



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Εργαστήριο Μη-Γραμμικών Κυκλωμάτων, Συστημάτων και Πολυπλοκότητας

Τίτλος διπλωματικής

Πτυχιακή Εργασία
του
Βασίλειου Ασημακόπουλου

Επιβλέπων: Χρήστος Βόλος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

5 Ιουλίου 2022

Περίληψη

Άδειο

Abstract

Empty

Ευχαριστίες

Άδειο

Περιεχόμενα

1 Θεωρητικό Υπόβαθρο	1
2 Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη	2
2.1 Για $q = -0.1$	3
2.2 Για $q = -0.3$	10
2.3 Για $q = -0.5$	14
2.4 Για $q = -0.7$	18
2.5 Για $q = -0.9$	22
2.6 Για $q = -1.2$	26
2.7 Για $q = -1.4$	30
2.8 Για $q = -1.6$	39
2.9 Για $q = -1.9$	47
2.10 Για $q = -2.1$	52
2.11 Συμπεράσματα	58
3 Παραλλαγή του sine-sinh Χάρτη	59
3.1 Για $q = -0.3$	60
3.2 Για $q = -0.5$	65
3.3 Συμπεράσματα	73
4 Παραλλαγή του Chebysev Χάρτη	74
4.1 Για $q = 0.8$	75
4.2 Για $q = 0.9$	81
4.3 Συμπεράσματα	85
5 Μελέτη ρομποτικού συστήματος με λογιστικό χάρτη	86
5.1 Μαθηματική Περιγραφή	86
5.2 Συμπεριφορά για Μεταβλητά q, k	88
5.2.1 Για $q = -1.6, q = -1.9$	88
5.2.2 Για $q = -1.4, q = -1.6$	91
5.2.3 Για $q = -1.9, q = -2.1$	93
5.2.4 Για $k = 0.68, k = 0.69, k = 0.815$	95
5.2.5 Για $k = 0.74, k = 0.751, k = 0.76$	97
5.3 Συμπεριφορά για Μεταβλητή Αρχική Θέση	99
5.3.1 Για $q = -2.1$	99
5.3.2 Για $q = -1.9$	102
5.4 Συμπεριφορά για Μεταβαλητές Αρχικές Συνθήκες	105
5.4.1 Για $q = -1.4$	105
5.4.2 Για $q = -1.6$	108
5.5 Συμπεριφορά για Μεταβαλητό h	109
5.5.1 Για $q = -1.4$	109
5.5.2 Για $q = -1.9$	110
5.5.3 Για $q = -2.1$	111

5.6 Συμπεριφορά για Μεταβαλλόμενο Αριθμό Βημάτων	113
5.6.1 Για $q = -1.6$	113
5.6.2 Για $q = -1.9$	116
5.7 Συμπεράσματα	118
A$\ddot{\wedge}$ Appendix title	119

Κατάλογος σχημάτων

2.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.1$	4
2.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.1$	5
2.3 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του q (α' μέρος).	6
2.4 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του q (β' μέρος).	7
2.5 Διαγράμματα της τιμής x_i με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	8
2.6 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	9
2.7 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$	11
2.8 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$	11
2.9 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	12
2.10 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	13
2.11 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.5$	15
2.12 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.5$	15
2.13 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	16
2.14 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	17
2.15 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$	19
2.16 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$	19
2.17 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	20
2.18 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	21
2.19 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$	23
2.20 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$	23
2.21 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	24
2.22 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	25
2.23 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.2$	27
2.24 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.2$	27
2.25 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	28
2.26 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	29
2.27 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (α' μέρος).	31
2.28 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (β' μέρος).	32
2.29 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).	33
2.30 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).	34
2.31 Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0	35
2.32 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	36
2.33 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	37
2.34 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (γ' μέρος).	38
2.35 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.6$ (α' μέρος).	41

2.36 Διαγράμματα διακλάδωσης , για $q = -1.6$ (β' μέρος).	42
2.37 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).	43
2.38 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).	44
2.39 Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0	45
2.40 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	45
2.41 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	46
2.42 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.9$	47
2.43 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.9$	48
2.44 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	50
2.45 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	51
2.46 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$	53
2.47 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$	53
2.48 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -2.1$	55
2.49 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	56
2.50 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	57
 3.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$	60
3.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$	62
3.3 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	63
3.4 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	64
3.5 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $b = 2$, $q = -0.5$	67
3.6 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $b = 2$, $q = -0.5$	68
3.7 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0	69
3.8 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0	70
3.9 Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0	71
3.10 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	72
 4.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.8$	75
4.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.8$	76
4.3 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του k	78
4.4 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	79
4.5 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	80
4.6 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.9$	81
4.7 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.9$	82
4.8 Διαγράμματα διακλάδωσης για $2.55 < k < 2.8$	82
4.9 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).	84
4.10 Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).	84
 5.1 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.9$ και $q = -1.6$	88
5.2 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.9$ και $q = -1.9$	89
5.3 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.9$, $q = -1.6$ (μπλέ χρώμα), $q = -1.9$ (κόκκινο χρώμα).	90
5.4 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.79$ και $q = -1.4$	91
5.5 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.79$ και $q = -1.6$	92

5.6 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.79$, $q = -1.4$ (μαύρο χρώμα), $q = -1.6$ (κόκκινο χρώμα).	92
5.7 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$ και $q = -1.9$	93
5.8 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$ και $q = -2.1$	94
5.9 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$, $q = -1.9$ (μαύρο χρώμα), $q = -2.1$ (κόκκινο χρώμα).	94
5.10 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.68$	95
5.11 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.69$	96
5.12 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.815$	96
5.13 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.74$	97
5.14 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.751$	98
5.15 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.76$	98
5.16 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$ και : 100	
5.17 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -2.1$, $k = 0.68$, ($X, Y = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), ($X, Y = (20, 20)$ (κόκκινο χρώμα), ($X, Y = (5, 20)$ (μπλε χρώμα), ($X, Y = (34, 20)$ (κίτρινο χρώμα).	101
5.18 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$ και : 103	
5.19 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$, ($X, Y = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), ($X, Y = (5, 15)$ (κόκκινο χρώμα), ($X, Y = (8, 30)$ (μπλε χρώμα), ($X, Y = (36, 6)$ (κίτρινο χρώμα).	104
5.20 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.75$ και : 106	
5.21 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.75$, ($x, y = (-0.1, 0.1)$ (μαύρο χρώμα), ($x, y = (0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα), ($x, y =$ (0.1, 0.5) (μπλε χρώμα), ($x, y = (0.5, 1)$ (ροζ(magenta) χρώμα).	107
5.22 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.75$, ($x, y = (0.1, 0.5)$ (μαύρο χρώμα), ($x, y = (-0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα), ($x, y =$ (-0.1, 2) (μπλέ χρώμα), ($x, y = (0.5, 1.5)$ (ροζ(magenta) χρώμα) και ($x, y =$ (0.8, 1.2) (κίτρινο χρώμα).	108
5.23 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.79$ και : 109	
5.24 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.51$ και : 110	
5.25 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -2.1$, $k = 0.34$ και : 112	
5.26 Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βη- μάτων για $q = -1.6$ και $k = 0.79$	114
5.27 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$, $k = 0.79$:	115
5.28 Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βη- μάτων για $q = -1.9$ και $k = 0.68$	116
5.29 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$:	117

Κατάλογος πινάκων

2.1	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.1$	4
2.2	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$	10
2.3	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$	14
2.4	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.7$	18
2.5	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.9$	22
2.6	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.2$	26
2.7	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $a = 1, b = 2, q = -1.4$ και $x_i = 0.1$	30
2.8	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.6$, για $x_i = 0.1$	40
2.9	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.9$, για $x_i = 0.1$	49
2.10	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -2.1$	54
3.1	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$	61
3.2	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$	66
4.1	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.8$	77
4.2	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.9$	83
5.1	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για $q = -1.6, k = 0.79$	113
5.2	Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για $q = -1.9, k = 0.68$	116

Κεφάλαιο 1

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Κεφάλαιο 2

Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διακριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού Λογιστικού Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μποροεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} .

Ο Λογιστικός Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i = k * (1 + x_{i-1})^2 * (2 - x_{i-1}) \quad (2.1)$$

Στην εξίσωση (2.1) προστέθηκε ένας σταθερός όρος q . Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη,

$$x_i = k * (1 + x_{i-1})^2 * (2 - x_{i-1}) + q \quad (2.2)$$

όπου k, q : παράμετροι.

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του $x_0 = 0.1$ παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβαλλόταν στο διάστημα $[-0.1, -2.1]$. Στο διάστημα $[-0.1, -0.9]$ και στο $[-1.2, -1.6]$ μεταβαλλόταν με βήμα 0.2, ενώ στο $[-0.9, -1.2]$ και στο $[-1.6, -2.1]$ η παράμετρος μεταβαλλόταν q με βήμα 0.3. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

2.1 Για $q = -0.1$

Στο Σχ. 2.1 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (2.2), ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.1$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.4$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.47$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.476$ (περίοδος - 8), ενώ ο τελευταίος διπλασιασμός εμφανίζεται λίγο πιο μετά τον τρίτο για $k = 0.478$ (περίοδος - 16). Στην συνέχεια για $k > 0.479$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.51$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.52$ (περίοδος - 6) και $k = 0.522$ (περίοδος - 11) για $k > 0.524$. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για $k = 0.555$ (περίοδος - 4). Για $k = 0.559$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 8) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 0.568$, οπότε εδώ παρατηρούμε το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας δηλαδή έχουμε μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για $k = 0.568$.

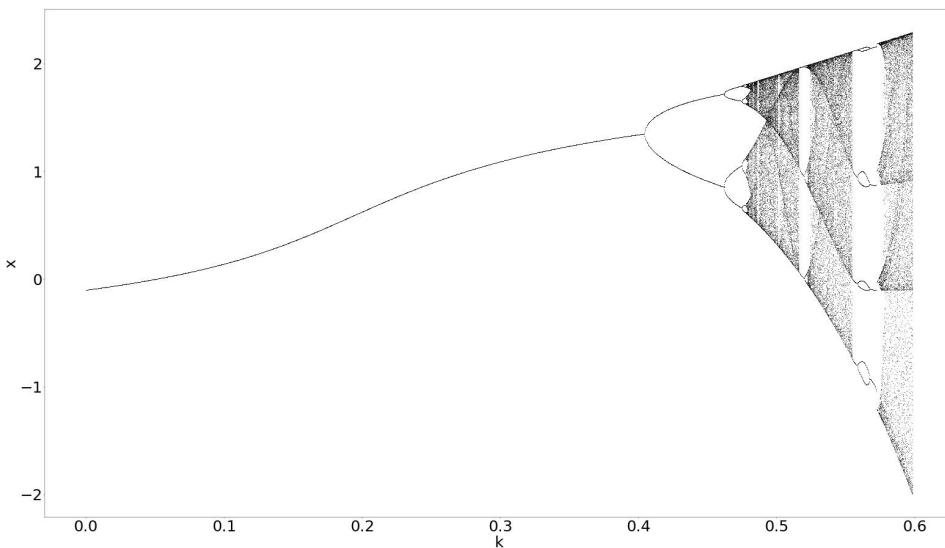
Λόγω αυτού του φαινομένου το οποίο συνεχίζει μέχρι το $q = -0.2$, μελετήθηκε περαιτέρω το σύστημα από $-0.1 < q < -0.2$. Τέλος για $k = 0.5735$ έχουμε έναν τελευταίο διπλασιασμό (περίοδος - 6) πριν ξανά εισέλθει το σύστημα για $k > 0.575$ στο χάος. Στα Σχ. 2.3, 2.4 παρατίθενται 4 διαγράμματα διακλάδωσης (2.3i, 2.3ii, 2.4i, 2.4ii) για $0.54 < k < 0.6$. Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στην αντιμονοτονικότητα που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q . Επίσης παρατηρούμε στα διαγράμματα 2.3ii, 2.4i, 2.4ii τη δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον στο διάγραμμα 2.4ii το φαινόμενο εμφανίζεται δυο φορές για $0.560 < k < 0.568$ και $0.571 < k < 0.573$.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0.3, 0.6]$. Στο διάστημα τιμών $k = 0.522$, στο $0.51 < k < 0.522$, και στο $0.554 < k < 0.574$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

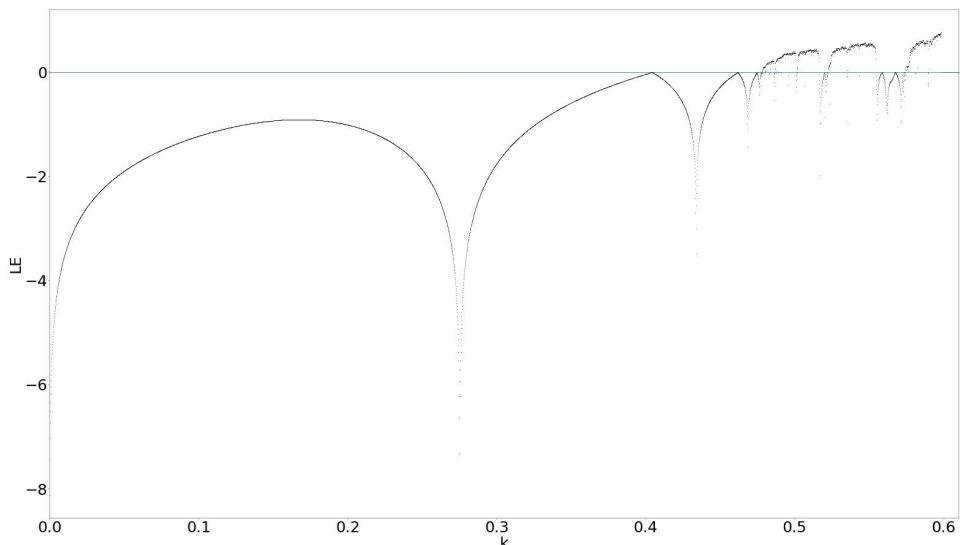
Τέλος, στον πίνακα 2.1 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.1$.

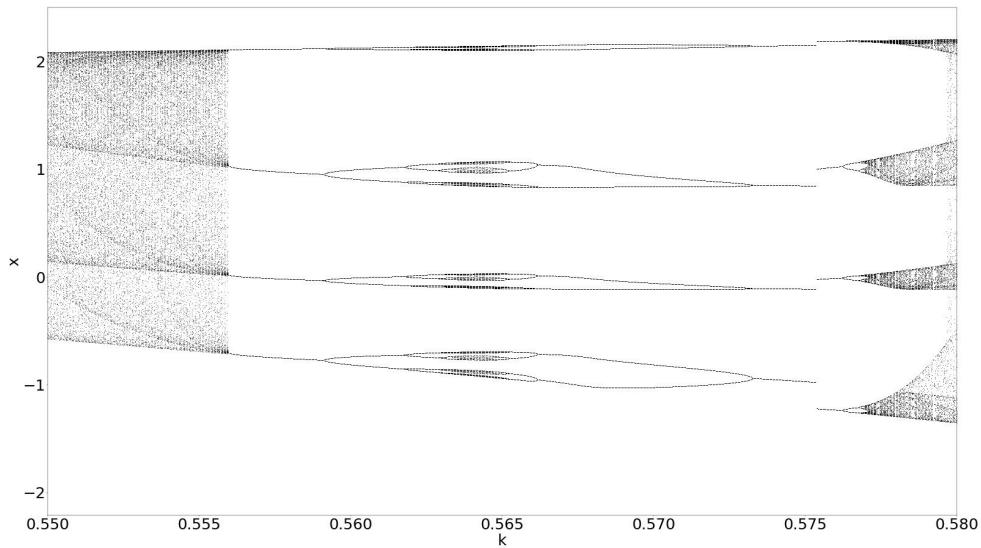
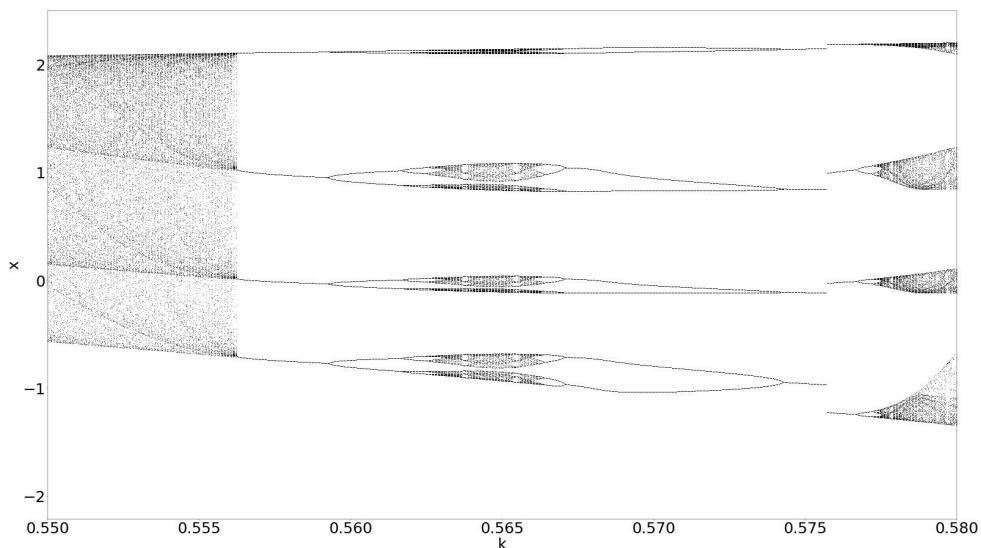
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.5i
0.41	Περίοδος - 2	2.5ii
0.476	Περίοδος - 8	2.5iii
0.4778	Περίοδος - 16	2.5iv
0.479	Χάος	2.5v
0.517	Περίοδος - 3	2.5vi
0.521	Περίοδος - 6	2.5viii
0.522	Περίοδος - 11	2.6i
0.524	Χάος	2.6ii
0.555	Περίοδος - 4	2.6iii
0.559	Περίοδος - 8	2.6iv
0.568	Περίοδος - 4	2.6v
0.5735	Περίοδος - 6	2.6vi
0.575	Χάος	2.6vii



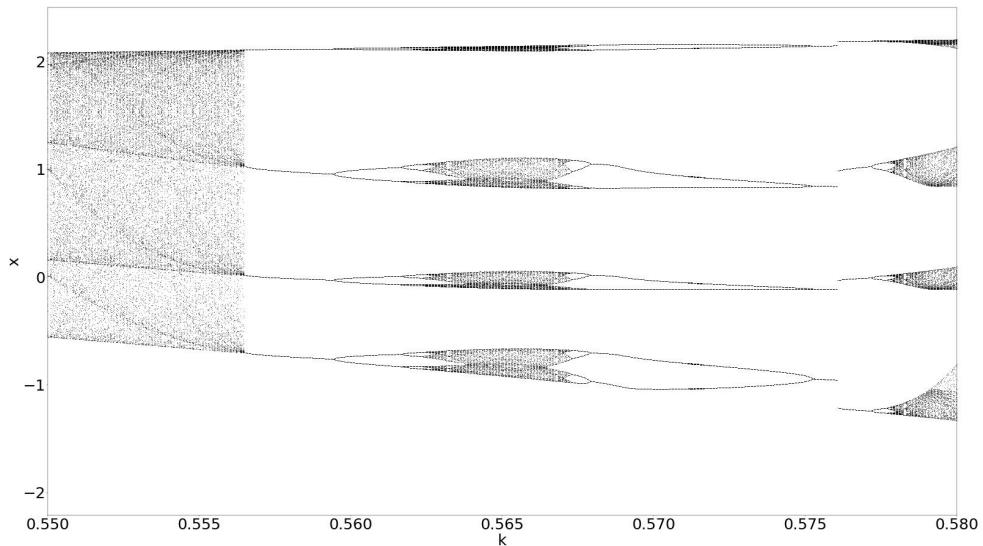
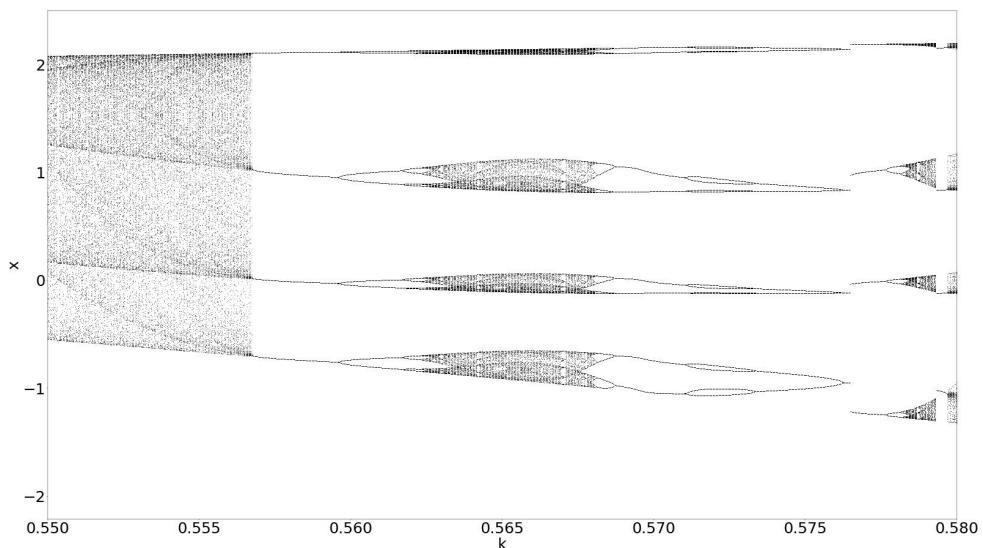
Σχήμα 2.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.1$.



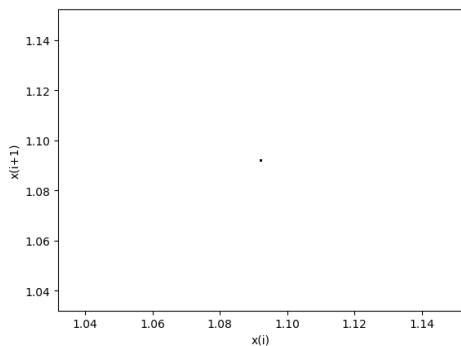
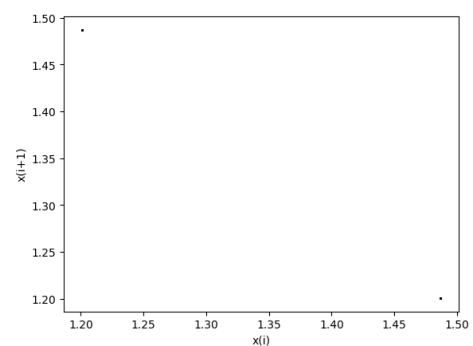
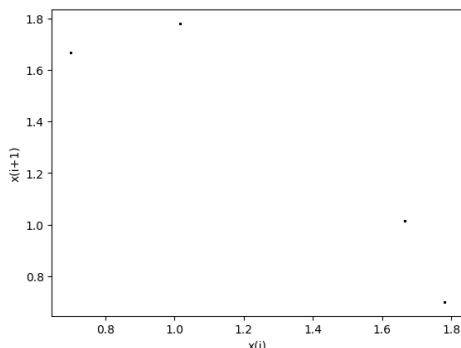
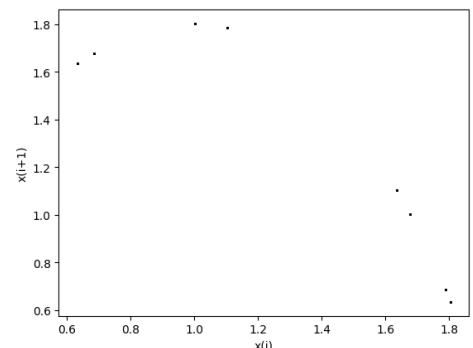
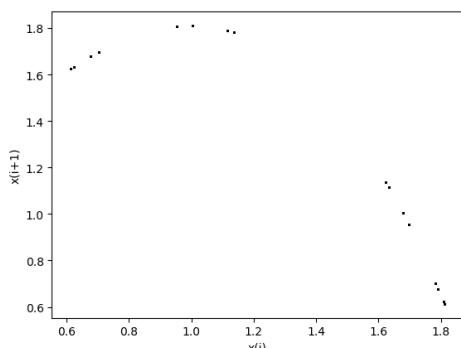
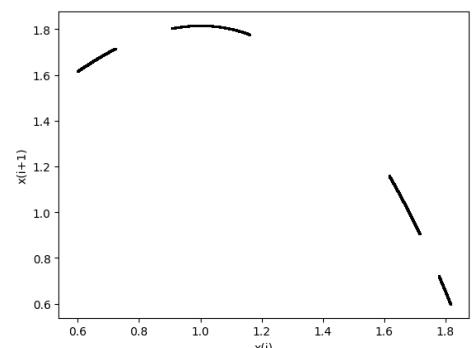
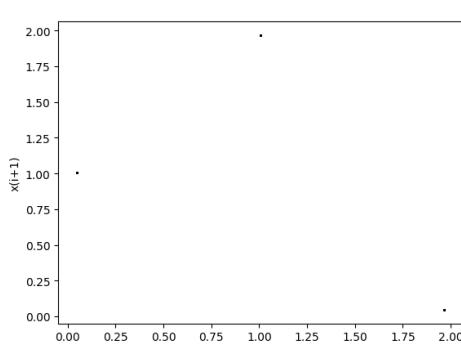
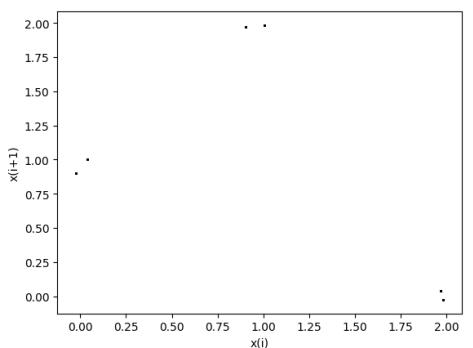
Σχήμα 2.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.1$.

(i) Για $q = -0.112$ (ii) Για $q = -0.114$

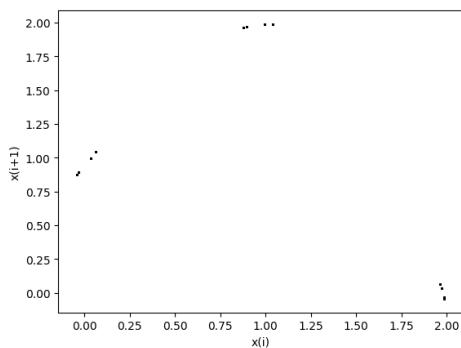
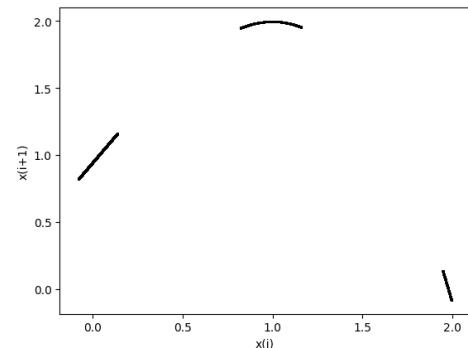
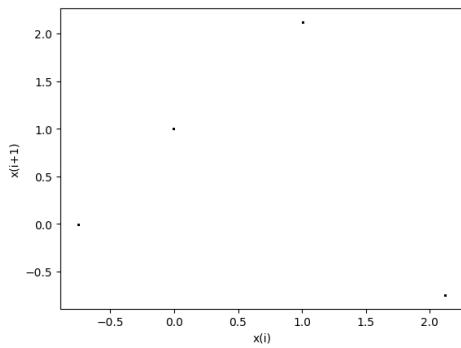
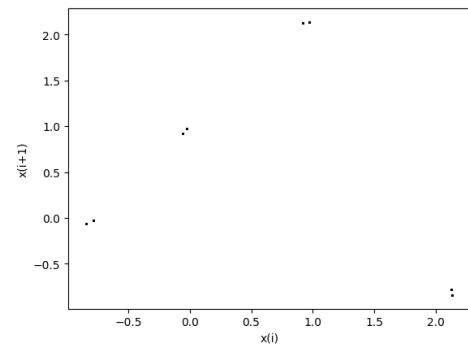
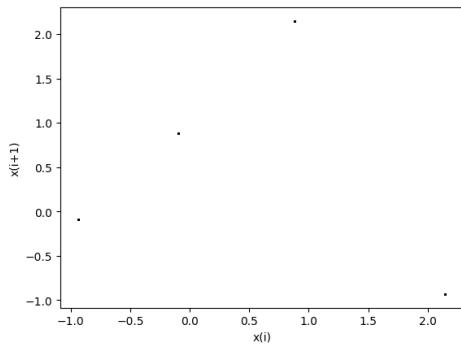
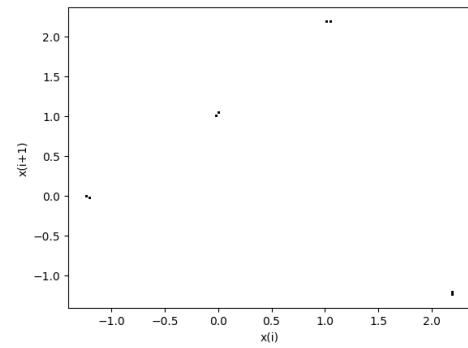
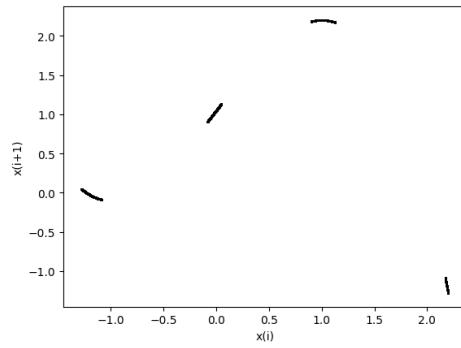
Σχήμα 2.3: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του q (α' μέρος).

(i) Για $q = -0.116$ (ii) Για $q = -0.118$

Σχήμα 2.4: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του q (β' μέρος).

(i) Για $k = 0.3$ (ii) Για $k = 0.41$ (iii) Για $k = 0.047$ (iv) Για $k = 0.476$ (v) Για $k = 0.4778$ (vi) Για $k = 0.479$ (vii) Για $k = 0.517$ (viii) Για $k = 0.521$

Σχήμα 2.5: Διαγράμματα της τιμής x_i με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(i) Για $k = 0.522$ (ii) Για $k = 0.524$ (iii) Για $k = 0.555$ (iv) Για $k = 0.559$ (v) Για $k = 0.568$ (vi) Για $k = 0.5735$ (vii) Για $k = 0.575$

Σχήμα 2.6: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.2 Για $q = -0.3$

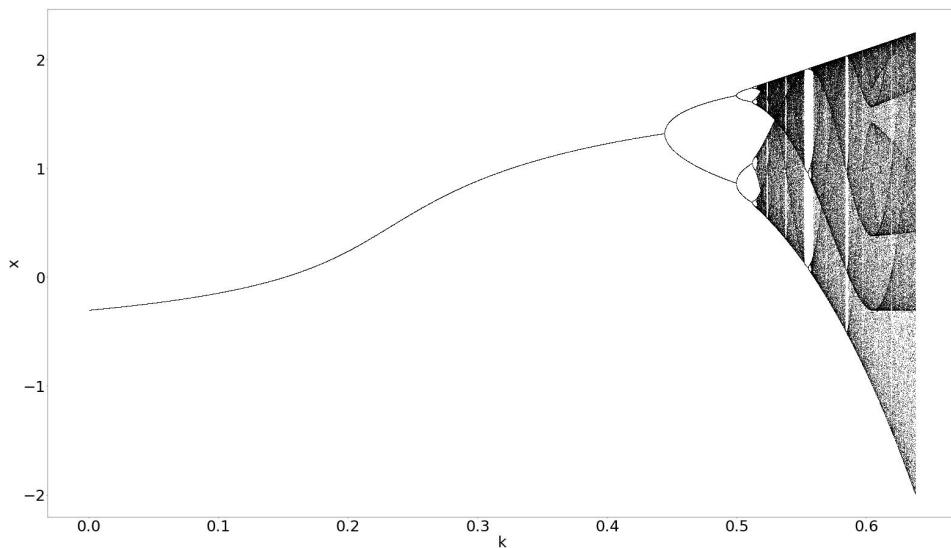
Στο Σχ. 2.7 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (2.2), ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.3$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.44$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.5$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.511$ (περίοδος - 8). Στην συνέχεια για $k > 0.5165$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.551$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.555$ (περίοδος - 6) και $k = 0.556$ (περίοδος - 12) για $k > 0.5573$. Επομένως, εμφανίζει πάλι τη συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για $k = 0.583$ (περίοδος - 4) και μετά από ένα διπλασιασμό για $k = 0.5846$ (περίοδος - 7) εισέρχεται για τελευταία φορά στο χάος για $k = 0.5851$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.8 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.636]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.511$, στο $0.551 < k < 0.556$, και στο $0.583 < k < 0.5846$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

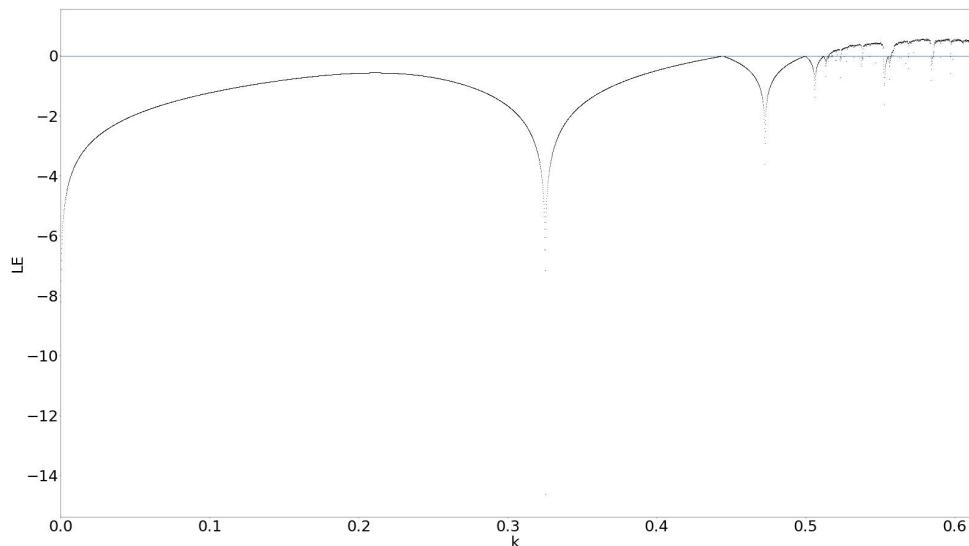
Τέλος, στον πίνακα 2.2 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$.

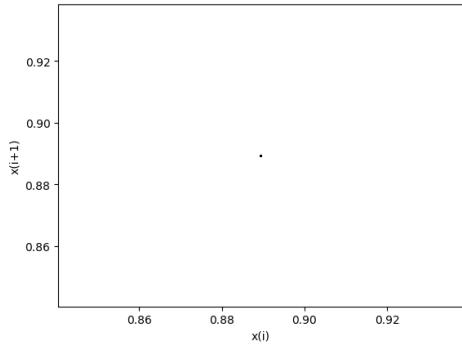
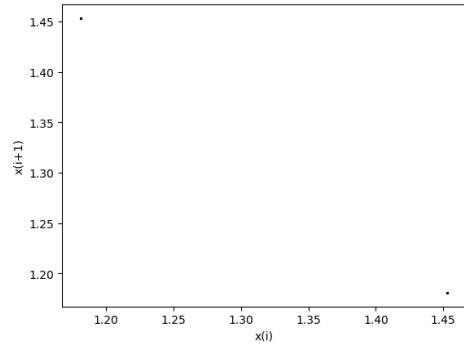
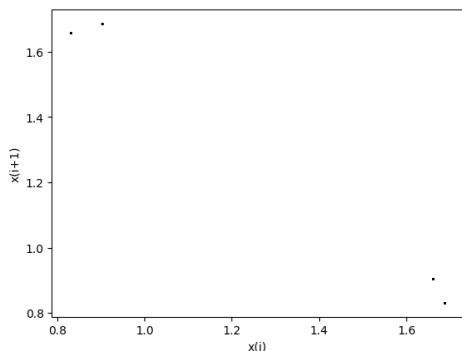
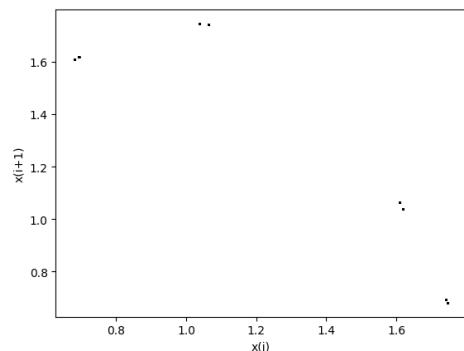
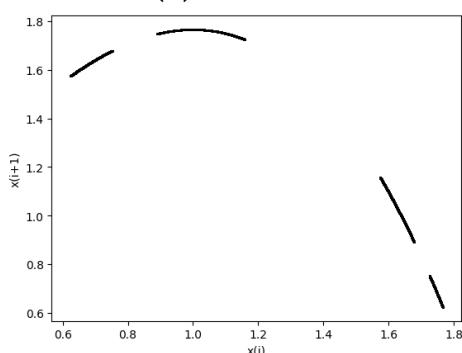
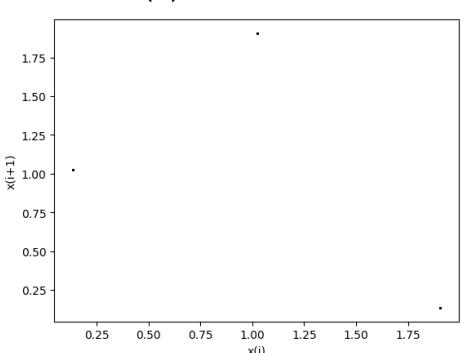
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.5i
0.44	Περίοδος - 2	2.5ii
0.5	Περίοδος - 4	2.5ii
0.511	Περίοδος - 8	2.5iii
0.5165	Χάος	2.5v
0.551	Περίοδος - 3	2.5vi
0.555	Περίοδος - 6	2.5viii
0.556	Περίοδος - 12	2.6i
0.5573	Χάος	2.6ii
0.583	Περίοδος - 4	2.6iii
0.5846	Περίοδος - 7	2.6iv
0.5851	Χάος	2.6vii



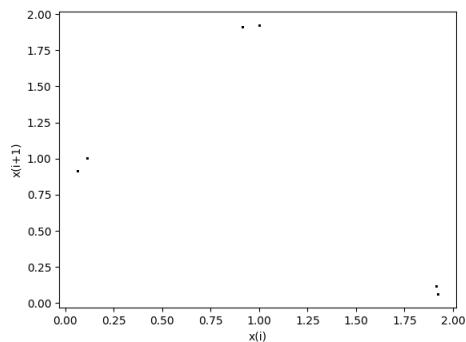
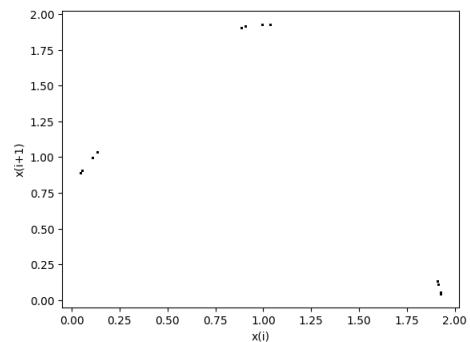
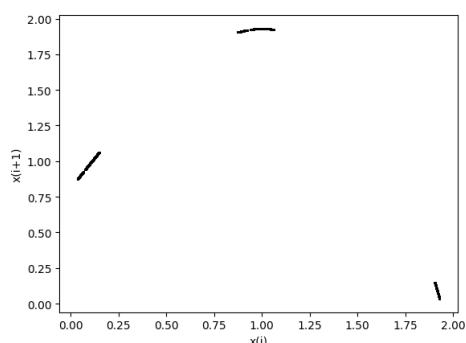
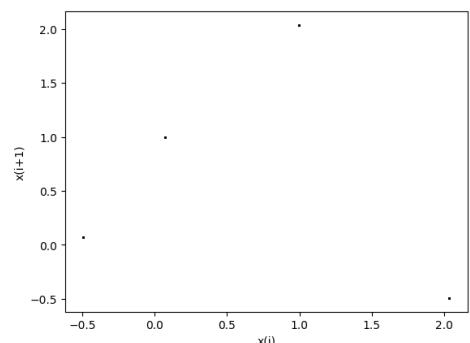
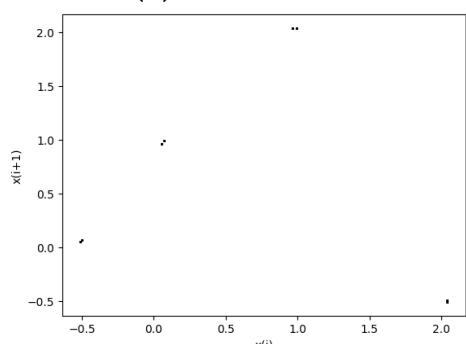
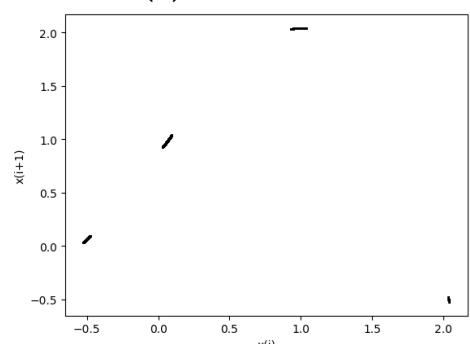
Σχήμα 2.7: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$.



