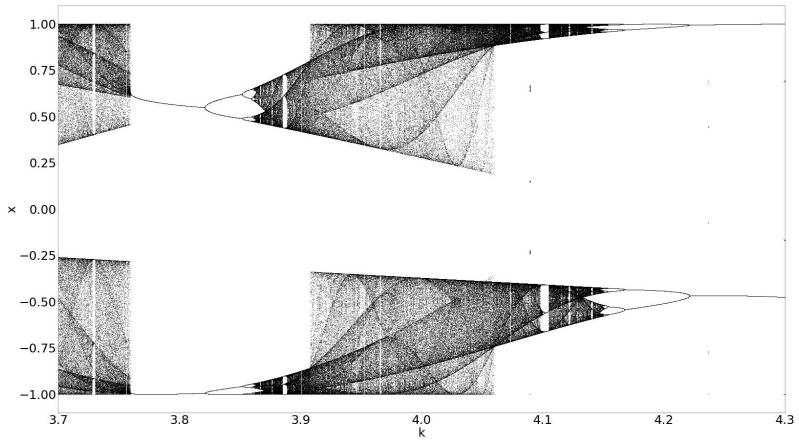
Σχήμα 4.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.8$.



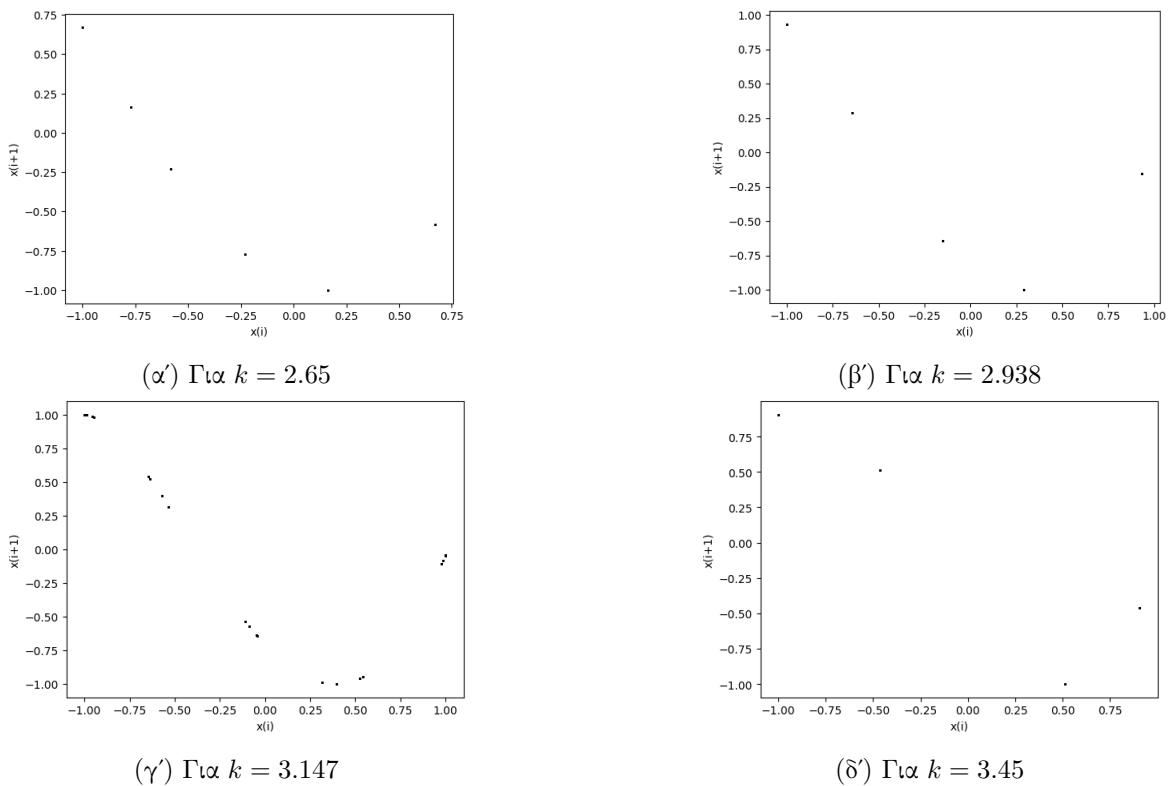
Σχήμα 4.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.8$.

