



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής  
Εργαστήριο Μη-Γραμμικών Συστημάτων, Κυκλωμάτων και Πολυπλοκότητας

Μελέτη Διακριτών Χαοτικών Συστημάτων και  
Εφαρμογή τους στον Έλεγχο της Κίνησης Αυτόνομων  
Ρομποτικών Οχημάτων με τη Χρήση της Python

Πτυχιακή Εργασία  
του  
Βασίλειου Ασημακόπουλου

**Επιβλέπων:** Χρήστος Βόλος  
Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

12 Ιουλίου 2022



## **Περίληψη**

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ασχολείται με την υλοποίηση και μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς διακριτών χαοτικών συστημάτων με τη γλώσσα προγραμματισμού Python.

Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν παραλλαγές γνωστών μη - γραμμικών διακριτών συστημάτων που εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά και αναλύθηκαν τα φαινόμενα που παρατηρούνται με την μεταβολή διάφορων παραμέτρων τους. Γράφηκαν κώδικες που παράγουν τα διαγράμματα διακλάδωσης, τους εκθέτες Lyapunov και τα διαγράμματα των τιμών  $x_i$  σε συνάρτηση με τις τιμές  $x_{i+1}$ . Επίσης, ως εφαρμογή αυτών των συστημάτων γράφηκαν κώδικες για τη μελέτη του ελέγχου της κίνησης αυτόνομων ρομποτικών οχημάτων μέσω των διακριτών συστημάτων που χρησιμοποιήθηκαν.



## **Abstract**

This thesis deals with the implementation and study of the dynamic behavior of discrete chaotic systems with the Python programming language.

For this purpose, variants of known nonlinear discrete systems that exhibit chaotic behavior have been used and the phenomena observed by varying their various parameters have been analyzed. Codes have been written that produce the bifurcation diagrams, Lyapunov exponents, and plots of  $x_i$  values versus  $x_{i+1}$  values. Also, as an implementation of these systems, codes have been written to study the control of movement of autonomous robotic vehicles by using the discrete systems.



---

# Πρόλογος

Η πτυχιακή αυτή εργασία αποτελεί μια προσπάθεια να διερευνηθεί η χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Python στην επίλυση κι μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς διακριτών χαοτικών συστημάτων.

Ειδικότερα η πτυχιακή αποτελείται από πέντε κεφάλαια, όπου το κάθε ένα παρουσιάζει τη μελέτη παραλλαγών γνωστών διακριτών συστημάτων, ενώ επιπλέον στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή τους στο πεδίο της ρομποτικής.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση της μελέτης των δυναμικών συστημάτων. Ειδικότερα αναλύεται ο ορισμός των δυναμικών συστημάτων και η σχέση τους με το χάος. Ορίζονται τα εργαλεία που αξιοποιούνται στην παρούσα εργασία για την μελέτη των συστημάτων, όπως και τα φαινόμενα που παρατηρήθηκαν μέσα από αυτήν.

Στα επόμενα τρία κεφάλαια μελετούνται οι παραλλαγές τριών γνωστών μη - γραμμικών διακριτών δυναμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η παραλλαγή του Λογιστικού χάρτη και τα φαινόμενα που εμφανίζει μέσα από την παρατήρηση των διαγραμμάτων διακλάδωσης και των εκθετών Lyapunov. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται η παραλλαγή του *sine-sinh-sine* χάρτη και οι συμπεριφορές που εμφανίζει όσο μεταβάλλεται μία παράμετρος του. Τέλος και στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται αντίστοιχη μελέτη για την παραλλαγή του Chebysev χάρτη.

Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετήθηκε, μέσω προσομοίωσης, η κίνηση ενός αυτόνομου ρομποτικού οχήματος και η κάλυψη μιας συγκεκριμένης περιοχής του χώρου, με την αξιοποίηση του Λογιστικού χάρτη, συναρτήσει διαφόρων παραμέτρων του. Η βασική λειτουργία του αυτόνομου ρομποτικού οχήματος παρουσιάζεται στην αρχή του κεφαλαίου .

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της πτυχιακής, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Βόλο για τον χρόνο που αφιέρωσε για να μου απαντήσει σε οποιαδήποτε απορία είχα γύρω από το θέμα της πτυχιακής εργασίας, αλλά και την υπομονή που έδειξε μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα, μετατρέποντας την εργασία σε μία ευχάριστη εμπειρία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω δύο κοντινά μου άτομα για την υπομονή που δείξανε και τον χρόνο που αφιέρωσαν στο να με βοηθήσουν στον κώδικα που έγραψα, όπως και τους ανθρώπους του εργαστηρίου LaNSCom που ήταν εκεί για να απαντήσουν κάθε μου ερώτηση.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κοντινούς μου ανθρώπους, που χωρίς την συμπαράσταση τους, τα θερμά τους λόγια, και τις στιγμές που πίστευαν περισσότερο αυτοί σε μενά, δεν θα μπορούσα να τελειώσω αυτή την εργασία.

# Περιεχόμενα

<b>1 Θεωρητικό Υπόβαθρο</b>	<b>5</b>
1.1 Δυναμικά Συστήματα . . . . .	5
1.1.1 Συνεχές Δυναμικό Σύστημα . . . . .	6
1.1.2 Διακριτό Δυναμικό Σύστημα . . . . .	6
1.2 Χαοτικά Συστήματα . . . . .	7
1.3 Χαοτικά Χαρακτηριστικά . . . . .	7
1.4 Εργαλεία μελέτης χαοτικών συστημάτων . . . . .	7
1.4.1 Διάγραμμα Διακλάδωσης . . . . .	7
1.4.2 Εκθέτης Lyapunov . . . . .	7
1.4.3 Το διάγραμμα $x_i - x_{i+1}$ . . . . .	8
1.5 Φαινόμενα Χαοτικών Συστημάτων . . . . .	9
1.5.1 Διπλασιασμός Περιόδου . . . . .	9
1.5.2 Υστέρηση . . . . .	9
1.5.3 Κρίση Ελκυστών . . . . .	9
1.5.4 Αντιμονοτονικότητα . . . . .	9
1.5.5 Συνύπαρξη ελκυστών . . . . .	10
<b>2 Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη</b>	<b>11</b>
2.1 Για $q = -0.1$ . . . . .	12
2.2 Για $q = -0.3$ . . . . .	19
2.3 Για $q = -0.5$ . . . . .	23
2.4 Για $q = -0.7$ . . . . .	27
2.5 Για $q = -0.9$ . . . . .	31
2.6 Για $q = -1.2$ . . . . .	35
2.7 Για $q = -1.4$ . . . . .	39
2.8 Για $q = -1.6$ . . . . .	48
2.9 Για $q = -1.9$ . . . . .	56
2.10 Για $q = -2.1$ . . . . .	61
2.11 Συμπεράσματα . . . . .	67
<b>3 Παραλλαγή του sine-sinh Χάρτη</b>	<b>69</b>
3.1 Για $q = -0.3$ . . . . .	70
3.2 Για $q = -0.5$ . . . . .	73
3.3 Συμπεράσματα . . . . .	83
<b>4 Παραλλαγή του Χάρτη Chebyshev</b>	<b>85</b>
4.1 Για $q = 0.8$ . . . . .	86
4.2 Για $q = 0.9$ . . . . .	91
4.3 Συμπεράσματα . . . . .	95
<b>5 Έλεγχος της Κίνησης Αυτόνομου Ρομποτικού Οχήματος με χρήση Διακριτού Χάρτη</b>	<b>97</b>
5.1 Μαθηματική Περιγραφή . . . . .	97
5.2 Συμπεριφορά για Μεταβλητά $q, k$ . . . . .	98

5.2.1 Για $q = -1.6, q = -1.9$ . . . . .	99
5.2.2 Για $q = -1.4, q = -1.6$ . . . . .	101
5.2.3 Για $q = -1.9, q = -2.1$ . . . . .	103
5.2.4 Για $k = 0.68, k = 0.69, k = 0.815$ . . . . .	105
5.2.5 Για $k = 0.74, k = 0.751, k = 0.76$ . . . . .	107
5.3 Συμπεριφορά για Μεταβλητή Αρχική Θέση . . . . .	109
5.3.1 Για $q = -2.1$ . . . . .	109
5.3.2 Για $q = -1.9$ . . . . .	112
5.4 Συμπεριφορά για Μεταβαλητές Αρχικές Συνθήκες . . . . .	115
5.4.1 Για $q = -1.4$ . . . . .	115
5.4.2 Για $q = -1.6$ . . . . .	118
5.5 Συμπεριφορά για Μεταβλητό $h$ . . . . .	119
5.5.1 Για $q = -1.4$ . . . . .	119
5.5.2 Για $q = -1.9$ . . . . .	120
5.5.3 Για $q = -2.1$ . . . . .	121
5.6 Συμπεριφορά για Μεταβαλλόμενο Αριθμό Βημάτων . . . . .	123
5.6.1 Για $q = -1.6$ . . . . .	123
5.6.2 Για $q = -1.9$ . . . . .	126
5.7 Συμπεράσματα . . . . .	128

# Code Listings

5.1	Bifurcation Diagram . . . . .	131
5.2	Lyapunov exponent . . . . .	133
5.3	$x_i - x_{i+1}$ diagram . . . . .	136
5.4	Robot path coverage . . . . .	136
5.5	Steps coverage diagram . . . . .	139



## Κεφάλαιο 1

# Θεωρητικό Υπόβαθρο

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο βασίστηκε η μελέτη στα πλαίσια της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Ειδικότερα, παρουσιάζονται η απαραίτητη θεωρία των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων, τα εργαλεία που χρησημοποιήθηκαν για την μελέτη των συστημάτων, όπως και τα φαινόμενα που παρατηρήθηκαν κατά την διάρκεια της μελέτης.

### 1.1 Δυναμικά Συστήματα

Δυναμικά συστήματα ονομάζονται τα φυσικά συτήματα και οι φυσικές διεργασίες που περιγράφονται από συστήματα είτε διαφορικων εξισώσεων είτε εξισώσεων διαφορών, των οποίων ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος [1].

Αν θεωρήσουμε ένα  $N$ -διάστατο χώρο εξαρτημένων μεταβλητών  $x_k(t)$ , με  $k = 1, 2, \dots, N$ , που έχουν ως μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή τους το χρόνο  $t$  και αποτελούν συνιστώσες του διανύσματος:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)), \quad t \in I = (a, \beta) \quad (1.1)$$

όταν ο χρόνος είναι **συνεχής** στο διάστημα  $I$  (οι μεταβλητές θεωρούνται πραγματικές) ή ενός διανύσματος:

$$x_n = x(t_n) = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{N,n}), \quad x(k_n) = x_k(t_n) \quad (1.2)$$

όταν ο χρόνος παίρνει **διακριτές** τιμές  $t_n$  (η ακέραιος). Η εξέλιξη στο χρόνο των διανυσμάτων αυτών, δίνεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης αν το  $t$  είναι συνεχές :

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x, t) \quad \text{ή} \quad x_k = f_k(x, t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.3)$$

ή ένα σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \text{ή} \quad x_{k,n+1} = g_k(x_n), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

αν τ διακριτό και ορίζεται ως το δυναμικό σύστημα που περιγράφει το φυσικό φαινόμενο που μας ενδιαφέρει. Οι διανυσματικές συναρτήσεις  $f$  και  $g$  αποτελούν την "μαθητικοπόληση" του φαινούμενου και φυσικά διαφέρουν ανάλογα με τους φυσικούς νόμους που διέπουν κάθε φαινόμενο. Ο Ευκλείδιος χώρος  $\mathbb{R}^N$  στον οποίον εξελίσσονται τα διανύσματα  $x(t)$  και  $x(n)$  λέγεται **χώρος φάσεων του συστήματος** [1].

Συμβολικά, λοιπόν, μπορούμε να ορίσουμε ένα δυναμικό σύστημα ως μια **ροή** (ή απεικόνιση)  $\varphi(x, t)$  στο χώρο φάσεων:

$$\varphi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E, \quad (1.5)$$

η οποία μεταφέρει (ή απεικονίζει) ένα σημείο  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , το οποίο αντιστοιχεί στη θέση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t$ , σε ένα σημείο  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , το οποίο αντιστοιχεί στη θέση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t'$ ,

$$x' = \varphi(x, t') \quad (1.6)$$

Μια ροή έχει τις ιδιότητες:

$$\varphi(x, 0) = x \quad (1.7)$$

$$\varphi(\varphi(x, t_1), t_2) = \varphi(x, t_1 + t_2) \quad (1.8)$$

Μπορούμε να ορίσουμε τη θέση  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  σε μια χρονική στιγμή  $t_0$  ως την αρχική θέση του συστήματος. Αρχική θέση για το σύστημα μπορεί να αποτελεί κάθε σημείο του χώρου των φάσεων και η ροή  $\varphi(x, t)$  του δυναμικού συστήματος μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε αρχική θέση του συστήματος. Εν γένει, η εξέλιξη του συστήματος που αντιστοιχεί σε διαφορετική αρχική θέση είναι επίσης διαφορετική. Αν ο κανόνας εξέλιξης που εκφράζεται με την ροή δεν εμπλέκει «τυχαιότητα» τότε το σύστημα ονομάζεται **αιτιοκρατικό** (deterministic). Ένα αιτιοκρατικό σύστημα δίνει πάντα την ίδια εξέλιξη για μια δοθείσα αρχική θέση. Αν η ροή συμπεριλαμβάνει κάποιον βαθμό τυχαιότητας με τον ορισμό πιθανοτήτων στον κανόνα της εξέλιξης τότε το σύστημα ονομάζεται **στοχαστικό** (stochastic).

Αν η ροή  $\varphi(x, t)$  ενός αιτιοκρατικού συστήματος δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο  $t$  τότε το σύστημα ονομάζεται αυτόνομο. Σε ένα τέτοιο σύστημα, η εξέλιξη του συστήματος είναι ανεξάρτητη από την αρχική χρονική στιγμή. Αντίθετα, σε ένα μη-αυτόνομο σύστημα, αν το σύστημα βρεθεί σε ένα σημείο  $x \in E$ , η εξέλιξη του στο χρόνο εξαρτάται και από την χρονική στιγμή  $t$  στην οποία βρίσκεται στο  $x$ .

Αν και στη φύση ο χρόνος  $t$  αποτελεί μια συνεχή μεταβλητή, σε ένα δυναμικό σύστημα ο χρόνος μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός [2].

### 1.1.1 Συνεχές Δυναμικό Σύστημα

Στην πρώτη περίπτωση ο χρόνος μπορεί να πάρει μια οποιαδήποτε πραγματική τιμή και το δυναμικό σύστημα ονομάζεται **συνεχές** [2].

### 1.1.2 Διακριτό Δυναμικό Σύστημα

Αν όμως η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται σε χρονικά βήματα ανά  $\Delta t$ , τότε ο χρόνος παίρνει τις διακριτές τιμές  $t_k = t_0 + k\Delta t$  και το σύστημα ονομάζεται **διακριτό** (discrete). Για ένα διακριτό σύστημα μια χρονική στιγμή  $t \in (t_k, t_{k+1})$  δεν έχει νόημα [2].

Στη συγκεκριμένη εργασία όλα τα συστήματα που μελετήθηκαν ανήκουν στην κατηγορία των διακριτών, μη - γραμμικών συστημάτων.

## 1.2 Χαοτικά Συστήματα

Τα χαοτικά συστήματα αποτελούν μια ξεχωριστή αυτοδύναμη κατηγορία δυναμικών συστημάτων. Αν και φαίνονται στοχαστικά όταν παρατηρούνται, παρ' όλα αυτά περιγράφονται μαθηματικά από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (ροές) ή από μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών (απεικονίσεις) και ανήκουν στην κατηγορία των μη γραμμικών αιτιοκρατικών συστημάτων. Η τροχιά τους για ένα σύνολο αρχικών συνθηκών, περιορίζεται σε ένα υποχώρο του χώρου φάσεων που στην προκειμένη περίπτωση επειδή εμφανίζει πρωτότυπες (παράξενες) ιδιότητες λέγεται παράξενος ελκυστής. Αν και ο χώρος που εξελίσσεται η τροχιά είναι περιορισμένος, αυτή δεν διέρχεται ποτέ από το ίδιο σημείο δύο φορές, δηλαδή δεν κόβει τον εαυτό της, έχει άπειρο μήκος, είναι απεριοδική και τούτο φαίνεται καθαρά στο φάσμα ισχύος μια μεταβλητής του συστήματος που είναι συνεχές. Επίσης φαίνεται να περιφέρεται τυχαία, δηλαδή οι μελλοντικές θέσεις της να μην σχετίζονται με τις παρελθούσες, για αυτό και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μια μεταβλητής ενός χαοτικού συστήματος μηδενίζεται σε σχετικά μικρό χρονικό διάστημα [3].

## 1.3 Χαοτικά Χαρακτηριστικά

1. Το χαοτικό σύστημα πρέπει να είναι τοπολογικά μεταβατικό. Τοπολογική μεταβατικότητα (ή τοπολογική ανάμειξη), σημαίνει ότι το σύστημα θα εξελιχθεί με την πάροδο του χρόνου, έτσι ώστε κάθε συγκεκριμένη περιοχή ή ανοιχτό σύνολο του χώρου φάσης τελικά θα συμπίπτει με οποιαδήποτε άλλη περιοχή. Η ανάμειξη των έγχρωμων βαφών ή υγρών είναι ένα παράδειγμα ενός χαοτικού συστήματος [11].
2. Ευθαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Το κύριο χαρακτηριστικό των χαοτικών συστημάτων, είναι η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή, αν δοθούν δύο τυχαίες διαφορετικές αρχικές συνθήκες  $x_1(0)$  και  $x_2(0) = x_1(0) + \Delta t(0)$ , η μια κοντά στην άλλη, οι τροχιές που προκύπτουν αποκλίνουν μέχρι να καταστούν ασυσχέτιστες [2].

## 1.4 Εργαλεία μελέτης χαοτικών συστημάτων

Τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στην μελέτη της εργασίας αναλύονται στη συνέχεια.

### 1.4.1 Διαγράμμα Διακλάδωσης

Τα διαγράμματα διακλάδωσης χρησιμοποιούνται κυρίως για την ποιοτική μελέτη της ροής ενός χαοτικού συστήματος αλλάζοντας μία παράμετρο κ. Συγκεκριμένα σημεία ισορροπίας μπορούν να δημιουργηθούν ή να καταστραφούν ή να αλλάξει η ευστάθεια τους. Τέτοιες ποιοτικές μεταβολές σε ένα σύστημα της ονομάζουμε **διακλαδώσεις** και οι τιμές των παραμέτρων κατά τις οποίες εμφανίζονται αυτές οι αλλαγές ονομάζονται **σημεία διακλάδωσης**. Στα διαγράμματα διακλάδωσης, παρατηρούμε τόσο χαοτικές όσο και περιοδικές περιοχές, ενώ στην περίπτωση που εξετάζουμε ένα χαοτικό σύστημα, παρατηρούνται φαινόμενα όπως ο διπλασιασμός περιόδου, η υστέρηση, η συνύπαρξη ελκυστών, η αντιμονοτονικότητα και η κρίση ελκυστών, τα οποία θα αναλυθούν στην επόμενη παράγραφο [4].

### 1.4.2 Εκθέτης Lyapunov

Ο εκθέτης Lyapunov μιας απεικόνισης αποτελεί ένα μέτρος της ευαισθησίας της εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες, η οποία είναι χαρακτηριστική της χαοτικής συμπεριφοράς

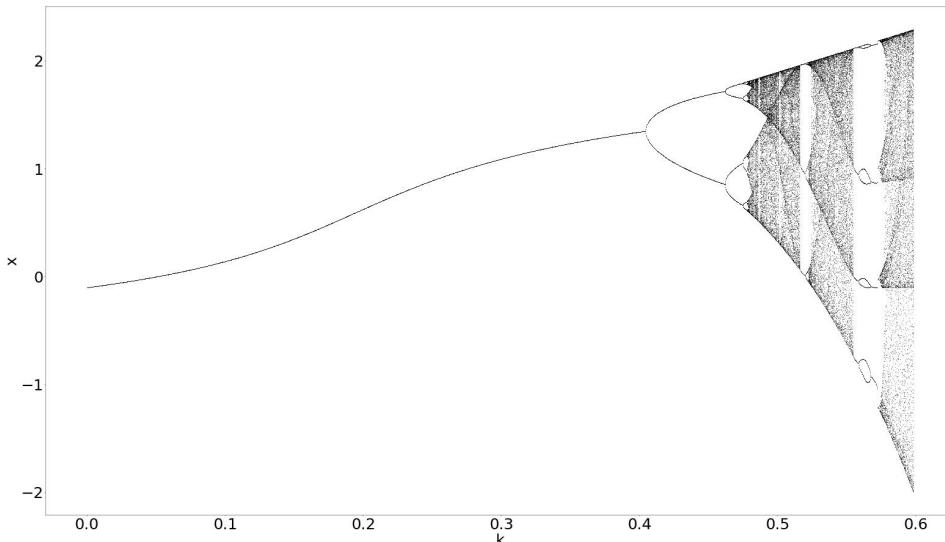
ενός συστήματος. Ο εκθέτης Lyapunov (συμβολίζεται με  $\lambda$ ), μπορεί να υπολογιστεί για μία μονοδιάστατη απεικόνιση. Αν ένα σύστημα μπορεί να εξελιχθεί από δύο διαφορετικές καταστάσεις,  $x$  και  $x + \varepsilon_0$  τότε μετά από η επαναλήψεις η απόκλιση των δύο καταστάσεων δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_0 2^{\lambda n} \quad (1.9)$$

όπου ο εκθέτης Lyapunov λ δίνει τη μέση τιμή του ρυθμού απόκλισης. Αν ο  $\lambda$  είναι αρνητικός, τότε η εξέλιξη του συστήματος δεν οδηγεί σε χαοτική συμπεριφορά γιατί οι τροχιές συγκλίνουν. Αν ο  $\lambda$  είναι θετικός, τότε οι γειτονικές τροχιές αποκλίνουν, οπότε η εξέλιξη του συστήματος είναι ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες που είναι το κύριο χαρακτηριστικό του χάους [5].

#### 1.4.3 Το διάγραμμα $x_i - x_{i+1}$

Στο διάγραμμα  $x_i - x_{i+1}$  απεικονίζονται οι λύσεις των εξισώσεων σε σχέση με τις προηγούμενες. Όταν ένα σύστημα είναι σε περίοδο - 1 σημαίνει ότι η εξίσωση παράγει συνέχεια μια λύση. Άρα αυτή και η προηγούμενη ταυτίζονται. Επομένως στο διάγραμμα βλέπουμε ένα σημείο. Όταν ένα σύστημα είναι σε χάος σημαίνει ότι η εξίσωση παράγει άπειρες λύσεις. Επομένως στο διάγραμμα βλέπουμε άπειρα σημεία τα οποία σχηματίζουν μια καμπύλη. Το πλήθος των σημείων στο διάγραμμα αντιστοιχεί στο πλήθος των λύσεων που παράγει η εκάστοτε εξίσωση.



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα διακλάδωσης.

## 1.5 Φαινόμενα Χαοτικών Συστημάτων

Τα φαινόμενα που θα αναλυθουν παρακάτω παρατηρήθηκαν στα συστήματα που μελετήθηκαν στα επόμενα κεφάλαια.

### 1.5.1 Διπλασιασμός Περιόδου

Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται σε χαοτικά συστήματα όπως η λογιστική απεικόνιση. Ουσιαστικά οι διακλαδώσεις σε ένα διάγραμμα όπως στο Σχ. 1.1 όσο αυξάνεται η παράμετρος  $k$  διπλασιάζονται από περίοδο-1 σε περίοδο-2 μέχρι που για συγκεκριμένο  $k$  το σύστημα εισέρχεται σε χάος [5].

### 1.5.2 Υστέρηση

Όταν μεταξύ των ορίων διαφόρων περιοδικών περιοχών υπάρχει ασυνέχεια, τότε αυτό ονομάζεται φαινόμενο υστέρησης.

### 1.5.3 Κρίση Ελκυστών

Όταν παρατηρούμε μία απότομη ασυνεχή μεταβολή σε ένα χαοτικό ελκυστή ενώ μεταβάλλεται μία παράμετρος του συστήματος, το ονομάζουμε κρίση ελκυστών. Οι ασυνεχείς μεταβολές είναι τυπικά τριών τύπων [5] :

1. Ένας χαοτικός ελκυστής καταστρέφεται καθώς η παράμετρος περνά από μια κρίσιμη τιμή. Το είδος αυτής της κρίσης ονομάζεται συνοριακή κρίση (boundary crisis).
2. Το μέγεθος του χαοτικού ελκυστή στο χώρο των φάσεων αυξάνεται ξαφνικά καθώς η παράμετρος περνά από την κρίσιμη τιμή της. Το είδος αυτής της κρίσης ονομάζεται εσωτερική κρίση, καθώς ο ελκυστής συγκρούεται με μία περιοδική τροχιά στο εσωτερικό της δεξαμενής έλξης του.
3. Δύο ή περισσότεροι ελκυστές συγχωνεύονται για να σχηματίσουν ένα χαοτικό ελκυστή.

Το αντίστροφο αυτών των διαδικασιών επίσης συμβαίνουν καθώς η παράμετρος ελέγχου περνά από την κρίσιμη τιμή, κατά την αντίθετη κατεύθυνση.

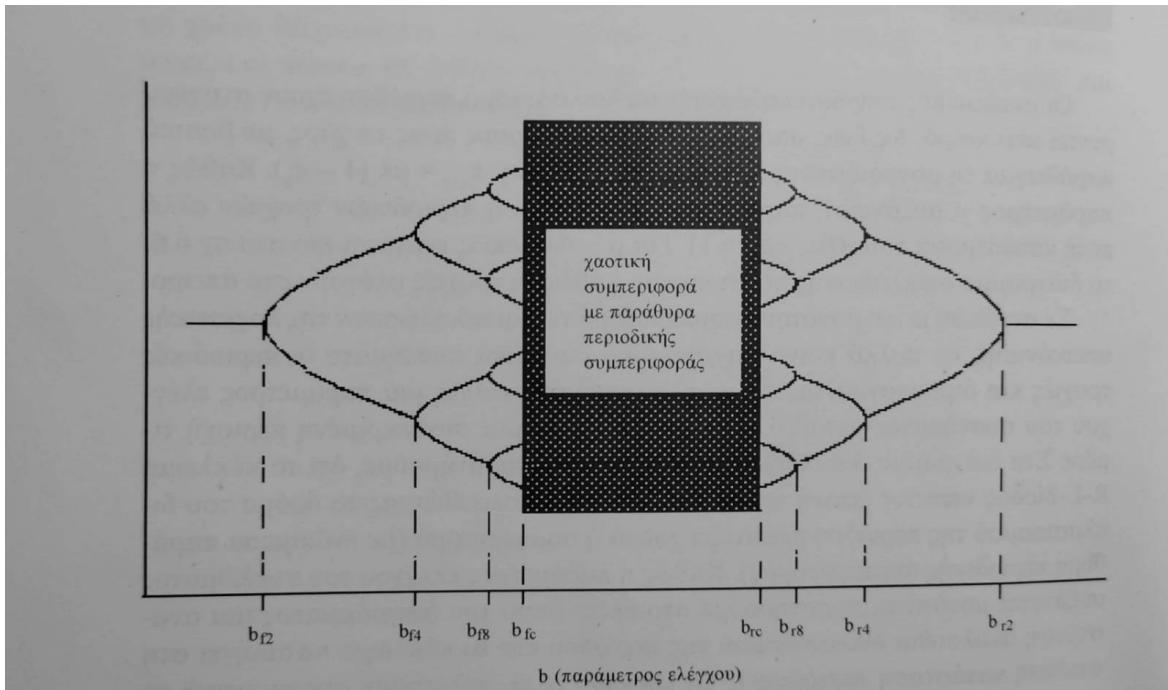
### 1.5.4 Αντιμονοτονικότητα

Το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας μπορεί να εμφανιστεί με δύο τρόπους [5] :

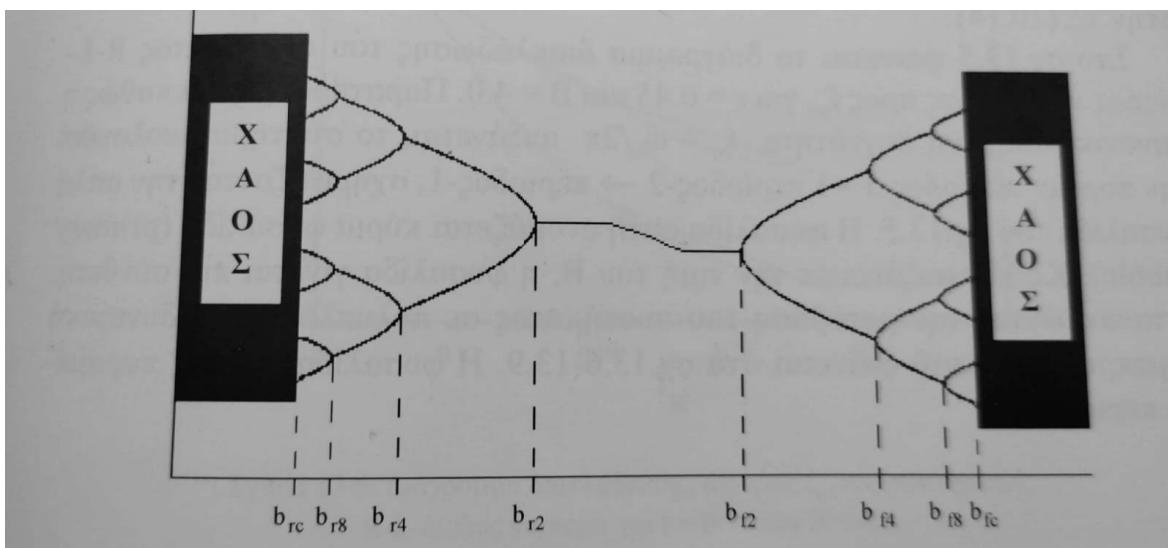
1. Μπορεί να παρατηρηθεί σε ένα διάγραμμα διακλάδωσης κατά την αύξηση της παραμέτρου  $k$  όταν το σύστημα ενώ μπαίνει με διπλασιασμό περιόδου στο χάος, στη συνέχεια εξέρχεται από αυτό με μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου και έτσι το σύστημα καταλήγει στην αρχική περίοδο του. Το σχήμα που προκύπτει στο διάγραμμα διακλάδωσης ονομάζεται χαοτική φυσαλίδα. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί στο Σχ. 1.2.
2. Καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος  $k$ , μεταξύ δύο χαοτικών περιοχών παρατηρείται μια ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου μέχρι να φτάσει σε περίοδο-1 και στη συνέχεια με διπλασιασμό της περιόδου καταλήγει πάλι στο χάος. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί στο Σχ. 1.3.

### 1.5.5 Συνύπαρξη ελκυστών

Το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών είναι το φαινόμενο κατά το οποίο το σύστημα για διαφορετικές αρχικές συνθήκες παρουσιάζει εντελώς διαφορετική δυναμική συμπεριφορά [5].



Σχήμα 1.2: Σχηματικό διάγραμμα φυσαλίδας περιόδου-1.



Σχήμα 1.3: Σχηματικό διάγραμμα ανάστροφης φυσαλίδας περιόδου-1.

## Κεφάλαιο 2

# Παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διακριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού Λογιστικού Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μποροεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για την μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ .

Ο Λογιστικός Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση [10]:

$$x_{i+1} = k * x_i * (1 - x_i), \quad x_i \in [0, 1] \quad (2.1)$$

Στην εξίσωση (2.1) προστέθηκε ένας σταθερός όρος  $q$  και άλλαξαν οι υπόλοιποι όροι. Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη,

$$x_{i+1} = k * (1 + x_i)^2 * (2 - x_i) + q \quad (2.2)$$

όπου  $k$ ,  $q$  παράμετροι.

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί η ταυτόχρονη σύγκριση της περιοδικής και χαοτικής συμπεριφοράς του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του ( $x_0 = 0.1$ ) παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου  $q$  μεταβαλλόταν στο διάστημα  $[-0.1, -2.1]$ . Στο διάστημα  $[-0.1, -0.9]$  και στο  $[-1.2, -1.6]$  μεταβαλλόταν με βήμα 0.2, ενώ στο  $[-0.9, -1.2]$  και στο  $[-1.6, -2.1]$  η παράμετρος  $q$  μεταβαλλόταν με βήμα 0.3. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

## 2.1 Για $q = -0.1$

Στο Σχ. 2.1 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (2.2), ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.1$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για  $k = 0.3$ , ενώ για  $k = 0.4$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k = 0.47$  (περίοδος - 4), τον τρίτο για  $k = 0.476$  (περίοδος - 8), ενώ ο τελευταίος διπλασιασμός εμφανίζεται για  $k = 0.478$  (περίοδος - 16). Στη συνέχεια για  $k > 0.479$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k = 0.51$  (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k = 0.52$  (περίοδος - 6) και  $k = 0.522$  (περίοδος - 11) για  $k > 0.524$ . Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για  $k = 0.555$  (περίοδος - 4). Για  $k = 0.559$  εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 8) ο οποίος καταστρέφεται για  $k = 0.568$ , οπότε εδώ παρατηρούμε το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας δηλαδή έχουμε μία ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου για  $k = 0.568$  σχηματίζοντας κύριες φυσαλίδες περιόδου - 1. Τέλος για  $k = 0.5735$  έχουμε έναν τελευταίο διπλασιασμό (περίοδος - 6) πριν ξανά εισέλθει το σύστημα για  $k > 0.575$  στο χάος.

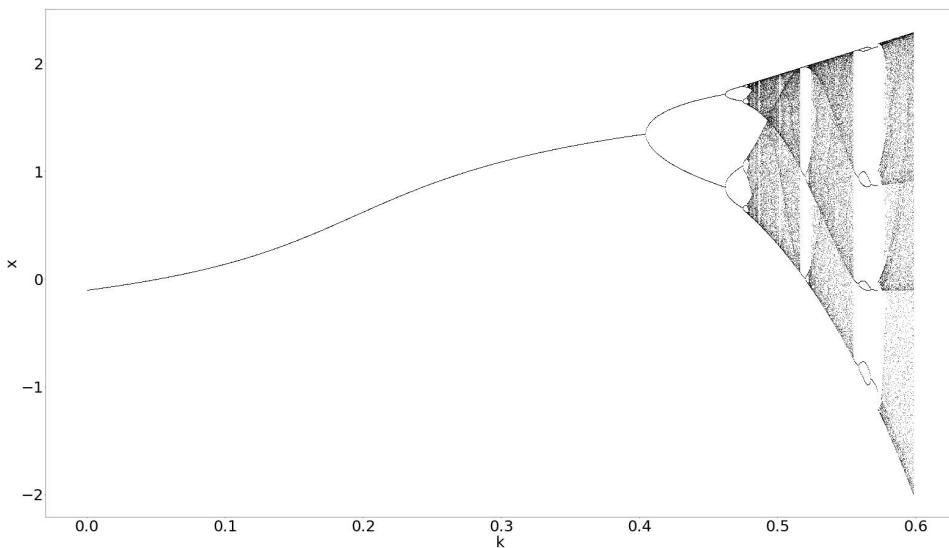
Στα Σχ. 2.3, 2.4 παρατίθενται τέσσερα διαγράμματα διακλάδωσης (2.3i, 2.3ii, 2.4i, 2.4ii) για  $0.54 < k < 0.6$ . Ουσιαστικά εστιάστηκαν τα διαγράμματα στην αντιμονοτονικότητα που εμφανίζεται για συγκεκριμένες τιμές του  $q$ . Επίσης παρατηρούμε στα διαγράμματα 2.3ii, 2.4i, 2.4ii τη δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με υποδιπλασιασμό της περιόδου. Επιπλέον στο διάγραμμα 2.4ii το φαινόμενο εμφανίζεται δυο φορές για  $0.560 < k < 0.568$  και  $0.571 < k < 0.573$ .

Επιπλέον, στο Σχ. 2.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0.3, 0.6]$ . Στο διάστημα τιμών  $k = 0.522$ , στο  $0.51 < k < 0.522$ , και στο  $0.554 < k < 0.574$  παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικό, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

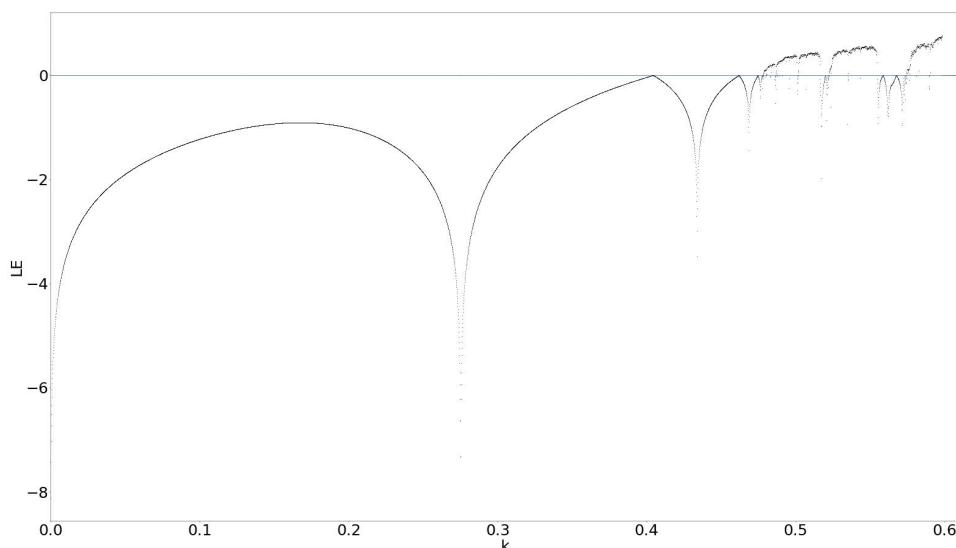
Τέλος, στον πίνακα 2.1 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -0.1$ .

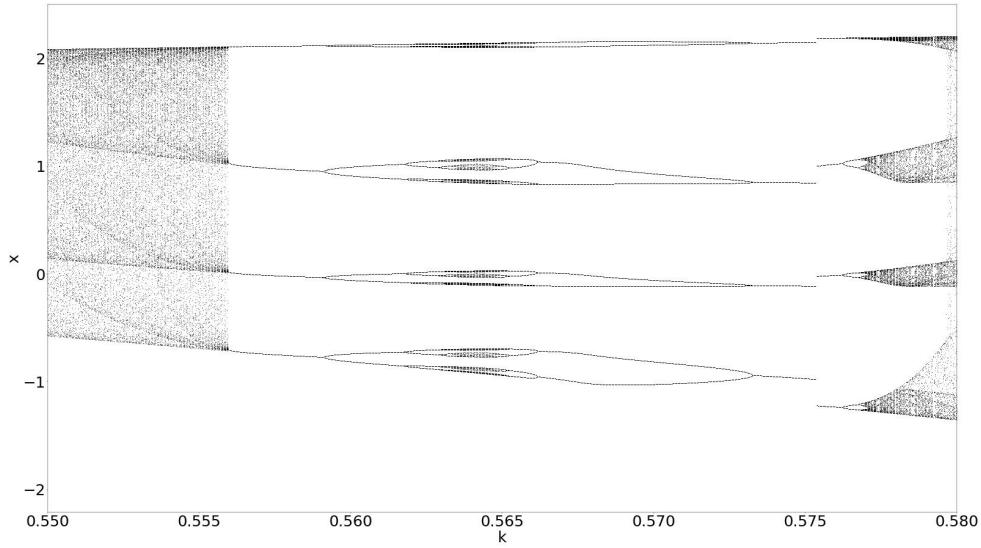
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.5i
0.41	Περίοδος - 2	2.5ii
0.476	Περίοδος - 8	2.5iii
0.4778	Περίοδος - 16	2.5iv
0.479	Χάος	2.5v
0.517	Περίοδος - 3	2.5vi
0.521	Περίοδος - 6	2.5viii
0.522	Περίοδος - 11	2.6i
0.524	Χάος	2.6ii
0.555	Περίοδος - 4	2.6iii
0.559	Περίοδος - 8	2.6iv
0.568	Περίοδος - 4	2.6v
0.5735	Περίοδος - 6	2.6vi
0.575	Χάος	2.6vii



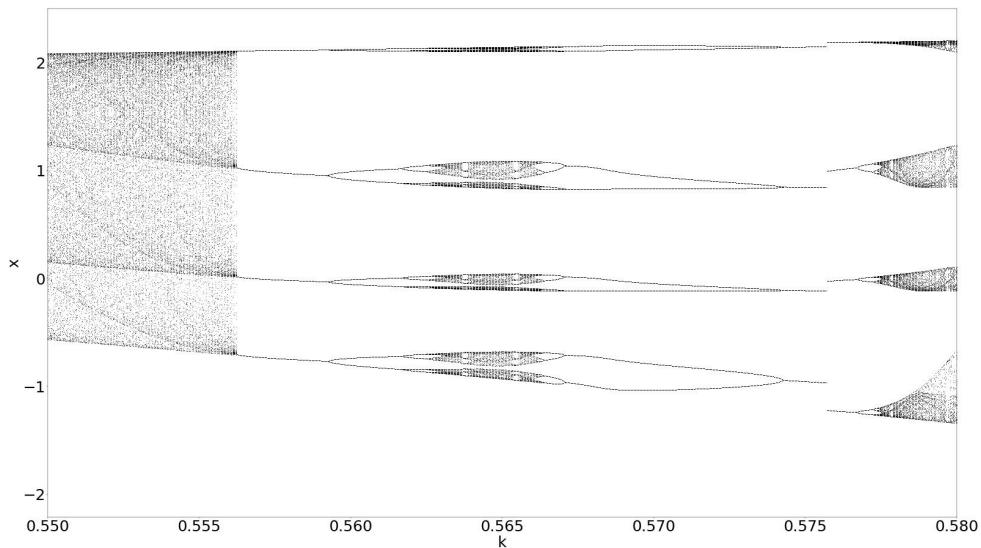
Σχήμα 2.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -0.1$ .



Σχήμα 2.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.1$ .

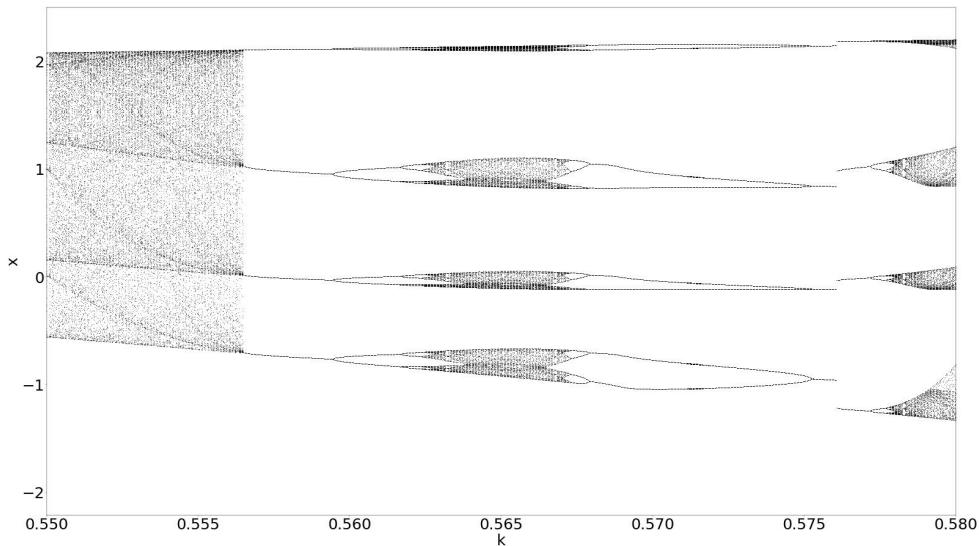


(i) Για  $q = -0.112$

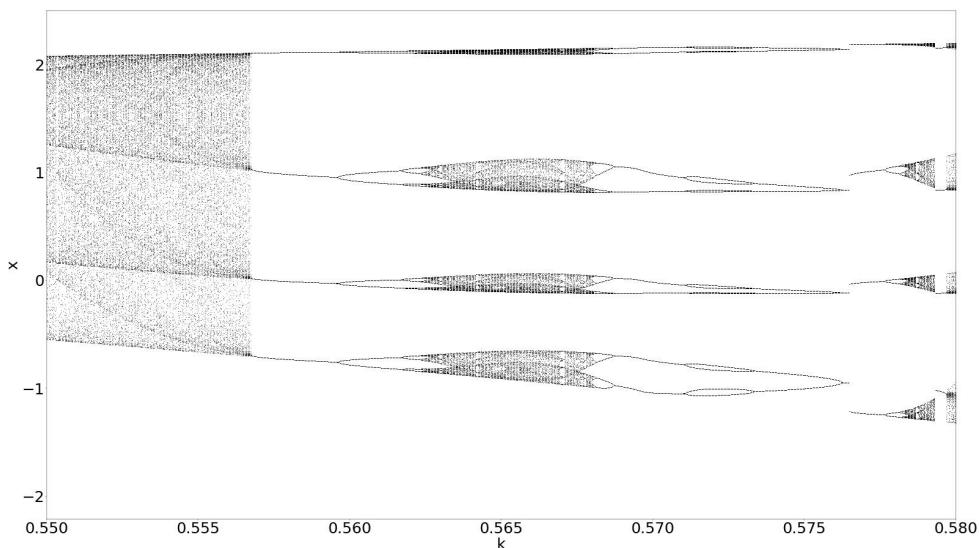


(ii) Για  $q = -0.114$

Σχήμα 2.3: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του  $q$  (α' μέρος).

