

okoko

asdasda



Βασίλειος Ασημακόπουλος

16/05/2022

Ευχαριστίες

Περίληψη

Abstract

Περιεχόμενα

1 Κεφάλαιο 1	5
2 Κεφάλαιο 2	6
2.1 Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη	6
2.1.1 Για $q = -0.1$	7
2.1.2 Για $q = -0.3$	12
2.1.3 Για $q = -0.5$	16
2.1.4 Για $q = -0.7$	19
2.1.5 Για $q = -0.9$	23
2.1.6 Για $q = -1.2$	27
2.1.7 Για $q = -1.4$	31
2.1.8 Για $q = -1.6$	37
2.1.9 Για $q = -1.9$	43
2.1.10 Για $q = -2.1$	48
3 Κεφάλαιο 3	53
A Appendix title	54

Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μιας σειράς διακριτών χαρτών και των παραλλαγών τους. Για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων μπορούν να παρουσιάσουν χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονήσεις της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} .

2.1 Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη

Στην ενότητα αυτή παρατίθεται η μελέτη παραλλαγών του Λογιστικού Χάρτη. Ο Λογιστικός που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i = k * (a + x_{i-1})^2 * (b - x_{i-1}) \quad (2.1)$$

Στην εξίσωση 2.1 προστέθηκε ένας σταθερός όρος q . Έτσι προέκυψε μία προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη

$$x_i = k * (1 + x_{i-1})^2 * (2 - x_{i-1}) + q \quad (2.2)$$

όπου k, q : παράμετροι.

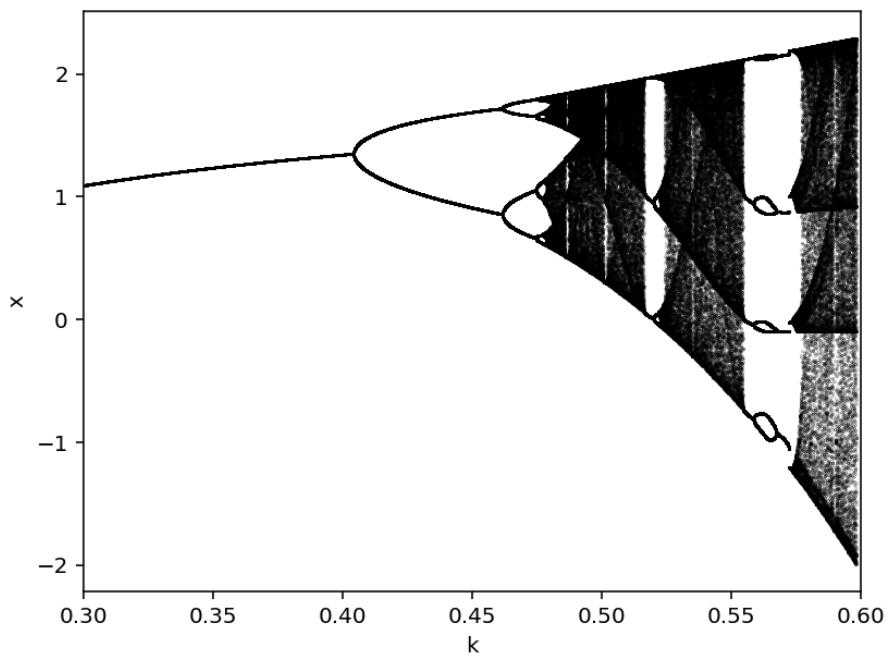
Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του $x_1 = 0.1$ παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβαλλόταν στο διάστημα $[-0.1, -2.1]$. Από το διάστημα $[-0.1, -0.9]$ και το $[-1.2, -1.6]$ μεταβαλλόταν με βήμα 0.2. Από το $[-0.9, -1.2]$ και από το $[-1.6, -2.1]$ η παράμετρος μεταβαλλόταν q με βήμα 0.3. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμά της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

2.1.1 Για $q = -0.1$

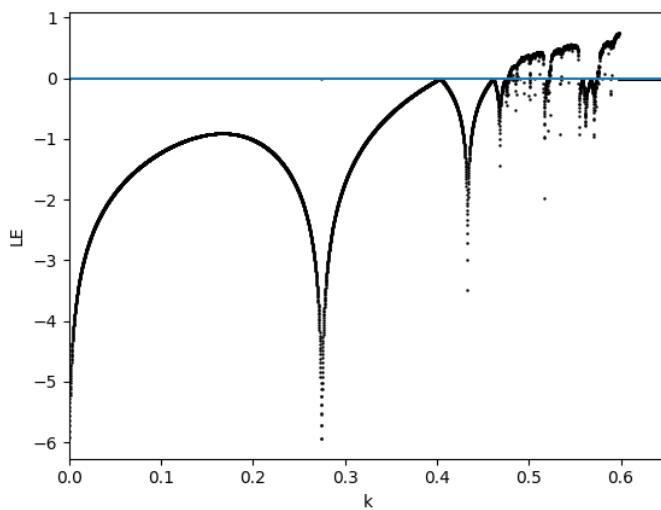
Στο σχήμα 2.1 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.1$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.4$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.47$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.476$ (περίοδος - 8). Ενώ ο τελευταίος διπλασιασμός εμφανίζεται λίγο πιο μετά τον τρίτο για $k=0.478$ (περίοδος - 16). Στην συνέχεια για $k > 0.479$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.51$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.52$ (περίοδος - 6) και $k = 0.522$ (περίοδος - 11) για $k > 0.524$. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για $k = 0.555$ (περίοδος - 4). Για $k = 0.559$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 8) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 0.567$, οπότε εδώ παρατηρούμε το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας δηλαδή έχουμε μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για $k = 0.568$. Λόγω αυτού του φαινομένου το οποίο συνεχίζει μέχρι το $q = -0.2$, μελετήθηκε περαιτέρω το σύστημα από $-0.1 < q < -0.2$. Τέλος για $k = 0.5735$ έχουμε έναν τελευταίο διπλασιασμό (περίοδος - 6) πριν ξανά εισέλθει το σύστημα για $k > 0.575$ στο χάος. Στο σχήμα 2.3 παρατίθενται 4 διαγράμματα διακλάδωσης (2.3i, 2.3ii, 2.3iii, 2.3iv) για $0.54 < k < 0.6$. Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στην αντιμονοτονικότητα που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q . Επίσης παρατηρούμε στα διαγράμματα 2.3ii, 2.3iii, 2.3iv τη δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον στο διάγραμμα 2.3iv το φαινόμενο εμφανίζεται δυο φορές για $0.560 < k < 0.568$ και $0.571 < k < 0.573$. Επιπλέον, στο σχήμα 2.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0.3, 0.6]$. Στο διάστημα τιμών $k = 0.522$, στο $0.51 < k < 0.522$, και στο $0.554 < k < 0.574$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον πίνακα 2.1 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.1$.

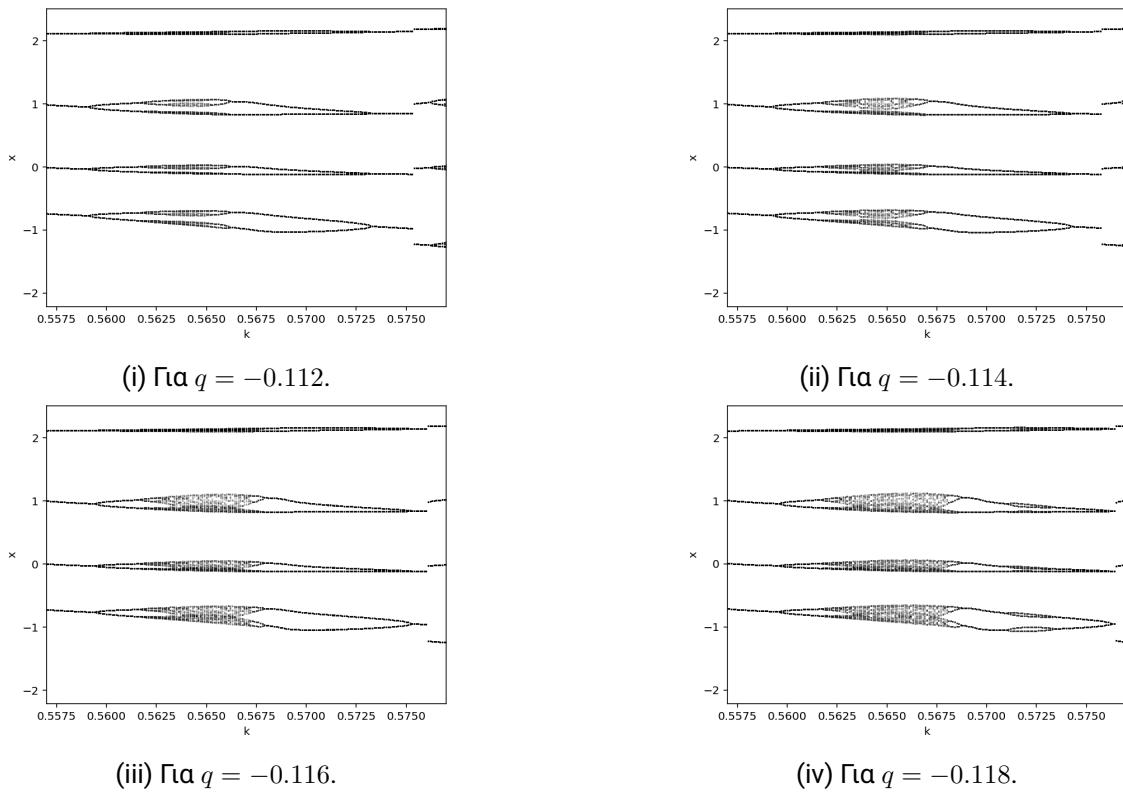
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος -1	2.4i
0.41	Περίοδος -2	2.4ii
0.476	Περίοδος -8	2.4iii
0.4778	Περίοδος -16	2.4iv
0.479	Χάος	2.4v
0.517	Περίοδος -3	2.4vi
0.52	Περίοδος -6	2.4vii
0.522	Περίοδος -11	2.5i
0.524	Χάος	2.5ii
0.555	Περίοδος -4	2.5iii
0.559	Περίοδος -8	2.5iv
0.568	Περίοδος -4	2.5v
0.5735	Περίοδος -6	2.5vi
0.575	Χάος	2.5vii



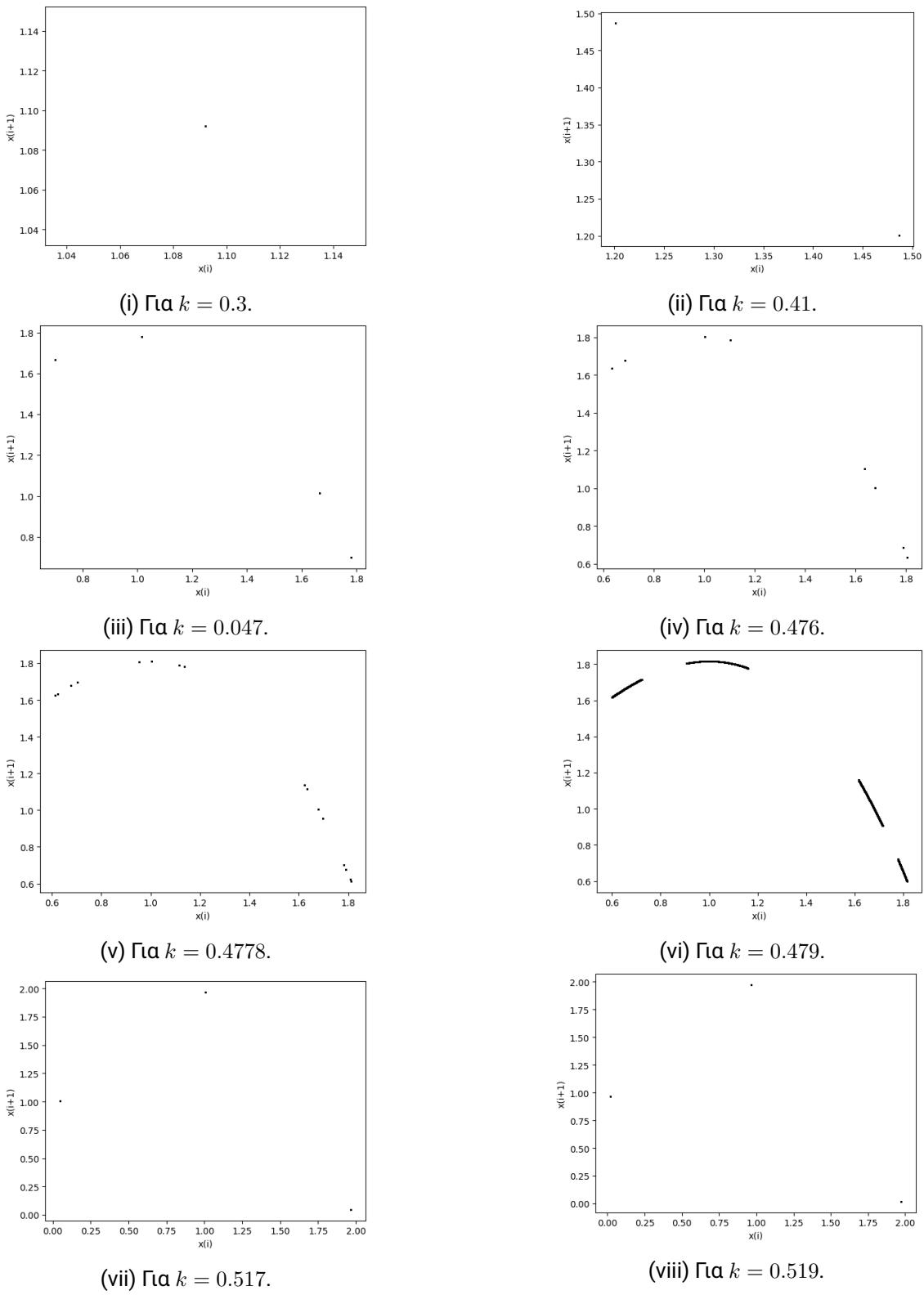
Σχήμα 2.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.1$.



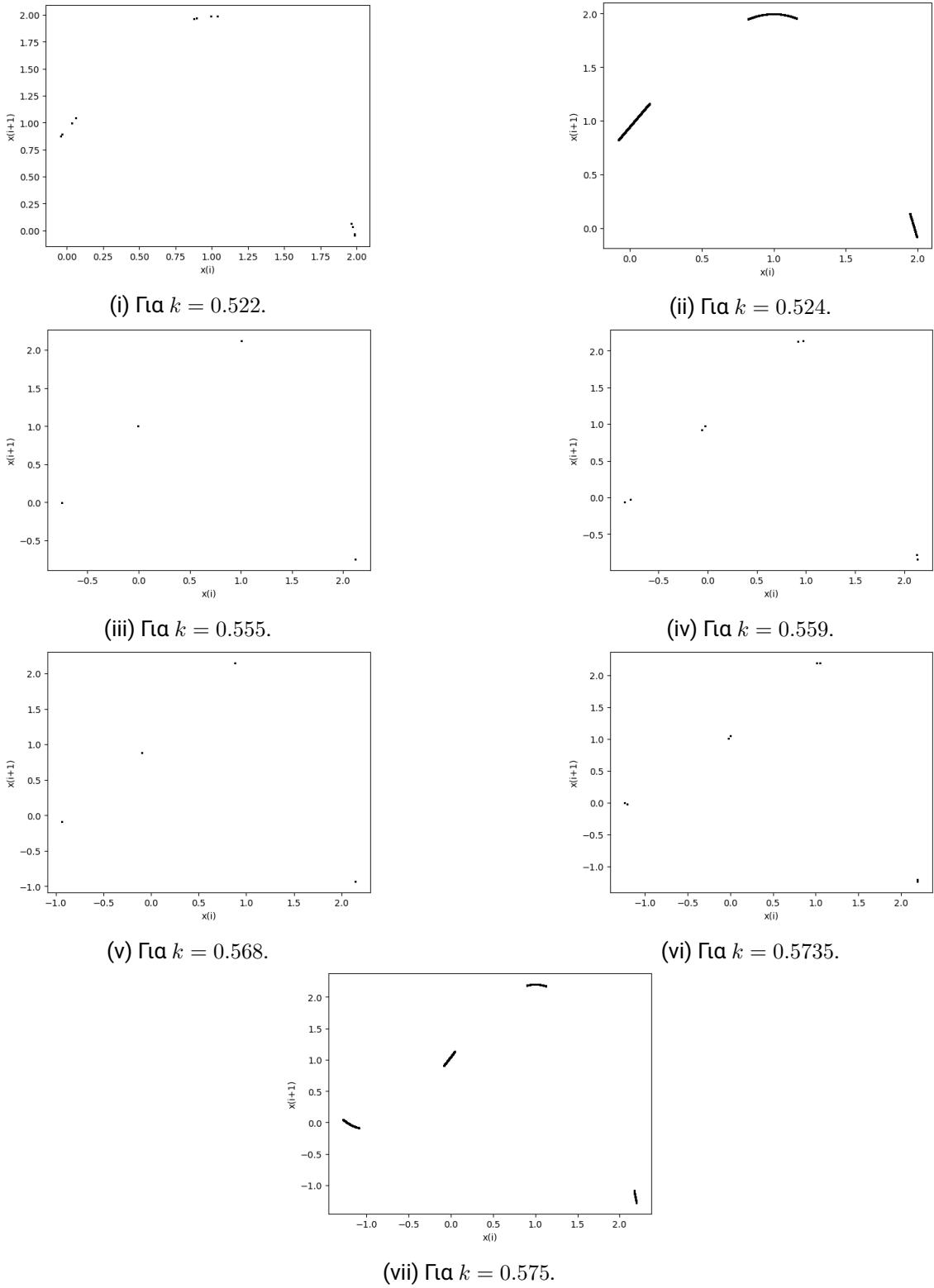
Σχήμα 2.2: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυνού σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.1$.