Πίνακας 4.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.8$

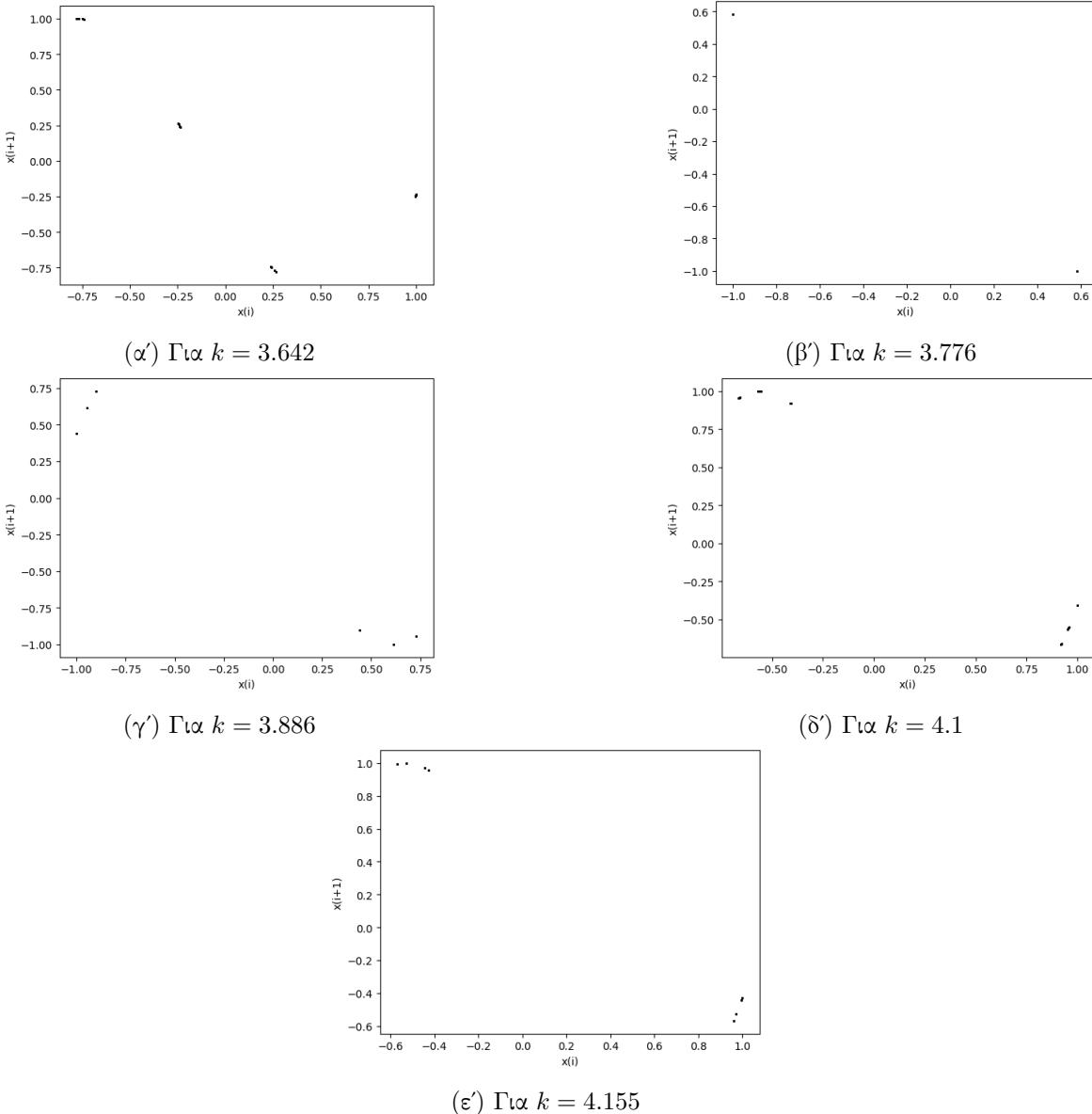
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
1.3	Περίοδος - 1
1.86	Περίοδος - 2
2.34	Περίοδος - 4
2.49	Περίοδος - 8
2.52	Περίοδος - 16
2.53	Χάος
2.65	Περίοδος - 6
2.655	Περίοδος - 12
2.66	Χάος
2.938	Περίοδος - 5
2.95	Περίοδος - 10
2.971	Περίοδος - 20
2.975	Χάος
3.147	Περίοδος - 20
3.15	Περίοδος - 10
3.17	Περίοδος - 5
3.24	Περίοδος - 10
3.258	Περίοδος - 5
3.28	Χάος
3.45	Περίοδος - 4
3.453	Περίοδος - 8
3.455	Περίοδος - 16
3.46	Χάος
3.642	Περίοδος - 16
3.643	Περίοδος - 8
3.647	Περίοδος - 4
3.65	Χάος
3.776	Περίοδος - 2
3.82	Περίοδος - 4
3.85	Περίοδος - 8
3.86	Χάος
3.886	Περίοδος - 6
3.887	Περίοδος - 12
3.888	Χάος
4.1	Περίοδος - 24
4.101	Περίοδος - 12
4.102	Περίοδος - 6
4.108	Χάος
4.155	Περίοδος - 8
4.17	Περίοδος - 4
4.22	Περίοδος - 2
4.32	Χάος