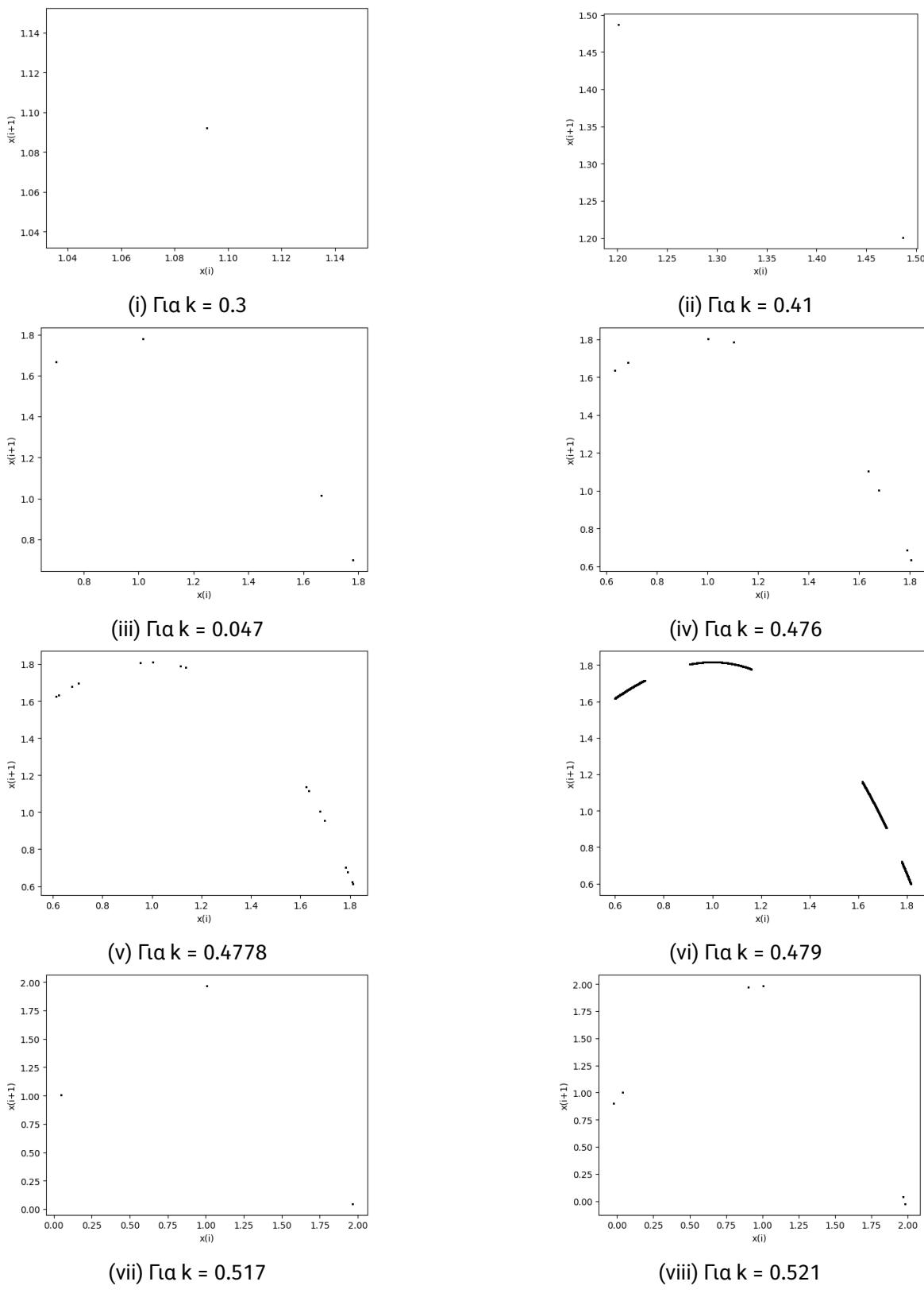


(i) Για  $q = -0.116$

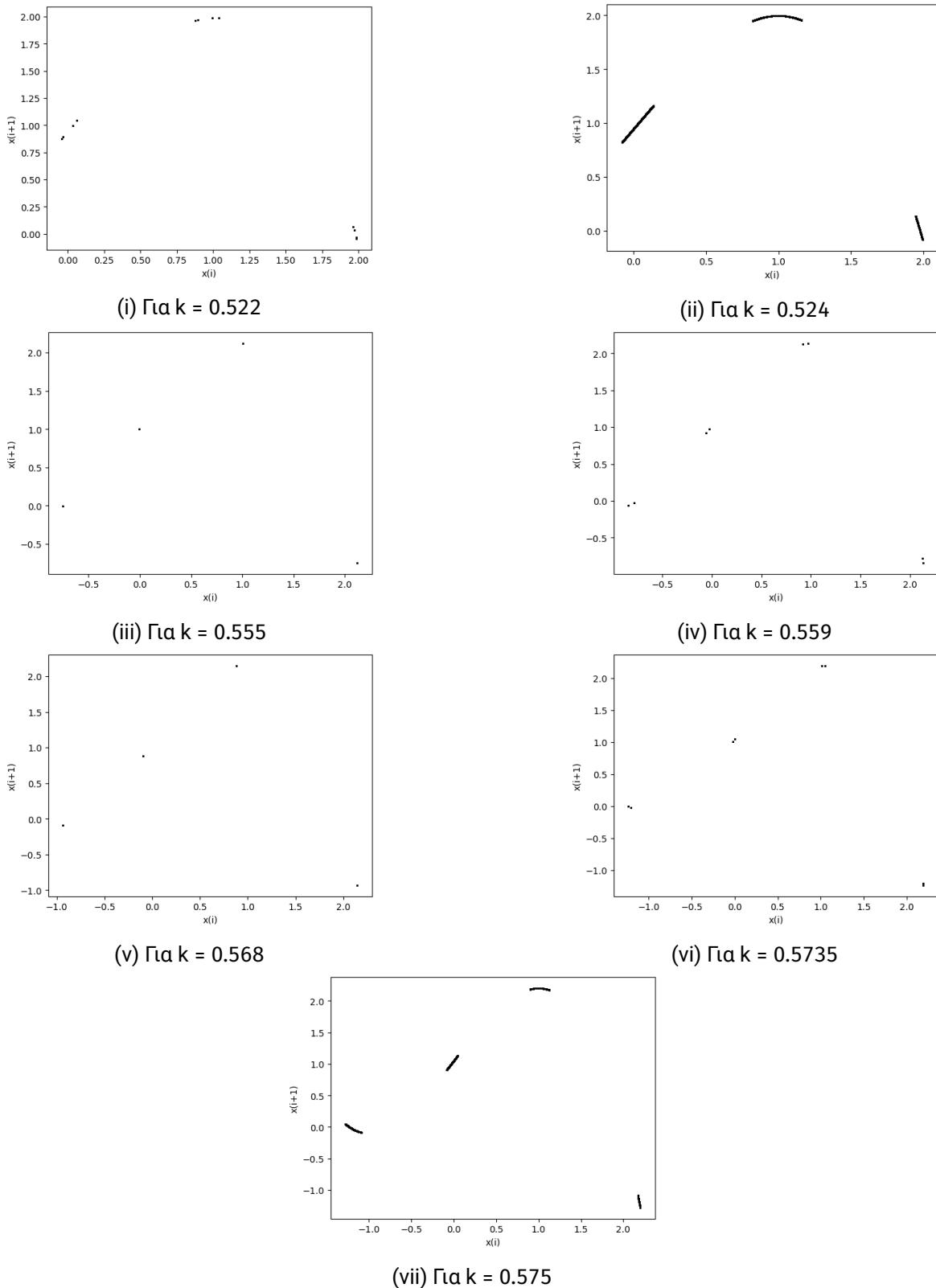


(ii) Για  $q = -0.118$

Σχήμα 2.4: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του  $q$  ( $\beta'$  μέρος).



Σχήμα 2.5: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  με την τιμή  $x_{i+1}$  (α' μέρος).



Σχήμα 2.6: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.2 Για $q = -0.3$

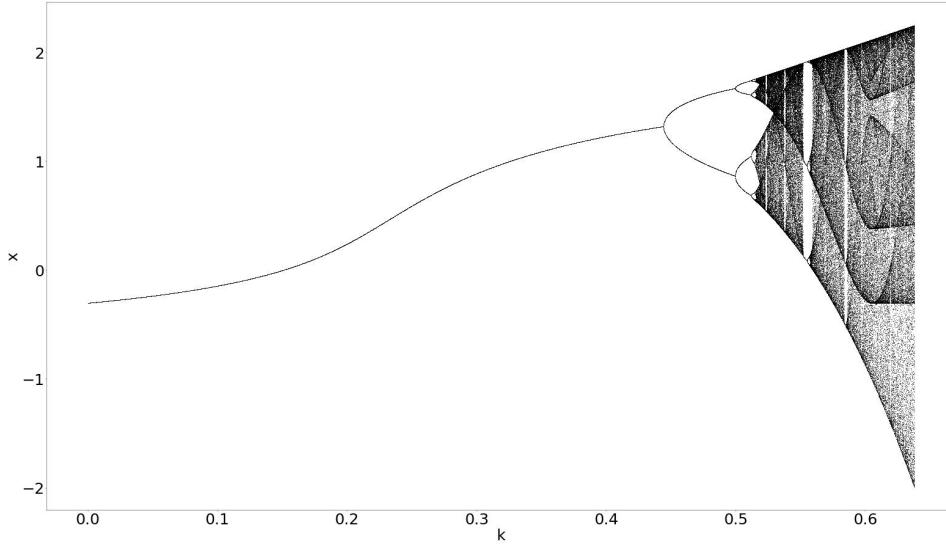
Στο Σχ. 2.7 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (2.2), ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.3$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για  $k = 0.3$ , ενώ για  $k = 0.44$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k = 0.5$  (περίοδος - 4), τον τρίτο για  $k = 0.511$  (περίοδος - 8). Στην συνέχεια για  $k > 0.5165$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k = 0.551$  (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος για  $k > 0.5573$  μετά από δύο διπλασιασμούς  $k = 0.555$  (περίοδος - 6) και  $k = 0.556$  (περίοδος - 12). Επομένως, εμφανίζει πάλι τη συνοριακή κρίση. Εξέρχεται για τελευταία φορά από το χάος για  $k = 0.583$  (περίοδος - 4) και μετά από ένα διπλασιασμό για  $k = 0.5846$  (περίοδος - 7) εισέρχεται για τελευταία φορά στο χάος για  $k = 0.5851$ . Οπότε, και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.8 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.636]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.511$ , στο  $0.551 < k < 0.556$ , και στο  $0.583 < k < 0.5846$  παρατηρούμε ότι η τιμή του εκθέτη Lyapunov είναι συνεχώς αρνητική, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

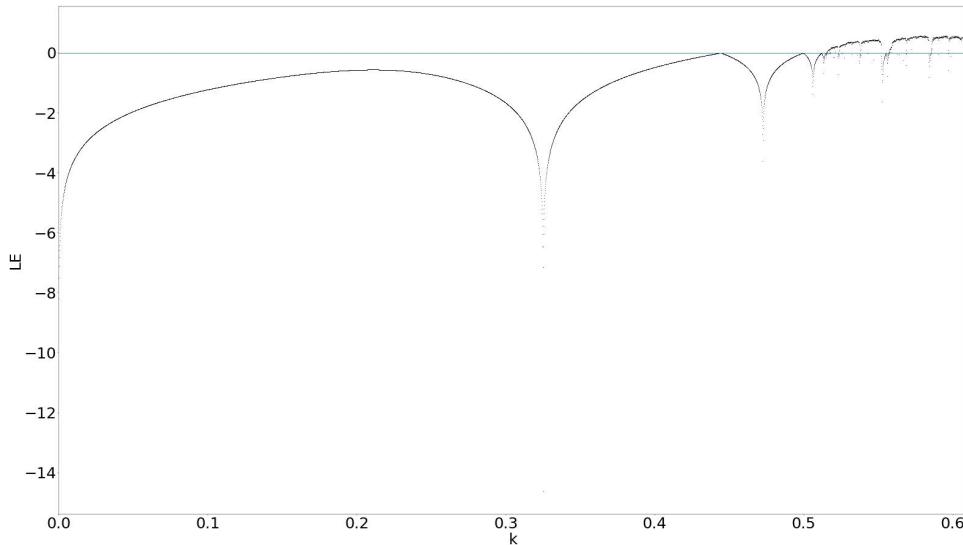
Τέλος, στον πίνακα 2.2 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$ , καθώς και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -0.3$ .

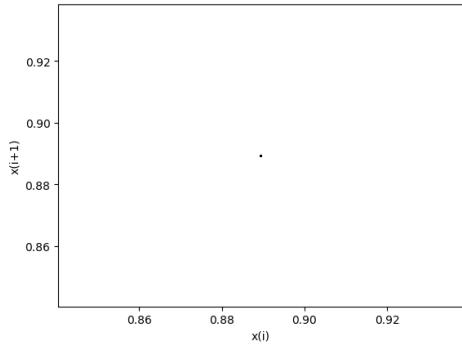
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.5i
0.44	Περίοδος - 2	2.5ii
0.5	Περίοδος - 4	2.5ii
0.511	Περίοδος - 8	2.5iii
0.5165	Χάος	2.5v
0.551	Περίοδος - 3	2.5vi
0.555	Περίοδος - 6	2.5viii
0.556	Περίοδος - 12	2.6i
0.5573	Χάος	2.6ii
0.583	Περίοδος - 4	2.6iii
0.5846	Περίοδος - 7	2.6iv
0.5851	Χάος	2.6vii



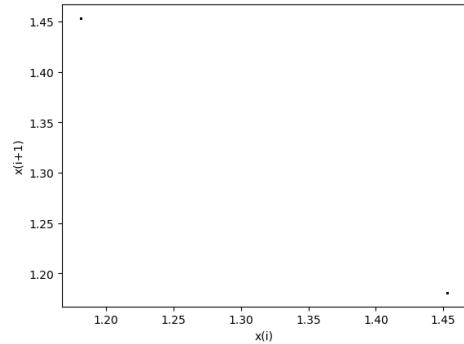
Σχήμα 2.7: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -0.3$ .



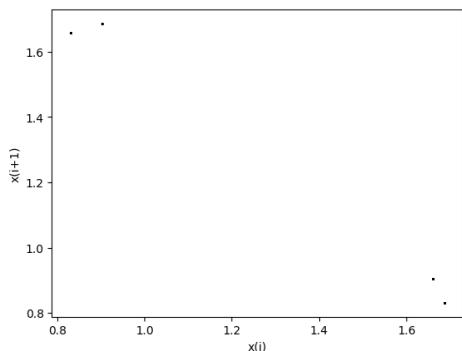
Σχήμα 2.8: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.3$ .



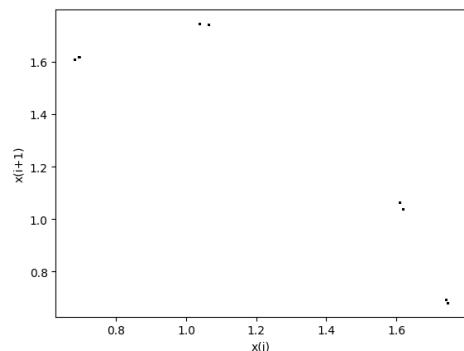
(i) Για  $k = 0.3$



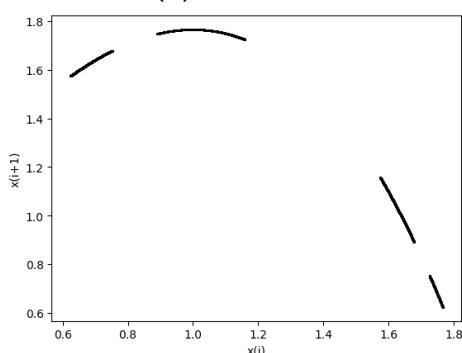
(ii) Για  $k = 0.44$



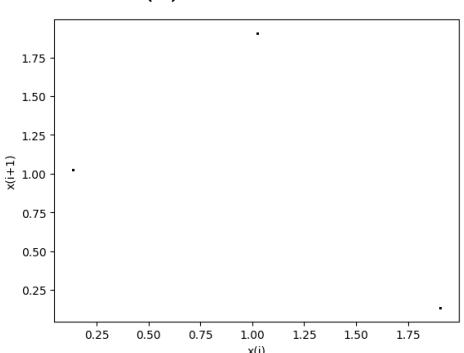
(iii) Για  $k = 0.5$



(iv) Για  $k = 0.511$

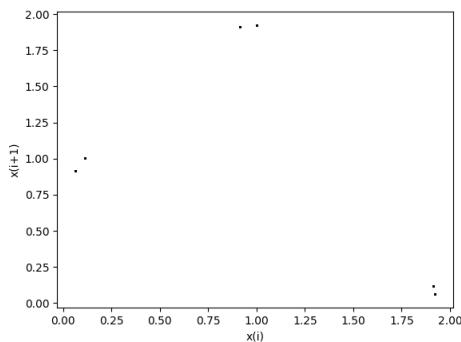


(v) Για  $k = 0.5165$

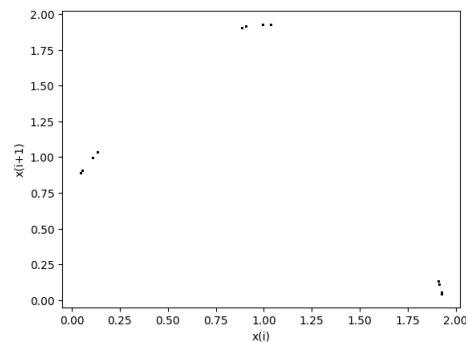


(vi) Για  $k = 0.551$

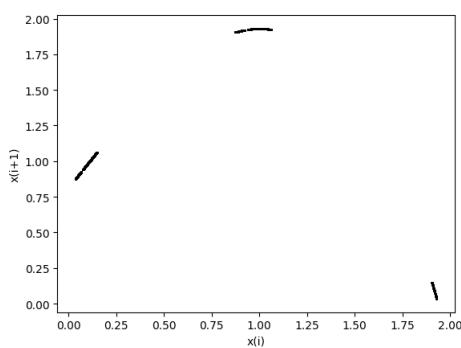
Σχήμα 2.9: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  (α' μέρος).



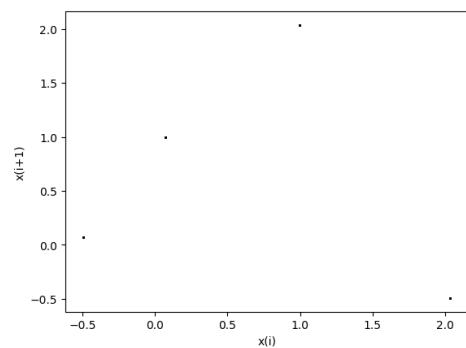
(i) Για  $k = 0.555$



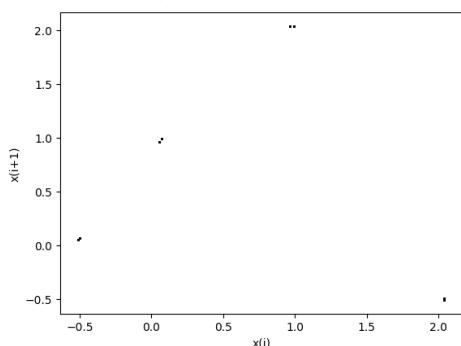
(ii) Για  $k = 0.556$



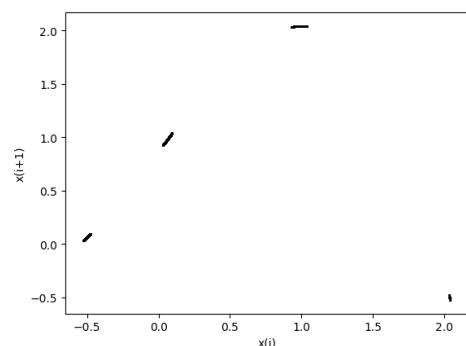
(iii) Για  $k = 0.5573$



(iv) Για  $k = 0.583$



(v) Για  $k = 0.5846$



(vi) Για  $k = 0.5851$

Σχήμα 2.10: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.3 Για $q = -0.5$

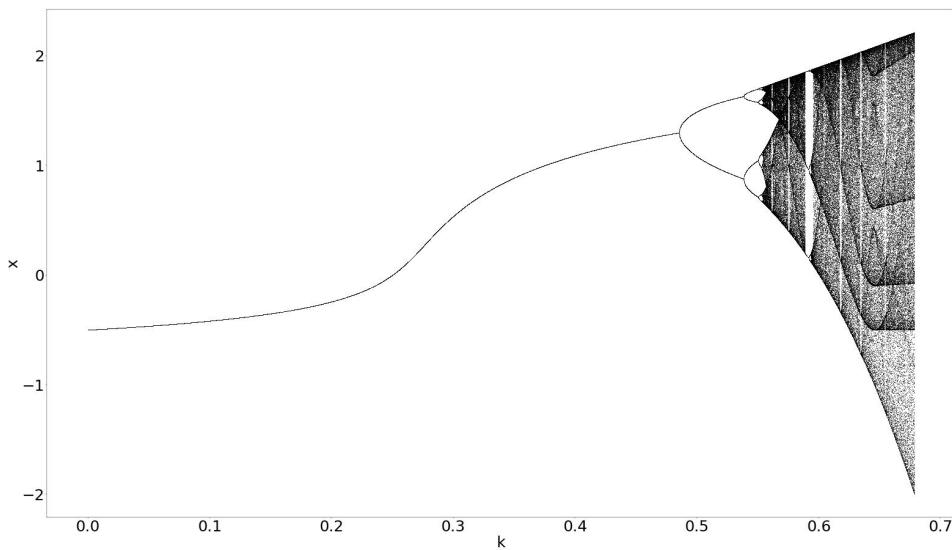
Στο Σχ. 2.11 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.5$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για  $k = 0.3$ , ενώ για  $k = 0.48$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k = 0.53$  (περίοδος - 4), τον τρίτο για  $k = 0.55$  (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για  $k = 0.5531$  (περίοδος - 16). Στη συνέχεια για  $k > 0.5534$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k = 0.58$  (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από δύο διπλασιασμούς  $k = 0.591$  (περίοδος - 6), για  $k > 0.5927$ . Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.12 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$ , στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.679]$ . Στα διαστήματα τιμών  $0 < k < 0.5534$  και  $0.59 < k < 0.594$  παρατηρούμε ότι η τιμή του εκθέτη Lyapunov είναι συνεχώς αρνητική, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

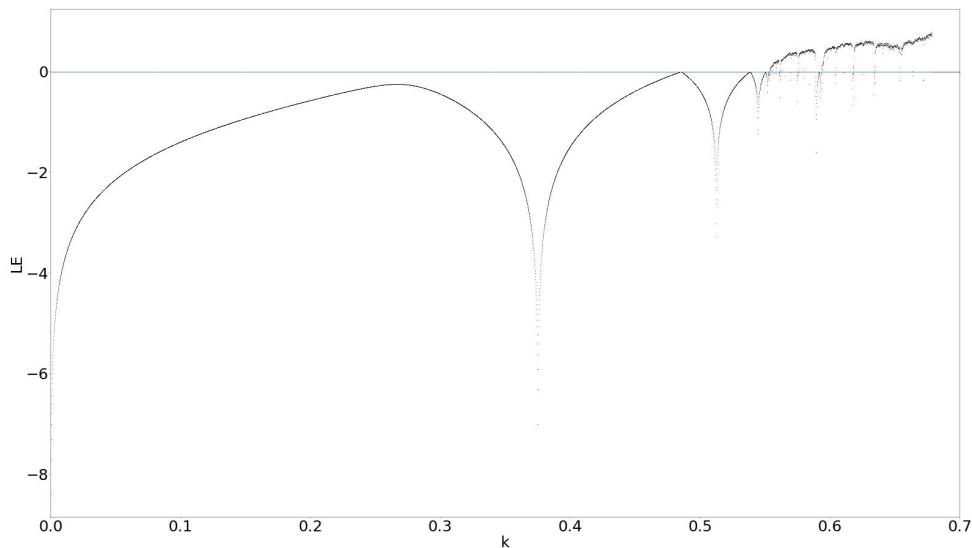
Τέλος, στον πίνακα 2.3 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.3: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -0.5$ .

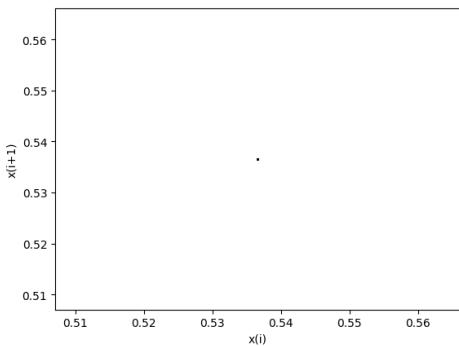
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.3	Περίοδος - 1	2.13i
0.48	Περίοδος - 2	2.13ii
0.53	Περίοδος - 4	2.13iii
0.55	Περίοδος - 8	2.13iv
0.5531	Περίοδος - 16	2.14i
0.5534	Χάος	2.14ii
0.58	Περίοδος - 3	2.14iii)
0.591	Περίοδος - 6	2.14iv
0.5927	Χάος	2.14v



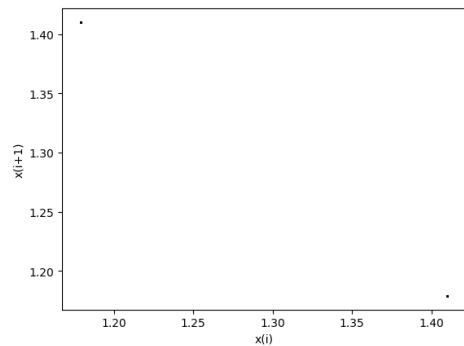
Σχήμα 2.11: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -0.5$ .



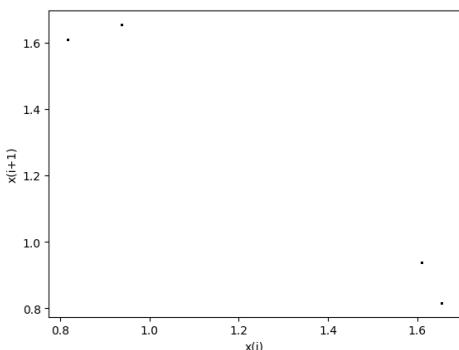
Σχήμα 2.12: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.5$ .



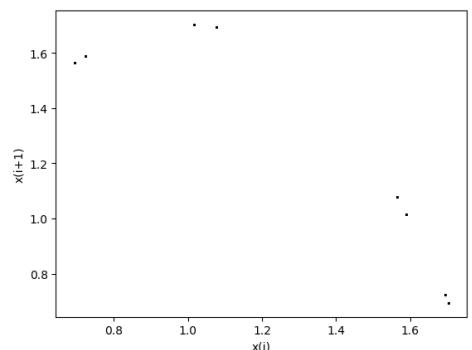
(i) Για  $k = 0.3$



(ii) Για  $k = 0.48$

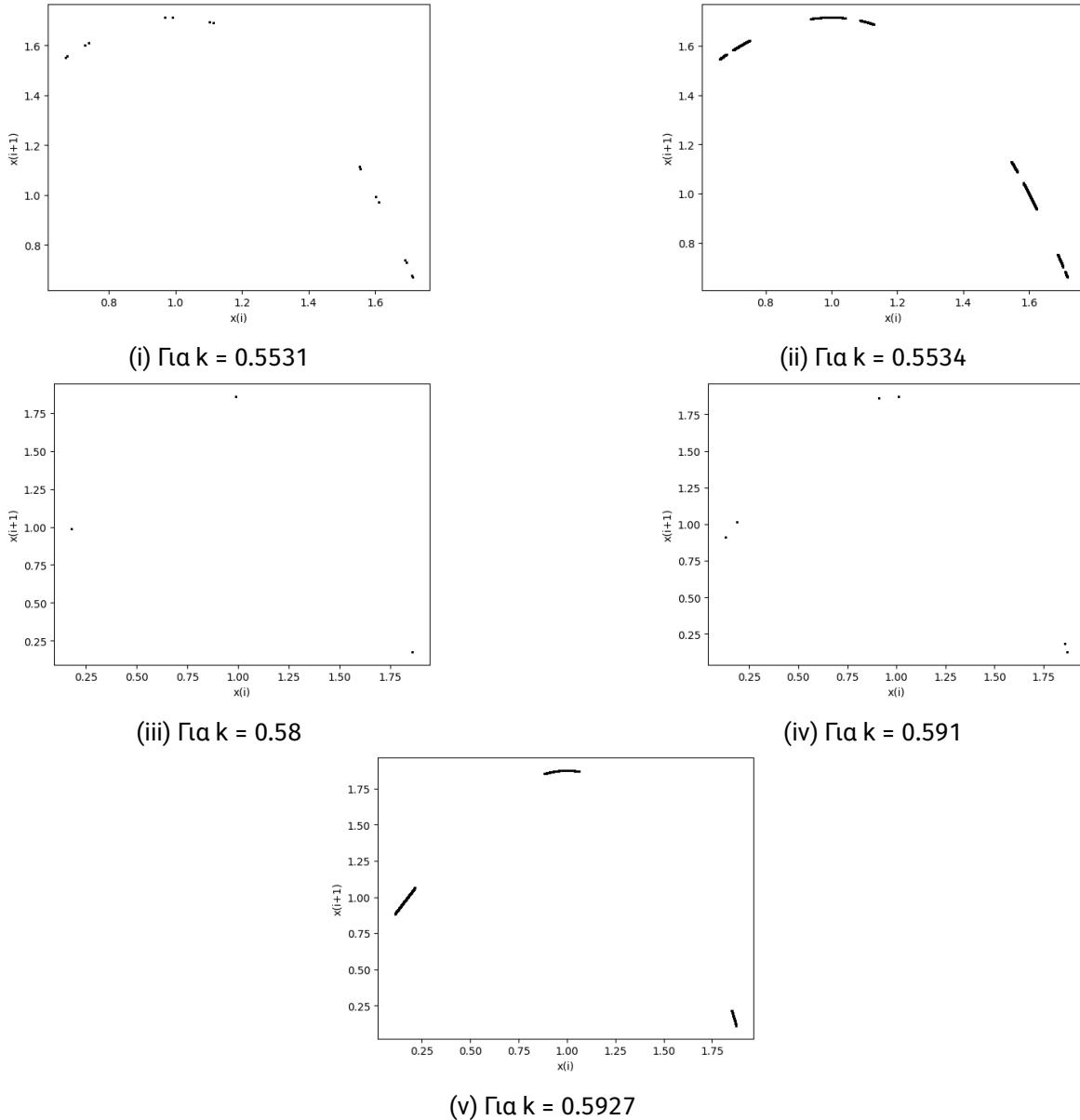


(iii) Για  $k = 0.53$



(iv) Για  $k = 0.55$

Σχήμα 2.13: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  (α' μέρος).



Σχήμα 2.14: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.4 Για $q = -0.7$

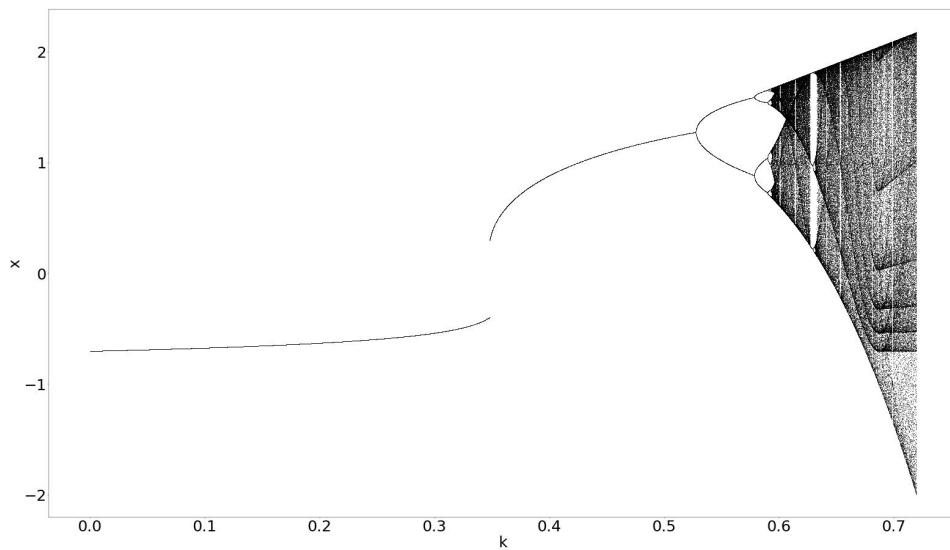
Στο Σχ. 2.15 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.7$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για  $k = 0.3$  αλλά για  $0.3469 < k < 0.3486$  "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά. Από  $k = 3.469$  το σύστημα εισέρχεται ξανά σε περίοδο - 1. Για  $k = 0.52$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k = 0.57$  (περίοδος - 4), τον τρίτο για  $k = 0.592$  (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για  $k = 0.593$  (περίοδος - 15). Στη συνέχεια για  $k > 0.593$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k = 0.627$  (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος μετά από δύο διπλασιασμούς για  $k = 0.63$  (περίοδος - 6) και  $k = 0.631$  (περίοδος - 11). Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο Σχ. 2.12 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.72]$ . Στο διάστημα τιμών  $0 < k < 0.594$  και  $0.627 < k < 0.632$ , παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

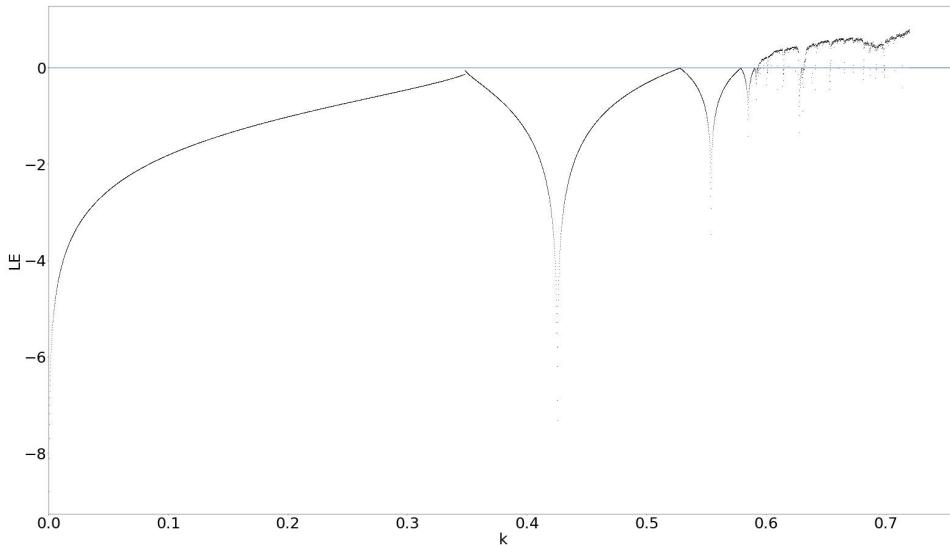
Τέλος, στον πίνακα 2.4 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  καθώς και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.4: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -0.7$ .

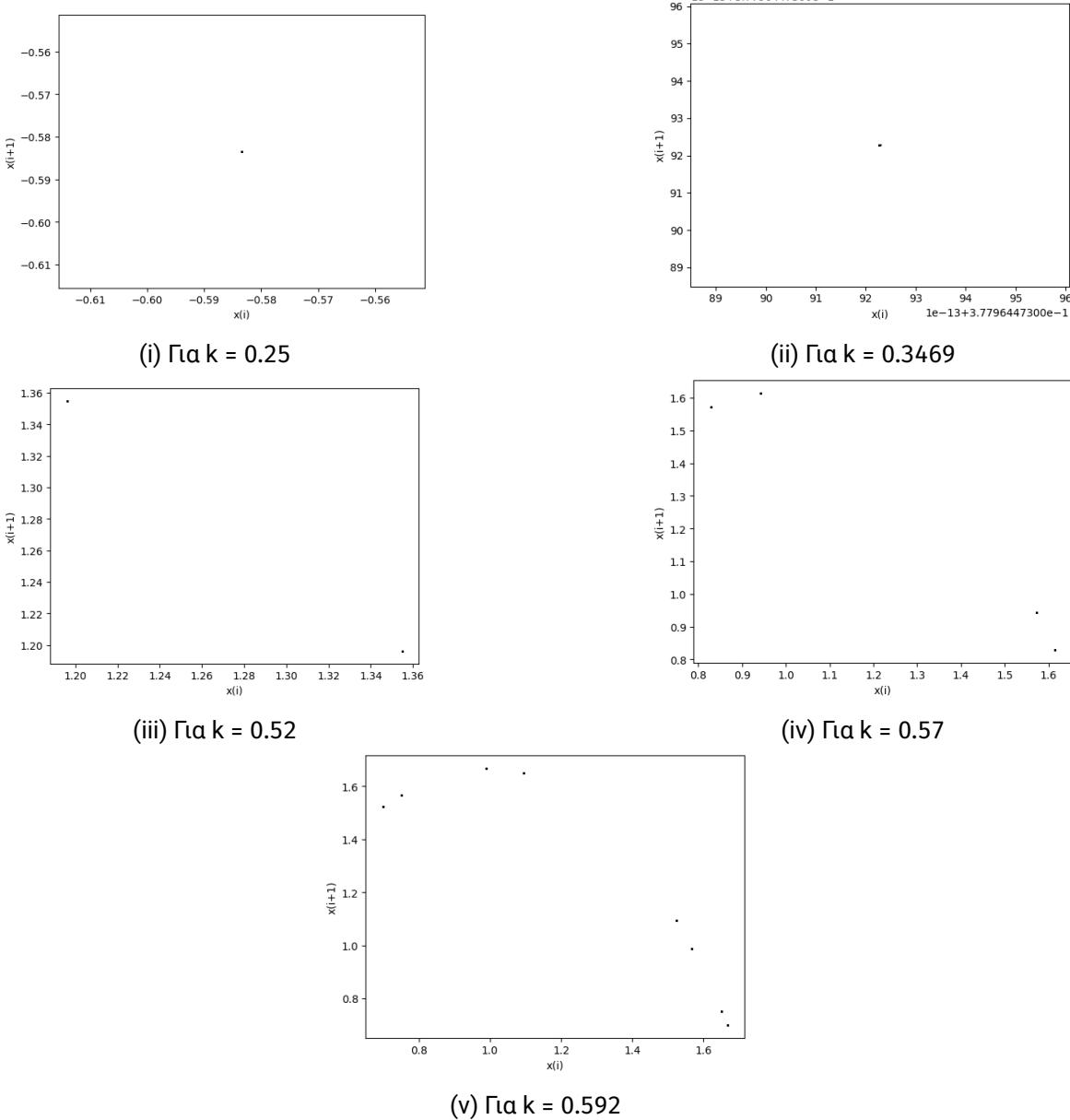
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.25	Περίοδος - 1	2.17i
0.3469	Περίοδος - 1	2.17ii
0.52	Περίοδος - 2	2.17iii
0.57	Περίοδος - 4	2.17iv
0.592	Περίοδος - 8	2.17v
0.593	Περίοδος - 15	2.18i
0.594	Χάος	2.18ii
0.627	Περίοδος - 3	2.18iii
0.630	Περίοδος - 6	2.18iv
0.631	Περίοδος - 11	2.18v
0.632	Χάος	2.18vi



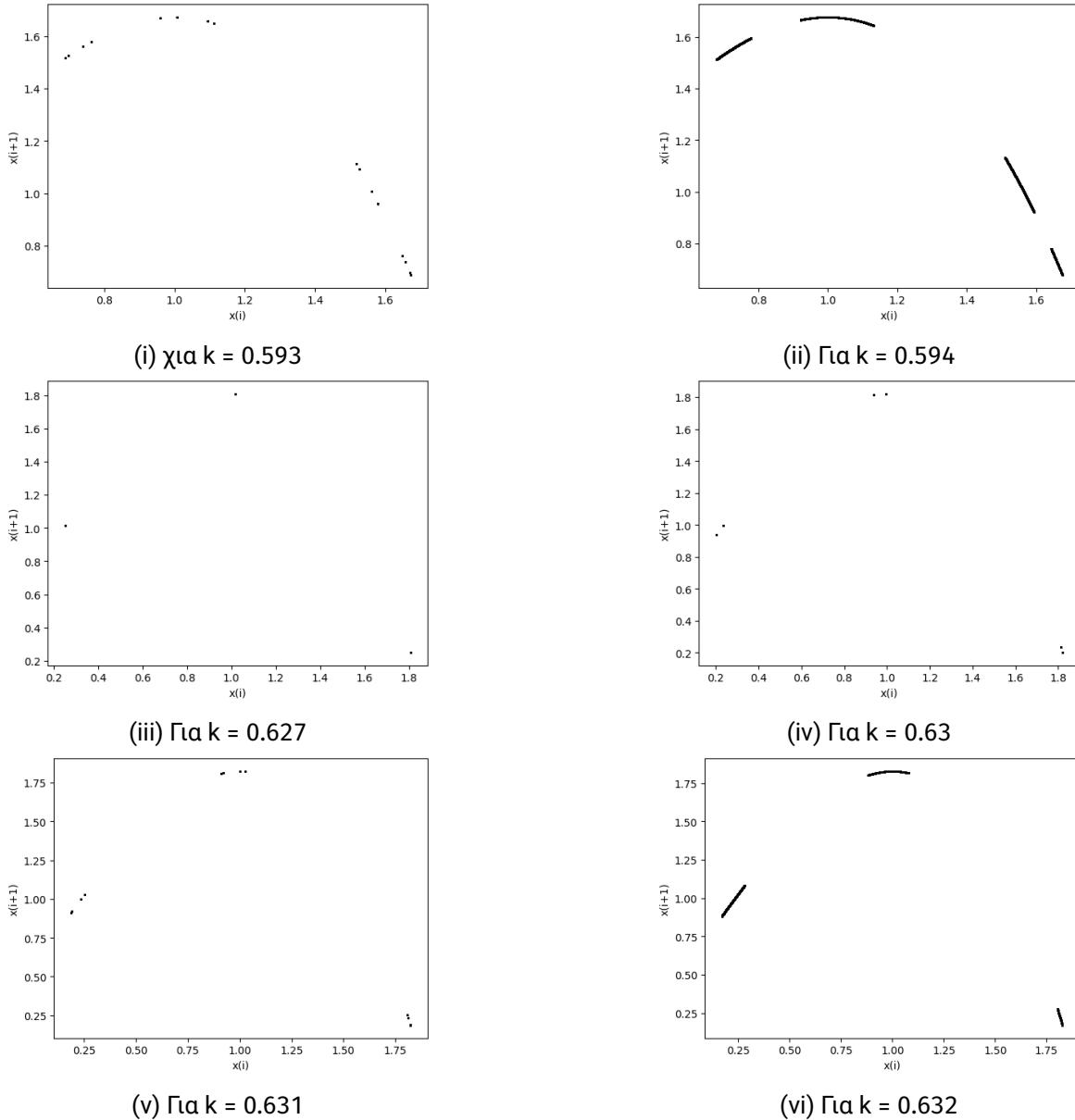
Σχήμα 2.15: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -0.7$ .



Σχήμα 2.16: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.7$ .



Σχήμα 2.17: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\alpha'$  μέρος).



Σχήμα 2.18: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.5 Για $q = -0.9$

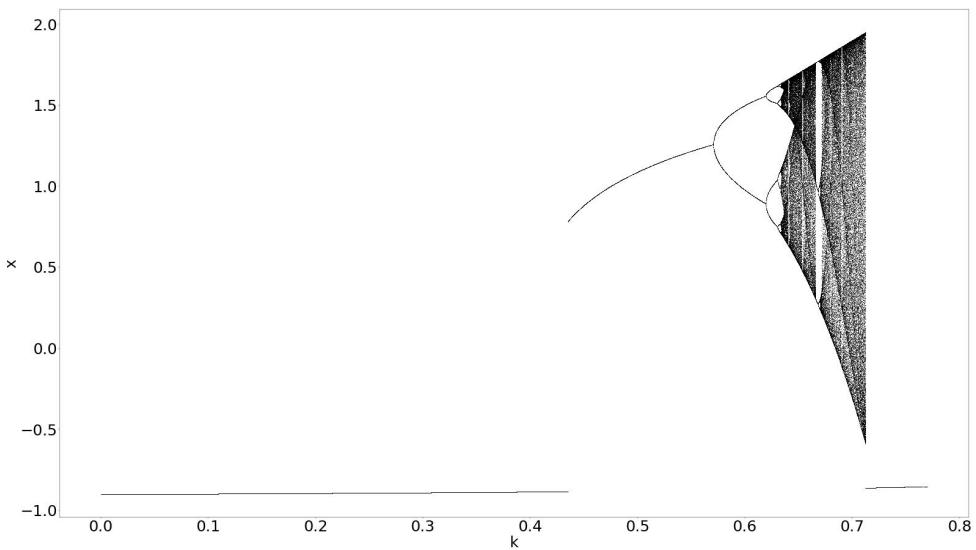
Στο Σχ. 2.19 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.9$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για  $k = 0.3$  αλλά στο διάστημα τιμών  $0.43 < k < 0.436$  "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά. Οπότε το σύστημα εμφανίζει πάλι το φαινόμενο της υστέρησης. Από  $k = 3.436$  το σύστημα εμφανίζει πάλι περιοδική συμπεριφορά περίοδο - 1. Για  $k = 0.57$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k = 0.62$  (περίοδος - 4), τον τρίτο για  $k = 0.63$  (περίοδος - 8) και τον τέταρτο για  $k = 0.633$  (περίοδος - 16). Στην συνέχεια για  $k > 0.635$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k = 0.665$  (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος για  $k > 0.671$  μετά από έναν νέο διπλασιασμό  $k = 0.668$  (περίοδος - 6). Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για  $k = 0.72$  (περίοδος - 1). Για  $q = -0.7$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Επιπλέον, στο σχήμα 2.20 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.77]$ . Στα διαστήματα τιμών  $0 < k < 0.635$ ,  $0.665 < k < 0.671$  και  $0.72 < k < 0.77$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

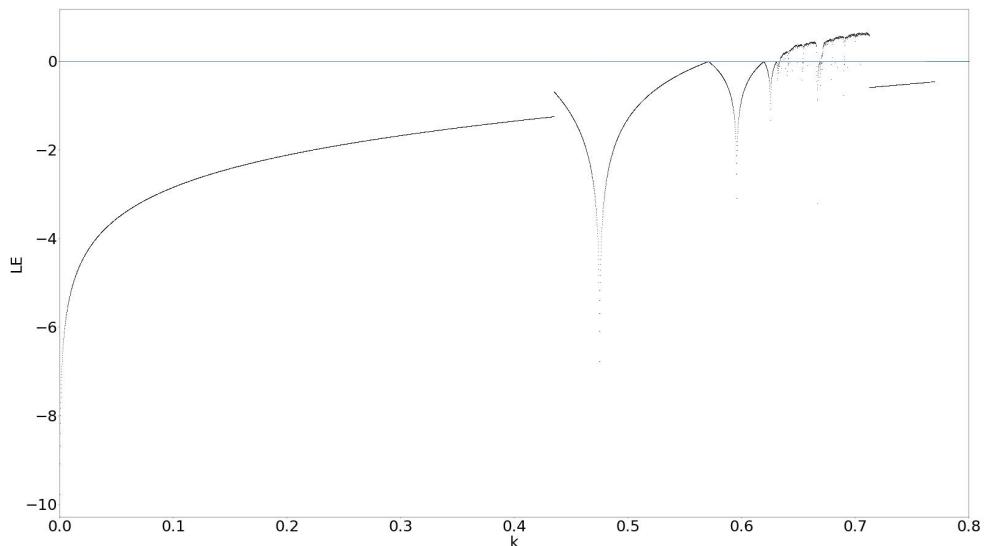
Τέλος, στον πίνακα 2.5 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.5: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -0.9$ .

