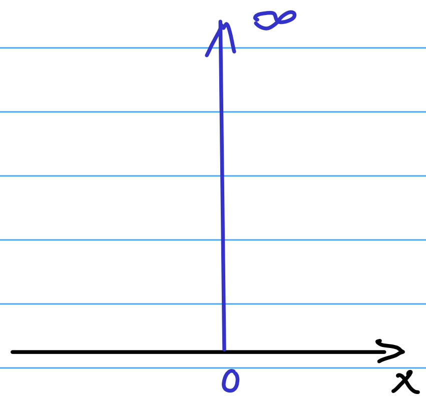
Potenciales tipo delta de Dirac



En este caso $V(x) = a\,\delta(x)$

El potencial es singular en $x=0$

y aunque la función sea continua

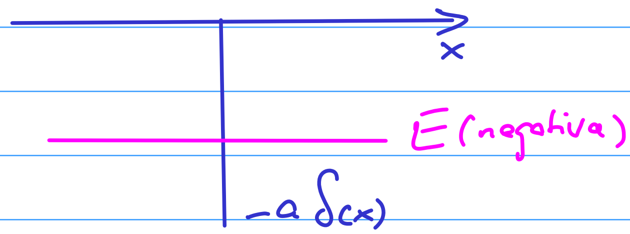
la primera derivada tiene una discontinuidad en

$x=0$. En el punto de discontinuidad se debe cumplir:

- La función de onda debe ser continua
- La derivada de la función de onda ha de ser discontinua según la Ecuación de Schrödinger

Estados ligados

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - a\,\delta(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$



① Para $x \neq 0$ $V(x) = 0$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = k^2\psi(x) \quad \text{con} \quad k = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar} \quad \underbrace{(-E)}_{\to |E|}$$

$$\psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

Escogemos las soluciones de cuadrado integrable:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & x>0 \\ Be^{kx} & x<0 \end{cases}$$

Aplicamos la condición de continuidad en $x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad A=B$

- Para ver la discontinuidad de la primera derivada vamos a integrar la Ec. de Schrödinger entre $(-\varepsilon,\varepsilon)$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)\psi(x)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx = \frac{2m}{\hbar^2}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi(x)dx - E\cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx}\right]$$

$\equiv$ $\qquad\qquad$ $\swarrow 0$ Por ser $\psi(x)$ continua esta integral tiende a cero si $\varepsilon\to 0$

$$\left[\frac{d\psi(x)}{dx}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi(x)dx$$

En nuestro caso con $V(x) = -a\,\delta(x)$

$$\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=\varepsilon} - \left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=-\varepsilon} = \frac{-2ma}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x) = \frac{-2ma}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{-kx} & x>0 \\ A e^{kx} & x<0 \end{cases} \Rightarrow \psi'(x) = \begin{cases} -AKe^{-kx} & x>0 \\ AKe^{kx} & x<0 \end{cases}$$

En $x=0$

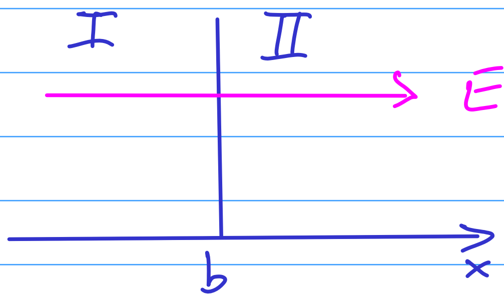
$$-AK - AK = \frac{-2ma}{\hbar^2} A \Rightarrow -2K = -\frac{2ma}{\hbar^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{ma}{\hbar^2}}$$

Hay un solo estado ligado posible con nº de ondas $K = \frac{ma}{\hbar^2}$

y energía: $K = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar} = \frac{ma}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{ma^2}{2\hbar^2}}$

- Veamos el caso de la barrera de potencial tipo $\delta(x)$.



$V(x) = a\,\delta(x-b)$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x<b \\ \psi_{II}(x) = Ce^{ikx} & x>b \end{cases}$$

De nuevo hay que analizar la continuidad de la función en $x=b$ y la discontinuidad de la derivada.