Σχήμα 2.3: Διαγράμματα διακλάδωσης :



Σχήμα 2.4: Διαγράμματα της τιμής x_i με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος) :



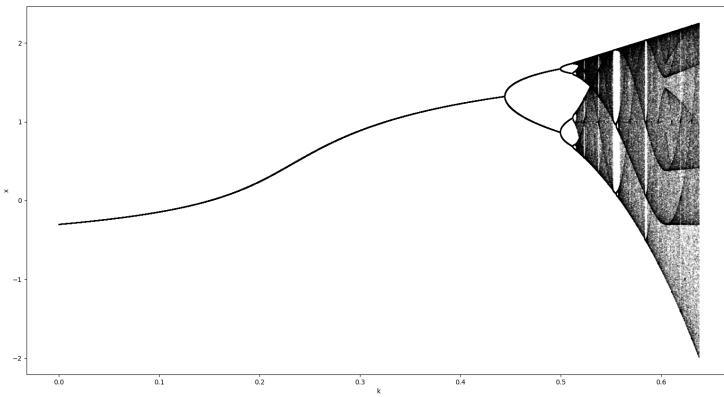
Σχήμα 2.5: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος):

2.1.2 Για $q = -0.3$

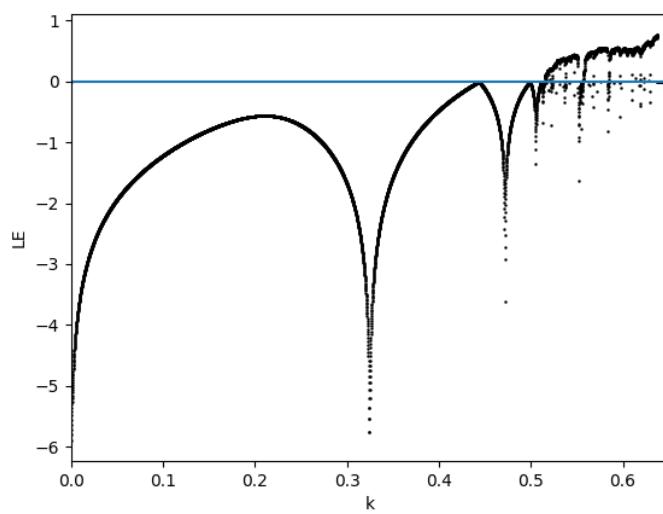
Στο σχήμα 2.6 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.3$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.44$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.5$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.511$ (περίοδος - 8). Στην συνέχεια για $k > 0.5165$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.551$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.555$ (περίοδος - 6) και $k = 0.556$ (περίοδος - 12) για $k > 0.5573$. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για $k = 0.583$ (περίοδος - 4) και μετά από ένα διπλασιασμό για $k = 0.5846$ (περίοδος - 7) είσερχεται για τελευταία φορά στο χάος για $k = 0.5851$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.7 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.636]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.511$, στο $0.551 < k < 0.556$, και στο $0.583 < k < 0.5846$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον πίνακα 2.2 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$.

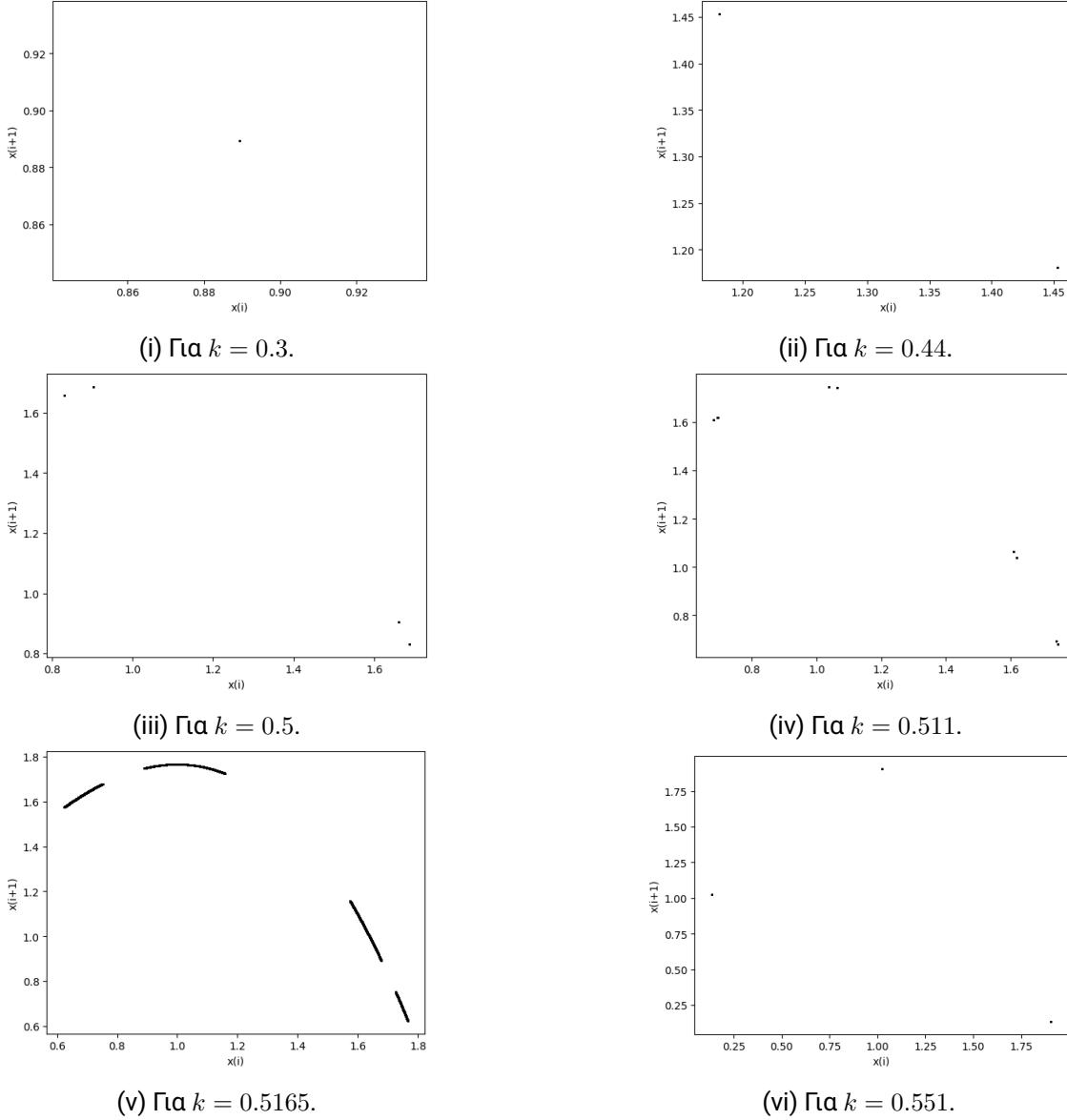
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος -1	2.4i
0.44	Περίοδος -2	2.4ii
0.5	Περίοδος -4	2.4ii
0.511	Περίοδος -8	2.4iii
0.5165	Χάος	2.4v
0.551	Περίοδος -3	2.4vi
0.555	Περίοδος -6	2.4vii
0.556	Περίοδος -12	2.5i
0.5573	Χάος	2.5ii
0.583	Περίοδος -4	2.5iii
0.5846	Περίοδος -7	2.5iv
0.5851	Χάος	2.5vii



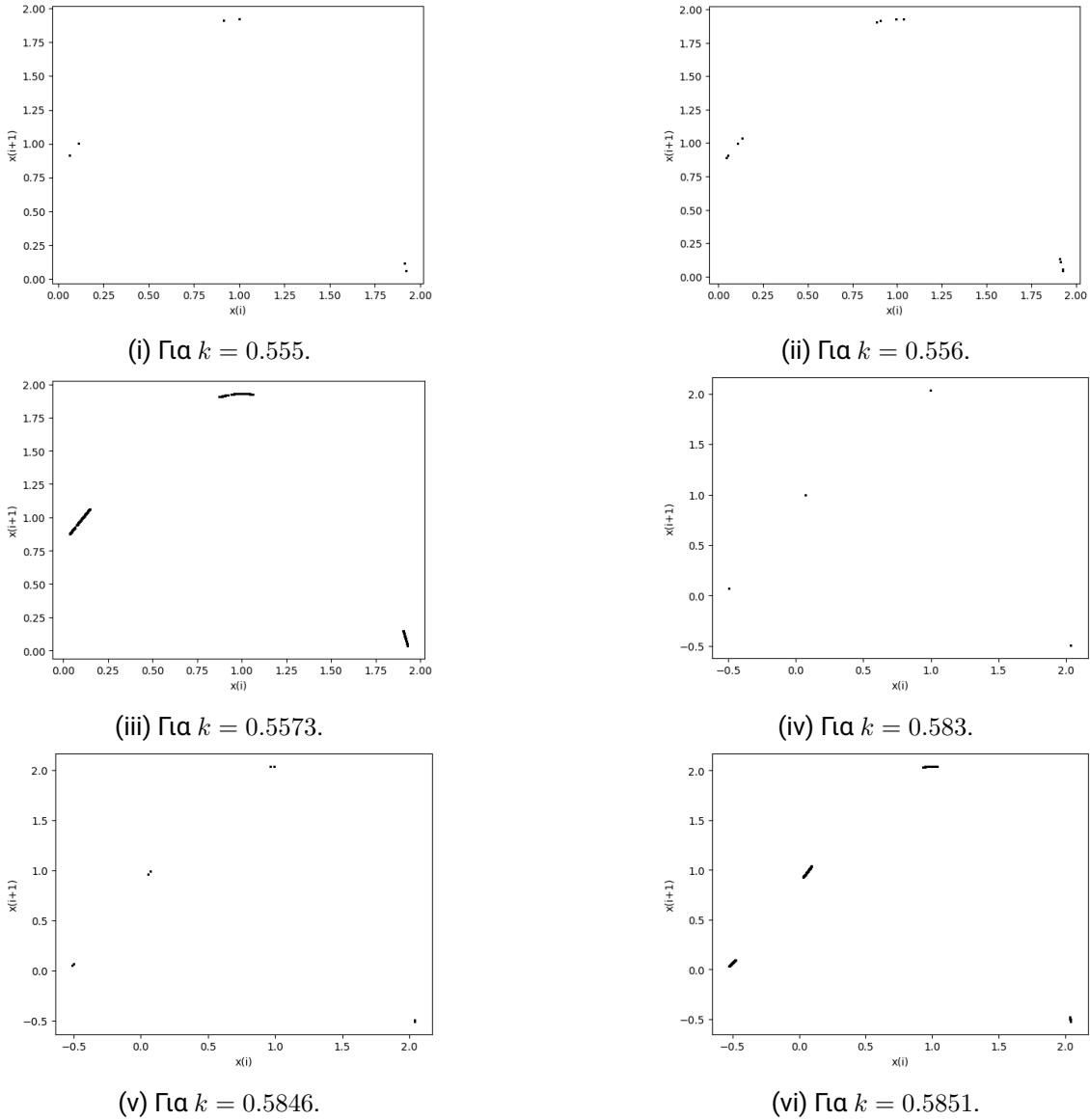
Σχήμα 2.6: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$.



Σχήμα 2.7: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$.



Σχήμα 2.8: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος) :



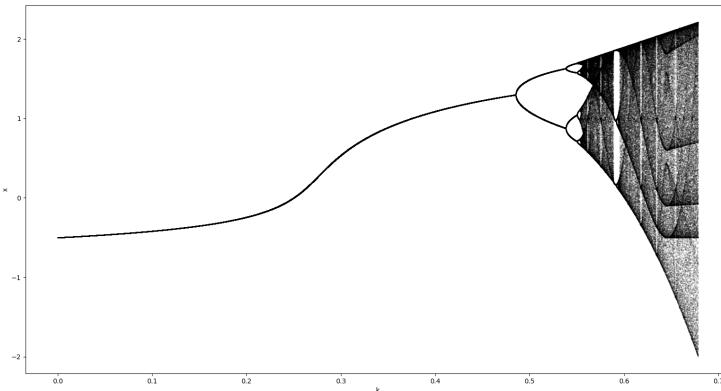
Σχήμα 2.9: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος) :

2.1.3 Για $q = -0.5$

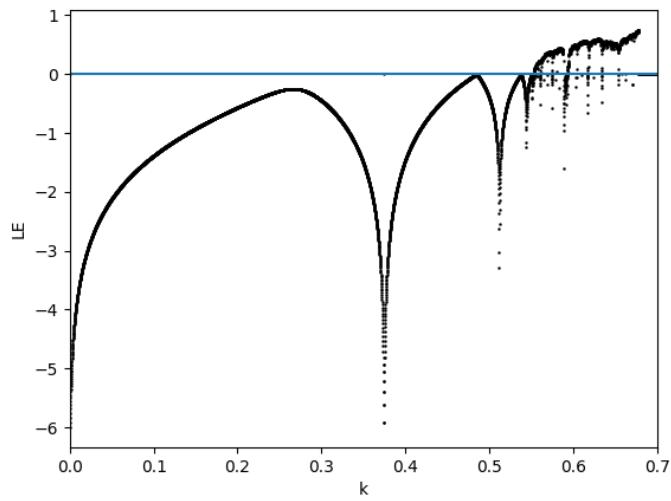
Στο σχήμα 2.10 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.5$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.48$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.53$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.55$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.5531$ (περίοδος - 16). Στην συνέχεια για $k > 0.5534$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.58$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.591$ (περίοδος - 6), για $k > 0.5927$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k , στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.679]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.5534$, στο $0.59 < k < 0.594$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον πίνακα 2.3 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.3: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$.