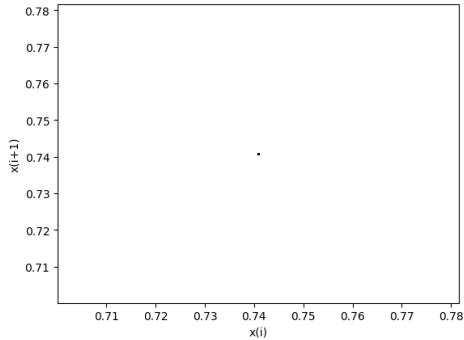
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.43	Περίοδος - 1	2.21i
0.436	Περίοδος - 1	2.21ii
0.57	Περίοδος - 2	2.21iii
0.62	Περίοδος - 4	2.21iv
0.63	Περίοδος - 8	2.21v
0.633	Περίοδος - 16	2.22i
0.635	Χάος	2.22ii
0.665	Περίοδος - 3	2.22iii
0.668	Περίοδος - 6	2.22iv
0.671	Χάος	2.22v
0.72	Περίοδος - 1	2.22vi



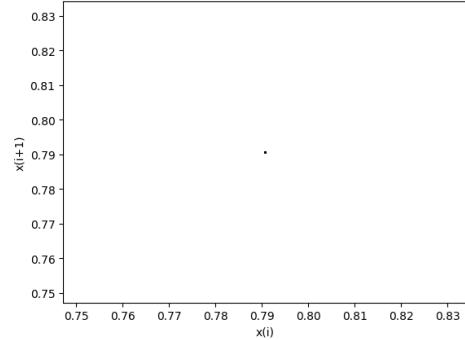
Σχήμα 2.19: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -0.9$ .



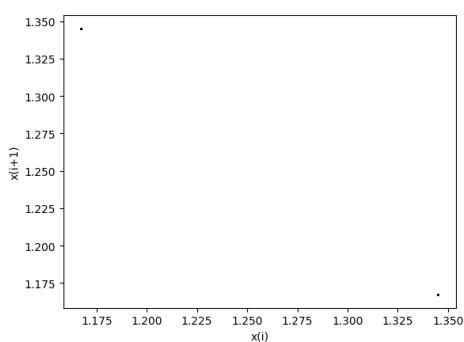
Σχήμα 2.20: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.9$



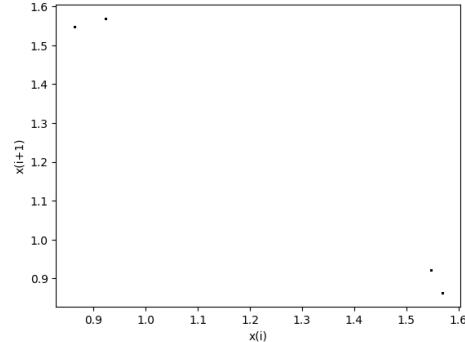
(i) Για  $k = 0.43$



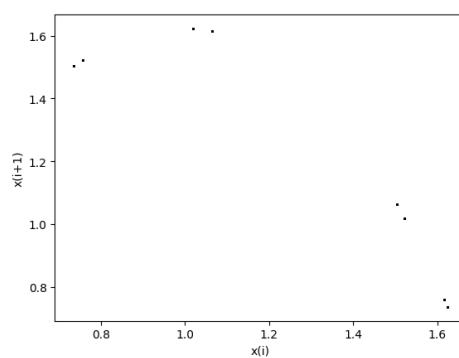
(ii) Για  $k = 0.436$



(iii) Για  $k = 0.57$

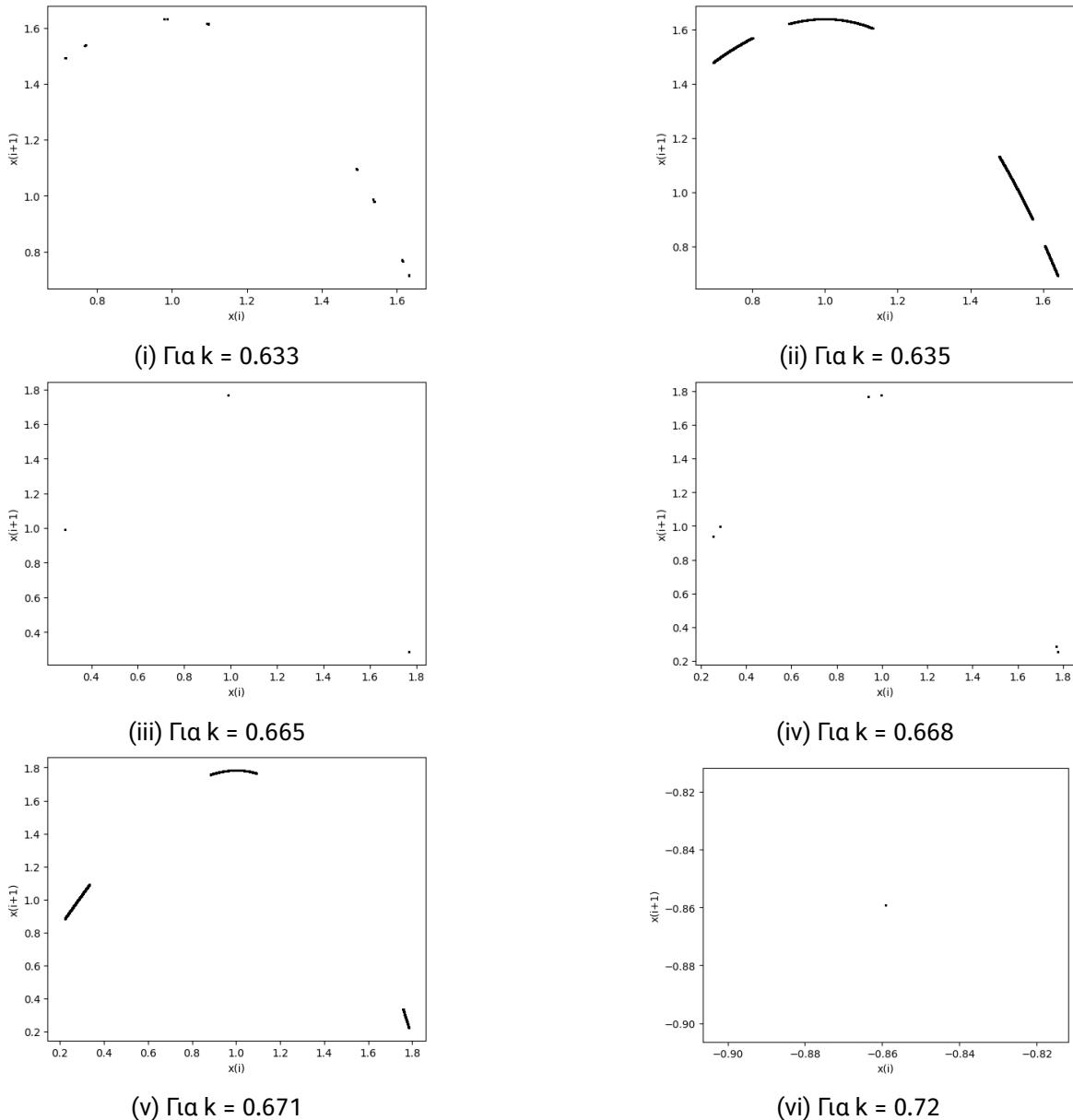


(iv) Για  $k = 0.62$



(v) Για  $k = 0.63$

Σχήμα 2.21: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\alpha'$  μέρος).



Σχήμα 2.22: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.6 Για $q = -1.2$

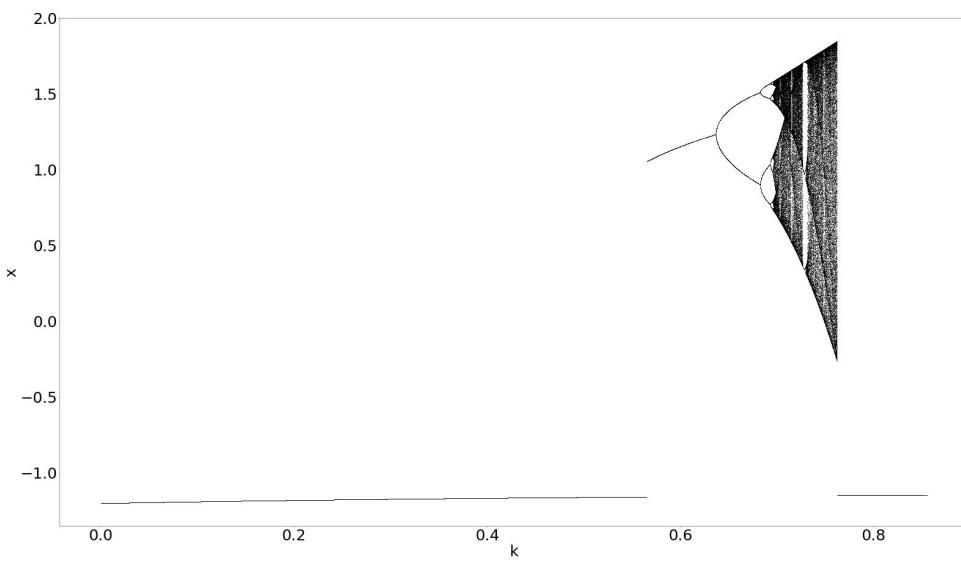
Στο Σχ. 2.23 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.2$ . Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων το σύστημα ξεκινάει από περίοδο - 1 για  $k = 0.55$ , αλλά στο διάστημα τιμών  $0.56 < k < 0.566$  "σπάει" η περιοδική συμπεριφορά, εμφανίζοντας το φαινόμενο της υστέρησης. Από  $k = 0.566$  το σύστημα εμφανίζει πάλι περιοδική συμπεριφορά περίοδο - 1. Για  $k = 0.63$  εμφανίζει τον πρώτο διπλασιασμό της περιόδου. Τον δεύτερο διπλασιασμό τον εμφανίζει για  $k = 0.67$  (περίοδος - 4) και τον τρίτο για  $k = 0.69$  (περίοδος - 8). Στη συνέχεια για  $k > 0.696$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος, μέχρι να εξέλθει για  $k = 0.726$  (περίοδος - 3) και να ξανά εισέλθει στο χάος για  $k > 0.731$  μετά από ένα διπλασιασμό  $k = 0.729$  (περίοδος - 6). Παρόλα αυτά παρατηρείται μία ακόμα έξοδος από το χάος για  $k = 0.762$  (περίοδος - 1). Για  $q = -1.2$  το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου, ενώ παρατηρείται και συνοριακή κρίση ελκυστή για  $k = 0.726$ .

Επιπλέον, στο Σχ. 2.24 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.77]$ . Στα διαστήματα τιμών  $0 < k < 0.69$ ,  $0.726 < k < 0.731$  και  $0.72 < k < 0.8574$  παρατηρούμε ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Στα υπόλοιπα διαστήματα ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

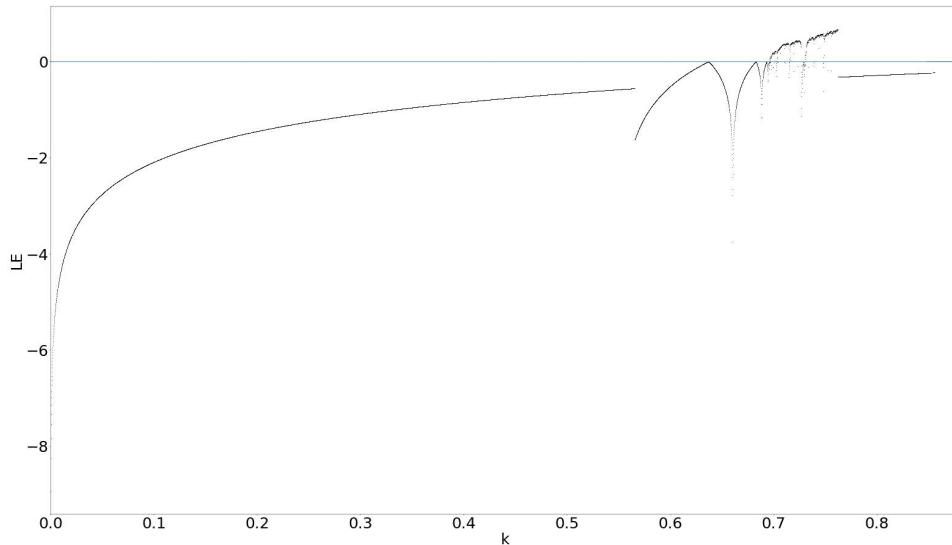
Τέλος, στον πίνακα 2.6 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $k$  και η συμπεριφορά που παρουσιάζει το σύστημα για αυτές, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης, καθώς και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Πίνακας 2.6: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -1.2$ .

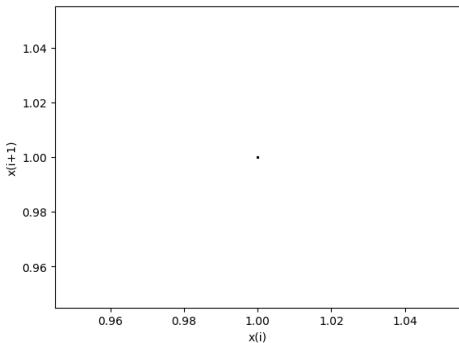
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.55	Περίοδος - 1	2.25i
0.566	Περίοδος - 1	2.25ii
0.63	Περίοδος - 2	2.25iii
0.68	Περίοδος - 4	2.25iv
0.69	Περίοδος - 8	2.25v
0.696	Χάος	2.25vi
0.726	Περίοδος - 3	2.26i
0.729	Περίοδος - 6	2.26ii
0.731	Χάος	2.26iii
0.762	Περίοδος - 1	2.26iv



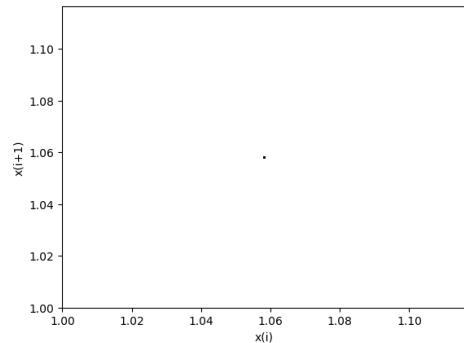
Σχήμα 2.23: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -1.2$ .



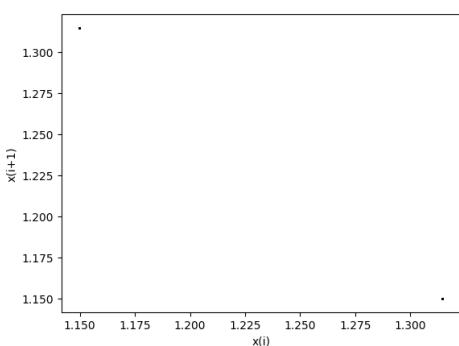
Σχήμα 2.24: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.2$ .



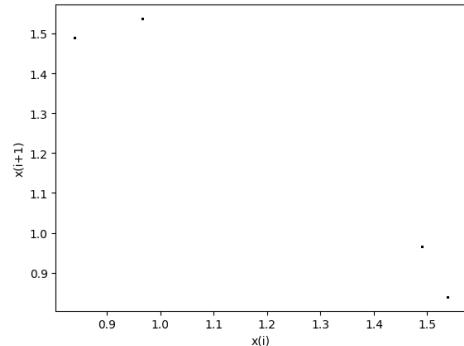
(i) Για  $k = 0.55$



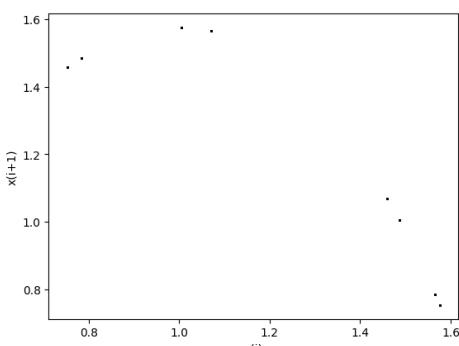
(ii) Για  $k = 0.566$



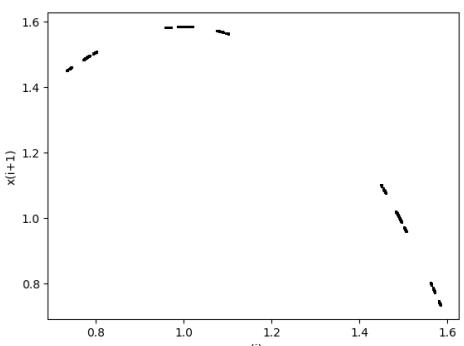
(iii) Για  $k = 0.63$



(iv) Για  $k = 0.68$

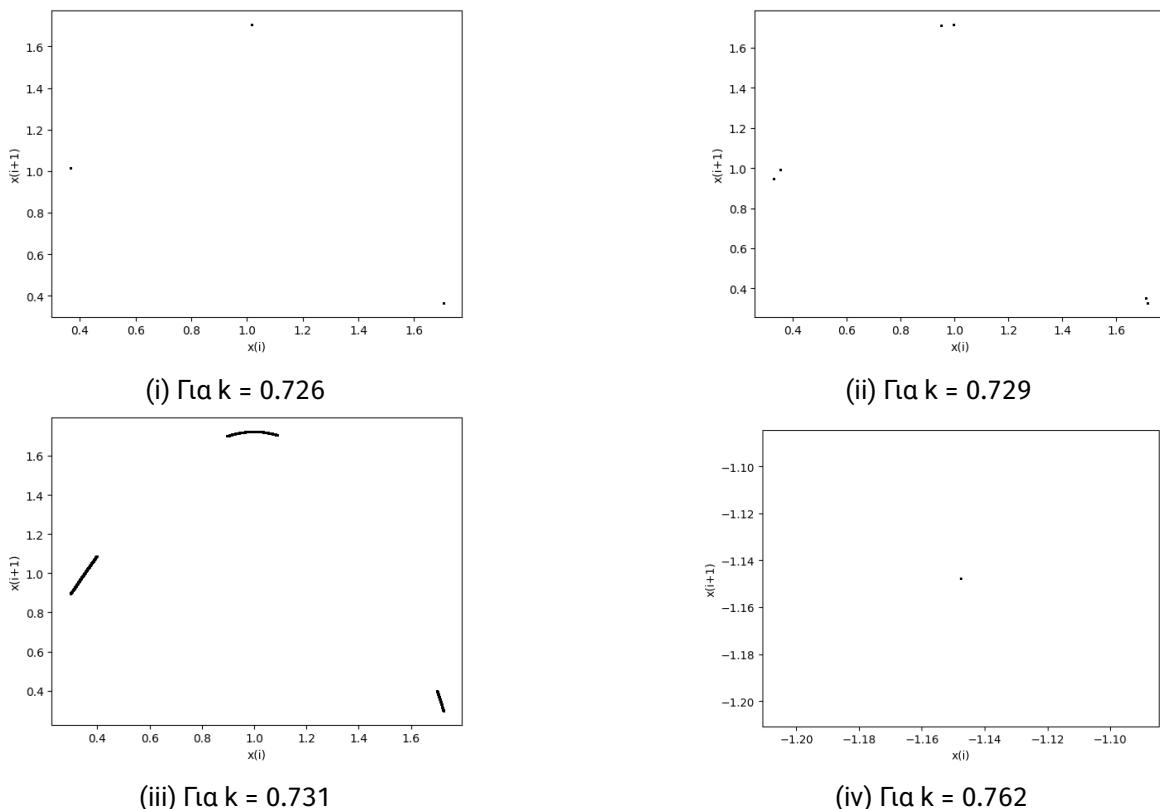


(v) Για  $k = 0.69$



(vi) Για  $k = 0.696$

Σχήμα 2.25: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\alpha'$  μέρος).



Σχήμα 2.26: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.7 Για $q = -1.4$

Στα Σχ. 2.27, 2.28 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.4$  και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες δηλαδή για διαφορετικό  $x_0$ . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.27i ( $x_0 = 0.1$ ) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης 2.27ii ( $x_0 = 0.5$ ), 2.28i ( $x_0 = 1$ ), 2.28ii ( $x_0 = -0.1$ ) παρατηρείται ότι για  $q = -1.4$  εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα αντίστοιχα διαγράμματα Lyapunov (2.29i, 2.29ii, 2.30i, 2.30ii), όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης 2.31, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

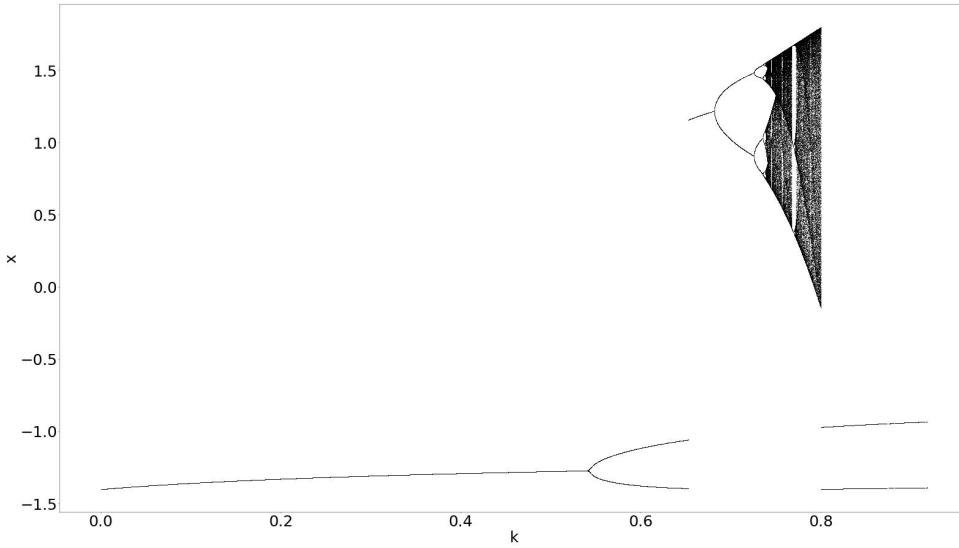
Στον πίνακα 2.7 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.27i. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επίσης παρατηρείται η συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  (0.744, 0.756, 0.768), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.27i στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περιοδο-2, αλλά και από περίοδο - 2 σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος παρουσιάζονται στο πίνακα 2.7.

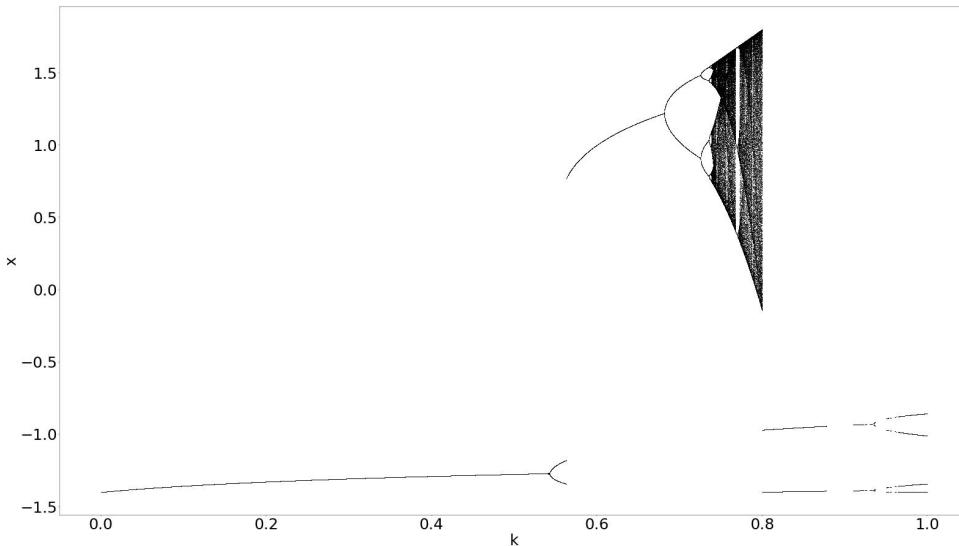
Τέλος, στο σχήμα 2.29i παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.91]. Οι περιπτώσεις του πίνακα 2.7 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.29i όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.7: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $q = -1.4$  και  $x_i = 0.1$

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά	Σχήμα
0.4	Περίοδος - 1	2.32i
0.54	Περίοδος - 2	2.32ii
0.65	Περίοδος - 1	2.32iii
0.68	Περίοδος - 2	2.32iv
0.726	Περίοδος - 4	2.32v
0.737	Περίοδος - 8	2.32vi
0.738	Περίοδος - 15	2.33i
0.739	Χάος	2.33ii
0.744	Περίοδος - 6	2.33iii
0.746	Χάος	2.33iv
0.756	Περίοδος - 5	2.33v
0.757	Χάος	2.33vi
0.768	Περίοδος - 3	2.33vii
0.77	Περίοδος - 6	2.33viii
0.78	Χάος	2.34i
0.8	Περίοδος - 2	2.34ii

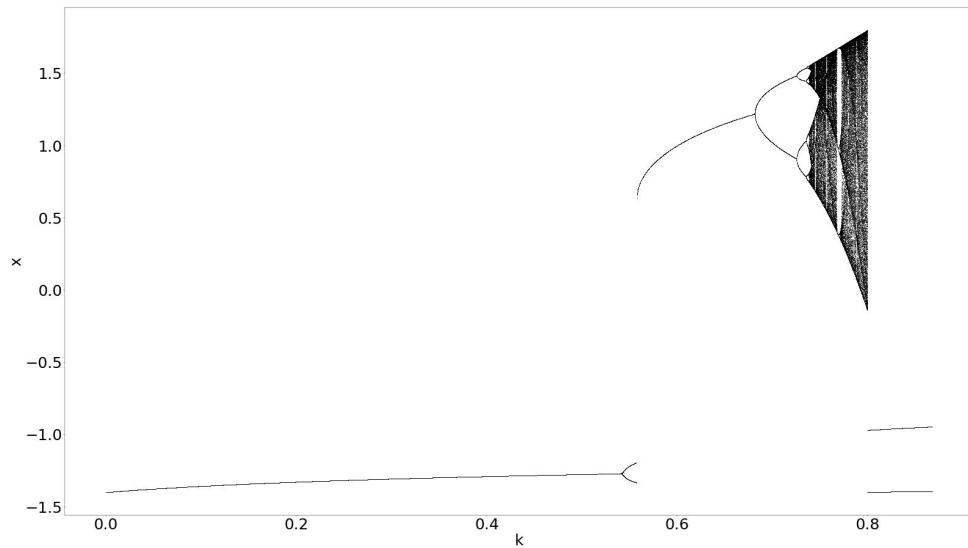


(i)  $x_0 = 0.1$

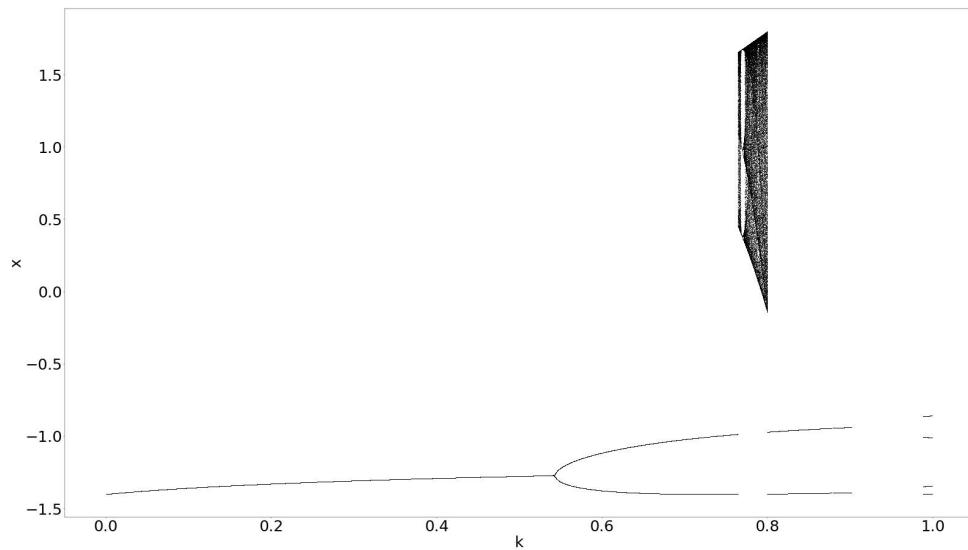


(ii)  $x_0 = 0.5$

Σχήμα 2.27: Διαγράμματα διακλάδωσης, για  $q = -1.4$  (α' μέρος).

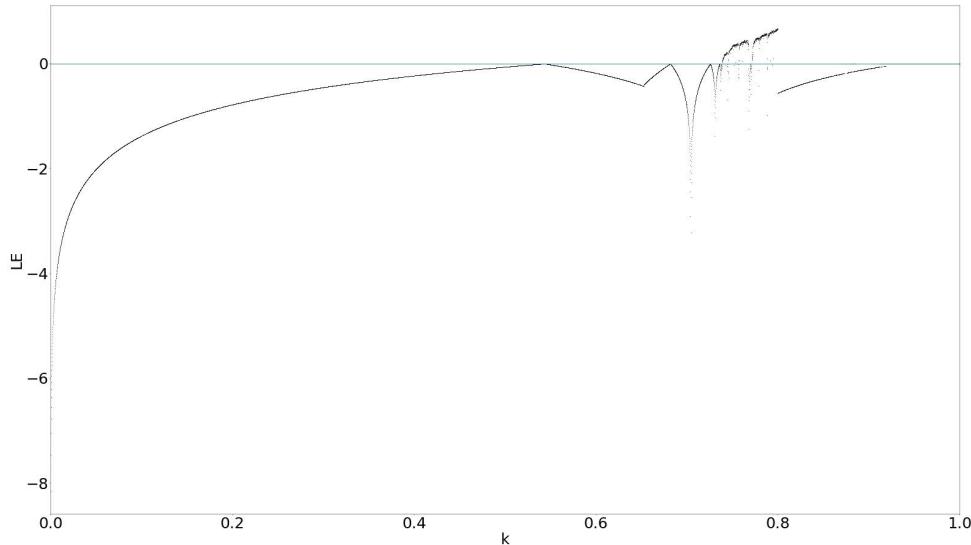


(i)  $x_0 = 1$

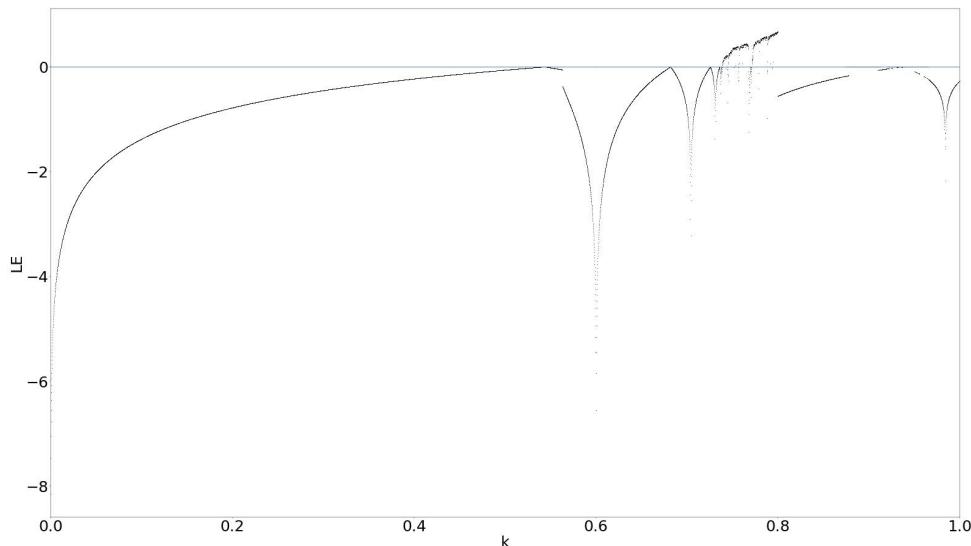


(ii)  $x_0 = -0.1$

Σχήμα 2.28: Διαγράμματα διακλάδωσης, για  $q = -1.4$  ( $\beta'$  μέρος).

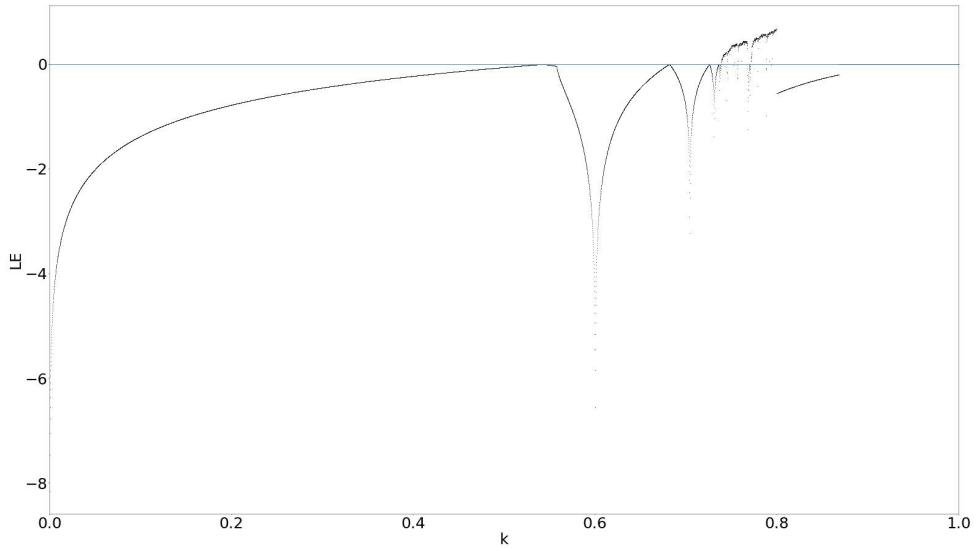


(i) Για  $x_0 = 0.1$

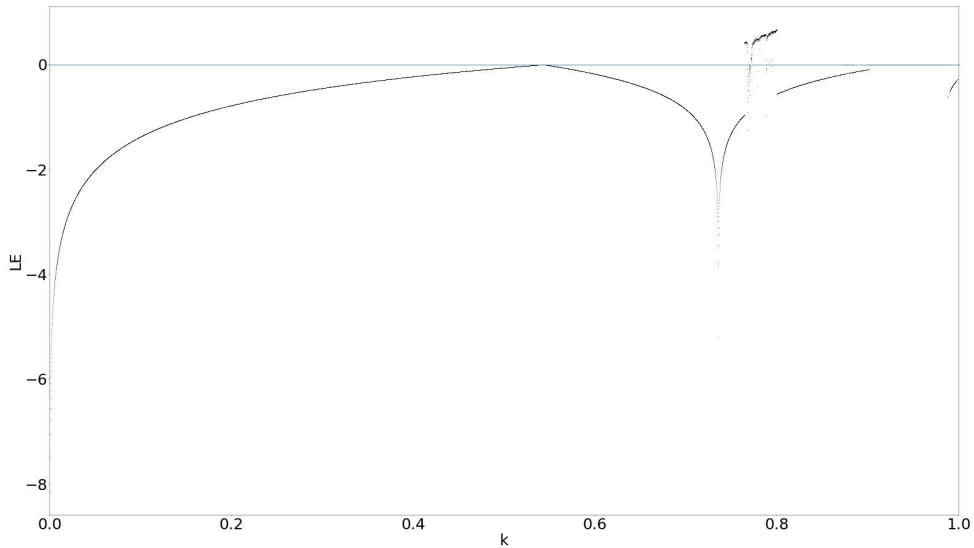


(ii) Για  $x_0 = 0.5$

Σχήμα 2.29: Διαγράμματα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.4$  (α' μέρος).

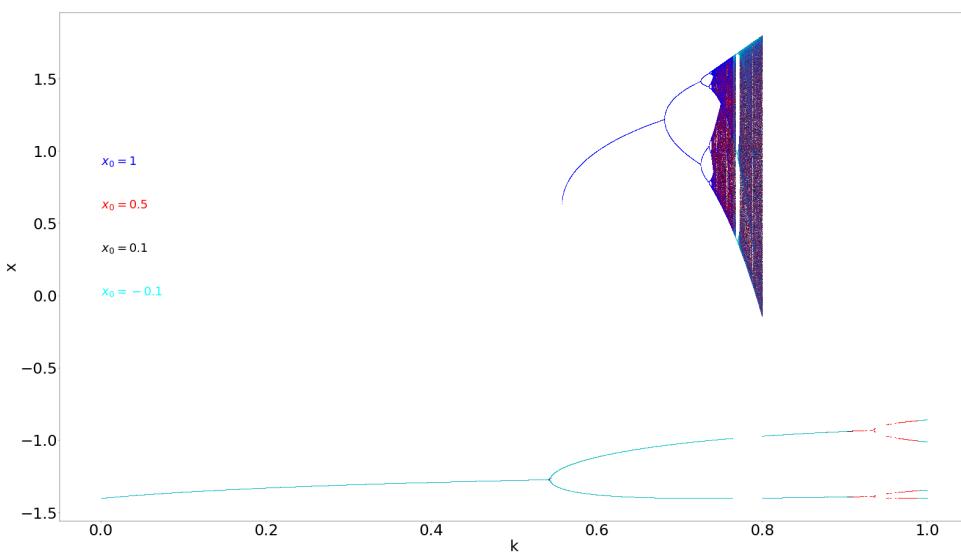


(i) Για  $x_0 = 1$

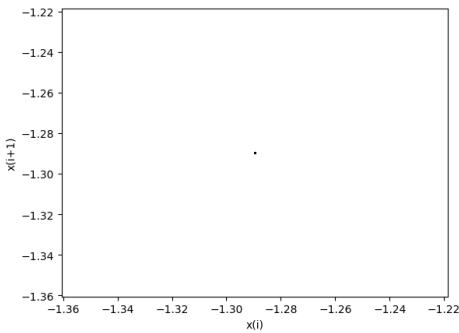


(ii) Για  $x_0 = -0.1$

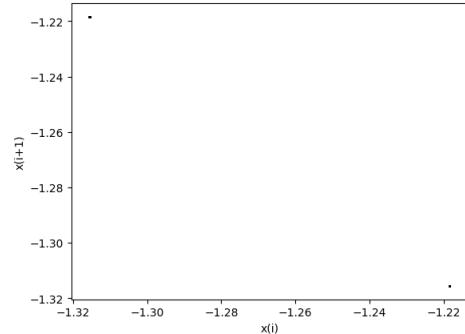
Σχήμα 2.30: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.4$  ( $\beta'$  μέρος).



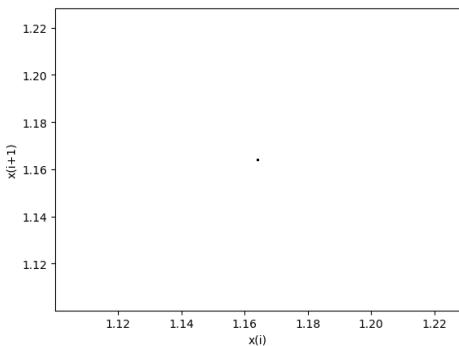
Σχήμα 2.31: Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες  $x_0$



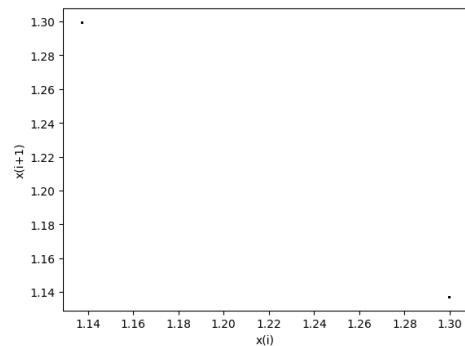
(i) Για  $k = 0.4$



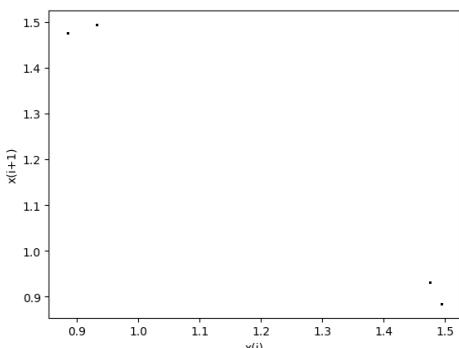
(ii) Για  $k = 0.54$



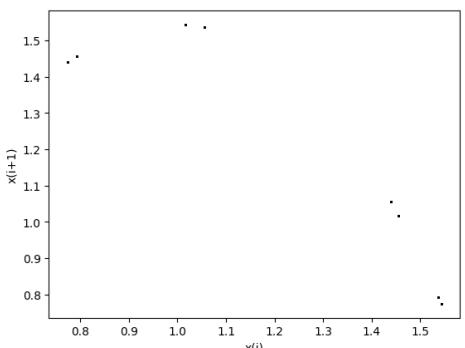
(iii) Για  $k = 0.65$



(iv) Για  $k = 0.68$

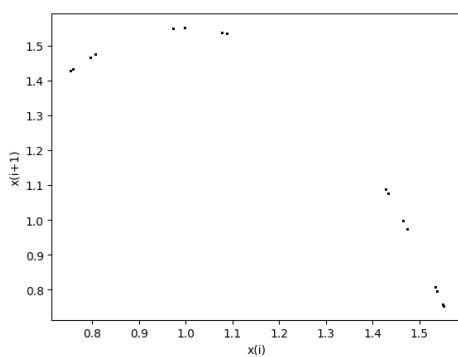


(v) Για  $k = 0.726$

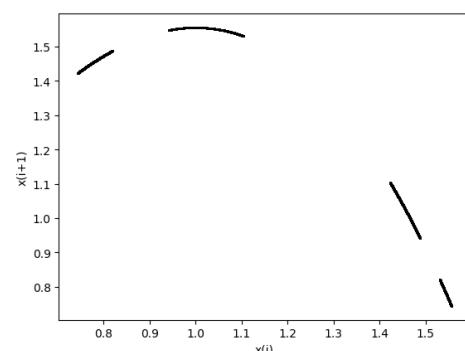


(vi) Για  $k = 0.737$

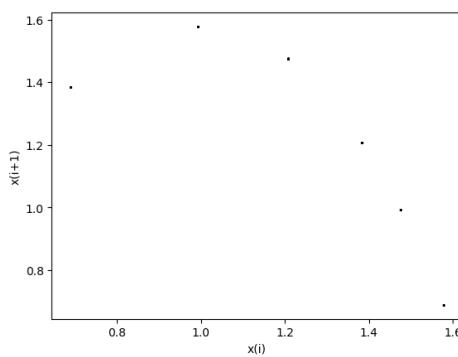
Σχήμα 2.32: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , με  $q = -1.4$  (α' μέρος).



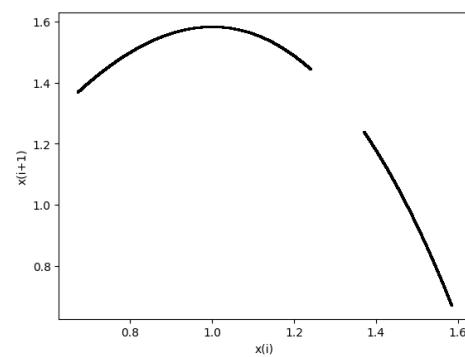
(i) Για  $k = 0.738$



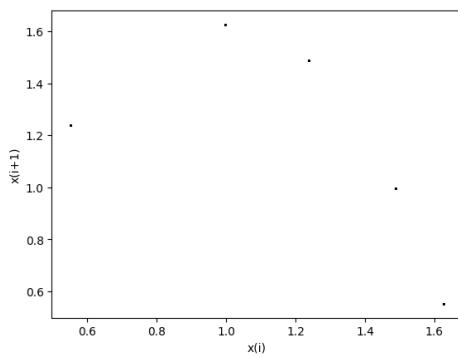
(ii) Για  $k = 0.739$



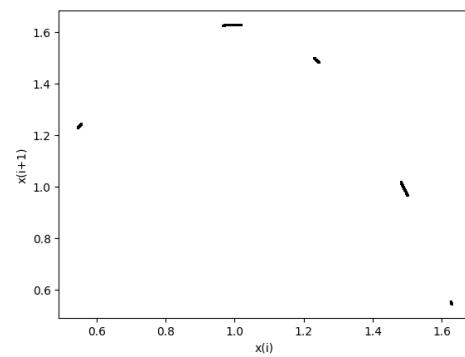
(iii) Για  $k = 0.744$



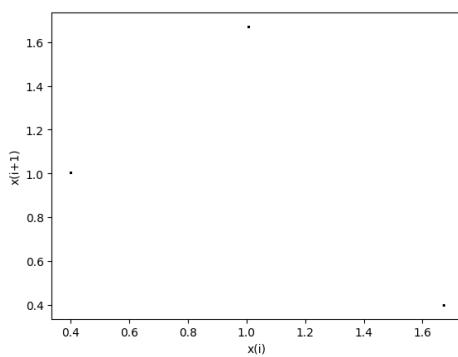
(iv) Για  $k = 0.746$



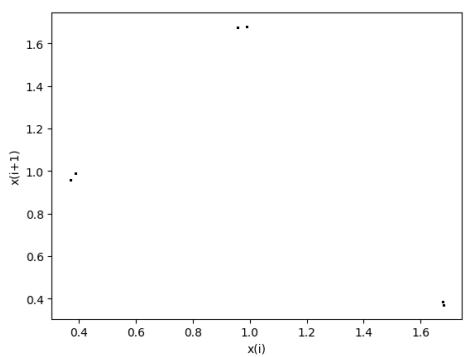
(v) Για  $k = 0.756$



(vi) Για  $k = 0.757$

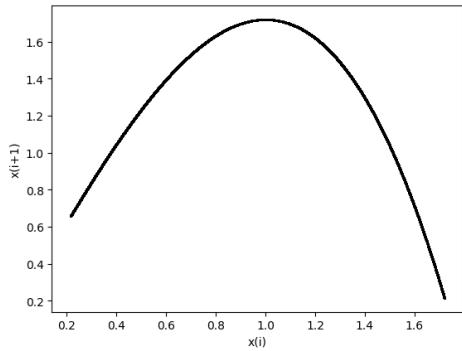


(vii) Για  $k = 0.768$

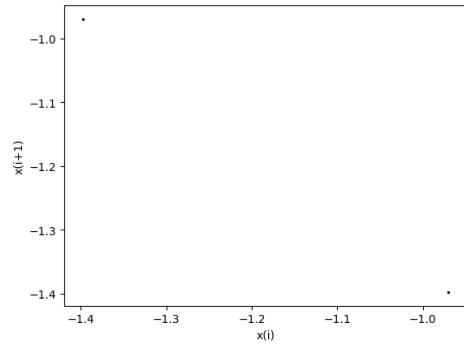


(viii) Για  $k = 0.77$

Σχήμα 2.33: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , με  $q = -1.4$  (β' μέρος).