En $x=b$ $\qquad \psi_I(b) = \psi_{II}(b)$

$$Ae^{ikb} + Be^{-ikb} = Ce^{ikb} \Rightarrow A + Be^{-2ikb} = C \quad (1)$$

Integro en $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Escojo la más sencilla entre ψ_I y ψ_{II}

$$\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} = \frac{2ma}{\hbar^2}\psi(b)$$

$$\left.\frac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{x=b} - \left.\frac{d\psi_I}{dx}\right|_{x=b} = \frac{2ma}{\hbar^2}\psi(b)$$

$$ikCe^{ikb} - ikAe^{ikb} + ikBe^{-ikb} = \frac{2ma}{\hbar^2}Ce^{ikb} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ce^{ikb} - Ae^{ikb} + Be^{-ikb} = \frac{-i\,2ma}{\hbar^2 k}Ce^{ikb}$$

$$C\left(1 + \frac{i2ma}{\hbar^2 k}\right)e^{ikb} = Ae^{ikb} - Be^{-ikb} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} C\left(1+\frac{i2ma}{\hbar^2 k}\right) &= A - Be^{-2ikb} \\ C &= A + Be^{-2ikb} \end{aligned}\right\} \text{Sumando (1) y (2)}$$

$$C\left(2 + i\frac{2ma}{\hbar^2 k}\right) = 2A \Rightarrow \boxed{C = \frac{A}{1 + \frac{ima}{\hbar^2 k}}}$$

Si en vez de sumar resto: 2 − 1

$$i\frac{2ma}{\hbar^2 k}C = -2Be^{-2ikb} \Rightarrow B = -i\frac{ma}{\hbar^2 k}e^{2ikb}C \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\frac{-ima}{\hbar^2 k}}{1+\frac{ima}{\hbar^2 k}}e^{2ikb}A}$$

- Coeficientes de transmisión y reflexión   Hago $\gamma = \frac{ma}{\hbar^2 k}$

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{|1+i\gamma|^2} = \frac{1}{(1+i\gamma)(1-i\gamma)} = \frac{1}{1+\gamma^2} = \frac{1}{1+\frac{m^2a^2}{\hbar^4k^2}}$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{|-i\gamma|^2}{|1+i\gamma|^2} = \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{1}{1+\frac{\hbar^4k^2}{m^2a^2}}$$

Observemos que si:

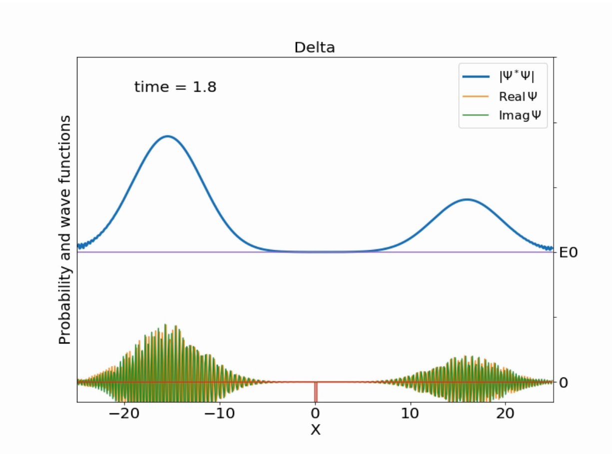
$$a \to 0 \Rightarrow T \to 1 \quad R \to 0$$

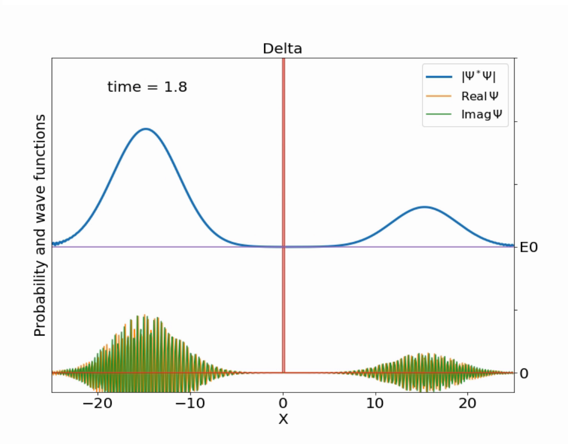
$$a \to \infty \Rightarrow T \to 0 \quad R \to 1$$