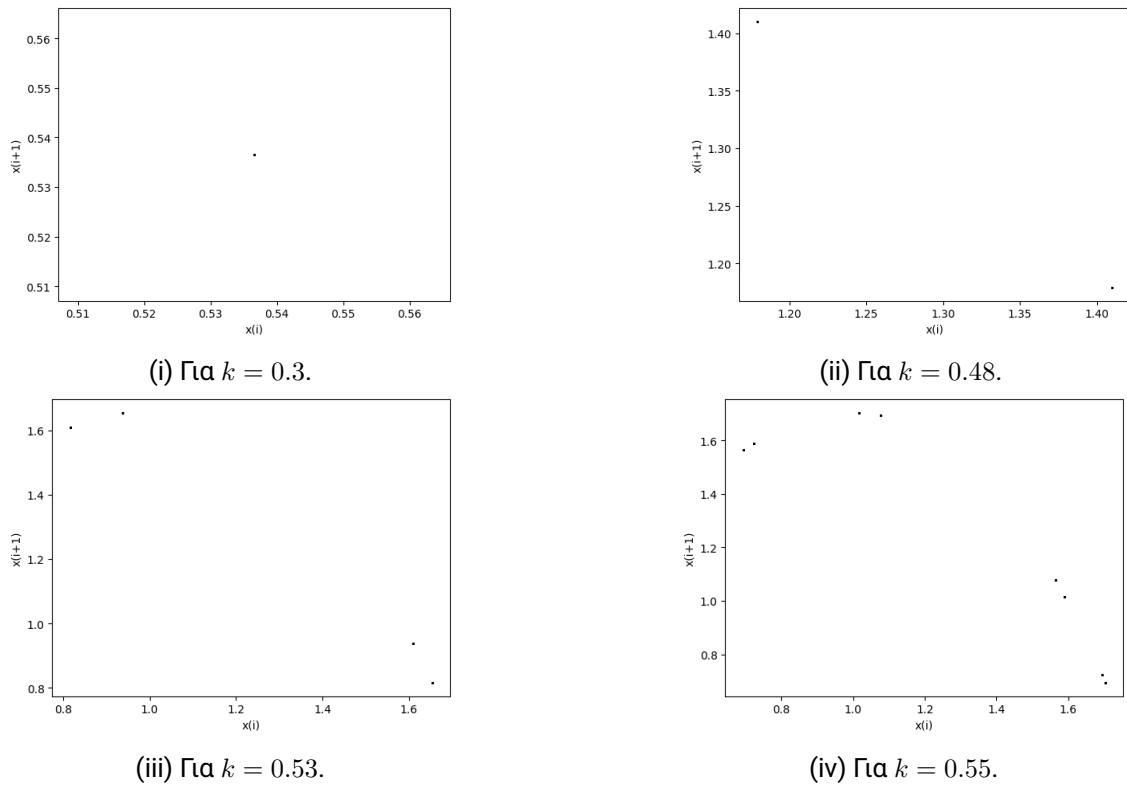
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.12i
0.48	Περίοδος - 2	2.12ii
0.53	Περίοδος - 4	2.12iii
0.55	Περίοδος - 8	2.12iv
0.5531	Περίοδος - 16	2.13i
0.5534	Χάος	2.13ii
0.58	Περίοδος - 3	2.13iii
0.591	Περίοδος - 6	2.13iv
0.5927	Χάος	2.13v



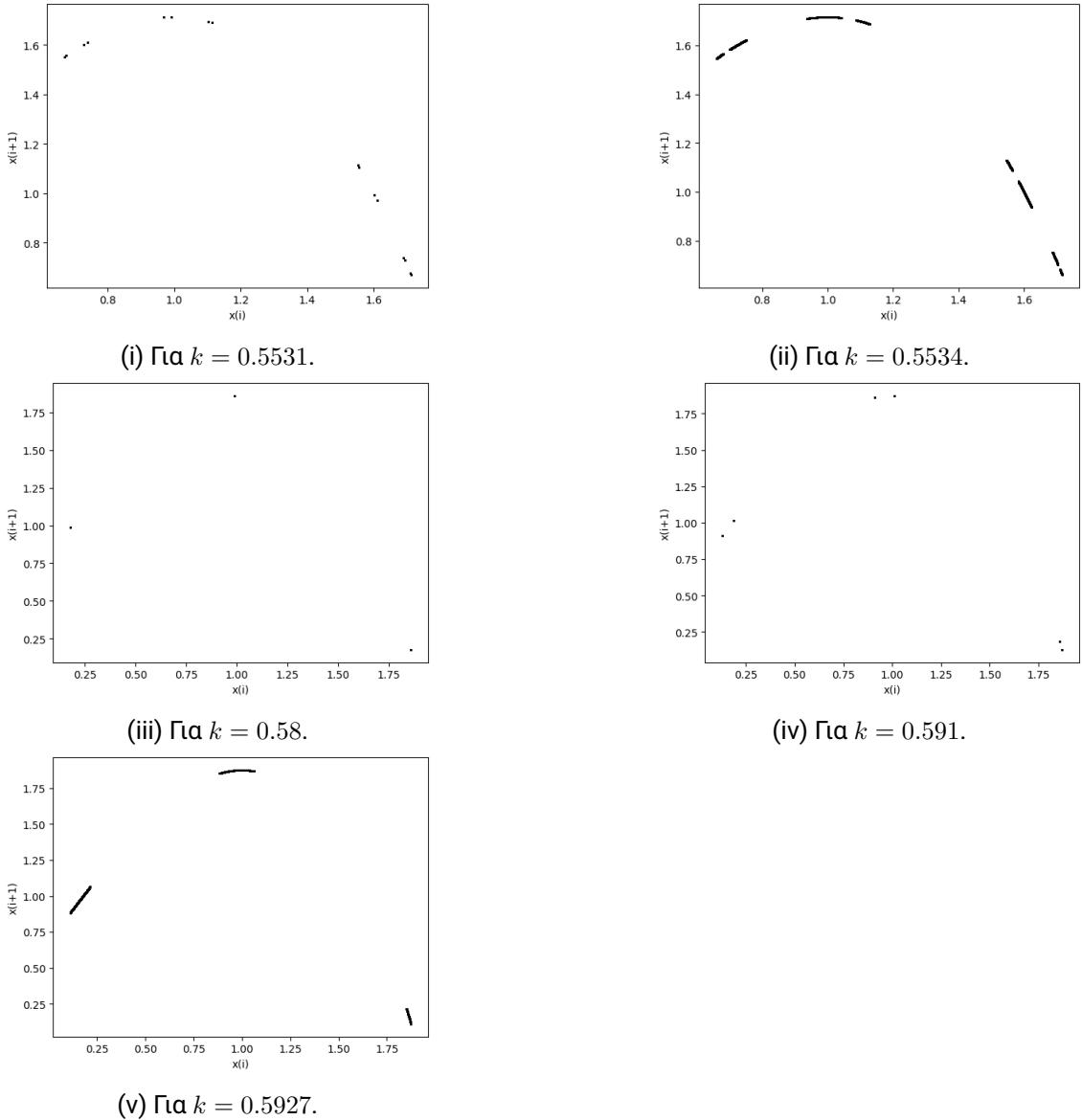
Σχήμα 2.10: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.5$.



Σχήμα 2.11: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.5$.



Σχήμα 2.12: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



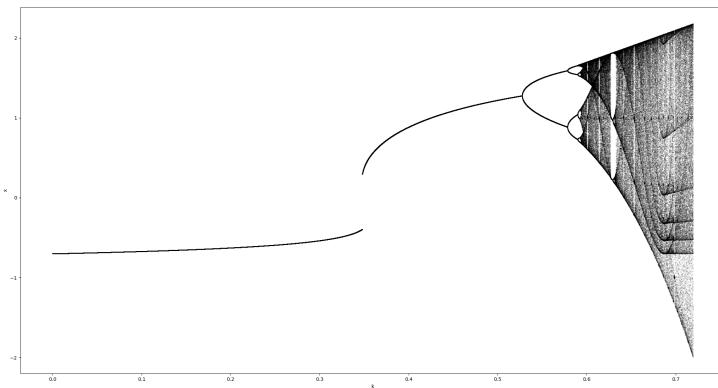
Σχήμα 2.13: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος):

2.1.4 Για $q = -0.7$

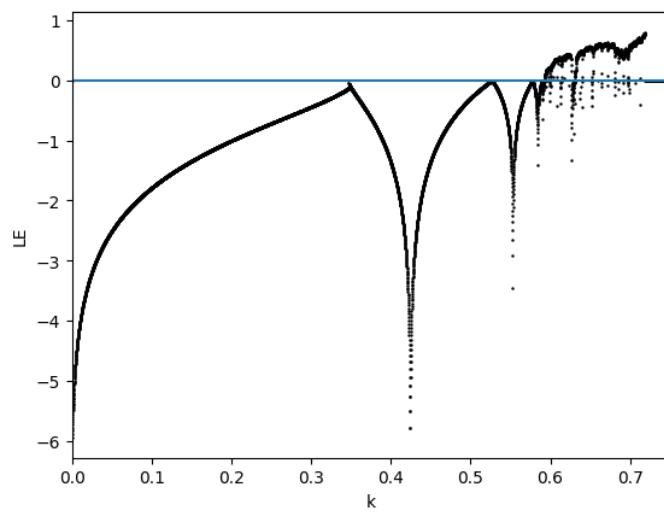
Στο σχήμα 2.14 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.7$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$ αλλά από $k[0.3469, 0.3486]$ "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από $k = 3.469$ ξαναξεκινάει από περίοδο - 1. Για $k = 0.52$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.57$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.592$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.593$ (περίοδος - 15). Στην συνέχεια για $k > 0.593$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.627$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.63$ (περίοδος - 6) $k = 0.631$ (περίοδος - 11), για $k > 0.631$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.72]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.594$, στο $0.627 < k < 0.632$, παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον πίνακα 2.4 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.4: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.7$.

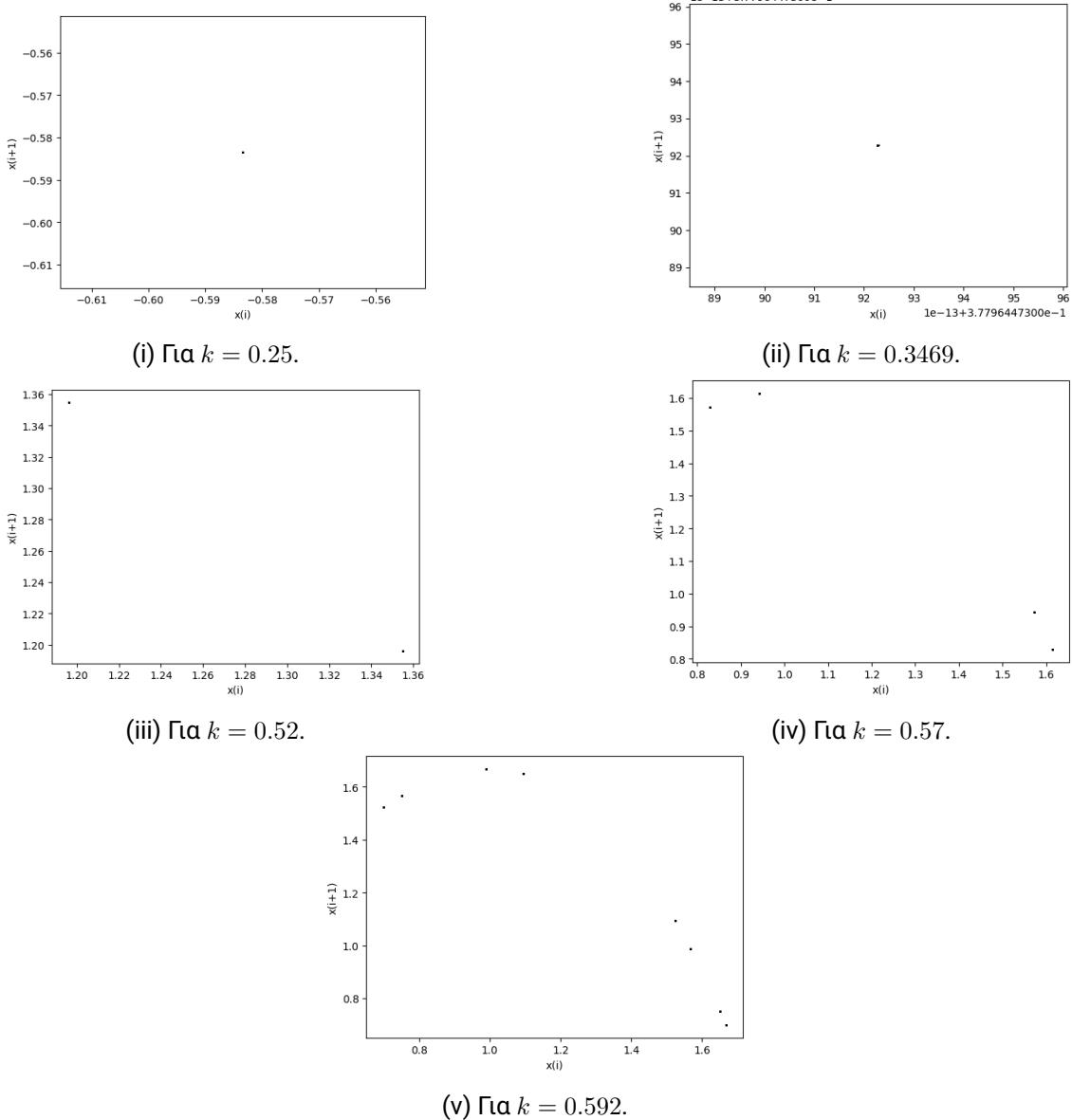
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.25	Περίοδος - 1	2.16i
0.3469	Περίοδος - 1	2.16ii
0.52	Περίοδος - 2	2.16iii
0.57	Περίοδος - 4	2.16iv
0.592	Περίοδος - 8	2.16v
0.593	Περίοδος - 15	2.17i
0.594	Χάος	2.17ii
0.627	Περίοδος - 3	2.17iii
0.630	Περίοδος - 6	2.17iv
0.631	Περίοδος - 11	2.17v
0.632	Χάος	2.17vi



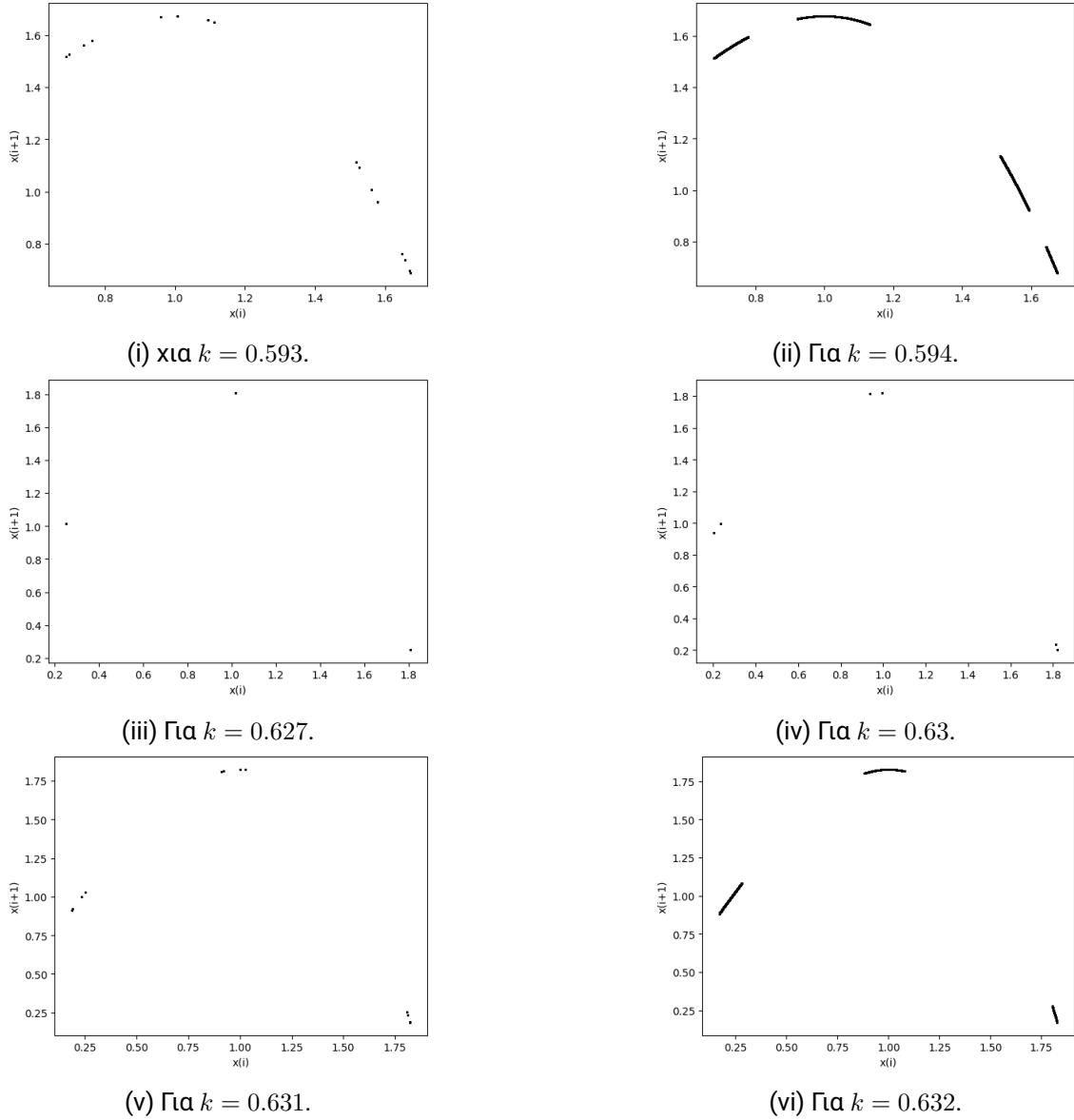
Σχήμα 2.14: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.15: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.16: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