(i) Για  $k = 0.78$ .



(ii) Για  $k = 0.8$ .

Σχήμα 2.34: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , με  $q = -1.4$  (γ' μέρος).

## 2.8 Για $q = -1.6$

Στα Σχ. 2.35, 2.36 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.6$  και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή για διαφορετικό  $x_0$ . Συγκρίνοντας το διάγραμμα 2.35i ( $x_0 = 0.1$ ) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης 2.35ii ( $x_0 = 0.5$ ), 2.35iii ( $x_0 = 1$ ), 2.36i ( $x_0 = 1.5$ ), 2.36ii ( $x_0 = 2$ ), 2.36iii ( $x_0 = -0.1$ ) παρατηρείται ότι για  $q = -1.6$  εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα Lyapunov (2.37i, 2.37ii, 2.37iii, 2.38i, 2.38ii, 2.38iii), όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.39, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

Στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.35i εμφανίζονται κάποιες διακοπές της γραφικής παράστασης στην περιοχή του χάους. Αυτό οφείλεται στο ότι η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αποκλίνει σε πολύ μεγάλες τιμές.

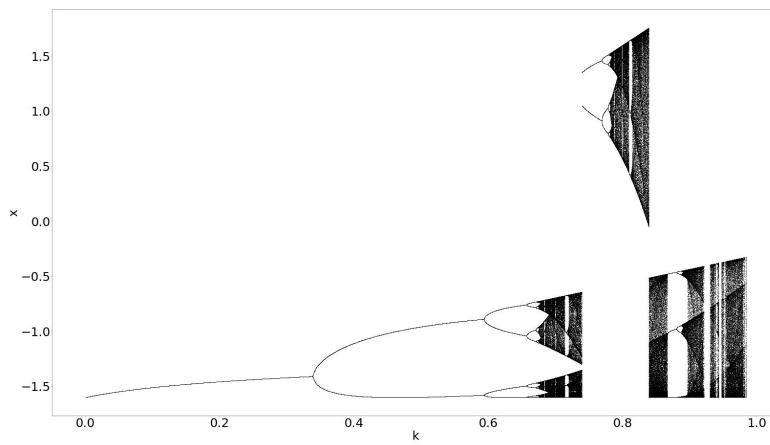
Στον πίνακα 2.8 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης 2.35i για  $q = -1.6$ .

Επίσης παρατηρείται συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  (0.683, 0.7, 0.715, 0.788, 0.799, 0.94), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.35i στα κενά μεταξύ χάους και περιοδικής συμπεριφοράς, όπως και στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο-3. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο πίνακα 2.8, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

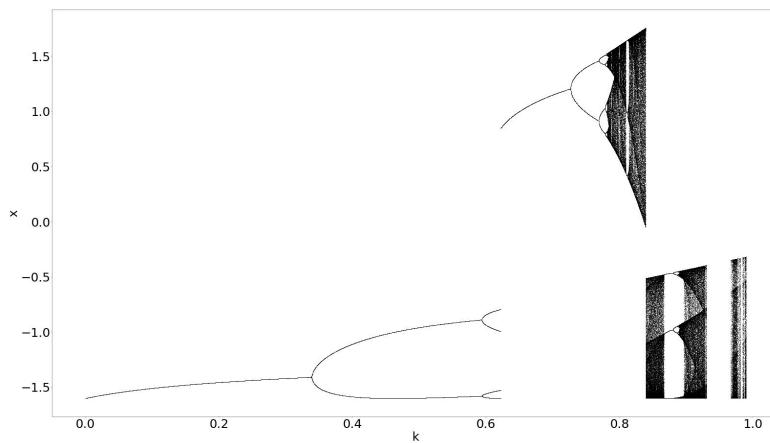
Τέλος, στο Σχ. 2.36ii παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 0.982]. Οι τιμές του πίνακα 2.8 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 2.35i, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 2.8: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -1.6$ , για  $x_i = 0.1$

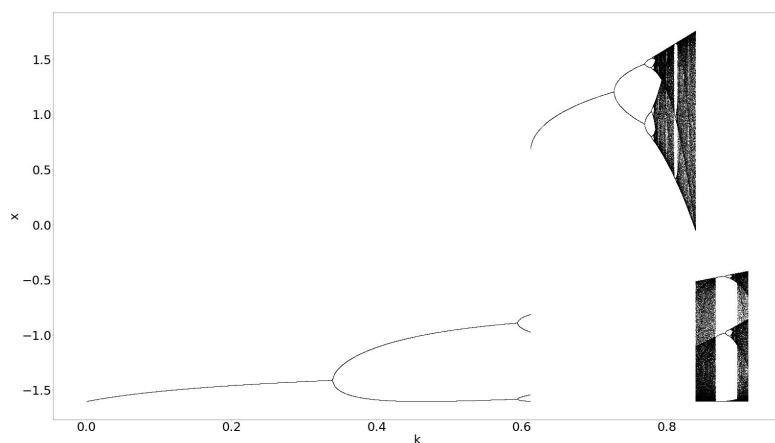
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά
0.31	Περίοδος - 1
0.34	Περίοδος - 2
0.595	Περίοδος - 4
0.66	Περίοδος - 8
0.671	Περίοδος - 12
0.675	Χάος
0.683	Περίοδος - 12
0.685	Χάος
0.7	Περίοδος - 18
0.71	Χάος
0.715	Περίοδος - 6
0.716	Περίοδος - 12
0.717	Χάος
0.74	Περίοδος - 2
0.77	Περίοδος - 4
0.779	Περίοδος - 8
0.782	Χάος
0.788	Περίοδος - 20
0.789	Χάος
0.799	Περίοδος - 5
0.8	Χάος
0.81	Περίοδος - 3
0.812	Περίοδος - 6
0.813	Χάος
0.8393	Κενό
0.867	Περίοδος - 3
0.88	Περίοδος - 6
0.886	Περίοδος - 10
0.889	Χάος
0.92	Κενό
0.94	Περίοδος - 5
0.942	Χάος
0.943	Κενό
0.948	Χάος



(i) Για  $x_0 = 0.1$

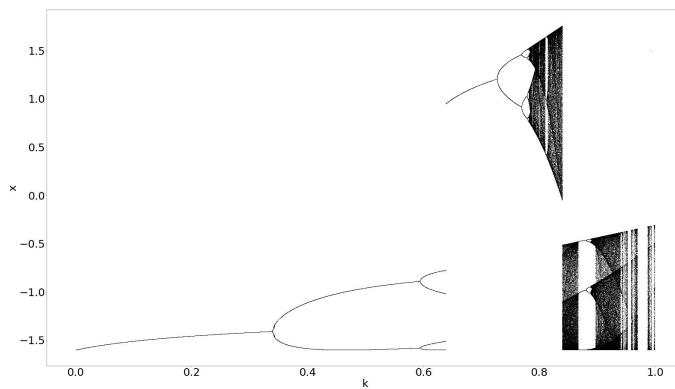


(ii) Για  $x_0 = 0.5$

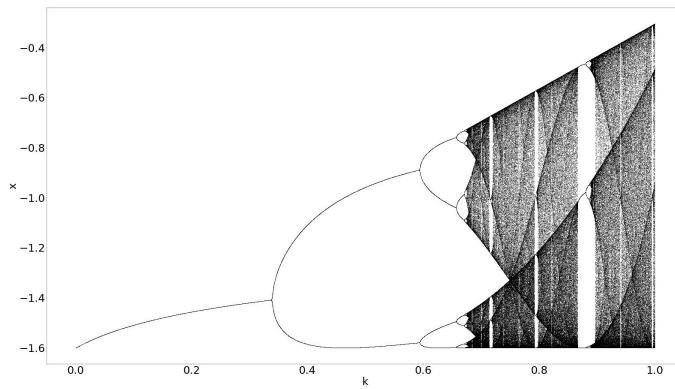


(iii) Για  $x_0 = 1$

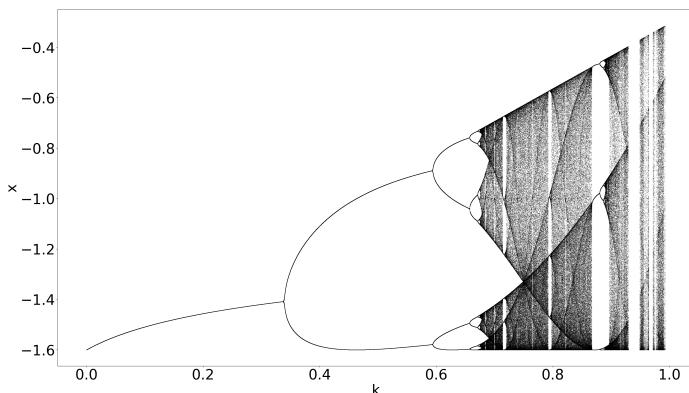
Σχήμα 2.35: Διαγράμματα διακλάδωσης ,για  $q = -1.6$  (α' μέρος).



(i) Για  $x_0 = 1.5$

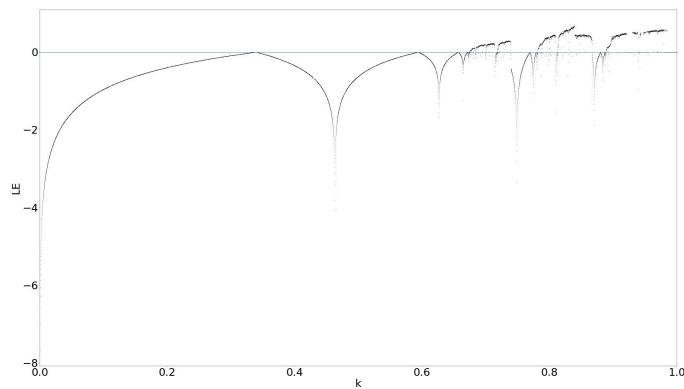


(ii) Για  $x_0 = 2$

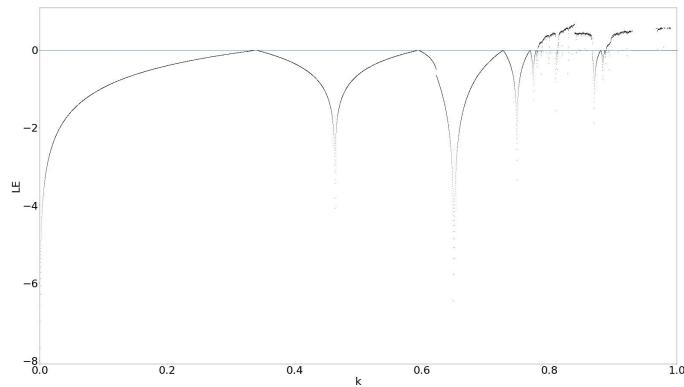


(iii) Για  $x_0 = -0.1$

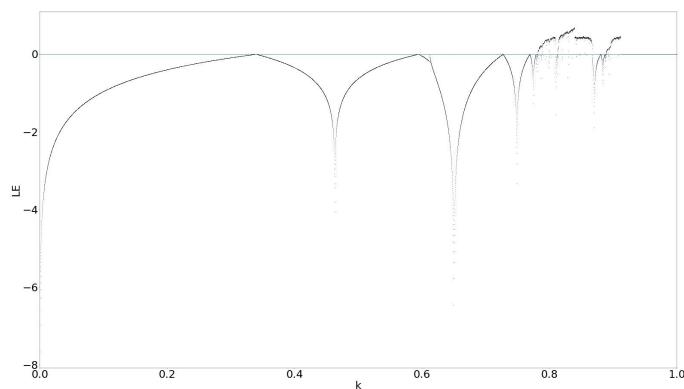
Σχήμα 2.36: Διαγράμματα διακλάδωσης , για  $q = -1.6$  ( $\beta'$  μέρος).



(i) Για  $x_0 = 0.1$

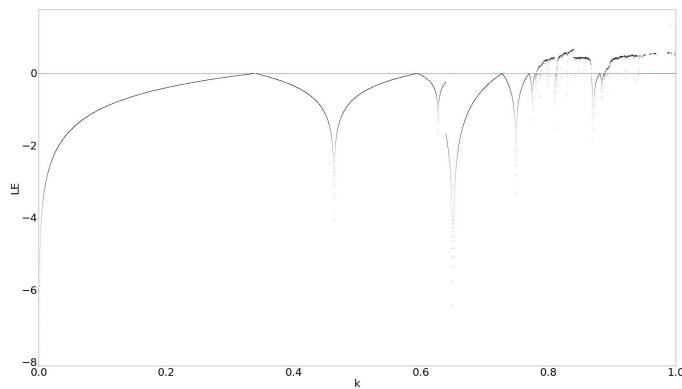


(ii) Για  $x_0 = 0.5$

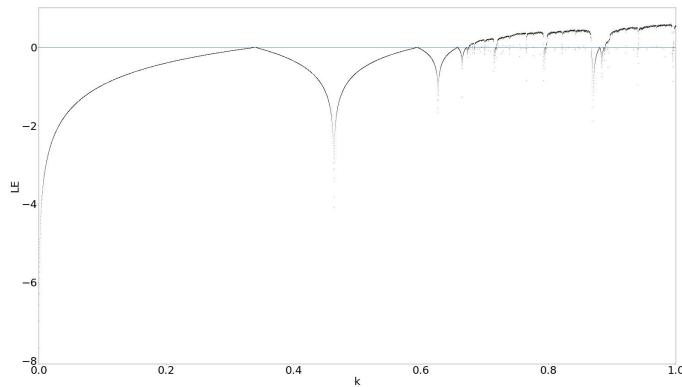


(iii) Για  $x_0 = 1$

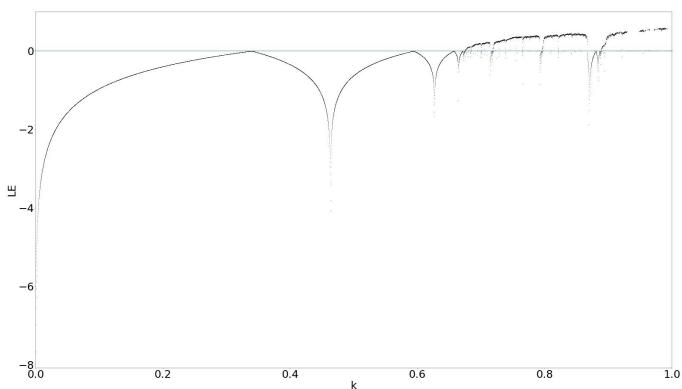
**Σχήμα 2.37:** Διαγράμματα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.4$  (α' μέρος).



(i) Για  $x_0 = 1.5$

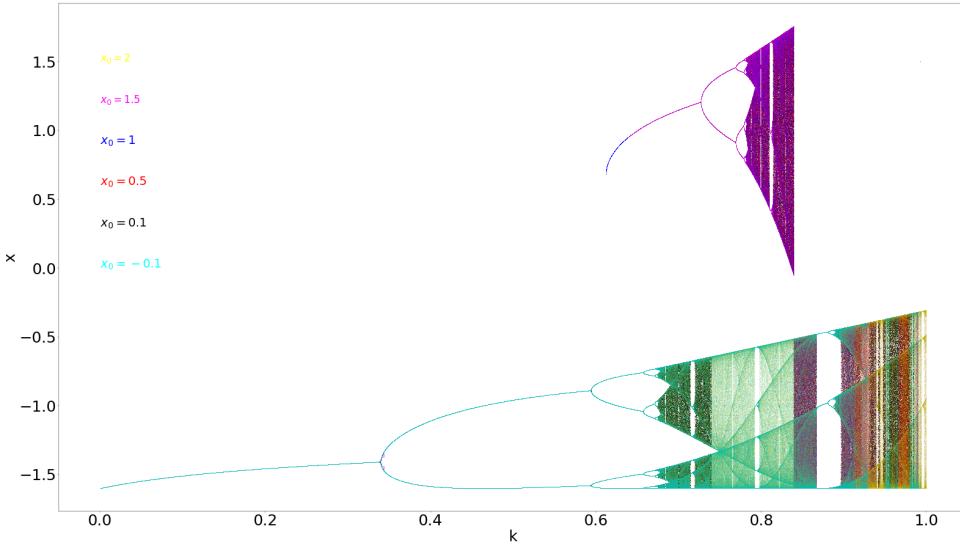


(ii)  $x_0 = 2$

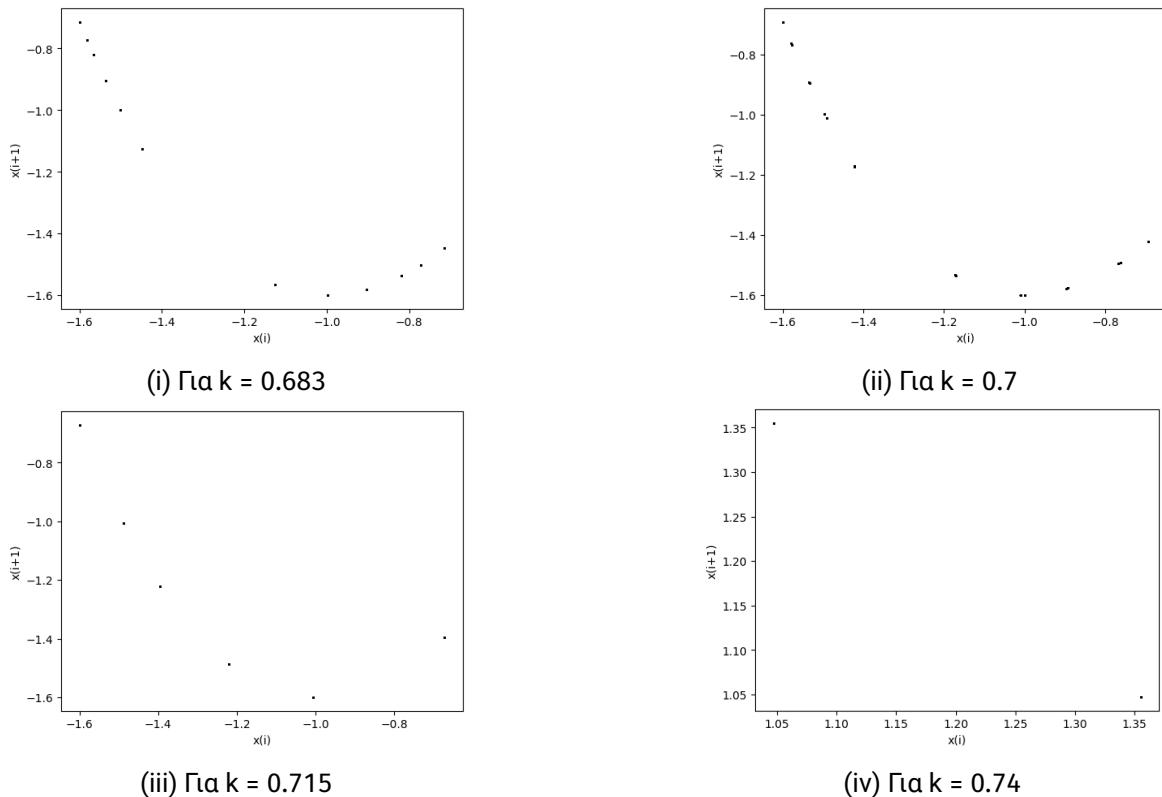


(iii)  $x_0 = -0.1$

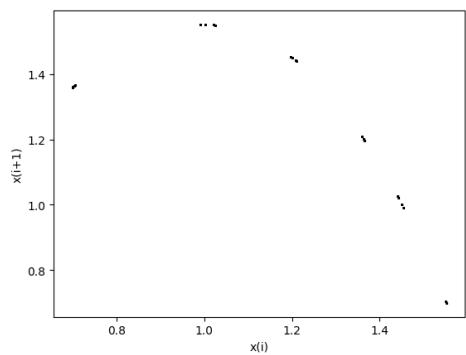
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα των εκθετών Λυαρυπον σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.4$  (β' μέρος).



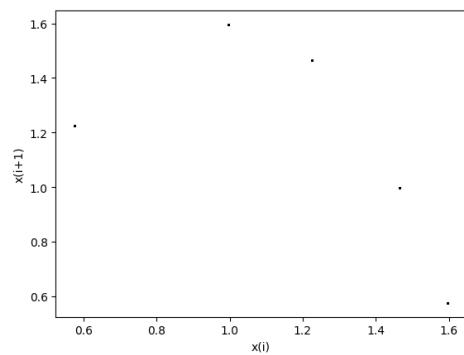
Σχήμα 2.39: Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες  $x_0$ .



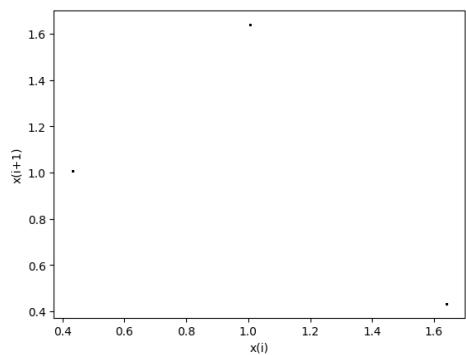
Σχήμα 2.40: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , με  $q = -1.6$  (α' μέρος).



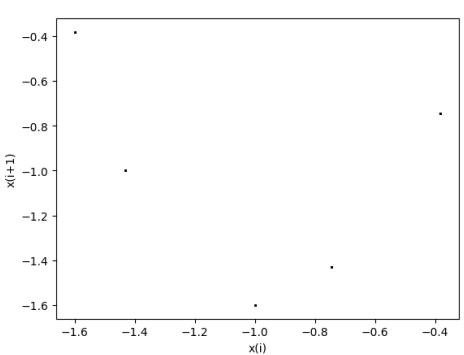
(i) Για  $k = 0.788$



(ii) Για  $k = 0.799$



(iii) Για  $k = 0.8$



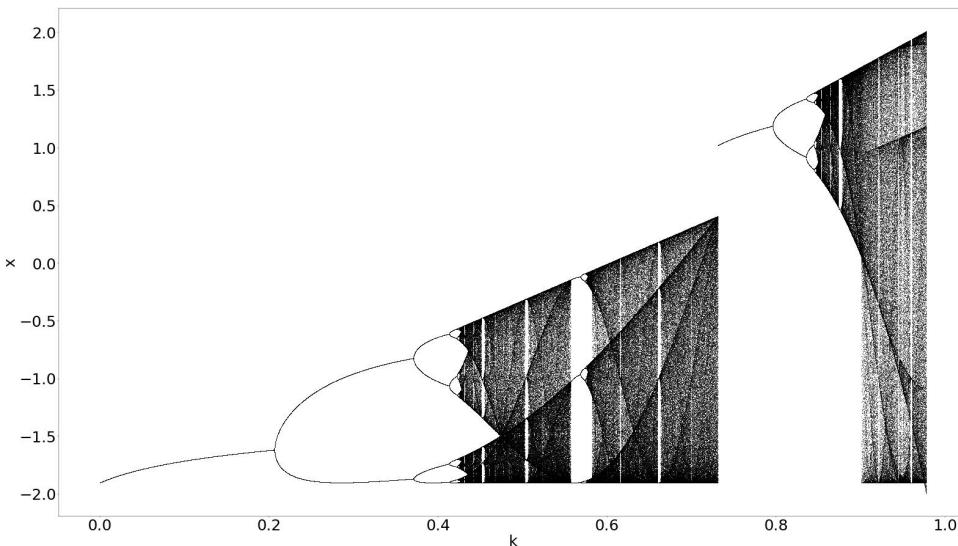
(iv) Για  $k = 0.94$

Σχήμα 2.41: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , με  $q = -1.6$  (β' μέρος).

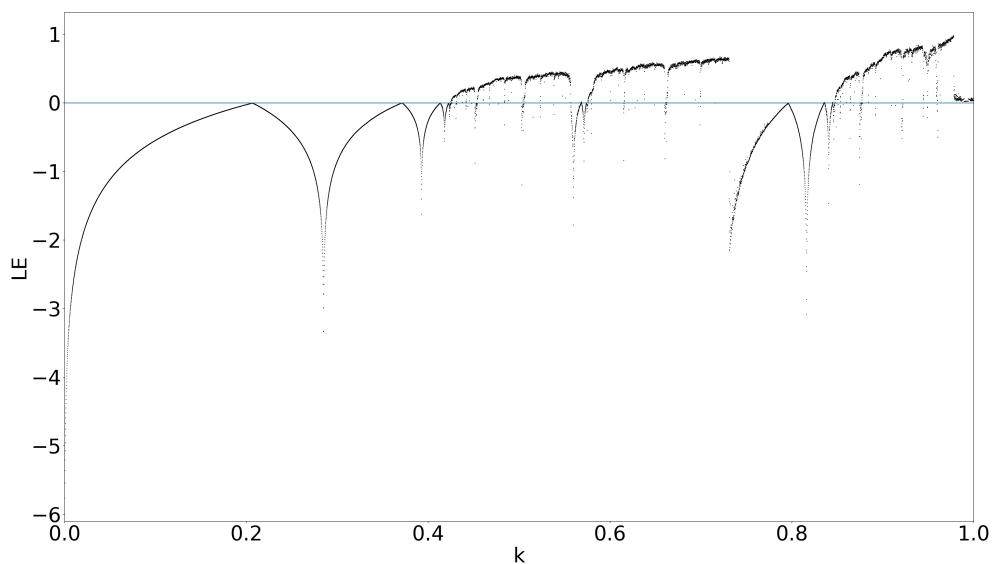
## 2.9 Για $q = -1.9$

Στο Σχ. 2.42 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.9$ . Στον πίνακα 2.9 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.42. Επίσης παρατηρείται συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  ( $0.431, 0.452, 0.484, 0.503, 0.56, 0.615, 0.66, 0.74, 0.875, 0.921, 0.949, 0.9597$ ), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.42, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος παρουσιάζονται στο πίνακα 2.9, όπως και τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Τέλος, στο σχήμα 2.43 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.978]$ . Οι τιμές του πίνακα 2.9 που έχουνε περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 2.42, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει τη συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



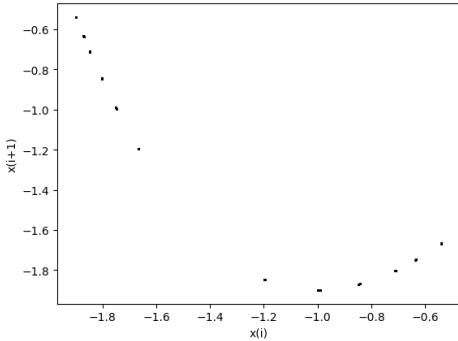
Σχήμα 2.42: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -1.9$ .



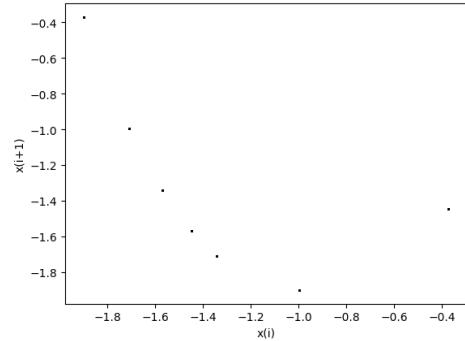
Σχήμα 2.43: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -1.9$ .

Πίνακας 2.9: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -1.9$ , για  $x_i = 0.1$

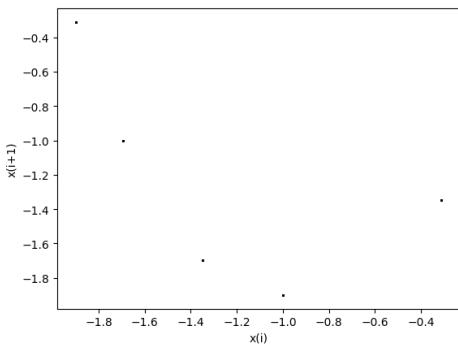
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.21	Περίοδος - 2
0.37	Περίοδος - 4
0.41	Περίοδος - 8
0.422	Περίοδος - 16
0.426	Χάος
0.431	Περίοδος - 17
0.432	Χάος
0.452	Περίοδος - 5
0.454	Περίοδος - 11
0.455	Χάος
0.484	Περίοδος - 7
0.485	Χάος
0.503	Περίοδος - 5
0.504	Περίοδος - 9
0.506	Χάος
0.56	Περίοδος - 3
0.57	Περίοδος - 6
0.574	Περίοδος - 11
0.577	Χάος
0.615	Περίοδος - 5
0.616	Χάος
0.66	Περίοδος - 4
0.661	Περίοδος - 7
0.663	Χάος
0.74	Περίοδος - 1
0.796	Περίοδος - 2
0.83	Περίοδος - 4
0.844	Περίοδος - 8
0.846	Περίοδος - 14
0.848	Χάος
0.875	Περίοδος - 3
0.8752	Περίοδος - 5
0.878	Χάος
0.921	Περίοδος - 5
0.922	Χάος
0.949	Περίοδος - 6
0.951	Χάος
0.9597	Περίοδος - 4
0.961	Χάος



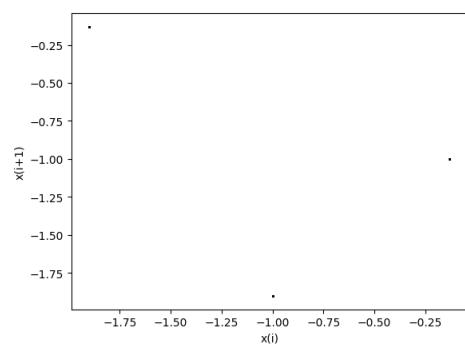
(i) Για  $k = 0.431$



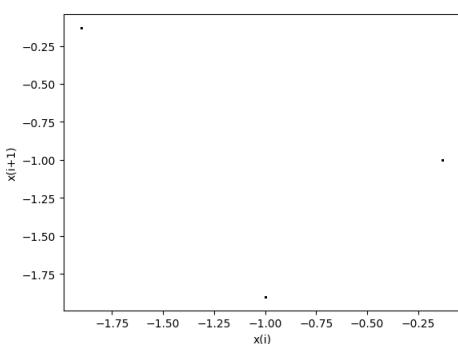
(ii) Για  $k = 0.452$



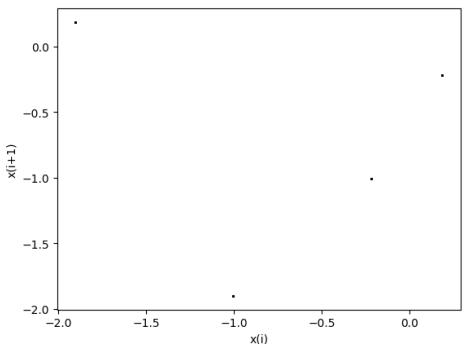
(iii) Για  $k = 0.484$



(iv) Για  $k = 0.503$

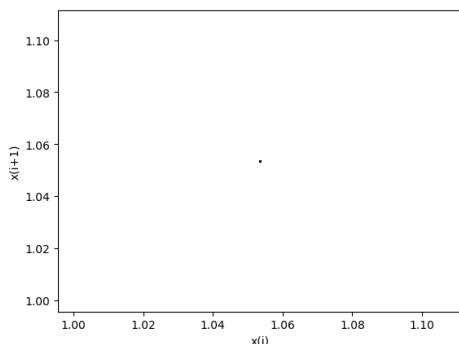


(v) Για  $k = 0.56$

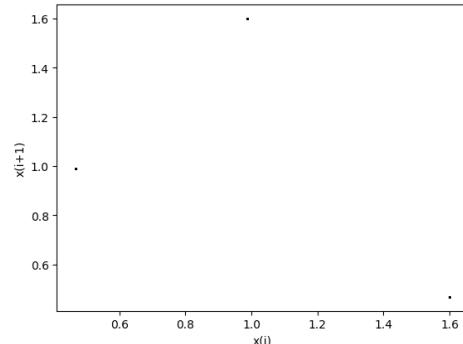


(vi) Για  $k = 0.615$

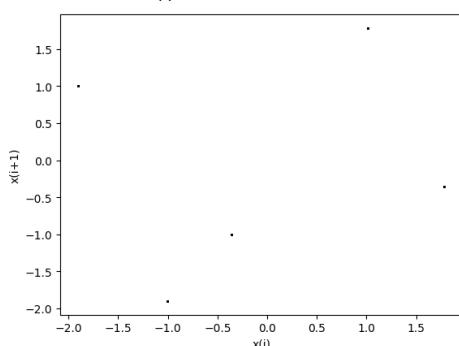
Σχήμα 2.44: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  (α' μέρος).



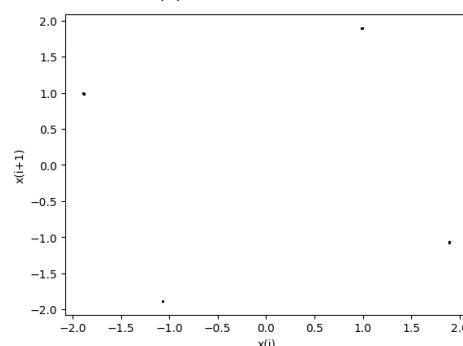
(i) Για  $k = 0.66$



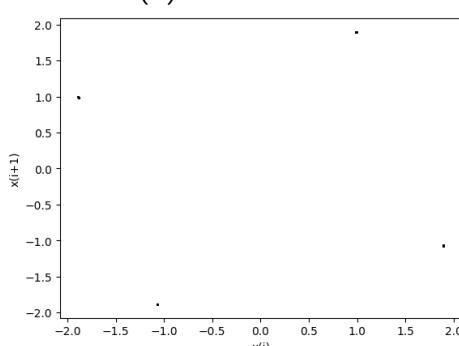
(ii) Για  $k = 0.74$



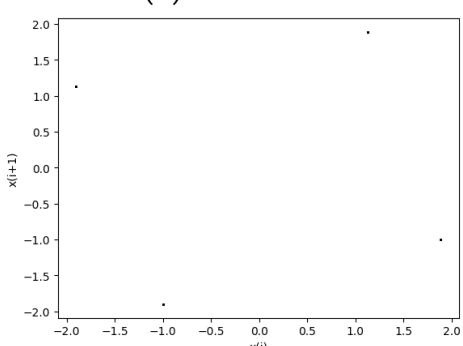
(iii) Για  $k = 0.875$



(iv) Για  $k = 0.921$



(v) Για  $k = 0.949$



(vi) Για  $k = 0.9597$

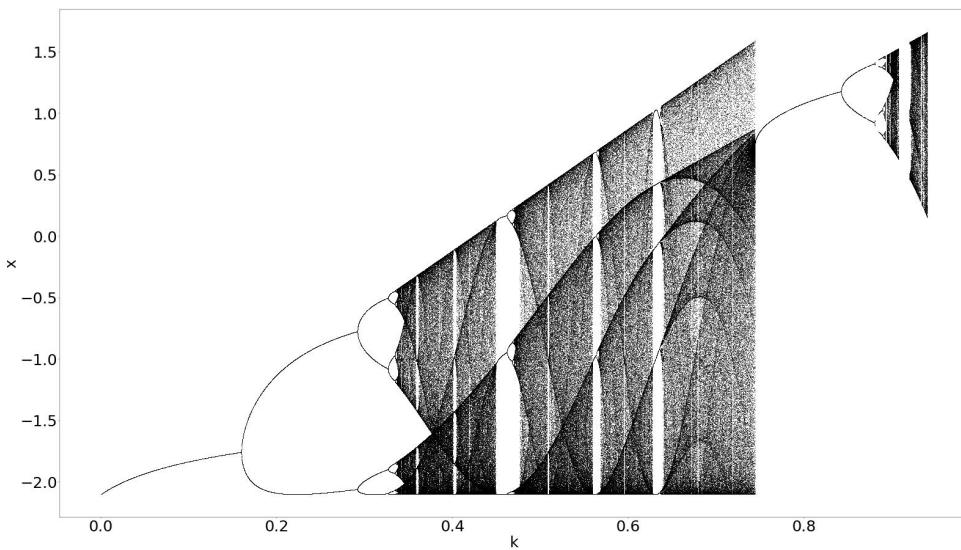
Σχήμα 2.45: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.10 Για $q = -2.1$

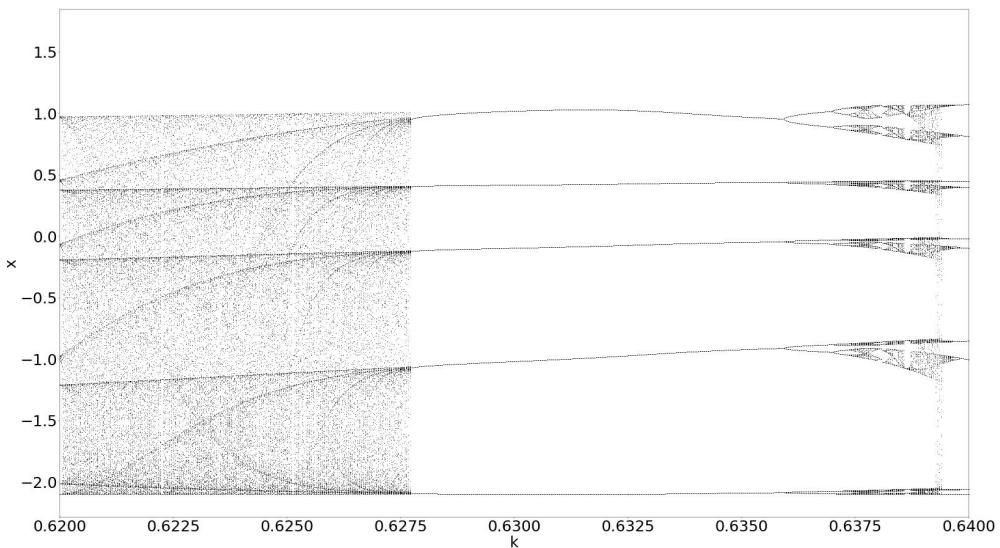
Στο Σχ. 2.46 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος 2.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -2.1$ . Στον πίνακα 2.10 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.46. Επίσης, παρατηρείται συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  ( $0.358, 0.4, 0.45, 0.507, 0.558, 0.627, 0.638, 0.6384, 0.745, 0.921, 0.949, 0.9597$ ), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 2.48, στα κενά που δημιουργούνται μεταξύ του χάους. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος παρουσιάζονται στον πίνακα 2.10.

Επίσης στο Σχ. 2.48 παρατίθεται το διάγραμμα διακλάδωσης για  $0.626 < k < 0.641$ . Ουσιαστικά εστιάστηκε το διάγραμμα στο φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας που εμφανίζεται για τις συγκεκριμένες τιμές του  $q$ . Επίσης παρατηρούμε στο εστιασμένο διάγραμμα τη δημιουργία χαοτικών φυσαλίδων. Δηλαδή, το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με υποδιπλασιασμό της περιόδου. Αυτό επιβεβαιώνεται από τον πίνακα 2.10, όπου από το  $k = 0.636$  (περίοδος - 10) μετά από δύο διπλασιασμούς  $k = 0.6371$  (περίοδος - 20),  $k = 0.6374$  (περίοδος - 40), εμφανίζεται χαοτική φυσαλίδα για  $k = 0.6377$  (χάος). Στη συνέχεια το σύστημα εξέρχεται από το χάος για  $k = 0.638$  (περίοδος - 40) με υποδιπλασιασμό. Ενώ για  $k = 0.6383$  (χάος) διακόπτεται ο υποδιπλασιασμός και το σύστημα εισέρχεται στο χάος. Για  $k = 0.6384$  (περίοδος - 30) εξέρχεται από το χάος για να ξανά εμφανίσει τελικά χάος για  $k = 0.639$ . Για αυτές τις τιμές του  $k$  παράχθηκαν τα αντίστοιχα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με τη περίοδο του συστήματος.

Τέλος, στο Σχ. 2.47 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 0.94]$ . Οι τιμές του πίνακα 2.10 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος 2.47 όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει τη συμπεριφορά τους. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως έγινε φανέρο και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



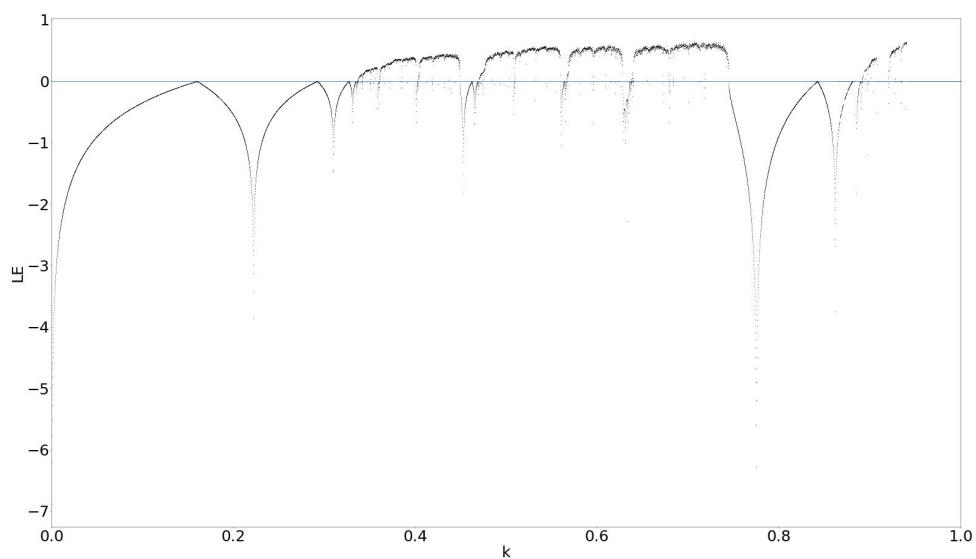
Σχήμα 2.46: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -2.1$ .



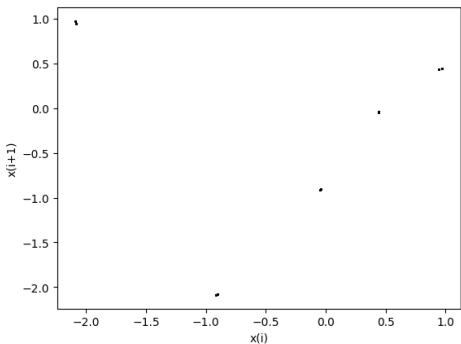
Σχήμα 2.47: Μεγέθυνση του διάγραμματος διακλάδωσης, για  $q = -2.1$ .

Πίνακας 2.10: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -2.1$

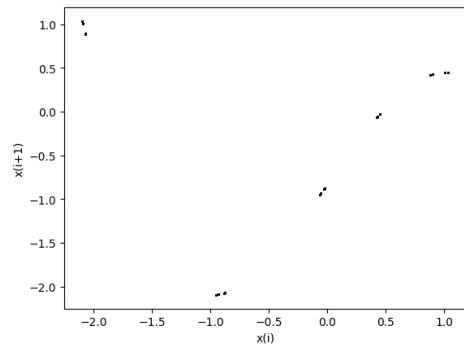
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά
0.1	Περίοδος - 1
0.16	Περίοδος - 2
0.29	Περίοδος - 4
0.32	Περίοδος - 8
0.334	Περίοδος - 16
0.337	Χάος
0.358	Περίοδος - 6
0.36	Χάος
0.4	Περίοδος - 5
0.402	Περίοδος - 10
0.403	Χάος
0.45	Περίοδος - 3
0.46	Περίοδος - 6
0.468	Περίοδος - 12
0.47	Χάος
0.507	Περίοδος - 5
0.508	Περίοδος - 10
0.51	Χάος
0.558	Περίοδος - 4
0.56	Περίοδος - 8
0.568	Χάος
0.627	Περίοδος - 5
0.636	Περίοδος - 10
0.6371	Περίοδος - 20
0.6374	Περίοδος - 40
0.6377	Χάος
0.638	Περίοδος - 40
0.6381	Περίοδος - 20
0.6383	Χάος
0.6384	Περίοδος - 30
0.6835	Περίοδος - 40
0.6836	Περίοδος - 10
0.64	Χάος
0.745	Περίοδος - 1
0.8426	Περίοδος - 2
0.88	Περίοδος - 4
0.889	Περίοδος - 8
0.89	Χάος



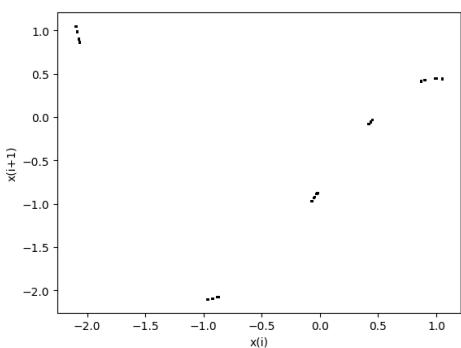
Σχήμα 2.48: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -2.1$ .