(α') $\Gamma\alpha \quad 2.9 < k < 3.3$ (β') $\Gamma\alpha \quad 3.4 < k < 3.7$ (γ') $\Gamma\alpha \quad 3.6 < k < 4.7$

Σχήμα 4.3: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του k .



Σχήμα 4.4: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



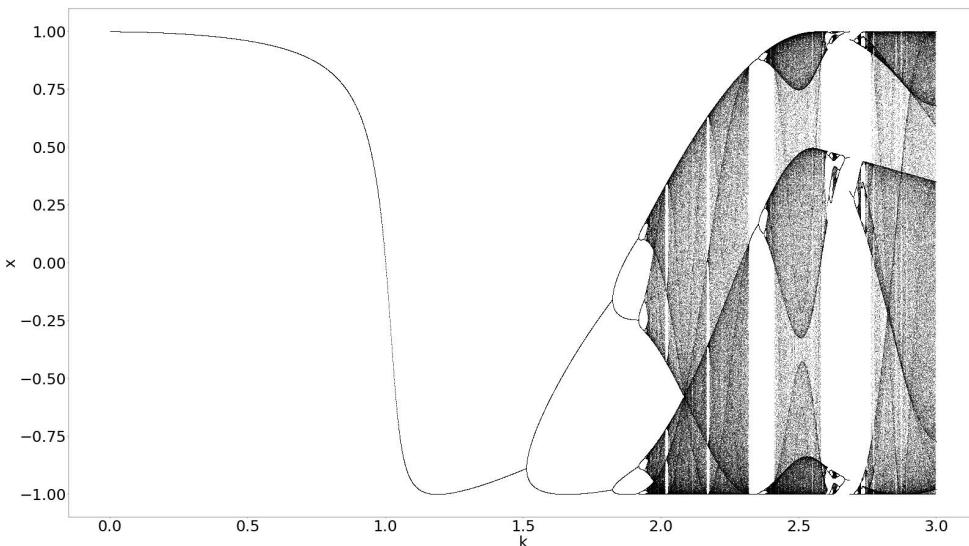
Σχήμα 4.5: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

4.2 Για $q = 0.9$

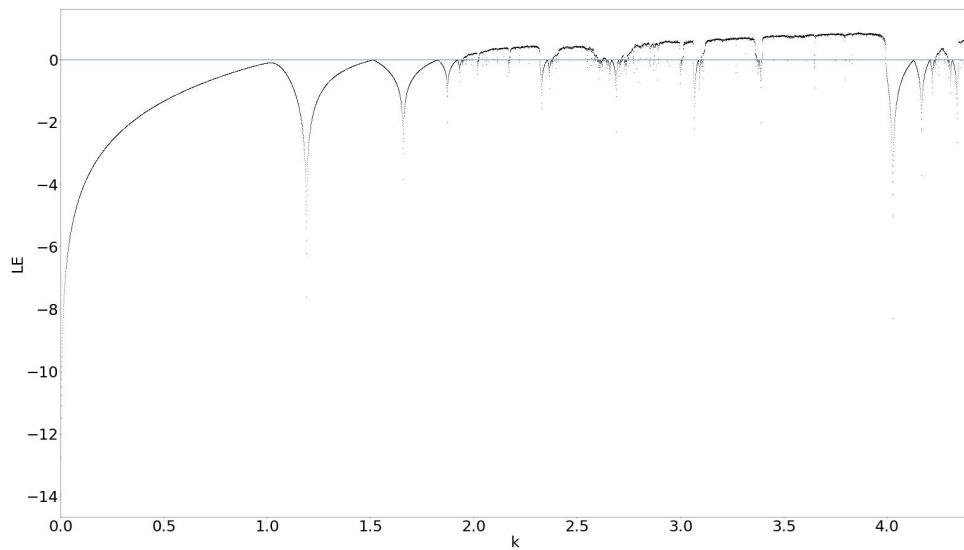
Στο Σχ. 4.6 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 4.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = 0.9$. Στον πίνακα 4.2 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 4.6. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (1.96, 2.015, 2.16, 2.319, 2.603, 2.638, 2.725, 2.773), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 4.6. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 4.2, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα 4.9, 4.10 των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επιπλέον παρατηρούμε στο Σχ. ??, το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Συγκεκριμένα εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου.) για $2.603 < k < 2.647$. Ακόμη στο διάγραμμα ?? το φαινόμενο εμφανίζεται άλλη μία φορά για $2.725 < k < 2.732$, όπου παρατηρείται ότι για $k = 2.727$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περιόδος - 18) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 2.732$. Επίσης παρατηρούμε ότι μεταξύ των δύο βασικών ορθών διπλασιασμών εμφανίζεται ένας αντίστροφος για $2.638 < k < 2.71$.