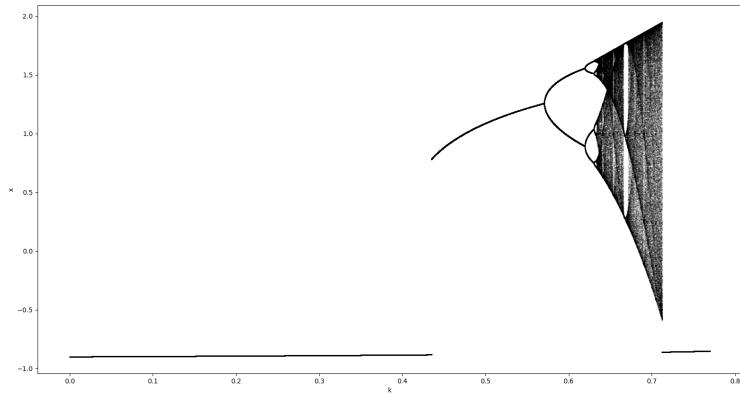
Σχήμα 2.17: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος) :

2.1.5 Για $q = -0.9$

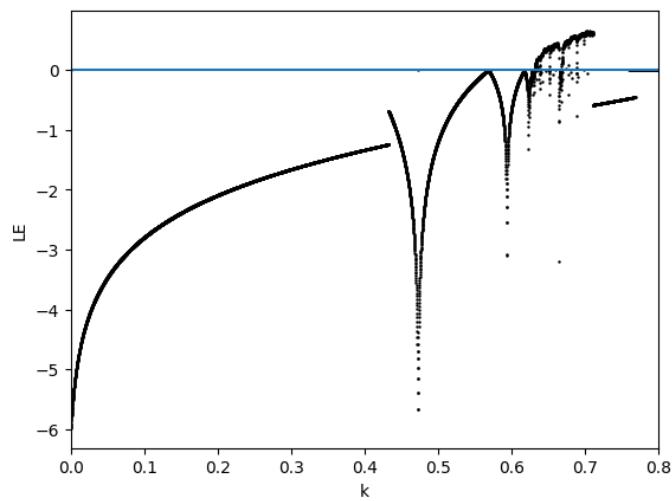
Στο σχήμα 2.18 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.9$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$ αλλά στο διάστημα τιμών $0.43 < k < 0.436$ "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από $k = 3.436$ ξαναξεκινάει από περίοδο - 1. Για $k = 0.57$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.62$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.63$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.633$ (περίοδος - 16). Στην συνέχεια για $k > 0.635$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.665$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από ένα διπλασιασμό $k = 0.668$ (περίοδος - 6), για $k > 0.671$. Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για $k = 0.72$ (περίοδος - 1). Για $q = -0.7$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον, στο σχήμα 2.19 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.77]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.635$, στο $0.665 < k < 0.671$ και $0.72 < k < 0.77$ παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον πίνακα 2.5 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.5: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.9$.

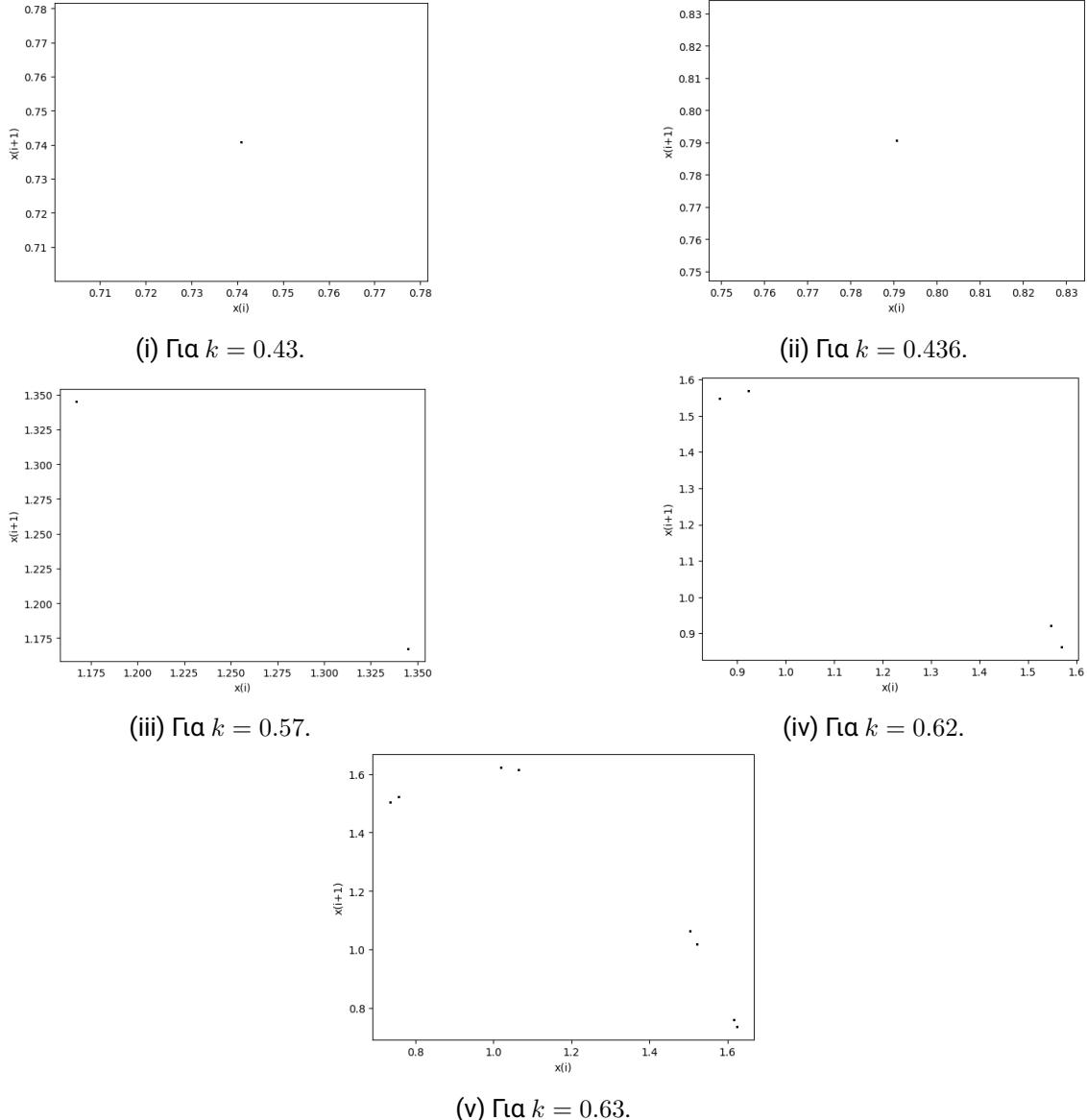
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.43	Περίοδος - 1	2.20i
0.436	Περίοδος - 1	2.20ii
0.57	Περίοδος - 2	2.20iii
0.62	Περίοδος - 4	2.20iv
0.63	Περίοδος - 8	2.20v
0.633	Περίοδος - 16	2.21i
0.635	Χάος	2.21ii
0.665	Περίοδος - 3	2.21iii
0.668	Περίοδος - 6	2.21iv
0.671	Χάος	2.21v
0.72	Περίοδος - 1	2.21vi



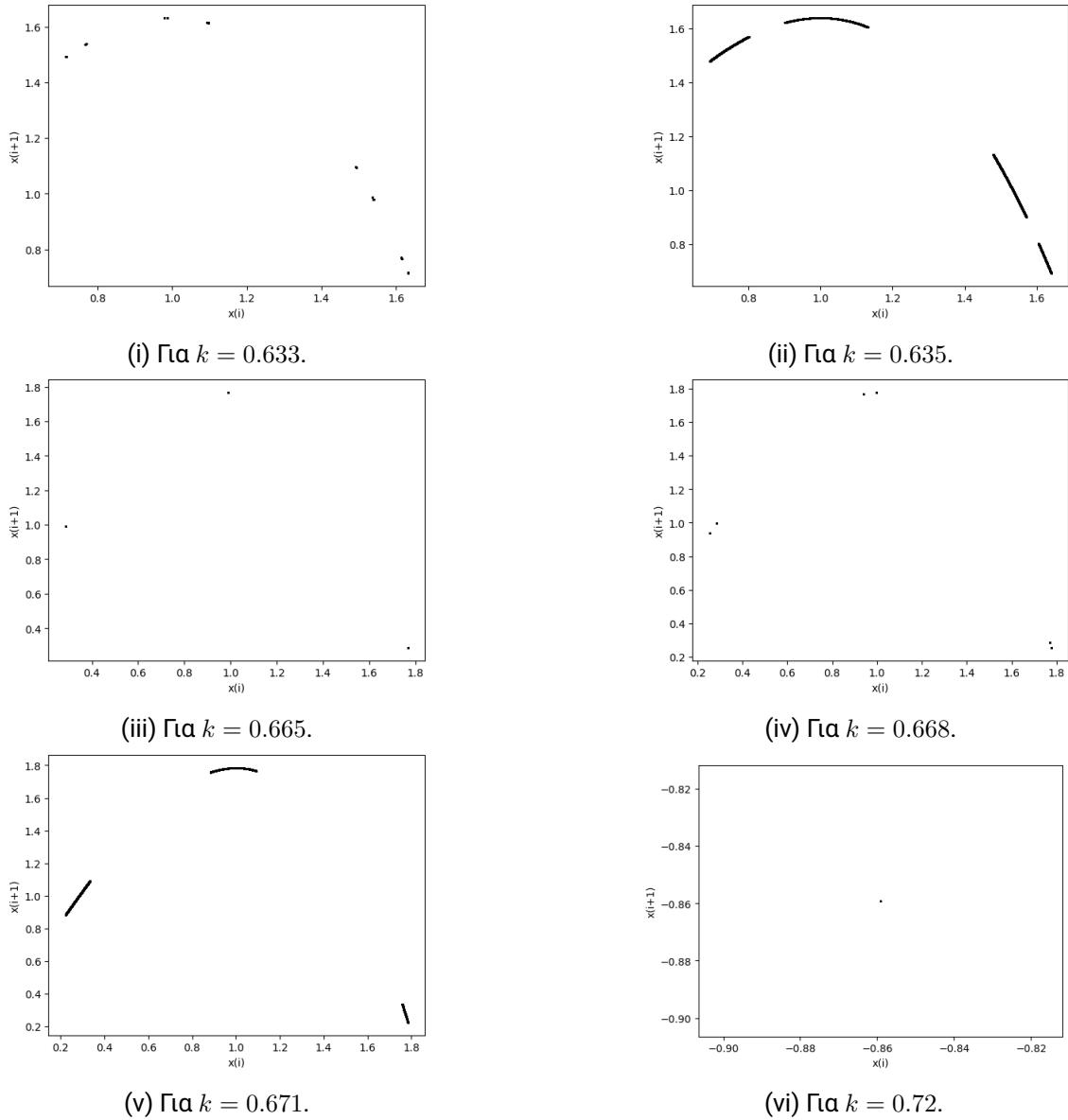
Σχήμα 2.18: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.19: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.20: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



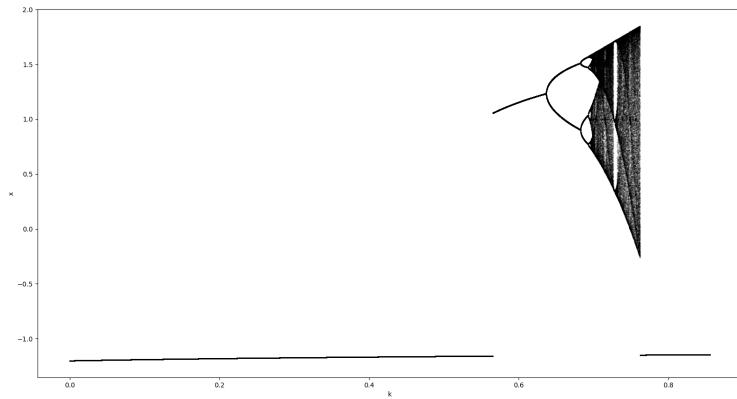
Σχήμα 2.21: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος):

2.1.6 Για $q = -1.2$

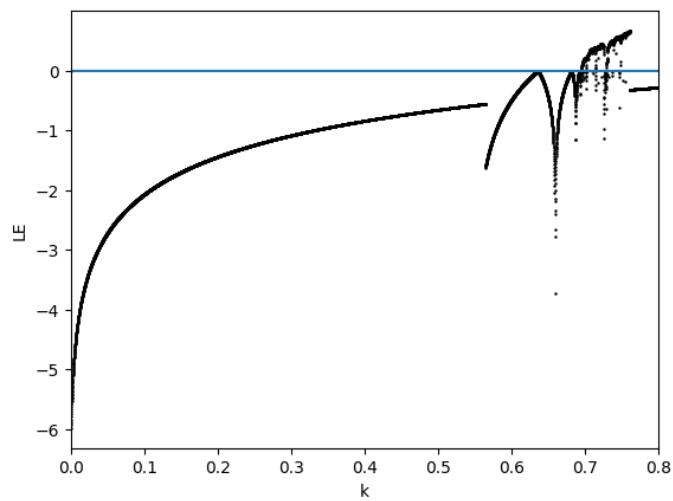
Στο σχήμα 2.22 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.2$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.55$ αλλά στο διάστημα τιμών $0.56 < k < 0.566$ "σπάει" η περίοδος. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται σαν υστέρηση και το κομμάτι όπου "σπάει" η περίοδος ονομάζεται βρόχος υστέρησης. Από $k = 0.566$ ξαναξεκινάει από περίοδο - 1. Για $k = 0.63$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.67$ (περίοδος - 4) και τον τρίτο για $k = 0.69$ (περίοδος - 8). Στην συνέχεια για $k > 0.696$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.726$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από ένα διπλασιασμό $k = 0.729$ (περίοδος - 6), για $k > 0.731$. Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για $k = 0.762$ (περίοδος - 1). Για $q = -1.2$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου, ενώ παρατηρείται και εσωτερική κρίση ελκυστή για $k = 0.726$ αλλά και για $k = 0.762$. Επιπλέον, στο σχήμα 2.23 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.77]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.69$, στο $0.726 < k < 0.731$ και $0.72 < k < 0.8574$ παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης. Τέλος, στον πίνακα 2.6 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.6: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.2$.