Σχήμα 2.8: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$.

(i) Για $k = 0.3$ (ii) Για $k = 0.44$ (iii) Για $k = 0.5$ (iv) Για $k = 0.511$ (v) Για $k = 0.5165$ (vi) Για $k = 0.551$

Σχήμα 2.9: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(i) Για $k = 0.555$ (ii) Για $k = 0.556$ (iii) Για $k = 0.5573$ (iv) Για $k = 0.583$ (v) Για $k = 0.5846$ (vi) Για $k = 0.5851$

Σχήμα 2.10: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.3 Για $q = -0.5$

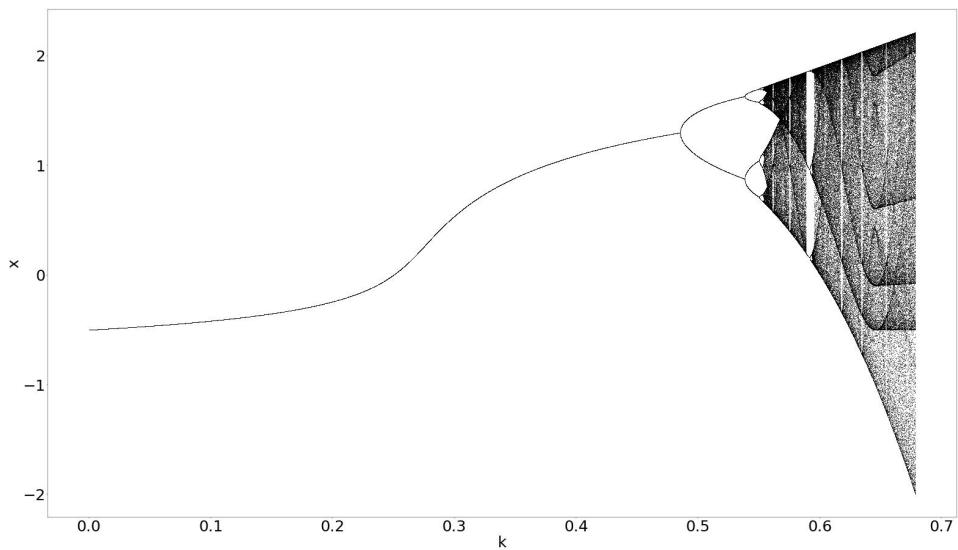
Στο Σχ. 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.5$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$, ενώ για $k = 0.48$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.53$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.55$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.5531$ (περίοδος - 16). Στη συνέχεια για $k > 0.5534$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.58$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.591$ (περίοδος - 6), για $k > 0.5927$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.12 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k , στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.679]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.5534$, στο $0.59 < k < 0.594$ παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

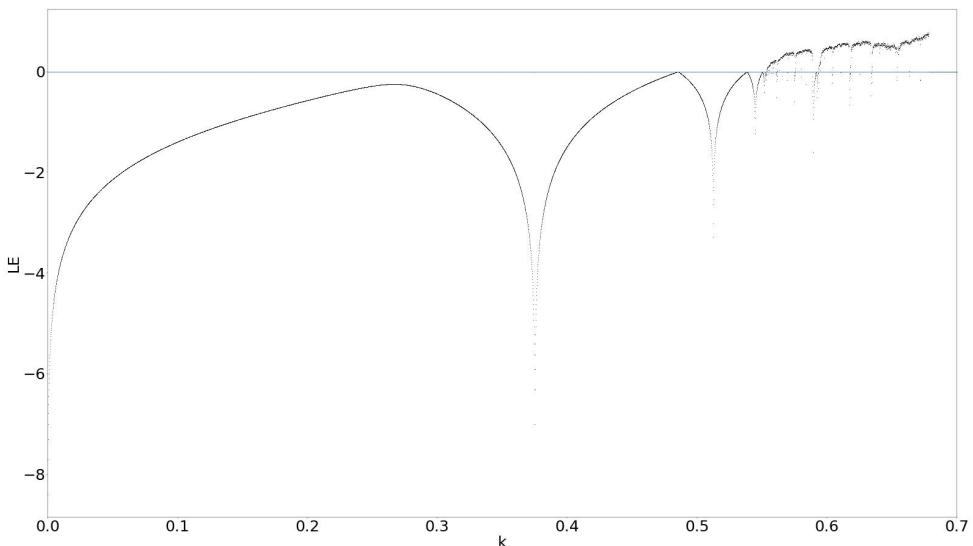
Τέλος, στον πίνακα 2.3 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.3: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$.

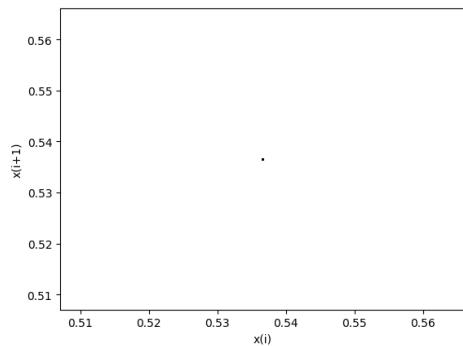
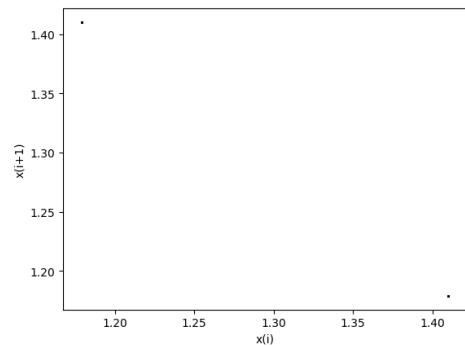
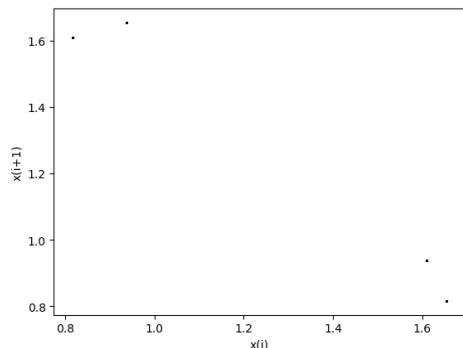
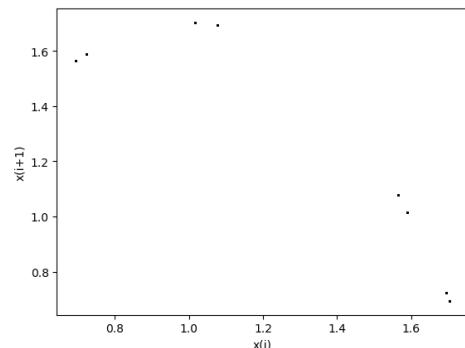
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.13i
0.48	Περίοδος - 2	2.13ii
0.53	Περίοδος - 4	2.13iii
0.55	Περίοδος - 8	2.13iv
0.5531	Περίοδος - 16	2.14i
0.5534	Χάος	2.14ii
0.58	Περίοδος - 3	2.14iii)
0.591	Περίοδος - 6	2.14iv
0.5927	Χάος	2.14v



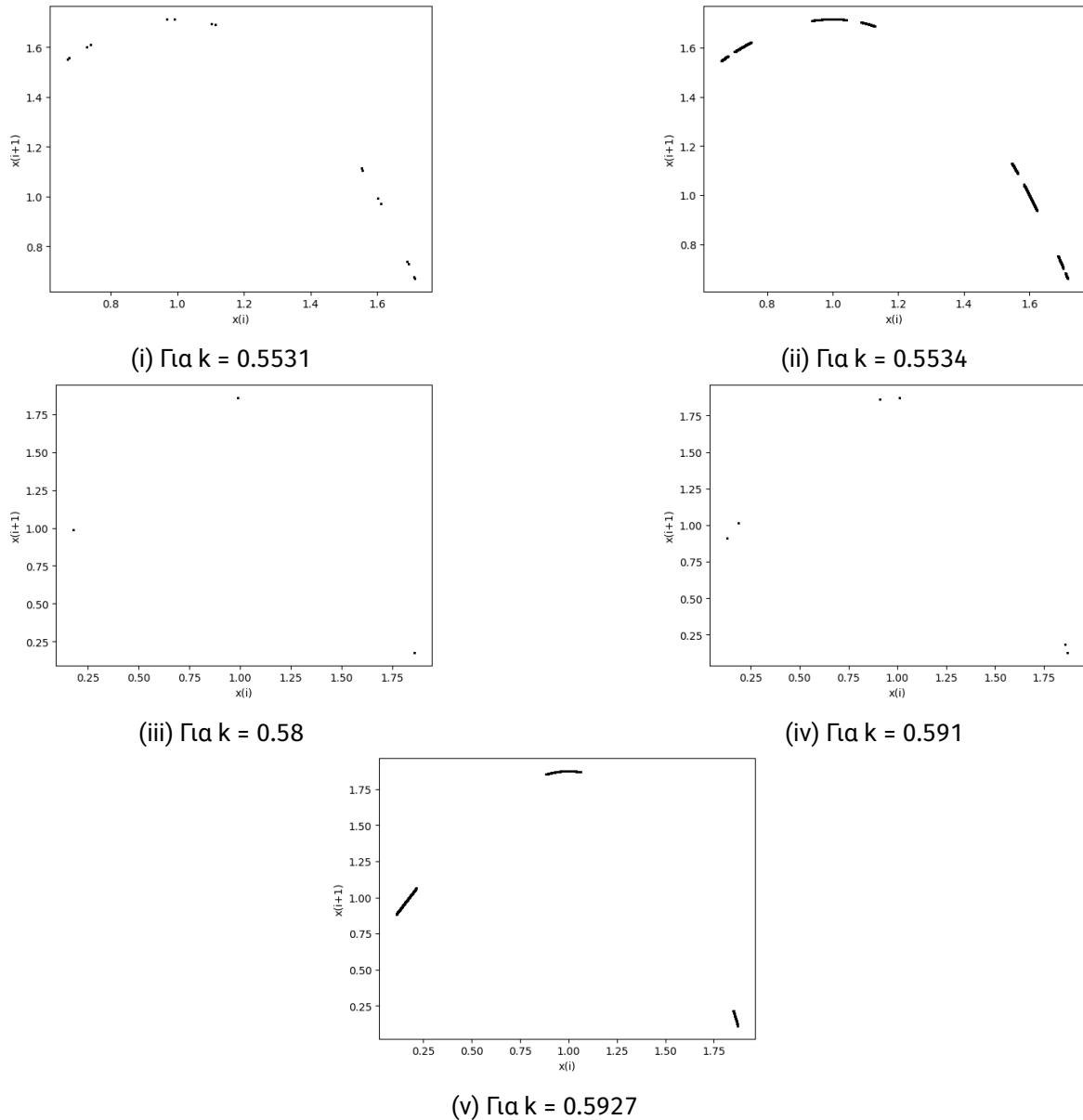
Σχήμα 2.11: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.5$.



Σχήμα 2.12: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.5$.

(i) Για $k = 0.3$ (ii) Για $k = 0.48$ (iii) Για $k = 0.53$ (iv) Για $k = 0.55$

Σχήμα 2.13: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σχήμα 2.14: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.4 Για $q = -0.7$

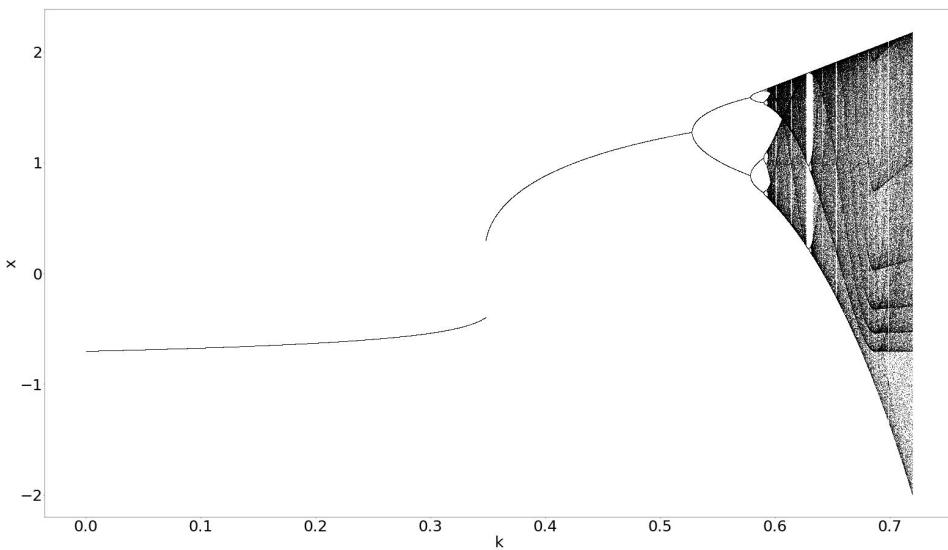
Στο Σχ. 2.15 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.7$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$ αλλά από $k[0.3469, 0.3486]$ "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά. Από $k = 3.469$ το σύστημα εισέρχεται ξανά σε περίοδο - 1. Για $k = 0.52$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.57$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.592$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.593$ (περίοδος - 15). Στη συνέχεια για $k > 0.593$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.627$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει σε χάος μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.63$ (περίοδος - 6) $k = 0.631$ (περίοδος - 11), για $k > 0.631$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.12 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.72]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.594$, στο $0.627 < k < 0.632$, παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

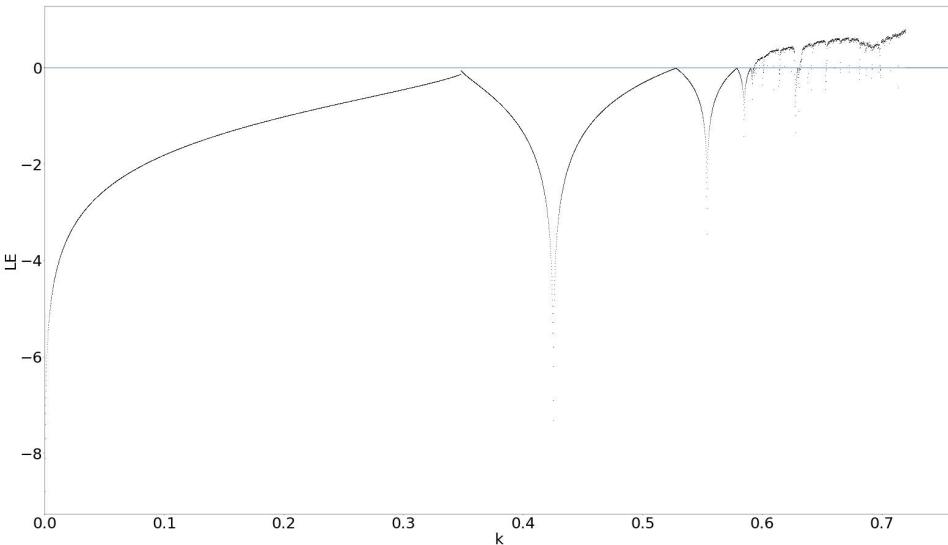
Τέλος, στον πίνακα 2.4 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.4: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.7$.

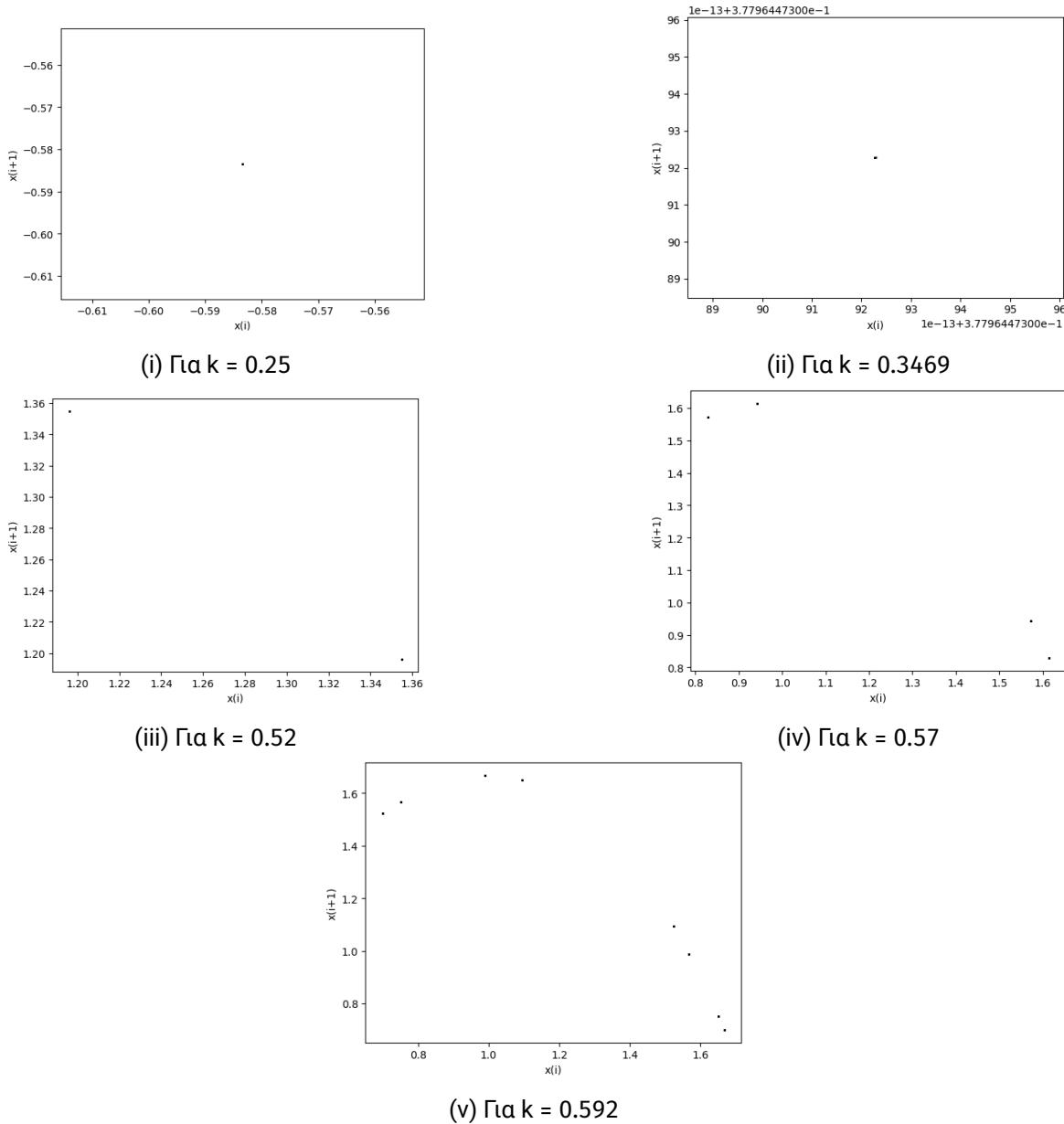
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.25	Περίοδος - 1	2.17i
0.3469	Περίοδος - 1	2.17ii
0.52	Περίοδος - 2	2.17iii
0.57	Περίοδος - 4	2.17iv
0.592	Περίοδος - 8	2.17v
0.593	Περίοδος - 15	2.18i
0.594	Χάος	2.18ii
0.627	Περίοδος - 3	2.18iii
0.630	Περίοδος - 6	2.18iv
0.631	Περίοδος - 11	2.18v
0.632	Χάος	2.18vi



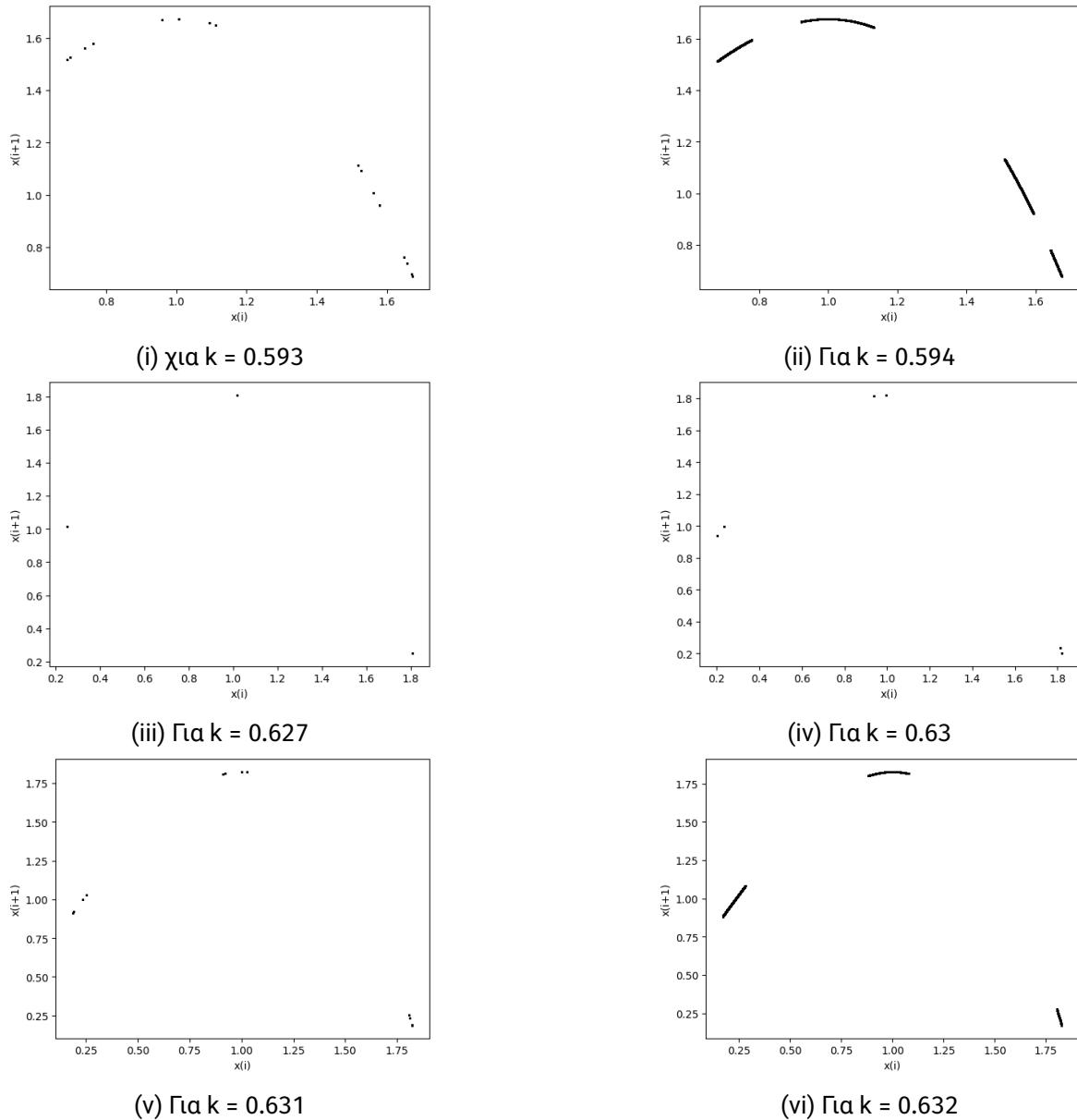
Σχήμα 2.15: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.16: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.17: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σχήμα 2.18: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.5 Για $q = -0.9$

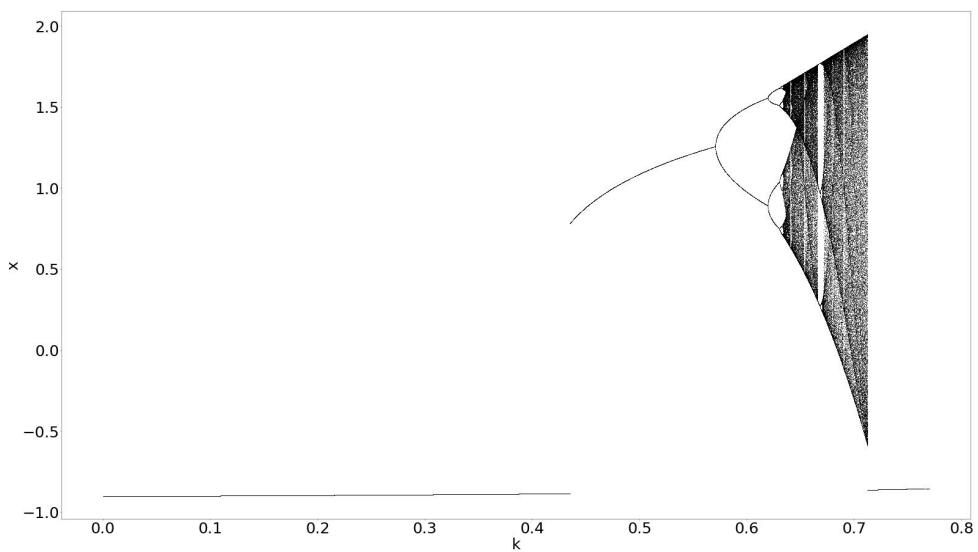
Στο Σχ. 2.19 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.9$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.3$ αλλά στο διάστημα τιμών $0.43 < k < 0.436$ "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά. Οπότε το σύστημα εμφανίζει πάλι το φαινόμενο της υστέρησης. Από $k = 3.436$ το σύστημα εμφανίζει πάλι περιοδική συμπεριφορά περίοδο - 1. Για $k = 0.57$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.62$ (περίοδος - 4), τον τρίτο για $k = 0.63$ (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για $k = 0.633$ (περίοδος - 16). Στην συνέχεια για $k > 0.635$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.665$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από έναν νέο διπλασιασμό $k = 0.668$ (περίοδος - 6), για $k > 0.671$. Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για $k = 0.72$ (περίοδος - 1). Για $q = -0.7$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο σχήμα 2.20 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.77]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.635$, στο $0.665 < k < 0.671$ και $0.72 < k < 0.77$ παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

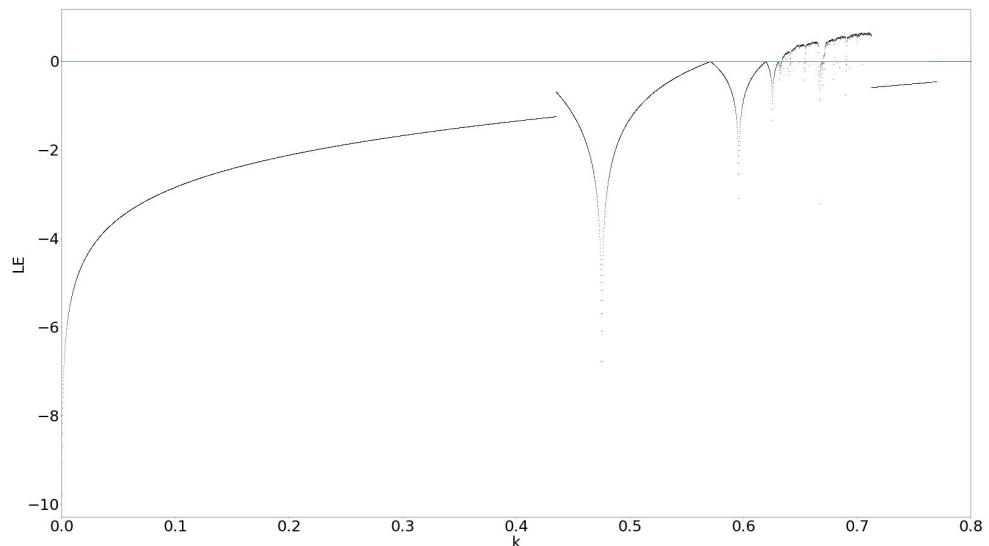
Τέλος, στον πίνακα 2.5 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.5: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.9$.

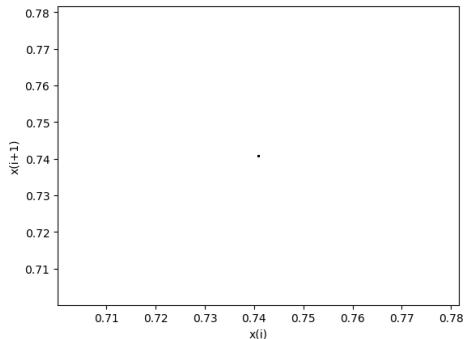
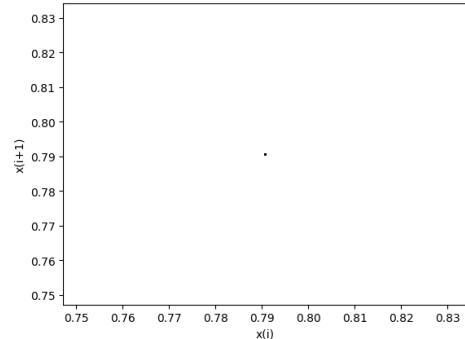
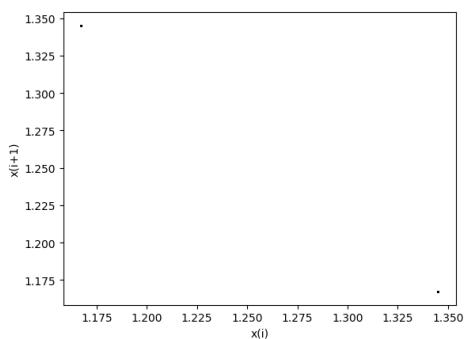
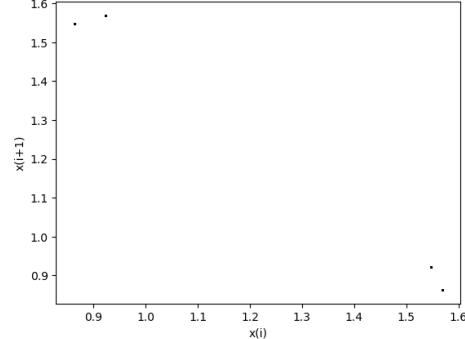
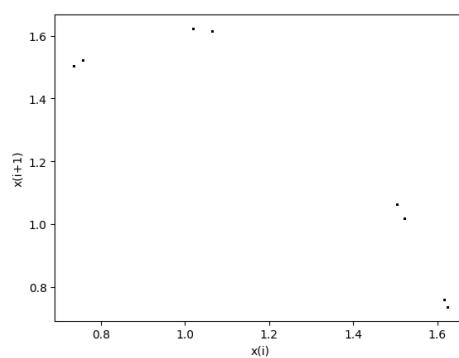
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.43	Περίοδος - 1	2.21i
0.436	Περίοδος - 1	2.21ii
0.57	Περίοδος - 2	2.21iii
0.62	Περίοδος - 4	2.21iv
0.63	Περίοδος - 8	2.21v
0.633	Περίοδος - 16	2.22i
0.635	Χάος	2.22ii
0.665	Περίοδος - 3	2.22iii
0.668	Περίοδος - 6	2.22iv
0.671	Χάος	2.22v
0.72	Περίοδος - 1	2.22vi



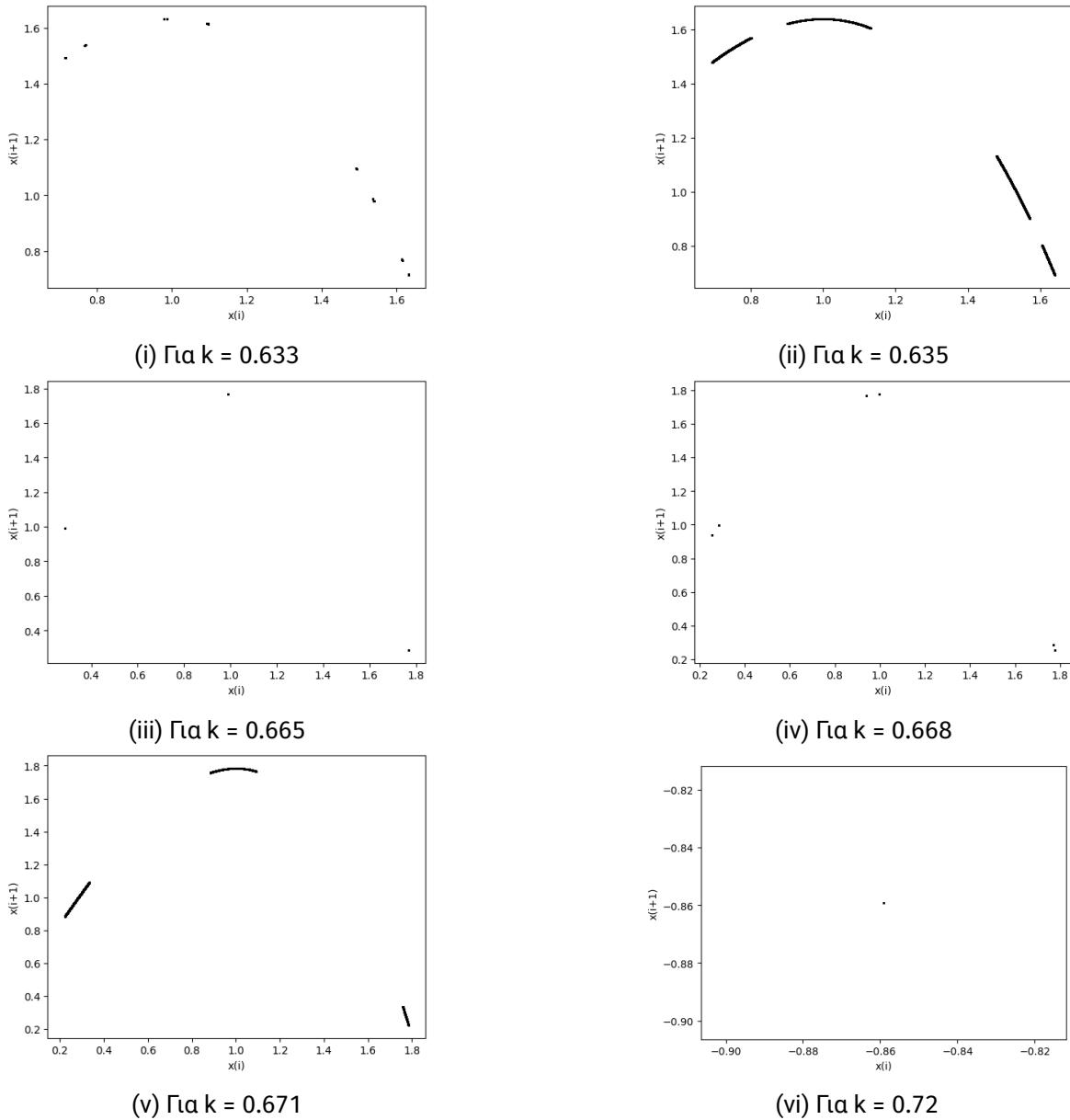
Σχήμα 2.19: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$.



Σχήμα 2.20: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.7$

(i) Για $k = 0.43$ (ii) Για $k = 0.436$ (iii) Για $k = 0.57$ (iv) Για $k = 0.62$ (v) Για $k = 0.63$

Σχήμα 2.21: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σχήμα 2.22: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.6 Για $q = -1.2$

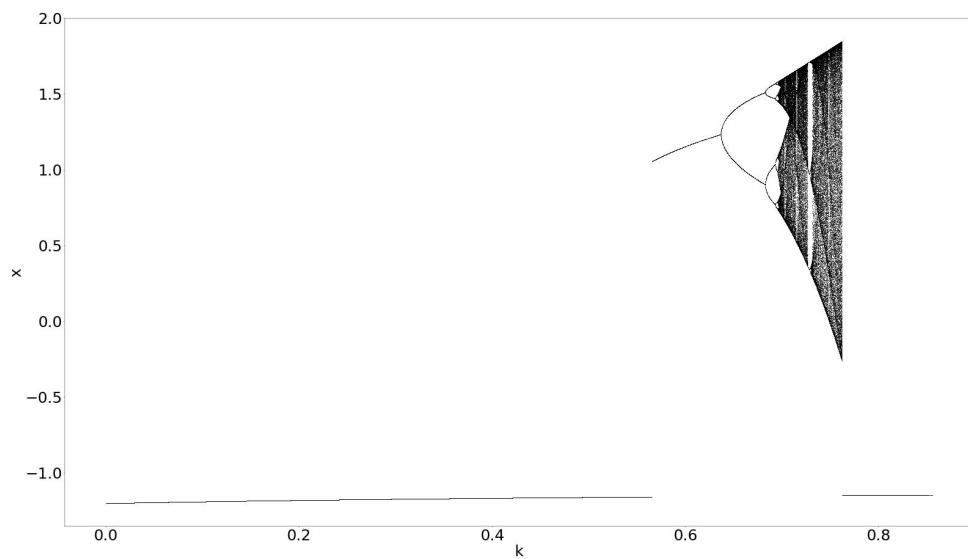
Στο Σχ. 2.23 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.2$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για $k = 0.55$, αλλά στο διάστημα τιμών $0.56 < k < 0.566$ "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά, εμφανίζοντας το φαινόμενο της υστέρησης. Από $k = 0.566$ το σύστημα εμφανίζει πάλι περιοδική συμπεριφορά περίοδο - 1. Για $k = 0.63$ εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για $k = 0.67$ (περίοδος - 4) και τον τρίτο για $k = 0.69$ (περίοδος - 8). Στη συνέχεια για $k > 0.696$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για $k = 0.726$ (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από ένα διπλασιασμό $k = 0.729$ (περίοδος - 6), για $k > 0.731$. Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για $k = 0.762$ (περίοδος - 1). Για $q = -1.2$ το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου, ενώ παρατηρείται και εσωτερική κρίση ελκυστή για $k = 0.726$ αλλά και για $k = 0.762$.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.24 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.77]$. Στο διάστημα τιμών $0 < k < 0.69$, στο $0.726 < k < 0.731$ και στο $0.72 < k < 0.8574$ παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

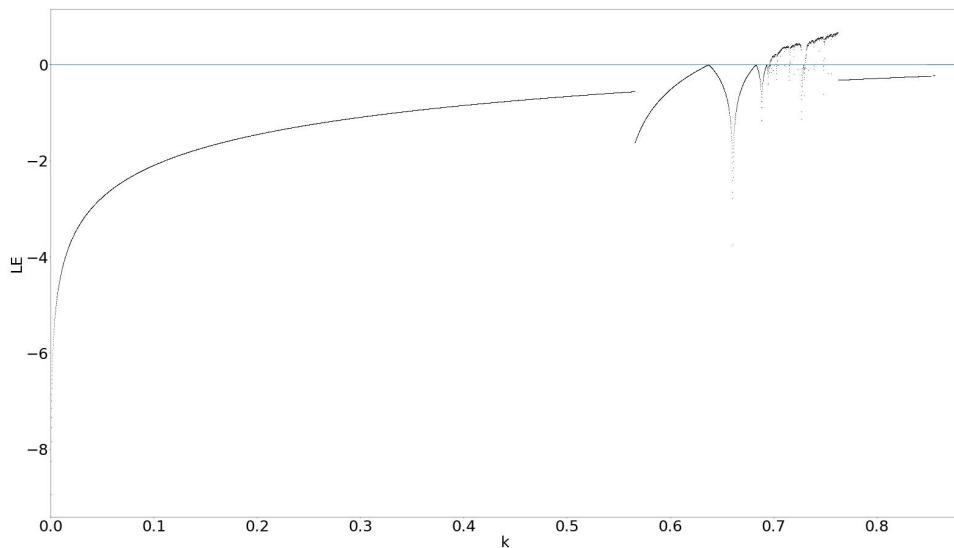
Τέλος, στον πίνακα 2.6 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου k και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.6: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.2$.