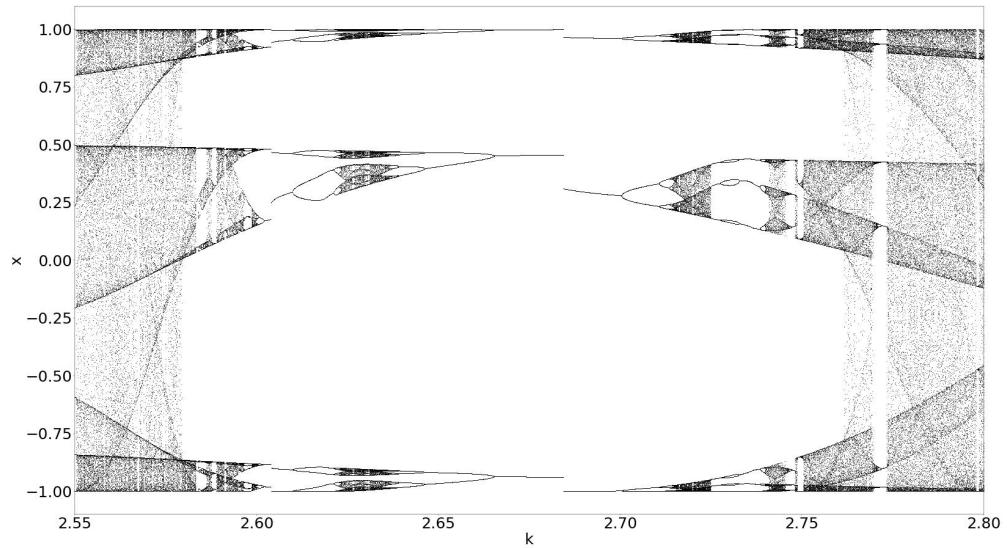
Τέλος, στο σχήμα 4.7 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 3]$. Οι τιμές του πίνακα 4.2 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 4.3 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την χαοτική του συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.9$.



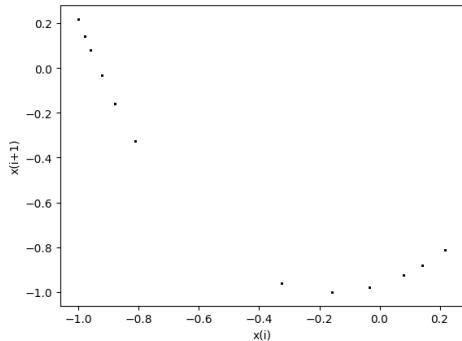
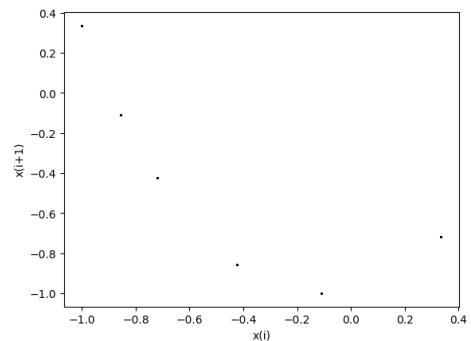
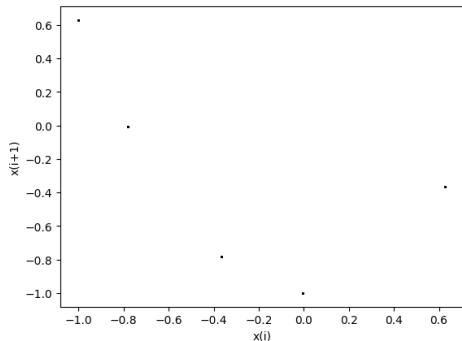
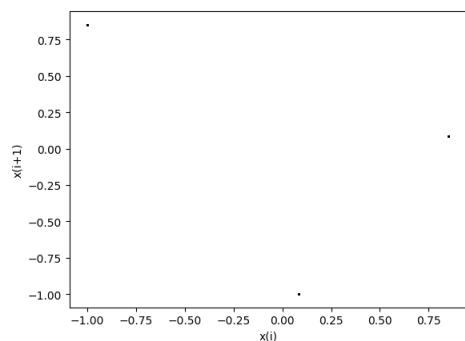
Σχήμα 4.7: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.9$.