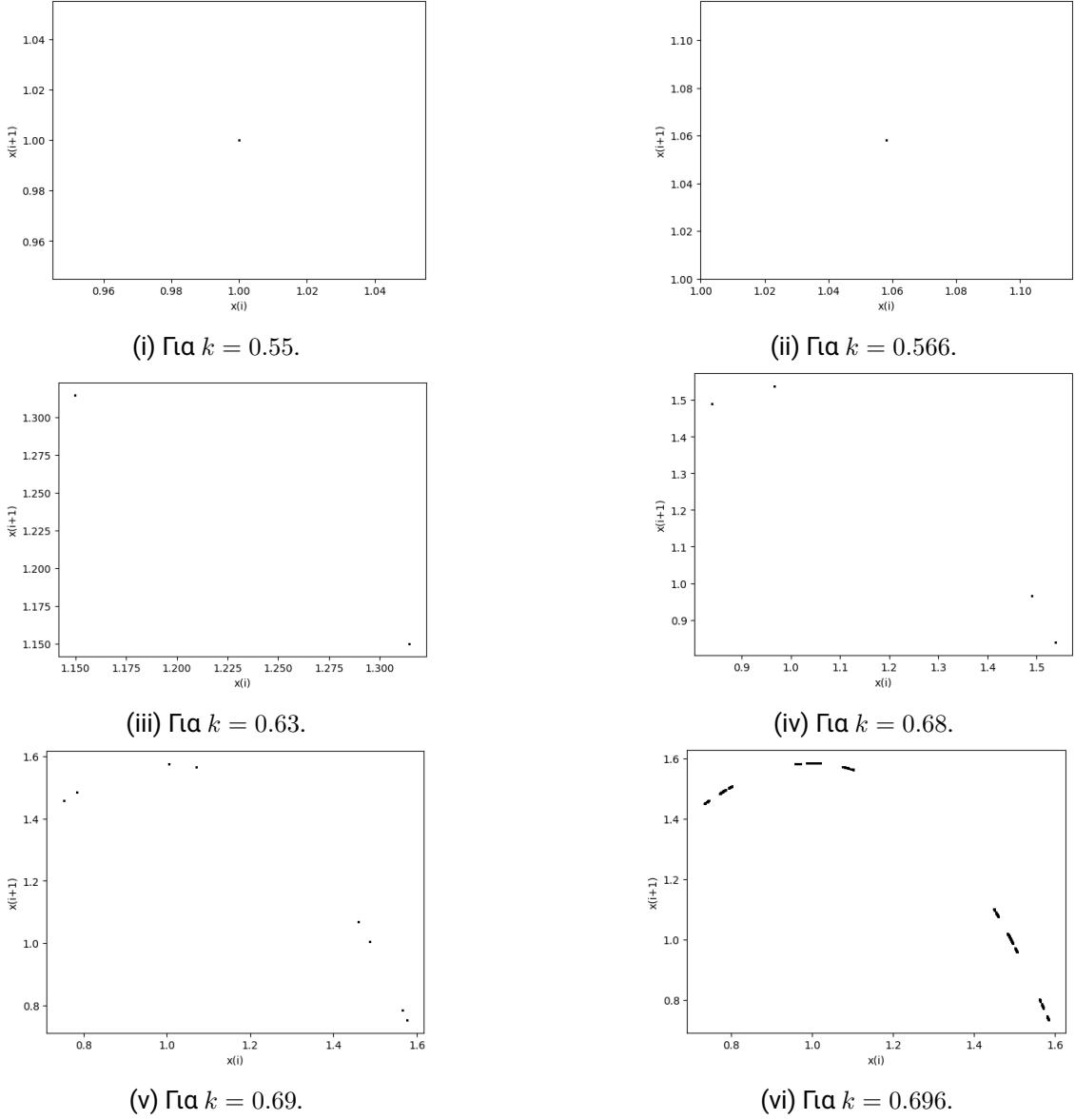
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.55	Περίοδος - 1	2.24i
0.566	Περίοδος - 1	2.24ii
0.63	Περίοδος - 2	2.24iii
0.68	Περίοδος - 4	2.24iv
0.69	Περίοδος - 8	2.24v
0.696	Χάος	2.24vi
0.726	Περίοδος - 3	2.25i
0.729	Περίοδος - 6	2.25ii
0.731	Χάος	2.25iii
0.762	Περίοδος - 1	2.25iv



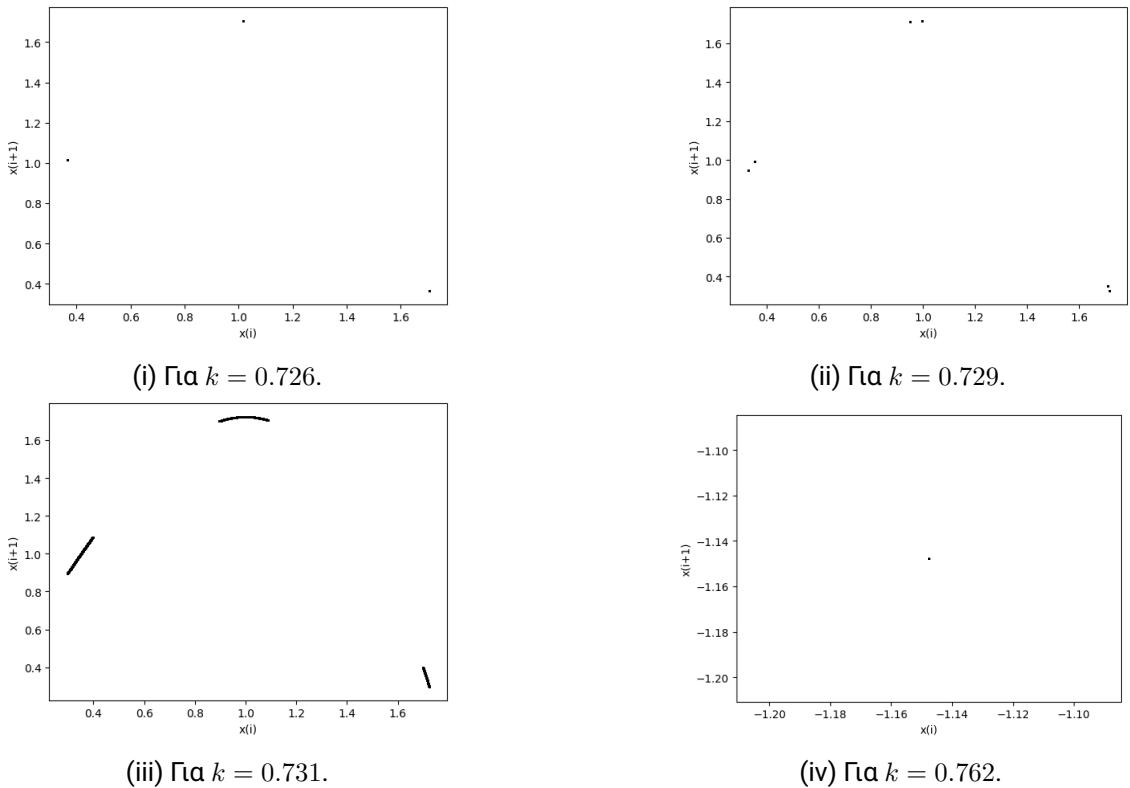
Σχήμα 2.22: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.2$.



Σχήμα 2.23: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.2$.



Σχήμα 2.24: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



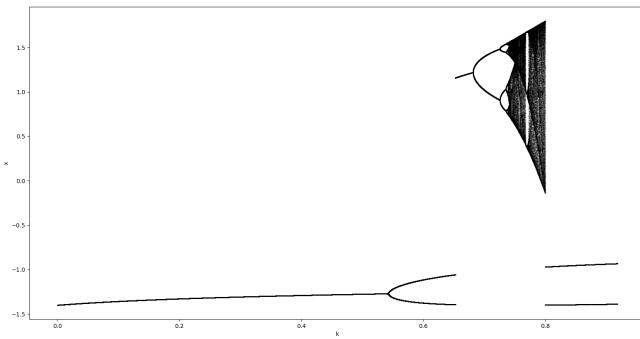
Σχήμα 2.25: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος) :

2.1.7 Για $q = -1.4$

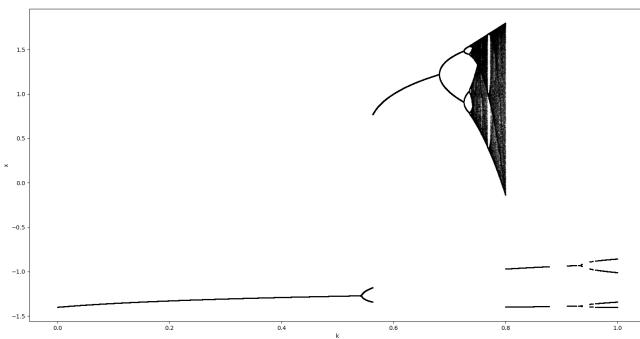
Στο σχήμα 2.27 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $a = 1, b = 2, q = -1.4$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.26i ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσεις 2.26ii ($x_0 = 0.5$), 2.26iii ($x_0 = 1$), 2.26iv ($x_0 = -0.1$) πατατηρείται ότι για $q = -1.4$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Αυτό το φαινόμενο επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα Lyapunov 2.27i, 2.27ii, 2.27iii, 2.27iv. Στον πίνακα 2.7 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιές τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική συμπεριφορά ή χαοτική, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.26i. Επίσης οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντιστοιχούς με την περίοδο του συστήματος. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($0.744, 0.7565, 0.768, 0.8$), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.26i στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-2, αλλά και από περίοδο - 2 σε περίοδο - 1. Οι αντιστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8. Τέλος, στο σχήμα 2.27i παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.91]$. Οι τιμές του πίνακα 2.7 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.27i όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.7: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $a = 1, b = 2, q = -1.4$ και $x_i = 0.1$

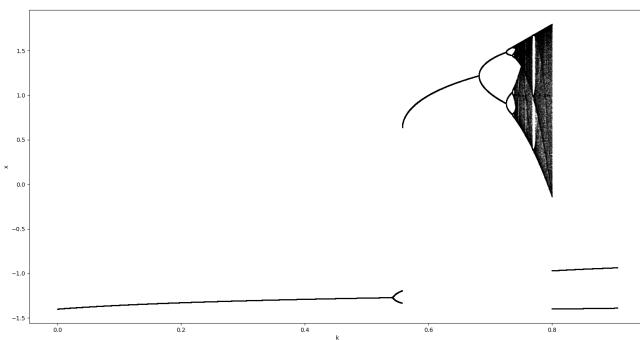
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.4	Περίοδος - 1	2.28i
0.54	Περίοδος - 2	2.28ii
0.65	Περίοδος - 1	2.28iii
0.68	Περίοδος - 2	2.28iv
0.726	Περίοδος - 4	2.28v
0.737	Περίοδος - 8	2.28vi
0.738	Περίοδος - 15	2.29i
0.739	Χάος	2.29ii
0.744	Περίοδος - 6	2.29iii
0.746	Χάος	2.29iv
0.7565	Περίοδος - 5	2.29v
0.757	Χάος	2.29vi
0.768	Περίοδος - 3	2.29vii
0.77	Περίοδος - 6	2.29viii
0.78	Χάος	2.30i
0.8	Περίοδος - 2	2.30ii