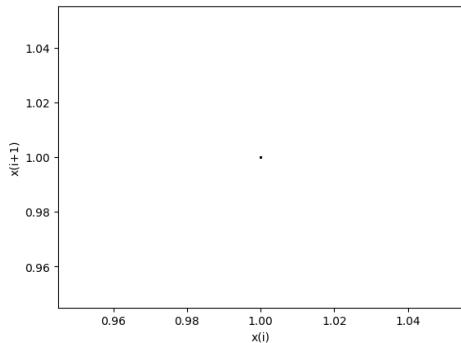
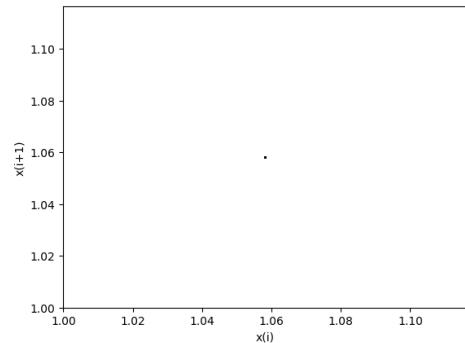
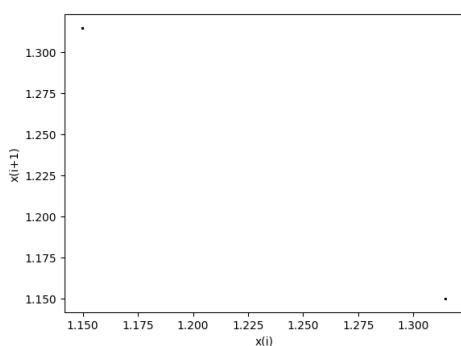
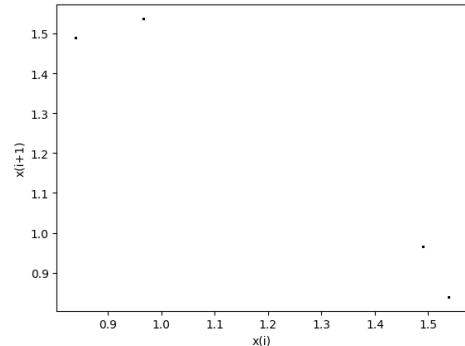
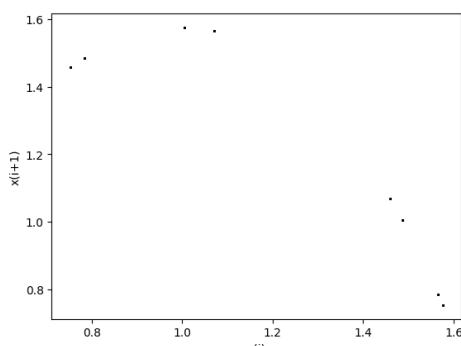
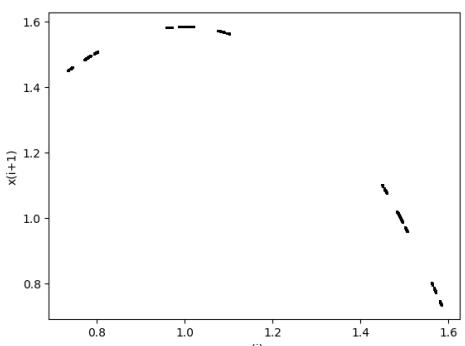
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.55	Περίοδος - 1	2.25i
0.566	Περίοδος - 1	2.25ii
0.63	Περίοδος - 2	2.25iii
0.68	Περίοδος - 4	2.25iv
0.69	Περίοδος - 8	2.25v
0.696	Χάος	2.25vi
0.726	Περίοδος - 3	2.26i
0.729	Περίοδος - 6	2.26ii
0.731	Χάος	2.26iii
0.762	Περίοδος - 1	2.26iv



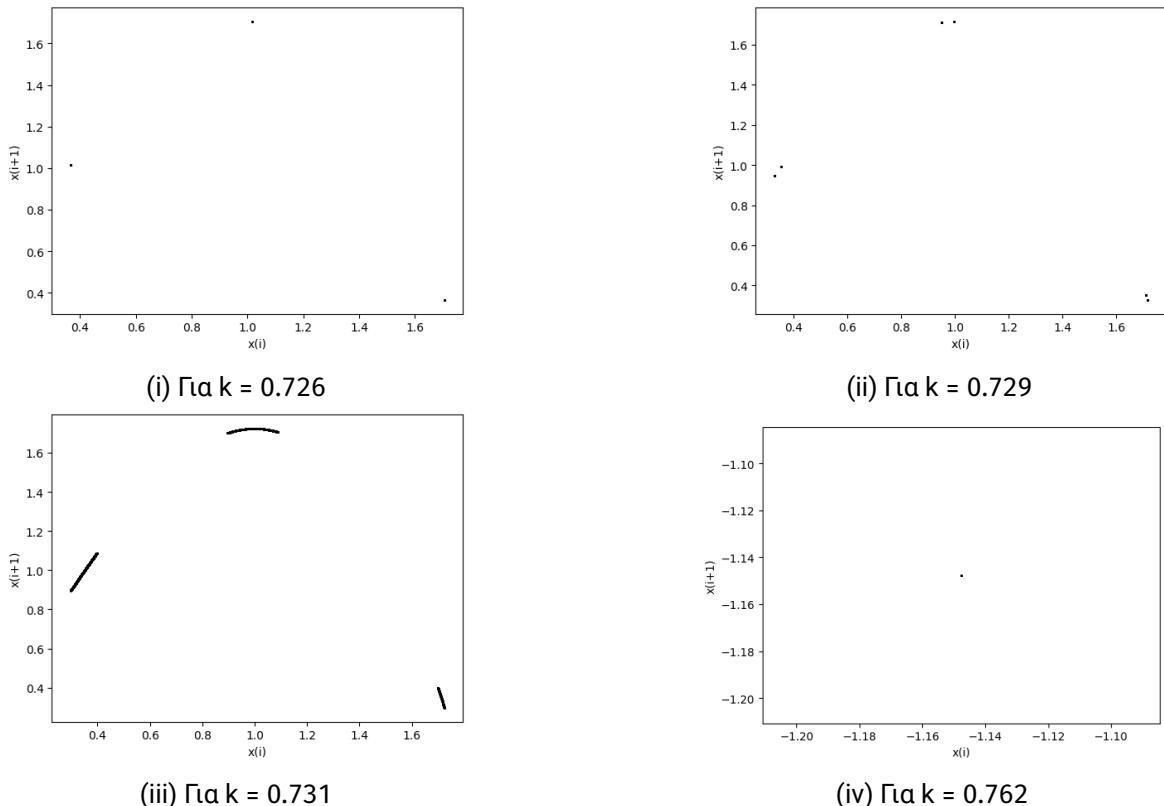
Σχήμα 2.23: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.2$.



Σχήμα 2.24: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.2$.

(i) Για $k = 0.55$ (ii) Για $k = 0.566$ (iii) Για $k = 0.63$ (iv) Για $k = 0.68$ (v) Για $k = 0.69$ (vi) Για $k = 0.696$

Σχήμα 2.25: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σχήμα 2.26: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.7 Για $q = -1.4$

Στα Σχ. 2.27 , 2.28 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $a = 1$, $b = 2$, $q = -1.4$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.27i ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης 2.27ii ($x_0 = 0.5$), 2.28i ($x_0 = 1$), 2.28ii ($x_0 = -0.1$) παρατηρείται ότι για $q = -1.4$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα αντίστοιχα διαγράμματα Lyapunov 2.29i, 2.29ii, 2.30i, 2.30ii, όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης 2.31, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

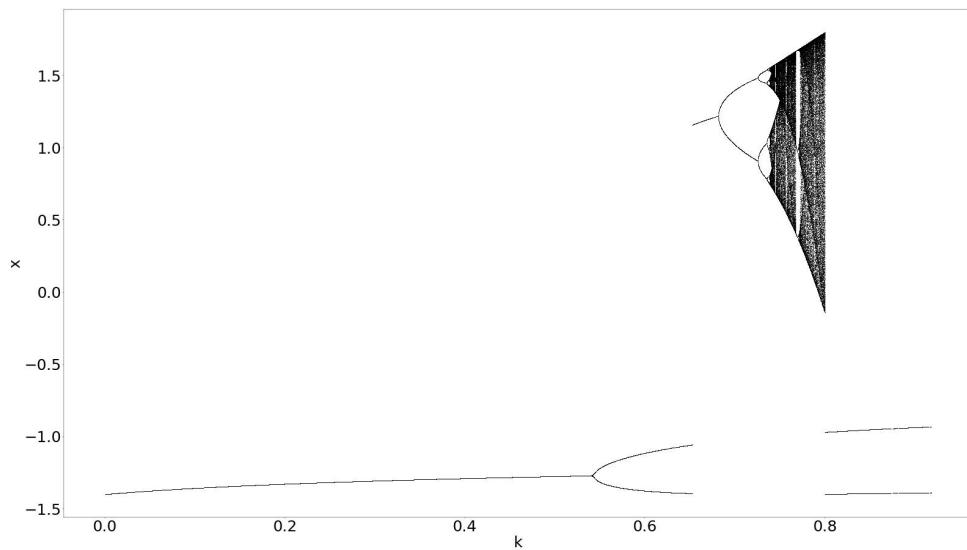
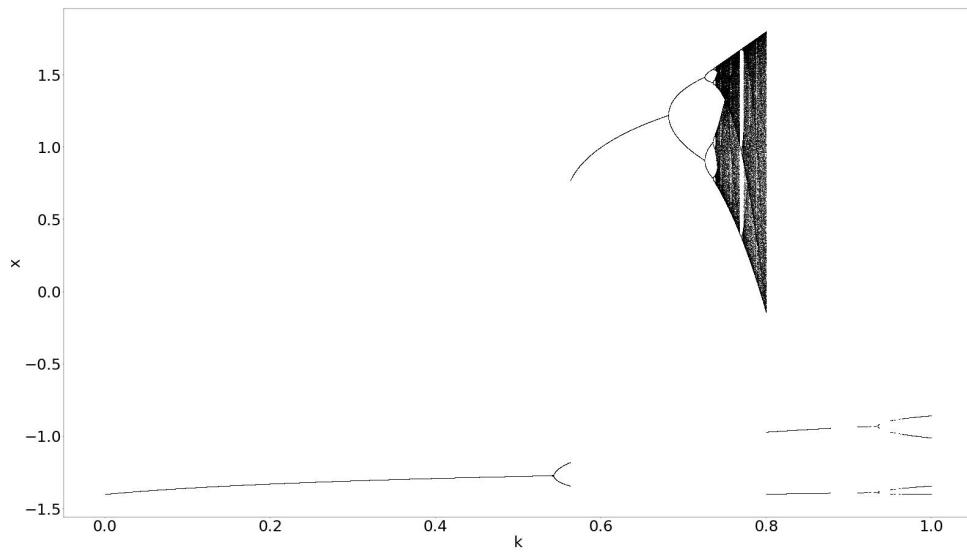
Στον πίνακα 2.7 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.27i. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επίσης παρατηρείται η εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (0.744, 0.7565 , 0.768 , 0.8), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.27i στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-2, αλλά και από περίοδο - 2 σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8.

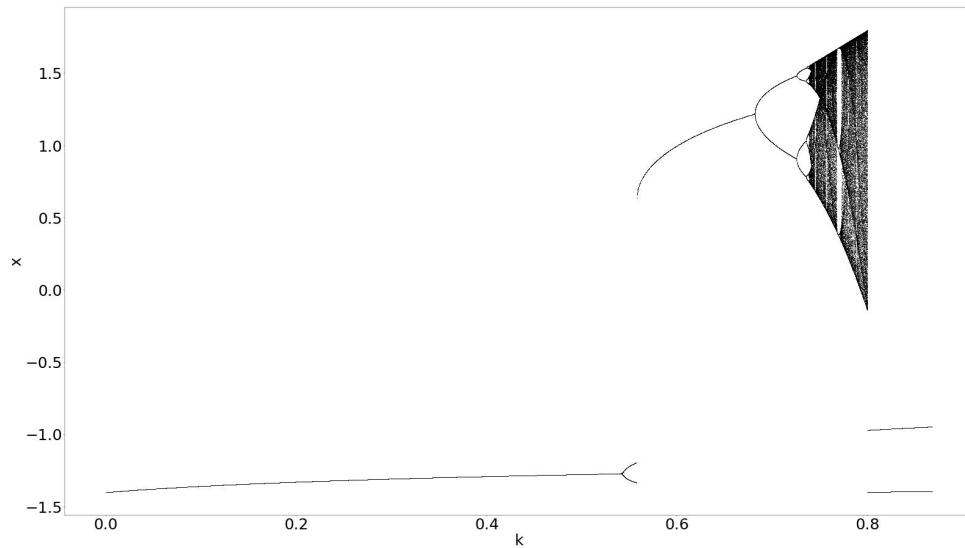
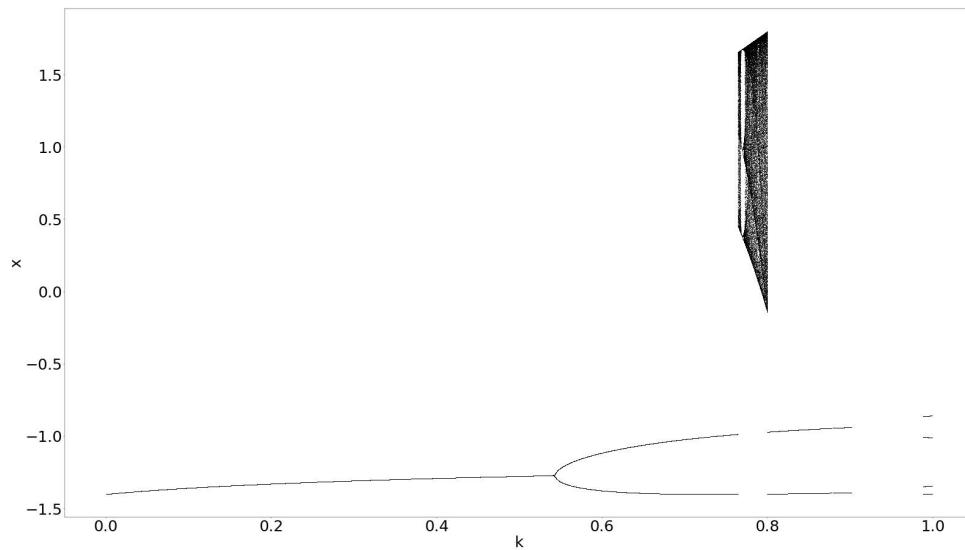
Τέλος, στο σχήμα 2.29i παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.91]. Οι τιμές του πίνακα 2.7 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.29i όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.7: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $a = 1$, $b = 2$, $q = -1.4$ και $x_i = 0.1$

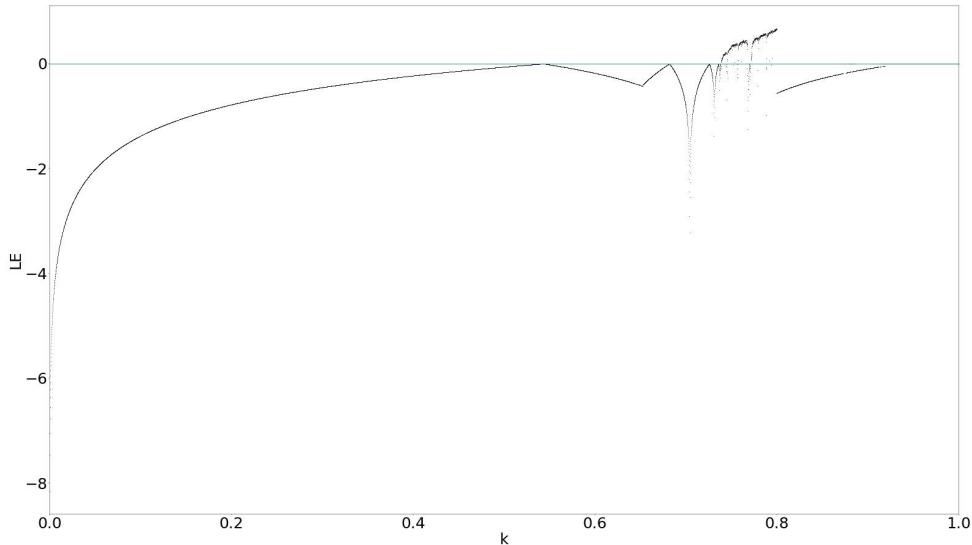
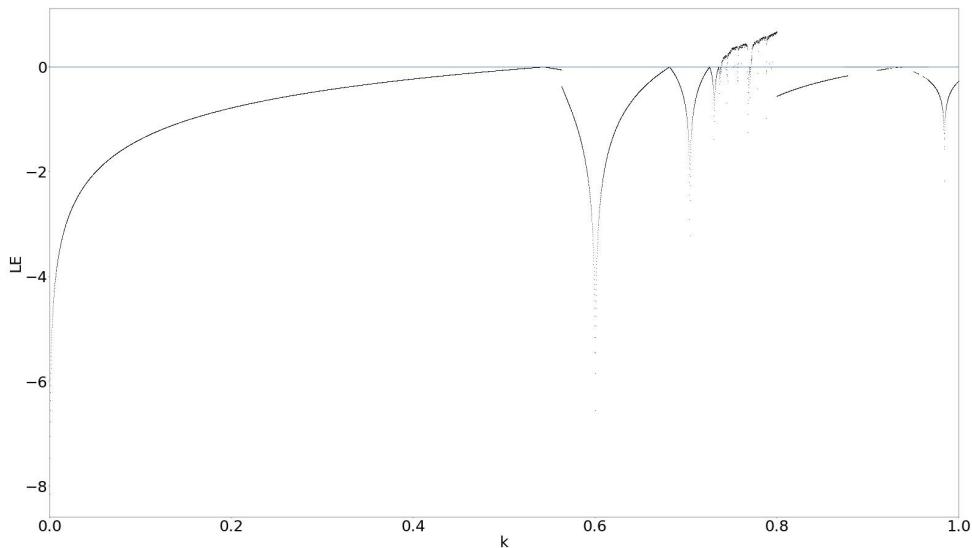
Παράμετρος k	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.4	Περίοδος - 1	2.32i
0.54	Περίοδος - 2	2.32ii
0.65	Περίοδος - 1	2.32iii
0.68	Περίοδος - 2	2.32iv
0.726	Περίοδος - 4	2.32v
0.737	Περίοδος - 8	2.32vi
0.738	Περίοδος - 15	2.33i
0.739	Χάος	2.33ii
0.744	Περίοδος - 6	2.33iii
0.746	Χάος	2.33iv
0.7565	Περίοδος - 5	2.33v
0.757	Χάος	2.33vi
0.768	Περίοδος - 3	2.33vii
0.77	Περίοδος - 6	2.33viii
0.78	Χάος	2.34i
0.8	Περίοδος - 2	2.34ii

(i) $x_0 = 0.1$ (ii) $x_0 = 0.5$

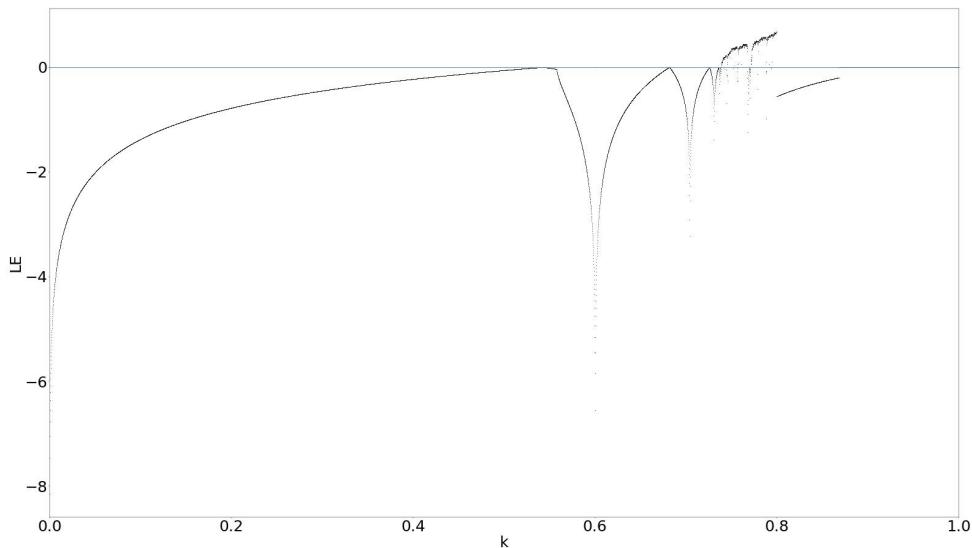
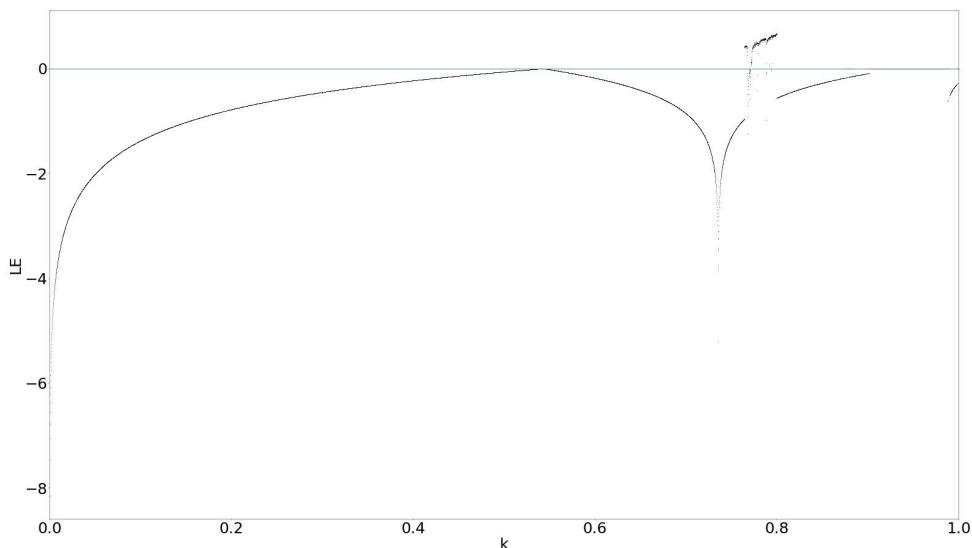
Σχήμα 2.27: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (α' μέρος).

(i) $x_0 = 1$ (ii) $x_0 = -0.1$

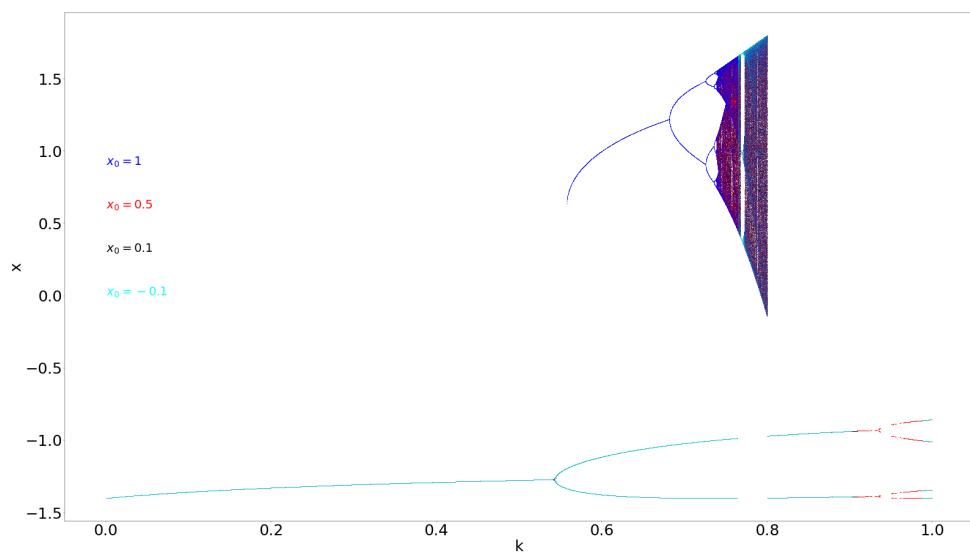
Σχήμα 2.28: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (β' μέρος).

(i) Για $x_0 = 0.1$ (ii) Για $x_0 = 0.5$

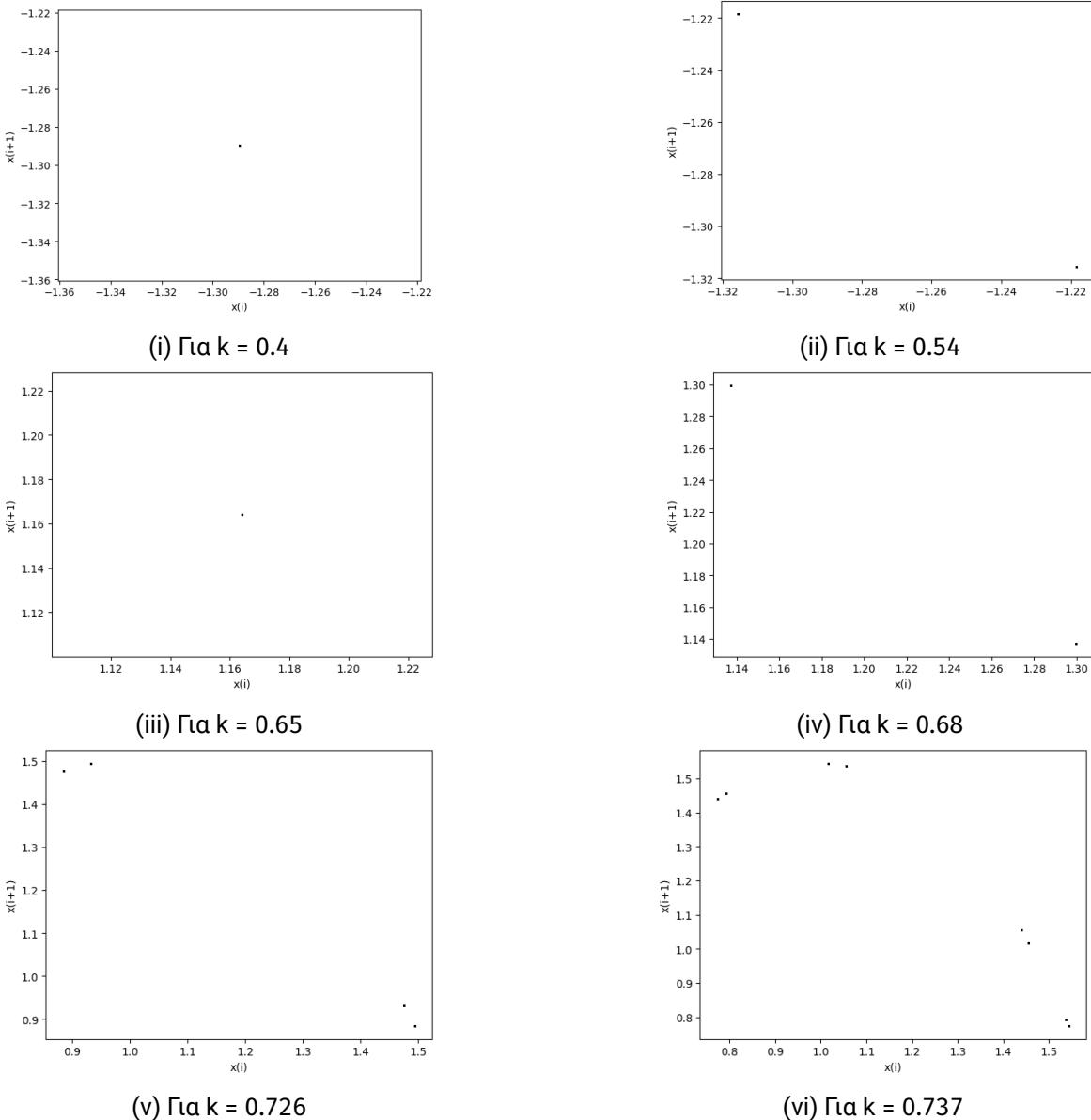
Σχήμα 2.29: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).

(i) Για $x_0 = 1$ (ii) Για $x_0 = -0.1$

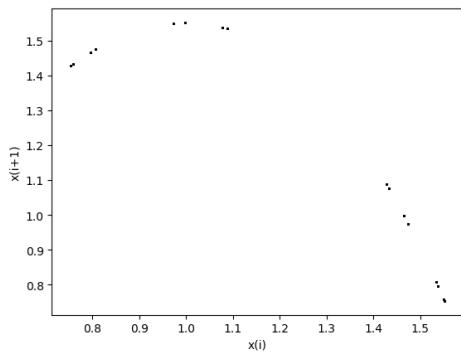
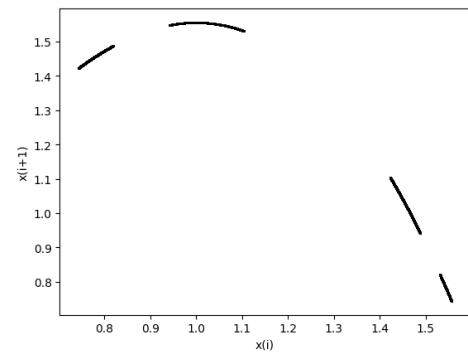
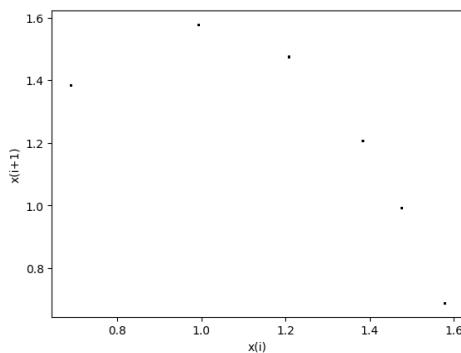
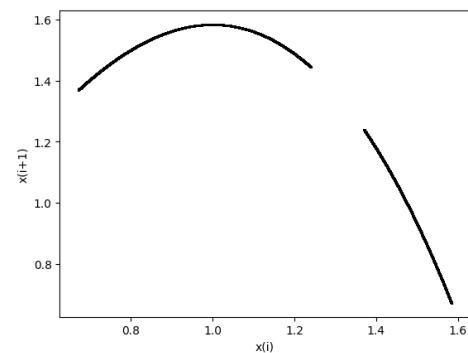
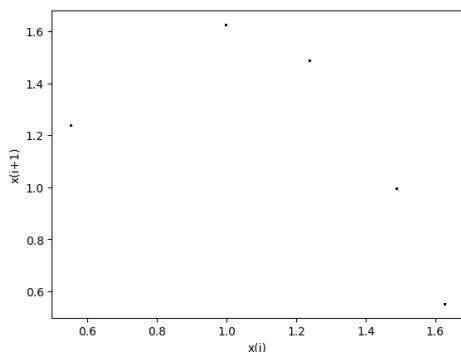
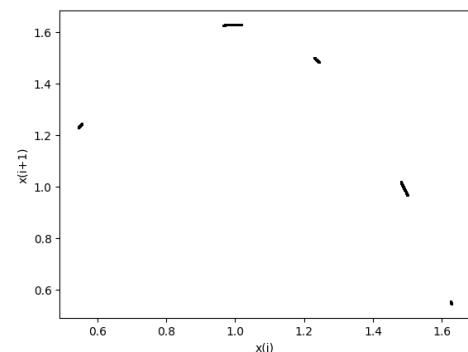
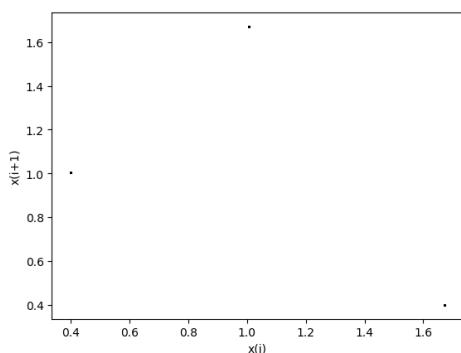
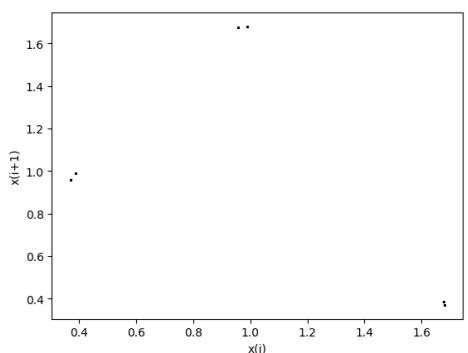
Σχήμα 2.30: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).



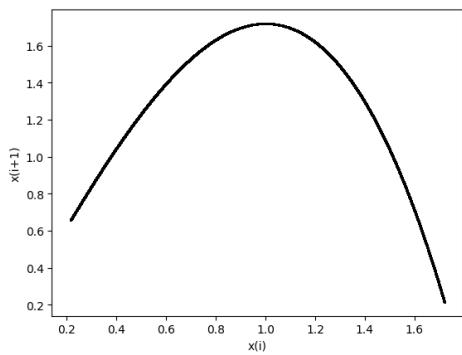
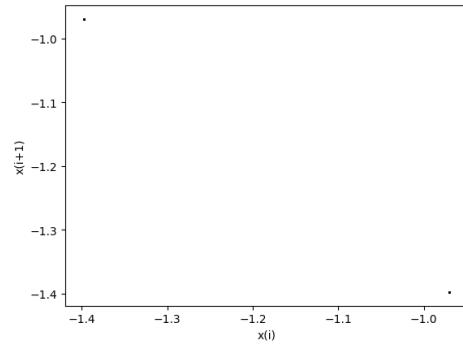
Σχήμα 2.31: Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0



Σχήμα 2.32: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(i) Για $k = 0.738$ (ii) Για $k = 0.739$ (iii) Για $k = 0.744$ (iv) Για $k = 0.746$ (v) Για $k = 0.7565$ (vi) Για $k = 0.757$ (vii) Για $k = 0.768$ (viii) Για $k = 0.77$

Σχήμα 2.33: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

(i) Για $k = 0.78$.(ii) Για $k = 0.8$.

Σχήμα 2.34: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (γ' μέρος).

2.8 Για $q = -1.6$

Στα Σχ. 2.35, 2.36 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.6$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.35i ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης 2.35ii ($x_0 = 0.5$), 2.35iii ($x_0 = 1$), 2.36i ($x_0 = 1.5$), 2.36ii ($x_0 = 2$), 2.36iii ($x_0 = -0.1$) παρατηρείται ότι για $q = -1.6$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα Lyapunov 2.37i, 2.37ii, 2.37iii, 2.38i, 2.38ii, 2.38iii, όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης 2.39, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

Στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.35i εμφανίζονται κάποιες διακοπές της γραφικής παράστασης στην περιοχή του χάους. Αυτό οφείλεται στο ότι η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αποκλίνει σε πολύ μεγάλες τιμές.

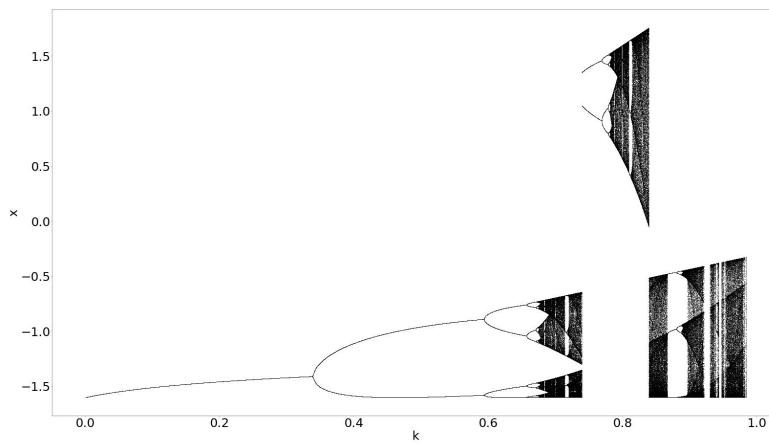
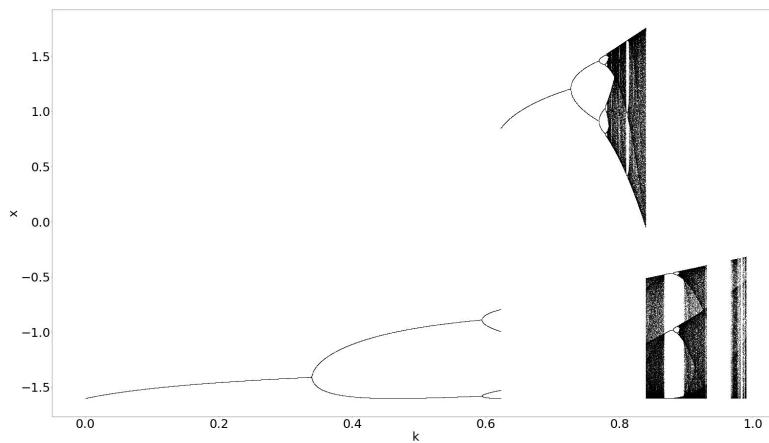
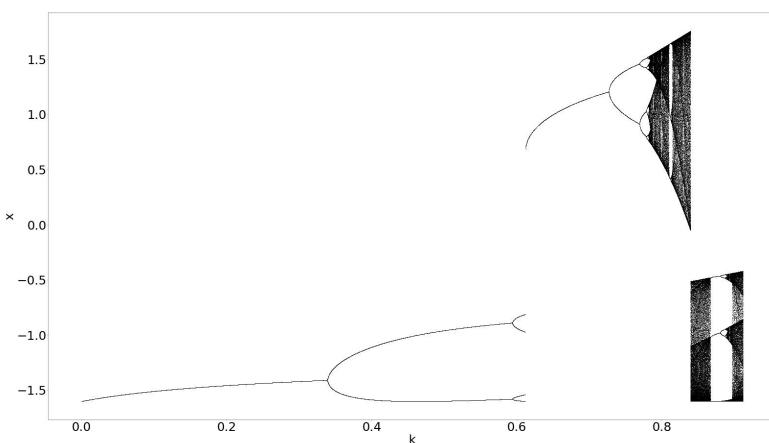
Στον πίνακα 2.8 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.35i.

Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (0.683, 0.7, 0.715, 0.74, 0.788, 0.799, 0.81, 0.94), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.35i στα κενά μεταξύ χάους και περιοδικής συμπεριφοράς, όπως και στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο 2. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

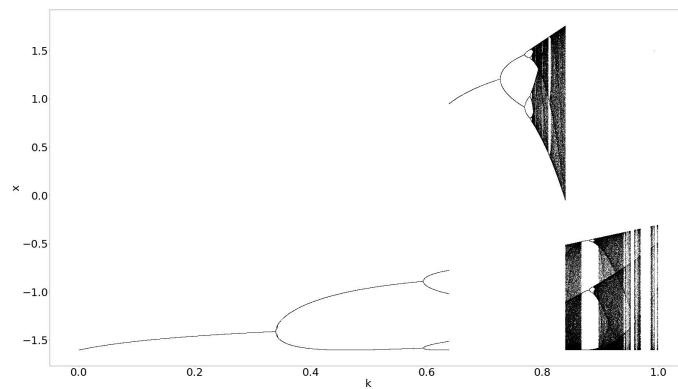
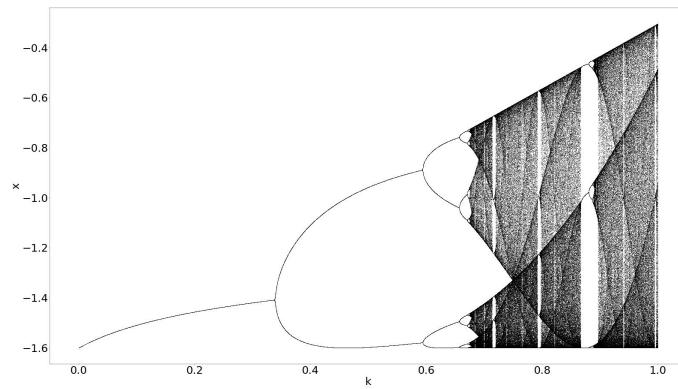
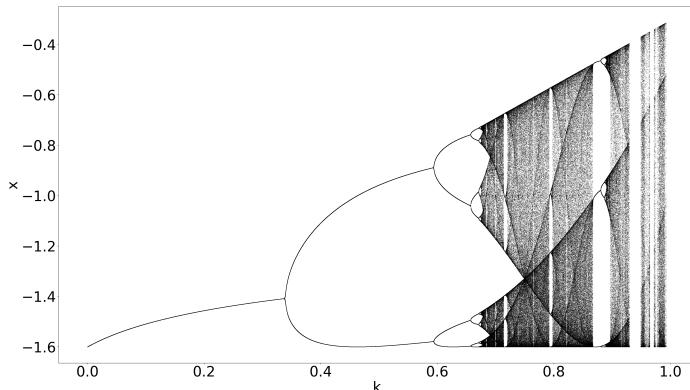
Τέλος, στο σχήμα 2.36ii παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.982]. Οι τιμές του πίνακα 2.8 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.35i όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.8: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.6$, για $x_i = 0.1$

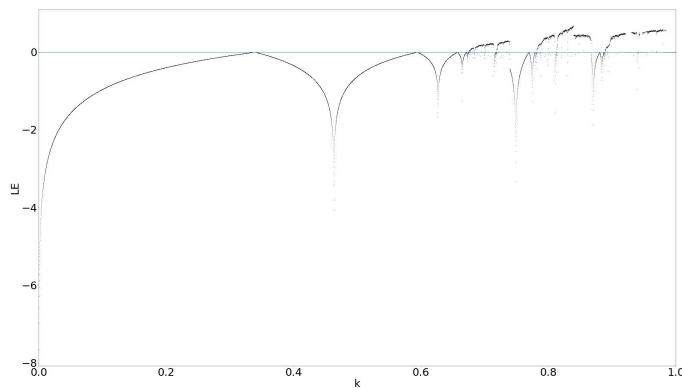
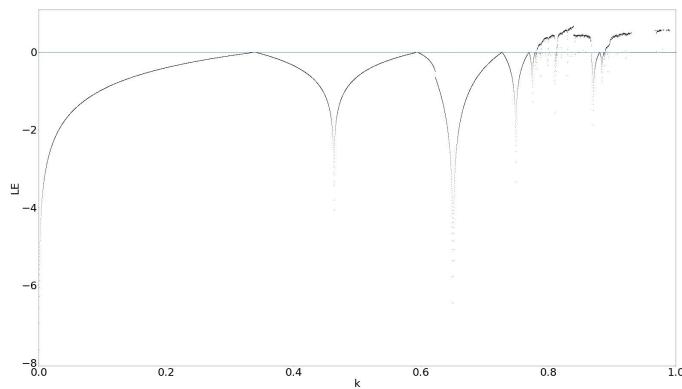
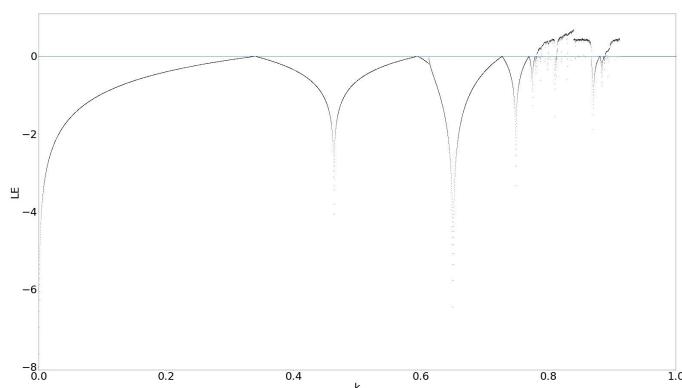
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.31	Περίοδος - 1
0.34	Περίοδος - 2
0.595	Περίοδος - 4
0.66	Περίοδος - 8
0.671	Περίοδος - 12
0.675	Χαός
0.683	Περίοδος - 12
0.685	Χάος
0.7	Περίοδος - 18
0.71	Χάος
0.715	Περίοδος - 6
0.716	Περίοδος - 12
0.717	Χάος
0.74	Περίοδος - 2
0.77	Περίοδος - 4
0.779	Περίοδος - 8
0.782	Χάος
0.788	Περίοδος - 20
0.789	Χάος
0.799	Περίοδος - 5
0.8	Χάος
0.81	Περίοδος - 3
0.812	Περίοδος - 6
0.813	Χάος
0.8393	Κενό
0.867	Περίοδος - 3
0.88	Περίοδος - 6
0.886	Περίοδος - 10
0.889	Χάος
0.92	Κενό
0.94	Περίοδος - 5
0.942	Χάος
0.943	Κενό
0.948	Χάος

(i) Για $x_0 = 0.1$ (ii) Για $x_0 = 0.5$ (iii) Για $x_0 = 1$

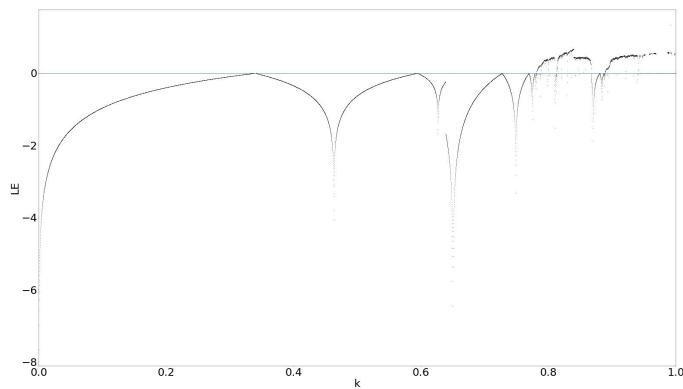
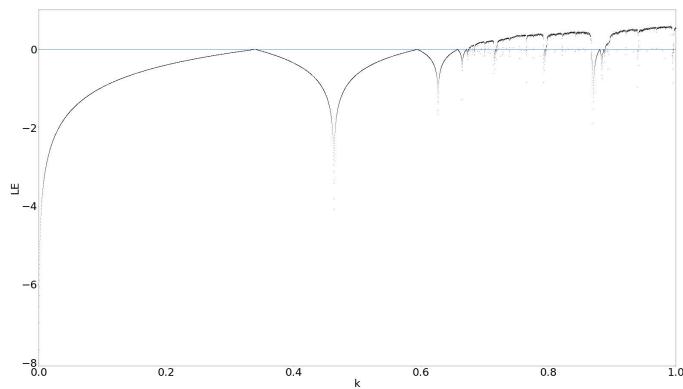
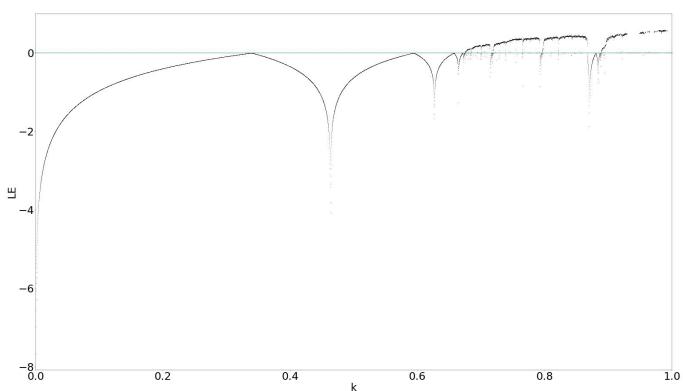
Σχήμα 2.35: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.6$ (α' μέρος).

(i) Για $x_0 = 1.5$ (ii) Για $x_0 = 2$ (iii) Για $x_0 = -0.1$

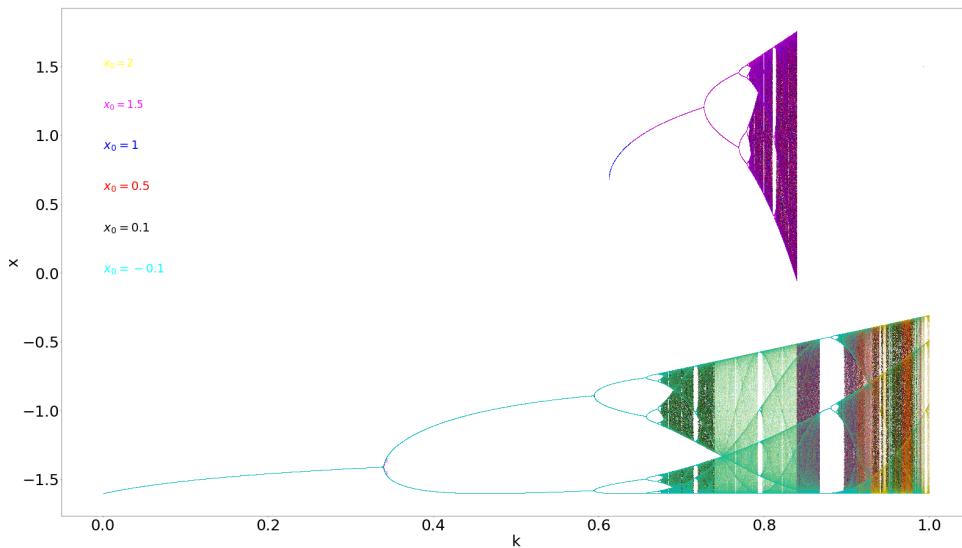
Σχήμα 2.36: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.6$ (β' μέρος).

(i) Για $x_0 = 0.1$ (ii) Για $x_0 = 0.5$ (iii) Για $x_0 = 1$

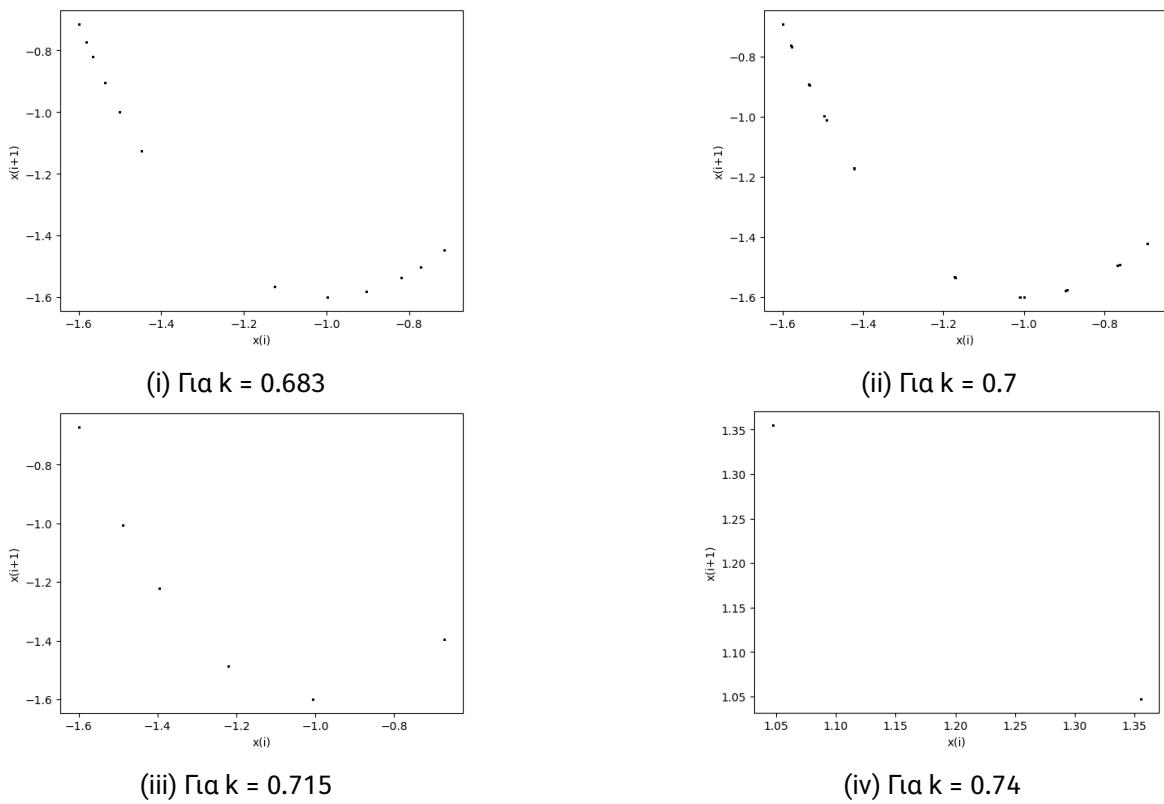
Σχήμα 2.37: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (α' μέρος).

(i) Για $x_0 = 1.5$ (ii) $x_0 = 2$ (iii) $x_0 = -0.1$

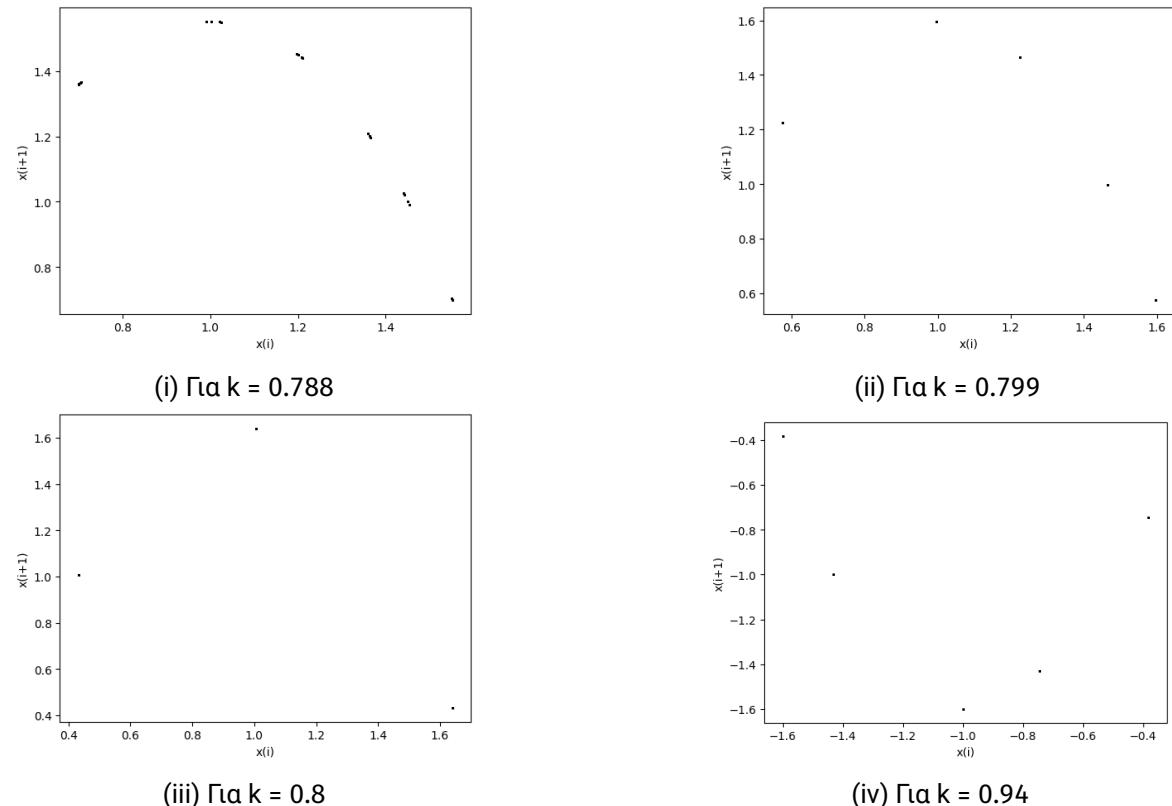
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.4$ (β' μέρος).



Σχήμα 2.39: Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0 .



Σχήμα 2.40: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

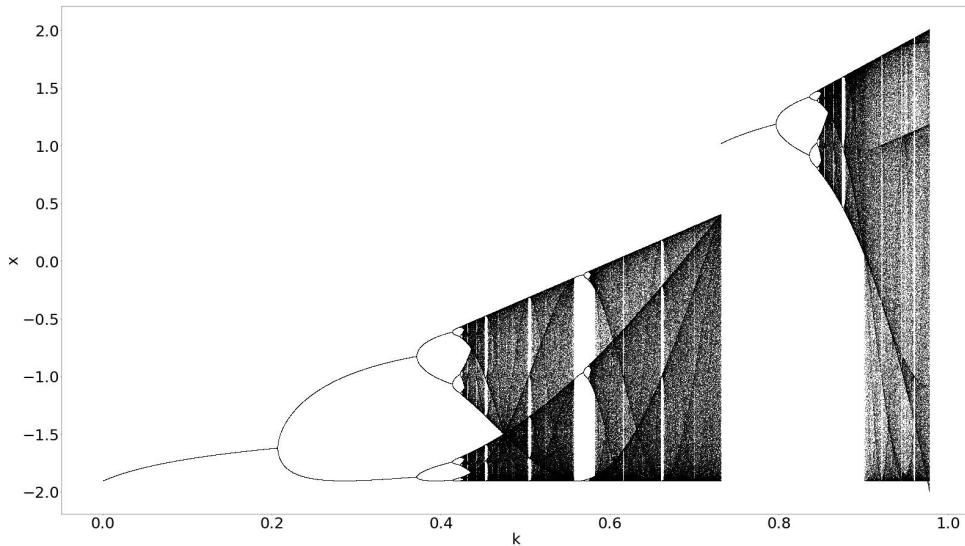


Σχήμα 2.41: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

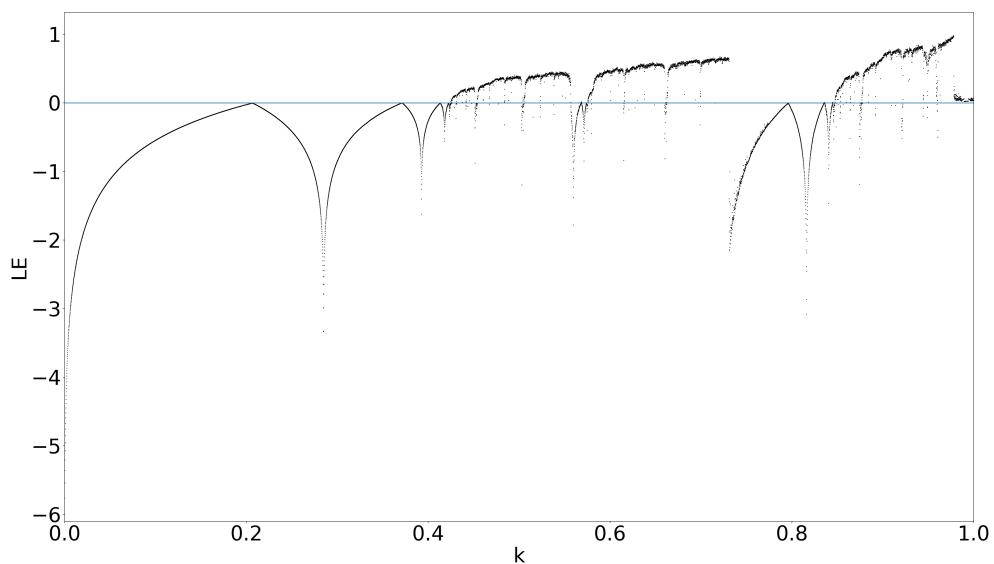
2.9 Για $q = -1.9$

Στο Σχ. 2.42 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.9$. Στον πίνακα 2.9 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.42. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($0.431, 0.452, 0.484, 0.503, 0.56, 0.615, 0.66, 0.74, 0.875, 0.921, 0.949, 0.9597$), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.42, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.9, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Τέλος, στο σχήμα 2.43 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.978]$. Οι τιμές του πίνακα 2.9 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.42 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



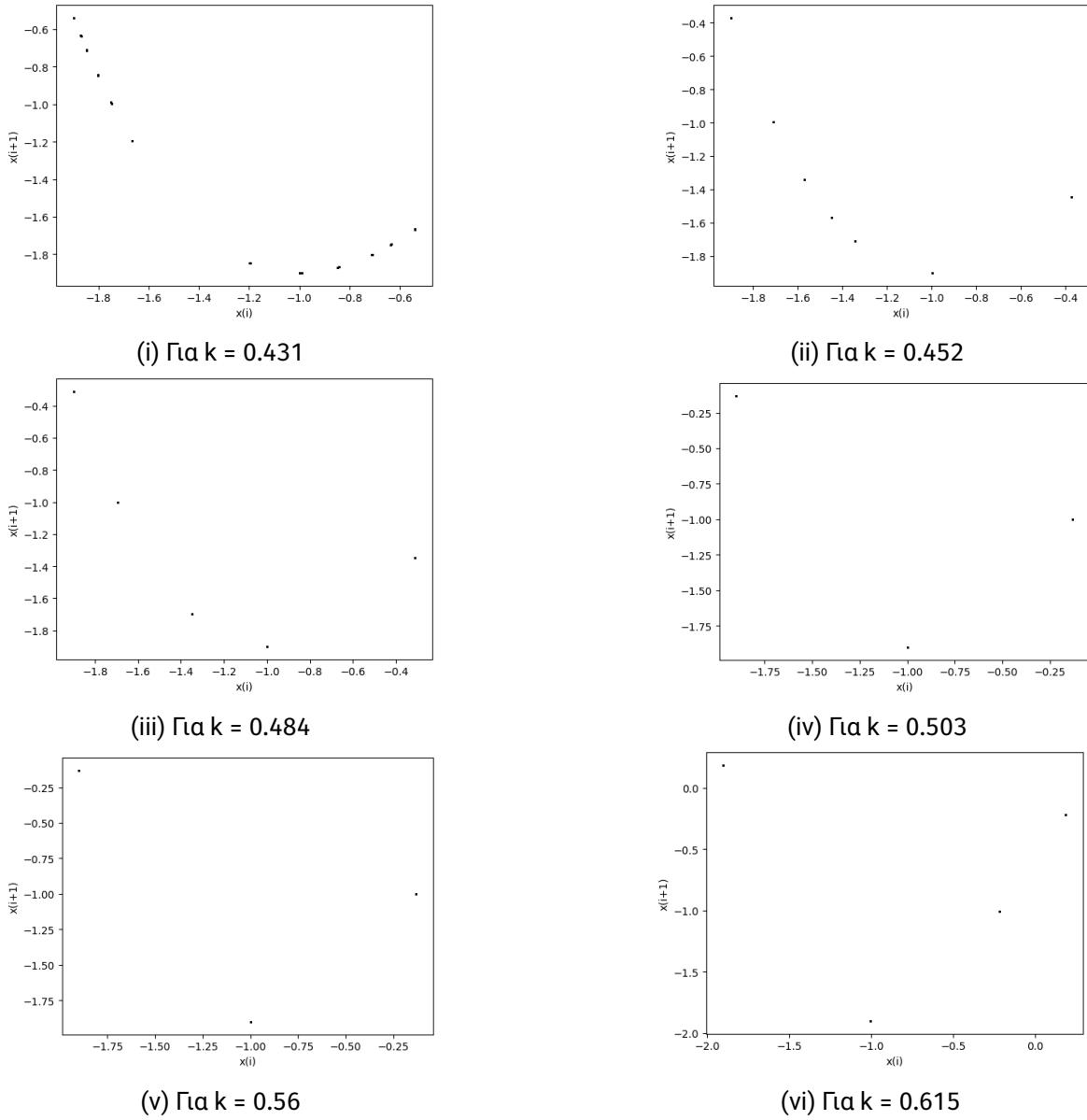
Σχήμα 2.42: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.9$.



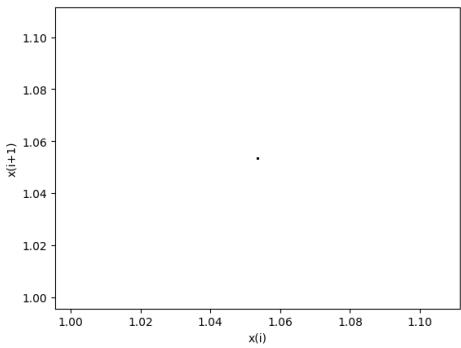
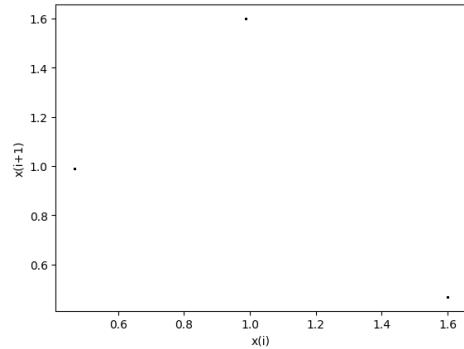
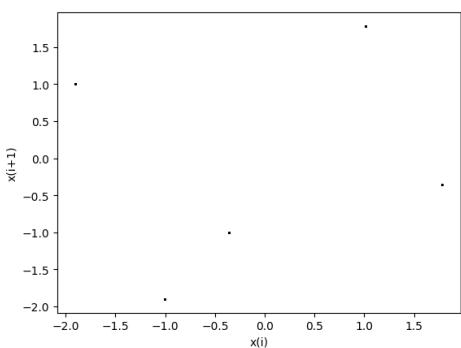
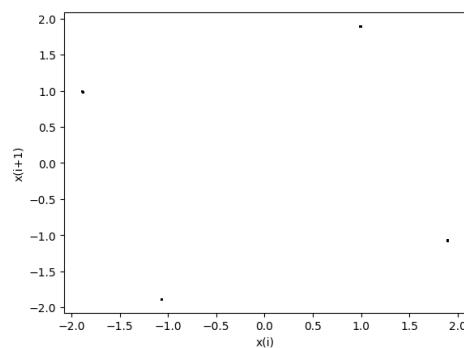
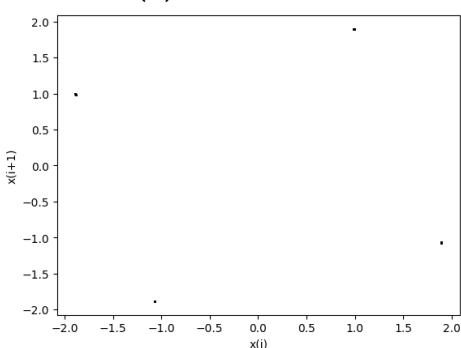
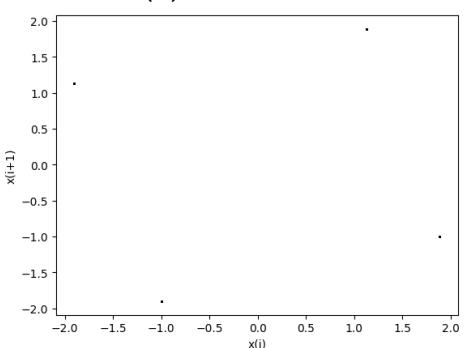
Σχήμα 2.43: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -1.9$.

Πίνακας 2.9: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -1.9$, για $x_i = 0.1$

Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.21	Περίοδος - 2
0.37	Περίοδος - 4
0.41	Περίοδος - 8
0.422	Περίοδος - 16
0.426	Χαός
0.431	Περίοδος - 17
0.432	Χάος
0.452	Περίοδος - 5
0.454	Περίοδος - 11
0.455	Χάος
0.484	Περίοδος - 7
0.485	Χάος
0.503	Περίοδος - 5
0.504	Περίοδος - 9
0.506	Χάος
0.56	Περίοδος - 3
0.57	Περίοδος - 6
0.574	Περίοδος - 11
0.577	Χάος
0.615	Περίοδος - 5
0.616	Χάος
0.66	Περίοδος - 4
0.661	Περίοδος - 7
0.663	Χάος
0.74	Περίοδος - 1
0.796	Περίοδος - 2
0.83	Περίοδος - 4
0.844	Περίοδος - 8
0.846	Περίοδος - 14
0.848	Χάος
0.875	Περίοδος - 3
0.8752	Περίοδος - 5
0.878	Χάος
0.921	Περίοδος - 5
0.922	Χαός
0.949	Περίοδος - 6
0.951	Χάος
0.9597	Περίοδος - 4
0.961	Χαός



Σχήμα 2.44: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(i) Για $k = 0.66$ (ii) Για $k = 0.74$ (iii) Για $k = 0.875$ (iv) Για $k = 0.921$ (v) Για $k = 0.949$ (vi) Για $k = 0.9597$

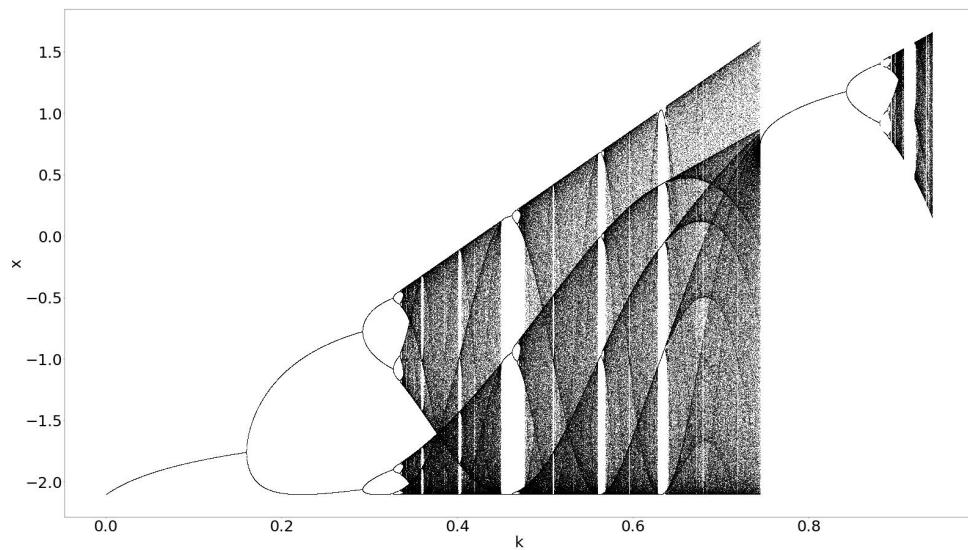
Σχήμα 2.45: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.10 Για $q = -2.1$

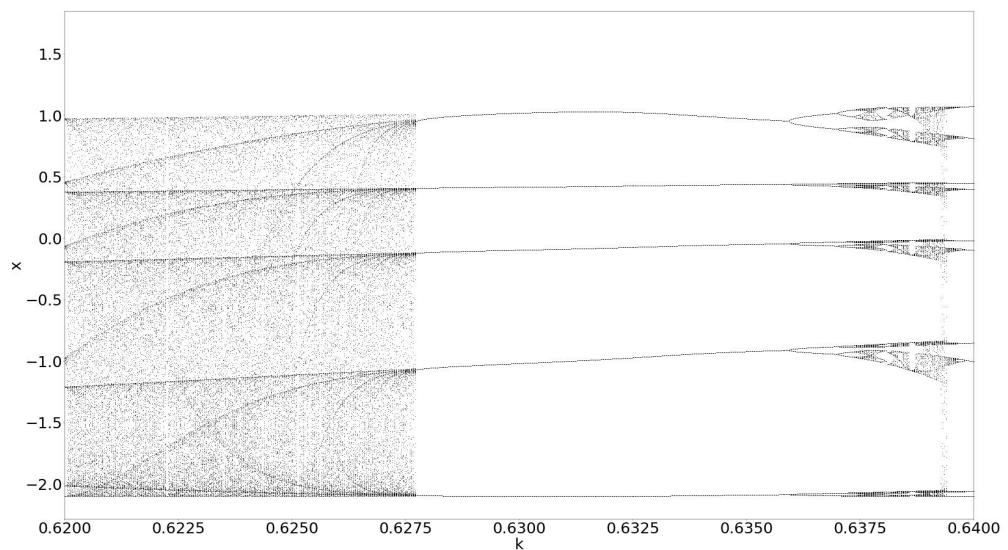
Στο Σχ. 2.46 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = -1.9$. Στον πίνακα 2.10 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.48. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($0.358, 0.4, 0.45, 0.507, 0.558, 0.627, 0.638, 0.6384, 0.745, 0.921, 0.949, 0.9597$), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 2.48, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.10.

Επίσης στο Σχ. 2.48 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης για $0.626 < k < 0.641$. Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στο φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του q . Επίσης παρατηρούμε στο εστιασμένο διάγραμμα τη δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Αυτό επιβεβαιώνεται από τον πίνακα 2.10 όπου από το $k = 0.636$ (περίοδος - 10) μετά από δύο διπλασιασμούς $k = 0.6371$ (περίοδος - 20), $k = 0.6374$ (περίοδος - 40), εμφανίζεται χαοτική φυσαλίδα για $k = 0.6377$ (χάος). Μέτα το σύστημα εξέρχεται από το χάος για $k = 0.638$ (περίοδος - 40) με αντίστροφο διπλασιασμό. Ενώ για $k = 0.6383$ (χάος) διακόπτεται ο αντίστροφος διπλασιασμός και το σύστημα εισέρχεται στο χάος. Για $k = 0.6384$ (περίοδος - 30) εξέρχεται από το χάος για να ξανά εμφανίσει τελικά χάος για $k = 0.639$. Για αυτές τις τιμές του k παράχθηκαν τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Τέλος, στο Σχ. 2.47 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 0.94]$. Οι τιμές του πίνακα 2.10 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.47 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



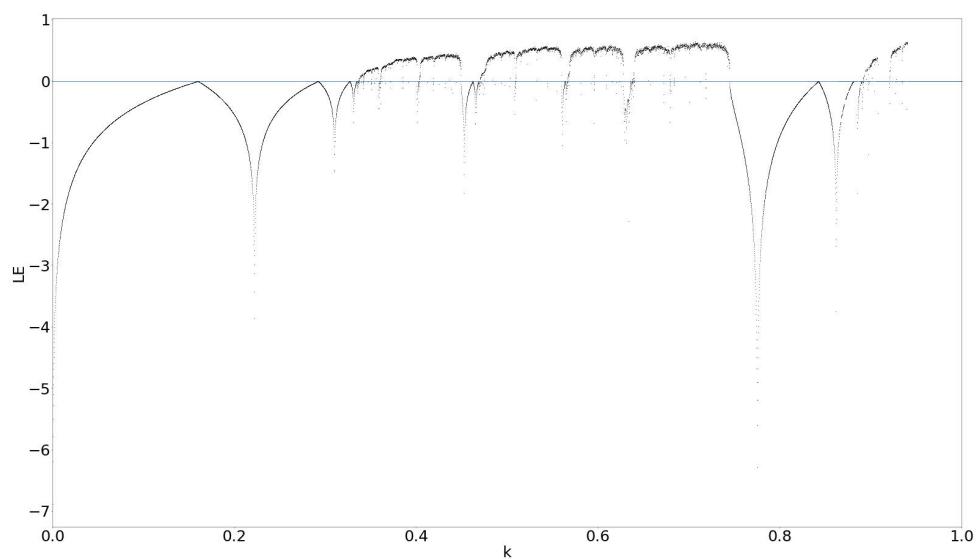
Σχήμα 2.46: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$.



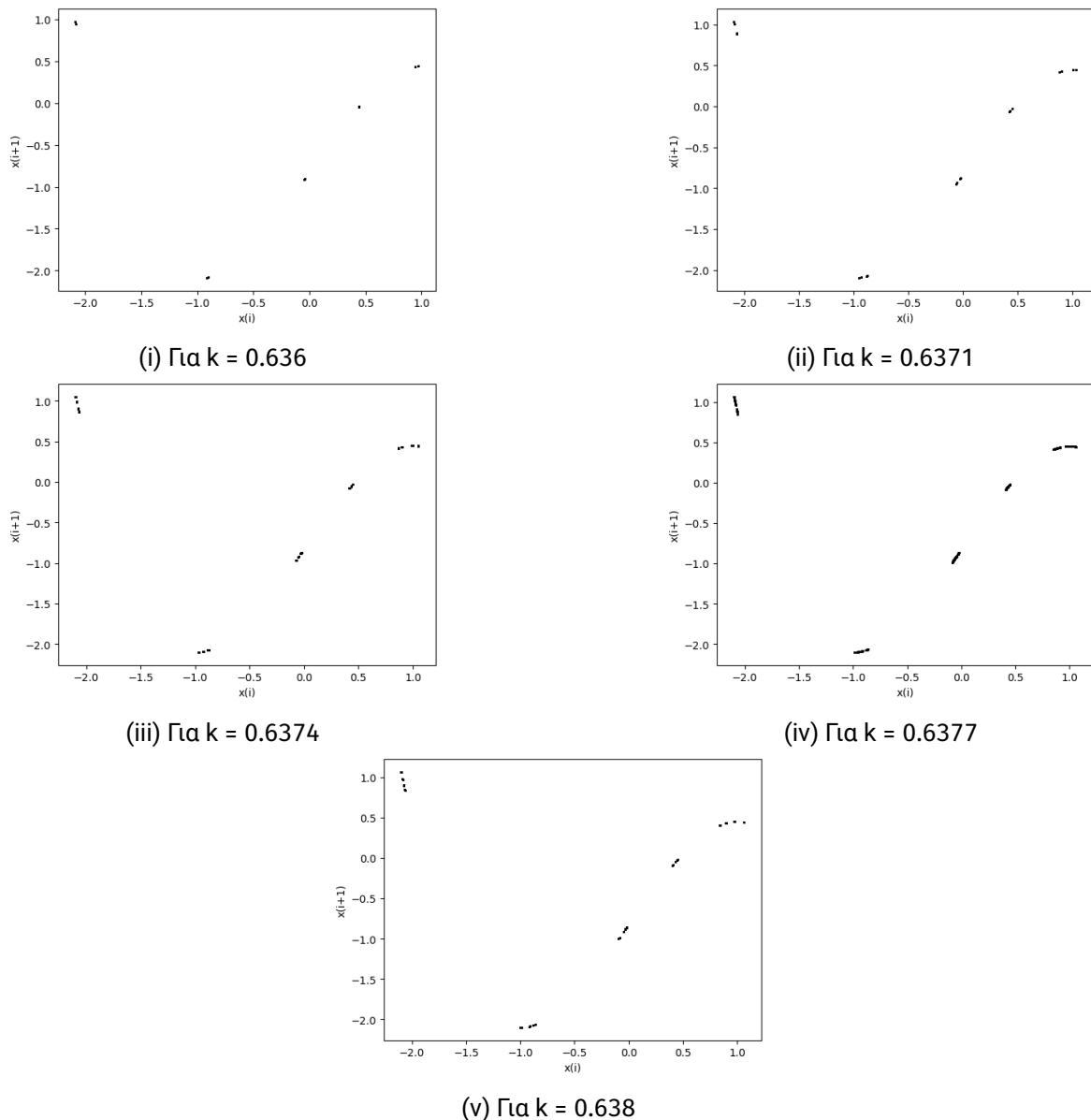
Σχήμα 2.47: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$.