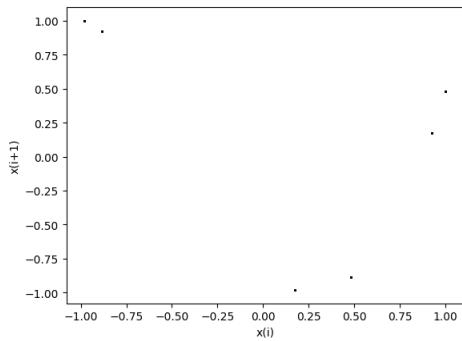
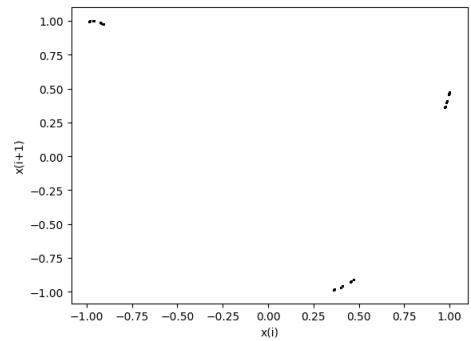
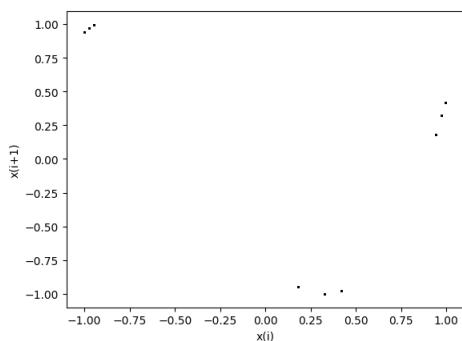
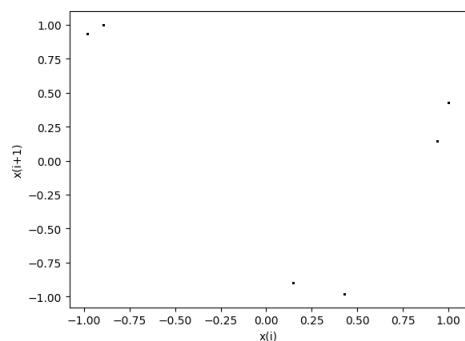
Σχήμα 4.8: Διαγράμματα διαλλάσσονται για $2.55 < k < 2.8$

Πίνακας 4.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.9$

Παράμετρος k	Συμπεριφορά
1.3	Περίοδος - 1
1.5	Περίοδος - 2
1.8	Περίοδος - 4
1.91	Περίοδος - 8
1.94	Περίοδος - 16
1.95	Χάος
1.96	Περίοδος - 12
1.97	Χάος
2.014	Περίοδος - 6
2.019	Περίοδος - 12
2.02	Χάος
2.164	Περίοδος - 5
2.169	Περίοδος - 10
2.17	Χάος
2.319	Περίοδος - 3
2.355	Περίοδος - 6
2.375	Περίοδος - 12
2.38	Χάος
2.603	Περίοδος - 6
2.61	Περίοδος - 12
2.621	Περίοδος - 24
2.623	Χάος
2.638	Περίοδος - 24
2.639	Περίοδος - 12
2.647	Περίοδος - 6
2.66	Περίοδος - 3
2.7	Περίοδος - 6
2.71	Περίοδος - 12
2.715	Χάος
2.725	Περίοδος - 9
2.727	Περίοδος - 18
2.732	Περίοδος - 9
2.738	Περίοδος - 24
2.74	Χάος
2.773	Περίοδος - 6
2.774	Χάος

(α') $\Gamma\alpha k = 1.96$ (β') $\Gamma\alpha k = 2.014$ (γ') $\Gamma\alpha k = 2.16$ (δ') $\Gamma\alpha k = 2.319$

Σχήμα 4.9: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(α') $\Gamma\alpha k = 2.603$ (β') $\Gamma\alpha k = 2.637$ (γ') $\Gamma\alpha k = 2.725$ (δ') $\Gamma\alpha k = 2.773$

Σχήμα 4.10: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή των Χαρτών

Παράρτημα Α'

Appendix title