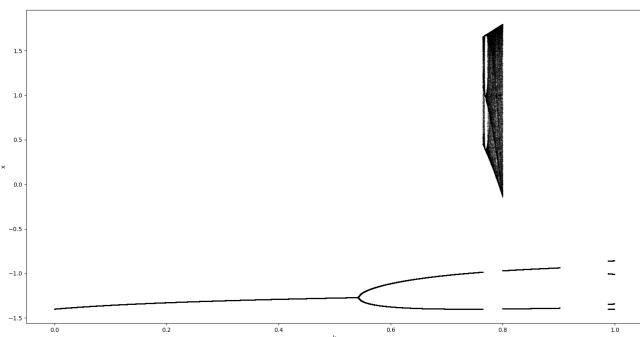
(i) $x_0 = 0.1$



(ii) $x_0 = 0.5$

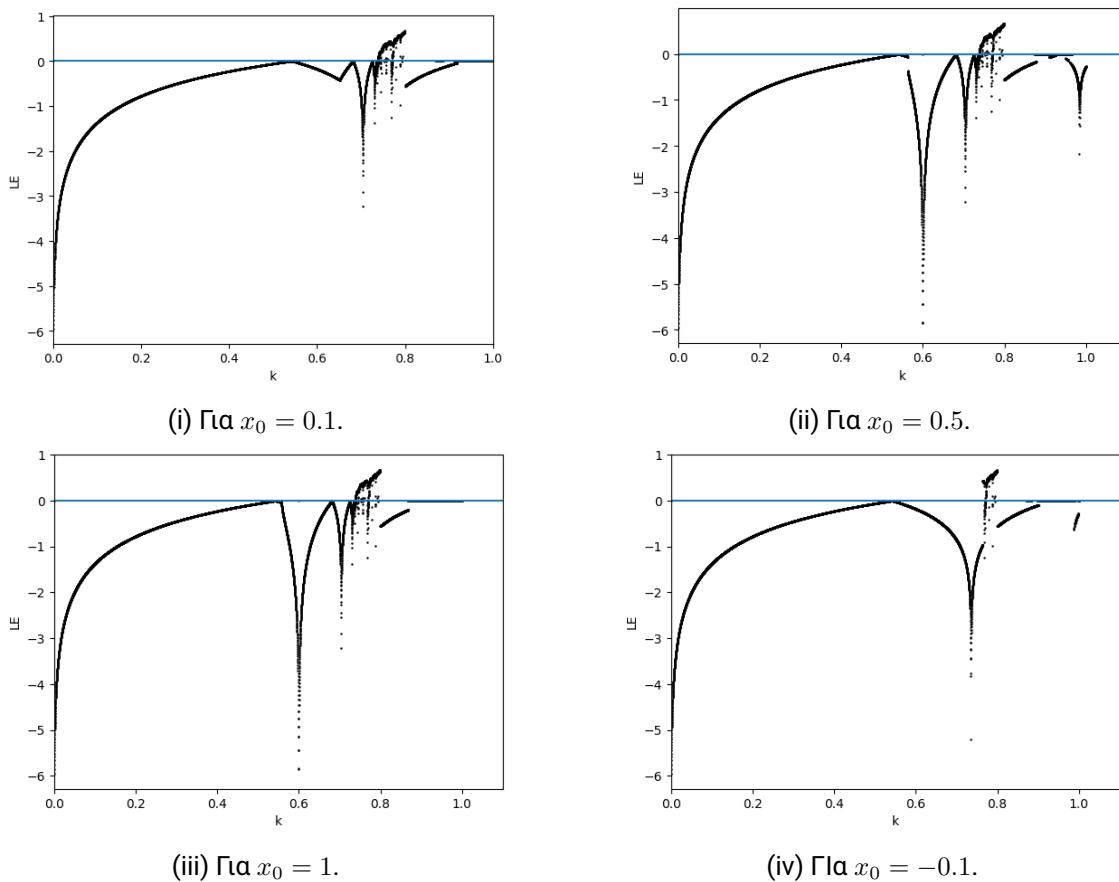


(iii) $x_0 = 1$

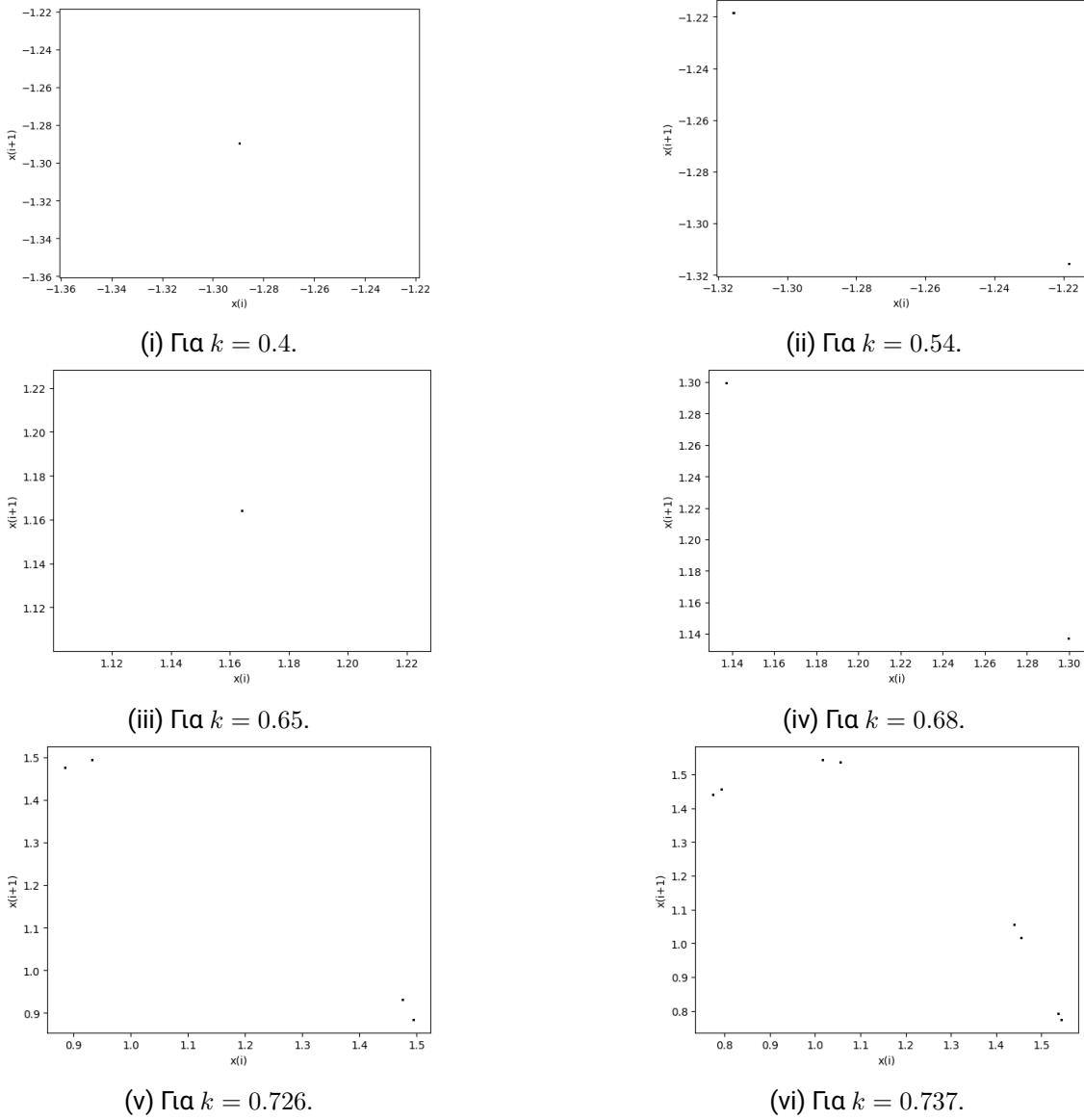


(iv) $x_0 = -0.1$

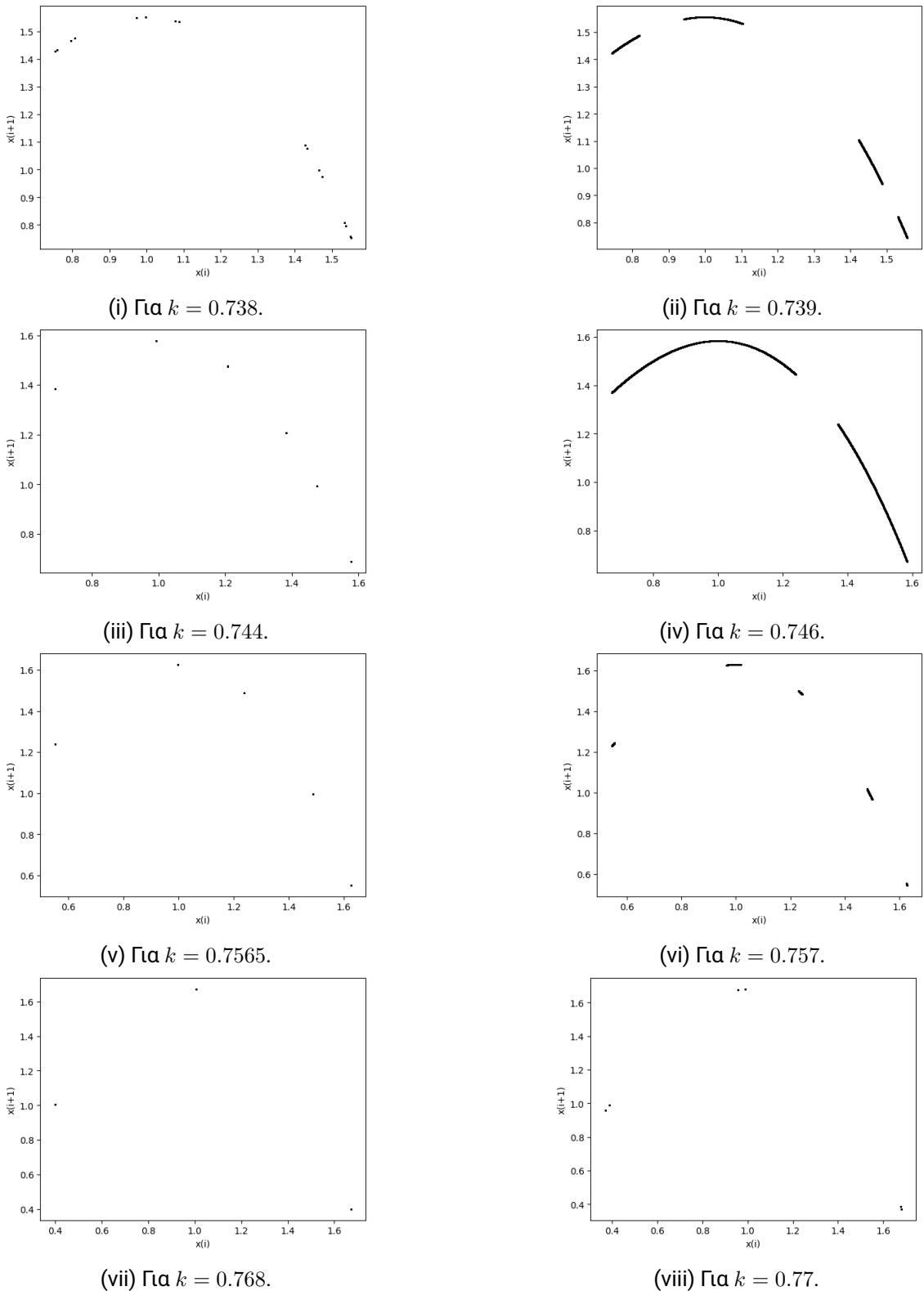
Σχήμα 2.26: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $a = 1, b = 2, q = -1.4$:



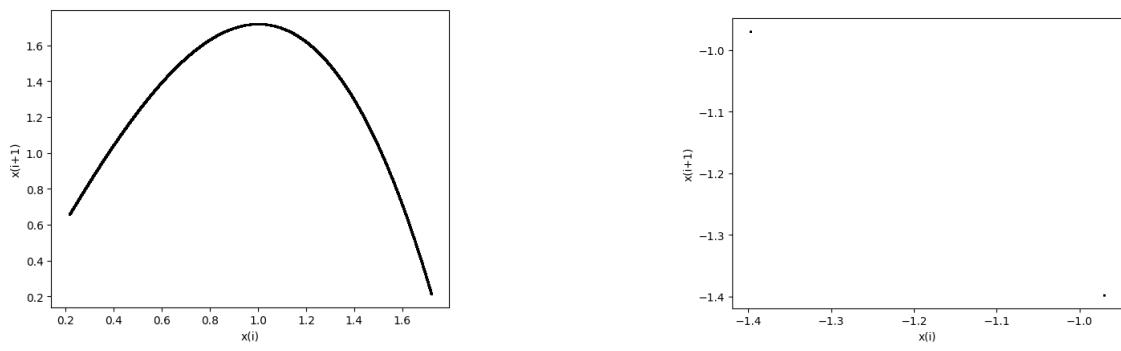
Σχήμα 2.27: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $a = 1, b = 2, q = -1.4$:



Σχήμα 2.28: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



Σχήμα 2.29: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος):



(i) Για $k = 0.78$.

(ii) Για $k = 0.8$.

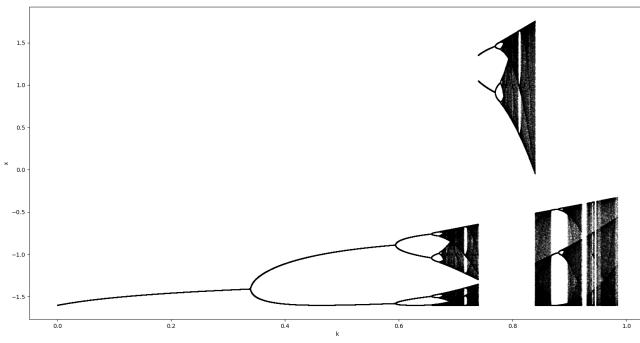
Σχήμα 2.30: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (γ' μέρος):

2.1.8 Για $q = -1.6$

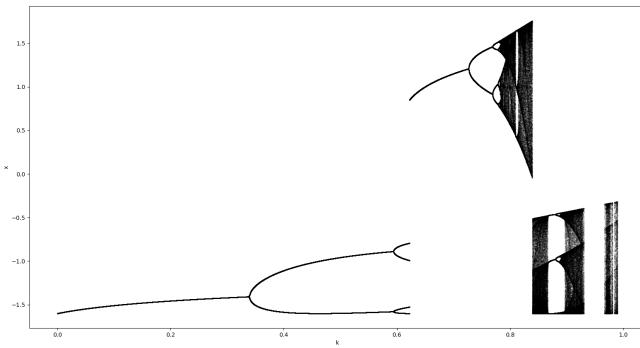
Στα σχήματα 2.32, 2.33 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $a = 1$, $b = 2$, $q = -1.6$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.31i ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσεις 2.31ii ($x_0 = 0.5$), 2.31iii ($x_0 = 1$), 2.31iv ($x_0 = 1.5$), 2.32i ($x_0 = 2$), 2.32ii ($x_0 = -0.1$) πατατηρείται ότι για $q = -1.6$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Αυτό το φαινόμενο επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα Lyapunov 2.33i, 2.33ii, 2.33iii, 2.33iv, 2.34i, 2.34ii. Στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.31i εμφανίζονται κάποιες διακοπές της γραφικής παράστασης στην περιοχή του χάους. Αυτό οφείλεται στο ότι η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αποκλίνει σε πολύ μεγάλες τιμές. Στον πίνακα 2.8 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.31i. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (0.683, 0.7, 0.715, 0.74, 0.788, 0.799, 0.81, 0.94), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.31i στα κενά μεταξύ χάους και περιοδικής συμπεριφοράς, όπως και στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-2. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος. Τέλος, στο σχήμα 2.32i παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.982]. Οι τιμές του πίνακα 2.8 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχουν σε τιμές του διαγράμματος 2.31i όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.8: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.6$, για $x_i = 0.1$

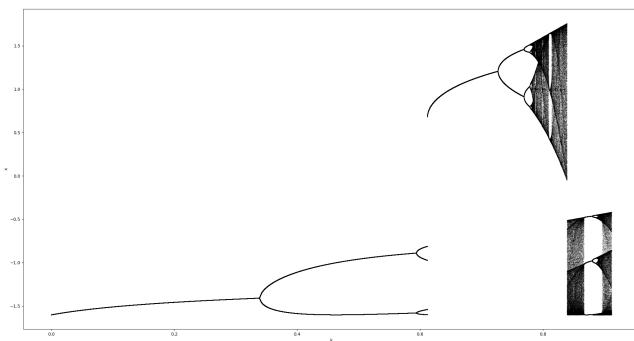
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.31	Περίοδος - 1
0.34	Περίοδος - 2
0.595	Περίοδος - 4
0.66	Περίοδος - 8
0.671	Περίοδος - 12
0.675	Χάος
0.683	Περίοδος - 12
0.685	Χάος
0.7	Περίοδος - 18
0.71	Χάος
0.715	Περίοδος - 6
0.716	Περίοδος - 12
0.717	Χάος
0.74	Περίοδος - 2
0.77	Περίοδος - 4
0.779	Περίοδος - 8
0.782	Χάος
0.788	Περίοδος - 20
0.789	Χάος
0.799	Περίοδος - 5
0.8	Χάος
0.81	Περίοδος - 3
0.812	Περίοδος - 6
0.813	Χάος
0.8393	Κενό
0.867	Περίοδος - 3
0.88	Περίοδος - 6
0.886	Περίοδος - 10
0.889	Χάος
0.92	Κενό
0.94	Περίοδος - 5
0.942	Χάος
0.943	Κενό
0.948	Χάος



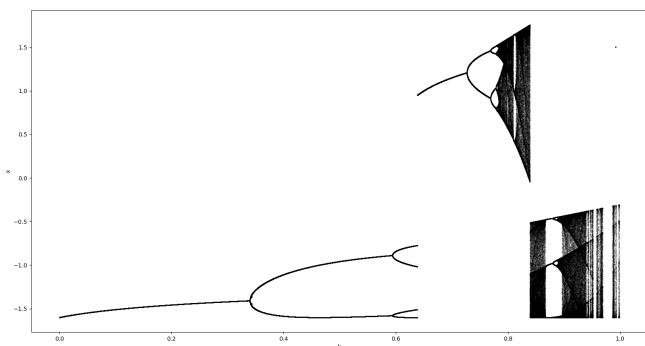
(i) $\Gamma\alpha x_0 = 0.1$.



(ii) $\Gamma\alpha x_0 = 0.5$.

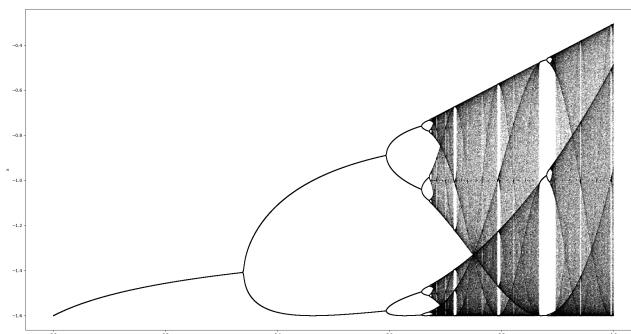


(iii) $\Gamma\alpha x_0 = 1$.

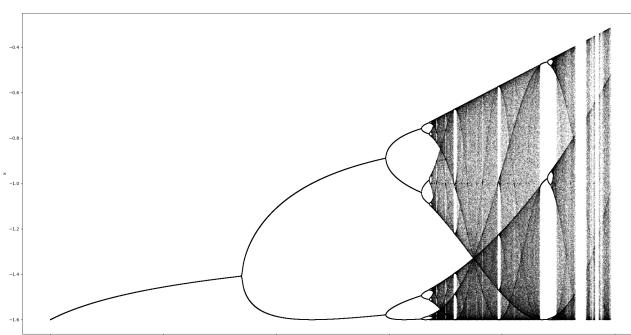


(iv) $\Gamma\alpha x_0 = 1.5$.

Σχήμα 2.31: Διαγράμματα διακλάδωσης(α' μέρος), για $a = 1, b = 2, q = -1.6$:

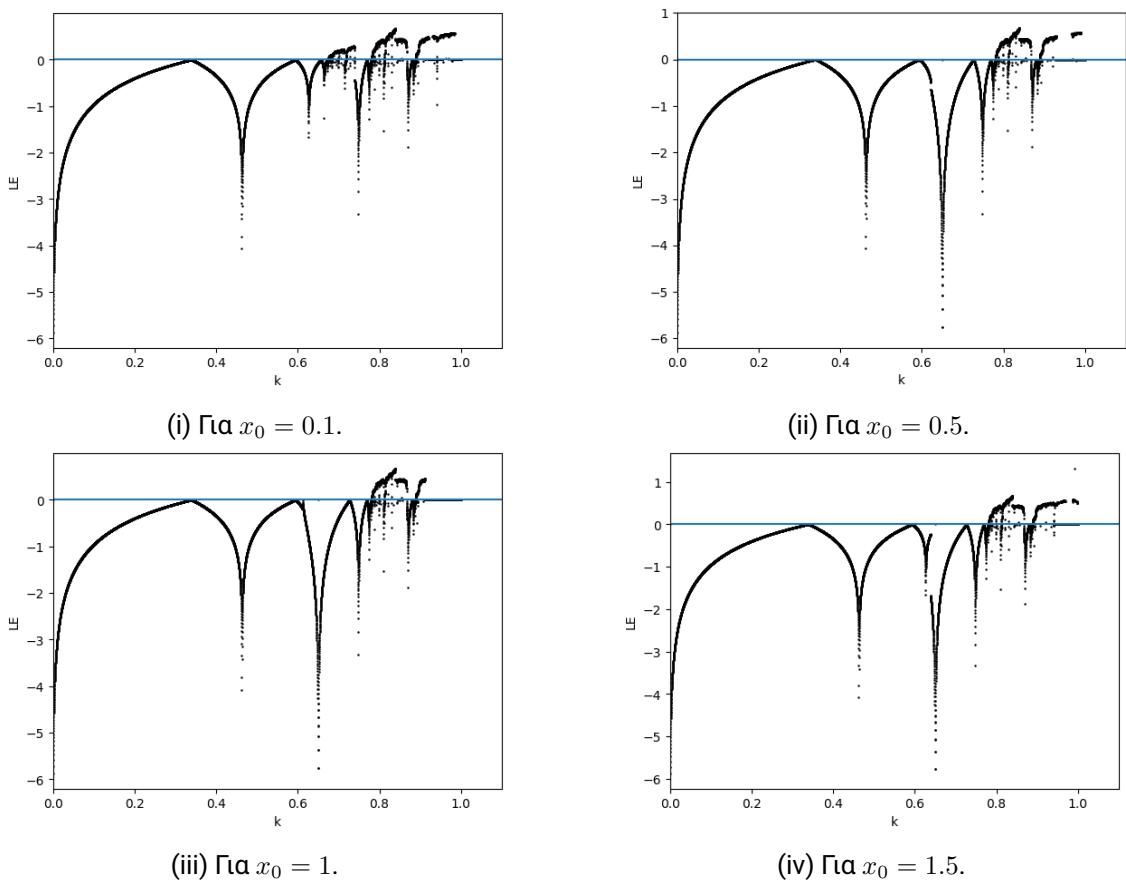


(i) Για $x_0 = 2$.