Se cumple que $T + R = 1$

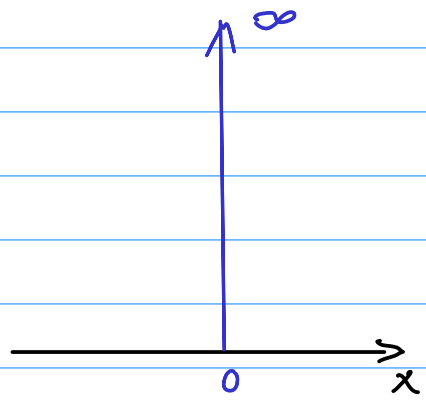
$$\frac{1}{1+\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} = 1$$

Obsérvese que T y R dependen de a^2 → no importa si la δ es positiva o negativa.





Potenciales tipo delta de Dirac



En este caso $V(x) = a\,\delta(x)$

El potencial es singular en $x=0$

y aunque la función sea continua

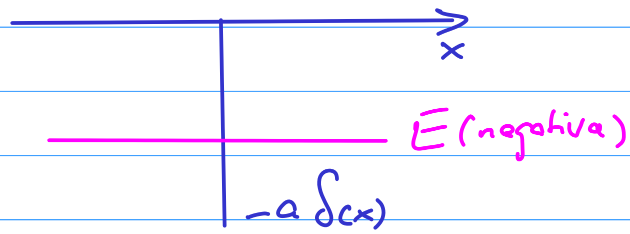
la primera derivada tiene una discontinuidad en

$x=0$. En el punto de discontinuidad se debe cumplir:

- La función de onda debe ser continua
- La derivada de la función de onda ha de ser discontinua según la Ecuación de Schrödinger

Estados ligados

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - a\,\delta(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$



1. Para $x \neq 0$ $V(x) = 0$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = k^2\psi(x) \quad \text{con} \quad k = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$$

$(-E) \to |E|$

$$\psi(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

Escogemos las soluciones de cuadrado integrable:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & x>0 \\ Be^{kx} & x<0 \end{cases}$$

Aplicamos la condición de continuidad en $x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad A=B$

- Para ver la discontinuidad de la primera derivada vamos a integrar la Ec. de Schrödinger entre $(-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)\psi(x)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx = \frac{2m}{\hbar^2}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V(x)\psi(x)dx - E\cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx}\right]$$

$\swarrow 0$ Por ser $\psi(x)$ continua esta integral tiende a cero si $\varepsilon \to 0$

$$\left[\frac{d\psi(x)}{dx}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V(x)\psi(x)dx$$

En nuestro caso con $V(x) = -a\,\delta(x)$

$$\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=\varepsilon} - \left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=-\varepsilon} = \frac{-2ma}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x) = \frac{-2ma}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & x>0 \\ Ae^{kx} & x<0 \end{cases} \Rightarrow \psi'(x) = \begin{cases} -AKe^{-kx} & x>0 \\ AKe^{kx} & x<0 \end{cases}$$

En $x=0$

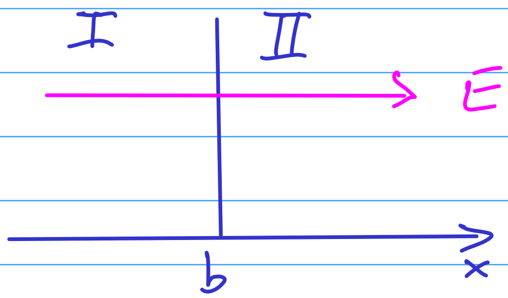
$$-AK - AK = \frac{-2ma}{\hbar^2}A \Rightarrow -2K = -\frac{2ma}{\hbar^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{ma}{\hbar^2}}$$

Hay un solo estado ligado posible con nº de ondas $K = \frac{ma}{\hbar^2}$

y energía: $K = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar} = \frac{ma}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{ma^2}{2\hbar^2}}$

- Veamos el caso de la barrera de potencial tipo $\delta(x)$.



$$V(x) = a\,\delta(x-b)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x<b \\ \psi_{II}(x) = Ce^{ikx} & x>b \end{cases}$$

De nuevo hay que analizar la continuidad de la función en $x=b$ y la discontinuidad de la derivada.

