MECÁNICA CUÁNTICA 2024-II
Profesor: Álvaro Valdés de Luxán

PROBLEMAS. Tercer parcial.

1. **Operadores de momento angular.**

   Deduzca la expresión del operador cuántico de momento angular $\hat{L}$ expresando las componentes en las direcciones de los vectores unitarios en coordenadas esféricas $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ en lugar de cartesianas. A partir de los vectores $\mathbf{r}$ y ∇ expresados en coordenadas esféricas deduzca:

   - la expresión del operador $\hat{\mathbf{L}}$ en coordenadas esféricas.
   - Mediante la proyección de este vector en las direcciones de los unitarios ($\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$) deduzca la forma de las componentes cartesianas (L_x, L_y, L_z) y la expresión para $\hat{L}^2 = \hat{L} \cdot \hat{L}$.
   - Derive también las expresiones para los operadores escalera $\hat{L}_\pm$ y en función de estos y $\hat{L}_z$ halle de nuevo la expresión para $\hat{L}^2$.

2. **Representación matricial de los operadores de momento angular.**

   Encuentre la representación matricial para los operadores $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$, $\hat{J}_+$ y $\hat{J}_-$ en la base de estados donde $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_z$ son diagonales, para un momento angular $j = 1/2$.

   Entendido esto, obtenga la representación matricial de los operadores $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ y $\hat{J}^2$ en la base de representación donde el operador $\hat{J}_x$ es diagonal.

3. **Operación con operadores escalera.**

   El efecto de los operadores escalera $\hat{J}_\pm$ es tal que transforma un vector de la siguiente forma:

   $$\hat{J}_\pm \left| jm \right\rangle = C_\pm \left| jm \pm 1 \right\rangle$$

   Determine por normalización que la constante $C_\pm$ tiene la forma $\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$.

4. **Oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones.**

   Considere un oscilador cuántico en dos dimensiones con constante de fuerza $k_x = k_y = k_z = 1$ (tome también $\hbar = m = 1$).

   - Escriba la ecuación de Schödinger $\hat{H}\Psi = E\Psi$ en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares planas (r, ϕ). Para ello determine explícitamente la forma del operador laplaciano usando la expresión general con los factores de escala h_i.
   - Teniendo en cuenta la forma del operador $\hat{L}_z^2$ ($\hat{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$) escriba el Hamiltoniano en términos de este operador y pruebe las soluciones del tipo $\Psi(r, \phi) = R(r)e^{im\phi}$ para obtener una ecuación diferencial radial para $R(r)$.
   - Haga la sustitución $\xi = r^2/2$ y obtenga la nueva ecuación radial,

     $$R'' + \frac{1}{\xi}R' + \left[\frac{E}{\xi} - \frac{m^2}{4\xi^2} - 1\right] R = 0$$

     sobre la cual puede postular la forma completa que tiene la función $R(\xi)$ analizando los límites asintóticos de la ecuación para $\xi \to 0$ y $\xi \to \infty$.
   - Con esta forma de $R(\xi)$, que debe incluir, además de las soluciones asintóticas determinadas en el punto anterior, una función desconocida $M(\xi)$. Encuentre que la ecuación diferencial hipergeométrica cuya solución es $M(\xi)$ tiene la forma

     $$\xi M'' + (m + 1 - \xi)M' - \frac{1}{2}(1 + m - E)M = 0$$

- Construya la función $R(r)$ total en términos de la función hipergeométrica confluente, es decir, $M(\xi) \equiv {}_1F_1(a, c; \xi)$ también en función de r, y con el análisis de la expansión en serie de la función hipergeométrica confluente obtenga la expresión de las energías del oscilador en términos de los números cuánticos correctos del problema, sabiendo que el polinomio de la serie hipergeométrica debe ser truncado para evitar la divergencia de la función de onda total.

5. **Átomo de hidrógeno.**

   A partir de los autoestados del átomo de Hidrógeno en coordenadas esféricas $\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi)$, use Mathematica para calcular los valores medios del hamiltoniano $\left\langle \Psi_{n,l,m} | \hat{H} | \Psi_{n,l,m} \right\rangle = E_{n,l,m}$ y calcule las líneas espectrales de las series de Lyman, Balmer, Paschen y Bracket.