Πίνακας 2.10: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -2.1$

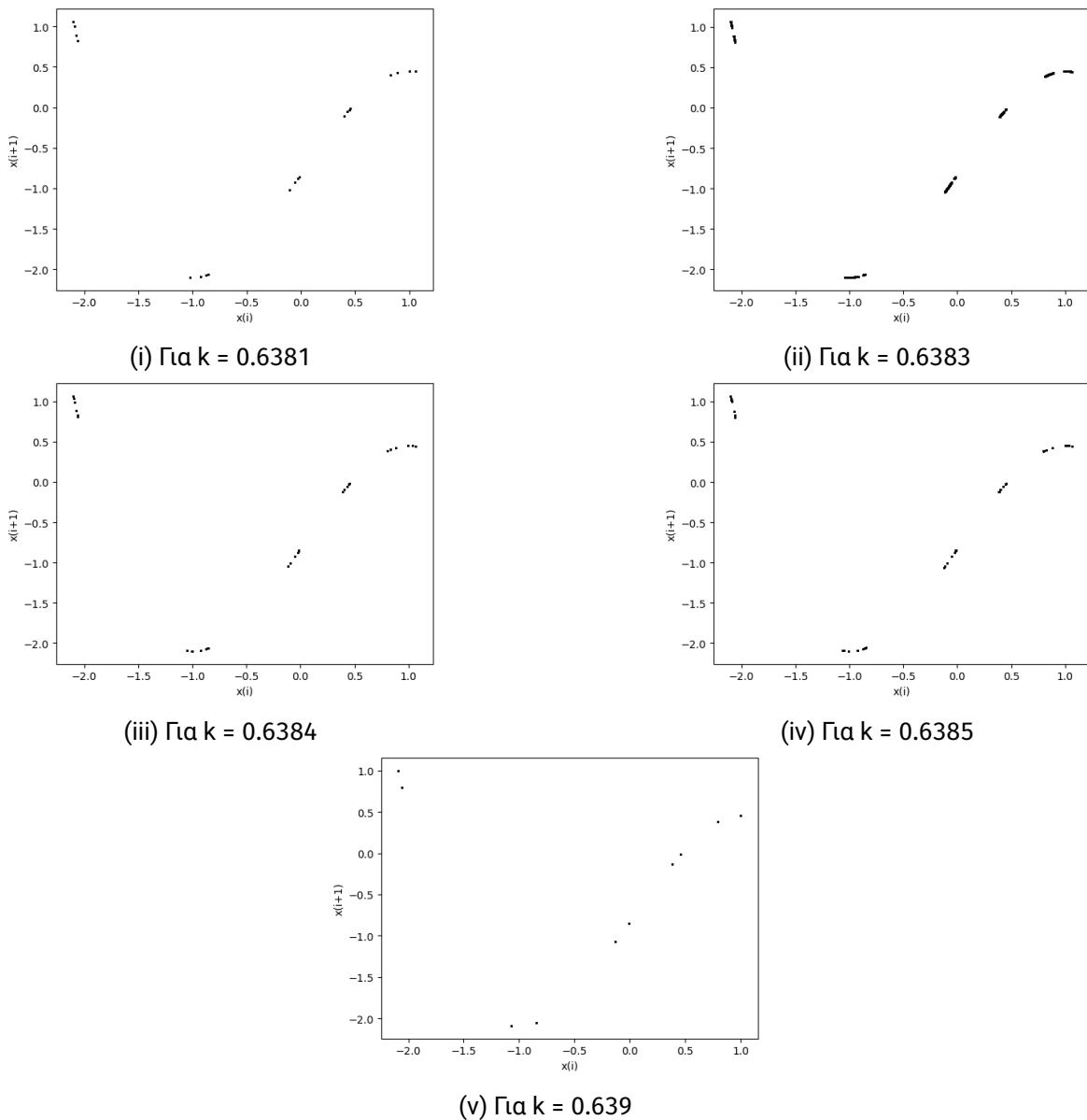
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.16	Περίοδος - 2
0.29	Περίοδος - 4
0.32	Περίοδος - 8
0.334	Περίοδος - 16
0.337	Χάος
0.358	Περίοδος - 6
0.36	Χάος
0.4	Περίοδος - 5
0.402	Περίοδος - 10
0.403	Χάος
0.45	Περίοδος - 3
0.46	Περίοδος - 6
0.468	Περίοδος - 12
0.47	Χάος
0.507	Περίοδος - 5
0.508	Περίοδος - 10
0.51	Χάος
0.558	Περίοδος - 4
0.56	Περίοδος - 8
0.568	Χάος
0.627	Περίοδος - 5
0.636	Περίοδος - 10
0.6371	Περίοδος - 20
0.6374	Περίοδος - 40
0.6377	Χάος
0.638	Περίοδος - 40
0.6381	Περίοδος - 20
0.6383	Χάος
0.6384	Περίοδος - 30
0.6835	Περίοδος - 40
0.6836	Περίοδος - 10
0.64	Χάος
0.745	Περίοδος - 1
0.8426	Περίοδος - 2
0.88	Περίοδος - 4
0.889	Περίοδος - 8
0.89	Χάος



Σχήμα 2.48: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -2.1$.



Σχήμα 2.49: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).



Σχήμα 2.50: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

2.11 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη, της οποίας βασικό χαρακτηριστικό είναι η χαοτική συμπεριφορά που εμφανίζε σε όλες τις περιπτώσεις που ελέχθηκαν για την παράμετρο q , όπως και για τα επι μερούς φαινόμενα που οδηγούν σε αυτήν.

Ειδικότερα, το συνηθέστερο φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις είναι αυτό της μετάβασης στο χάος μέσω του διπλασιασμού της περιόδου, ξεκινώντας από διάστημα περιόδου-1. Για κάποιες παραμέτρους q εμφανίστηκε η ανάστροφη πορεία του συστήματος κατά την έξοδο του από την χαοτική περιοχή, παρουσιάζοντας έτσι το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας(χαοτική φυσαλίδα). Επίσης αρκετές φορές παρατηρήθηκε το φαινόμενος της υστέρησης δηλαδή "έσπαγε" η περιοδική συμπεριφορά, καθώς και το φαινόμενο των κρίσεων είτε εσωτερικών που χαρακτηρίζονται από την διεύρηση του χαοτικού τμήματος, είτε συνοριακές όπου το σύστημα εξέρχεται απότομα από την χαοτική περιοχή και μεταβαίνει σε μία περιοδική.Παρατηρήθηκε οτι με την δεύτερη μετέβαινε το σύστημα σε διάστημα περιόδου-3.

Κεφάλαιο 3

Παραλλαγή του sine-sinh Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διακριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού *sine-sinh-sine* Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μπορεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} .

Ο *sine-sinh-sine* Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i = k * \sin(\pi * \sinh(\pi * \sin(\pi * x_{i-1}))) \quad (3.1)$$

Στην εξίσωση (3.1) προστέθηκε ένας σταθερός όρος q . Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη,

$$x_i = k * \sin(q * \sinh(q * \sin(2 * x_{i-1}))) \quad (3.2)$$

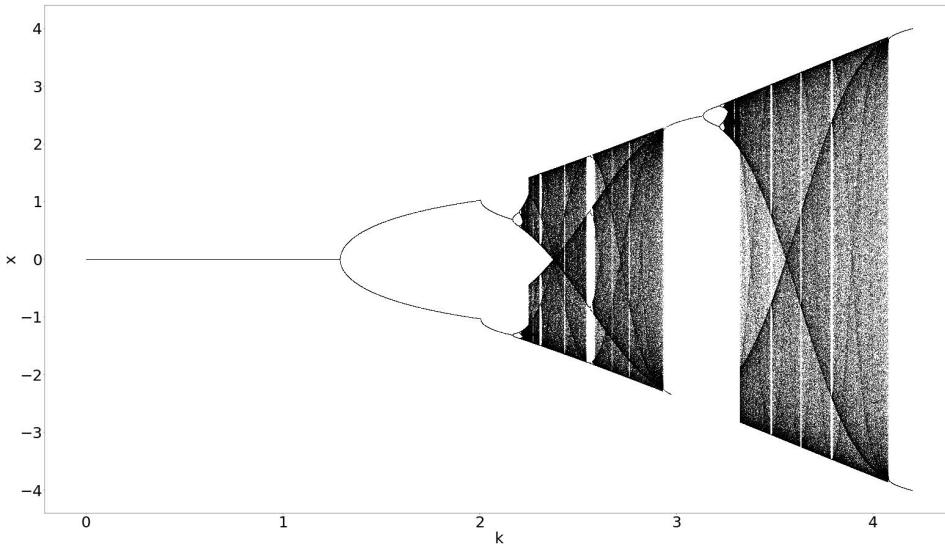
όπου k, q : παράμετροι.

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος (3.2) εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του συστήματος $x_0 = 0.1$ παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβαλλόταν στο διάστημα $[-0.3, -0.5]$ με βήμα 0.2. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

3.1 Για $q = -0.3$

Στο Σχ. 3.1 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (3.2), ως προς την παράμετρο k , για $q = -0.3$. Στον πίνακα 3.1 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.1. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (2.27, 2.31, 2.43, 2.671, 2.76, 2.935, 3.293, 3.48, 3.629, 3.79), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.1, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1 και περίοδο - 2. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο Πίνακα 3.1, όπως και τα αντίστοιχα Σχ. 3.3, 3.4 των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

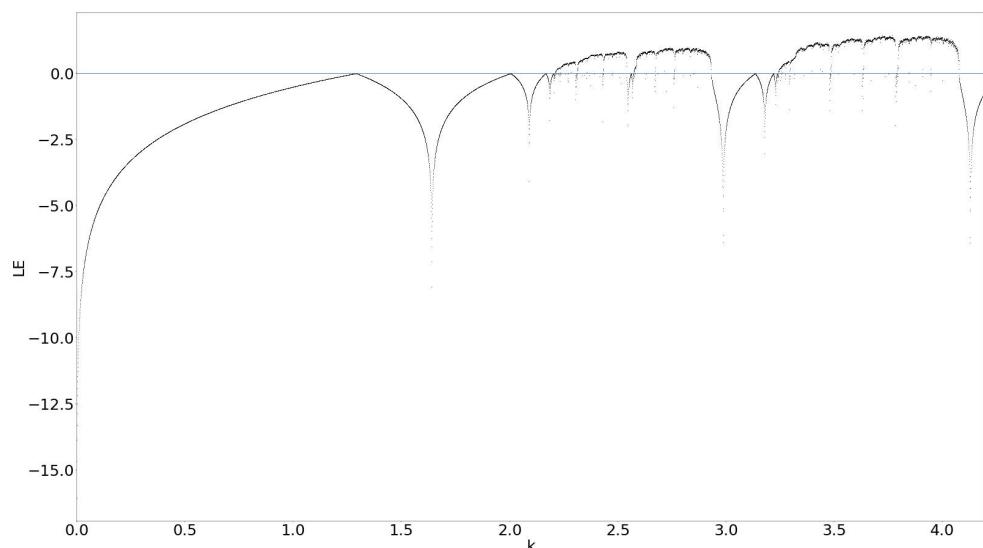
Τέλος, στο Σχ. 3.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 4.2]. Οι τιμές του Πίνακα 3.1 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 3.1 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



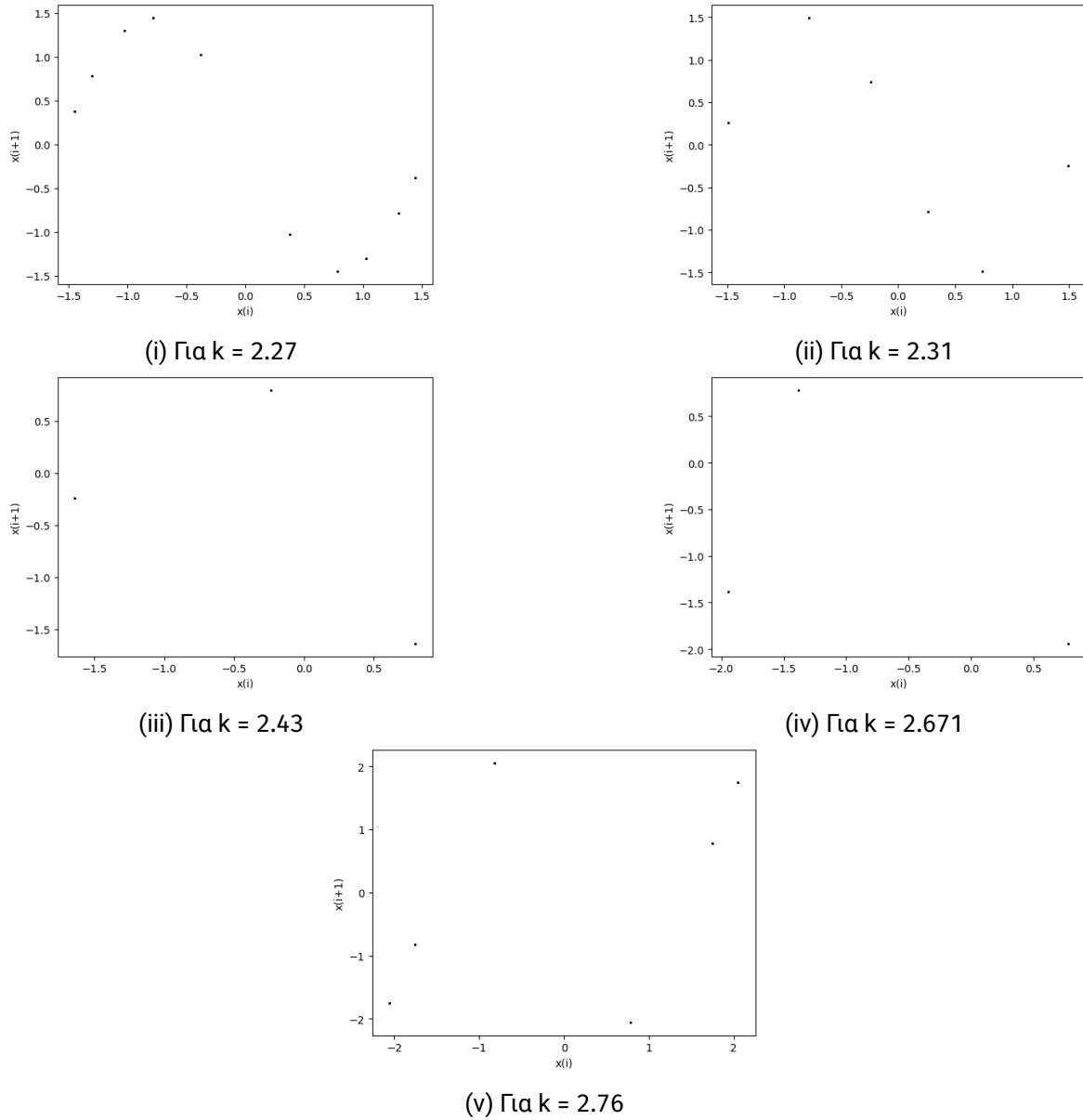
Σχήμα 3.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$.

Πίνακας 3.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.3$

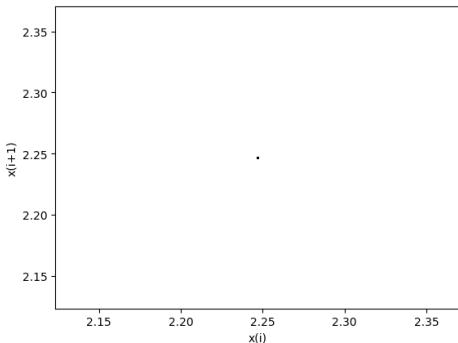
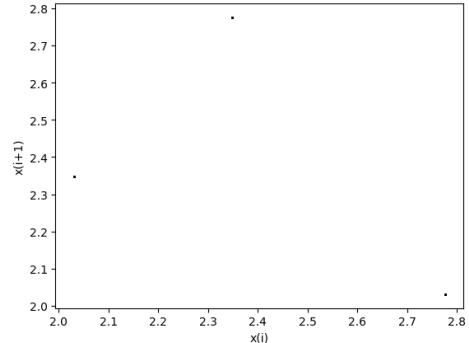
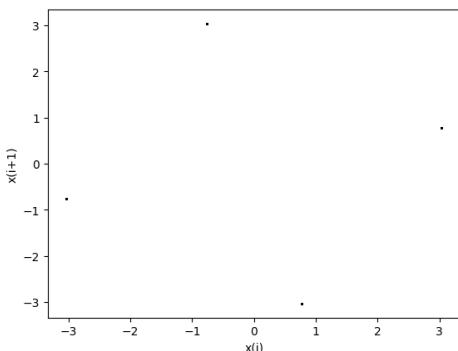
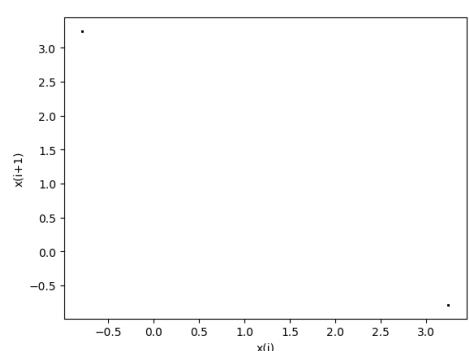
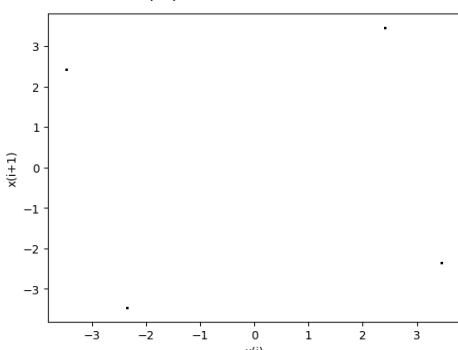
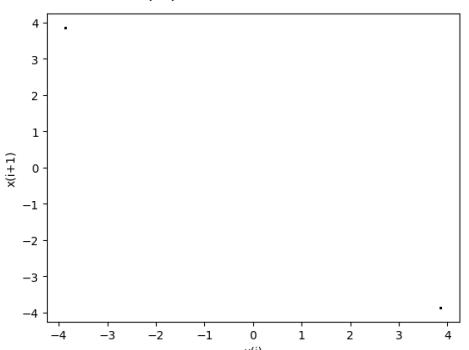
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.25	Περίοδος - 1
1.287	Περίοδος - 2
2.17	Περίοδος - 4
2.2	Περίοδος - 8
2.21	Χάος
2.27	Περίοδος - 10
2.272	Χάος
2.31	Περίοδος - 6
2.32	Χάος
2.43	Περίοδος - 3
2.435	Χάος
2.671	Περίοδος - 3
2.672	Περίοδος - 6
2.675	Χάος
2.76	Περίοδος - 6
2.77	Χάος
2.935	Περίοδος - 1
3.14	Περίοδος - 2
3.22	Περίοδος - 4
3.238	Περίοδος - 8
3.24	Χάος
3.293	Περίοδος - 3
3.294	Περίοδος - 6
3.295	Χάος
3.48	Περίοδος - 4
3.49	Χάος
3.629	Περίοδος - 2
3.632	Περίοδος - 4
3.643	Χάος
3.79	Περίοδος - 4
3.8	Χάος
4.09	Περίοδος - 2



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = -0.3$.



Σχήμα 3.3: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(i) Για $k = 2.935$ (ii) Για $k = 3.293$ (iii) Για $k = 3.48$ (iv) Για $k = 3.629$ (v) Για $k = 3.79$ (vi) Για $k = 4.09$

Σχήμα 3.4: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

3.2 Για $q = -0.5$

Στο Σχ. 3.5 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 3.2, ως προς την παράμετρο k , για $b = 2$, $q = -0.5$ και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή για διαφορετικό x_0 . Συγκρίνοντας το διάγραμμα του Σχ. 3.5i ($x_0 = 0.1$) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης των Σχ. 3.5ii ($x_0 = 0.5$), 3.5iii ($x_0 = 1$), παρατηρείται ότι για $q = -0.5$ εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα αντίστοιχα διαγράμματα Lyapunov των Σχ. 3.6i, 3.6ii, 3.6iii, όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.8i, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

Στον Πίνακα 3.2 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.5i. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα Σχ. 3.10 προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

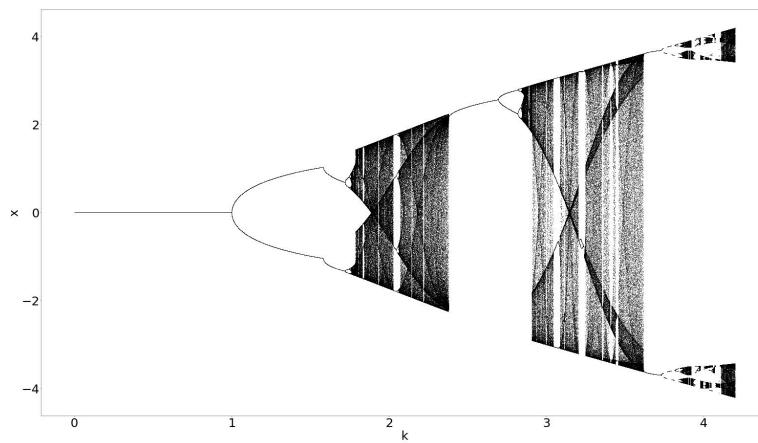
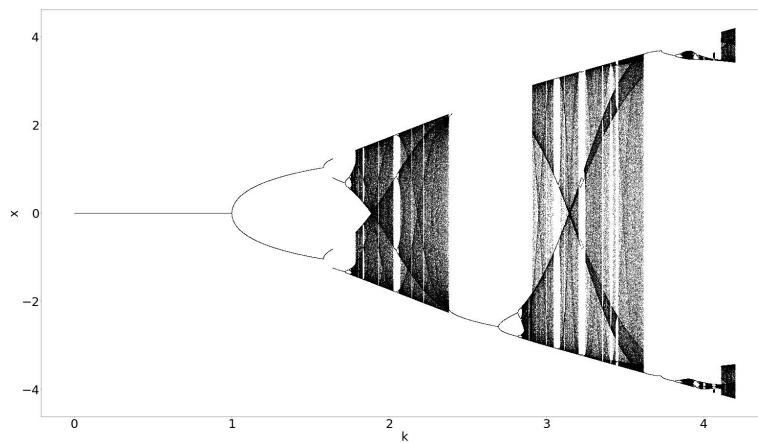
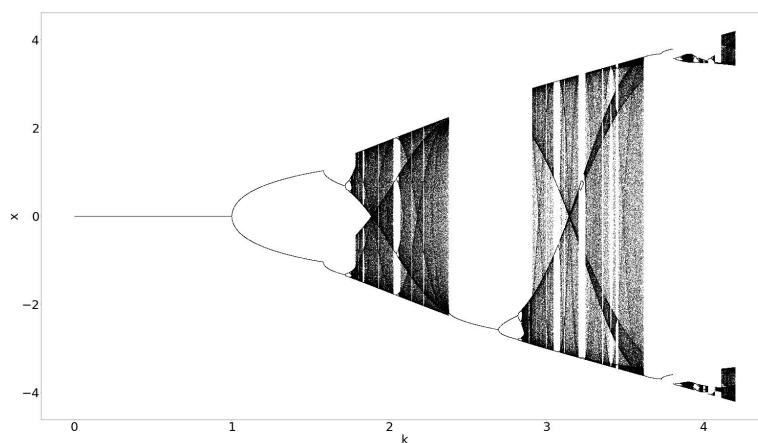
Επίσης παρατηρείται η εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k (1.773, 1.8, 1.831, 1.93, 2.03, 2.141, 2.2, 2.38, 2.88, 2.99, 3.04, 3.2, 3.35, 3.4, 3.44, 3.62, 3.93), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.5i στην μεταπόδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-1, και περίοδο -2. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο Πίνακα 3.2.

Επιπλέον παρατηρούμε στα διαγράμματα των Σχ. 3.7i, 3.7ii, 3.7iii το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Συγκεκριμένα στο διάγραμμα του Σχ. 3.7i εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου), για $k = 3.84$, της οποίας η εξέλιξη φαίνεται στα υπόλοιπα δύο διαγράμματα των Σχ. 3.7ii, 3.7iii, όπου για διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0 διακρίνεται καλύτερα. Ακόμη στο διάγραμμα του Σχ. 3.5iii το φαινόμενο εμφανίζεται άλλη μία φορά για $3.95 < k < 4.05$. Μεταξύ αυτών των χαοτικών φυσαλίδων παρατηρούμε και τις δύο περιπτώσεις του φαινομένου δηλαδή τον ορθό και τον ανάστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Στα Σχ. 3.8i, 3.8ii, 3.8iii παρατηρείται ότι για $k = 3.206$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος -4) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 3.23$, οπότε εδώ παρατηρούμε το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας δηλαδή έχουμε μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για $k = 3.23$.

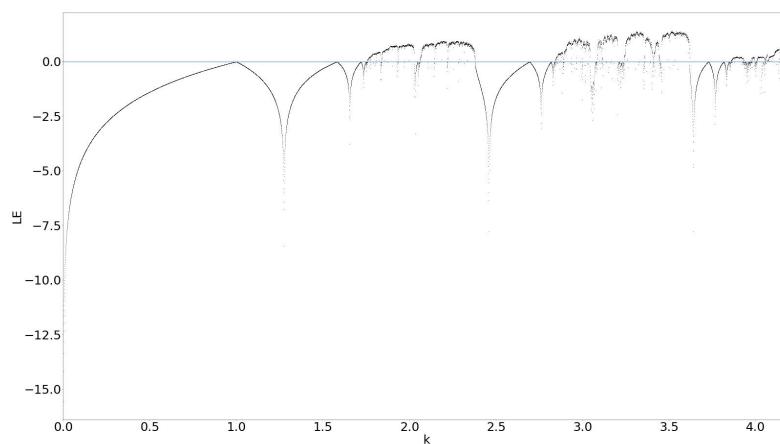
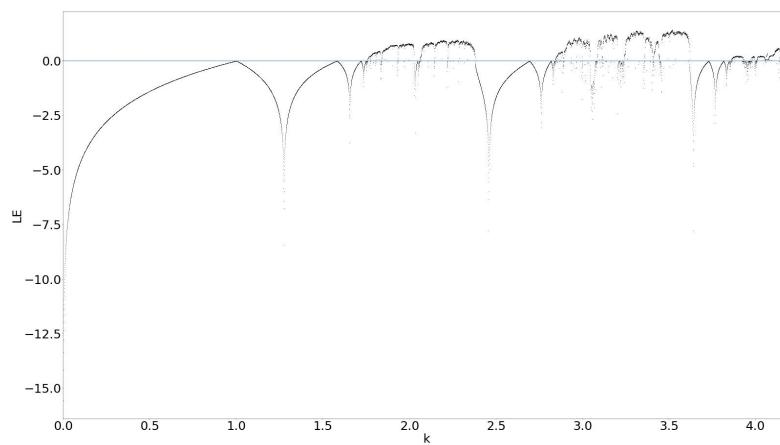
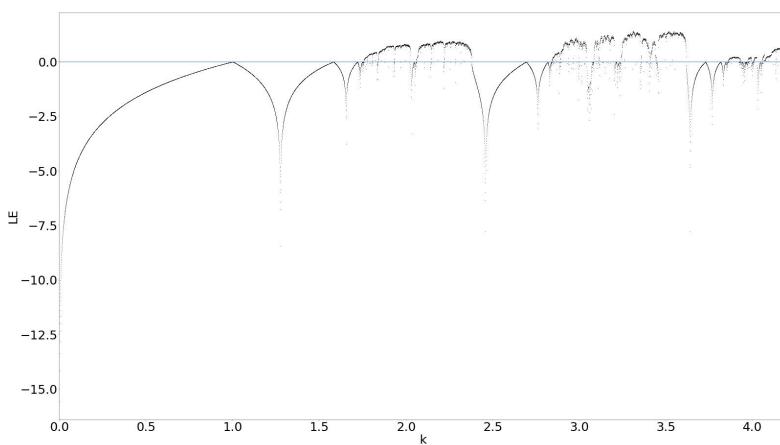
Τέλος, στο σχήμα 2.29i παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 4.2]. Οι τιμές του Πίνακα 3.2 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 3.6i, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 3.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = -0.5$

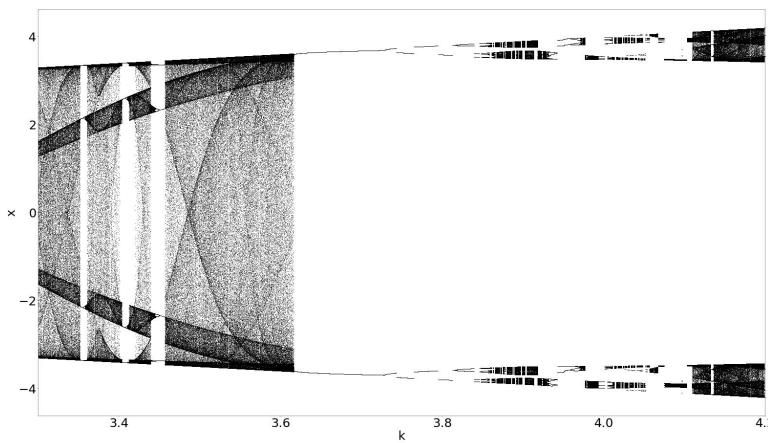
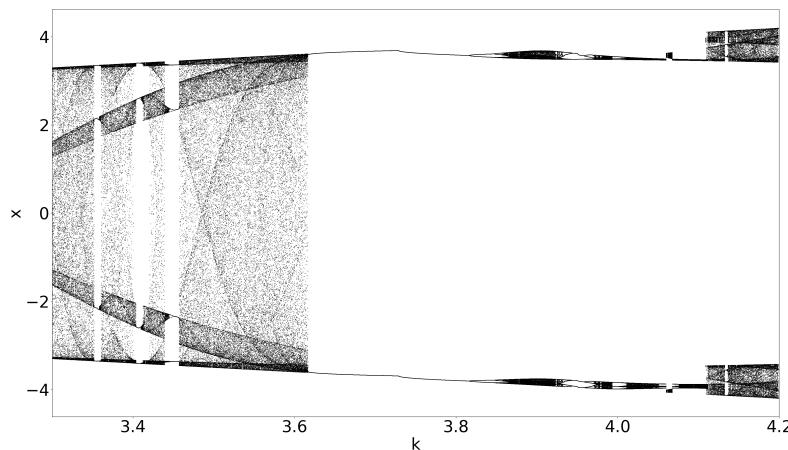
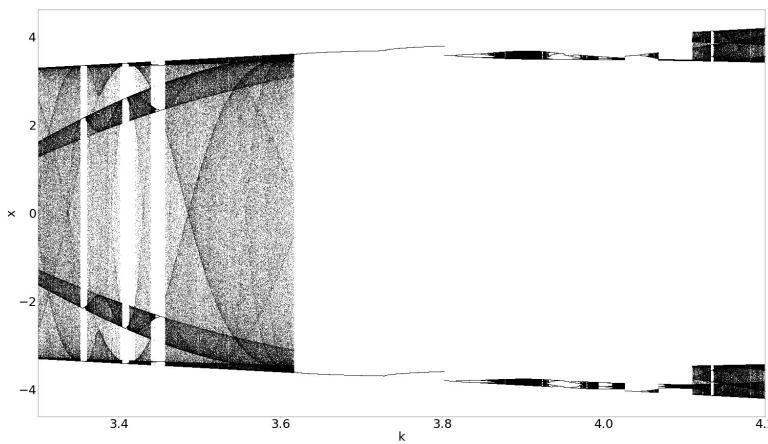
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
0.25	Περίοδος - 1
1	Περίοδος - 2
1.7	Περίοδος - 4
1.748	Περίοδος - 8
1.75	Χάος
1.773	Περίοδος - 6
1.774	Περίοδος - 12
1.775	Χάος
1.8	Περίοδος - 10
1.806	Χάος
1.831	Περίοδος - 6
1.84	Χάος
1.93	Περίοδος - 6
1.935	Χάος
2.03	Περίοδος - 4
2.06	Χάος
2.141	Περίοδος - 6
2.144	Χάος
2.2	Περίοδος - 6
2.25	Χάος
2.38	Περίοδος - 1
2.69	Περίοδος - 2
2.81	Περίοδος - 4
2.83	Περίοδος - 8
2.84	Χάος
2.88	Περίοδος - 3
2.89	Χάος
2.99	Περίοδος - 6
3	Περίοδος - 12
3.01	Χάος
3.04	Περίοδος - 4
3.08	Χάος
3.2	Περίοδος - 2
3.206	Περίοδος - 4
3.23	Περίοδος - 2
3.24	Χάος
3.35	Περίοδος - 4
3.36	Χάος
3.4	Περίοδος - 4
3.41	Χάος
3.44	Περίοδος - 4
3.45	Χάος
3.62	Περίοδος - 2
3.8	Περίοδος - 4
3.84	Χάος
3.94	Περίοδος - 8
3.95	Περίοδος - 4
3.96	Περίοδος - 8
3.97	Περίοδος - 16
Βασίλειος Ασημακόπουλος	Χάος
3.98	Περίοδος - 6
4	Περίοδος - 4
4.05	Χάος
4.07	

(i) $x_0 = 0.1$ (ii) $x_0 = 0.5$ (iii) $x_0 = 1$

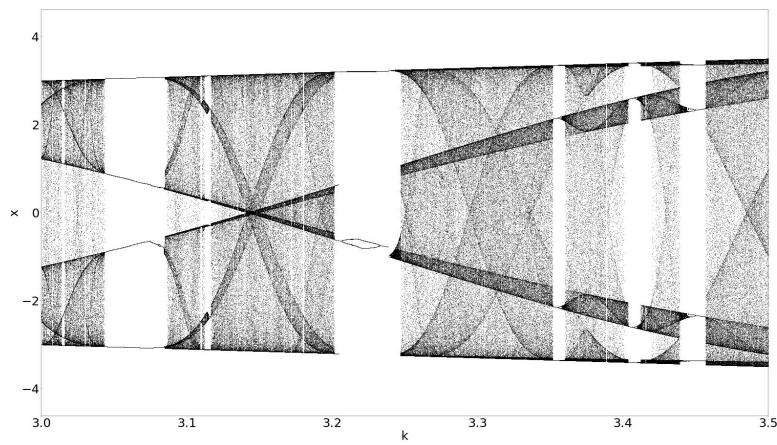
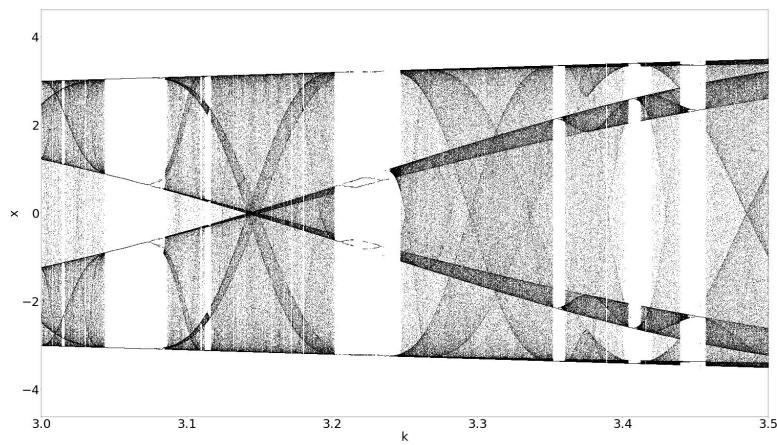
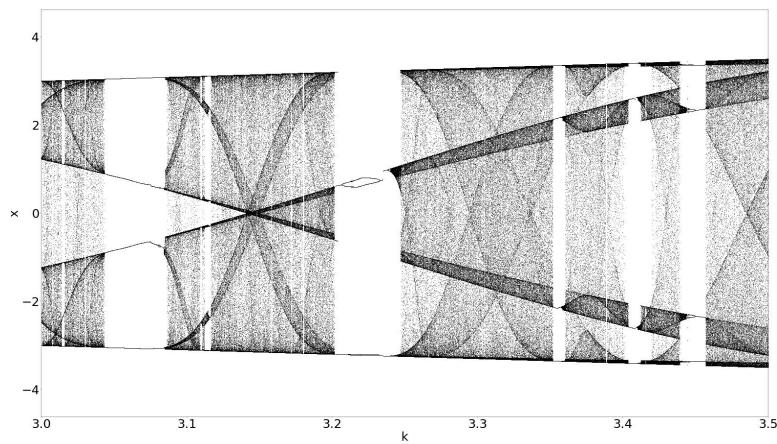
Σχήμα 3.5: Διαγράμματα διακλάδωσης, για $b = 2$, $q = -0.5$

(i) Για $x_0 = 0.1$ (ii) Για $x_0 = 0.5$ (iii) Για $x_0 = 1$

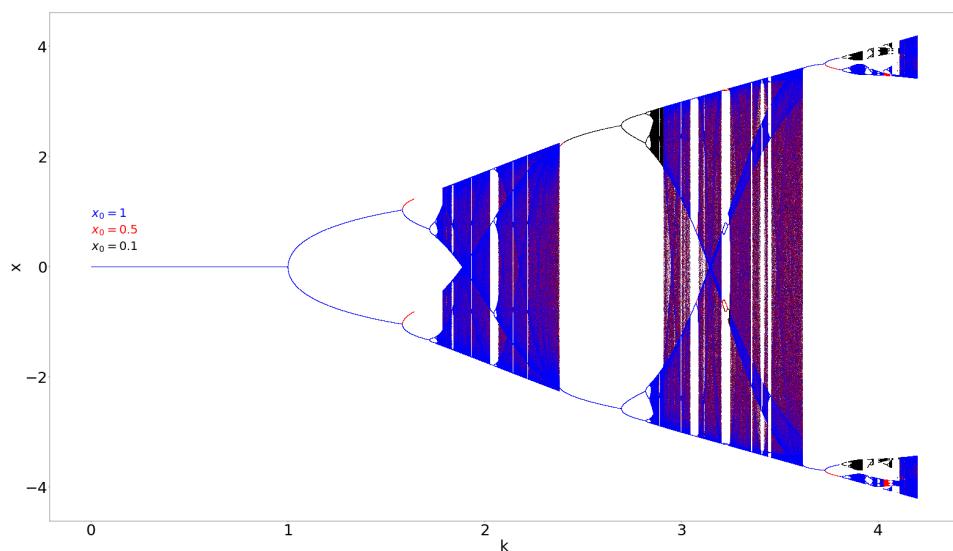
Σχήμα 3.6: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $b = 2, q = -0.5$.

(i) $x_0 = 0.1$ (ii) $x_0 = 0.5$ (iii) $x_0 = 1$

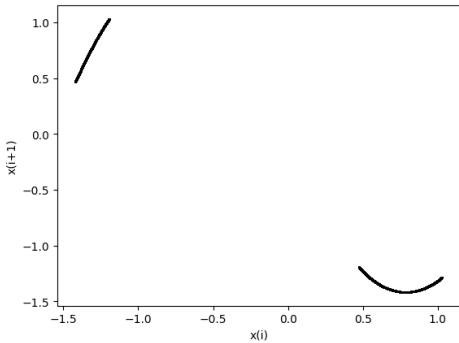
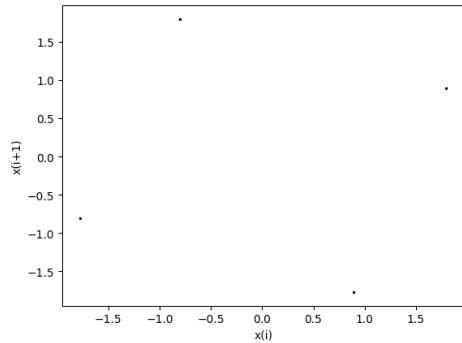
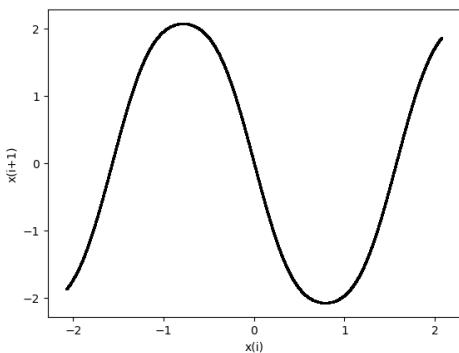
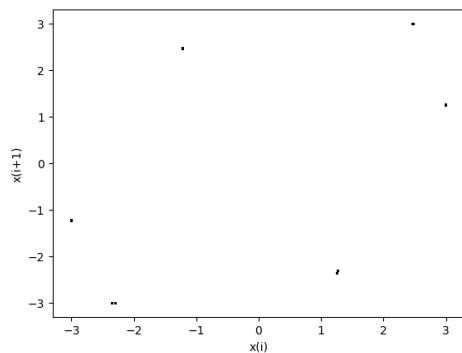
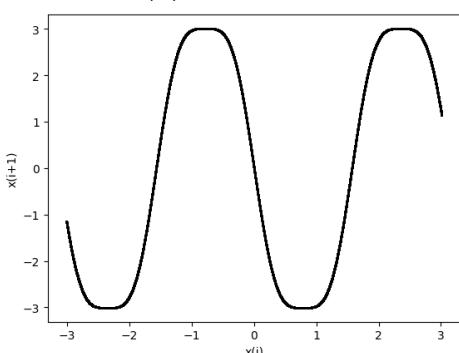
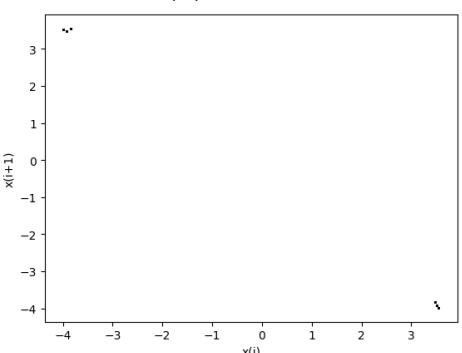
Σχήμα 3.7: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0 .