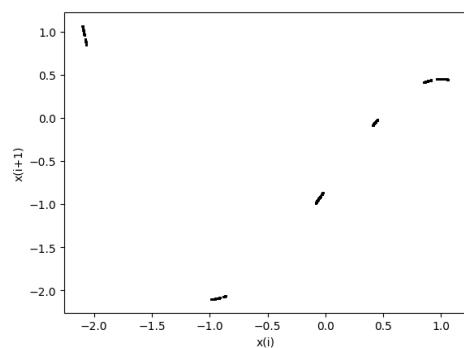
(i) Για  $k = 0.636$



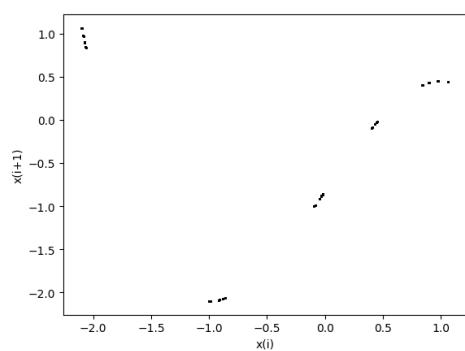
(ii) Για  $k = 0.6371$



(iii) Για  $k = 0.6374$

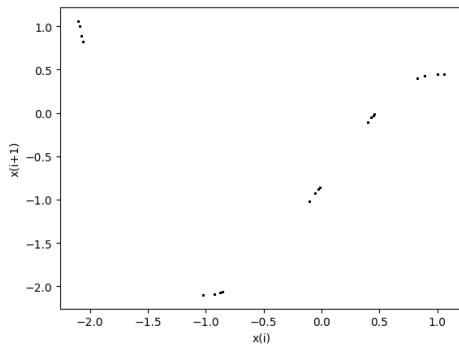


(iv) Για  $k = 0.6377$

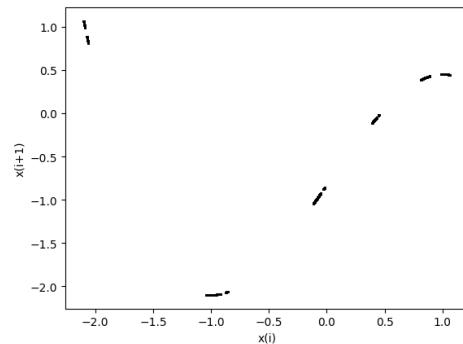


(v) Για  $k = 0.638$

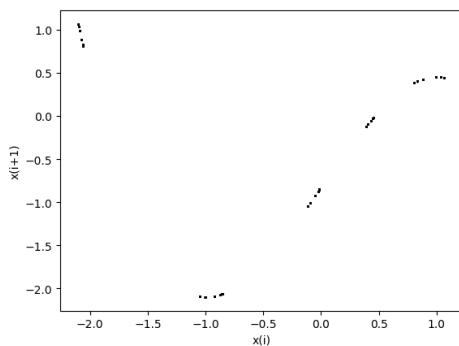
Σχήμα 2.49: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  (α' μέρος).



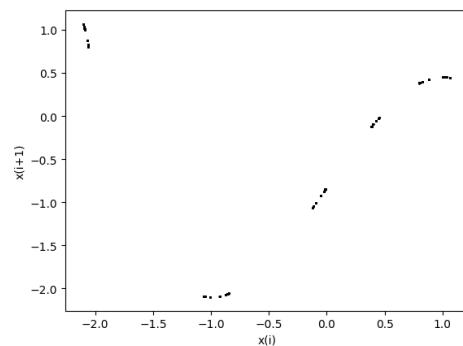
(i) Για  $k = 0.6381$



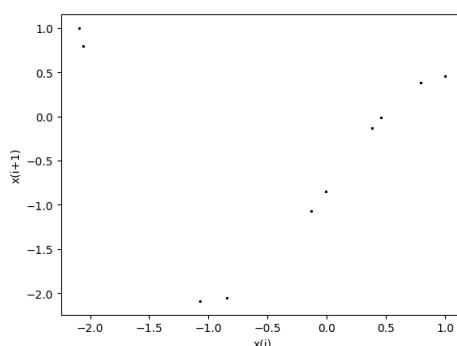
(ii) Για  $k = 0.6383$



(iii) Για  $k = 0.6384$



(iv) Για  $k = 0.6385$



(v) Για  $k = 0.639$

Σχήμα 2.50: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  ( $\beta'$  μέρος).

## 2.11 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη, της οποίας βασικό χαρακτηριστικό είναι η χαοτική συμπεριφορά που εμφανίζόταν σε όλες τις περιπτώσεις που ελέχθηκαν για την παράμετρο  $q$ , όπως και για τα επι μερούς φαινόμενα που οδηγούν σε αυτήν.

Ειδικότερα, το συνηθέστερο φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις είναι αυτό της μετάβασης στο χάος μέσω του διπλασιασμού της περιόδου, ξεκινώντας από διάστημα περιόδου-1. Για κάποιες παραμέτρους  $q$  εμφανίστηκε η ανάστροφη πορεία του συστήματος κατά την έξοδο του από την χαοτική περιοχή, παρουσιάζοντας έτσι το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας (χαοτική φυσαλίδα). Επίσης αρκετές φορές παρατηρήθηκε το φαινόμενο της υστέρησης δηλαδή "έσπαγε" η περιοδική συμπεριφορά, καθώς και το φαινόμενο των κρίσεων είτε εσωτερικών, είτε συνοριακών όπου το σύστημα εξέρχεται απότομα από την χαοτική περιοχή και μεταβαίνει σε μία περιοδική. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι το σύστημα παρουσίαζε το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών.



## Κεφάλαιο 3

# Παραλλαγή του sine-sinh Χάρτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διακριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού *sine-sinh-sine* Χάρτη. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μπορεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για τη μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ .

Ο *sine-sinh-sine* Χάρτης που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση [10]:

$$x_{i+1} = k * \sin(\pi * \sinh(\pi * \sin(\pi * x_i))) \quad (3.1)$$

Στην εξίσωση (3.1) αντικαταστάθηκε η παράμετρος  $\pi$  με την παράμετρο  $k$ , ένα σταθερό όρο  $q$  και έναν ακέραιο αριθμό. Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Λογιστικού Χάρτη,

$$x_{i+1} = k * \sin(k * \sinh(q * \sin(2 * x_i))) \quad (3.2)$$

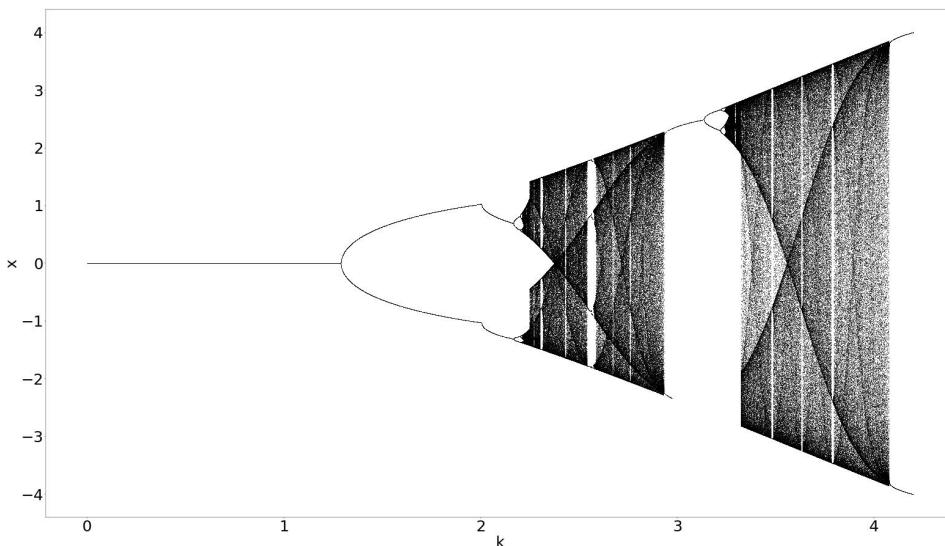
όπου  $k$ ,  $q$  παράμετροι.

Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος (3.2) εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των συγκεκριμένων παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του συστήματος ( $x_0 = 0.1$ ) παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου  $q$  μεταβαλλόταν στο διάστημα  $[-0.3, -0.5]$  με βήμα 0.2. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

### 3.1 Για $q = -0.3$

Στο Σχ. 3.1 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (3.2), ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.3$ . Στον πίνακα 3.1 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.1. Επίσης παρατηρείται συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  (2.27, 2.31, 2.43, 2.671, 2.76, 2.935, 3.293, 3.48, 3.629, 3.79), το οποίο φαίνεται ξεκάθαρα στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.1, στην μεταπήδηση του συστήματος από χαοτική συμπεριφορά σε περίοδο - 1 και περίοδο - 2. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο Πίνακα 3.1, όπως και τα αντίστοιχα διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  του Σχ. 3.3. Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

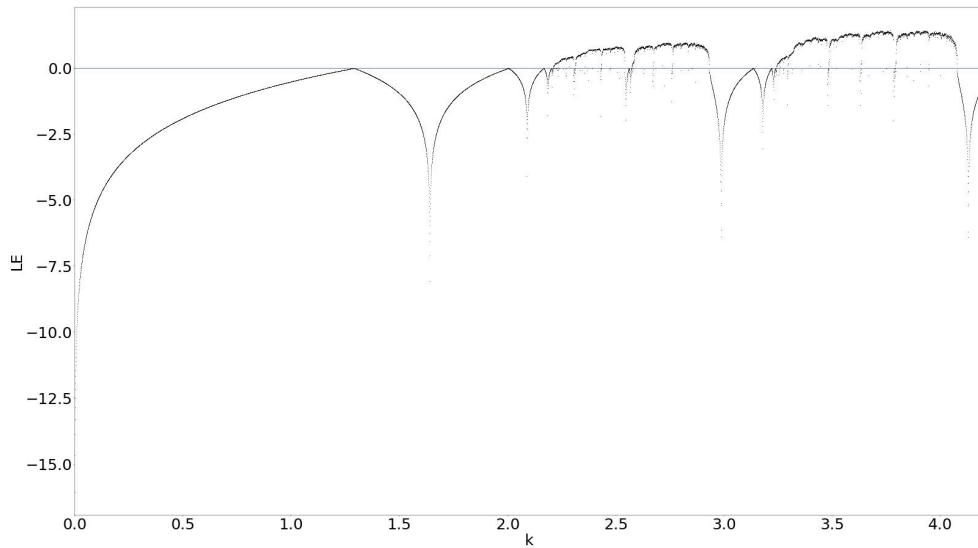
Τέλος, στο Σχ. 3.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 4.2]. Οι τιμές του Πίνακα 3.1 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 3.1, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



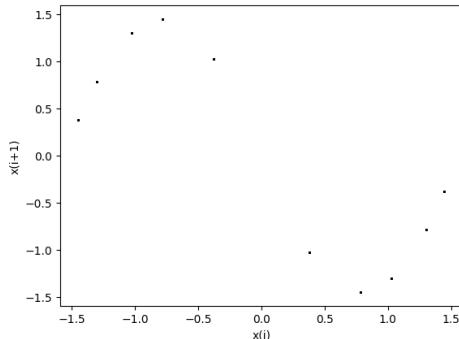
Σχήμα 3.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = -0.3$ .

Πίνακας 3.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -0.3$

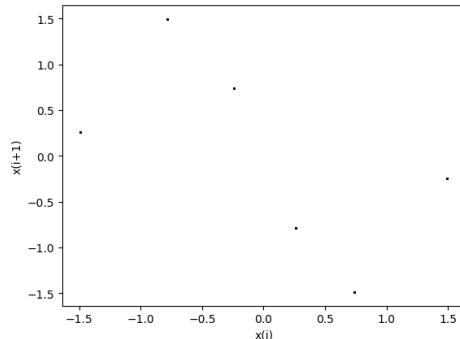
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά
0.25	Περίοδος - 1
1.287	Περίοδος - 2
2.17	Περίοδος - 4
2.2	Περίοδος - 8
2.21	Χάος
2.27	Περίοδος - 10
2.272	Χάος
2.31	Περίοδος - 6
2.32	Χάος
2.43	Περίοδος - 3
2.435	Χάος
2.671	Περίοδος - 3
2.672	Περίοδος - 6
2.675	Χάος
2.76	Περίοδος - 6
2.77	Χάος
2.935	Περίοδος - 1
3.14	Περίοδος - 2
3.22	Περίοδος - 4
3.79	Περίοδος - 4
3.8	Χάος
4.09	Περίοδος - 2



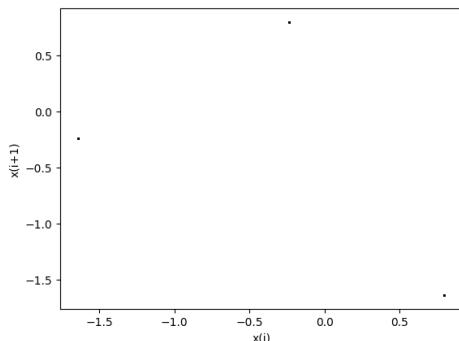
Σχήμα 3.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.3$ .



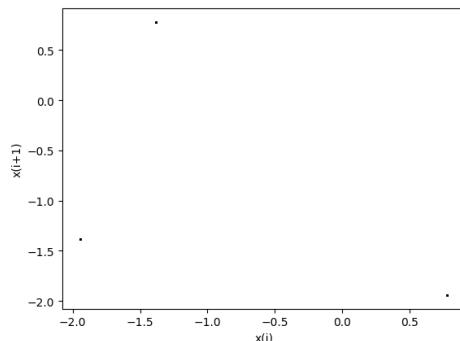
(i) Για  $k = 2.27$



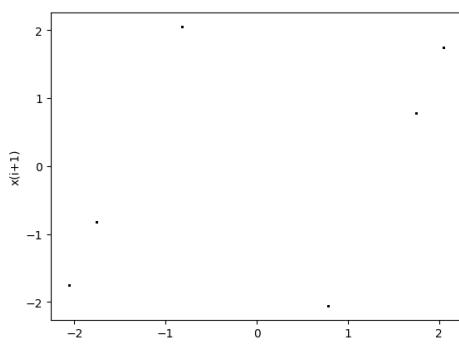
(ii) Για  $k = 2.31$



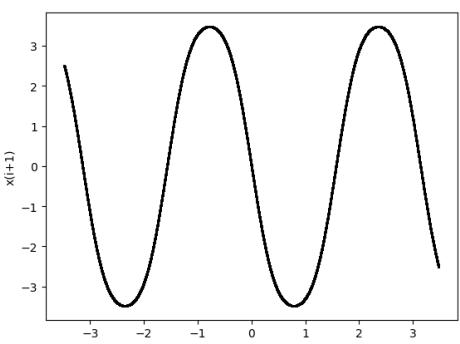
(iii) Για  $k = 2.43$



(iv) Για  $k = 2.671$



(v) Για  $k = 2.76$



(vi) Για  $k = 3.8$

Σχήμα 3.3: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ .

### 3.2 Για $q = -0.5$

Στο Σχ. 3.4 παρατίθενται τα διαγράμματα διακλάδωσης του συστήματος 3.2, ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.5$  και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή για διαφορετικό  $x_0$ . Συγκρίνοντας το διάγραμμα του Σχ. 3.4i ( $x_0 = 0.1$ ) με τα υπόλοιπα διαγράμματα διακλάδωσης των Σχ. 3.4ii ( $x_0 = 0.5$ ), 3.4iii ( $x_0 = 1$ ), παρατηρείται ότι για  $q = -0.5$  εμφανίζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών. Η συμπεριφορά του συστήματος για τις διάφορες περιπτώσεις επιβεβαιώνεται και από τα αντίστοιχα διαγράμματα Lyapunov των Σχ. (3.5i, 3.5ii, 3.5iii), όπως και από το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.9i, όπου η κάθε αρχική συνθήκη εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα.

Στον Πίνακα 3.2 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.4i. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στα σχήματα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ . Από τα παραγόμενα Σχ. 3.11 προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

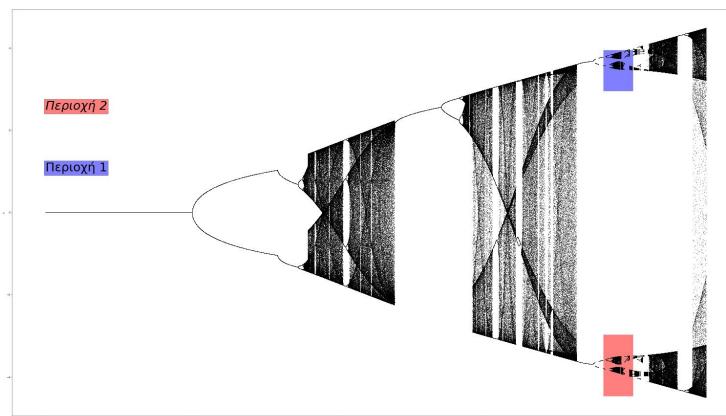
Επίσης παρατηρείται η συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  (1.773, 1.8, 1.831, 1.93, 2.03, 2.141, 2.2, 2.38, 2.88, 2.99, 3.04, 3.2, 3.35, 3.4, 3.44, 3.62, 3.93), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο διακρίνεται στα κενά που δημιουργούνται στις σκιαγραφημένες περιοχές 1 και 2. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στο Πίνακα 3.2.

Επιπλέον παρατηρούμε στα διαγράμματα των Σχ. 3.6, 3.7, 3.8 το φαινόμενο της αντιμοντονικότητας. Συγκεκριμένα στα διαγράμματα του Σχ. 3.6 εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στη συνέχεια εξέρχεται από αυτό με ανάστροφη ακολουθία διπλασιασμού της περιόδου), για  $k = 3.85$ , της οποίας η εξέλιξη φαίνεται στα υπόλοιπα δύο διαγράμματα των. Σχ. 3.7, 3.8, όπου για διαφορετικές αρχικές συνθήκες  $x_0$  διακρίνεται καλύτερα. Μεταξύ αυτών των χαοτικών φυσαλίδων παρατηρούμε και τις δύο περιπτώσεις του φαινομένου, δηλαδή τον ορθό και τον ανάστροφο διπλασιασμό της περιόδου. Στα Σχ. 3.7, 3.8 παρατηρείται ότι για  $k = 3.95$  ξεκινάει η ανάστροφη φυσαλίδα με περίοδο-1.

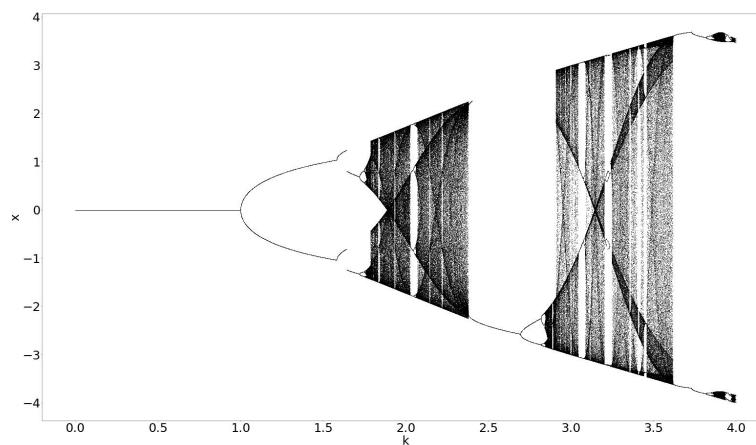
Τέλος, στο σχήμα 3.5i παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών [0, 4.2]. Οι τιμές του Πίνακα 3.2 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 3.5i, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την χαοτική τους συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.

Πίνακας 3.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = -0.5$

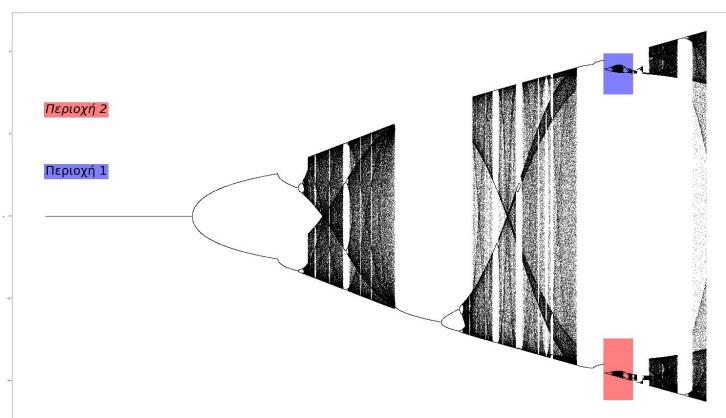
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά
0.25	Περίοδος - 1
1	Περίοδος - 2
1.7	Περίοδος - 4
1.748	Περίοδος - 8
1.75	Χάος
1.773	Περίοδος - 6
1.774	Περίοδος - 12
1.775	Χάος
1.8	Περίοδος - 10
1.806	Χάος
2.03	Περίοδος - 4
2.06	Χάος
2.88	Περίοδος - 3
2.89	Χάος
2.99	Περίοδος - 6
3	Περίοδος - 12
3.01	Χάος
3.04	Περίοδος - 4
3.08	Χάος
3.2	Περίοδος - 2
3.206	Περίοδος - 4
3.23	Περίοδος - 2
3.24	Χάος
3.35	Περίοδος - 4
3.36	Χάος
3.4	Περίοδος - 4
3.41	Χάος
3.44	Περίοδος - 4
3.45	Χάος
3.62	Περίοδος - 2
3.8	Περίοδος - 4
3.84	Χάος
3.94	Περίοδος - 8
3.95	Περίοδος - 4
3.96	Περίοδος - 8
3.97	Περίοδος - 16
3.98	Χάος
4	Περίοδος - 6
4.05	Περίοδος - 4
4.07	Χάος



(i)  $x_0 = 0.1$

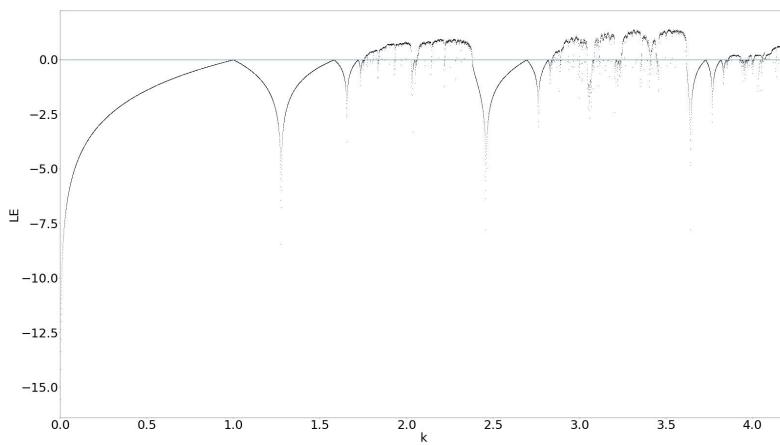


(ii)  $x_0 = 0.5$

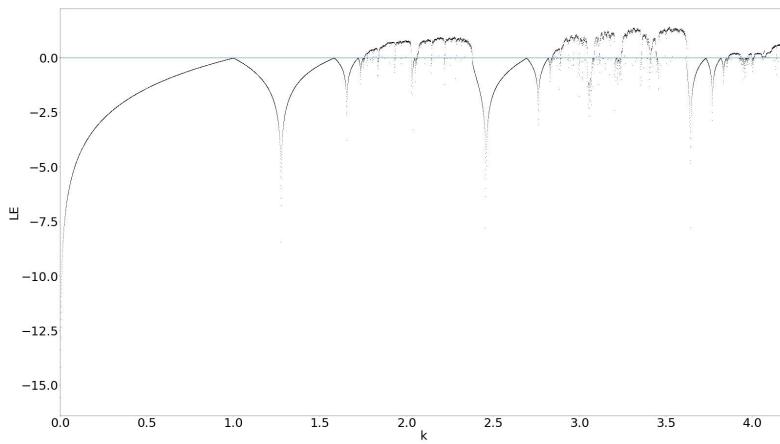


(iii)  $x_0 = 1$

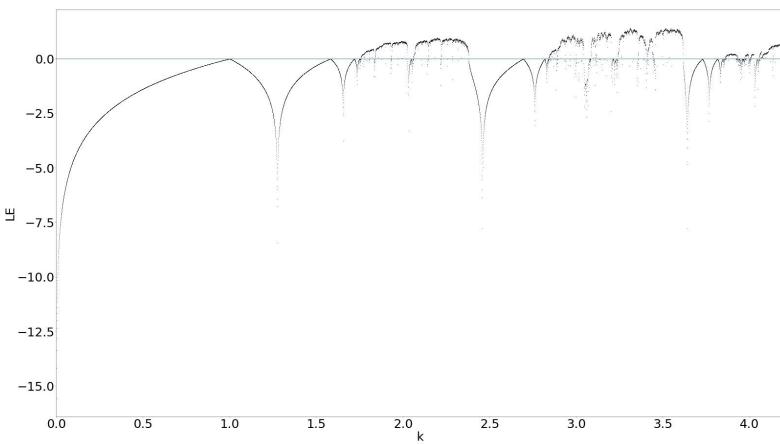
Σχήμα 3.4: Διαγράμματα διακλάδωσης, για  $q = -0.5$



(i) Για  $x_0 = 0.1$

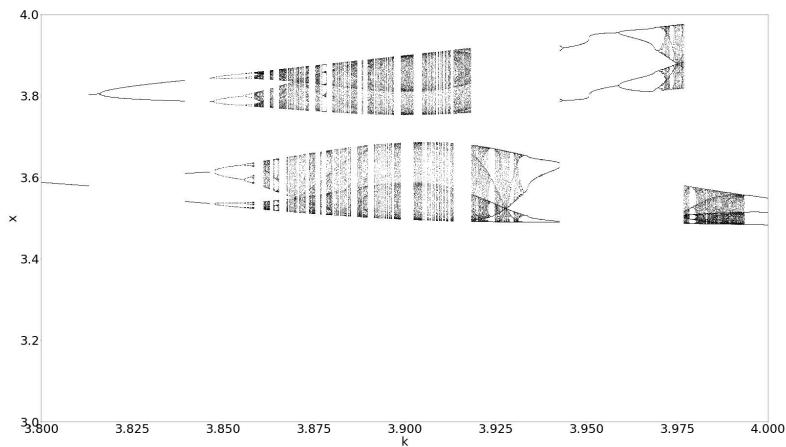


(ii) Για  $x_0 = 0.5$

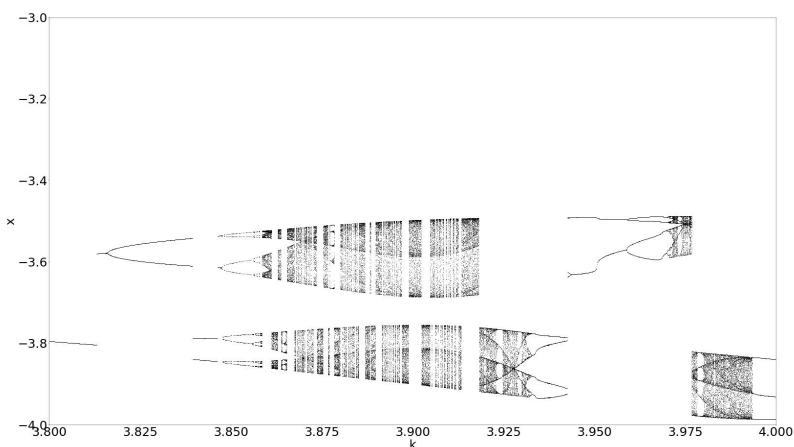


(iii) Για  $x_0 = 1$

Σχήμα 3.5: Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = -0.5$ .

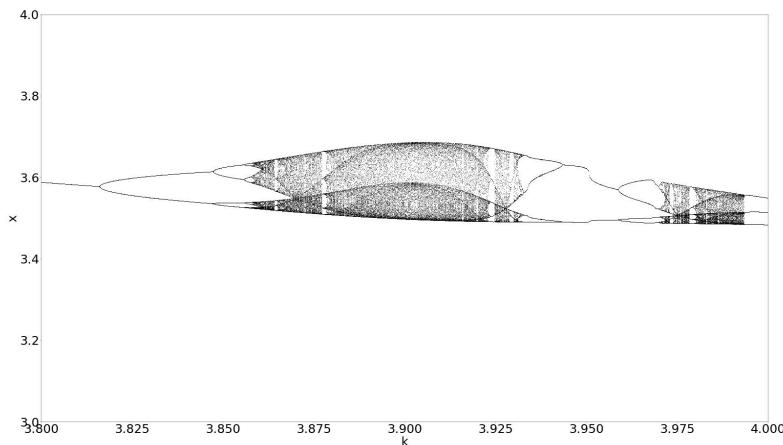


(i) Περιοχή 1 (βλ. Σχ. 3.4i)

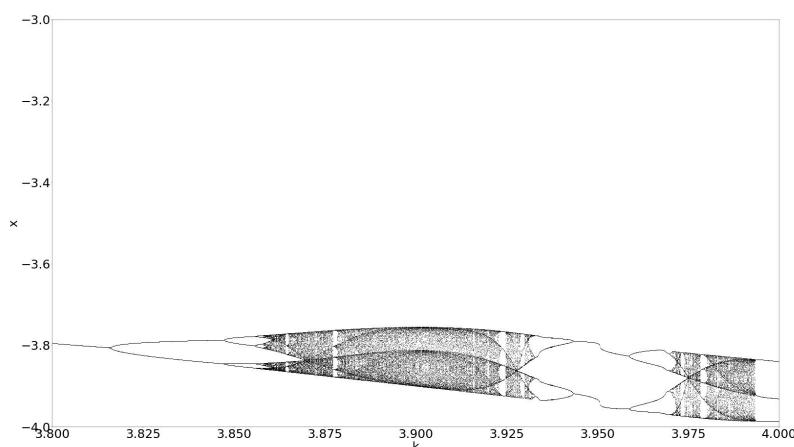


(ii) Περιοχή 2 (βλ. Σχ. 3.4i)

Σχήμα 3.6: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του  $x_0 = 0.1$ .

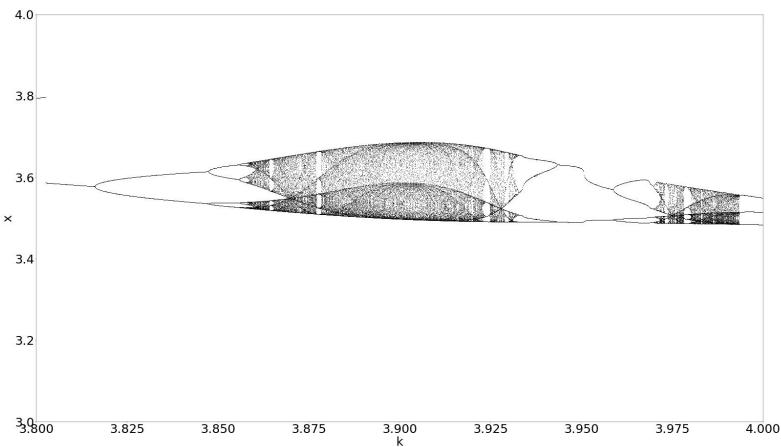


(i) Περιοχή 1 (βλ. Σχ. 3.4ii)

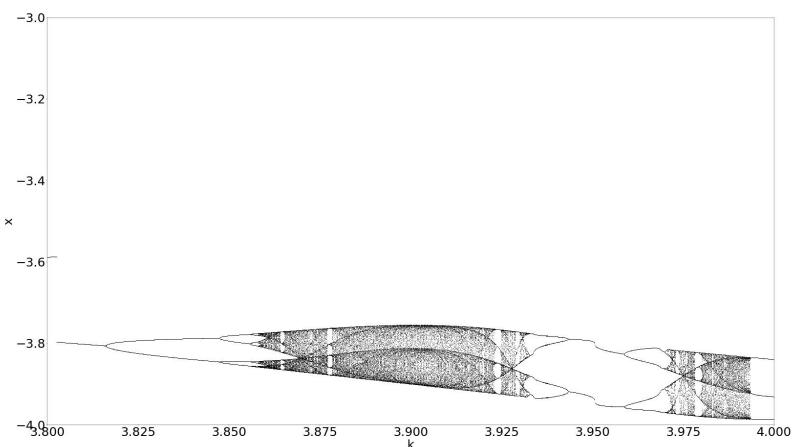


(ii) Περιοχή 2 βλ. Σχ. 3.4ii)

Σχήμα 3.7: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του  $x_0 = 0.5$ .

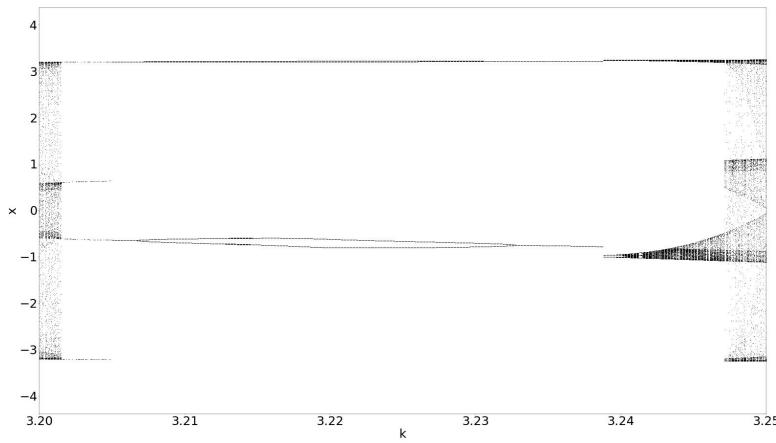


(i) Περιοχή 1 (βλ. Σχ. 3.4iii)

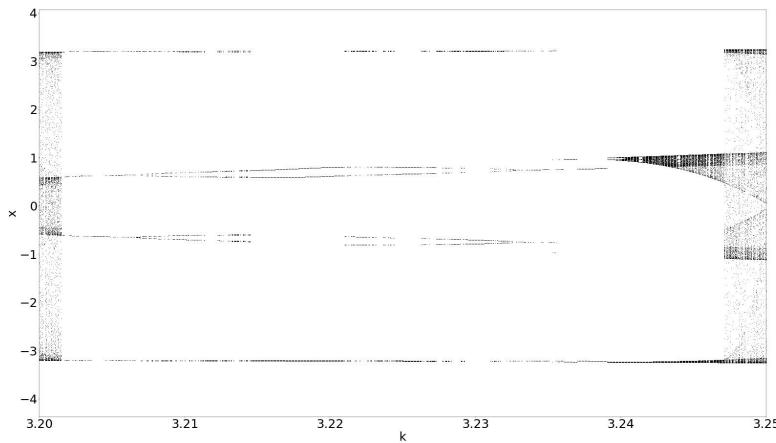


(ii) Περιοχή 2 (βλ. Σχ. 3.4iii)

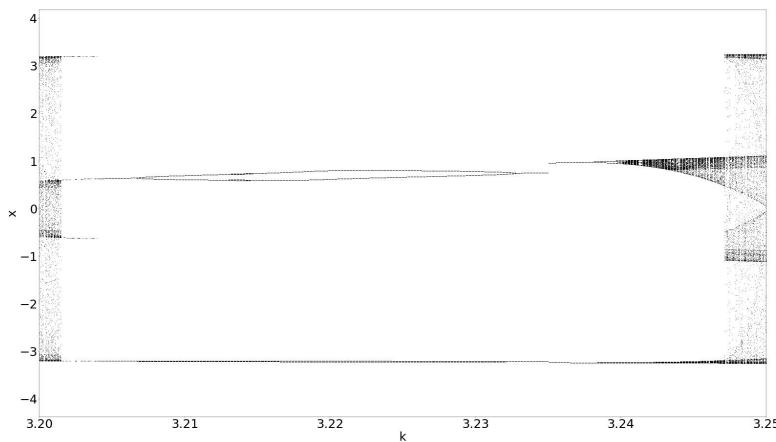
Σχήμα 3.8: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του  $x_0 = 1$ .



(i)  $x_0 = 0.1$

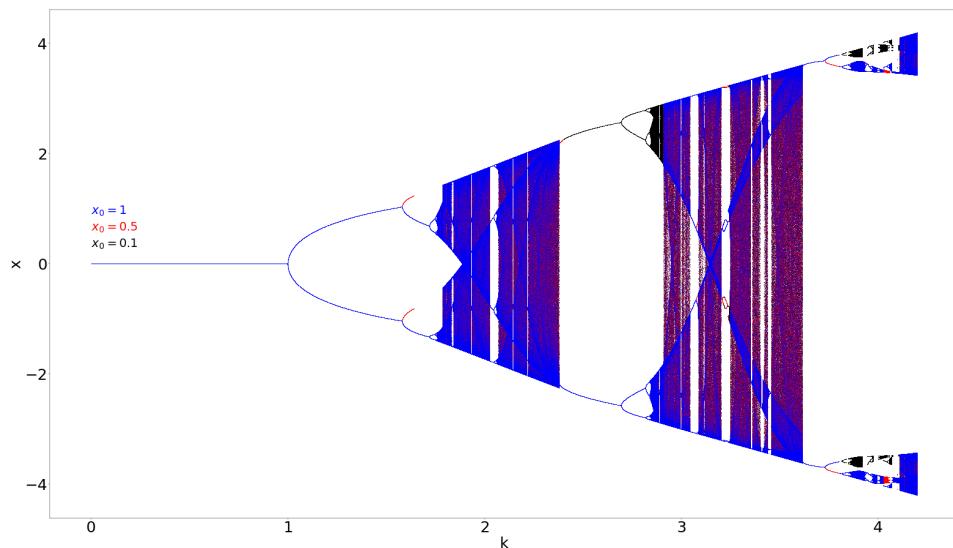


(ii)  $x_0 = 0.5$

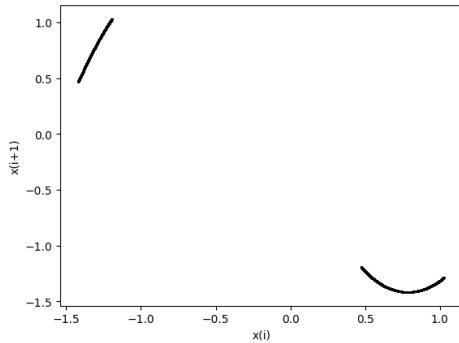


(iii)  $x_0 = 1$

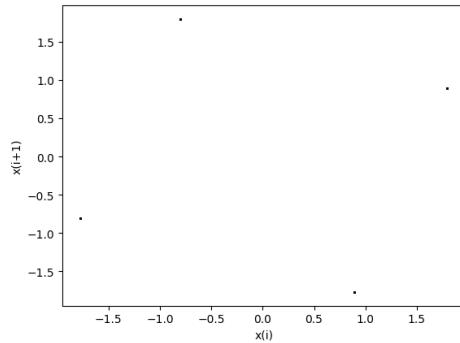
Σχήμα 3.9: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του  $x_0$ .



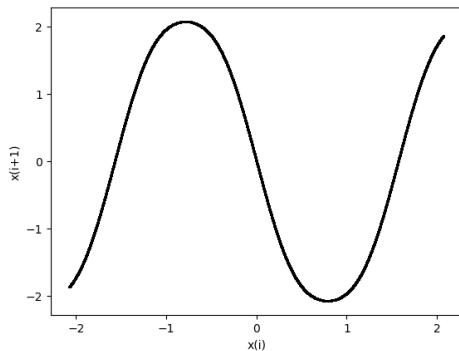
Σχήμα 3.10: Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες  $x_0$ .



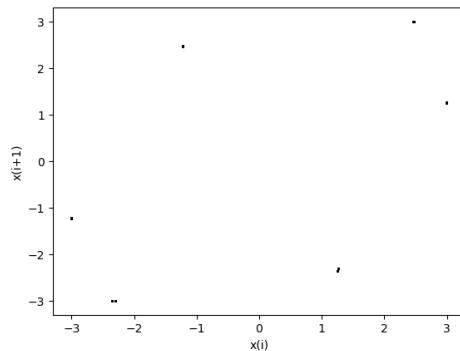
(i) Για  $k = 1.775$



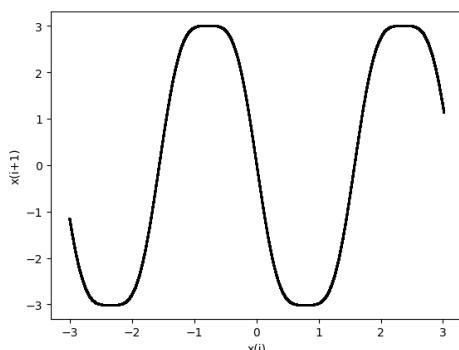
(ii) Για  $k = 2.03$



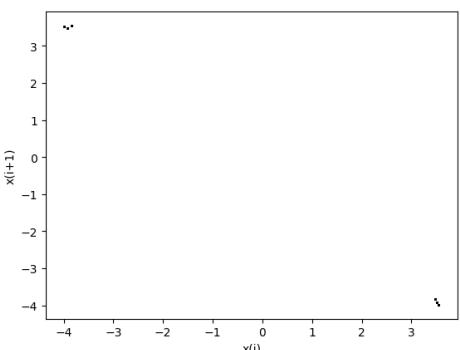
(iii) Για  $k = 2.84$



(iv) Για  $k = 3$



(v) Για  $k = 3.01$



(vi) Για  $k = 4$

Σχήμα 3.11: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ .

### 3.3 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία παραλλαγή του *sine-sinh-sine* Χάρτη, της οποίας βασικό χαρακτηριστικό είναι η χαοτική συμπεριφορά που καταγράφηκε σε όλες τις περιπτώσεις που ελέγχθηκαν για την παράμετρο  $q$ , όπως και για τα επί μέρους φαινόμενα που οδηγούν σε αυτήν.

Ειδικότερα, το συνηθέστερο φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις είναι αυτό της μετάβασης στο χάος μέσω του διπλασιασμού της περιόδου, ξεκινώντας από διάστημα περιόδου-1. Για κάποιες παραμέτρους  $q$  εμφανίστηκε η ανάστροφη πορεία του συστήματος κατά την έξοδο του από την χαοτική περιοχή, παρουσιάζοντας έτσι το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας (χαοτική φυσαλίδα). Επίσης αρκετές φορές παρατηρήθηκε το φαινόμενο της υστέρησης δηλαδή "έσπαγε" η περιοδική συμπεριφορά, καθώς και το φαινόμενο των κρίσεων είτε εσωτερικών, είτε συνοριακών. Τέλος, παρατηρήθηκε το φαινόμενο της συνύπαρξης ελκυστών.



## Κεφάλαιο 4

# Παραλλαγή του Χάρτη Chebysev

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός διακριτού συστήματος που αποτελεί παραλλαγή του γνωστού Χάρτη Chebysev. Για επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου του μπορεί να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά όπως και φαινόμενα που σχετίζονται με τη μη-γραμμική δυναμική. Για τη μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα διακλάδωσης, οι εκθέτες Lyapunov και οι απεικονίσεις της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ .

Ο Χάρτης Chebysev που αποτέλεσε τη βάση του προτεινόμενου σε αυτή την ενότητα, χάρτη, περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση [9]:

$$x_{i+1} = \cos(k * \arccos(x_i)) \quad (4.1)$$

Στην εξίσωση (4.1) χρησιμοποιήθηκε ένας σταθερός όρος  $q$ . Έτσι προέκυψε η προτεινόμενη παραλλαγή του Χάρτη Chebysev,

$$x_{i+1} = \cos(q^k \arccos(q * x_i)) \quad (4.2)$$

όπου  $k, q$  παράμετροι.

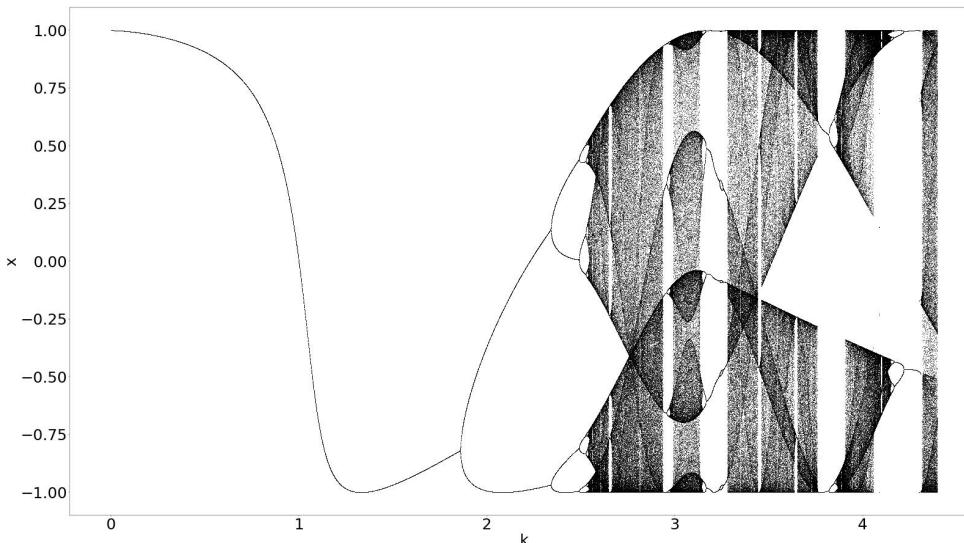
Για την εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος εξετάστηκε μια περιοχή τιμών των παραμέτρων του. Πιο συγκεκριμένα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε η αρχική συνθήκη του  $x_0 = 0.1$  παρέμεινε σταθερή, ενώ η τιμή της παραμέτρου  $q$  μεταβαλλόταν στο διάστημα  $[0.8, 0.9]$  με βήμα 0.1. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκαν το διάγραμμα διακλάδωσης, το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov και το διάγραμμα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ , τα οποία παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

## 4.1 Για $q = 0.8$

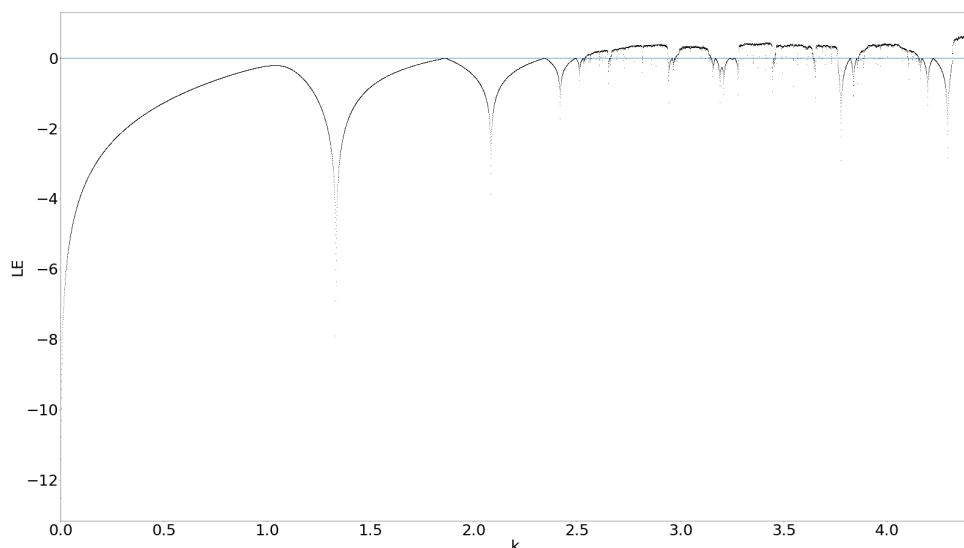
Στο Σχ. 4.1 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος του Σχ. 4.2, ως προς τη παράμετρο  $k$ , για  $q = 0.8$ . Στον Πίνακα 4.1 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 3.1. Επίσης παρατηρείται συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  ( $2.65, 2.938, 3.147, 3.45, 3.642, 3.776, 3.886, 4.1, 4.155$ ), όπως και το φαινόμενο της εσωτερικής κρίσης το οποίο φαίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 4.3iii. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος υπάρχουν στον Πίνακα 4.1, όπως και τα αντίστοιχα διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  στο Σχ. 4.4. Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επιπλέον παρατηρούμε στο Σχ. 4.3, το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Στα τρία διαγράμματα του Σχ. 4.3 εμφανίζονται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις του φαινομένου αυτού. Ενώ παρατηρούνται χαοτικές φυσαλίδες (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στην συνέχεια εξέρχεται από αυτό με υποδιπλασιασμό της περιόδου) σε όλες τις περιπτώσεις, η αρχική περίοδος είναι διαφορετική για κάθε περιοχή (4.3i - (περίοδος - 5), 4.3ii - (περίοδος - 4), 4.3iii - (περίοδος - 2)).