En $x=b$ $\qquad \psi_I(b) = \psi_{II}(b)$

$$Ae^{ikb} + Be^{-ikb} = Ce^{ikb} \Rightarrow A + Be^{-2ikb} = C \quad \text{①}$$

Integro en $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Escojo lo más sencillo entre ψ_I y ψ_{II}

$$\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} = \frac{2ma}{\hbar^2}\psi(b)$$

$$\left.\frac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{x=b} - \left.\frac{d\psi_I}{dx}\right|_{x=b} = \frac{2ma}{\hbar^2}\psi(b)$$

$$ikCe^{ikb} - ikAe^{ikb} + ikBe^{-ikb} = \frac{2ma}{\hbar^2}Ce^{ikb} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ce^{ikb} - Ae^{ikb} + Be^{-ikb} = \frac{-i\,2ma}{\hbar^2 k}Ce^{ikb}$$

$$C\left(1 + \frac{i\,2ma}{\hbar^2 k}\right)e^{ikb} = Ae^{ikb} - Be^{-ikb} \quad \text{②}$$

$$\left.\begin{aligned} C\left(1 + \frac{i2ma}{\hbar^2 k}\right) &= A - Be^{-2ikb} \\ C &= A + Be^{-2ikb} \end{aligned}\right\} \text{Sumando ① y ②}$$

$$C\left(2 + i\frac{2ma}{\hbar^2 k}\right) = 2A \Rightarrow \boxed{C = \frac{A}{1 + \frac{ima}{\hbar^2 k}}}$$

Si en vez de sumar resto: 2 - 1

$$i\frac{2ma}{\hbar^2 k}C = -2Be^{-2ikb} \Rightarrow B = -i\frac{ma}{\hbar^2 k}e^{2ikb}C \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\frac{-i\,ma}{\hbar^2 k}}{1+\frac{i\,ma}{\hbar^2 k}}e^{2ikb}A}$$

- Coeficientes de transmisión y reflexión Hago $\gamma = \frac{ma}{\hbar^2 k}$

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{|1+i\gamma|^2} = \frac{1}{(1+i\gamma)(1-i\gamma)} = \frac{1}{1+\gamma^2} = \frac{1}{1+\frac{m^2a^2}{\hbar^4k^2}}$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{|-i\gamma|^2}{|1+i\gamma|^2} = \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{1}{1+\frac{\hbar^4k^2}{m^2a^2}}$$

Observemos que si:

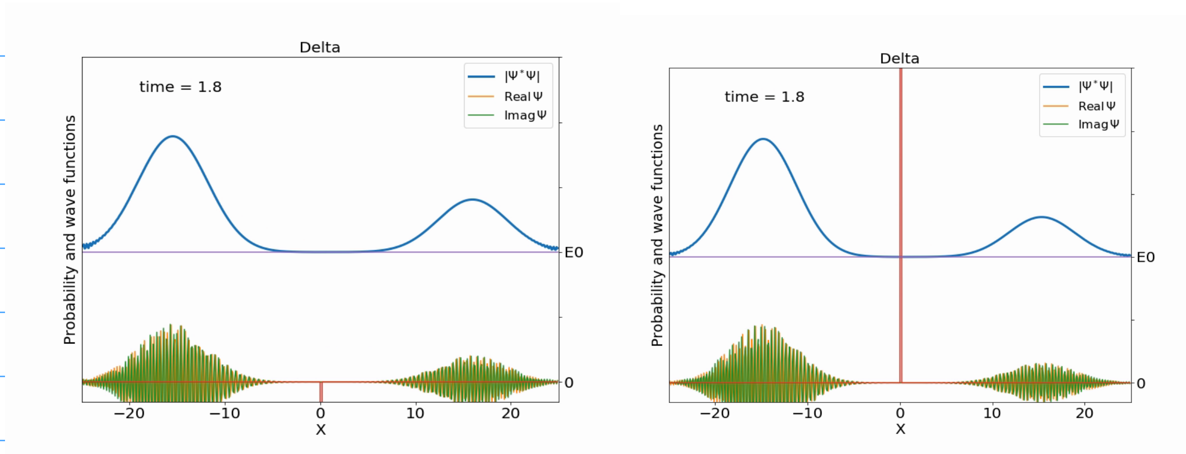
$$a \to 0 \Rightarrow T \to 1 \quad R \to 0$$