(i) $x_0 = 0.1$ (ii) $x_0 = 0.5$ (iii) $x_0 = 1$

Σχήμα 3.8: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του x_0 .



Σχήμα 3.9: Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες x_0 .

(i) Για $k = 1.775$ (ii) Για $k = 2.03$ (iii) Για $k = 2.25$ (iv) Για $k = 3$ (v) Για $k = 3.01$ (vi) Για $k = 4$

Σχήμα 3.10: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

3.3 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία παραλλαγή του *sine-sinh-sine* Χάρτη, της οποίας βασικό χαρακτηριστικό είναι η χαοτική συμπεριφορά που εμφανίζε σε όλες τις περιπτώσεις που ελέχθηκαν για την παράμετρο q , όπως και για τα επι μερούς φαινόμενα που οδηγούν σε αυτήν.

Ειδικότερα, το συνηθέστερο φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις είναι αυτό της μετάβασης στο χάος μέσω του διπλασιασμού της περιόδου, ξεκινώντας από διάστημα περιόδου-1. Για κάποιες παραμέτρους q εμφανίστηκε η ανάστροφη πορεία του συστήματος κατά την έξοδο του από την χαοτική περιοχή, παρουσιάζοντας έτσι το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας(χαοτική φυσαλίδα). Επίσης αρκετές φορές παρατηρήθηκε το φαινόμενος της υστέρησης δηλαδή "έσπαγε" η περιοδική συμπεριφορά, καθώς και το φαινόμενο των κρίσεων είτε εσωτερικών που χαρακτηρίζονται από την διεύρυνση του χαοτικού τμήματος, είτε συνοριακές όπου το σύστημα εξέρχεται απότομα από την χαοτική περιοχή και μεταβαίνει σε μία περιοδική.Παρατηρήθηκε οτι με την δεύτερη μετέβαινε το σύστημα σε διάστημα περιόδου-3.

Κεφάλαιο 4

Παραλλαγή του Chebysev Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διακριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού Chebysev Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μπορεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} .

Ο Chebysev Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i = \cos(k * \arccos(x_{i-1})) \quad (4.1)$$

Στην εξίσωση (4.1) προστέθηκε ένας σταθερός όρος q . Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Chebysev Χάρτη,

$$x_i = \cos(k^q \arccos(q * x_{i-1})) \quad (4.2)$$

όπου k, q : παράμετροι.

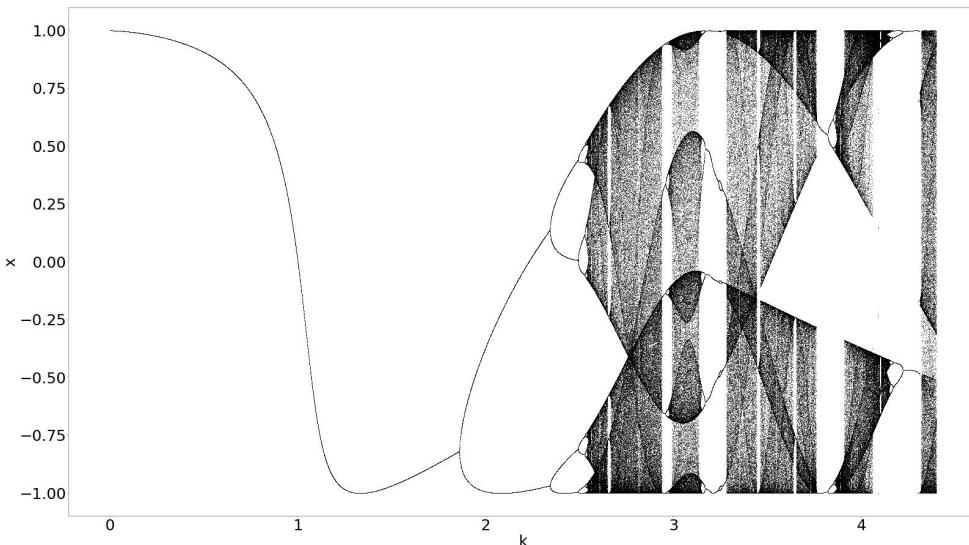
Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του $x_0 = 0.1$ παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου q μεταβαλλόταν στο διάστημα $[0.8, -0.9]$ με βήμα 0.1. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

4.1 Για $q = 0.8$

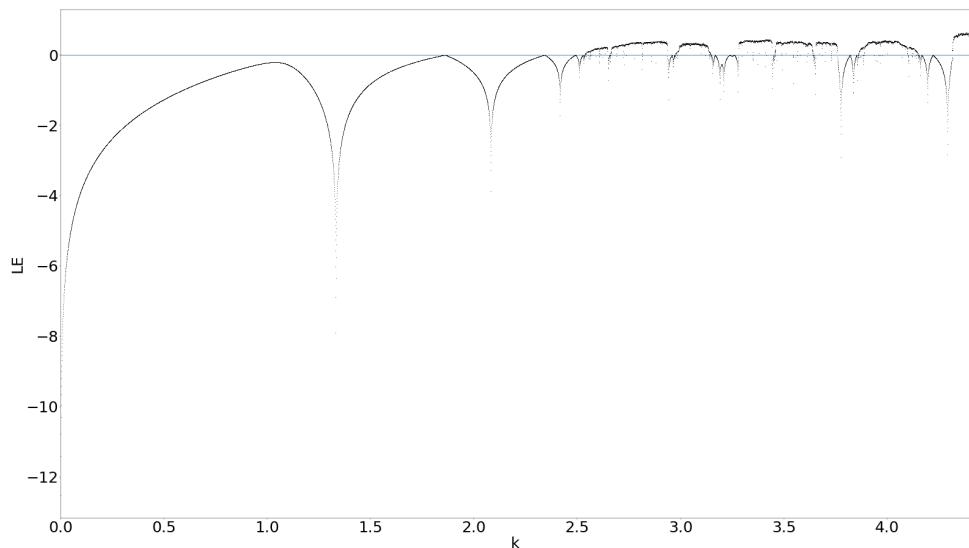
Στο Σχ. 4.1 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος του Σχ. 4.2, ως προς την παράμετρο k , για $q = 0.8$. Στον Πίνακα 4.1 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.1. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($2.65, 2.938, 3.147, 3.45, 3.642, 3.776, 3.886, 4.1, 4.155$), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.1. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στον Πίνακα 4.1, όπως και τα αντίστοιχα Σχ. 4.4, 4.5 των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επιπλέον παρατηρούμε στο Σχ. 4.3, το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Στα τρία διαγράμματα των Σχ. 4.3ii, 4.3iii 4.3 εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου). Συγκεκριμένα στο διάγραμμα 4.3 παρατηρούμε ότι ενδιάμεσα του βασικού ορθού διπλασιασμού εμφανίζεται ένας ακόμα υπό την μορφή εσωτερικής κρίσης για $k = 3.886$ και $k = 4.1$ Ακόμη στο διάγραμμα του Σχ. 4.3iii το φαινόμενο εμφανίζεται άλλη μία φορά για $3.17 < k < 3.258$, όπου παρατηρείται ότι για $k = 3.17$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 10) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 3.258$.

Τέλος, στο σχήμα 4.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 4.4]$. Οι τιμές του Πίνακα 4.1 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 4.1, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



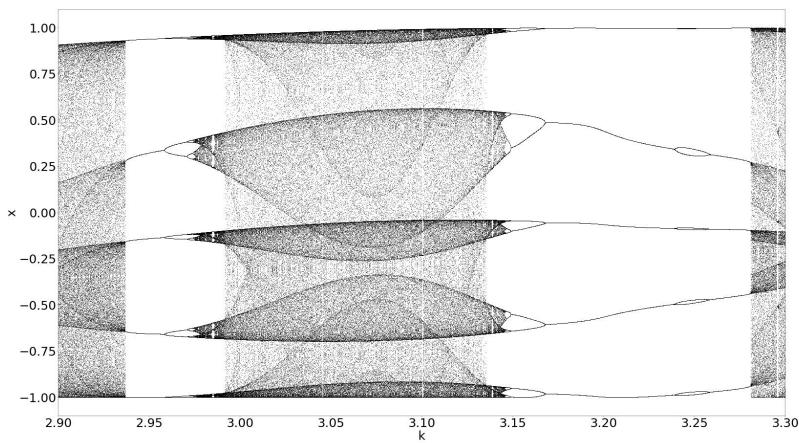
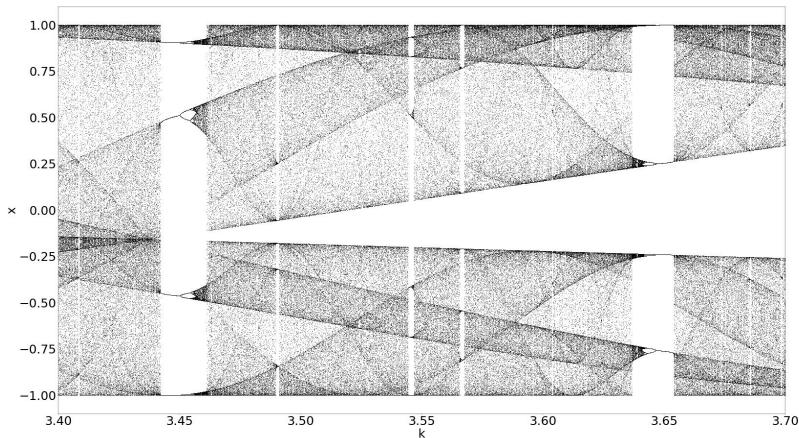
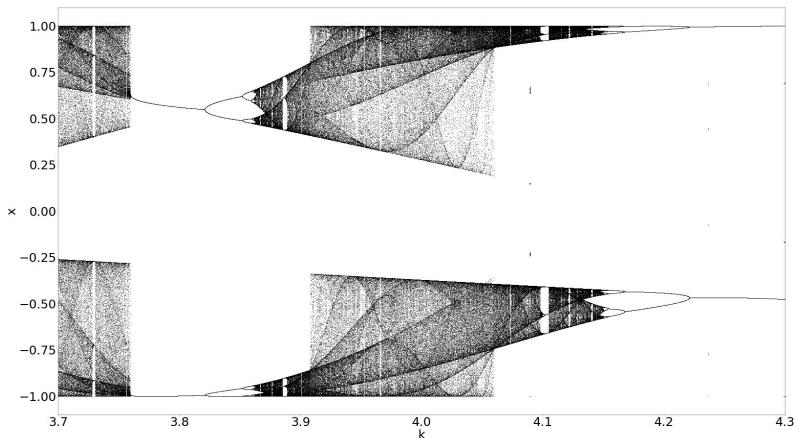
Σχήμα 4.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.8$.



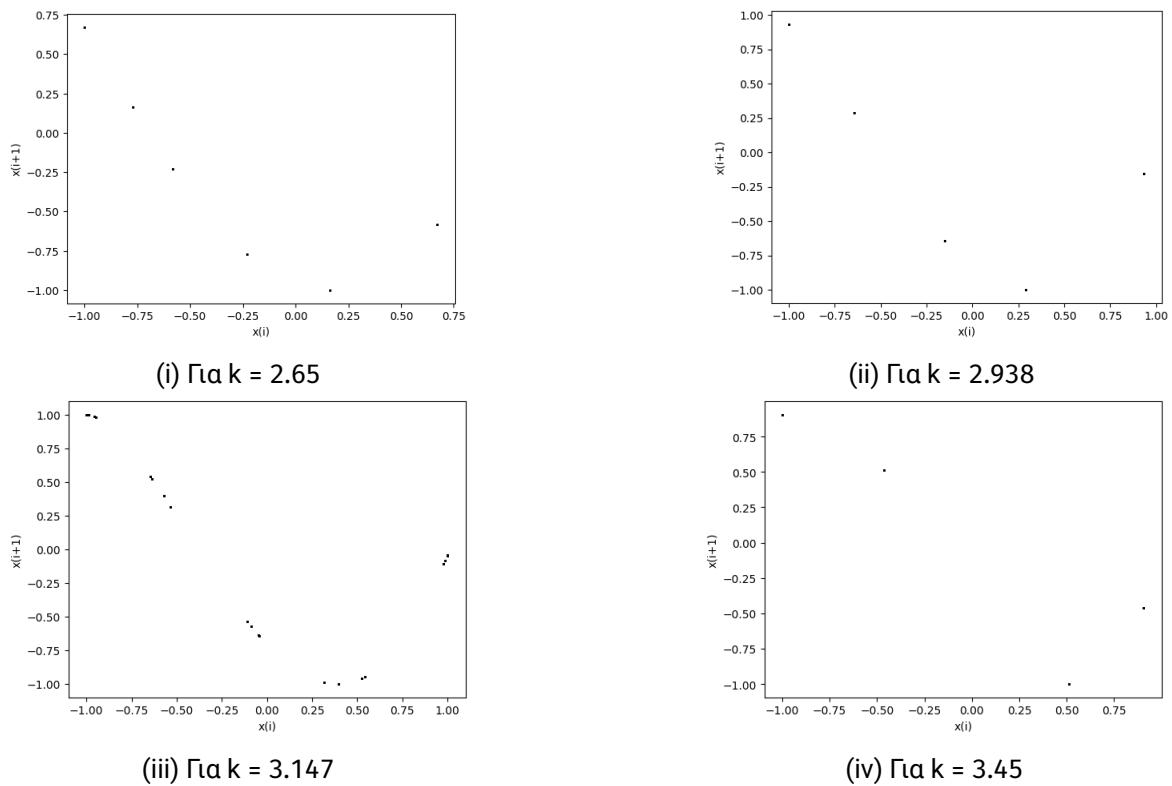
Σχήμα 4.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.8$.

Πίνακας 4.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.8$.

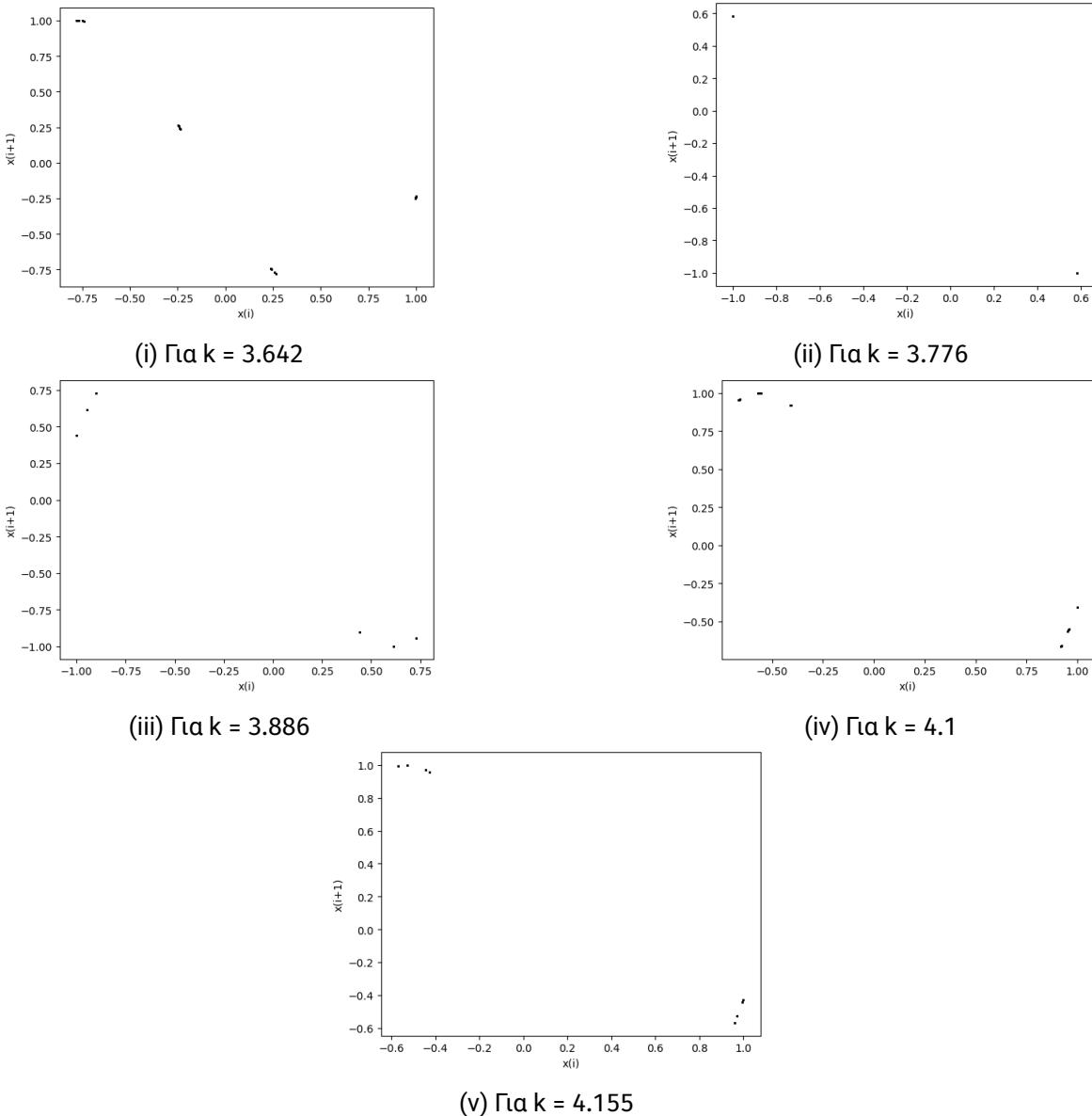
Παράμετρος k	Συμπεριφορά
1.3	Περίοδος - 1
1.86	Περίοδος - 2
2.34	Περίοδος - 4
2.49	Περίοδος - 8
2.52	Περίοδος - 16
2.53	Χάος
2.65	Περίοδος - 6
2.655	Περίοδος - 12
2.66	Χάος
2.938	Περίοδος - 5
2.95	Περίοδος - 10
2.971	Περίοδος - 20
2.975	Χάος
3.147	Περίοδος - 20
3.15	Περίοδος - 10
3.17	Περίοδος - 5
3.24	Περίοδος - 10
3.258	Περίοδος - 5
3.28	Χάος
3.45	Περίοδος - 4
3.453	Περίοδος - 8
3.455	Περίοδος - 16
3.46	Χάος
3.642	Περίοδος - 16
3.643	Περίοδος - 8
3.647	Περίοδος - 4
3.65	Χάος
3.776	Περίοδος - 2
3.82	Περίοδος - 4
3.85	Περίοδος - 8
3.86	Χάος
3.886	Περίοδος - 6
3.887	Περίοδος - 12
3.888	Χάος
4.1	Περίοδος - 24
4.101	Περίοδος - 12
4.102	Περίοδος - 6
4.108	Χάος
4.155	Περίοδος - 8
4.17	Περίοδος - 4
4.22	Περίοδος - 2
4.32	Χάος

(i) Για $2.9 < k < 3.3$ (ii) Για $3.4 < k < 3.7$ (iii) Για $3.6 < k < 4.7$

Σχήμα 4.3: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του k .



Σχήμα 4.4: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (a' μέρος).



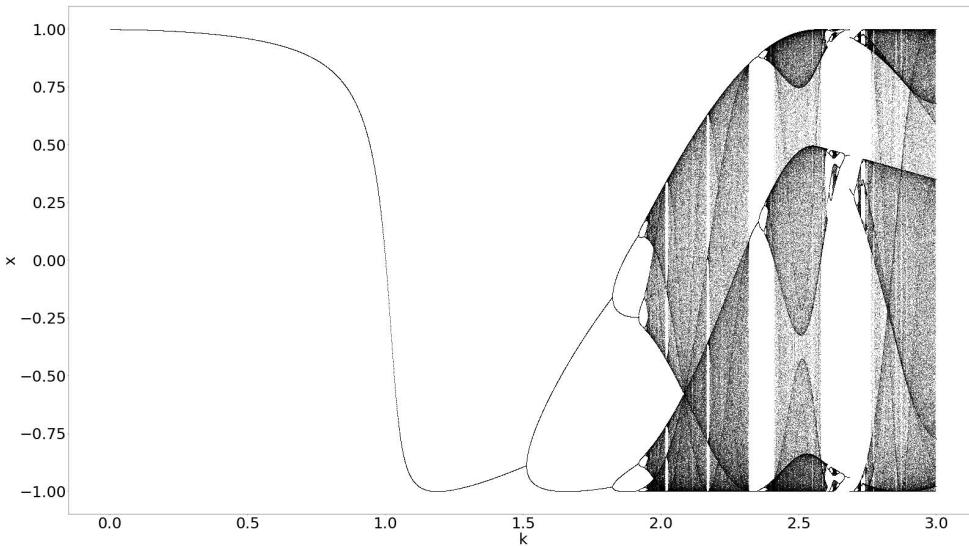
Σχήμα 4.5: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

4.2 Για $q = 0.9$

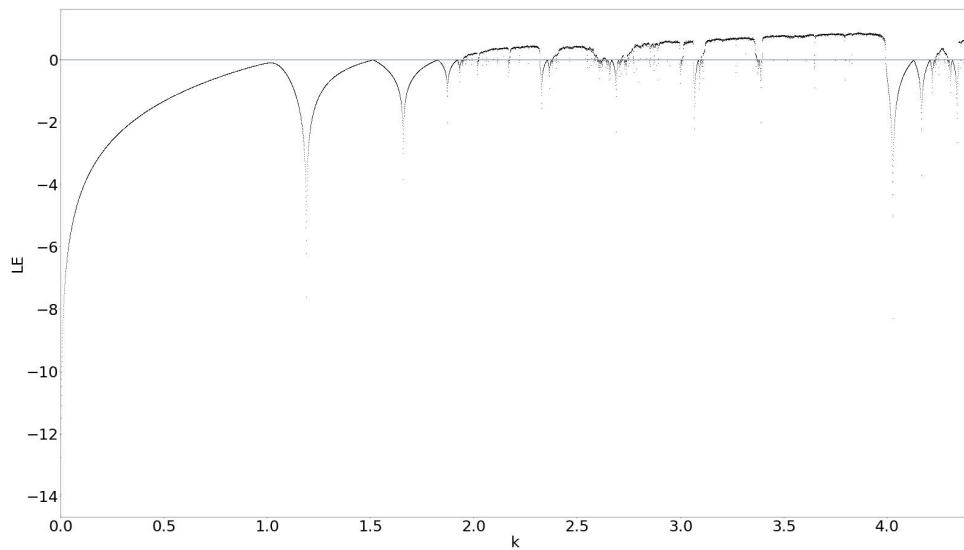
Στο Σχ. 4.6 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (4.2), ως προς την παράμετρο k , για $q = 0.9$. Στον Πίνακα 4.2 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 4.6. Επίσης παρατηρείται εσωτερική κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του k ($1.96, 2.015, 2.16, 2.319, 2.603, 2.638, 2.725, 2.773$), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 4.6. Οι αντίστοιχες τιμές του k για αυτά τα σημεία του διαγράμματος παρατίθενται στον Πίνακα 4.2, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα 4.9, 4.10 των διαγραμμάτων της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επιπλέον παρατηρούμε στο Σχ. ??, το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Συγκεκριμένα εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με αντίστροφο διπλασιασμό της περιόδου.) για $2.603 < k < 2.647$. Ακόμη στο διάγραμμα ?? το φαινόμενο εμφανίζεται άλλη μία φορά για $2.725 < k < 2.732$, όπου παρατηρείται ότι για $k = 2.727$ εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 18) ο οποίος καταστρέφεται για $k = 2.732$. Επίσης παρατηρούμε ότι μεταξύ των δύο βασικών ορθών διπλασιασμών εμφανίζεται ένας αντίστροφος για $2.638 < k < 2.71$.

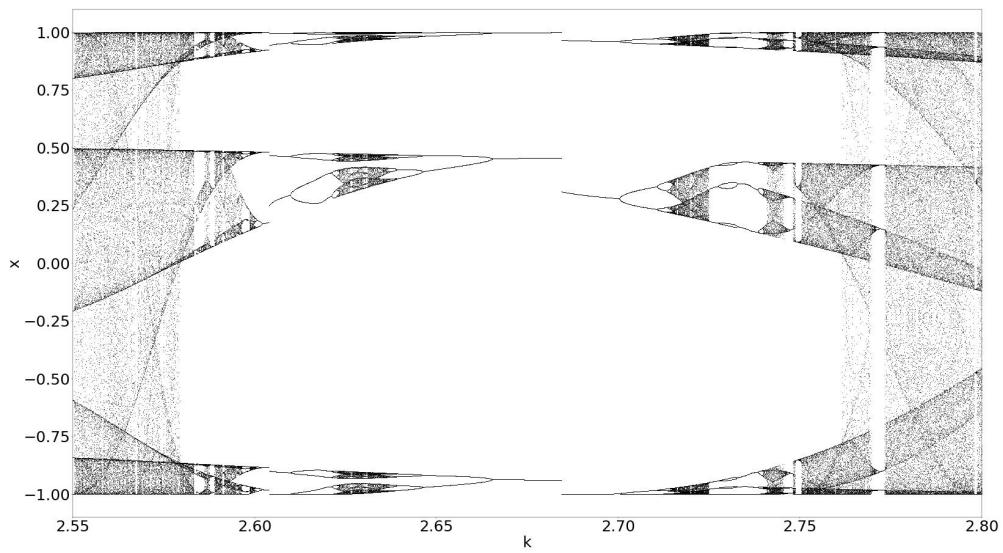
Τέλος, στο Σχ. 4.7 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του k στο ίδιο διάστημα τιμών $[0, 3]$. Οι τιμές του Πίνακα 4.2 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 4.3 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την χαοτική συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.9$.



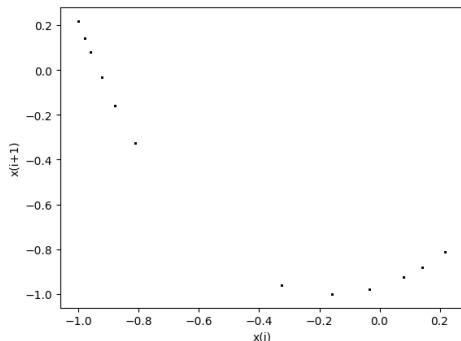
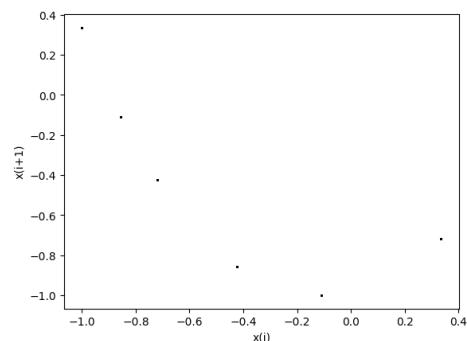
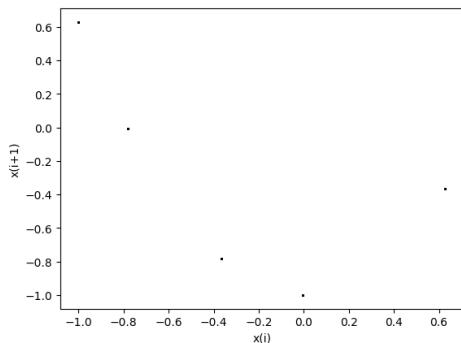
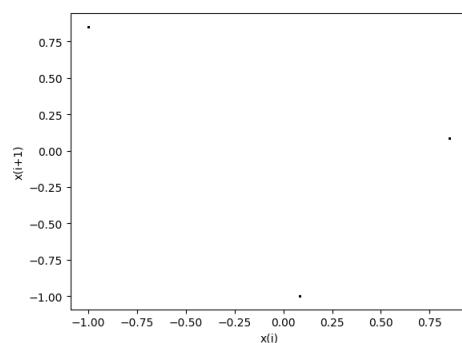
Σχήμα 4.7: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο k , για $q = 0.9$.



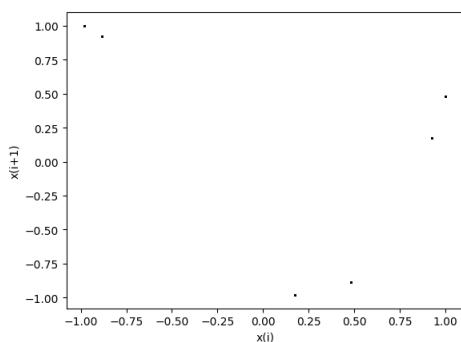
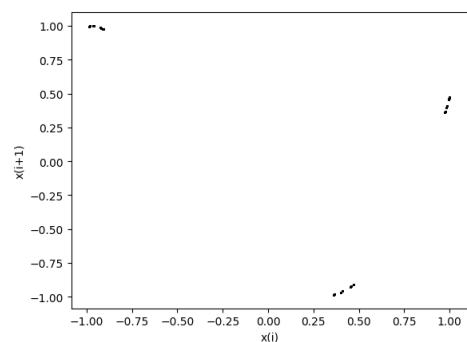
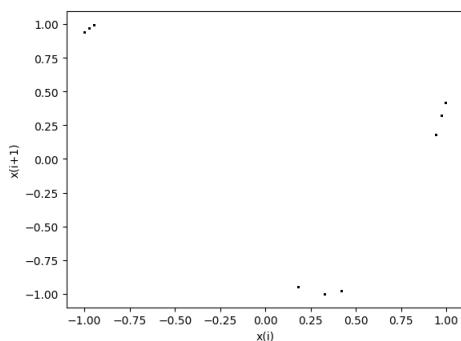
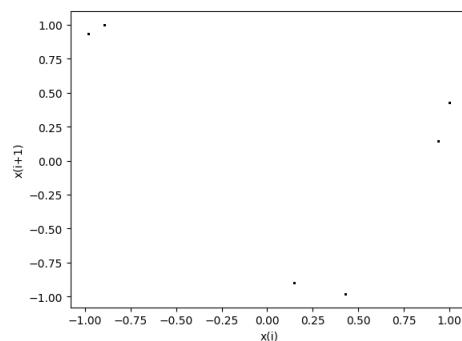
Σχήμα 4.8: Διαγράμματα διακλάδωσης για $2.55 < k < 2.8$.

Πίνακας 4.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του k , για $q = 0.9$

Παράμετρος k	Συμπεριφορά
1.3	Περίοδος - 1
1.5	Περίοδος - 2
1.8	Περίοδος - 4
1.91	Περίοδος - 8
1.94	Περίοδος - 16
1.95	Χάος
1.96	Περίοδος - 12
1.97	Χάος
2.014	Περίοδος - 6
2.019	Περίοδος - 12
2.02	Χάος
2.164	Περίοδος - 5
2.169	Περίοδος - 10
2.17	Χάος
2.319	Περίοδος - 3
2.355	Περίοδος - 6
2.375	Περίοδος - 12
2.38	Χάος
2.603	Περίοδος - 6
2.61	Περίοδος - 12
2.621	Περίοδος - 24
2.623	Χάος
2.638	Περίοδος - 24
2.639	Περίοδος - 12
2.647	Περίοδος - 6
2.66	Περίοδος - 3
2.7	Περίοδος - 6
2.71	Περίοδος - 12
2.715	Χάος
2.725	Περίοδος - 9
2.727	Περίοδος - 18
2.732	Περίοδος - 9
2.738	Περίοδος - 24
2.74	Χάος
2.773	Περίοδος - 6
2.774	Χάος

(i) Για $k = 1.96$ (ii) Για $k = 2.014$ (iii) Για $k = 2.16$ (iv) Για $k = 2.319$

Σχήμα 4.9: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (α' μέρος).

(i) Για $k = 2.603$ (ii) Για $k = 2.637$ (iii) Για $k = 2.725$ (iv) Για $k = 2.773$

Σχήμα 4.10: Διαγράμματα της τιμής x_i σε συνάρτηση με την τιμή x_{i+1} (β' μέρος).

4.3 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία παραλλαγή του Chebysev Χάρτη, της οποίας βασικό χαρακτηριστικό είναι η χαοτική συμπεριφορά που εμφανίζε σε όλες τις περιπτώσεις που ελέχθηκαν για την παράμετρο q , όπως και για τα επι μερούς φαινόμενα που οδηγούν σε αυτήν.

Ειδικότερα, το συνηθέστερο φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις είναι αυτό της μετάβασης στο χάος μέσω του διπλασιασμού της περιόδου, ξεκινώντας από διάστημα περιόδου-1. Για κάποιες παραμέτρους q εμφανίστηκε η ανάστροφη πορεία του συστήματος κατά την έξοδο του από την χαοτική περιοχή, παρουσιάζοντας έτσι το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας(χαοτική φυσαλίδα).

Επίσης αρκετές φορές παρατηρήθηκε το φαινόμενος της υστέρησης δηλαδή "έσπαγε" η περιοδική συμπεριφορά, καθώς και το φαινόμενο των κρίσεων είτε εσωτερικών που χαρακτηρίζονται από την διεύρηση του χαοτικού τμήματος, είτε συνοριακές όπου το σύστημα εξέρχεται απότομα από την χαοτική περιοχή και μεταβαίνει σε μία περιοδική.Παρατηρήθηκε ότι με την δεύτερη μετέβαση το σύστημα σε δίαστημα περιόδου-3.

Κεφάλαιο 5

Μελέτη ρομποτικού συστήματος με λογιστικό χάρτη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μία εισαγώγη στην χρήση διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά, στην μελέτη ρομποτικών συστημάτων και στην εκτίμησης της αποτελεσματικότητας αυτών τών χαοτικών συστημάτων. Ένα σημαντικό θέμα στην έρευνα σχεδιασμού της διαδρομής αυτόνομων ρομποτικών οχημάτων είναι η γρήγορη και αποτελεσματική κάλυψη μιας δεδομένης επιφάνειας εργασίας. Για το σκοπό αυτό, στο παρόν κεφάλαιο μελετήθηκε η κίνηση του ρομποτικού συστήματος και η κάλυψη μιας συγκεκριμένης περιοχής του χώρου, μέσω της εφαρμογής του δυμανικού συστήματος που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 2, συναρτήσει διαφόρων παραμέτρων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτών αποτελούν οι αρχικές συνθήκες του διακριτού συστήματος που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 2, η αρχική θέση του ρομπότ, ο αριθμός των βημάτων που εκτελεί και η παράμετρος διακριτοποίησης h . Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος, θα προηγηθεί μια σύντομη μαθηματική περιγραφή του.

5.1 Μαθηματική Περιγραφή

Το ρομποτικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} X' = v(t) \cos \theta(t) \\ Y' = v(t) \sin \theta(t) \\ \theta' = w(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

όπου (X), Y είναι η οριζόντια και η κάθετη συντεταγμένη αντίστοιχα, θ η γωνία προσανατολισμού, v η γραμμική ταχύτητα και w η γωνιακή ταχύτητα. Οι τελευταίες δίνονται από τους εξής τύπους:

$$v(t) = \frac{v_r(t) + v_l(t)}{2}, w(t) = \frac{w_r(t) - w_l(t)}{L} \quad (5.2)$$

όπου L η απόσταση μεταξύ των δύο ροδών του ρομποτικού οχήματος και v_r, v_l η γωνιακή ταχύτητα της δεξιάς και αριστερής ρόδας αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, διακριτοποιούμε το σύστημα 5.1 των διαφορικών εξισώσεων και προκύπτει το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} X_i = X_{i-1} + hv_{i-1} \cos \theta_{i-1} \\ Y_i = Y_{i-1} + hv_{i-1} \sin \theta_{i-1} \\ \theta_i = \theta_{i-1} + hw_{i-1} \end{cases} \quad (5.3)$$

όπου h το βήμα διακριτοποίησης. Επομένως, κάθε βήμα στην κίνηση του ρομπότ προκύπτει από την επιλογή τιμών x, y από τους παρακάτω χαοτικούς χάρτες:

$$\begin{cases} x_i = k * (1 + x_{i-1})^2 * (2 - x_{i-1}) \\ y_i = k * (1 + y_{i-1})^2 * (2 - y_{i-1}) \end{cases} \quad (5.4)$$

με αποτέλεσμα η διαδρομή του ρομπότ να καθορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} X_i = X_{i-1} + h \frac{x_{i-1} + y_{i-1}}{2} \cos \theta_{i-1} \\ Y_i = Y_{i-1} + h \frac{x_{i-1} + y_{i-1}}{2} \sin \theta_{i-1} \\ \theta_i = \theta_{i-1} + h \frac{x_{i-1} + y_{i-1}}{L} \end{cases} \quad (5.5)$$

5.2 Συμπεριφορά για Μεταβλητά q, k

Για την μελέτη της διαδρομής που ακολουθεί το ρομποτικό σύστημα, σύμφωνα με την εξίσωση 5.5, χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν στο Κεφάλαιο 2 για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου q .

Ειδικότερα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε για την παράμετρο q επιλέχθηκαν τιμές για τις οποίες εμφανίζει ενδιαφέρουσα χαοτική συμπεριφορά. Επιπλέον, η προσομοίωση της κίνησης πραγματοποιήθηκε για 10^5 βήματα, ενώ το ρομπότ ξεκινούσε από τις συντεταγμένες $X(0) = 0, Y(0) = 1$, με αρχικές συνθήκες για το χαοτικό σύστημα $x(0) = 0, y(0) = 0.1$ και με παράμετρο διακριτοποίησης $h = 0.2$.

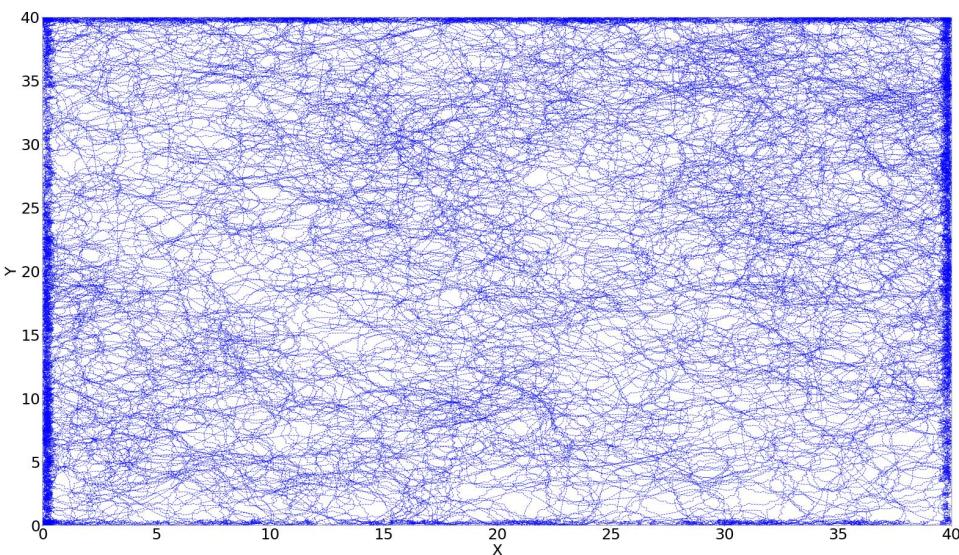
Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε με την λογική, να παρατηρήσουμε πως επηρεάζεται η κίνηση του ρομπότ στον χώρο αλλά και το ποσοστό που καλύπτει κάθε φορά ανάλογα με το ποιά παράμετρο μεταβάλλουμε. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής που ακολουθεί το ρομπότ σε εναν χώρο $40 * 40$ και υπολογίστηκε το ποσοστό καλυψιμότητας αυτού του τετραγώνου.