Τέλος, στο σχήμα 4.2 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 4.4]$ . Οι τιμές του Πίνακα 4.1 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 4.1, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει την χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



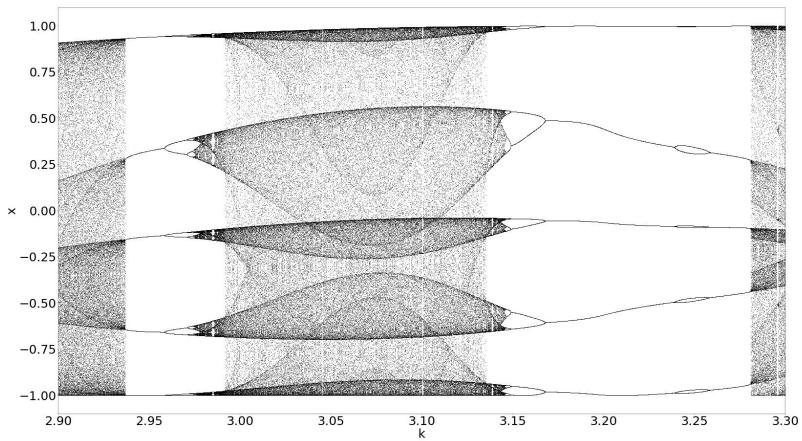
Σχήμα 4.1: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = 0.8$ .



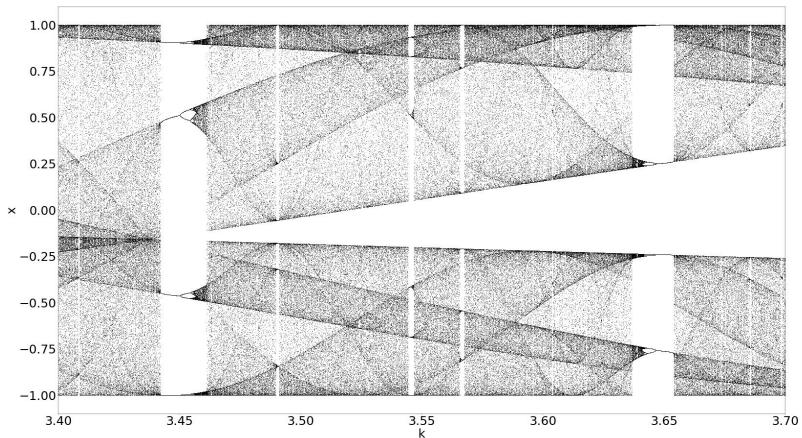
Σχήμα 4.2: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = 0.8$ .

Πίνακας 4.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = 0.8$ .

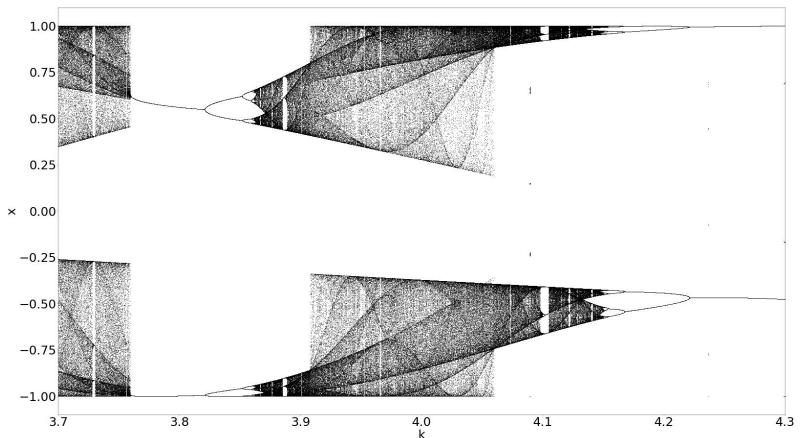
Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά
1.3	Περίοδος - 1
1.86	Περίοδος - 2
2.34	Περίοδος - 4
2.49	Περίοδος - 8
2.52	Περίοδος - 16
2.53	Χάος
2.65	Περίοδος - 6
2.655	Περίοδος - 12
2.66	Χάος
2.938	Περίοδος - 5
2.95	Περίοδος - 10
2.971	Περίοδος - 20
2.975	Χάος
3.147	Περίοδος - 20
3.15	Περίοδος - 10
3.17	Περίοδος - 5
3.24	Περίοδος - 10
3.258	Περίοδος - 5
3.28	Χάος
3.45	Περίοδος - 4
3.453	Περίοδος - 8
3.455	Περίοδος - 16
3.46	Χάος
3.642	Περίοδος - 16
3.643	Περίοδος - 8
3.647	Περίοδος - 4
3.65	Χάος
3.776	Περίοδος - 2
3.82	Περίοδος - 4
3.85	Περίοδος - 8
3.86	Χάος
3.886	Περίοδος - 6
3.887	Περίοδος - 12
3.888	Χάος
4.1	Περίοδος - 24
4.101	Περίοδος - 12
4.102	Περίοδος - 6
4.108	Χάος
4.155	Περίοδος - 8
4.17	Περίοδος - 4
4.22	Περίοδος - 2
4.32	Χάος



(i) Για  $2.9 < k < 3.3$

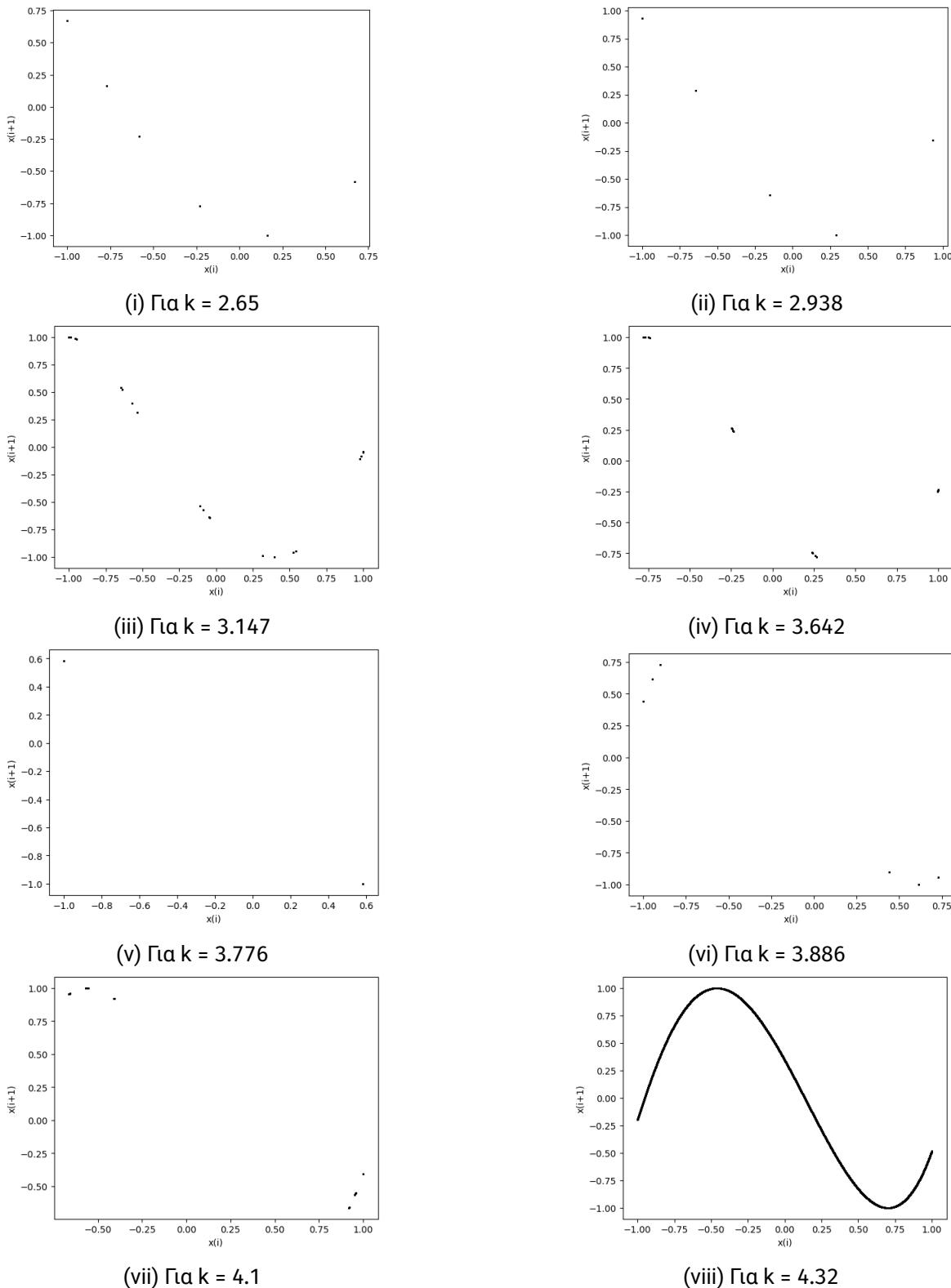


(ii) Για  $3.4 < k < 3.7$



(iii) Για  $3.6 < k < 4.7$

Σχήμα 4.3: Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του  $k$ .



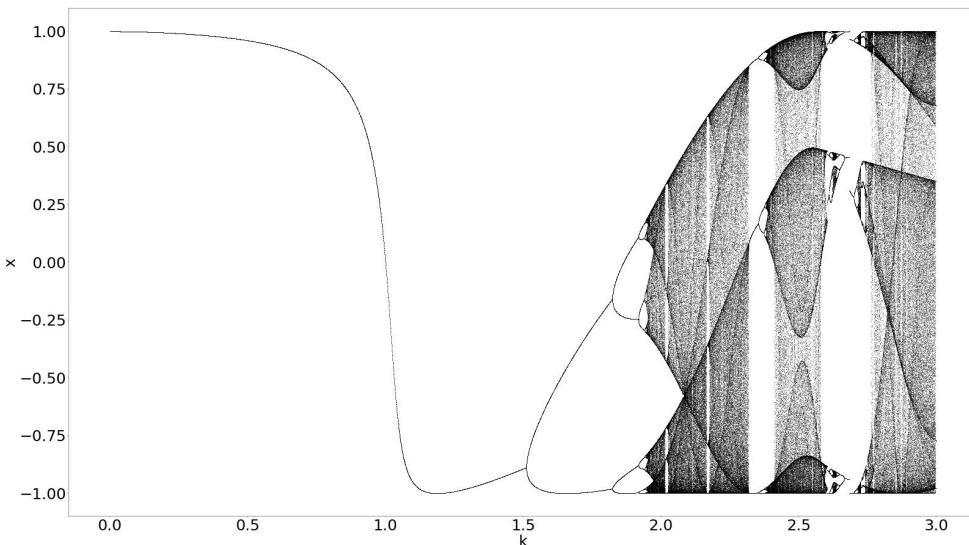
Σχήμα 4.4: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ .

## 4.2 Για $q = 0.9$

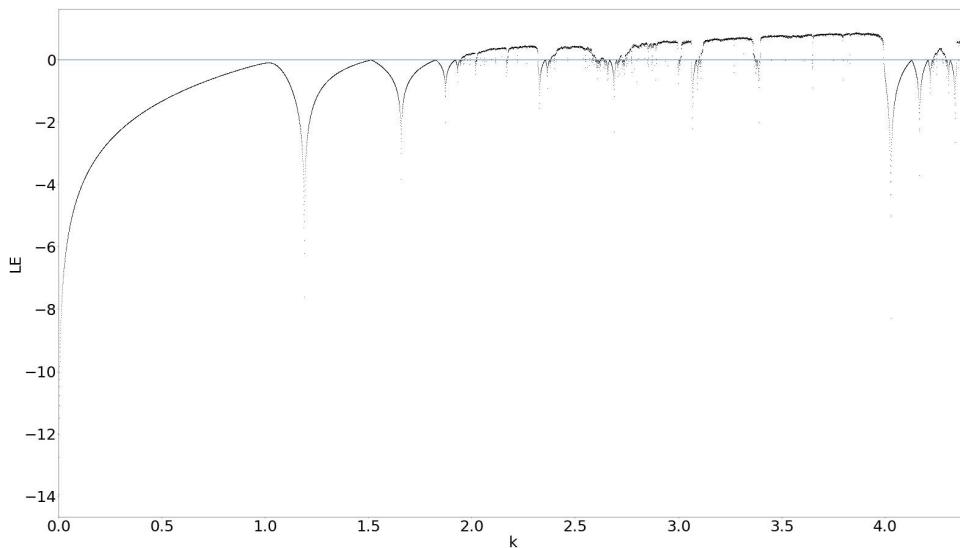
Στο Σχ. 4.5 παρατίθεται τα διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος (4.2), ως προς την παράμετρο  $k$ , για  $q = 0.9$ . Στον Πίνακα 4.2 φαίνεται η πορεία του συστήματος και για ποιες τιμές της παραμέτρου  $k$  το σύστημα εμφανίζει περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 4.5. Επίσης παρατηρείται συνοριακή κρίση ελκυστών για διάφορες τιμές του  $k$  ( $1.96, 2.015, 2.16, 2.319, 2.603, 2.638, 2.725, 2.773$ ), όπως και το φαινόμενο της υστέρησης το οποίο διακρίνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης 4.5 συγκεκριμένα στην περιοχή οπου διακόπτεται η περίοδος - 3. Οι αντίστοιχες τιμές του  $k$  για αυτά τα σημεία του διαγράμματος παρατίθενται στον Πίνακα 4.2, όπως και τα αντίστοιχα των διαγραμμάτων της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$  στο Σχ. 4.8. Από τα παραγόμενα σχήματα προκύπτει αριθμός σημείων αντίστοιχος με την περίοδο του συστήματος.

Επιπλέον παρατηρούμε στο Σχ. 4.7, το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας. Συγκεκριμένα εμφανίζεται μία χαοτική φυσαλίδα (το σύστημα εισέρχεται στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου και στη συνέχεια εξέρχεται από αυτό με υποδιπλασιασμό της περιόδου.) για  $2.603 < k < 2.647$ . Ακόμη στο διάγραμμα του Σχ. 4.7 το φαινόμενο εμφανίζεται άλλη μία φορά για  $2.725 < k < 2.732$ , όπου παρατηρείται ότι για  $k = 2.727$  εμφανίζεται ένας διπλασιασμός (περίοδος - 18) ο οποίος καταστρέφεται για  $k = 2.732$ . Επίσης παρατηρούμε ότι μεταξύ των δύο βασικών ορθών διπλασιασμών εμφανίζεται ένας ανάστροφος για  $2.638 < k < 2.71$ .

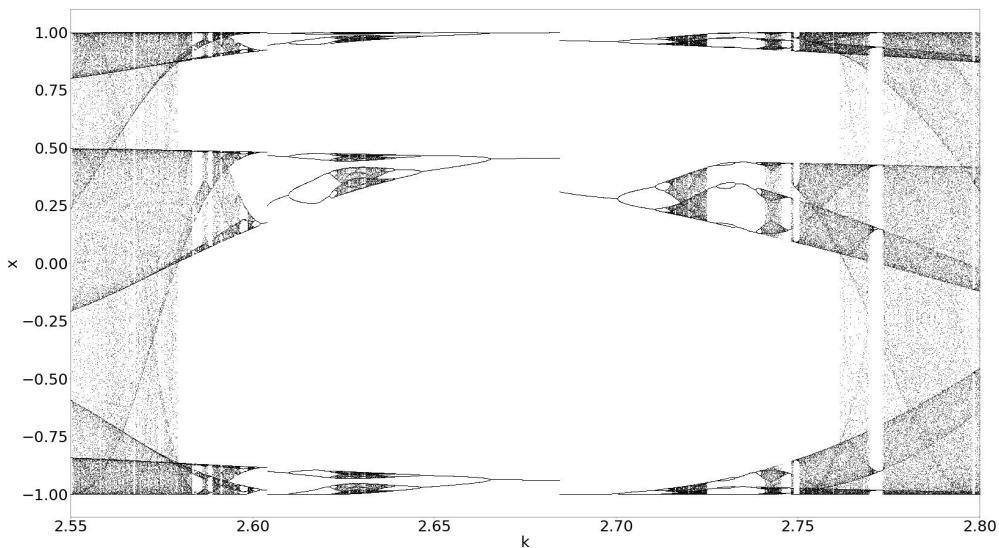
Τέλος, στο Σχ. 4.6 παρατίθεται το διάγραμμα των εκθετών Lyapunov για τιμές του  $k$  στο ίδιο διάστημα τιμών  $[0, 3]$ . Οι τιμές του Πίνακα 4.2 που έχουν περιοδική συμπεριφορά αντιστοιχούν σε τιμές του διαγράμματος του Σχ. 4.3, όπου ο εκθέτης Lyapunov είναι συνεχώς αρνητικός, γεγονός που επιβεβαιώνει την συμπεριφορά του. Ενώ για τις υπόλοιπες τιμές ο θετικός εκθέτης Lyapunov υποστηρίζει τη χαοτική του συμπεριφορά, όπως γίνεται φανερό και από το διάγραμμα διακλάδωσης.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα διακλάδωσης, για  $q = 0.9$ .



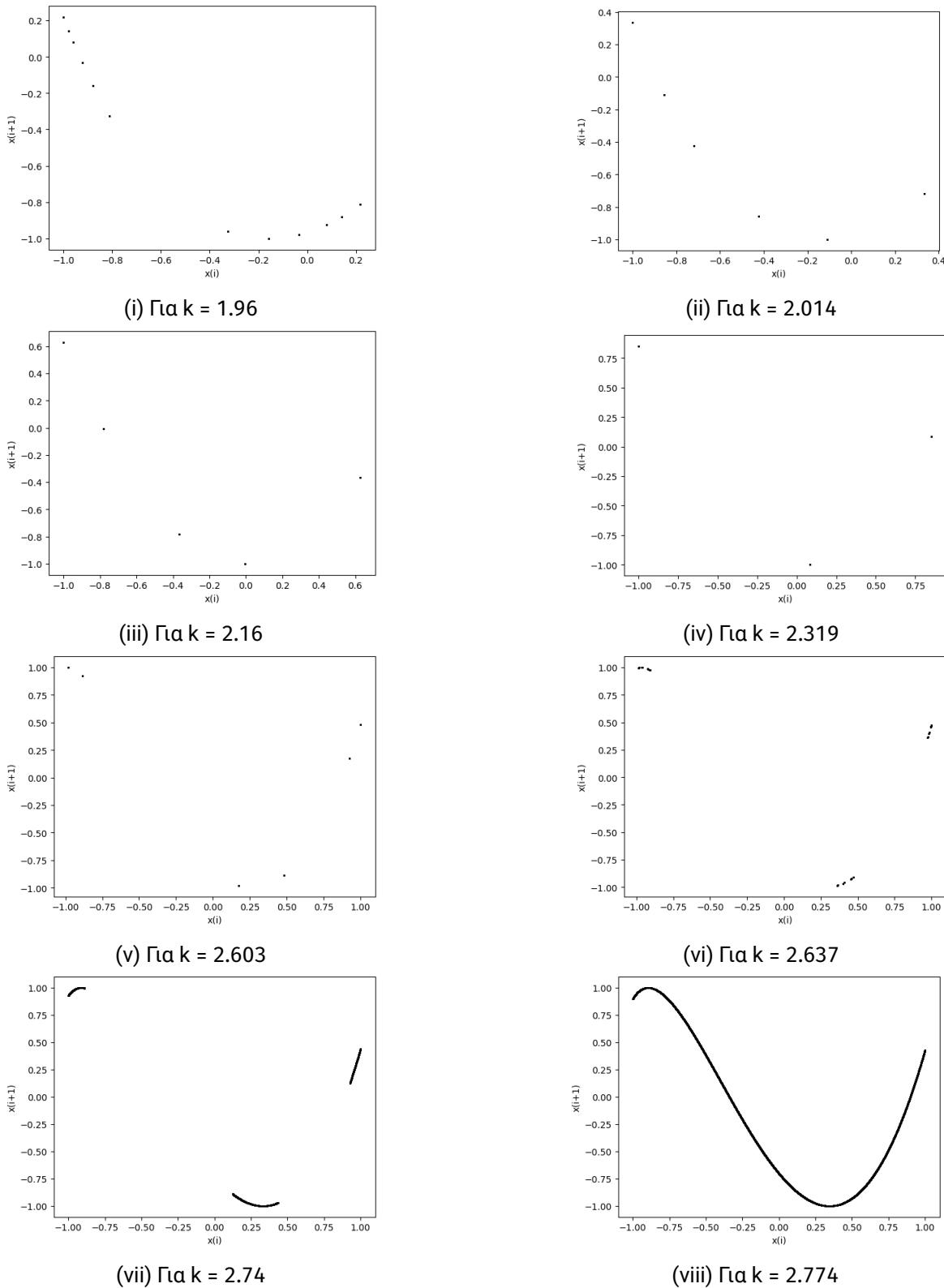
Σχήμα 4.6: Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο  $k$ , για  $q = 0.9$ .



Σχήμα 4.7: Διάγραμμα διακλάδωσης για  $2.55 < k < 2.8$ .

Πίνακας 4.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του  $k$ , για  $q = 0.9$

Παράμετρος $k$	Συμπεριφορά
1.3	Περίοδος - 1
1.5	Περίοδος - 2
1.8	Περίοδος - 4
1.91	Περίοδος - 8
1.94	Περίοδος - 16
1.95	Χάος
1.96	Περίοδος - 12
1.97	Χάος
2.014	Περίοδος - 6
2.019	Περίοδος - 12
2.02	Χάος
2.164	Περίοδος - 5
2.169	Περίοδος - 10
2.17	Χάος
2.319	Περίοδος - 3
2.355	Περίοδος - 6
2.375	Περίοδος - 12
2.38	Χάος
2.603	Περίοδος - 6
2.61	Περίοδος - 12
2.621	Περίοδος - 24
2.623	Χάος
2.638	Περίοδος - 24
2.639	Περίοδος - 12
2.647	Περίοδος - 6
2.66	Περίοδος - 3
2.7	Περίοδος - 6
2.71	Περίοδος - 12
2.715	Χάος
2.725	Περίοδος - 9
2.727	Περίοδος - 18
2.732	Περίοδος - 9
2.738	Περίοδος - 24
2.74	Χάος
2.773	Περίοδος - 6
2.774	Χάος



Σχήμα 4.8: Διαγράμματα της τιμής  $x_i$  σε συνάρτηση με την τιμή  $x_{i+1}$ .

### 4.3 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία παραλλαγή του Χάρτη Chebysev, της οποίας βασικό χαρακτηριστικό είναι η χαοτική συμπεριφορά που διακρίνεται σε όλες τις περιπτώσεις που ελέχθηκαν για την παράμετρο  $q$ , όπως και για τα επι μερούς φαινόμενα που οδηγούν σε αυτήν.

Ειδικότερα, το συνηθέστερο φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις είναι αυτό της μετάβασης στο χάος μέσω του διπλασιασμού της περιόδου, ξεκινώντας από διάστημα περιόδου-1. Για κάποιες παραμέτρους  $q$  εμφανίστηκε η ανάστροφη πορεία του συστήματος κατά την έξοδο του από την χαοτική περιοχή, παρουσιάζοντας έτσι το φαινόμενο της αντιμονοτονικότητας (χαοτική φυσαλίδα).

Επίσης παρατηρήθηκε το φαινόμενο της υστέρησης δηλαδή "έσπαγε" η περιοδική συμπεριφορά, καθώς και το φαινόμενο των κρίσεων είτε εσωτερικών, είτε συνοριακών.



## Κεφάλαιο 5

# Έλεγχος της Κίνησης Αυτόνομου Ρομποτικού Οχήματος με χρήση Διακριτού Χάρτη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μία εισαγωγή στη χρήση διακριτών συστημάτων που εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά, στη μελέτη της κίνησης αυτόνομων ρομποτικών συστημάτων και στην εκτίμηση της αποτελεσματικότητας τους. Ένα σημαντικό θέμα στην έρευνα σχεδιασμού της διαδρομής αυτόνομων ρομποτικών οχημάτων είναι η γρήγορη και αποτελεσματική κάλυψη μιας δεδομένης επιφάνειας εργασίας. Για το σκοπό αυτό, στο παρόν κεφάλαιο μελετήθηκε η κίνηση του αυτόνομου ρομποτικού συστήματος και η κάλυψη μιας συγκεκριμένης περιοχής του χώρου, μέσω της εφαρμογής του διακριτού συστήματος που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 2, συναρτήσει διαφόρων παραμέτρων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτών αποτελούν οι αρχικές συνθήκες του διακριτού συστήματος που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 2, η αρχική θέση του ρομπότ, ο αριθμός των βημάτων που εκτελεί και η παράμετρος διακριτοποίησης  $h$ . Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της συμπεριφοράς του ρομποτικού συστήματος, θα προηγηθεί μια σύντομη μαθηματική περιγραφή του.

### 5.1 Μαθηματική Περιγραφή

Το ρομποτικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} X' = v(t) \cos \theta(t) \\ Y' = v(t) \sin \theta(t) \\ \theta' = w(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

όπου  $X, Y$  είναι η οριζόντια και η κάθετη συντεταγμένη αντίστοιχα,  $\theta$  η γωνία προσανατολισμού,  $v$  η γραμμική ταχύτητα και  $w$  η γωνιακή ταχύτητα. Οι τελευταίες δίνονται από τους εξής τύπους:

$$v(t) = \frac{v_r(t) + v_l(t)}{2}, w(t) = \frac{w_r(t) - w_l(t)}{L} \quad (5.2)$$

όπου  $L$  η απόσταση μεταξύ των δύο ροδών του ρομποτικού οχήματος και  $v_r, v_l$  η γωνιακή ταχύτητα της δεξιάς και αριστερής ρόδας αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, διακριτοποιούμε το σύστημα (5.1) των διαφορικών εξισώσεων και προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων [6]:

$$\begin{cases} X_i = X_{i-1} + hv_{i-1} \cos \theta_{i-1} \\ Y_i = Y_{i-1} + hv_{i-1} \sin \theta_{i-1} \\ \theta_i = \theta_{i-1} + hw_{i-1} \end{cases} \quad (5.3)$$

όπου  $h$  το βήμα διακριτοποίησης. Επομένως, κάθε βήμα στην κίνηση του ρομπότ προκύπτει από την επιλογή τιμών  $x, y$  από τους παρακάτω χαοτικούς χάρτες:

$$\begin{cases} x_i = k * (1 + x_{i-1})^2 * (2 - x_{i-1}) \\ y_i = k * (1 + y_{i-1})^2 * (2 - y_{i-1}) \end{cases} \quad (5.4)$$

με αποτέλεσμα η διαδρομή του ρομπότ να καθορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} X_i = X_{i-1} + h \frac{x_{i-1} + y_{i-1}}{2} \cos \theta_{i-1} \\ Y_i = Y_{i-1} + h \frac{x_{i-1} + y_{i-1}}{2} \sin \theta_{i-1} \\ \theta_i = \theta_{i-1} + h \frac{x_{i-1} + y_{i-1}}{L} \end{cases} \quad (5.5)$$

## 5.2 Συμπεριφορά για Μεταβλητά $q, k$

Για τη μελέτη της διαδρομής που ακολουθεί το αυτόνομο ρομποτικό όχημα, σύμφωνα με την εξίσωση 5.5, χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν στο Κεφάλαιο 2 για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $q$ .

Ειδικότερα, στη μελέτη που πραγματοποιήθηκε για την παράμετρο  $q$  επιλέχθηκαν τιμές για τις οποίες εμφανίζει ενδιαφέρουσα χαοτική συμπεριφορά. Επιπλέον, η προσομοίωση της κίνησης και για τις δύο συμπεριφορές ( μεταβλητό  $q$  ή μεταβλητό  $k$  ) πραγματοποιήθηκε για  $10^5$  βήματα, ενώ το ρομπότ ξεκινούσε από τις συντεταγμένες  $X(0) = 0, Y(0) = 1$ , με αρχικές συνθήκες για το χαοτικό σύστημα  $x(0) = 0, y(0) = 0.1$  και με παράμετρο διακριτοποίησης  $h = 0.2$ .

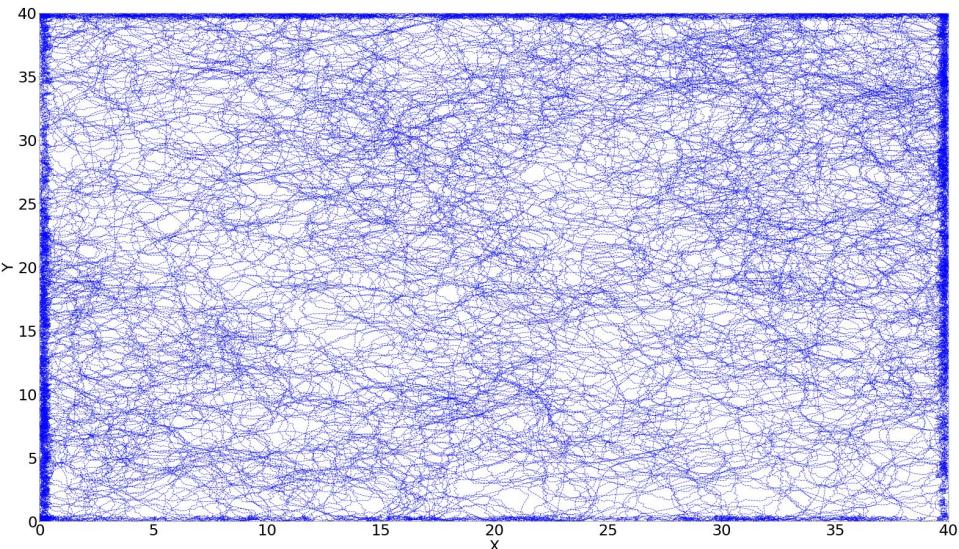
Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε με την λογική, να παρατηρήσουμε πως επηρεάζεται η κίνηση του ρομπότ στον χώρο αλλά και το ποσοστό που καλύπτει κάθε φορά ανάλογα με το ποιά παράμετρο μεταβάλλουμε. Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής που ακολουθεί το ρομπότ σε εναν χώρο  $40 * 40$  και υπολογίστηκε το ποσοστό καλυψιμότητας αυτού του τετραγώνου.

### 5.2.1 Για $q = -1.6$ , $q = -1.9$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού οχήματος, όταν μεταβάλλεται η παράμετρος  $q$  και η παράμετρος  $k$  παραμένει σταθερή.

Στο Σχ. 5.1 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για  $k = 0.9$ , και  $q = -1.6$ . Για την παράμετρο  $k$  επιλέγονται τιμές για τις οποίες το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από χαοτική συμπεριφορά.

Για την παραπάνω κίνηση υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 95.78%. Το συγκεκριμένο ποσοστό είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό καθώς το υπό μελέτη ρομπότ θα καλύψει την επιφάνεια που του ζητήθηκε, κάτι που μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί και από το Σχ. 5.1.



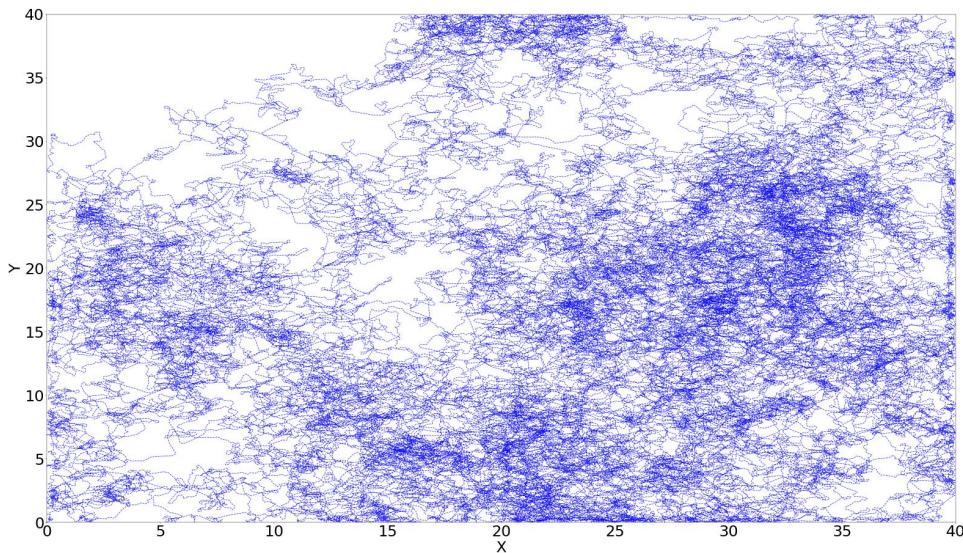
Σχήμα 5.1: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για  $k = 0.9$  και  $q = -1.6$ .

Στο Σχ. 5.2 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για  $k = 0.9$ , και  $q = -1.9$ . Για την επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου  $q$  το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται επίσης από χαοτική συμπεριφορά.

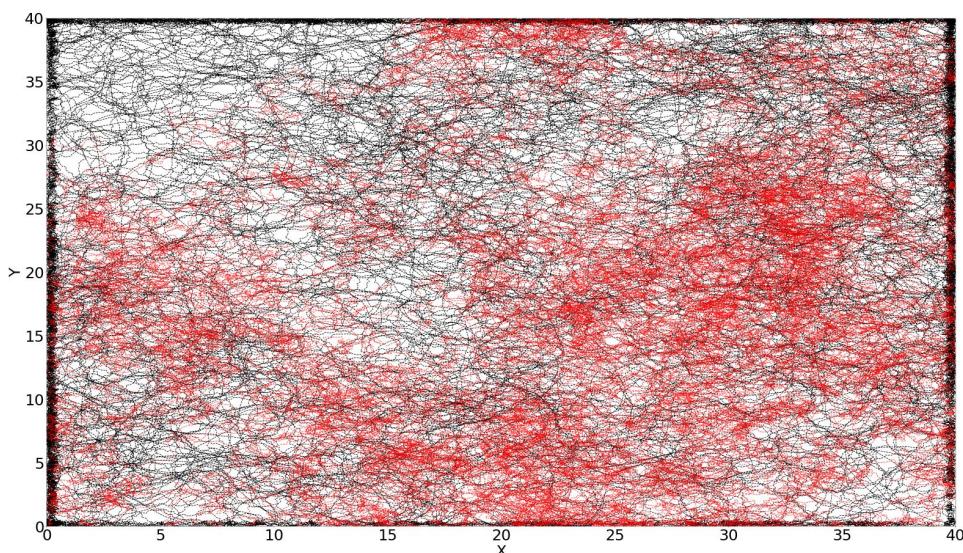
Το ποσοστό κάλυψης του χώρου για  $q = -1.9$  και για δεδομένες τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι 79.22%. Το ποσοστό αυτό είναι σχέτικα ικανοποιητικό, διότι το ρομπότ θα μπορέσει να καλύψει ένα μεγάλο μέρος της επιφάνειας στην οποία του ζητήθηκε να κινηθεί, κάτι που παρατηρούμε στο Σχ. 5.2.

Στο Σχ. 5.3 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για  $k = 0.9$ , και  $q = -1.6$  (μαύρο χρώμα)  $q = -1.9$  (κόκκινο χρώμα).

Από το Σχ. 5.3 είναι δυνατή η σύγκριση των δύο κινήσεων και εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ρομπότ κινείται πιο αποτελεσματικά για  $q = -1.6$ , ενώ και για  $q = -1.9$  καλύπτει αρκετά καλά την επιφάνεια που του δόθηκε.



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για  $k = 0.9$  και  $q = -1.9$ .



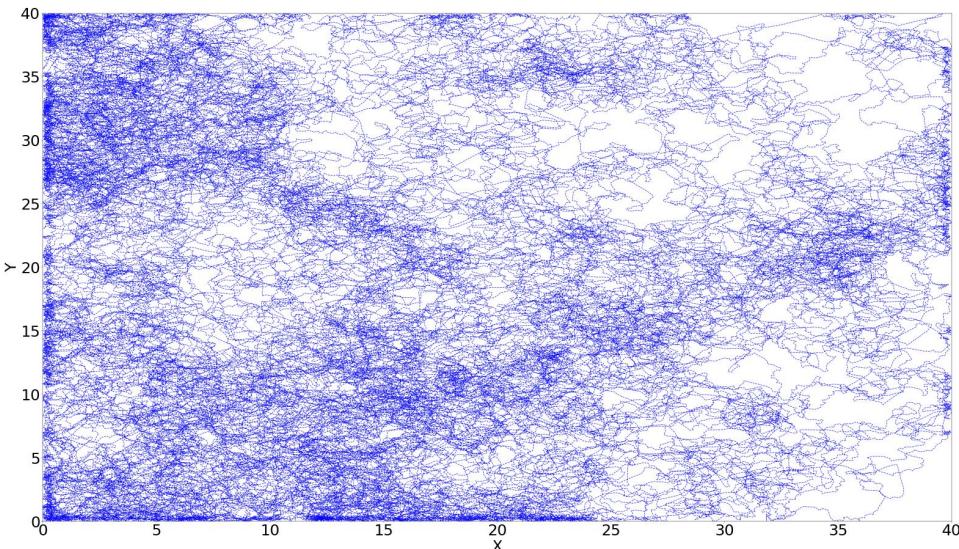
Σχήμα 5.3: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $k = 0.9$ ,  $q = -1.6$  (μαύρο χρώμα),  $q = -1.9$  (κόκκινο χρώμα).

### 5.2.2 Για $q = -1.4$ , $q = -1.6$

Στη παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού οχήματος, όταν μεταβάλλεται η παράμετρος  $q$  και η παράμετρος  $k$  παραμένει σταθερή.

Στο Σχ. 5.4 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για  $k = 0.79$ , και  $q = -1.4$ . Για την επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου  $q$  το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται επίσης από χαοτική συμπεριφορά.

Το ποσοστό κάλυψης του χώρου για  $q = -1.4$  και για δεδομένες τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι 87.04%. Το ποσοστό αυτό είναι σχέτικα ικανοποιητικό, διότι το ρομπότ θα μπορέσει να καλύψει ένα μεγάλο μέρος της επιφάνειας στην οποία του ζητήθηκε να κινηθεί, κάτι που παρατηρούμε στο Σχ. 5.4.



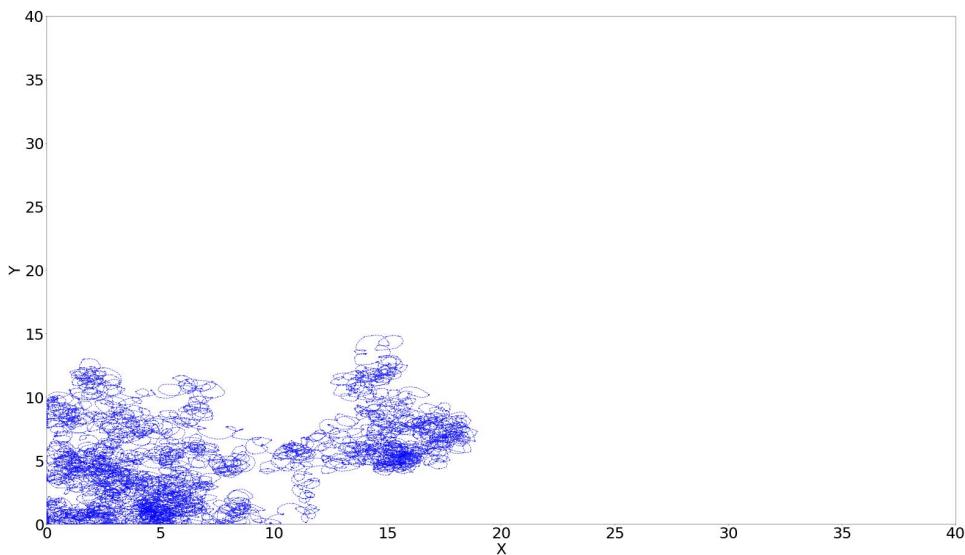
Σχήμα 5.4: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για  $k = 0.79$  και  $q = -1.4$ .

Στο Σχ. 5.5 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για  $k = 0.79$ , και  $q = -1.6$ . Για την παράμετρο διακλάδωσης  $k$  επιλέγονται τιμές για τις οποίες το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από χαοτική συμπεριφορά.

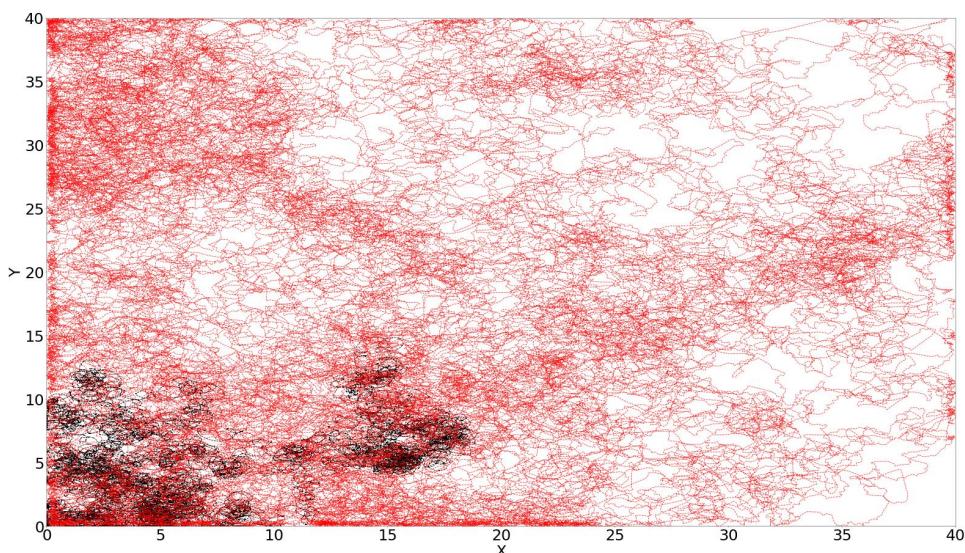
Για την παραπάνω κίνηση υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 9.6%. Το ποσοστό αυτό επιβεβαιώνει το διάγραμμα του Σχ. 5.5, δηλαδή το ρομπότ στη συγκεκριμένη περίπτωση καλύπτει ένα πολύ μικρό μέρος της επιφάνειας που του δόθηκε.

Στο Σχ. 5.6 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για  $k = 0.79$ , και  $q = -1.6$  (μαύρο χρώμα),  $q = -1.4$  (κόκκινο χρώμα).

Από το Σχ. 5.6 είναι δυνατή η σύγκριση των δύο κινήσεων και εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ρομπότ κινείται πιο αποτελεσματικά για  $q = -1.4$ .



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για  $k = 0.79$  και  $q = -1.6$ .



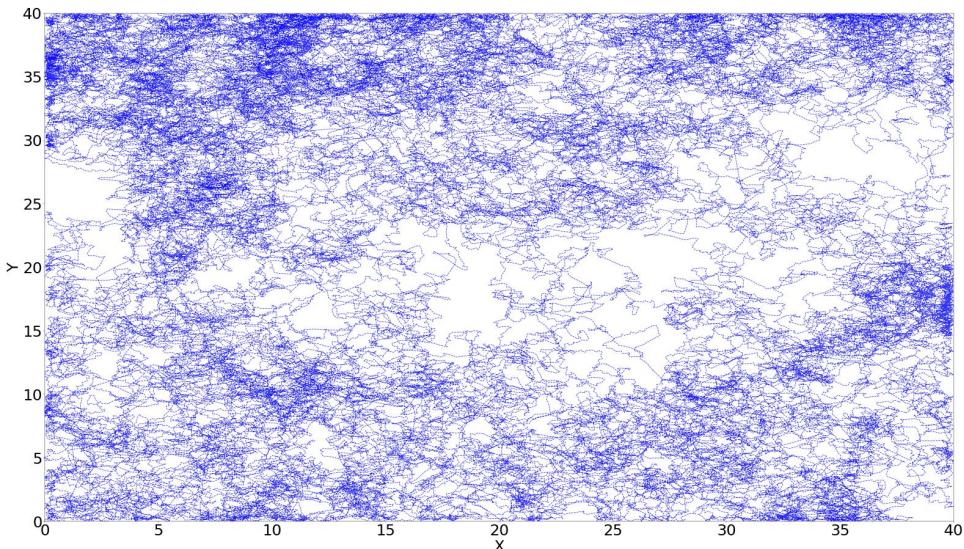
Σχήμα 5.6: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $k = 0.79$ ,  $q = -1.6$  (μαύρο χρώμα),  $q = -1.4$  (κόκκινο χρώμα).