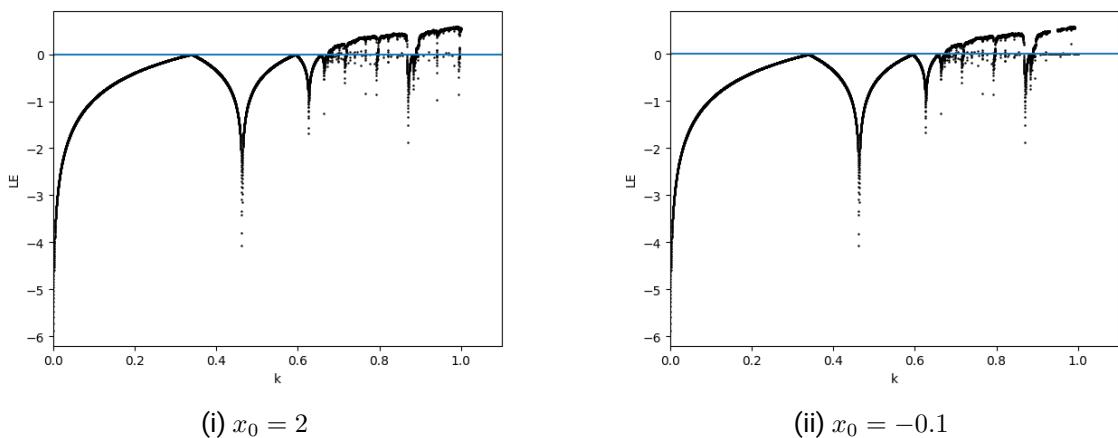


(ii) Για $x_0 = -0.1$.

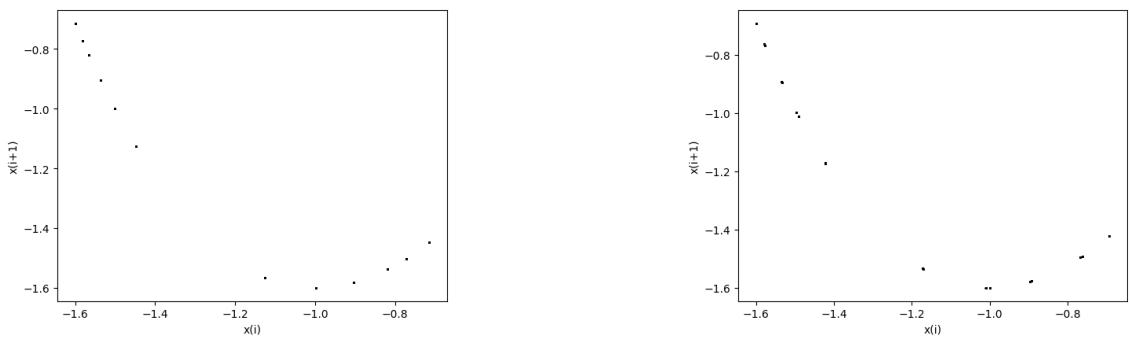
Σχήμα 2.32: Διαγράμματα διακλάδωσης (β' μέρος), για $a = 1, b = 2, q = -1.6$:



Σχήμα 2.33: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k (α' μέρος), για $a = 1, b = 2, q = -1.4$:

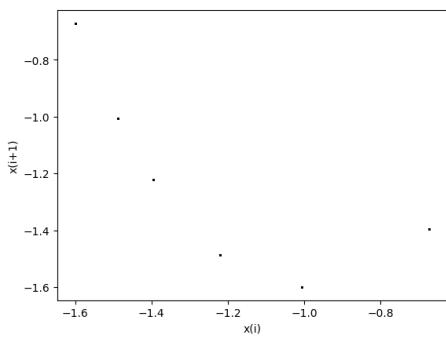


Σχήμα 2.34: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k (β' μέρος), για $a = 1, b = 2, q = -1.4$ και για:

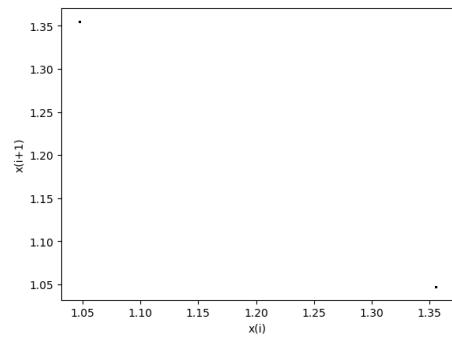


(i) Για $k = 0.683$.

(ii) Για $k = 0.7$.

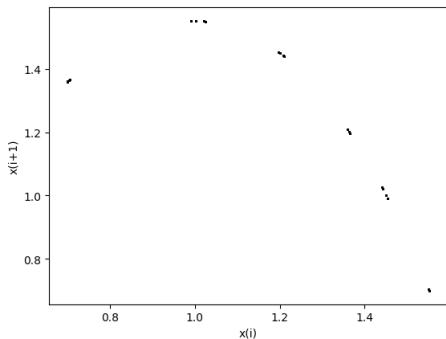


(iii) Για $k = 0.715$.

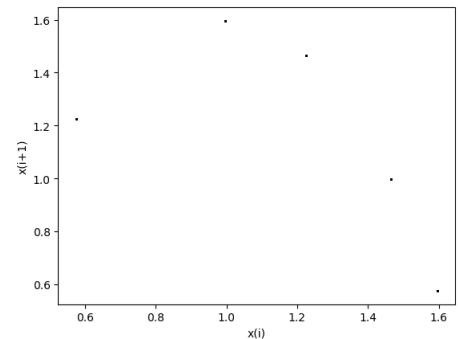


(iv) Για $k = 0.74$.

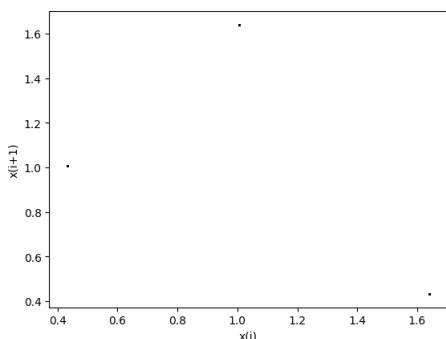
Σχήμα 2.35: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



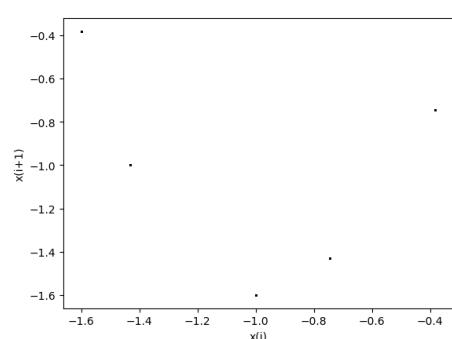
(i) Για $k = 0.788$.



(ii) Για $k = 0.799$.



(iii) Για $k = 0.8$.

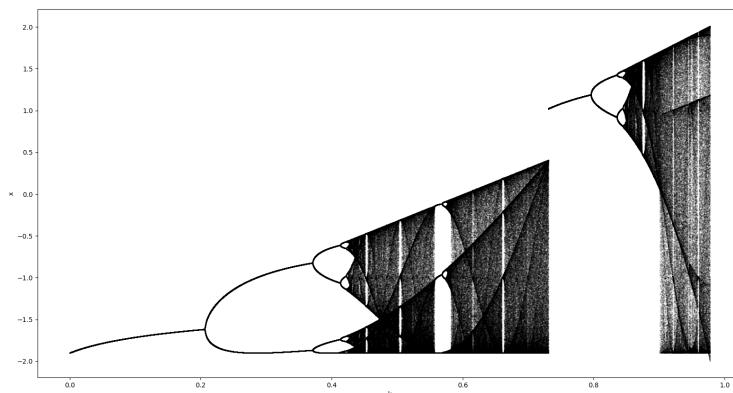


(iv) Για $k = 0.94$.

Σχήμα 2.36: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος):

2.1.9 Για $q = -1.9$

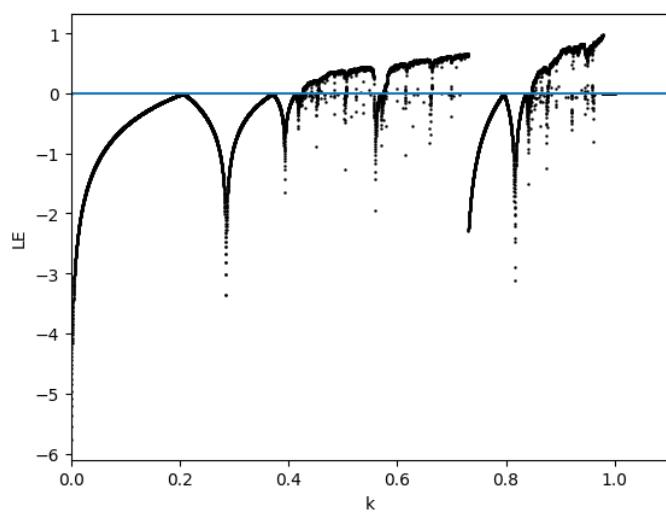
Στο σχήμα 2.37 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.9$. Στον πίνακα 2.9 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιές τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.37. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($0.431, 0.452, 0.484, 0.503, 0.56, 0.615, 0.66, 0.74, 0.875, 0.92$ όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.37, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.9, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος. Τέλος, στο σχήμα 2.38 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.978]$. Οι τιμές του πίνακα 2.9 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχουν σε τιμές του διαγράμματος 2.37 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



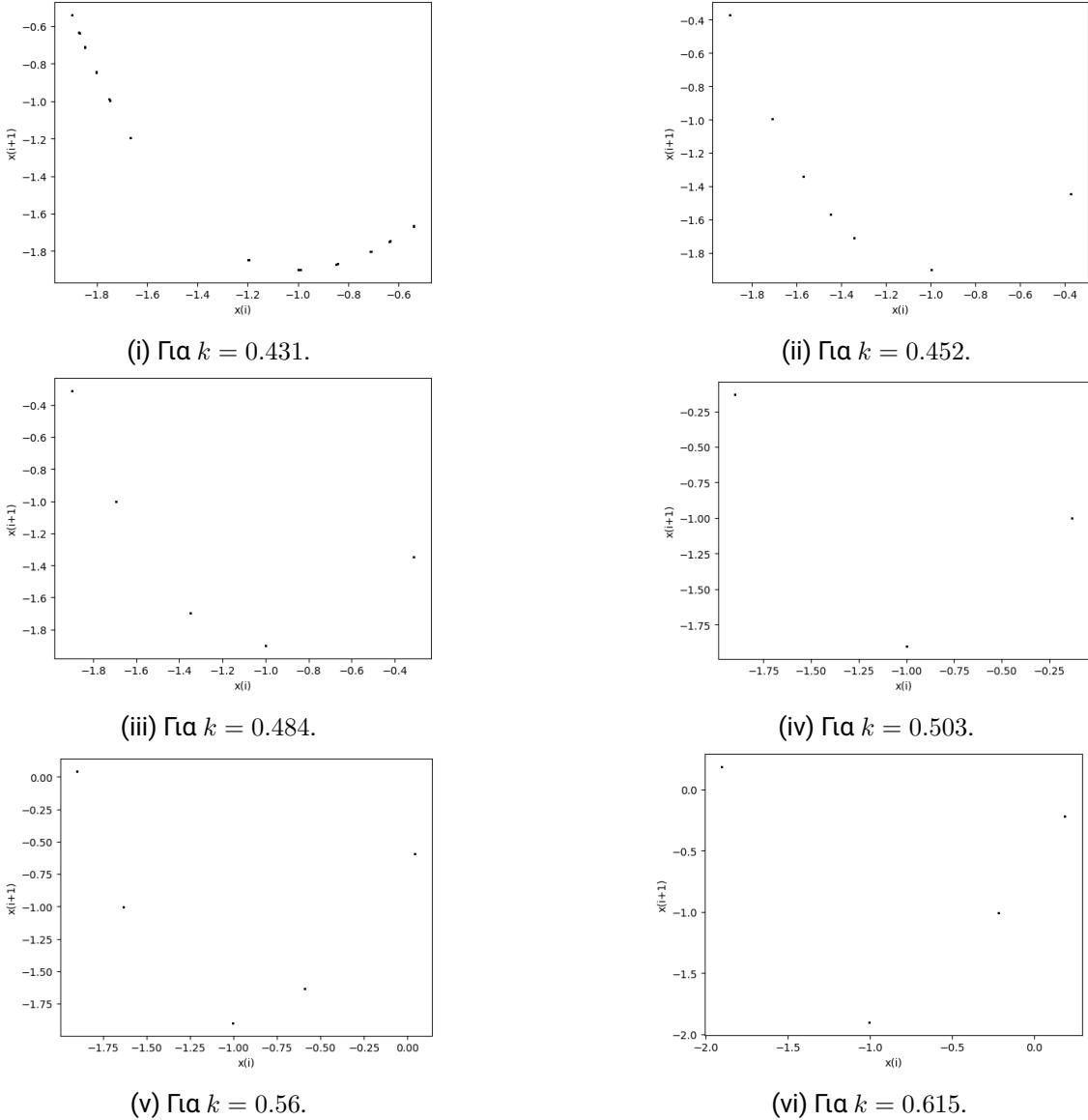
Σχήμα 2.37: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.9$.

Πίνακας 2.9: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.9$, για $x_i = 0.1$

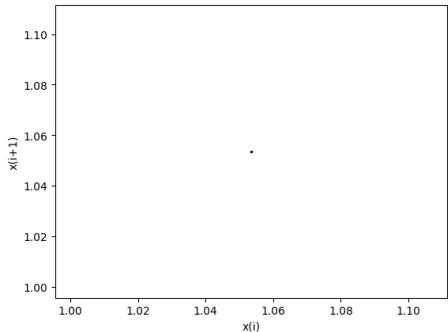
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.21	Περίοδος - 2
0.37	Περίοδος - 4
0.41	Περίοδος - 8
0.422	Περίοδος - 16
0.426	Χάος
0.431	Περίοδος - 17
0.432	Χάος
0.452	Περίοδος - 5
0.454	Περίοδος - 11
0.455	Χάος
0.484	Περίοδος - 7
0.485	Χάος
0.503	Περίοδος - 5
0.504	Περίοδος - 9
0.506	Χάος
0.56	Περίοδος - 3
0.57	Περίοδος - 6
0.574	Περίοδος - 11
0.577	Χάος
0.615	Περίοδος - 5
0.616	Χάος
0.66	Περίοδος - 4
0.661	Περίοδος - 7
0.663	Χάος
0.74	Περίοδος - 1
0.796	Περίοδος - 2
0.83	Περίοδος - 4
0.844	Περίοδος - 8
0.846	Περίοδος - 14
0.848	Χάος
0.875	Περίοδος - 3
0.8752	Περίοδος - 5
0.878	Χάος
0.921	Περίοδος - 5
0.922	Χάος
0.949	Περίοδος - 6
0.951	Χάος
0.9597	Περίοδος - 4
0.961	Χάος



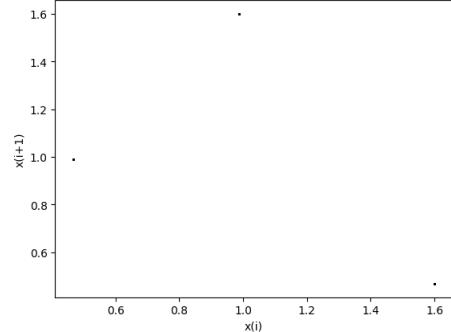
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.9$.