5.2.1 Για $q = -1.6, q = -1.9$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος όταν μεταβάλλεται η παράμετρος q και η παράμετρος k παραμένει σταθερή.

Στο Σχ. 5.1 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για $k = 0.9$, και $q = -1.6$. Για την παράμετρο διακλάδωσης k επιλέγονται τιμές για τις οποίες το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από χαοτική συμπεριφορά.

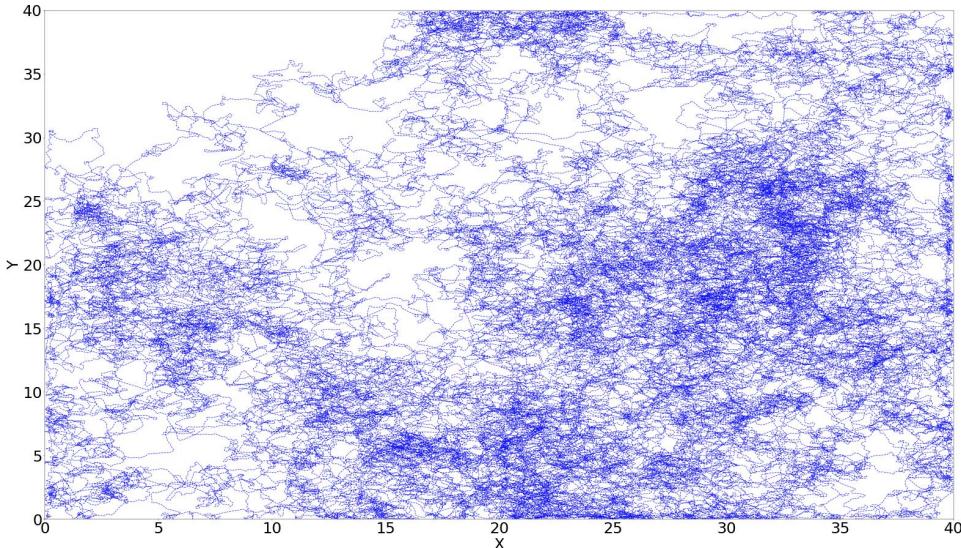
Για την παραπάνω κίνηση υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 95.78%. Το συγκεκριμένο ποσοστό είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό καθώς το υπό μελέτη ρομπότ θα καλύψει την επιφάνεια που του ζητήθηκε, κάτι που μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί και από το 5.1.



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.9$ και $q = -1.6$.

Στο Σχ. 5.2 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για $k = 0.9$, και $q = -1.9$. Για την επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου q το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται επίσης από χαοτική συμπεριφορά.

Το ποσοστό κάλυψης του χώρου για $q = -1.9$ και για δεδομένες τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι 79.22%. Το ποσοστό αυτό είναι σχετικά ικανοποιητικό, διότι το ρομπότ θα μπορέσει να καλύψει ένα μεγάλο μέρος της επιφάνειας στην οποία του ζητήθηκε να κινηθεί, κάτι που παρατηρούμε στο 5.2.

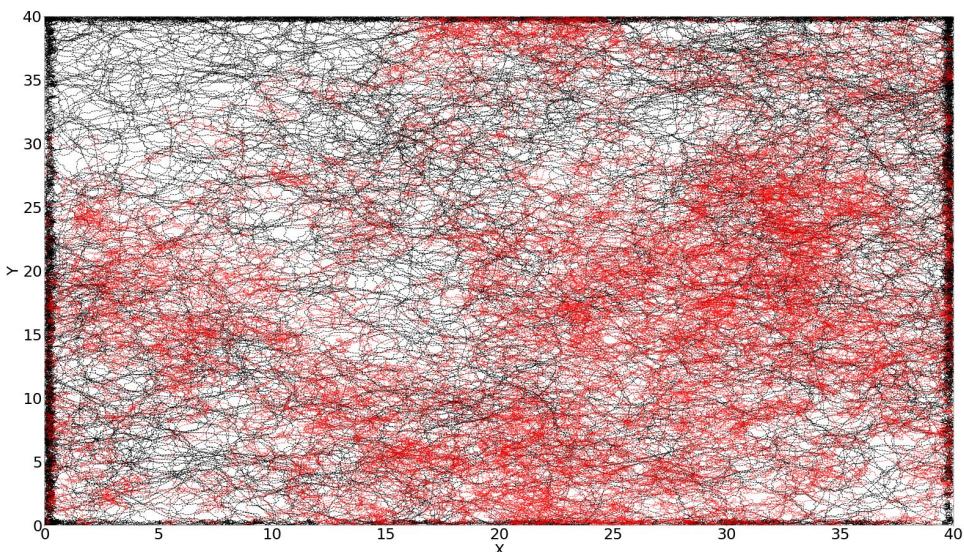


Σχήμα 5.2: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.9$ και $q = -1.9$.

Στο Σχ. ?? παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για $k = 0.9$, και $q = -2.1$. Για την επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου q το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται επίσης από χαοτική συμπεριφορά.

Στο Σχ. 5.3 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για $k = 0.9$, και $q = -1.6$ (μπλέ χρώμα) $q = -1.9$ (κόκκινο χρώμα).

Από το Σχ. 5.3 είναι δυνατή η σύγκριση των τριών κινήσεων και εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ρομπότ κινείται πιο αποτελεσματικά για $q = -1.6$, ενώ και για $q = -1.9$ καλύπτει αρκετά καλά την επιφάνεια που του δόθηκε.



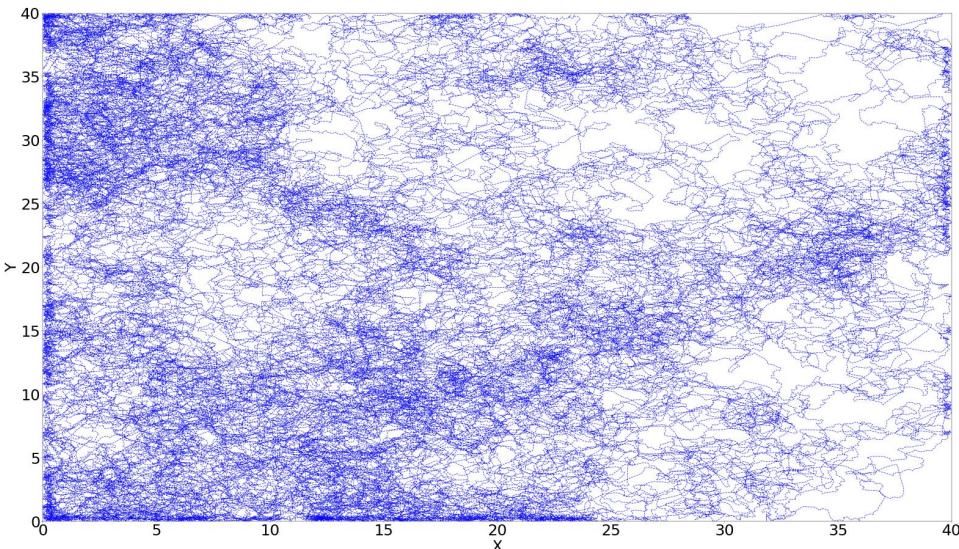
Σχήμα 5.3: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.9$, $q = -1.6$ (μπλέ χρώμα), $q = -1.9$ (κόκκινο χρώμα).

5.2.2 Για $q = -1.4$, $q = -1.6$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος όταν μεταβάλλεται η παράμετρος q και η παράμετρος k παραμένει σταθερή.

Στο Σχ. 5.4 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για $k = 0.79$, και $q = -1.4$. Για την επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου q το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται επίσης από χαοτική συμπεριφορά.

Το ποσοστό κάλυψης του χώρου για $q = -1.4$ και για δεδομένες τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι 87.04%. Το ποσοστό αυτό είναι σχέτικα ικανοποιητικό, διότι το ρομπότ θα μπορέσει να καλύψει ένα μεγάλο μέρος της επιφάνειας στην οποία του ζητήθηκε να κινηθεί, κάτι που παρατηρούμε στο 5.4.



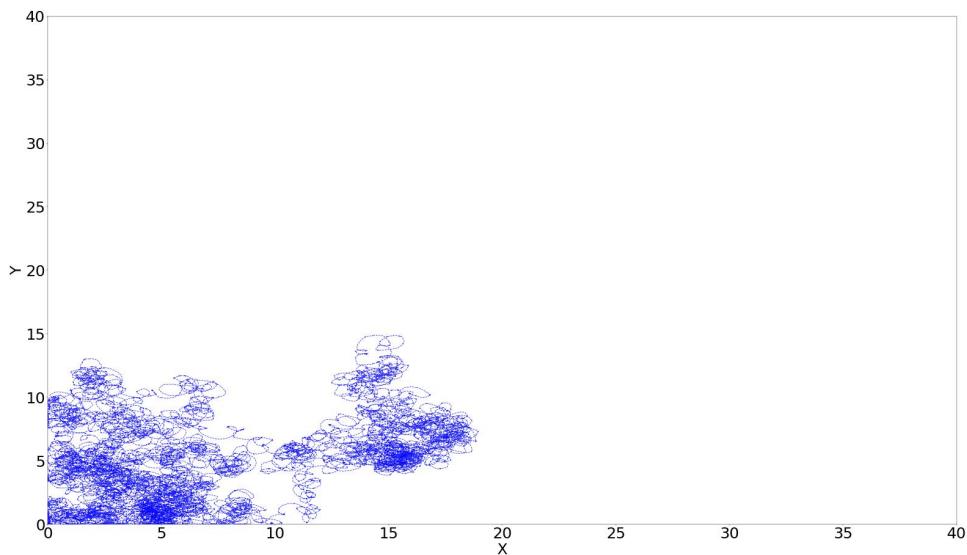
Σχήμα 5.4: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.79$ και $q = -1.4$.

Στο Σχ. 5.5 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για $k = 0.79$, και $q = -1.6$. Για την παράμετρο διακλάδωσης k επιλέγονται τιμές για τις οποίες το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από χαοτική συμπεριφορά.

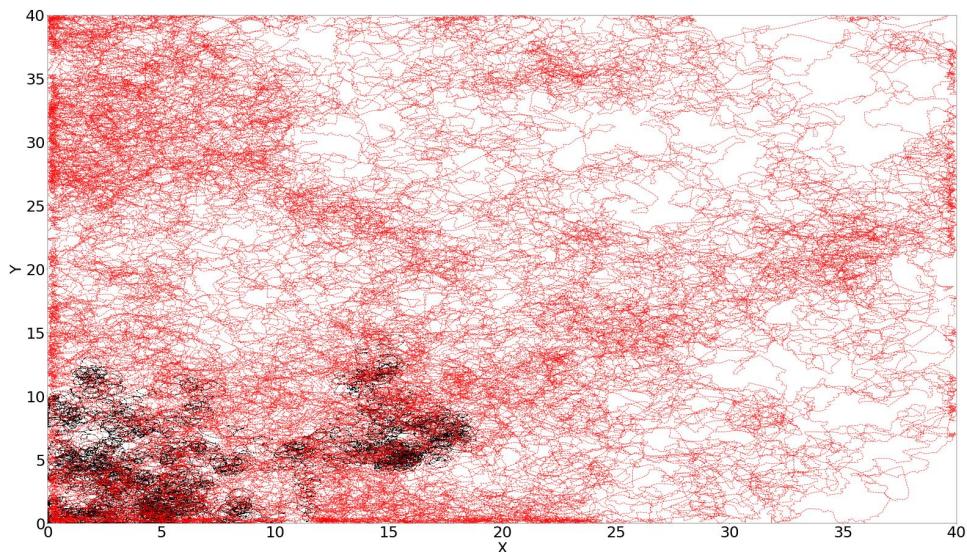
Για την παραπάνω κίνηση υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 9.6%. Το ποσοστό αυτό επιβεβαιώνει το διάγραμμα 5.5, δηλαδή το ρομπότ στην συγκεκριμένη περίπτωση καλύπτει ένα πολύ μικρό μέρος της επιφάνειας που του δόθηκε.

Στο Σχ. 5.6 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για $k = 0.79$, και $q = -1.4$ (μαύρο χρώμα), $q = -1.6$ (κόκκινο χρώμα).

Από το Σχ. 5.6 είναι δυνατή η σύγκριση των δύο κινήσεων και εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ρομπότ κινείται πιο αποτελεσματικά για $q = -1.4$.



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.79$ και $q = -1.6$.



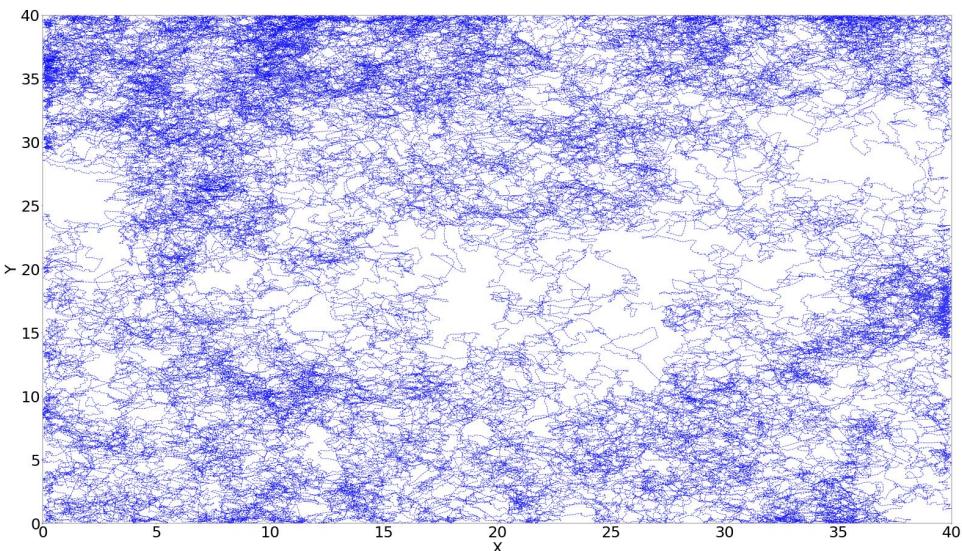
Σχήμα 5.6: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.79$, $q = -1.4$ (μαύρο χρώμα), $q = -1.6$ (κόκκινο χρώμα).

5.2.3 Για $q = -1.9$, $q = -2.1$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος όταν μεταβάλλεται η παράμετρος q και η παράμετρος k παραμένει σταθερή.

Στο Σχ. 5.7 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για $k = 0.68$, και $q = -1.9$. Για την επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου q το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται επίσης από χαοτική συμπεριφορά.

Το ποσοστό κάλυψης του χώρου για $q = -1.9$ και για δεδομένες τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι 85.78%. Το ποσοστό αυτό είναι σχέτικα ικανοποιητικό, διότι το ρομπότ θα μπορέσει να καλύψει ένα μεγάλο μέρος της επιφάνειας στην οποία του ζητήθηκε να κινηθεί, κάτι που παρατηρούμε στο 5.7.



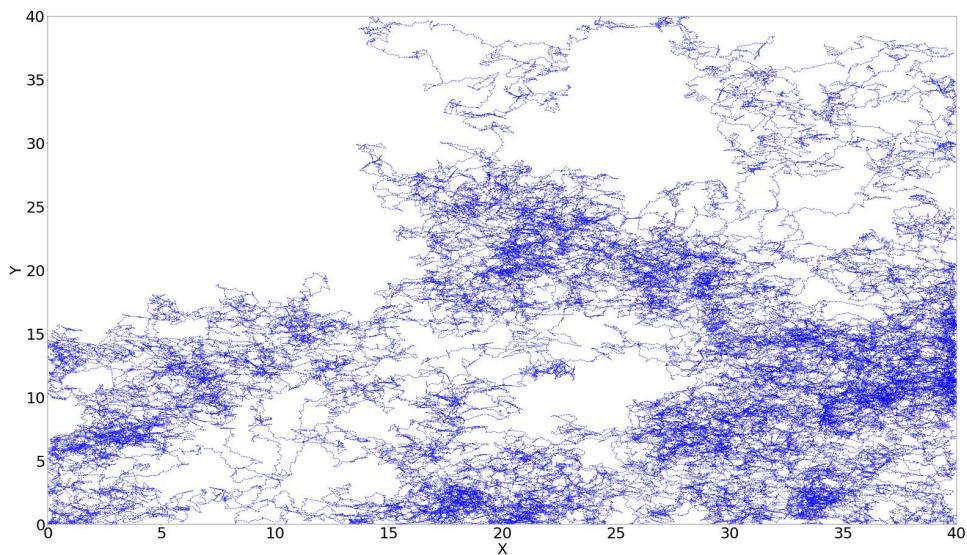
Σχήμα 5.7: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$ και $q = -1.9$.

Στο Σχ. 5.8 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για $k = 0.68$, και $q = -1.9$. Για την παράμετρο διακλάδωσης k επιλέγονται τιμές για τις οποίες το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από χαοτική συμπεριφορά.

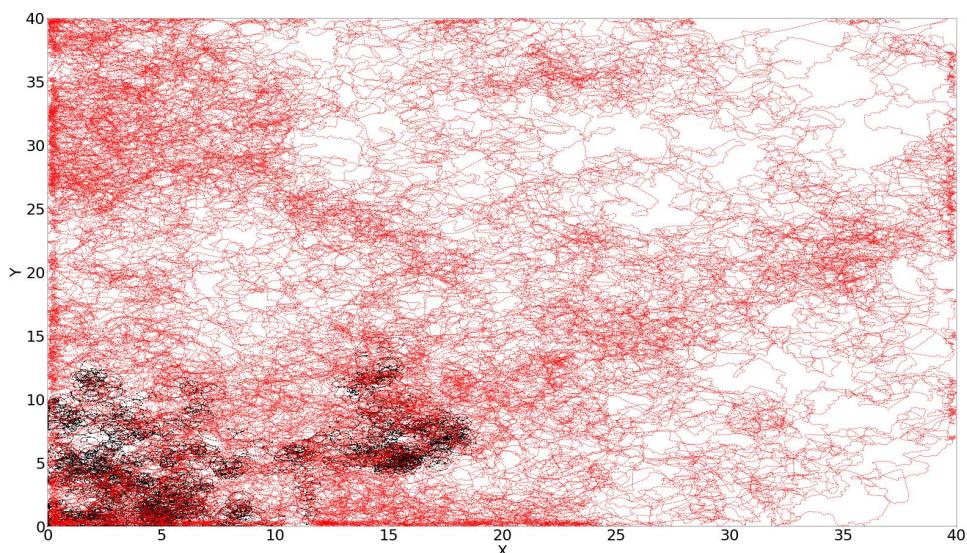
Για την παραπάνω κίνηση υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 54.121%. Το ποσοστό αυτό είναι μας δείχνει ότι το ρομπότ καλύπτει λίγο παραπάνω από το μισό της επιφάνειας που του ζητήθηκε να κινηθεί, κάτι που παρατηρούμε στο 5.8

Στο Σχ. 5.9 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για $k = 0.68$, και $q = -1.9$ (μαύρο χρώμα), $q = -2.1$ (κόκκινο χρώμα).

Από το Σχ. 5.9 είναι δυνατή η σύγκριση των δύο κινήσεων και εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ρομπότ κινείται πιο αποτελεσματικά για $q = -1.9$.



Σχήμα 5.8: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$ και $q = -2.1$.



Σχήμα 5.9: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$, $q = -1.9$ (μαύρο χρώμα), $q = -2.1$ (κόκκινο χρώμα).

5.2.4 Για $k = 0.68$, $k = 0.69$, $k = 0.815$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος όταν μεταβάλλεται η παράμετρος k και η παράμετρος q παραμένει σταθερή. Θα αναλυθεί η περίπτωση όπου το $q = -1.6$ ενώ πέρα από τα $k = 0.68$, $k = 0.69$, $k = 0.815$ θα συγκρίνουμε και τις άλλες δύο τιμές του k οι οποίες προέκυψαν στις προηγούμενες παραγράφους.

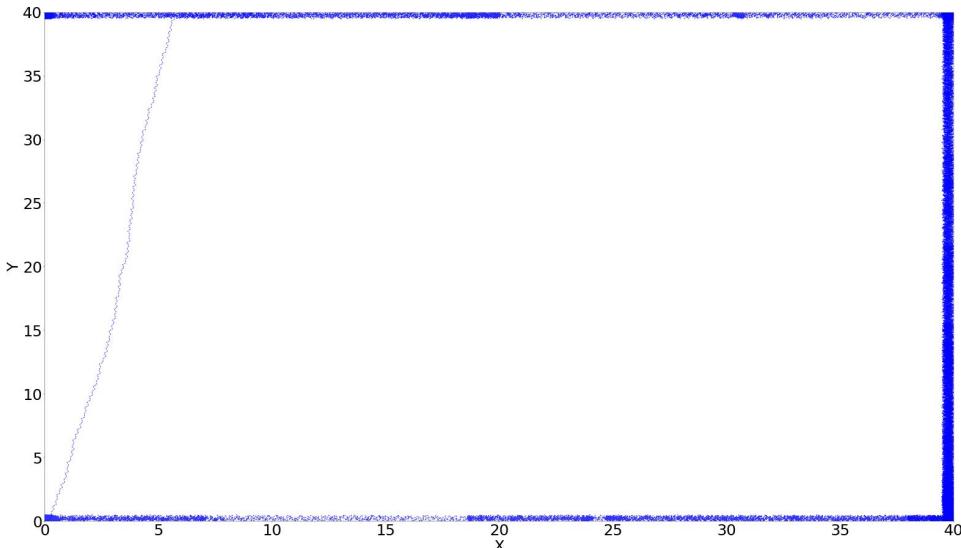
Στο Σχ. 5.10 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για, $q = -1.6$ και $k = 0.68$. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 5.4%.

Στο Σχ. 5.11 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για, $q = -1.6$ και $k = 0.69$. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 6.72%.

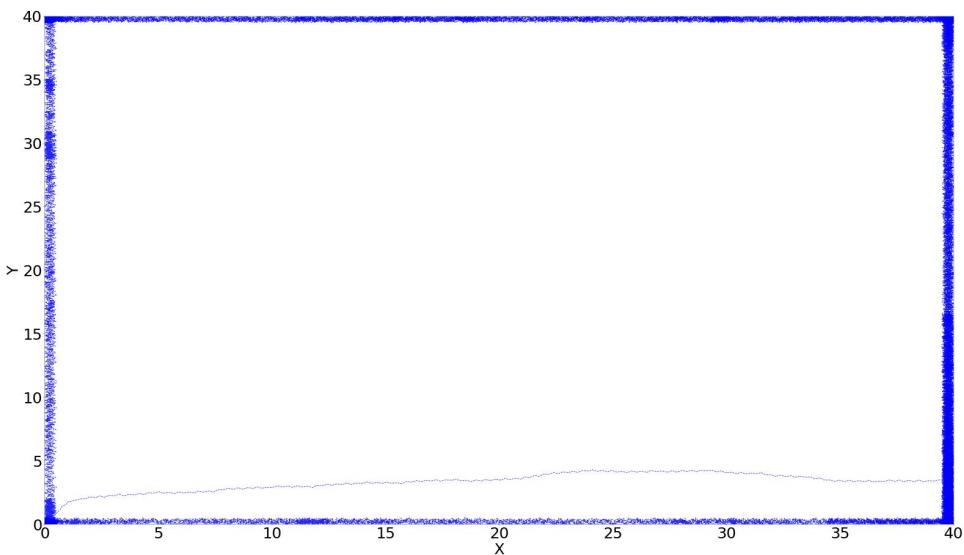
Στο Σχ. 5.12 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για, $q = -1.6$ και $k = 0.815$. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 95.7%.

Σε σύγκριση με τα Σχ. 5.1 και 5.5 οι παράμετροι του k για $q = -1.6$ που παρουσιάζονται στα Σχ. 5.10 και 5.11 έχουν μικρότερη καλυψιμότητα, ειδικά σε σχέση με το Σχ. 5.1 όπου το ποσοστό αγγίζει το 95.78%.

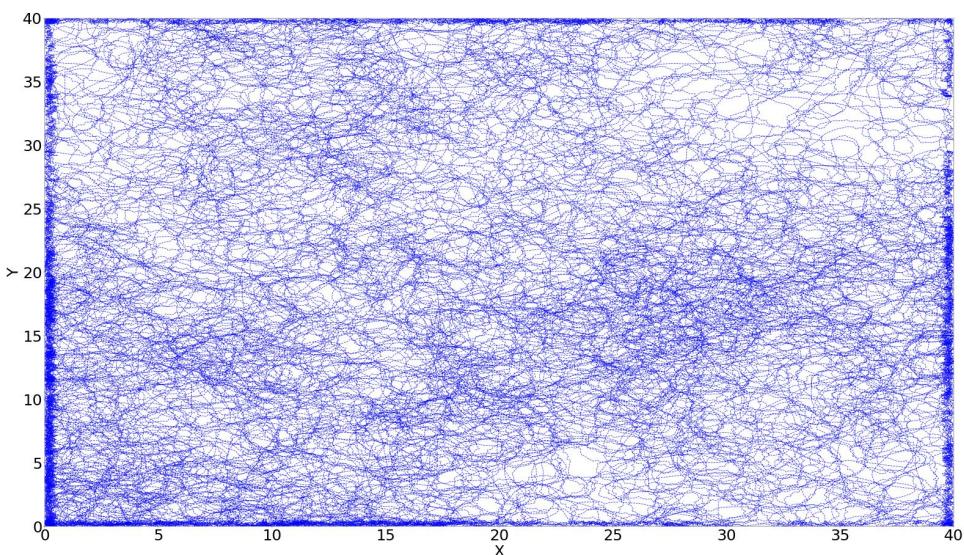
Από την άλλη η παράμετρος του k για $q = -1.6$ του Σχ. 5.12 ξεπερνάει όλές τις προηγούμενες παραμέτρους του k σε καλυψιμότητα σε μεγάλο βαθμό, πέρα από του Σχ. 5.1 όπου το ποσοστό είναι παρόμοιο.



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.68$.



Σχήμα 5.11: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.69$.



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.815$.

5.2.5 Για $k = 0.74$, $k = 0.751$, $k = 0.76$

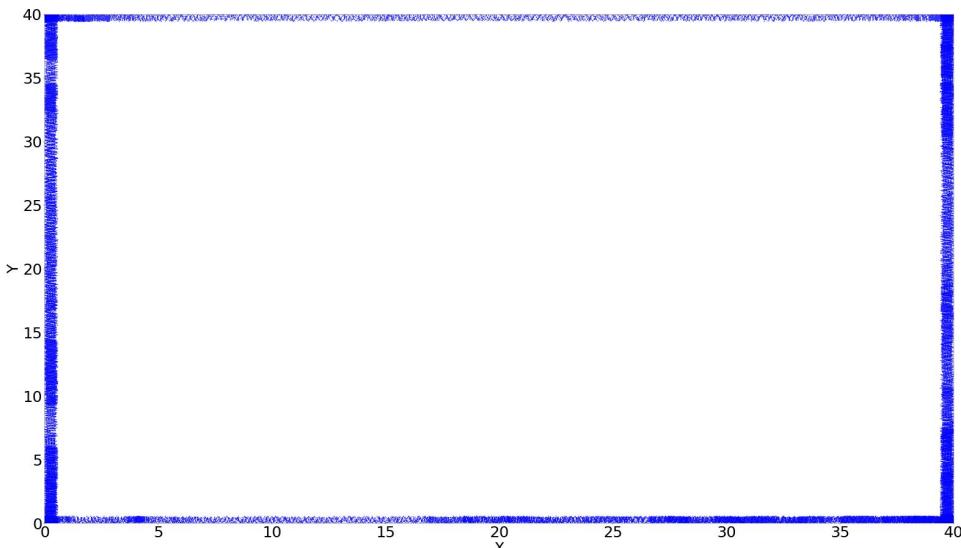
Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος όταν μεταβάλλεται η παράμετρος k και η παράμετρος q παραμένει σταθερή. Θα αναλυθεί η περίπτωση όπου το $q = -1.4$ ενώ πέρα από τα $k = 0.74$, $k = 0.751$, $k = 0.76$ θα συγκρίνουμε και την άλλη τιμή του k που προέκυψε στην παράγραφο 5.2.2.

Στο Σχ. 5.13 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για, $q = -1.4$ και $k = 0.74$. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 7.23%.

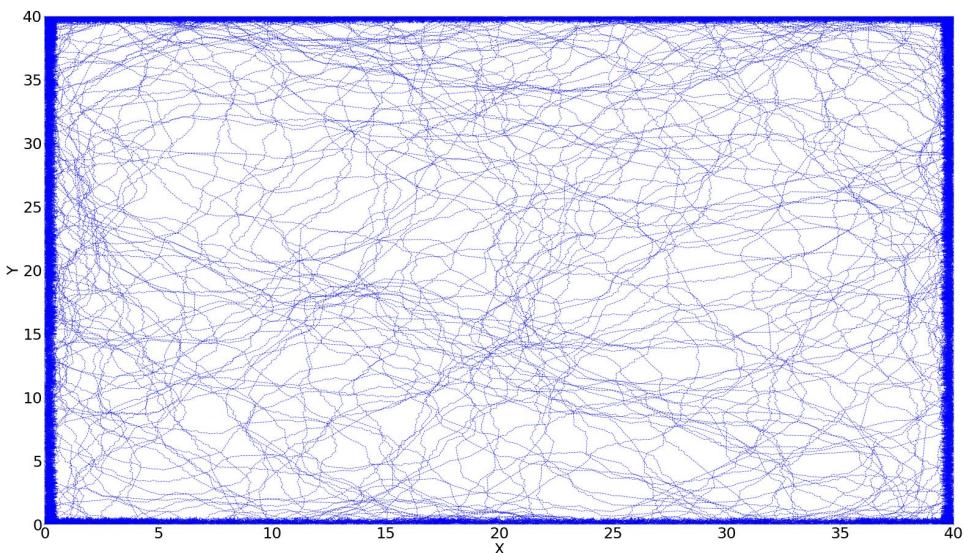
Στο Σχ. 5.14 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για, $q = -1.4$ και $k = 0.751$. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 69.95%.

Στο Σχ. 5.15 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για, $q = -1.4$ και $k = 0.76$. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 84.7%.

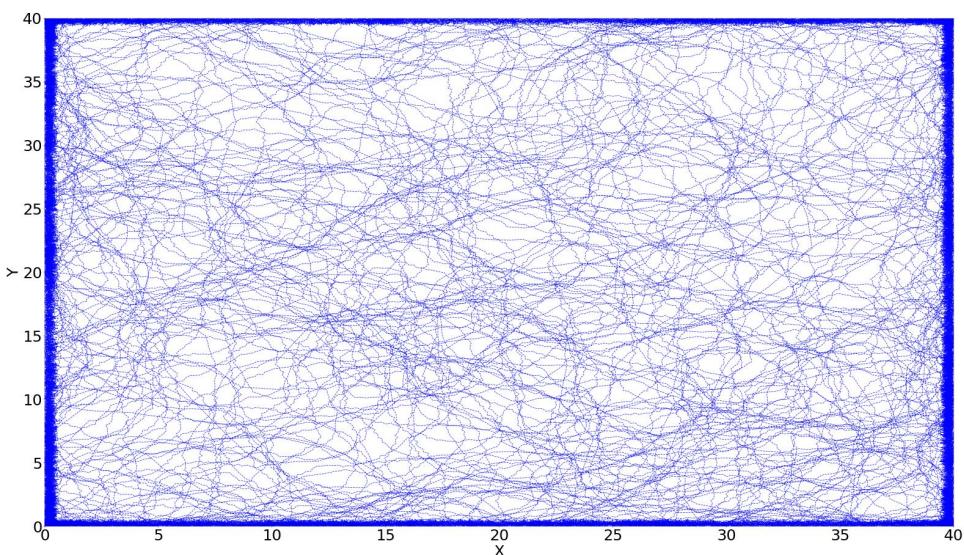
Σε σύγκριση με το Σχ. 5.4 οι παράμετροι του k για $q = -1.4$ που παρουσιάζονται στα Σχ. 5.13, 5.14 και 5.15 έχουν μικρότερη καλυψιμότητα, ειδικά το Σχ. 5.13.



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.74$.



Σχήμα 5.14: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.751$.



Σχήμα 5.15: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.76$.

5.3 Συμπεριφορά για Μεταβλητή Αρχική Θέση

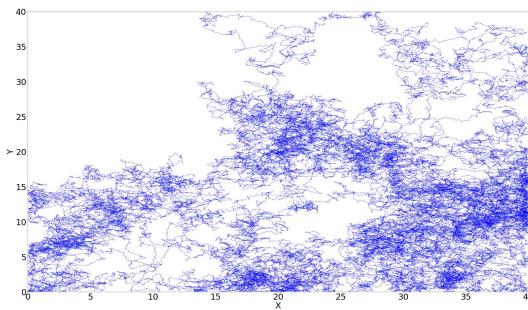
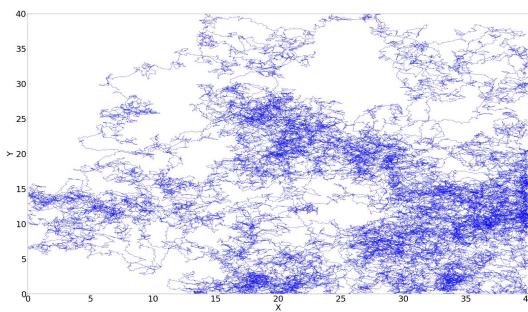
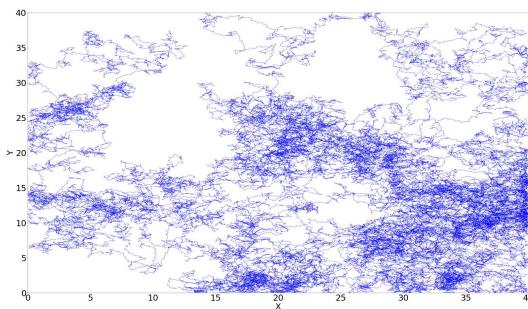
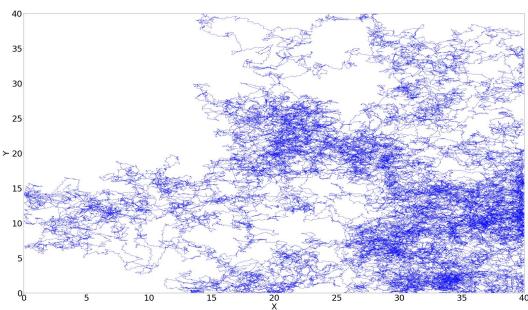
Για την απόκτηση μιας πλήρους εικόνας της συμπεριφοράς του ρομπότ απαιτείται η μελέτη της διαδρομής του υπό διαφορετικές αρχικές συντεταγμένες στο χώρο. Για αυτό τον λόγο επιλέχθηκαν τρείς τυχαίες θέσεις (X, Y) πέρα από την θέση $[0, 0]$ ενώ η παράμετρος διακλάδωσης k παρέμεινε σταθερή $k = 0.68$. Για την συγκεκριμένη παράμετρο k χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές τιμές του q (-2.1, 1.9) οι οποίες εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά. Η προσομοίωση της κίνησης πραγματοποιήθηκε για 10^5 βήματα, με αρχικές συνθήκες του χαοτικού συστήματος $x(0) = 0, y(0) = 0.1$. και παράμετρο διακριτοποίησης $h = 0.2$. Έτσι, όπως και προηγουμένως για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής του ρομπότ και το ποσοστό καλυψιμότητάς της.

5.3.1 Για $q = -2.1$

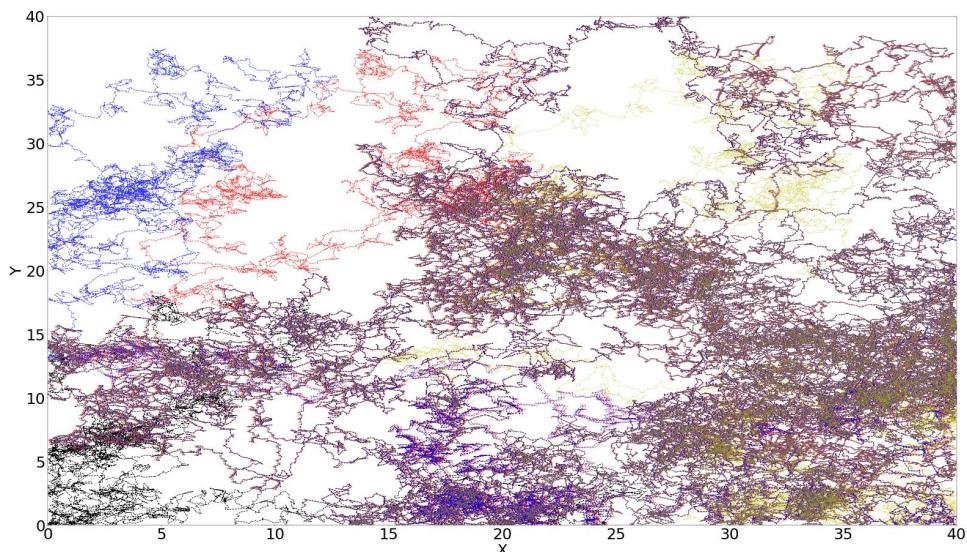
Αρχικά, ελέγχθηκε η περίπτωση το σύστημα να ξεκινάει από την αρχική θέση $(X, Y) = (0, 0)$ και υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης είναι 54.121%. Στη συνέχεια, επιλέχθηκαν τυχαίες θέσεις στο χώρο και βρέθηκε ότι για $(X, Y) = (20, 20)$ η καλυψιμότητα ήταν 56.35%, ενώ για $(X, Y) = (5, 20)$ η καλυψιμότητα ήταν 57.35% και για $(X, Y) = (34, 20)$ η καλυψιμότητα ήταν 53.52%.

Συγκρίνοντας το Σχ. 5.16i με τα Σχ. 5.16ii, 5.16iii, 5.16iv παρατηρούμε μικρή αύξηση σε σχέση με την αρχική περίπτωση για τις πρώτες δύο τυχαίες συντεταγμένες $(X, Y) = (20, 20)$, $(X, Y) = (5, 20)$ και μία μικρή μείωση για την τρίτη $(X, Y) = (34, 20)$. Επομένως, η αρχική θέση του ρομπότ δεν επηρεάζει δραματικά την διαδρομή που θα ακολουθήσει το ρομποτικό όχημα.

Επιπλέον μπορούμε να δούμε πώς γεμίζει στην κάθε περίπτωση το ρομπότ την επιφάνεια στο Σχ. ?? όπου παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για $q = -2.1$, $k = 0.68$, $(X, Y) = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), $(X, Y) = (20, 20)$ (κόκκινο χρώμα), $(X, Y) = (5, 20)$ (μπλε χρώμα), $(X, Y) = (34, 20)$ (κίτρινο χρώμα).

(i) Για $(X, Y) = (0, 0)$.(ii) Για $(X, Y) = (20, 20)$.(iii) Για $(X, Y) = (5, 20)$.(iv) Για $(X, Y) = (34, 20)$.