$$a \to \infty \Rightarrow T \to 0 \quad R \to 1$$

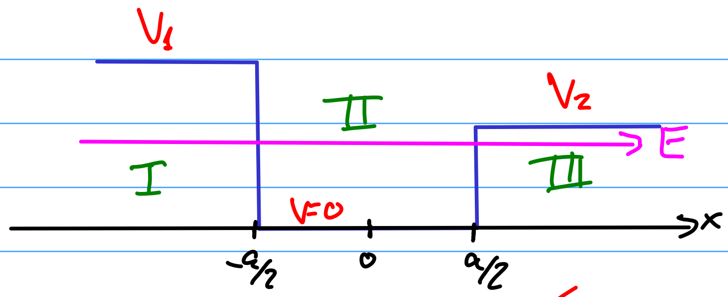
Se cumple que $T + R = 1$

$$\frac{1}{1+\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} = 1$$

Obsérvese que T y R dependen de a^2 → no importa si la δ es positiva o negativa.



Problema 8. Estados ligados



$$V(x) = \begin{cases} V_1 & x \leq -a/2 \\ 0 & -a/2 < x < a/2 \\ V_2 & x \geq a/2 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{q_1 x} + \cancel{Be^{-q_1 x}} & x \leq -a/2 \\ \psi_{II}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx} & -a/2 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \psi_{III}(x) = \cancel{Fe^{q_2 x}} + Ge^{-q_2 x} & x \geq a/2 \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar} \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad q_2 = \frac{\sqrt{2m(V_2-E)}}{\hbar}$$

- Veamos las condiciones de continuidad en $x = -a/2, a/2$

- $\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2)$ $\qquad \frac{\partial \psi_I}{\partial x}(-a/2) = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}(-a/2)$

$$Ae^{-q_1 \frac{a}{2}} = Ce^{-ika/2} + De^{ika/2}$$

$$Aq_1 e^{-q_1 a/2} = ikCe^{-ika/2} - ikDe^{ika/2}$$

En notación matricial:

$$(1) \quad A\begin{pmatrix} e^{-q_1 a/2} \\ \frac{-i}{k} q_1 e^{-q_1 a/2} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} e^{-ika/2} & e^{ika/2} \\ e^{-ika/2} & -e^{ika/2} \end{pmatrix}}^{M_1} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

- Ahora en $x = a/2$

$$(2) \quad G\begin{pmatrix} e^{-q_2 a/2} \\ \frac{-i}{k} q_2 e^{-q_2 a/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ika/2} & e^{-ika/2} \\ e^{ika/2} & -e^{-ika/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Entonces, de 1

$$3 \quad \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A M^{-1} \begin{pmatrix} e^{-q_1 a/2} \\ \frac{-i}{k} q_1 e^{-q_1 a/2} \end{pmatrix}$$

con $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{ika}{2}} & e^{ika/2} \\ e^{-ika/2} & -e^{-ika/2} \end{pmatrix}$

- Sustituyo 3 en 2

$$G \begin{pmatrix} e^{-q_2 a/2} \\ \frac{-i}{k} q_2 e^{-q_2 a/2} \end{pmatrix} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} e^{ika/2} & e^{-ika/2} \\ e^{ika/2} & -e^{-ika/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{ika}{2}} & e^{ika/2} \\ e^{-ika/2} & -e^{-ika/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-q_1 a/2} \\ \frac{-i}{k} q_1 e^{-q_1 a/2} \end{pmatrix}$$

$$G e^{-q_2 a/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\frac{q_2}{k} \end{pmatrix} = \frac{A}{2} e^{-q_1 a/2} \begin{pmatrix} e^{ika} + e^{-ika} & e^{ika} - e^{-ika} \\ e^{ika} - e^{-ika} & e^{ika} + e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\frac{q_1}{k} \end{pmatrix}$$

Llego a las ecuaciones:

$$4 \quad G e^{-q_2 a/2} = A e^{-q_1 a/2} \left(\cos(ka) + \frac{q_1}{k} \operatorname{sen}(ka) \right)$$