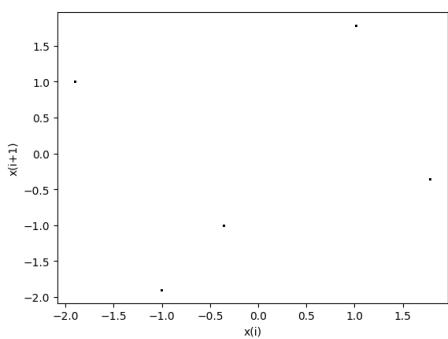
Σχήμα 2.39: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



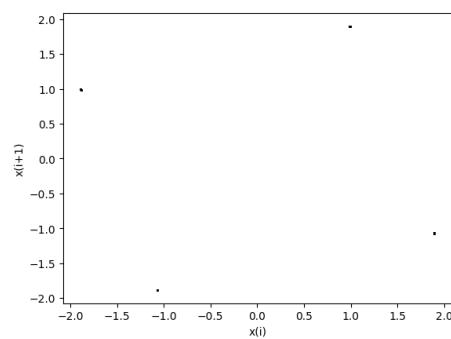
(i) Για $k = 0.66$.



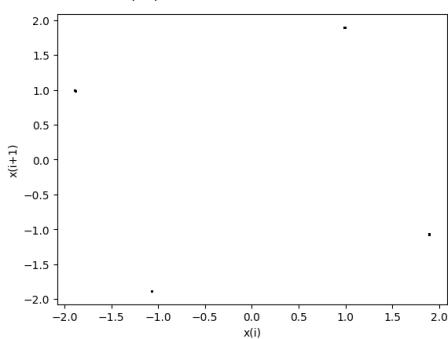
(ii) Για $k = 0.74$.



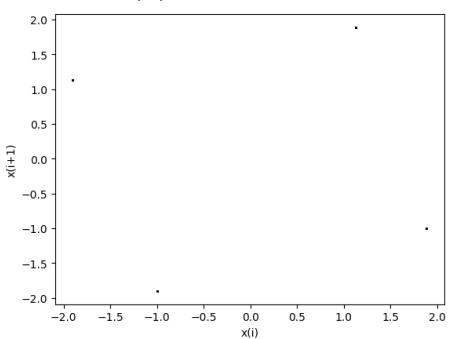
(iii) Για $k = 0.875$.



(iv) Για $k = 0.921$.



(v) Για $k = 0.949$.

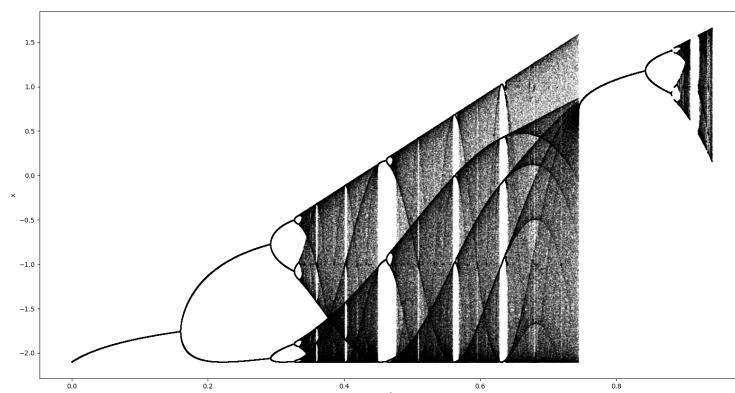


(vi) Για $k = 0.9597$.

Σχήμα 2.40: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος) :

2.1.10 Για $q = -2.1$

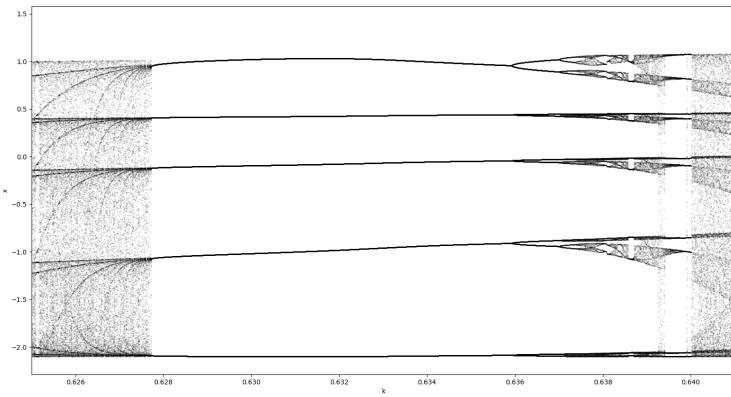
Στο σχήμα 2.41 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.9$. Στον πίνακα 2.10 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.37. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($0.358, 0.4, 0.45, 0.507, 0.558, 0.627, 0.638, 0.6384, 0.745, 0$, όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.41, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.10. Επίσης στο σχήμα 2.43 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης για $0.626 < k < 0.641$. Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στο φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q . Επίσης παρατηρούμε στο εστιασμένο διάγραμμα δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Αυτό επιβεβαιώνεται από το πίνακα 2.10 όπου από το $k = 0.636$ (περίοδος - 10) μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.6371$ (περίοδος - 20), $k = 0.6374$ (περίοδος - 40), εμφανίζεται χαοτική φυσαλίδα για $k = 0.6377$ (χάος). Μέτα το σύστημα εξέρχεται από το χάος για $k = 0.638$ (περίοδος - 40) με αντίστροφο διπλασιασμό. Ενώ για $k = 0.6383$ (χάος) διακόπτεται ο αντίτροφος διπλασιασμός και το σύστημα εισέρχεται σε χάος. Για $k = 0.6384$ (περίοδος - 30) εξέρχεται από χάος για να ξανα εμφανίσει μετα από δύο $k : k = 6385$ (περίοδος - 40), $k = 6.386$ (περίοδος - 10) χάος για $k = 0.639$. Για αυτές τις τιμές του k παράχθηκαν τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος. Τέλος, στο σχήμα 2.42 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.94]$. Οι τιμές του πίνακα 2.10 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.42 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



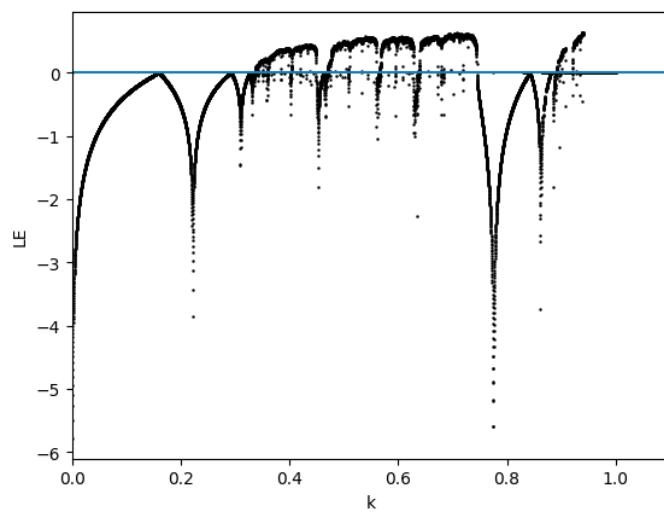
Σχήμα 2.41: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$.

Πίνακας 2.10: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -2.1$

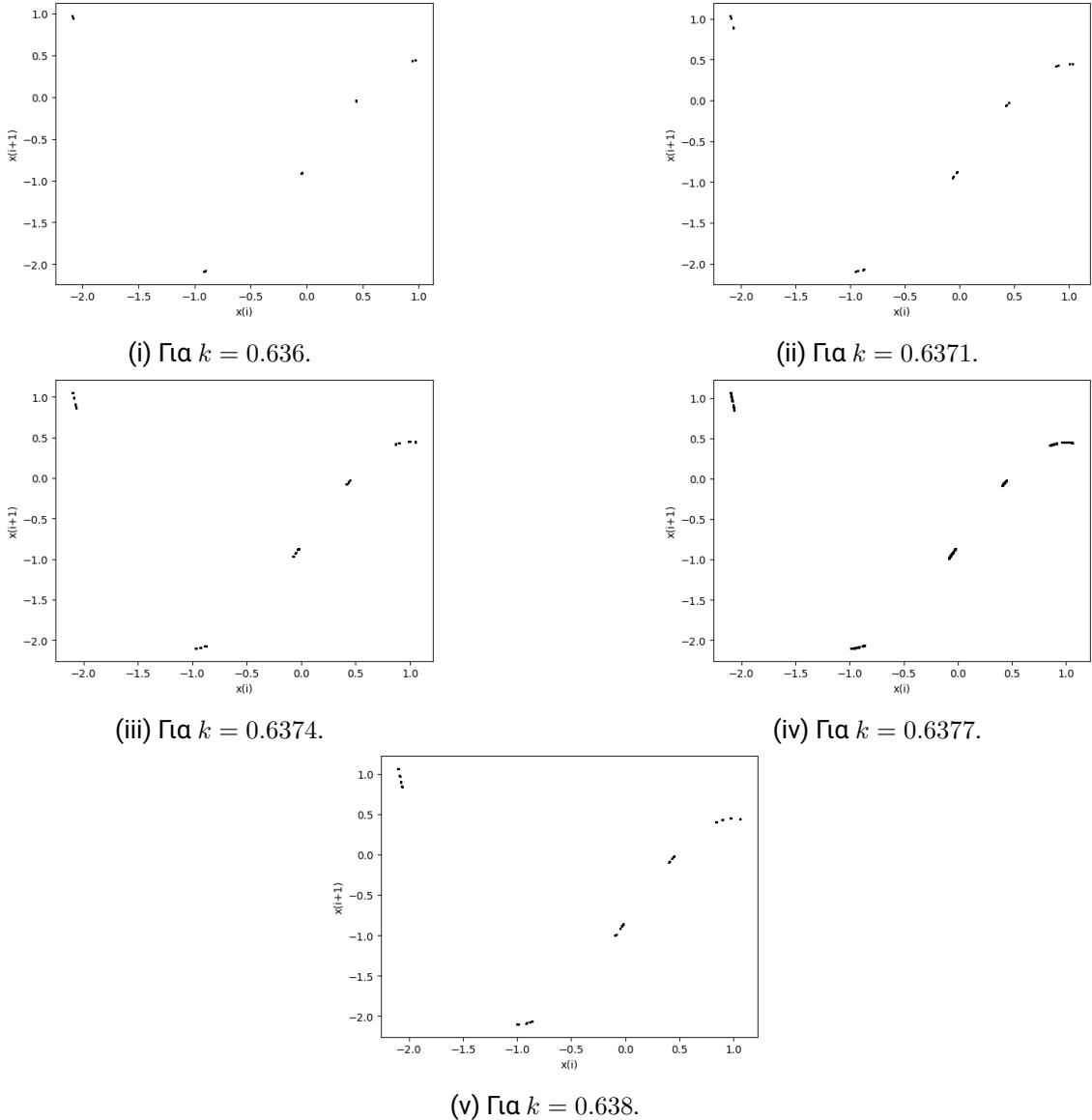
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.16	Περίοδος - 2
0.29	Περίοδος - 4
0.32	Περίοδος - 8
0.334	Περίοδος - 16
0.337	Χάος
0.358	Περίοδος - 6
0.36	Χάος
0.4	Περίοδος - 5
0.402	Περίοδος - 10
0.403	Χάος
0.45	Περίοδος - 3
0.46	Περίοδος - 6
0.468	Περίοδος - 12
0.47	Χάος
0.507	Περίοδος - 5
0.508	Περίοδος - 10
0.51	Χάος
0.558	Περίοδος - 4
0.56	Περίοδος - 8
0.568	Χάος
0.627	Περίοδος - 5
0.636	Περίοδος - 10
0.6371	Περίοδος - 20
0.6374	Περίοδος - 40
0.6377	Χάος
0.638	Περίοδος - 40
0.6381	Περίοδος - 20
0.6383	Χάος
0.6384	Περίοδος - 30
0.6835	Περίοδος - 40
0.6836	Περίοδος - 10
0.64	Χάος
0.745	Περίοδος - 1
0.8426	Περίοδος - 2
0.88	Περίοδος - 4
0.889	Περίοδος - 8
0.89	Χάος



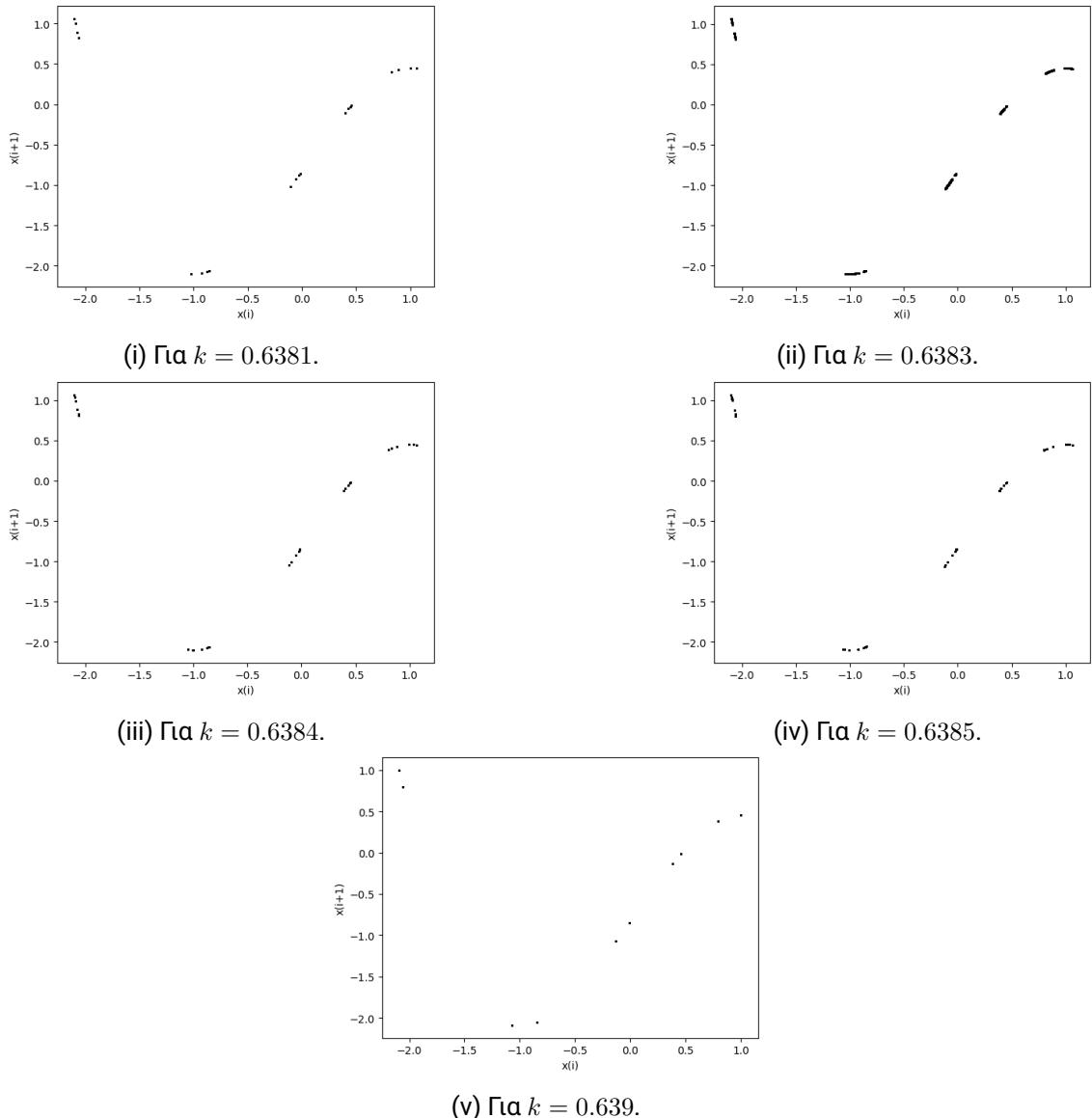
Σχήμα 2.42: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$.



Σχήμα 2.43: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -2.1$.



Σχήμα 2.44: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος):



Σχήμα 2.45: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος):

Κεφάλαιο 3

Appendix title