Σχήμα 5.16: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$ και :



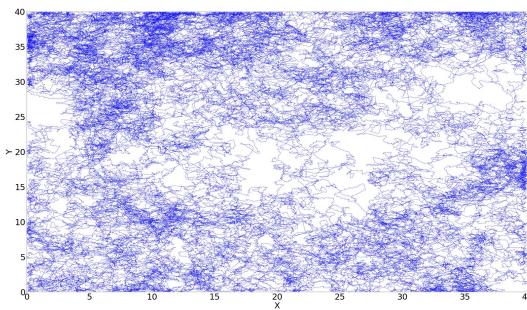
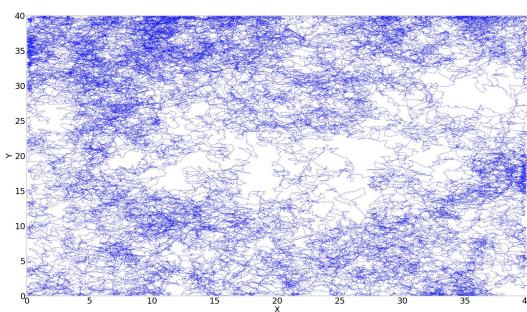
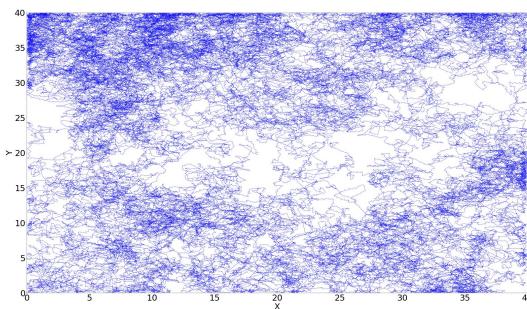
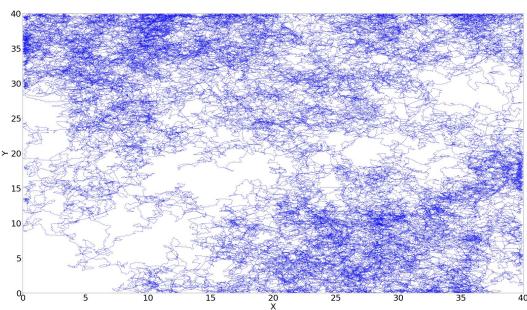
Σχήμα 5.17: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -2.1$, $k = 0.68$, $(X, Y) = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), $(X, Y) = (20, 20)$ (κόκκινο χρώμα), $(X, Y) = (5, 20)$ (μπλε χρώμα), $(X, Y) = (34, 20)$ (κίτρινο χρώμα).

5.3.2 Για $q = -1.9$

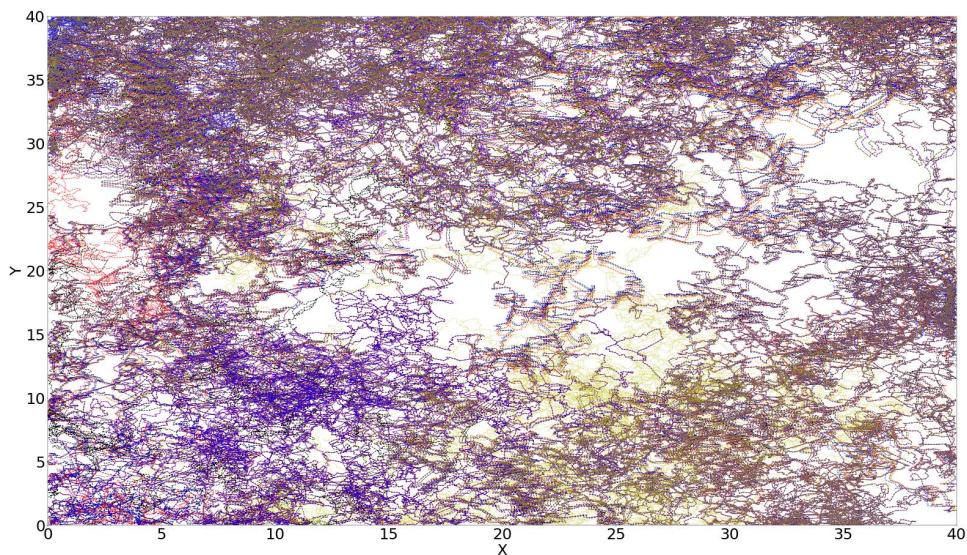
Αρχικά, ελέγχθηκε η περίπτωση το σύστημα να ξεκινάει από την αρχική θέση $(X, Y) = (0, 0)$ και υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης είναι 85.78%. Στη συνέχεια, επιλέχθηκαν τυχαίες θέσεις στο χώρο και βρέθηκε ότι για $(X, Y) = (5, 15)$ η καλυψιμότητα ήταν 85.64%, ενώ για $(X, Y) = (8, 30)$ η καλυψιμότητα ήταν 85.1% και για $(X, Y) = (36, 26)$ η καλυψιμότητα ήταν 79.8%.

Συγκρίνοντας το Σχ. 5.18i με τα Σχ. 5.18ii, 5.18iii, 5.18iv παρατηρούμε μικρή μείωση σε σχέση με την αρχική περίπτωση για τις πρώτες δύο τυχαίες συντεταγμένες $(X, Y) = (5, 15)$, $(X, Y) = (8, 30)$ και μία σχετικά μεγαλύτερη μείωση (γύρω στο 6%) για την τρίτη $(X, Y) = (36, 6)$. Επομένως, η αρχική θέση του ρομπότ δεν επηρεάζει δραματικά την διαδρομή που θα ακολουθήσει το ρομποτικό όχημα, ακόμα και στην τρίτη περίπτωση που η διαφορά είναι 6%

Επίσης μπορούμε να δούμε πώς γεμίζει στην κάθε περίπτωση το ρομπότ την επιφάνεια στο Σχ. 5.19 όπου παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για $(X, Y) = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), $(X, Y) = (5, 15)$ (κόκκινο χρώμα), $(X, Y) = (8, 30)$ (μπλε χρώμα), $(X, Y) = (36, 6)$ (κίτρινο χρώμα).

(i) $\Gamma\alpha(X, Y) = (0, 0)$.(ii) $\Gamma\alpha(X, Y) = (5, 15)$.(iii) $\Gamma\alpha(X, Y) = (8, 30)$.(iv) $\Gamma\alpha(X, Y) = (36, 6)$.

Σχήμα 5.18: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$ και :



Σχήμα 5.19: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$, $(X, Y) = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), $(X, Y) = (5, 15)$ (κόκκινο χρώμα), $(X, Y) = (8, 30)$ (μπλε χρώμα), $(X, Y) = (36, 6)$ (κίτρινο χρώμα).

5.4 Συμπεριφορά για Μεταβαλητές Αρχικές Συνθήκες

Συνεχίζοντας την μελέτη αξίζει να ερευνηθεί πως συμπεριφέρεται το ρομποτικό σύστημα όταν μεταβληθούν οι αρχικές συνθήκες του χαοτικού δυναμικού συστήματος $x(0), y(0)$.

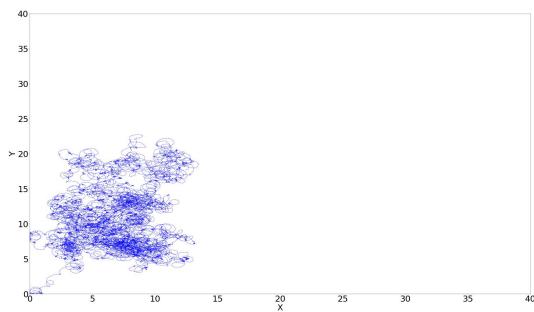
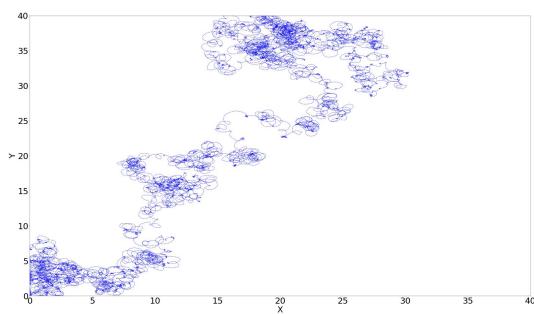
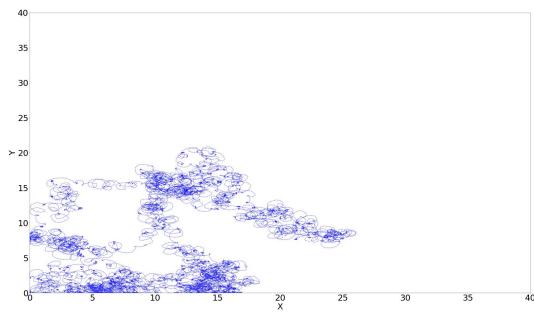
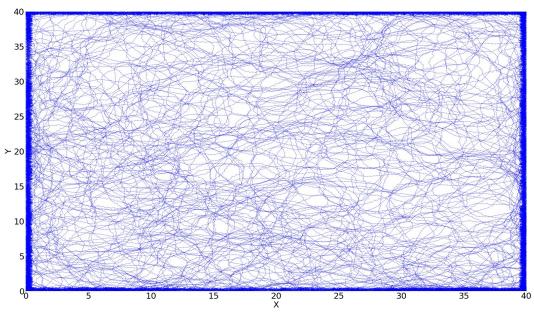
Στην συγκεριμένη μελέτη που πραγματοποιήθηκε λάβαμε υπόψη δύο περιπτώσεις χαοτικών συστημάτων. Στην πρώτη περίπτωση επιλέχθηκε η παράμετρος q να ισούται $q = -1.4$ και η παράμετρος διακλάδωσης k να ισούται $k = 0.75$. Στην δεύτερη περίπτωση η q ισούται $q = -1.6$ και η παράμετρος διακλάδωσης k να ισούται $k = 0.9$.

Επιπλέον, το ρομπότ εκτέλεσε 10^5 βήματα. Η αρχική θέση του ρομποτικού συστήματος που επιλέχθηκε και για τις δύο περιπτώσεις είναι $(X, Y) = (0, 0)$, όπως και η παράμετρος διακριτοποίησης που είναι $h = 0.2$. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής του ρομπότ και υπολογίστηκε το ποσοστό κάλυψης.

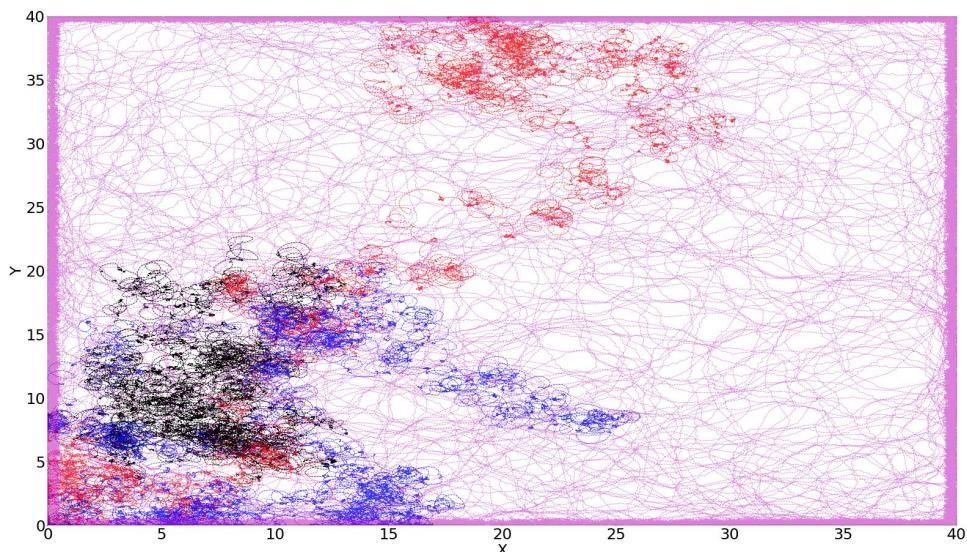
5.4.1 Για $q = -1.4$

Στα Σχ. 5.20i, 5.20ii, 5.20iii, 5.20iv παρατίθενται τα διαγράμματα κίνησης του συστήματος για $q = -1.4$, $k = 0.75$ και $(x, y) = (-0.1, 0.1)$ όπου η καλυψιμότητα είναι 10.35%, $(x, y) = (0.1, 0.5)$ όπου η καλυψιμότητα είναι 15.23%, $(x, y) = (-0.1, 1)$ όπου η καλυψιμότητα είναι 13.3%, $(x, y) = (0.5, 1)$ όπου η καλυψιμότητα είναι 86.5% αντίστοιχα.

Επίσης στο Σχ. 5.21 παρατίθεται το κοινό διάγραμμα των διαφορετικών αρχικών συνθηκών με την καθεμία να συμβολίζεται με διαφορετικό χρώμα, δηλαδή για $(x, y) = (-0.1, 0.1)$ (μαύρο χρώμα), $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα), $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (μπλε χρώμα), $(x, y) = (0.5, 1)$ (ροζ(magenta) χρώμα)

(i) $\Gamma\alpha(x, y) = (-0.1, 0.1)$.(ii) $\Gamma\alpha(x, y) = (0.1, 0.5)$.(iii) $\Gamma\alpha(x, y) = (-0.1, 1)$.(iv) $\Gamma\alpha(x, y) = (0.5, 1)$.

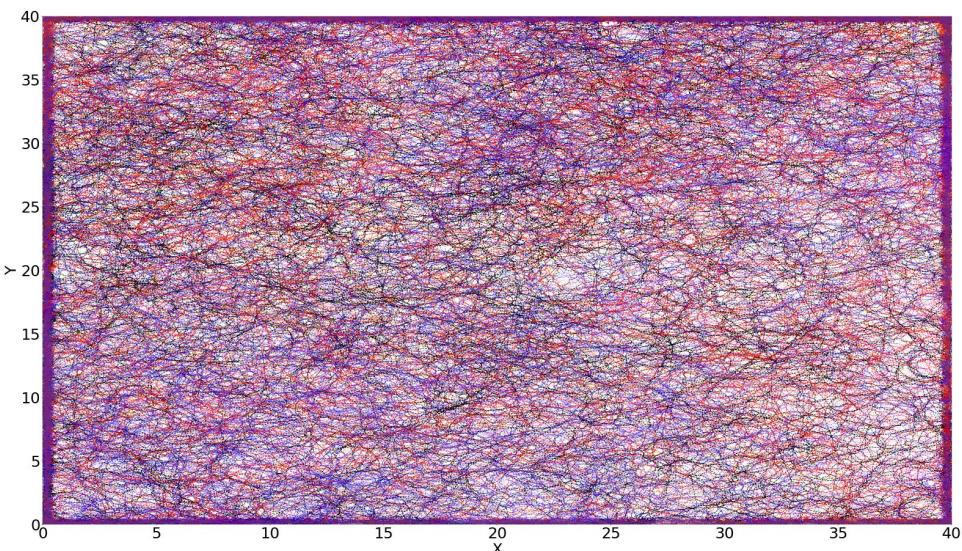
Σχήμα 5.20: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.75$ και :



Σχήμα 5.21: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.75$, $(x, y) = (-0.1, 0.1)$ (μαύρο χρώμα), $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα), $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (μπλε χρώμα), $(x, y) = (0.5, 1)$ (ροζ(magenta) χρώμα).

5.4.2 Για $q = -1.6$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση επειδή τα ποσοστά κάλυψης για κάθε αρχική συνθήκη που επιλέχθηκε ήταν πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή για $q = -1.6$, $k = 0.9$ και $(x, y) = (0.1, 0.5)$ το ποσοστό είναι 96.1% , $(x, y) = (-0.1, 0.5)$ το ποσοστό είναι 95.6%, $(x, y) = (-0.1, 2)$ το ποσοστό είναι 94.4%, $(x, y) = (0.5, 1.5)$ το ποσοστό είναι 94.2% και $(x, y) = (0.8, 1.2)$ το ποσοστό είναι 95.9%, δεν παράχθηκαν ξεχωριστά διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού συστήματος, εφόσον η πιο ακραία διαφορά είναι 2%. Αντιθέτως παράχθηκε ένα κοινό διάγραμμα το οποίο φαίνεται στο Σχ. 5.22. Το κάθε ζεύγος αρχικών συνθηκών συμβολίζεται με διαφορετικό χρώμα. Για $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (μαύρο χρώμα) , $(x, y) = (-0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα) , $(x, y) = (-0.1, 2)$ (μπλέ χρώμα), $(x, y) = (0.5, 1.5)$ (ροζ(magenta) χρώμα) και $(x, y) = (0.8, 1.2)$ (κίτρινο χρώμα).



Σχήμα 5.22: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.75$, $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (μαύρο χρώμα) , $(x, y) = (-0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα) , $(x, y) = (-0.1, 2)$ (μπλέ χρώμα), $(x, y) = (0.5, 1.5)$ (ροζ(magenta) χρώμα) και $(x, y) = (0.8, 1.2)$ (κίτρινο χρώμα).

5.5 Συμπεριφορά για Μεταβαλητό h

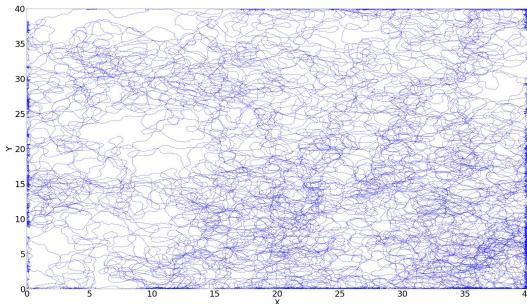
Για να είναι ολοκληρωμένη η μελέτη της διαδρομής του ρομποτικού συστήματος, είναι απαραίτητο να ελεχθεί ο τρόπος που αντιδράει το σύστημα στην μεταβολή της παραμέτρου h .

Η συγκεκριμένη μελέτη χωρίστηκε σε τρείς περιπτώσεις όπου για την κάθε περίπτωση κρατούσαμε σταθερές της παραμέτρους k , q , (x,y) , (X,Y) . Στην πρώτη περίπτωση επιλέχθηκε η παράμετρος q να ισούται $q = -1.4$ και η παράμετρος διακλάδωσης k να ισούται $k = 0.79$. Στην δεύτερη περίπτωση η q ισούται $q = -1.9$ και η παράμετρος διακλάδωσης k να ισούται $k = 0.51$. Στην τρίτη περίπτωση η q ισούται $q = -2.1$ και η παράμετρος διακλάδωσης k να ισούται $k = 0.34$.

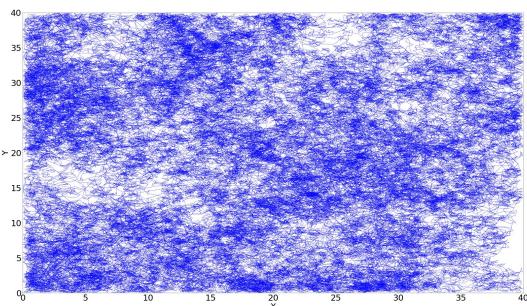
Σε όλες τις περιπτώσεις το ρομπότ εκτέλεσε 10^5 βήματα, ενώ η αρχική θέση του ρομποτικού συστήματος παρέμεινε σταθερή και ίση με $(X, Y) = (0, 0)$, όπως και οι αρχικές συνθήκες οι οποίες ισούται με $(x, y) = (0.1, 0.2)$. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής του ρομπότ και υπολογίστηκε το ποσοστό κάλυψης.

5.5.1 Για $q = -1.4$

Στα Σχ. 5.23i, 5.23ii παρατίθενται τα διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού συστήματος για $q = -1.4$, $k = 0.9$ και $h = 0.1$, $h = 0.5$ αντίστοιχα. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου που προέκυψε για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων είναι 77.1%, 97.4% αντίστοιχα.



(i) Για $h = 0.1$.

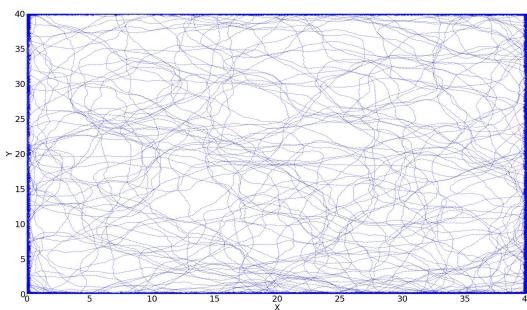


(ii) Για $h = 0.5$.

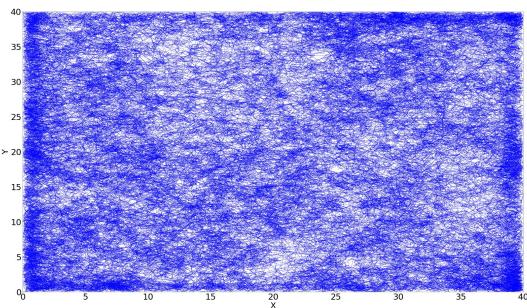
Σχήμα 5.23: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$, $k = 0.79$ και :

5.5.2 Για $q = -1.9$

Στα Σχ. 5.24i, 5.24ii παρατίθενται τα διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού συστήματος για $q = -1.9$, $k = 0.51$ και $h = 0.1$, $h = 0.5$ αντίστοιχα. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου που προέκυψε για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων είναι 60.1%, 99.9% αντίστοιχα.



(i) Για $h = 0.1$.



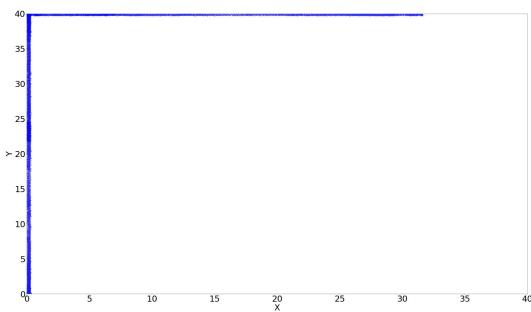
(ii) Για $h = 0.5$.

Σχήμα 5.24: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.51$ και :

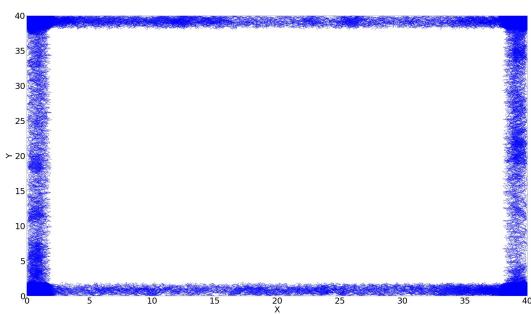
5.5.3 Για $q = -2.1$

Στα Σχ. 5.25i, 5.25ii, 5.25iii, 5.25iv παρατίθενται τα διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού συστήματος για $q = -2.1$, $k = 0.34$ και $h = 0.1$, $h = 0.5$, $h = 0.8$, $h = 1.2$ αντίστοιχα. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου που προέκυψε για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων είναι 2.27%, 18.3%, 34.03%, 57.8% αντίστοιχα.

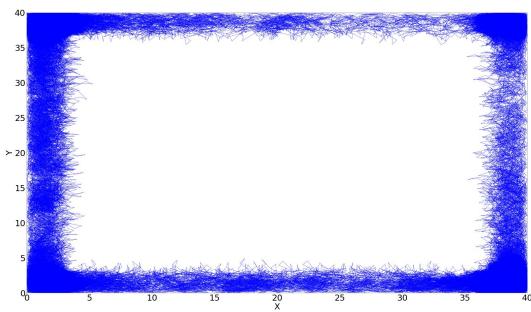
Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι αλλάζοντας ελάχιστα την παράμετρο διακριτοποίησης h έχει ως συνέπεια να μεταβληθεί σημαντικά το ποσοστό κάλυψης που παρουσιάζει η εκάστοτε κίνηση. Αναλυτικότερα, όσο πιο μικρή είναι η τιμή του h τόσο μικρότερη θα είναι η καλυψιμότητα του χώρου που κινείται το ρομπότ, ενώ αν την αυξήσουμε αρκετά από ένα σημείο αλλάζει ελάχιστα εφόσον έχει φτάσει σχεδόν στο 100%. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί στην δεύτερη περίπτωση για $q = -1.9$ όπου μετά από $h = 0.5$ θα αρχίσουμε να παρατηρούμε όλο και μικρότερη αύξηση του ποσοστού κάλυψης της επιφάνειας. Παρόλο που δεν υπάρχει κάποιο διάγραμμα, για παράδειγμα για $h = 0.6$ και για $h = 0.8$ το ποσοστό κάλυψεις είναι 99.93%, 99.96% αντίστοιχα. Δηλαδή μέσα σε 0.4 βήματα του h το ποσοστό ανέβηκε περίπου μόνο **0.04** μονάδες.



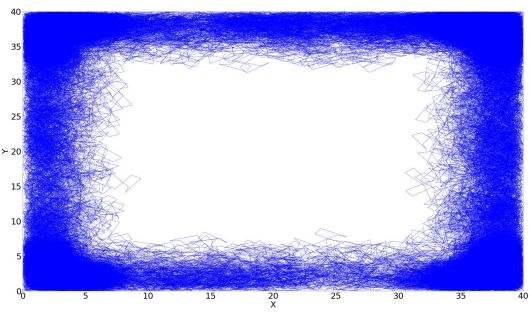
(i) Για $h = 0.1$.



(ii) Για $h = 0.5$.



(iii) Για $h = 0.8$.



(iv) Για $h = 1.2$.

Σχήμα 5.25: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -2.1$, $k = 0.34$ και :

5.6 Συμπεριφορά για Μεταβαλλόμενο Αριθμό Βημάτων

Ολοκληρώνοντας την μελέτη της διαδρομής που ακολουθεί το ρομποτικό σύστημα, ερευνάται η συμπεριφορά του συστήματος όταν μεταβάλλεται ο αριθμός βημάτων. Για τον σκοπό αυτό θα αναλυθεί και θα υπολογιστεί το ποσοστό κάλυψης για ένα εύρος βημάτων ανάλογα την περίπτωση. Ελέχθηκαν δύο περιπτώσεις στις οποίες είναι σταθερές όλες οι παράμετροι. Στην πρώτη περίπτωση για $q = -1.6$ και $k = 0.79$ το εύρος βήματων ήταν μεταξύ $(10^5 - 10^7)$ με τυχαίο βήμα. Στην δεύτερη περίπτωση για $q = -1.9$ και $k = 0.68$ το εύρος βήματων ήταν μεταξύ $(10^4 - 10^6)$ εξίσου με τυχαίο βήμα.

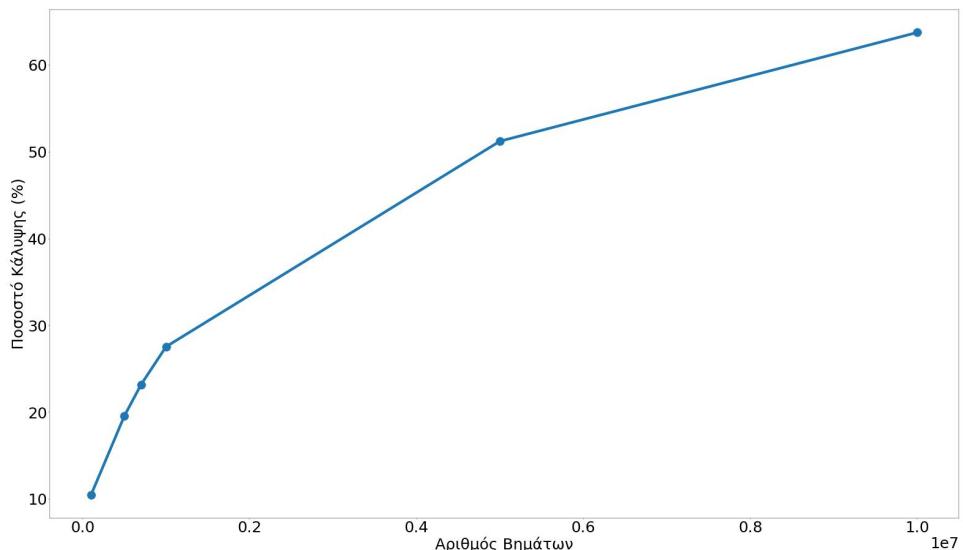
Σε όλες τις περιπτώσεις η παράμετρος διακριτοποίησης h παρέμεινε σταθερή και ίση με $h = 0.2$, η αρχική θέση του ρομποτικού συστήματος παρέμεινε σταθερή και ίση με $(X, Y) = (0, 0)$, όπως και οι αρχικές συνθήκες οι οποίες ισούται με $(x, y) = (0.1, 0.2)$. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε ένας πίνακας με τους αριθμούς βημάτων και τα ποσοστά κάλυψης.

5.6.1 Για $q = -1.6$

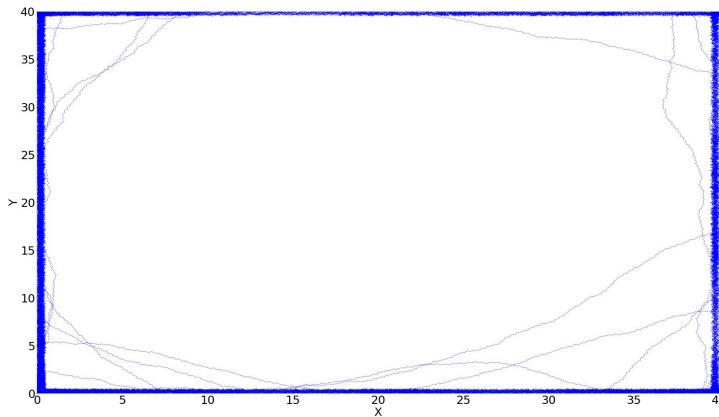
Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 5.1 κατασκευάστηκε διάγραμμα του αριθμού των βημάτων που εκτελεί το ρομπότ συναρτήσει του ποσοστού κάλυψης. Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.26 η μεταβολή της συναρτησιακής αυτής σχέσης είναι κατά προσέγγιση εκθετική. Στα Σχ. 5.27i, 5.27ii, 5.27iii παρουσιάζονται τα διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για αριθμό βημάτων 10^5 , 10^6 και $5 * 10^6$ αντίστοιχα.

Πίνακας 5.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για $q = -1.6$, $k = 0.79$.

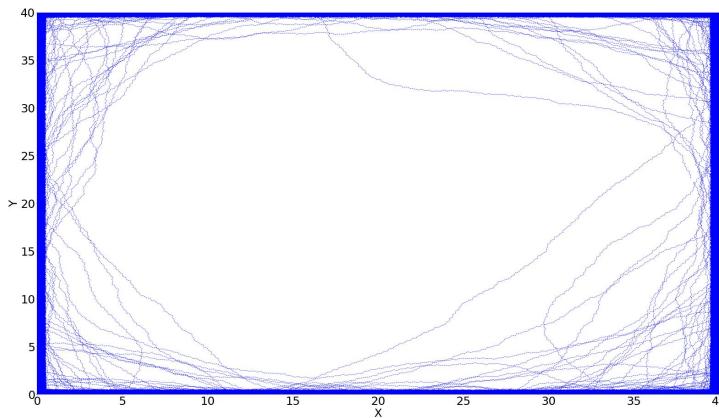
Αριθμός Βημάτων	Ποσοστό Κάλυψης
10^5	10.46
$5 * 10^5$	19.6
$7 * 10^5$	23.2
10^6	25.57
$5 * 10^6$	51.25
10^7	63.8



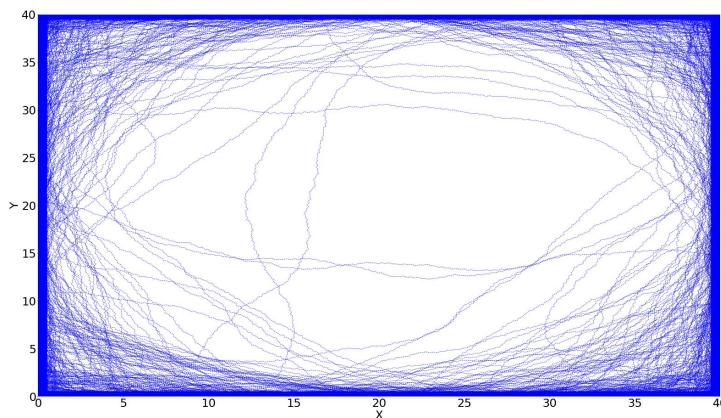
Σχήμα 5.26: Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βημάτων για $q = -1.6$ και $k = 0.79$.



(i) Αριθμό βημάτων 10^5 και ποσοστό κάλυψης 10.46.



(ii) Αριθμό βημάτων 10^6 και ποσοστό κάλυψης 25.57.



(iii) Αριθμό βημάτων $5 * 10^6$ και ποσοστό κάλυψης 51.25.

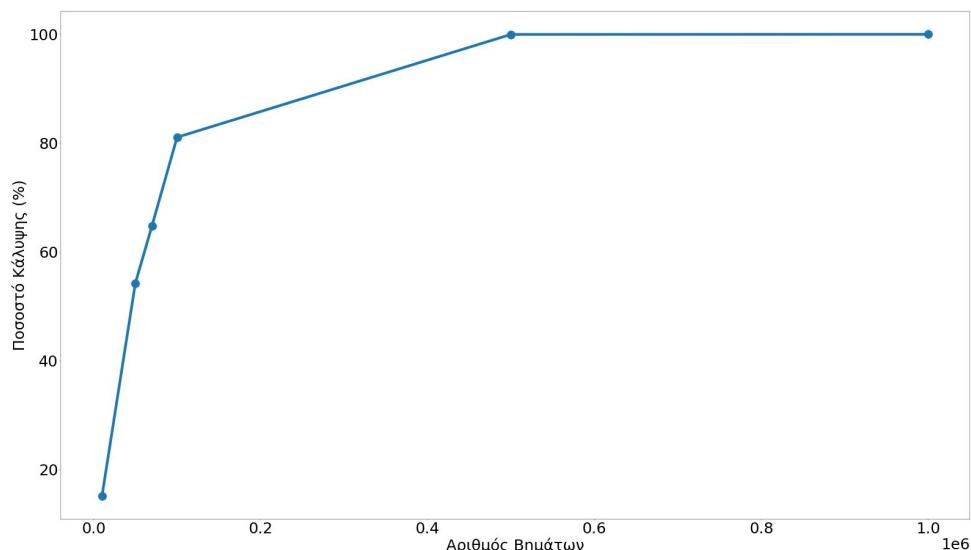
Σχήμα 5.27: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$, $k = 0.79$:

5.6.2 Για $q = -1.9$

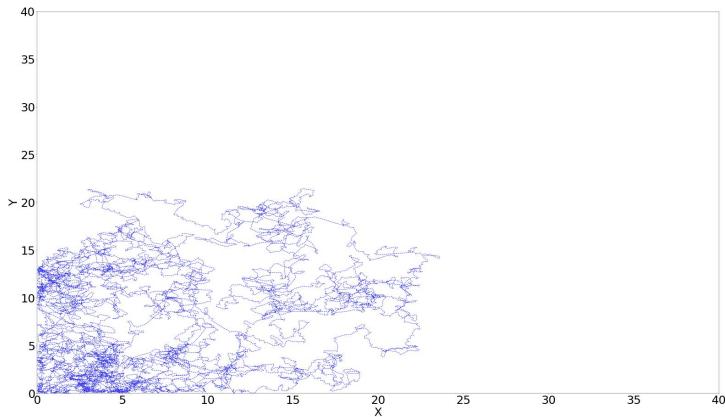
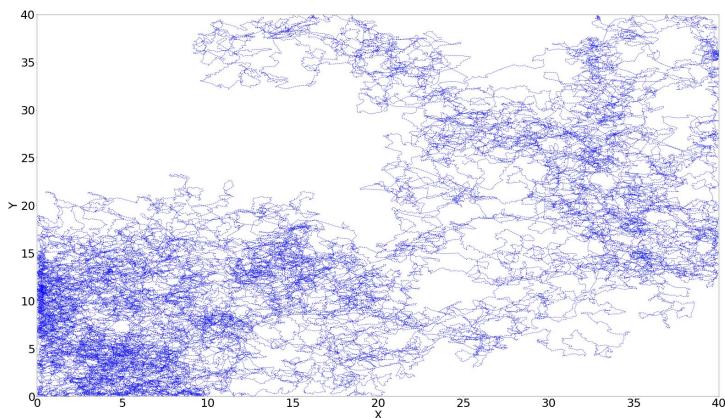
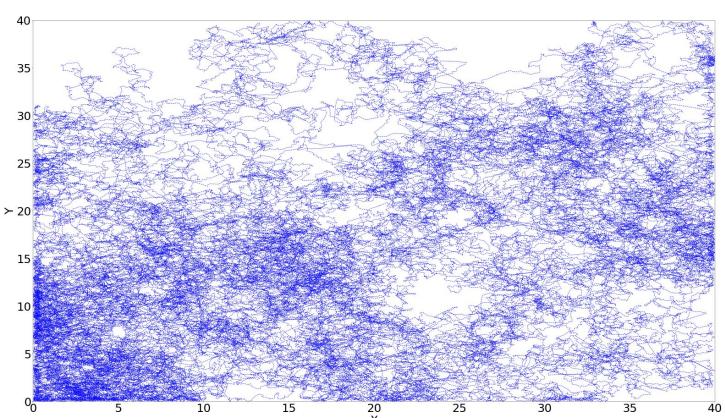
Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 5.2 κατασκευάστηκε διάγραμμα του αριθμού των βημάτων που εκτελεί το ρομπότ συναρτήσει του ποσοστού κάλυψης. Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.28 η μεταβολή της συναρτησιακής αυτής σχέσης είναι κατά προσέγγιση εκθετική. Στα Σχ. 5.29i, 5.29ii, 5.29iii παρουσιάζονται τα διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για αριθμό βημάτων 10^4 , $5 * 10^4$ και 10^5 αντίστοιχα.

Πίνακας 5.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για $q = -1.9$, $k = 0.68$.

Αριθμός Βημάτων	Ποσοστό Κάλυψης
10^4	15.125
$5 * 10^4$	54.254
$7 * 10^4$	64.840
10^5	81.082
$5 * 10^5$	99.98
10^6	100



Σχήμα 5.28: Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βημάτων για $q = -1.9$ και $k = 0.68$.

(i) Αριθμό βημάτων 10^4 και ποσοστό κάλυψης 15.125.(ii) Αριθμό βημάτων $5 * 10^4$ και ποσοστό κάλυψης 81.082.(iii) Αριθμό βημάτων 10^5 και ποσοστό κάλυψης 54.254.

Σχήμα 5.29: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$, $k = 0.68$:

5.7 Συμπεράσματα

Από την παραπάνω μελέτη της συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος, με βάση τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της κίνησης, για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου q συμπαιρένουμε ότι η διαδρομή που ακολουθεί το ρομποτ είναι ευαίσθητη στην μεταβολή όλων των παραμέτρων. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν δεν αλλάξανε συμπεριφορά του συστήματος, δηλαδή βρισκόταν σε όλες τις περιπτώσεις στο χάος. Αυτό επιλέχθηκε ώστε να υπάρχει μία βάση στην μελέτη και τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα.

Συγκεκριμένα, η μεταβολή της παραμέτρου q και της παραμέτρου διακλάδωσης k στην παράγραφο 5.2 προκαλούσε αισθητή αλλαγή στο ποσοστό κάλυψης της διαδρομής του ρομπότ ειδικά στις περιπτώσεις όπου μεταβαλλόταν το k όπως στις παραγράφους 5.2.4, 5.2.5.

Από την άλλη η αλλαγή στις αρχικές συντεταγμένες (X, Y) της επιφάνειας που κινείται το ρομποτικό σύστημα, στην παράγραφο 5.3 προκάλεσε ελάχιστη μεταβολή της καλυψιμότητας.

Επιπλέον, η αλλαγή στις αρχικές συνθήκες (x, y) στην παράγραφο 5.4, προκαλούσε τυχαίες μεταβολές στο ποσοστό κάλυψης του χωρού. Συνεπώς, δεν μπορεί να προκύψει κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα από τον έλεγχο της συγκεκριμένης παραμέτρου.

Τέλος, εκθετική αύξηση της καλυψιμότητας της επιφάνειας, προέκυπτε από τις περιπτώσεις που αυξάναμε την παράμετρο διακριτοποίησης h στην παράγραφο 5.5 και όσο αυξανόταν ο αριθμός βημάτων που εκτελεί το ρομπότ σε μία διαδρομή, στην παράγραφο 5.6.

Οι συνδυασμοί των παραμέτρων που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε είναι άπειροι, συνεπώς και οι διαδρομές, με τα αντίστοιχα ποσοστά κάλυψης του χώρου, που μπορεί να ακολουθήσει το ρομπότ στον χώρο.

Παράρτημα Α[⊗]

Appendix title