### 5.2.3 Για $q = -1.9$ , $q = -2.1$

Στη παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού οχήματος, όταν μεταβάλλεται η παράμετρος  $q$  και η παράμετρος  $k$  παραμένει σταθερή.

Στο Σχ. 5.7 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του οχήματος, για  $k = 0.68$ , και  $q = -1.9$ . Για την επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου  $q$  το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται επίσης από χαοτική συμπεριφορά.

Το ποσοστό κάλυψης του χώρου για  $q = -1.9$  και για δεδομένες τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι 85.78%. Το ποσοστό αυτό είναι σχέτικα ικανοποιητικό, διότι το ρομπότ θα μπορέσει να καλύψει ένα μεγάλο μέρος της επιφάνειας στην οποία του ζητήθηκε να κινηθεί, κάτι που παρατηρούμε στο Σχ. 5.7.



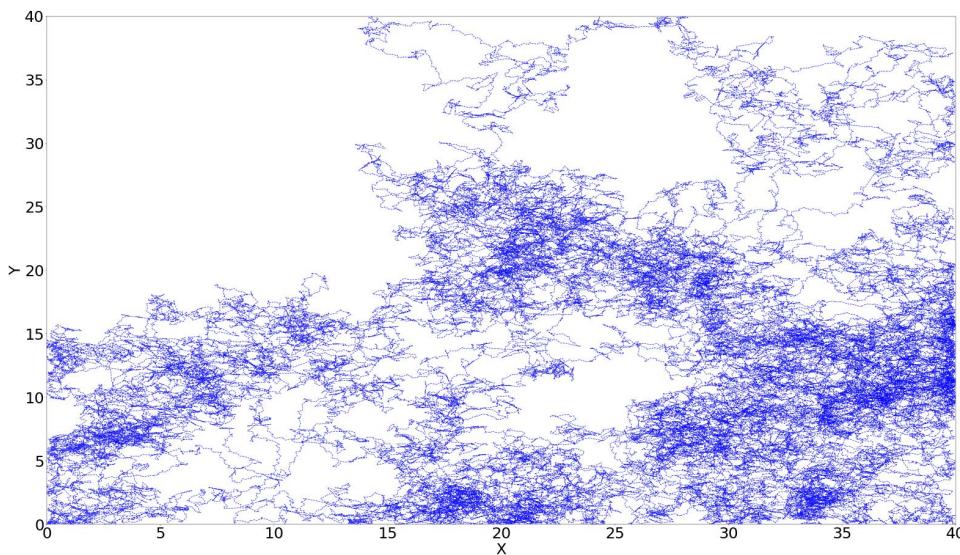
Σχήμα 5.7: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για  $k = 0.68$  και  $q = -1.9$ .

Στο Σχ. 5.8 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για  $k = 0.68$ , και  $q = -2.1$ . Για την παράμετρο διακλάδωσης  $k$  επιλέγονται τιμές για τις οποίες το σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από χαοτική συμπεριφορά.

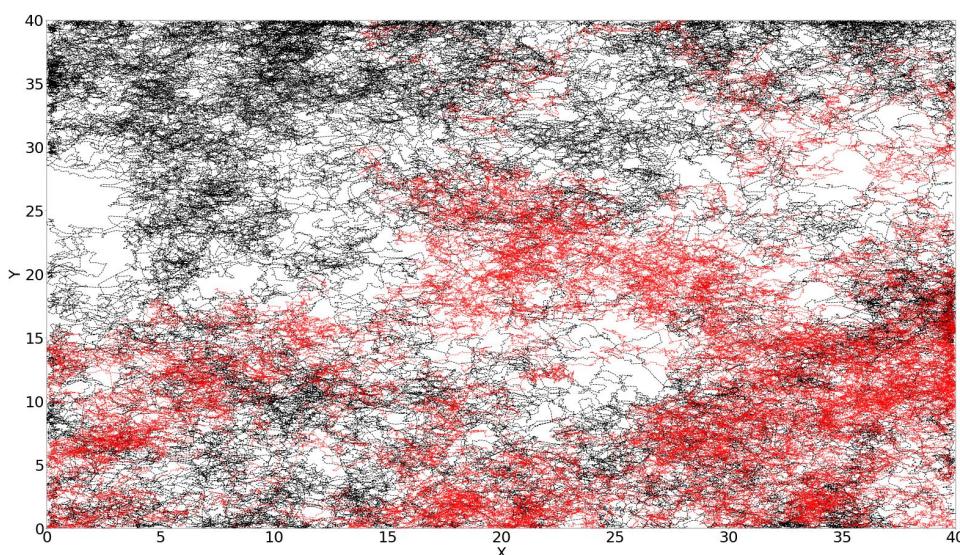
Για την παραπάνω κίνηση υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 54.121%. Το ποσοστό αυτό είναι μας δείχνει ότι το ρομπότ καλύπτει λίγο παραπάνω από το μισό της επιφάνειας που του ζητήθηκε να καλύψει, κάτι που παρατηρούμε στο Σχ. 5.8.

Στο Σχ. 5.9 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του ρομποτικού οχήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για  $k = 0.68$ , και  $q = -1.9$  (μαύρο χρώμα),  $q = -2.1$  (κόκκινο χρώμα).

Από το Σχ. 5.9 είναι δυνατή η σύγκριση των δύο κινήσεων και εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ρομπότ κινείται πιο αποτελεσματικά για  $q = -1.9$ .



Σχήμα 5.8: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $k = 0.68$  και  $q = -2.1$ .



Σχήμα 5.9: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $k = 0.68$ ,  $q = -1.9$  (μαύρο χρώμα),  $q = -2.1$  (κόκκινο χρώμα).

#### 5.2.4 Για $k = 0.68$ , $k = 0.69$ , $k = 0.815$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού οχήματος, όταν μεταβάλλεται η παράμετρος  $k$  και η παράμετρος  $q$  παραμένει σταθερή. Θα αναλυθεί η περίπτωση όπου το  $q = -1.6$  ενώ πέρα από τα  $k = 0.68$ ,  $k = 0.69$ ,  $k = 0.815$  θα συγκρίνουμε και τις άλλες δύο τιμές του  $k$  οι οποίες προέκυψαν στις προηγούμενες παραγράφους.

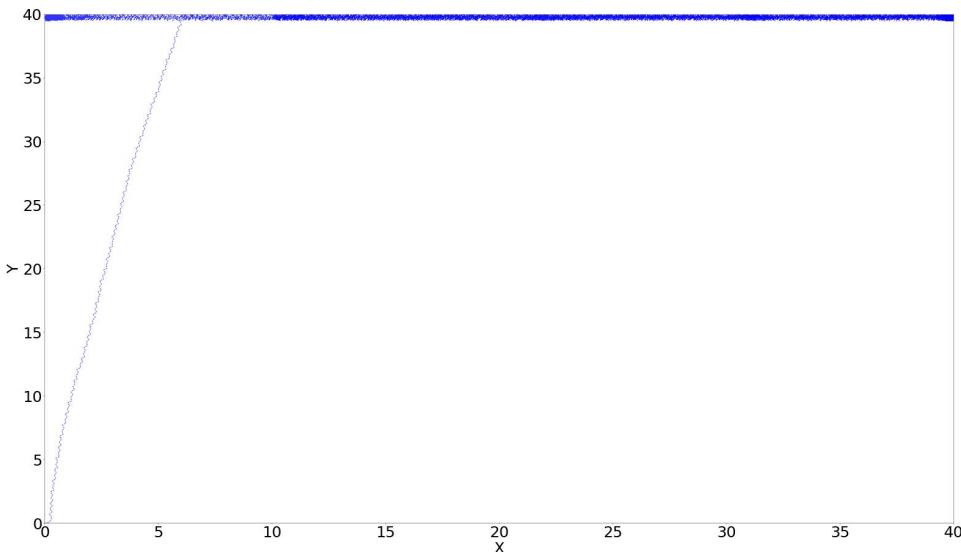
Στο Σχ. 5.10 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για,  $q = -1.6$  και  $k = 0.68$ . Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 2.46%.

Στο Σχ. 5.11 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για,  $q = -1.6$  και  $k = 0.69$ . Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 6.66%.

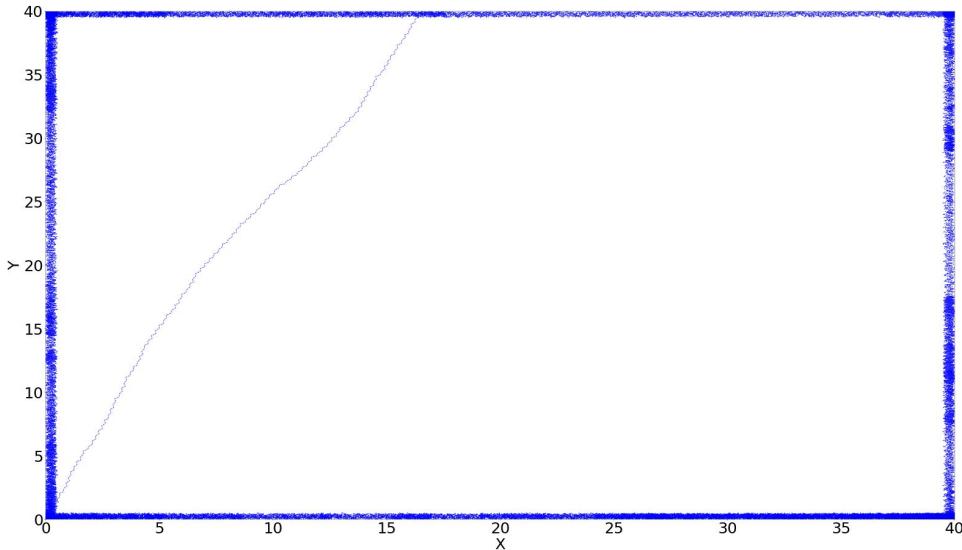
Στο Σχ. 5.12 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για,  $q = -1.6$  και  $k = 0.815$ . Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 95.7%.

Σε σύγκριση με τα Σχ. 5.1 και 5.5, οι παράμετροι του  $k$  για  $q = -1.6$  που παρουσιάζονται στα Σχ. 5.10 και 5.11 έχουν μικρότερη καλυψιμότητα, ειδικά σε σχέση με το Σχ. 5.1, όπου το ποσοστό αγγίζει το 95.78%.

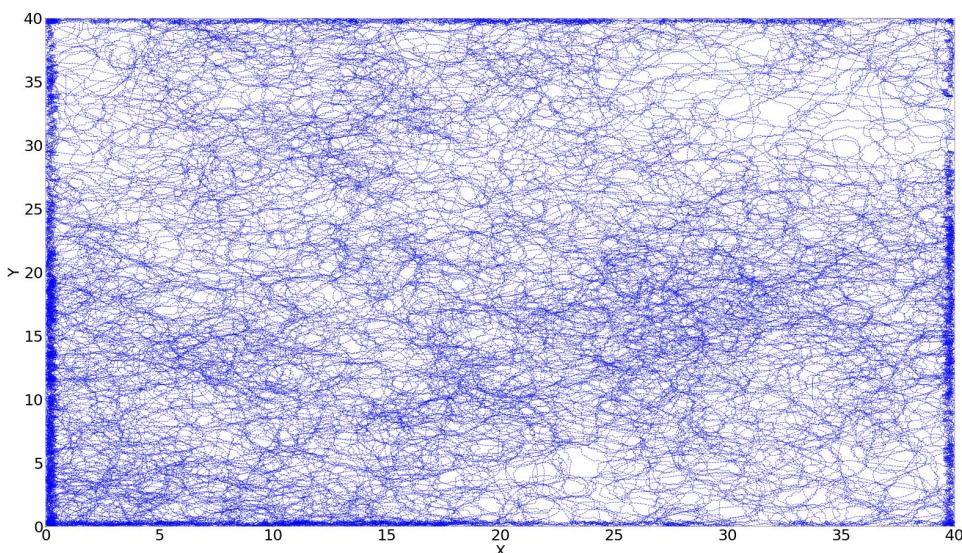
Από την άλλη, η παράμετρος του  $k$  για  $q = -1.6$  του Σχ. 5.12 ξεπερνάει όλες τις προηγούμενες παραμέτρους του  $k$  σε καλυψιμότητα, πέρα από εκείνη του Σχ. 5.1, όπου το ποσοστό είναι παρόμοιο.



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.6$  και  $k = 0.68$ .



Σχήμα 5.11: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.6$  και  $k = 0.69$ .



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.6$  και  $k = 0.815$ .

### 5.2.5 Για $k = 0.74$ , $k = 0.751$ , $k = 0.76$

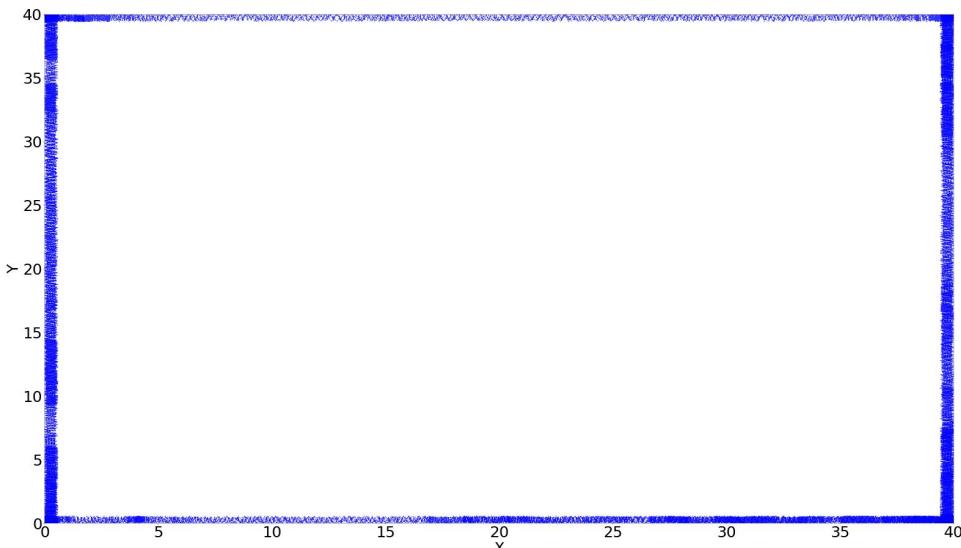
Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο τρόπος συμπεριφοράς του ρομποτικού οχήματος, όταν μεταβάλλεται η παράμετρος  $k$  και η παράμετρος  $q$  παραμένει σταθερή. Θα αναλυθεί η περίπτωση όπου το  $q = -1.4$  ενώ πέρα από τα  $k = 0.74$ ,  $k = 0.751$ ,  $k = 0.76$  θα συγκρίνουμε και την άλλη τιμή του  $k$  που προέκυψε στην παράγραφο 5.2.2.

Στο Σχ. 5.13 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για,  $q = -1.4$  και  $k = 0.74$ . Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 7.23%.

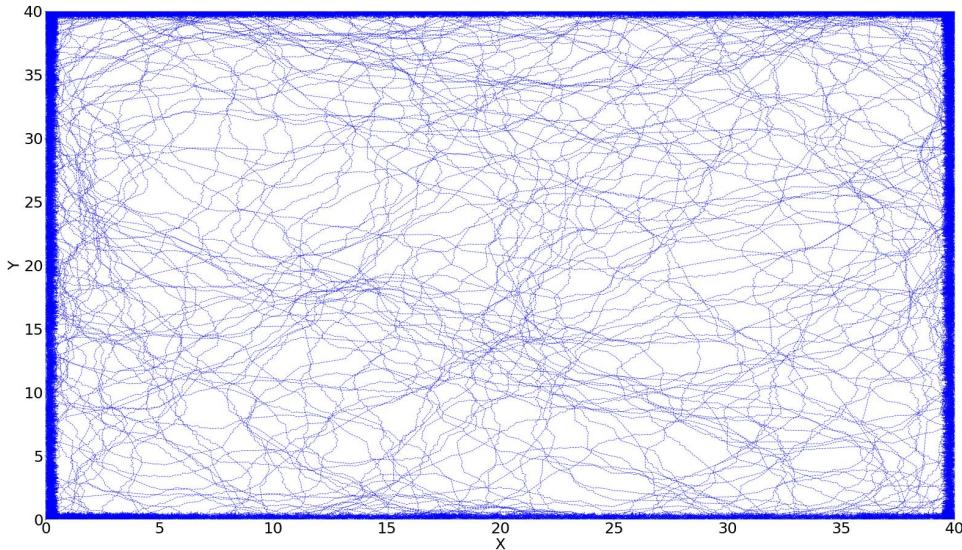
Στο Σχ. 5.14 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για,  $q = -1.4$  και  $k = 0.751$ . Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 69.95%.

Στο Σχ. 5.15 παρατίθεται το διάγραμμα κίνησης του συστήματος, για,  $q = -1.4$  και  $k = 0.76$ . Το ποσοστό κάλυψης του χώρου είναι 84.7%.

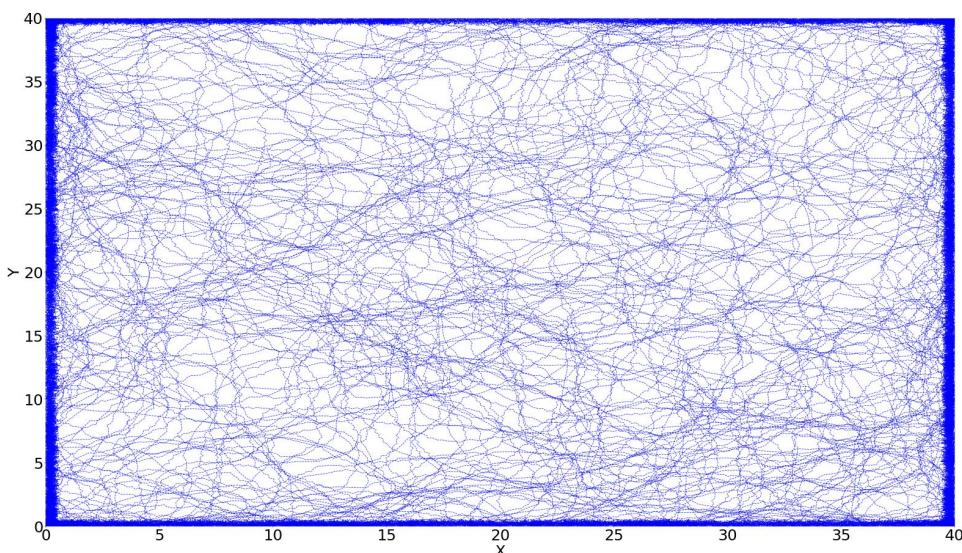
Σε σύγκριση με το Σχ. 5.4 οι παράμετροι του  $k$  για  $q = -1.4$  που παρουσιάζονται στα Σχ. 5.13, 5.14 και 5.15 έχουν μικρότερη καλυψιμότητα, ειδικά το Σχ. 5.13.



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.4$  και  $k = 0.74$ .



Σχήμα 5.14: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.4$  και  $k = 0.751$ .



Σχήμα 5.15: Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.4$  και  $k = 0.76$ .

### 5.3 Συμπεριφορά για Μεταβλητή Αρχική Θέση

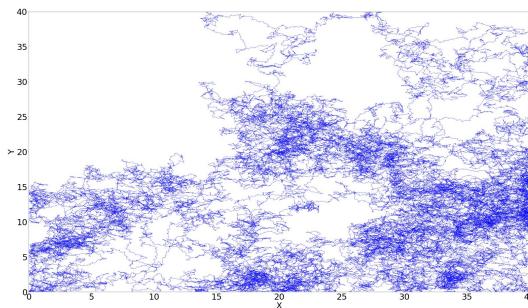
Για την απόκτηση μιας πλήρους εικόνας της συμπεριφοράς του ρομπότ απαιτείται η μελέτη της διαδρομής του υπό διαφορετικές αρχικές συντεταγμένες στο χώρο. Για αυτό τον λόγο επιλέχθηκαν τρείς τυχαίες θέσεις ( $X, Y$ ) πέρα από την θέση  $[0, 0]$  ενώ η παράμετρος διακλάδωσης  $k$  παρέμεινε σταθερή  $k = 0.68$ . Για τη συγκεκριμένη παράμετρο  $k$  χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές τιμές του  $q$  (-2.1, 1.9), οι οποίες εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά. Η προσομοίωση της κίνησης πραγματοποιήθηκε για  $10^5$  βήματα, με αρχικές συνθήκες του χαοτικού συστήματος  $x(0) = 0, y(0) = 0.1$  και παράμετρο διακριτοποίησης  $h = 0.2$ . Έτσι, όπως και προηγουμένως για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής του ρομπότ και το ποσοστό καλυψιμότητάς της.

#### 5.3.1 Για $q = -2.1$

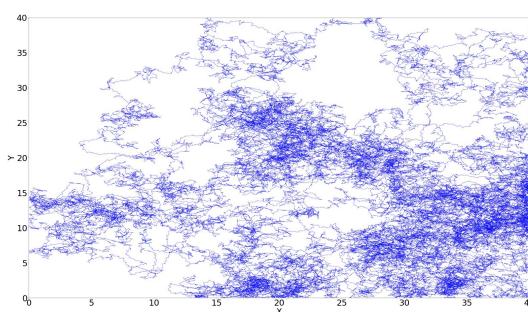
Αρχικά, ελέγχθηκε η περίπτωση το όχημα να ξεκινάει από την αρχική θέση  $(X, Y) = (0, 0)$  και υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης είναι 54.121%. Στη συνέχεια, επιλέχθηκαν τυχαίες θέσεις στο χώρο και βρέθηκε ότι για  $(X, Y) = (20, 20)$  η καλυψιμότητα ήταν 56.35%, ενώ για  $(X, Y) = (5, 20)$  η καλυψιμότητα ήταν 57.35% και για  $(X, Y) = (34, 20)$  η καλυψιμότητα ήταν 53.52%.

Συγκρίνοντας το Σχ. 5.16i με τα Σχ. 5.16iii, 5.16ii, 5.16iv παρατηρούμε μικρή αύξηση σε σχέση με την αρχική περίπτωση για τις δύο πρώτες τυχαίες συντεταγμένες  $(X, Y) = (20, 20)$ ,  $(X, Y) = (5, 20)$  και μία μικρή μείωση για τη τρίτη  $(X, Y) = (34, 20)$ . Επομένως, η αρχική θέση του ρομπότ δεν επηρεάζει δραματικά την διαδρομή που θα ακολουθήσει το ρομποτικό όχημα.

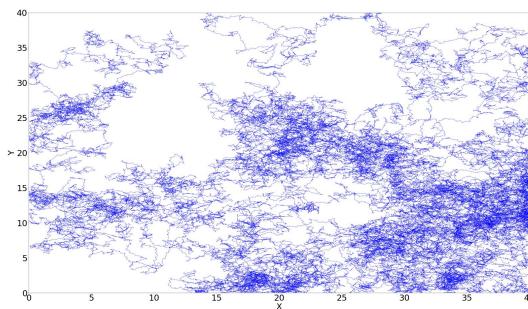
Επιπλέον μπορούμε να δούμε στο Σχ. 5.17 πώς γεμίζει στην κάθε περίπτωση το ρομπότ την επιφάνεια, όπου παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για  $q = -2.1$ ,  $k = 0.68$ ,  $(X, Y) = (0, 0)$  (μαύρο χρώμα),  $(X, Y) = (20, 20)$  (κόκκινο χρώμα),  $(X, Y) = (5, 20)$  (μπλε χρώμα),  $(X, Y) = (34, 20)$  (κίτρινο χρώμα).



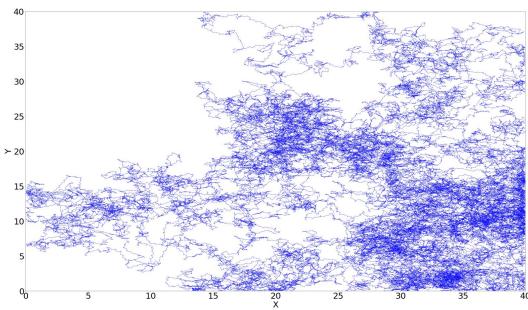
(i)  $(X, Y) = (0, 0)$ .



(ii)  $(X, Y) = (20, 20)$ .

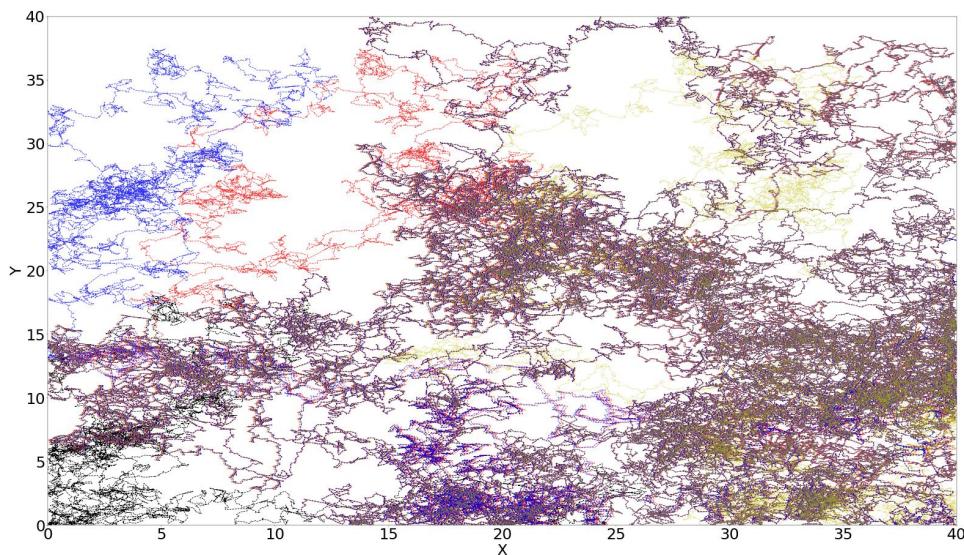


(iii)  $(X, Y) = (5, 20)$ .



(iv)  $(X, Y) = (34, 20)$ .

Σχήμα 5.16: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.9$ ,  $k = 0.68$  :



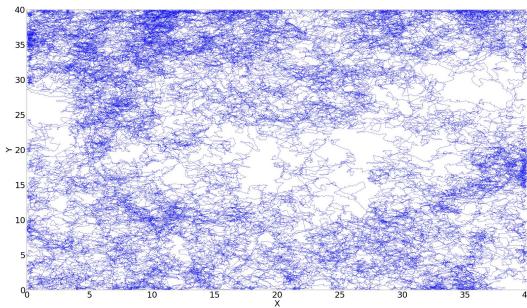
Σχήμα 5.17: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -2.1$ ,  $k = 0.68$ ,  $(X, Y) = (0, 0)$  (μαύρο χρώμα),  $(X, Y) = (20, 20)$  (κόκκινο χρώμα),  $(X, Y) = (5, 20)$  (μπλε χρώμα),  $(X, Y) = (34, 20)$  (κίτρινο χρώμα).

### 5.3.2 Για $q = -1.9$

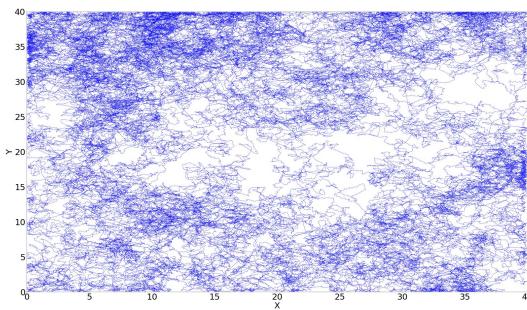
Αρχικά, ελέγχθηκε η περίπτωση το σύστημα να ξεκινάει από την αρχική θέση  $(X, Y) = (0, 0)$  και υπολογίστηκε ότι το ποσοστό κάλυψης είναι 85.78%. Στη συνέχεια, επιλέχθηκαν τυχαίες θέσεις στο χώρο και βρέθηκε ότι για  $(X, Y) = (5, 15)$  η καλυψιμότητα ήταν 85.64%, ενώ για  $(X, Y) = (8, 30)$  η καλυψιμότητα ήταν 85.1% και για  $(X, Y) = (36, 26)$  η καλυψιμότητα ήταν 79.8%.

Συγκρίνοντας το Σχ. 5.18i με τα Σχ. 5.18ii, 5.18iii, 5.18iv παρατηρούμε μικρή μείωση σε σχέση με την αρχική περίπτωση για τις δύο πρώτες τυχαίες συντεταγμένες  $(X, Y) = (5, 15)$ ,  $(X, Y) = (8, 30)$  και μία σχετικά μεγαλύτερη μείωση (γύρω στο 6%) για την τρίτη  $(X, Y) = (36, 6)$ . Επομένως, η αρχική θέση του ρομπότ δεν επηρεάζει δραματικά την διαδρομή που θα ακολουθήσει το ρομποτικό όχημα, ακόμα και στην τρίτη περίπτωση που η διαφορά είναι 6%.

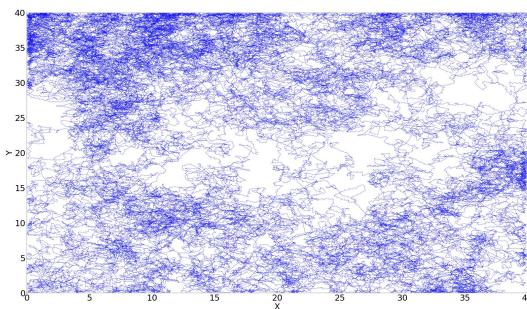
Επίσης μπορούμε να δούμε πώς γεμίζει στην κάθε περίπτωση το ρομπότ την επιφάνεια στο Σχ. 5.19 όπου παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι κινήσεις του συστήματος, για τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δηλαδή για  $(X, Y) = (0, 0)$  (μαύρο χρώμα),  $(X, Y) = (5, 15)$  (κόκκινο χρώμα),  $(X, Y) = (8, 30)$  (μπλε χρώμα),  $(X, Y) = (36, 6)$  (κίτρινο χρώμα).



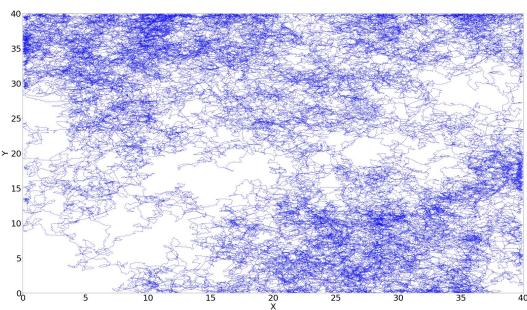
(i)  $(X, Y) = (0, 0)$ .



(ii)  $(X, Y) = (5, 15)$ .

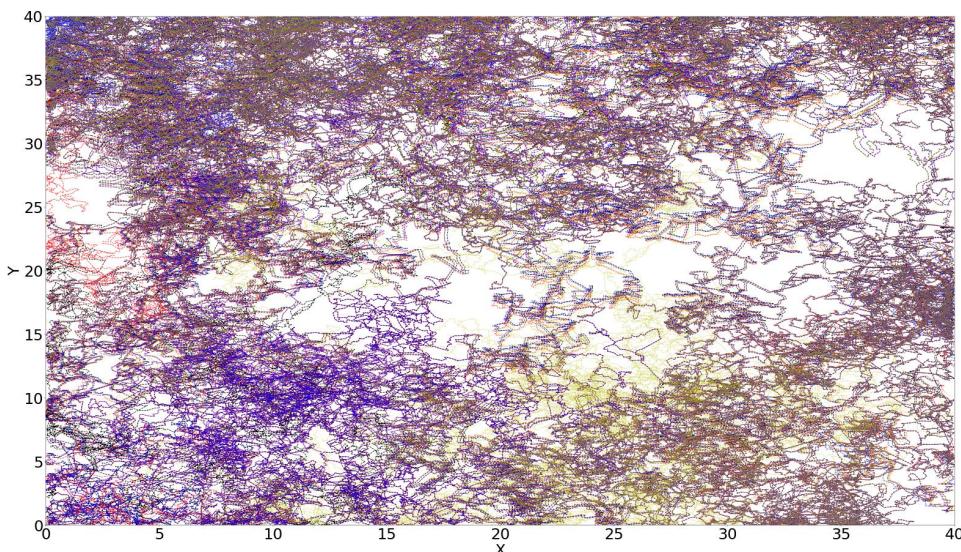


(iii)  $(X, Y) = (8, 30)$ .



(iv)  $(X, Y) = (36, 6)$ .

Σχήμα 5.18: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.9$ ,  $k = 0.68$  :



Σχήμα 5.19: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.9$ ,  $k = 0.68$ ,  $(X, Y) = (0, 0)$  (μαύρο χρώμα),  $(X, Y) = (5, 15)$  (κόκκινο χρώμα),  $(X, Y) = (8, 30)$  (μπλε χρώμα),  $(X, Y) = (36, 6)$  (κίτρινο χρώμα).

## 5.4 Συμπεριφορά για Μεταβαλητές Αρχικές Συνθήκες

Συνεχίζοντας τη μελέτη αξίζει να ερευνηθεί πως συμπεριφέρεται το ρομποτικό σύστημα όταν μεταβληθούν οι αρχικές συνθήκες του χαοτικού δυναμικού συστήματος  $x(0), y(0)$ .

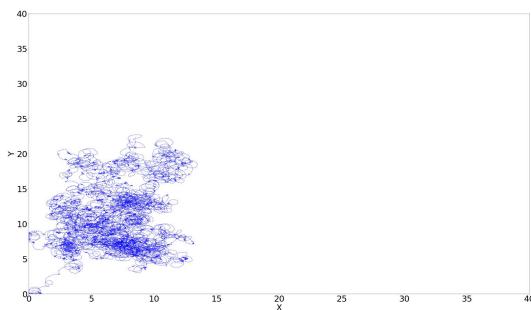
Στη συγκεκριμένη μελέτη που πραγματοποιήθηκε λάβαμε υπόψη δύο περιπτώσεις χαοτικής συμπεριφοράς. Στην πρώτη περίπτωση επιλέχθηκε η παράμετρος  $q$  να ισούται  $q = -1.4$  και η παράμετρος  $k$  να ισούται  $k = 0.75$ . Στην δεύτερη περίπτωση η παράμετρος  $q$  ισούται  $q = -1.6$  και η παράμετρος  $k$  ισούται με  $k = 0.9$ .

Επιπλέον, το ρομπότ εκτέλεσε  $10^5$  βήματα. Η αρχική θέση του ρομποτικού συστήματος που επιλέχθηκε και για τις δύο περιπτώσεις είναι  $(X, Y) = (0, 0)$ , όπως και η παράμετρος διακριτοποίησης που είναι  $h = 0.2$ . Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής του ρομπότ και υπολογίστηκε το ποσοστό κάλυψης.

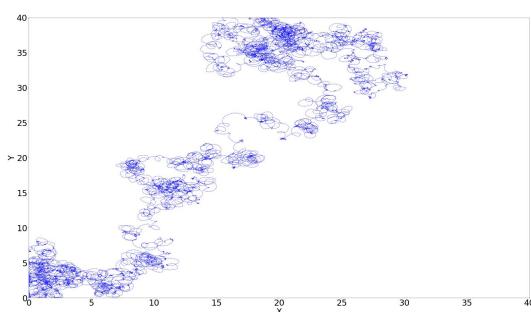
### 5.4.1 Για $q = -1.4$

Στα Σχ. 5.20i, 5.20ii, 5.20iii, 5.20iv παρατίθενται τα διαγράμματα κίνησης του συστήματος για  $q = -1.4$ ,  $k = 0.75$  και  $(x, y) = (-0.1, 0.1)$ , όπου η καλυψιμότητα είναι 10.35%,  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  όπου η καλυψιμότητα είναι 15.23%,  $(x, y) = (-0.1, 1)$  όπου η καλυψιμότητα είναι 13.3%,  $(x, y) = (0.5, 1)$  όπου η καλυψιμότητα είναι 86.5% αντίστοιχα.

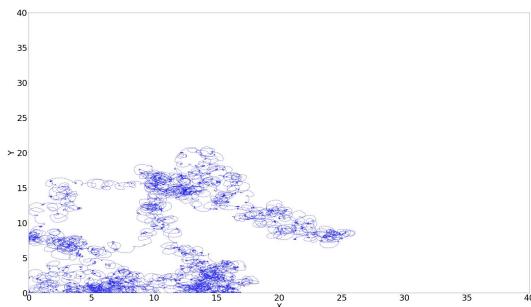
Επίσης στο Σχ. 5.21 παρατίθεται το κοινό διάγραμμα των διαφορετικών αρχικών συνθηκών με την καθεμία να συμβολίζεται με διαφορετικό χρώμα, δηλαδή για  $(x, y) = (-0.1, 0.1)$  (μαύρο χρώμα),  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  (κόκκινο χρώμα),  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  (μπλε χρώμα),  $(x, y) = (0.5, 1)$  (ροζ(magenta) χρώμα).



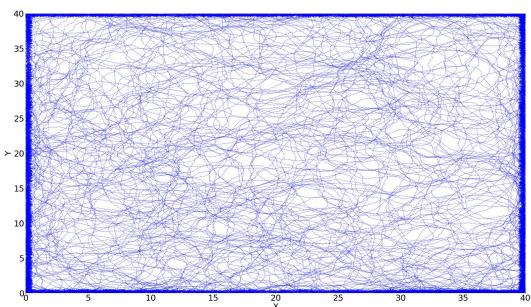
(i)  $(x, y) = (-0.1, 0.1)$ .



(ii)  $(x, y) = (0.1, 0.5)$ .

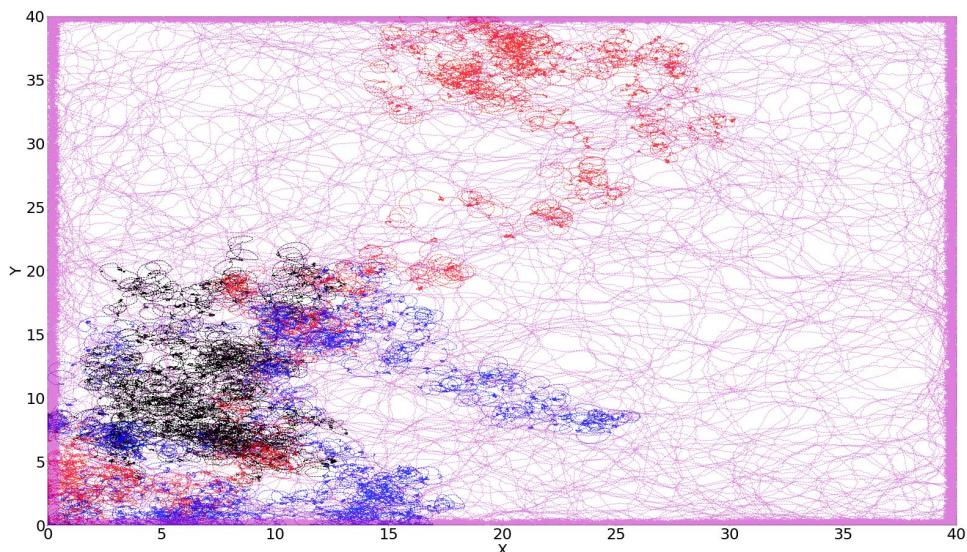


(iii)  $(x, y) = (-0.1, 1)$ .



(iv)  $(x, y) = (0.5, 1)$ .

Σχήμα 5.20: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.4$ ,  $k = 0.75$  :

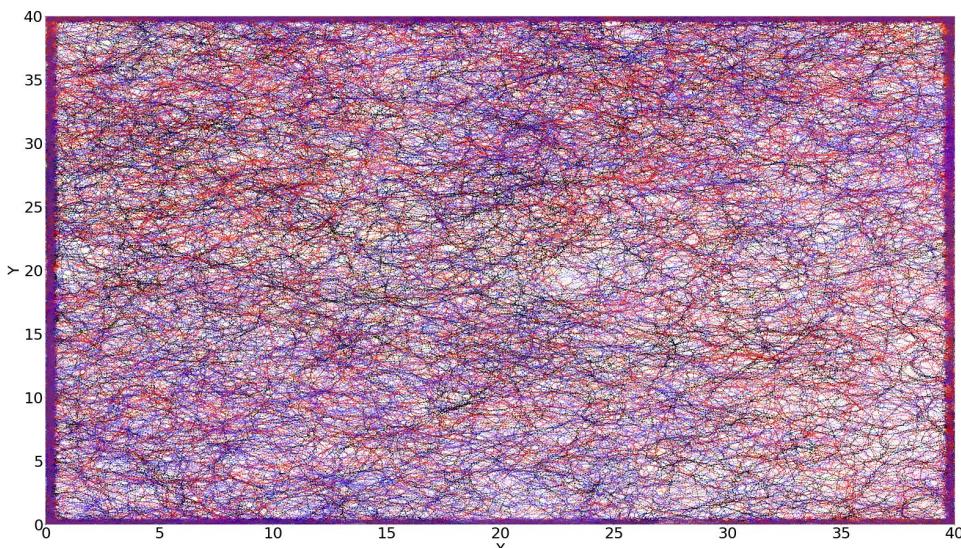


Σχήμα 5.21: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.4$ ,  $k = 0.75$ ,  $(x, y) = (-0.1, 0.1)$  (μαύρο χρώμα),  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  (κόκκινο χρώμα),  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  (μπλε χρώμα),  $(x, y) = (0.5, 1)$  (ροζ(magenta) χρώμα).

#### 5.4.2 Για $q = -1.6$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση επειδή τα ποσοστά κάλυψης για κάθε αρχική που επιλέχθηκε ήταν πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή για  $q = -1.6$ ,  $k = 0.9$  και  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  το ποσοστό είναι 96.1%,  $(x, y) = (-0.1, 0.5)$  το ποσοστό είναι 95.6%, για  $(x, y) = (-0.1, 2)$  το ποσοστό είναι 94.4%, για  $(x, y) = (0.5, 1.5)$  το ποσοστό είναι 94.2% και για  $(x, y) = (0.8, 1.2)$  το ποσοστό είναι 95.9%, δεν παράχθηκαν ξεχωριστά διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού συστήματος, εφόσον η πιο ακραία διαφορά είναι μόλις 2%.

Αντιθέτως παράχθηκε ένα κοινό διάγραμμα το οποίο φαίνεται στο Σχ. 5.22. Το κάθε ζεύγος αρχικών συνθηκών συμβολίζεται με διαφορετικό χρώμα. Για  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  (μαύρο χρώμα),  $(x, y) = (-0.1, 0.5)$  (κόκκινο χρώμα),  $(x, y) = (-0.1, 2)$  (μπλέ χρώμα),  $(x, y) = (0.5, 1.5)$  (ροζ(magenta) χρώμα) και  $(x, y) = (0.8, 1.2)$  (κίτρινο χρώμα).



Σχήμα 5.22: Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.6$ ,  $k = 0.9$ ,  $(x, y) = (0.1, 0.5)$  (μαύρο χρώμα),  $(x, y) = (-0.1, 0.5)$  (κόκκινο χρώμα),  $(x, y) = (-0.1, 2)$  (μπλέ χρώμα),  $(x, y) = (0.5, 1.5)$  (ροζ(magenta) χρώμα) και  $(x, y) = (0.8, 1.2)$  (κίτρινο χρώμα).

## 5.5 Συμπεριφορά για Μεταβλητό $h$

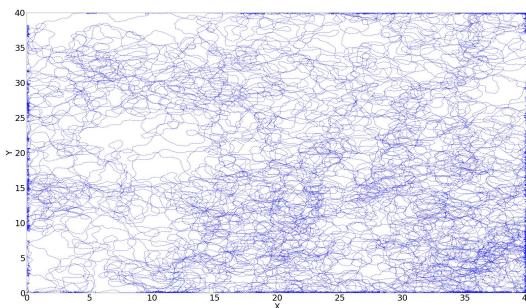
Για να είναι ολοκληρωμένη η μελέτη του ελέγχου της κίνησης του αυτόνομου ρομποτικού οχήματος, είναι απαραίτητο να ελεγχθεί ο τρόπος που αντιδράει το σύστημα στην μεταβολή της παραμέτρου  $h$ .

Η συγκεκριμένη μελέτη χωρίστηκε σε τρεις περιπτώσεις, όπου για την κάθε περίπτωση κρατούσαμε σταθερές της παραμέτρους  $k$ ,  $q$ ,  $(X, Y)$ . Στη πρώτη περίπτωση επιλέχθηκε η παράμετρος  $q$  να ισούται  $q = -1.4$  και η παράμετρος  $k$  να ισούται με  $k = 0.79$ . Στη δεύτερη περίπτωση η παράμετρος  $q$  ισούται με  $q = -1.9$  και η παράμετρος  $k$  ισούται με  $k = 0.51$ . Στη τρίτη περίπτωση η παράμετρος  $q$  ισούται με  $q = -2.1$  και η παράμετρος  $k$  ισούται με  $k = 0.34$ .

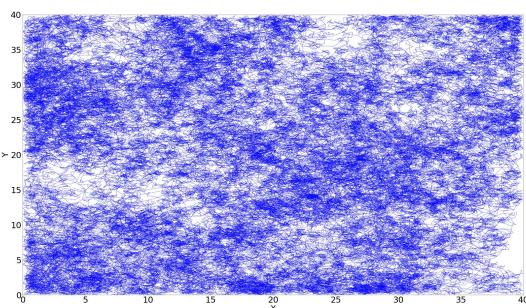
Σε όλες τις περιπτώσεις το ρομπότ εκτέλεσε  $10^5$  βήματα, ενώ η αρχική θέση του ρομποτικού οχήματος παρέμεινε σταθερή και ίση με  $(X, Y) = (0, 0)$ , όπως και οι αρχικές συνθήκες οι οποίες είναι  $(x, y) = (0.1, 0.2)$ . Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε το διάγραμμα της διαδρομής του ρομπότ και υπολογίστηκε το ποσοστό κάλυψης.

### 5.5.1 Για $q = -1.4$

Στα Σχ. 5.23i, 5.23ii παρατίθενται τα διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού οχήματος, για  $q = -1.4$ ,  $k = 0.79$  και  $h = 0.1$ ,  $h = 0.5$  αντίστοιχα. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου που προέκυψε για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων είναι 77.1%, 97.4% αντίστοιχα.



(i)  $h = 0.1$ .

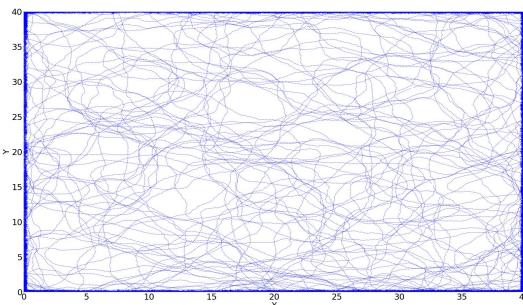


(ii)  $h = 0.5$ .

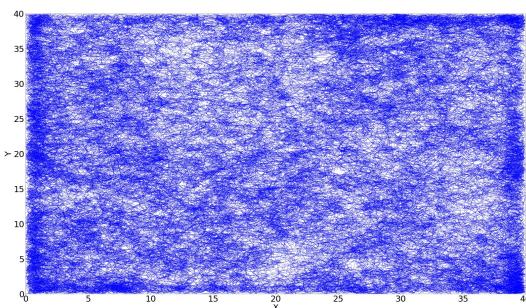
Σχήμα 5.23: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.4$ ,  $k = 0.79$ :

### 5.5.2 Για $q = -1.9$

Στα Σχ. 5.24i, 5.24ii παρατίθενται τα διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού οχήματος, για  $q = -1.9$ ,  $k = 0.51$  και  $h = 0.1$ ,  $h = 0.5$  αντίστοιχα. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου που προέκυψε για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων είναι 60.1% και 99.9% αντίστοιχα.



(i)  $h = 0.1$ .



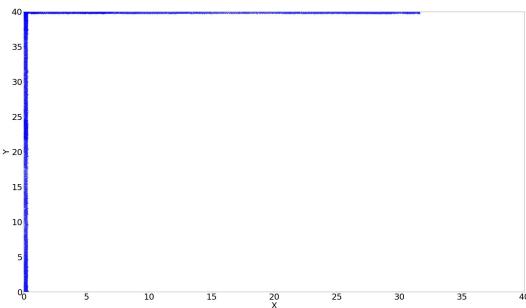
(ii)  $h = 0.5$ .

Σχήμα 5.24: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.9$ ,  $k = 0.51$  :

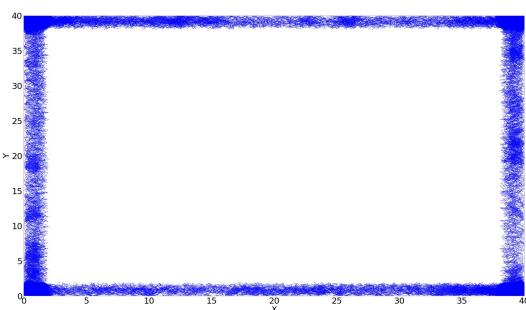
### 5.5.3 Για $q = -2.1$

Στα Σχ. 5.25i, 5.25ii, 5.25iii, 5.25iv παρατίθενται τα διαγράμματα διαδρομής του ρομποτικού οχήματος, για  $q = -2.1$ ,  $k = 0.34$  και  $h = 0.1$ ,  $h = 0.5$ ,  $h = 0.8$ ,  $h = 1.2$  αντίστοιχα. Το ποσοστό κάλυψης του χώρου που προέκυψε για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων είναι 2.27%, 18.3%, 34.03% και 57.8% αντίστοιχα.

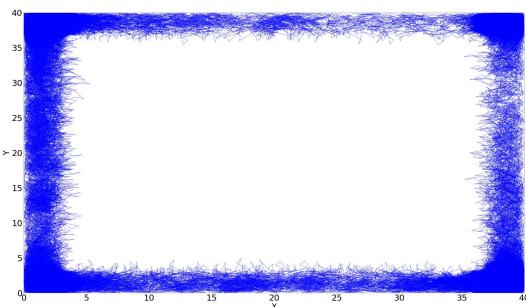
Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι αλλάζοντας ελάχιστα την παράμετρο διακριτοποίησης  $h$  έχει ως συνέπεια να μεταβληθεί σημαντικά το ποσοστό κάλυψης που παρουσιάζει η εκάστοτε κίνηση. Αναλυτικότερα, όσο πιο μικρή είναι η τιμή του  $h$  τόσο μικρότερη θα είναι η καλυψιμότητα του χώρου που κινείται το ρομπότ, ενώ αν την αυξήσουμε αρκετά από ένα σημείο αλλάζει ελάχιστα εφόσον έχει φτάσει σχεδόν στο 100%. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί στη δεύτερη περίπτωση για  $q = -1.9$ , όπου μετά από  $h = 0.5$  θα αρχίσουμε να παρατηρούμε όλο και μικρότερη αύξηση του ποσοστού κάλυψης της επιφάνειας. Παρόλο που δεν υπάρχει κάποιο διάγραμμα, για παράδειγμα για  $h = 0.6$  και για  $h = 0.8$  το ποσοστό κάλυψης είναι 99.93%, 99.96% αντίστοιχα. Δηλαδή μεταξύ αυτών των δύο τιμών του  $h$  το ποσοστό ανέβηκε περίπου μόνο **0.04** μονάδες.



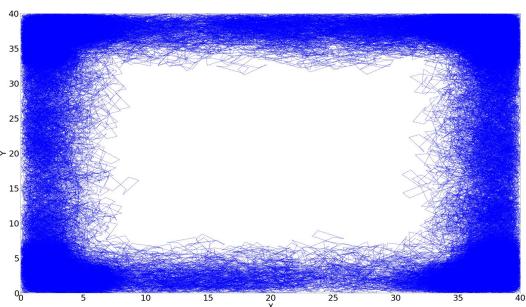
(i)  $h = 0.1.$



(ii)  $h = 0.5.$



(iii)  $h = 0.8.$



(iv)  $h = 1.2.$

Σχήμα 5.25: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -2.1$ ,  $k = 0.34$  :

## 5.6 Συμπεριφορά για Μεταβαλλόμενο Αριθμό Βημάτων

Ολοκληρώνοντας την μελέτη της διαδρομής που ακολουθεί το ρομποτικό όχημα, ερευνάται η συμπεριφορά του συστήματος όταν μεταβάλλεται ο αριθμός βημάτων. Για τον σκοπό αυτό θα αναλυθεί και θα υπολογιστεί το ποσοστό κάλυψης για ένα εύρος βημάτων ανάλογα την περίπτωση. Ελέγχθηκαν δύο περιπτώσεις στις οποίες είναι σταθερές όλες οι παράμετροι. Στην πρώτη περίπτωση για  $q = -1.6$  και  $k = 0.79$  το εύρος βημάτων ήταν μεταξύ ( $10^5 - 10^7$ ) με τυχαίο βήμα. Στη δεύτερη περίπτωση για  $q = -1.9$  και  $k = 0.68$  το εύρος βημάτων ήταν μεταξύ ( $10^4 - 10^6$ ) εξίσου με τυχαίο βήμα.

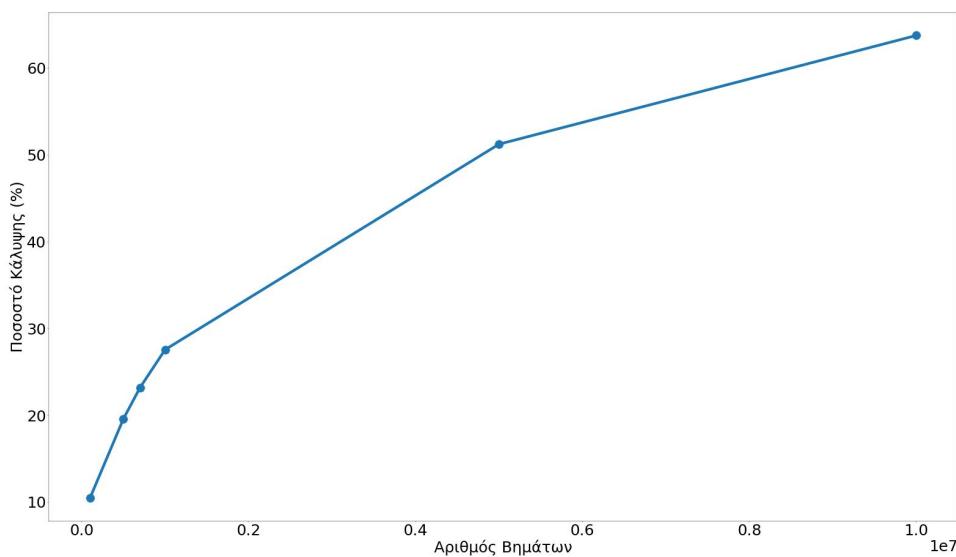
Σε όλες τις περιπτώσεις η παράμετρος διακριτοποίησης  $h$  παρέμεινε σταθερή και ίση με  $h = 0.2$ , η αρχική θέση του ρομποτικού οχήματος παρέμεινε σταθερή και ίση με  $(X, Y) = (0, 0)$ , όπως και οι αρχικές συνθήκες, οι οποίες ισούται με  $(x, y) = (0.1, 0.2)$ . Έτσι, για κάθε περίπτωση παράχθηκε ένας πίνακας με τους αριθμούς βημάτων και τα ποσοστά κάλυψης.

### 5.6.1 Για $q = -1.6$

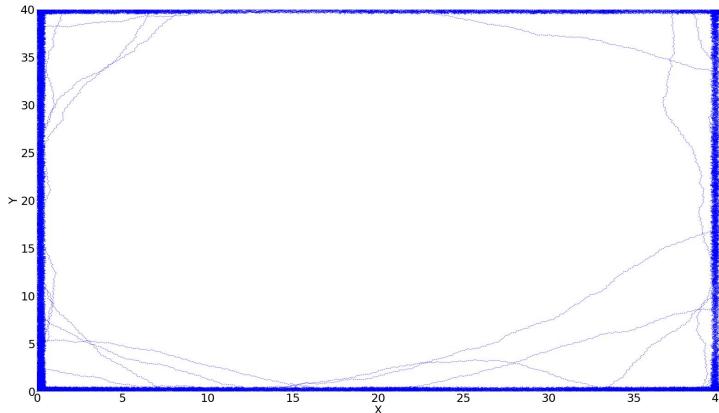
Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 5.1 κατασκευάστηκε διάγραμμα του αριθμού των βημάτων που εκτελεί το ρομπότ συναρτήσει του ποσοστού κάλυψης. Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.26 η μεταβολή της συναρτησιακής αυτής σχέσης είναι κατά προσέγγιση λογαριθμική. Στα Σχ. 5.27i, 5.27ii, 5.27iii παρουσιάζονται τα διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για αριθμό βημάτων  $10^5$ ,  $10^6$  και  $5 * 10^6$  αντίστοιχα.

Πίνακας 5.1: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για  $q = -1.6$ ,  $k = 0.79$ .

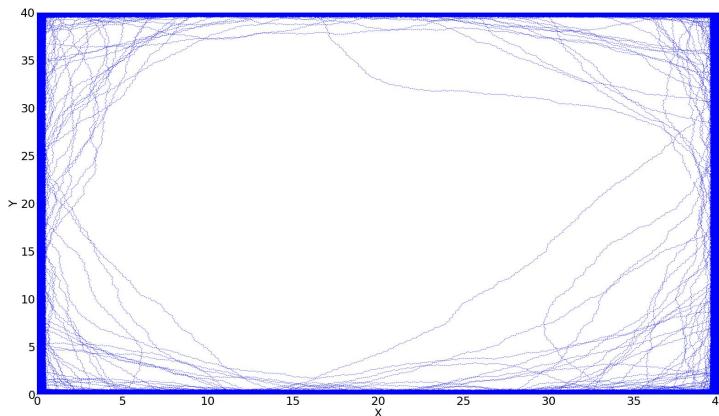
Αριθμός Βημάτων	Ποσοστό Κάλυψης
$10^5$	10.46
$5 * 10^5$	19.6
$7 * 10^5$	23.2
$10^6$	25.57
$5 * 10^6$	51.25
$10^7$	63.8



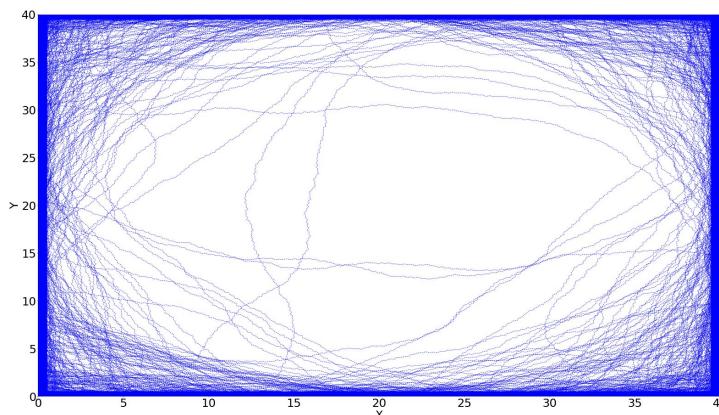
Σχήμα 5.26: Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βημάτων για  $q = -1.6$  και  $k = 0.79$ .



(i) Αριθμός βημάτων  $10^5$  και ποσοστό κάλυψης 10.46.



(ii) Αριθμός βημάτων  $10^6$  και ποσοστό κάλυψης 25.57.



(iii) Αριθμός βημάτων  $5 * 10^6$  και ποσοστό κάλυψης 51.25.

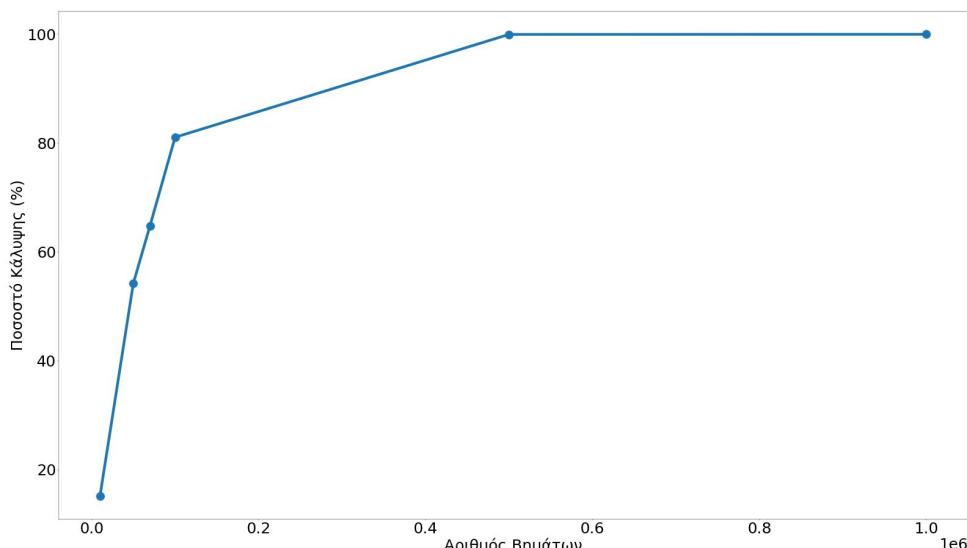
Σχήμα 5.27: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.6$ ,  $k = 0.79$  :

### **5.6.2 Για $q = -1.9$**

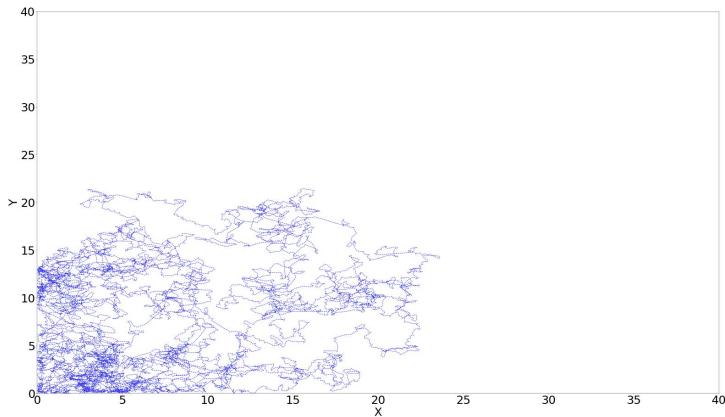
Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 5.2 κατασκευάστηκε διάγραμμα του αριθμού των βημάτων που εκτελεί το ρομπότ συναρτήσει του ποσοστού κάλυψης. Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.28 η μεταβολή της συναρτησιακής αυτής σχέσης είναι κατά προσέγγιση λογαριθμική. Στα Σχ. 5.29i, 5.29ii, 5.29iii παρουσιάζονται τα διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για αριθμό βημάτων  $10^4$ ,  $5 * 10^4$  -  $10^6$  αντίστοιχα.

Πίνακας 5.2: Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για  $q = -1.9$ ,  $k = 0.68$ .

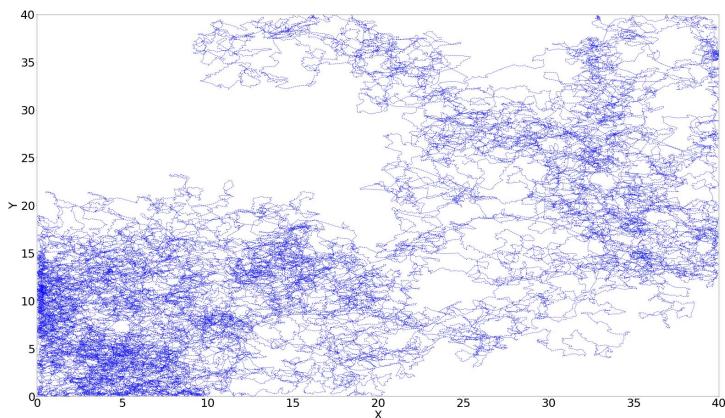
Αριθμός Βημάτων	Ποσοστό Κάλυψης
$10^4$	15.125
$5 * 10^4$	54.254
$7 * 10^4$	64.840
$10^5$	81.082
$5 * 10^5$	99.98
$10^6$	100



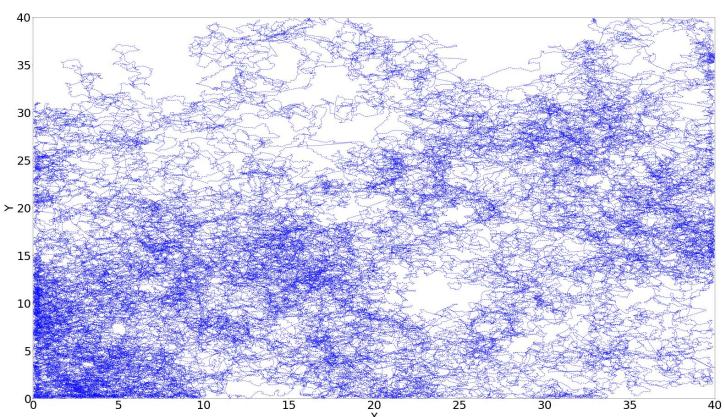
Σχήμα 5.28: Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βημάτων για  $q = -1.9$  και  $k = 0.68$ .



(i) Αριθμός βημάτων  $10^4$  και ποσοστό κάλυψης 15.125 .



(ii) Αριθμός βημάτων  $5 * 10^4$  και ποσοστό κάλυψης 54.254.



(iii) Αριθμός βημάτων  $10^5$  και ποσοστό κάλυψης 81.082.

Σχήμα 5.29: Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για,  $q = -1.9$ ,  $k = 0.68$  :

## 5.7 Συμπεράσματα

Από την παραπάνω μελέτη της συμπεριφοράς του ρομποτικού οχήματος, με βάση τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της κίνησης, για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου  $q$  συμπεραίνουμε ότι η διαδρομή που ακολουθεί το ρομπότ είναι ευαίσθητη στην μεταβολή όλων των παραμέτρων. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν δεν αλλάξανταν τη συμπεριφορά του συστήματος, δηλαδή βρισκόταν σε όλες τις περιπτώσεις στο χάος. Αυτό επιλέχθηκε ώστε να υπάρχει μία βάση στην μελέτη και τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα.

Συγκεκριμένα, η μεταβολή της παραμέτρου  $q$  και της παραμέτρου διακλάδωσης  $k$  στην παράγραφο 5.2 προκαλούσε αισθητή αλλαγή στο ποσοστό κάλυψης της διαδρομής του ρομπότ ειδικά στις περιπτώσεις όπου μεταβαλλόταν το  $k$  όπως στις παραγράφους 5.2.4, 5.2.5.

Από την άλλη, η αλλαγή στις αρχικές συντεταγμένες ( $X, Y$ ) της επιφάνειας που κινείται το ρομποτικό όχημα, στην παράγραφο 5.3 προκάλεσε ελάχιστη μεταβολή της καλυψιμότητας.

Επιπλέον, η αλλαγή στις αρχικές συνθήκες ( $x, y$ ) στην παράγραφο 5.4, προκαλούσε τυχαίες μεταβολές στο ποσοστό κάλυψης του χώρου. Συνεπώς, δεν μπορεί να προκύψει κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα από τον έλεγχο της συγκεκριμένης παραμέτρου.

Τέλος, λογαριθμική αύξηση της καλυψιμότητας της επιφάνειας, προέκυπτε στις περιπτώσεις που αυξάναμε την παράμετρο διακριτοποίησης  $h$  στην παράγραφο 5.5 και τον αριθμό βημάτων που εκτελεί το ρομπότ σε μία διαδρομή, στην παράγραφο 5.6.

Οι συνδυασμοί των παραμέτρων που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε είναι άπειροι, συνεπώς και οι διαδρομές, με τα αντίστοιχα ποσοστά κάλυψης του χώρου, που μπορεί να ακολουθήσει το ρομπότ στον χώρο.

# Βιβλιογραφία

- [1] Αναστάσιος Μπούντης Δυναμικά Συστήματα και Χάος, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1995
- [2] Βουγιατζής, Γ., Μελετλίδου, Ε., Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015
- [3] Παύλος, Γ.Π., Ντετερμινιστικά Συστήματα – Στοιχεία Χαοτικής Ανάλυσης Χρονοσειρών, [http://utopia.duth.gr/~gpavlos/deterministic\\_systems.pdf](http://utopia.duth.gr/~gpavlos/deterministic_systems.pdf)
- [4] Σουρλάς, Δ., Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές με τη χρήση του Maple, Πανεπιστήμιο Πατρών Τμήμα Φυσικής, 2010
- [5] Κυπριανίδης, Γ., Πετράνη, Μ., ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ από την περιοδική στη χαοτική συμπεριφορά, Εκδόσεις Σύγχρονη Παιδεία, 2008
- [6] Δήμητρα Βλόντζου, Σχεδίαση Διαδρομής Αυτόνομου Ρομποτικού Οχήματος με Χρήση Διακριτού Χαοτικού Συστήματος, <https://ikee.lib.auth.gr/record/335179/files/VLONTZOU.pdf>, Πτυχιακή εργασία 2021
- [7] , Χρυσάνθη Τσιάρα, Μελέτη Χαοτικών Χαρτών και Χρήση τους σε Συστήματα Κρυπτογραφίας Εικόνας,<https://ikee.lib.auth.gr/record/335142/files/Tsiara.pdf>, Πτυχιακή εργασία 2021
- [8] Moysis, Lazaros and Petavratzis, Eleftherios and Volos, Christos and Nistazakis, Hector and Stouboulos, Ioannis, *A chaotic path planning generator based on logistic map and modulo tactics*, Robotics and Autonomous Systems, 11/2019
- [9] Zhu Hegui, Wentao Qi, Ge Jiangxia, Liu Yuelin, *Analyzing Devaney Chaos of a Sine–Cosine Compound Function System*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 12/2018
- [10] Moysis, Lazaros and Tutueva, Aleksandra and Volos, Christos and Butusov, Denis, *A Chaos Based Pseudo-Random Bit Generator Using Multiple Digits Comparison*, Chaos Theory and Applications (CHTA) , 07/2020
- [11] Σοφίας Μπαριάμη, Μελέτη χαοτικών και ψευδοχαοτικών συστημάτων με στατιστικά εργαλεία και η εξερεύνηση της δυνατότητας πρόγνωσής τους από ένα reservoir computer , <https://core.ac.uk/download/pdf/38467879.pdf>, Διπλωματική εργασία 10/2015



---

# Παράρτημα

Η Python τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο στον κόσμο του προγραμματισμού και κυρίως στους επιστημονικούς κύκλους. Δίνεται η επιλογή στον ερευνητή να χρησιμοποιήσει απείρες βιβλιοθήκες οι οποίες είναι κατάλληλες ακόμα και για τα πιο εξιδεικευμένα έργα. Είναι αρκετά εύπλαστη, ένα προτέρημα που την κάνει να ξεχωρίζει από παλιότερες γλώσσες προγραμματισμού. Επίσης όλα τα παραπάνω την κάνουν αρκετά προσιτή σε οποιοδήποτε άτομο θέλει να ξεκινήσει να ασχολείται με τον προγραμματισμό, χωρίς να έχει προηγούμενη εμπειρία στο αντικείμενο.

Οι κώδικες που γράφτηκαν για την μελέτη τόσο των διακριτών χαοτικών συστημάτων, όσο και για την εφαρμογή τους στον έλεγχο της κίνησης του ρομποτικού οχήματος, παρατίθενται στη συνέχεια.

Code Listing 5.1: Bifurcation Diagram

# Bifurcation diagram

```
from cmath import inf
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import csv
import matplotlib as mpl
import time

start_time = time.time()

# The iterations of the "for" loops are determined by this three
# parameters. If you change the steps you must change the M's
# array aswell*.

start = 0
finish = 4
step = 0.0004

# fixed parameters

N = 1001

pos = 0 # the position of the 2d array which for every position we
```

---

```

    save the last 130 values of x[i]**

k = np.zeros(len(range(0, N)))
x = np.zeros(len(range(0, N)))
i = np.zeros(len(range(0, N)))
M = np.zeros((10000, 130))      # * change the first value of the M
                                array if you change the steps or the finish parameter

# parameters you can change

q = -0.5 # the main parameter that changed the original maps
x[0] = 0.5 # Initial conditions
g = 5 # Parameter only for the saved plots

# the path where the plots are saved. You can change it with yours.

filename = "./Latex/LateX\images/sine\q=" + str(q) + "/g" + str(g)
          + ".jpg"
# filename="./Latex/LateX images/graphs q21/g" + str(g) + ".jpg"
# filename="./Latex/LateX images/cheb q="+ str(q)+"/g" + str(g) +
          jpg"

# the path where the the data of parameter k and x are saved

file_path = "./data3/ok\q=" + str(q) + "\x=" + str(x[1]) + ".txt"

# "For" loops , to calculate the three systems and put the values
# of x[i] inside a 2d np.array.

for k in np.arange(start, finish, step):
    for i in range(1, N):

        x[i] = k * math.sin(k * math.sinh(q * math.sin(2 * x[i - 1])))
        # np.sine - np.sinh

        # x[i] = k *(1 + x[i - 1]) * (1 + x[i - 1]) * (2 - x[i - 1]) + q #logistic

        # x[i] = math.cos(k**q * math.acos(q*x[i - 1])) #cheb

M[pos, :] = x[-130:] # ** here you can see that
pos += 1

# code for plotting the bif diagram

```

---

```

k = np.arange(start, finish, step)

fig = plt.figure()
font = {"size": 45}
plt.rc("font", **font)
for i in range(0, 130):
    plt.plot(k, M[:, i], ".k", alpha=1, ms=1.2)

plt.rcParams.update({"text.usetex": True})
plt.xlabel("k")
plt.ylabel("x")
figure = plt.gcf() # get current figure
figure.set_size_inches(1920 / 40, 1080 / 40)
plt.savefig(filename, dpi=40)
print("---%s seconds---" % (time.time() - start_time))
plt.show()

# the code for saving the data

with open(file_path, "w+", encoding="utf-8", newline="") as f:
    for i in range(10000):
        for j in range(130):
            if np.any(M[i, j] == np.inf) or np.any(M[i, j] == -np.
                inf):
                break
            else:
                f.writelines([f"\{k[i]\}", f"\{M[i, j]}\n"])
f.close()
print("---%s seconds---" % (time.time() - start_time))

```

Code Listing 5.2: Lyapunov exponent

#Lyapunov exponent

```

import csv
import math
import time

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

start_time = time.time()

# The iterations of the LE are determined by this three parameters

```

---

```

start = 0
finish = 1
dim = 0.001

# fixed parameters

N = 1001

x = np.zeros(len(range(0, N)))
x1 = np.zeros(len(range(0, N)))
x2 = np.zeros(len(range(0, N)))
r = np.arange(start, finish, dim)
le2 = np.zeros(len(range(0, len(r)))))

e = 0.000000001

# parameters you can change

q = -1.4 # the main parameter that changed the original maps
x[0] = 0.1 # Initial conditions
g = 5 # Parameter only for the saved plots

# the path where the plots are saved. You can change it with yours.

# filename = "./Latex/LateX images/sine q=" + str(q) + "/g" + str(g) + ".jpg"
# filename = "./Latex/LateX images/graphs q21/g" + str(g) + ".jpg"
# filename = "./Latex/LateX images/cheb q=" + str(q) + "/g" + str(g) + ".jpg"

# the equation for Lyapunov

def LE(start, finish, dim):
    for j in range(1, len(r)):
        le = 0
        for i in range(1, N):
            # x[i] = r[j] * math.sin(r[j]* math.sinh(q * math.sin(2*x[i - 1])))

```

---

```

        x[i] = r[j] * (1 + x[i - 1]) * (1 + x[i - 1]) * (2 - x[
            i - 1]) + q
        # x[i] = math.cos(r[j]**q * math.acos(q*x[i - 1])) # cheb
    x1[0] = x[N - 1]
    x2[0] = x[N - 1]
    for i in range(1, N):
        # x1[i] = r[j] * math.sin(r[j]* math.sinh(q * math.sin(
        # (2*x1[i - 1]))) )
        # x2[i - 1] = x1[i - 1] + e
        # x2[i] = r[j] * math.sin(r[j]* math.sinh(q * math.sin(
        # (2*x2[i - 1]))) )

        x1[i] = r[j] * (1 + x1[i - 1]) * (1 + x1[i - 1]) * (2 -
            x1[i - 1]) + q
        x2[i - 1] = x1[i - 1] + e
        x2[i] = r[j] * (1 + x2[i - 1]) * (1 + x2[i - 1]) * (2 -
            x2[i - 1]) + q

        # x1[i] = math.cos(r[j]**q * math.acos(q*x1[i - 1]))
        # x2[i - 1] = x1[i - 1] + e
        # x2[i] = math.cos(r[j]**q * math.acos(q*x2[i - 1]))

        dist = abs(x1[i] - x2[i])
        if dist > 0:
            le = le + math.log(dist / e)
    le2[j] = le / (N - 1)

    return le2

# call the def

LE = LE(start, finish, dim)
LElist = list(LE)

# remove points under -6 if necessary

# for i in range(len(LElist)-1, 0, -1):
#     if LElist[i] < -6:
#         LElist.pop(i)
#         i=i+1

font = {"size": 45}
plt.rc("font", **font)
plt.figure()
plt.plot(r, LElist, ".k", alpha=1, ms=1.4)

```

---

---

```

plt.axhline(0)
plt.xlabel("k")
plt.ylabel("LE")
# plt.xlim(0,4.4)
figure = plt.gcf() # get current figure
figure.set_size_inches(1920 / 40, 1080 / 40)
# plt.savefig(filename,dpi=40)
print("----%s seconds---" % (time.time() - start_time))
plt.show()

```

Code Listing 5.3:  $x_i - x_{i+1}$  diagram

# $x_i - x_{i+1}$  diagram

```

import math

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

q = 0.9
k = 2.741
g = 10

# filename = "./Latex/Latex images/sine q=" + str(q) + "/g" + str(g) + ".png"
# filename = "./Latex/Latex images/graphs q19/" + str(k) + ".png"
filename = "./Latex/Latex\images/cheb\q=" + str(q) + "/g" + str(g) + ".png"

N = 10**6 + 1
x = np.zeros(len(range(0, N)))
y = np.zeros(len(range(0, N)))
x[0] = 0
x[1] = 0.1

for i in range(2, N):
    # x[i] = k * math.sin(k * math.sinh(q * math.sin(2 * x[i - 1])));
    #np.sine - np.sinh
    # x[i] = k * (1 + x[i - 1]) * (1 + x[i - 1]) * (2 - x[i - 1]) + q
    #logistic
    x[i] = math.cos(k**q * math.acos(q * x[i - 1])) # cheb

xpoints = x[300:-1]
ypoints = x[301:]
plt.plot(xpoints, ypoints, ".", color="black", markersize=1)
plt.xlabel("x(i)")
plt.ylabel("x(i+1)")
plt.savefig(filename, bbox_inches="tight")
plt.show()

```

---

Code Listing 5.4: Robot path coverage

```
# Code for robot path and coverage

import math
import time

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

start_time = time.time()
N = 10**5
k = 0.815
q = -1.6
g = 3
filename = "./Latex/LateX\images/log/k/g" + str(g) + str(q) + ".jpg"
    "
x = np.zeros(len(range(0, N)))
y = np.zeros(len(range(0, N)))
X = np.zeros(len(range(0, N)))
Y = np.zeros(len(range(0, N)))
M = np.zeros(len(range(0, N)))
theta = np.zeros(len(range(0, N)))

# chaotic maps
def rs(x1, y1):
    # choose parameters for the two chaotic maps used

    x[0] = x1
    y[0] = y1
    # choose parameters for the robot

    X[0] = 0
    Y[0] = 0
    # theta[1]=0
    L = 0.15
    h = 0.2

    for i in range(1, N):
        x[i] = k * ((1 + x[i - 1]) * (1 + x[i - 1])) * (2 - x[i - 1]) + q
        y[i] = k * ((1 + y[i - 1]) * (1 + y[i - 1])) * (2 - y[i - 1]) + q

        # robot coordinates
        X[i] = X[i - 1] + h * math.cos(theta[i - 1]) * (x[i - 1] + y[i - 1]) / 2
        Y[i] = Y[i - 1] + h * math.sin(theta[i - 1]) * (x[i - 1] + y[i - 1]) / 2
        theta[i] = theta[i - 1] + h * (x[i - 1] - y[i - 1]) / L
```

---

```

# keep the robot inside the boundaries
if X[i] >= 40 or X[i] <= 0:
    X[i] = X[i - 1] - h * math.cos(theta[i - 1]) * (x[i - 1] + y[i - 1]) / 2
if Y[i] >= 40 or Y[i] <= 0:
    Y[i] = Y[i - 1] - h * math.sin(theta[i - 1]) * (x[i - 1] + y[i - 1]) / 2
return (X, Y)

rs1 = rs(0, 0.1)
# rs2=np.array(rs1, dtype=np.int)
plt.figure()
font = {"size": 45}
plt.rc("font", **font)
plt.plot(X, Y, "--b", alpha=0.8, ms=1)
plt.rcParams.update({"text.usetex": True})
plt.rcParams["agg.path.chunksize"] = 10000
plt.xlim(0, 40)
plt.ylim(0, 40)
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
figure = plt.gcf() # get current figure
figure.set_size_inches(1920 / 40, 1080 / 40)
plt.savefig(filename, dpi=40)
print("---%s seconds---" % (time.time() - start_time))
plt.show()

# create a zero matrix of appropriate dimensions
# assuming each cell is 0.25x0.25
# cell=40/0.25
I = np.zeros((len(np.arange(0, 160)),) * 2)

for j in range(1, len(X)):

    # gia kathisintetagmeni X,Y, ipologizw to cell (keli) pou
    # antistoixeiai
    # sto (X,Y)(i), kai epeita sta mikos 1/3, 1/2 kai 2/3 toy
    # diastimatos metaksi
    # (X,Y)(i) kai (X,Y)(i-1). etsi px an se kapoio iteration to
    # robot
    # kanei megalo 'alma', na ipologistoun k ta endiamesa cells

    if X[j] >= 0 or X[j] <= 40 or Y[j] >= 0 or Y[j] <= 40:
        gridx = math.floor(X[j] / 0.25)
        gridy = math.floor(Y[j] / 0.25)
        I[gridx, gridy] = 1

    # 2/3

```

---

```

gridx = math.floor((0.3 * X[j - 1] + 0.7 * X[j]) / 0.25)
gridy = math.floor((0.3 * Y[j - 1] + 0.7 * Y[j]) / 0.25)
l[gridx, gridy] = 1

# 1/3

gridx = math.floor((0.7 * X[j - 1] + 0.3 * X[j]) / 0.25)
gridy = math.floor((0.7 * Y[j - 1] + 0.3 * Y[j]) / 0.25)
l[gridx, gridy] = 1

# 1/2

gridx = math.floor((0.5 * X[j - 1] + 0.5 * X[j]) / 0.25)
gridy = math.floor((0.5 * Y[j - 1] + 0.5 * Y[j]) / 0.25)
l[gridx, gridy] = 1
coverage = np.mean((np.mean(l) * 100))

print(coverage)
print("--- %s seconds ---" % (time.time() - start_time))

```

Code Listing 5.5: Steps coverage diagram

*#Steps coverage*

```

import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

g = 2

filename = "./Latex/LateX\images/log/steps/g" + str(g) + ".jpg"

y1 = [10.46, 19.58, 23.2, 27.57, 51.25, 63.78]
x1 = [10**5, 5 * 10**5, 7 * 10**5, 10**6, 5 * 10**6, 10**7]
y2 = [15.125, 54.254, 64.840, 81.082, 99.98, 100]
x2 = [10**4, 5 * 10**4, 7 * 10**4, 10**5, 5 * 10**5, 10**6]

font = {"size": 45}
plt.rc("font", **font)
mpl.rcParams["lines", linewidth=8, linestyle="solid"]
plt.plot(x2, y2)
plt.scatter(x2, y2, s=600, zorder=2.5)
plt.rcParams.update({"text.usetex": True})
plt.rcParams["agg.path.chunksize"] = 10000
plt.xlabel("Αριθμός Βημάτων")
plt.ylabel("Ποσοστό Κάλυψης (%)")
figure = plt.gcf() # get current figure
figure.set_size_inches(1920 / 40, 1080 / 40)
plt.savefig(filename, dpi=40)
# print("--- %s seconds ---" % (time.time() - start_time))

```

---

```
plt.show()
```

---

# Κατάλογος σχημάτων

1.1 Διάγραμμα διακλάδωσης.	8
1.2 Σχηματικό διάγραμμα φυσαλίδας περιόδου-1.	10
1.3 Σχηματικό διάγραμμα ανάστροφης φυσαλίδας περιόδου-1.	10
2.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.1$ .	13
2.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -0.1$ .	14
2.3 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του $q$ (α' μέρος).	15
2.4 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του $q$ (β' μέρος).	16
2.5 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος).	17
2.6 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος).	18
2.7 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$ .	20
2.8 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -0.3$ .	20
2.9 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος).	21
2.10 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος).	22
2.11 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.5$ .	24
2.12 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -0.5$ .	24
2.13 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος).	25
2.14 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος).	26
2.15 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.7$ .	28
2.16 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -0.7$ .	28
2.17 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος).	29
2.18 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος).	30
2.19 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.9$ .	32
2.20 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -0.9$ .	32
2.21 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος).	33
2.22 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος).	34
2.23 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.2$ .	36
2.24 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -1.2$ .	36
2.25 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος).	37
2.26 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος).	38
2.27 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (α' μέρος).	40
2.28 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.4$ (β' μέρος).	41
2.29 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -1.4$ (α' μέρος).	42
2.30 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -1.4$ (β' μέρος).	43
2.31 Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες $x_0$ .	44

2.32 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ , με $q = -1.4$ (α' μέρος). . . . .	45
2.33 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ , με $q = -1.4$ (β' μέρος). . . . .	46
2.34 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ , με $q = -1.4$ (γ' μέρος). . . . .	47
2.35 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.6$ (α' μέρος). . . . .	50
2.36 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -1.6$ (β' μέρος). . . . .	51
2.37 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -1.4$ (α' μέρος). . . . .	52
2.38 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -1.4$ (β' μέρος). . . . .	53
2.39 Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες $x_0$ . . . . .	54
2.40 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ , με $q = -1.6$ (α' μέρος). . . . .	54
2.41 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ , με $q = -1.6$ (β' μέρος). . . . .	55
2.42 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -1.9$ . . . . .	56
2.43 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -1.9$ . . . . .	57
2.44 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος). . . . .	59
2.45 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος). . . . .	60
2.46 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -2.1$ . . . . .	62
2.47 Μεγέθυνση του διάγραμματος διακλάδωσης, για $q = -2.1$ . . . . .	62
2.48 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -2.1$ . . . . .	64
2.49 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (α' μέρος). . . . .	65
2.50 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ (β' μέρος). . . . .	66
 3.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = -0.3$ . . . . .	70
3.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -0.3$ . . . . .	71
3.3 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ . . . . .	72
3.4 Διαγράμματα διακλάδωσης, για $q = -0.5$ . . . . .	75
3.5 Διαγράμματα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = -0.5$ . . . . .	76
3.6 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του $x_0 = 0.1$ . . . . .	77
3.7 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του $x_0 = 0.5$ . . . . .	78
3.8 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του $x_0 = 1$ . . . . .	79
3.9 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του $x_0$ . . . . .	80
3.10 Διάγραμμα διακλάδωσης, για όλες τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες $x_0$ . . . . .	81
3.11 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ . . . . .	82
 4.1 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.8$ . . . . .	86
4.2 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = 0.8$ . . . . .	87
4.3 Διαγράμματα διακλάδωσης για διάφορες τιμές του $k$ . . . . .	89
4.4 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ . . . . .	90
4.5 Διάγραμμα διακλάδωσης, για $q = 0.9$ . . . . .	91
4.6 Διάγραμμα των εκθετών Lyapunov σε συνάρτηση με την παράμετρο $k$ , για $q = 0.9$ . . . . .	92
4.7 Διάγραμμα διακλάδωσης για $2.55 < k < 2.8$ . . . . .	92
4.8 Διαγράμματα της τιμής $x_i$ σε συνάρτηση με την τιμή $x_{i+1}$ . . . . .	94
 5.1 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για $k = 0.9$ και $q = -1.6$ . . . . .	99
5.2 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για $k = 0.9$ και $q = -1.9$ . . . . .	100

5.3 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.9$ , $q = -1.6$ (μαύρο χρώμα), $q = -1.9$ (κόκκινο χρώμα). . . . .	100
5.4 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για $k = 0.79$ και $q = -1.4$ . . . . .	101
5.5 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για $k = 0.79$ και $q = -1.6$ . . . . .	102
5.6 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.79$ , $q = -1.6$ (μαύρο χρώμα), $q = -1.4$ (κόκκινο χρώμα). . . . .	102
5.7 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος, για $k = 0.68$ και $q = -1.9$ . . . . .	103
5.8 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$ και $q = -2.1$ . . . . .	104
5.9 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $k = 0.68$ , $q = -1.9$ (μαύρο χρώμα), $q = -2.1$ (κόκκινο χρώμα). . . . .	104
5.10 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.68$ . . . . .	105
5.11 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.69$ . . . . .	106
5.12 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ και $k = 0.815$ . . . . .	106
5.13 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.74$ . . . . .	107
5.14 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.751$ . . . . .	108
5.15 Διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ και $k = 0.76$ . . . . .	108
5.16 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$ , $k = 0.68$ : . . . . .	110
5.17 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -2.1$ , $k = 0.68$ , $(X, Y) = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), $(X, Y) = (20, 20)$ (κόκκινο χρώμα), $(X, Y) = (5, 20)$ (μπλε χρώμα), $(X, Y) = (34, 20)$ (κίτρινο χρώμα). . . . .	111
5.18 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$ , $k = 0.68$ : . . . . .	113
5.19 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$ , $k = 0.68$ , $(X, Y) = (0, 0)$ (μαύρο χρώμα), $(X, Y) = (5, 15)$ (κόκκινο χρώμα), $(X, Y) = (8, 30)$ (μπλε χρώμα), $(X, Y) = (36, 6)$ (κίτρινο χρώμα). . . . .	114
5.20 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ , $k = 0.75$ : . . . . .	116
5.21 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ , $k = 0.75$ , $(x, y) = (-0.1, 0.1)$ (μαύρο χρώμα), $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα), $(x, y) =$ $(0.1, 0.5)$ (μπλε χρώμα), $(x, y) = (0.5, 1)$ (ροζ(magenta) χρώμα). . . . .	117
5.22 Κοινό διάγραμμα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ , $k = 0.9$ , $(x, y) = (0.1, 0.5)$ (μαύρο χρώμα), $(x, y) = (-0.1, 0.5)$ (κόκκινο χρώμα), $(x, y) =$ $(-0.1, 2)$ (μπλέ χρώμα), $(x, y) = (0.5, 1.5)$ (ροζ(magenta) χρώμα) και $(x, y) =$ $(0.8, 1.2)$ (κίτρινο χρώμα). . . . .	118
5.23 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.4$ , $k = 0.79$ : . . . . .	119
5.24 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$ , $k = 0.51$ : . . . . .	120
5.25 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -2.1$ , $k = 0.34$ : . . . . .	122
5.26 Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βη- μάτων για $q = -1.6$ και $k = 0.79$ . . . . .	124
5.27 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.6$ , $k = 0.79$ : . . . . .	125
5.28 Διάγραμμα μεταβολής του ποσοστού κάλυψης συναρτήσει του αριθμού βη- μάτων για $q = -1.9$ και $k = 0.68$ . . . . .	126
5.29 Διαγράμματα διαδρομής ρομποτικού συστήματος για, $q = -1.9$ , $k = 0.68$ : . . . . .	127

---

# Κατάλογος πινάκων

2.1 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -0.1$ . . . . .	13
2.2 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -0.3$ . . . . .	19
2.3 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -0.5$ . . . . .	23
2.4 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -0.7$ . . . . .	27
2.5 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -0.9$ . . . . .	31
2.6 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -1.2$ . . . . .	35
2.7 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $a = 1, b = 2, q = -1.4$ και $x_i = 0.1$ . . . . .	39
2.8 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -1.6$ , για $x_i = 0.1$ . . . . .	49
2.9 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -1.9$ , για $x_i = 0.1$ . . . . .	58
2.10 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -2.1$ . . . . .	63
3.1 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -0.3$ . . . . .	71
3.2 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = -0.5$ . . . . .	74
4.1 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = 0.8$ . . . . .	88
4.2 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διάφορες τιμές του $k$ , για $q = 0.9$ . . . . .	93
5.1 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για $q = -1.6, k = 0.79$ . . . . .	123
5.2 Συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος για διαφορετικό αριθμό βημάτων και για $q = -1.9, k = 0.68$ . . . . .	126