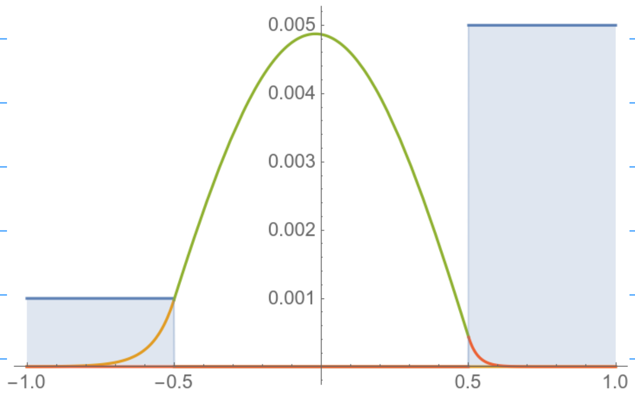
$$5 \quad G \frac{q_2}{k} e^{-q_2 a/2} = A e^{-q_1 a/2} \left(\operatorname{sen}(ka) - \frac{q_1}{k} \cos(ka) \right)$$

Hago 5/4

$$\frac{q_2}{k} = \frac{\operatorname{sen}(ka) - \frac{q_1}{k}\cos(ka)}{\cos(ka) + \frac{q_1}{k}\operatorname{sen}(ka)} \Rightarrow \tan ka = \frac{(q_1 + q_2) k}{k^2 - q_1 q_2}$$

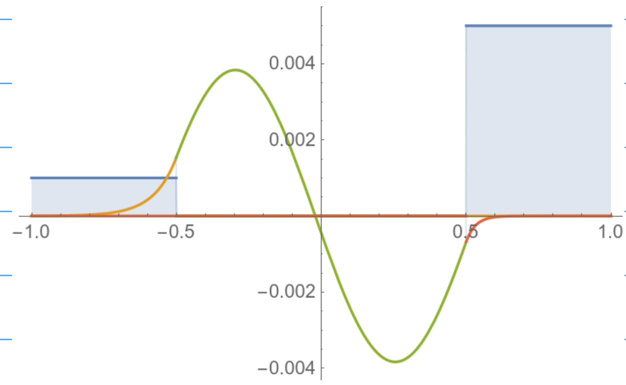
Que es la ecuación trascendental para calcular las energías de los estados ligados $(q_1 \equiv q_1(E), q_2 = q_2(E))$

$n = 0$



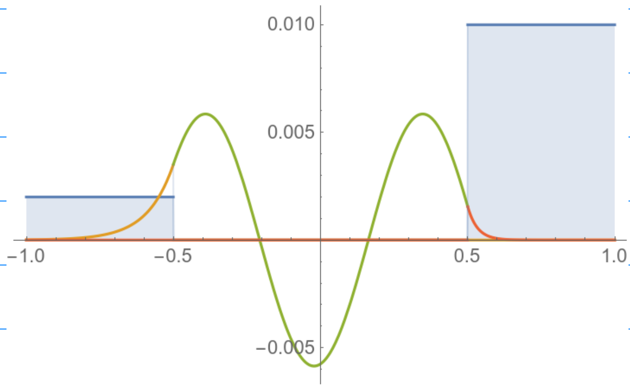
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
−1.0
−0.5
0.5
1.0

$n = 1$



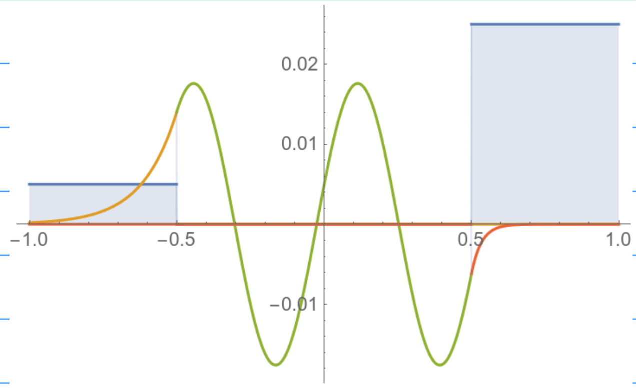
0.004
0.002
−1.0
−0.5
0.5
1.0
−0.002
−0.004

$n = 2$



0.010
0.005
−1.0
−0.5
0.5
1.0
−0.005

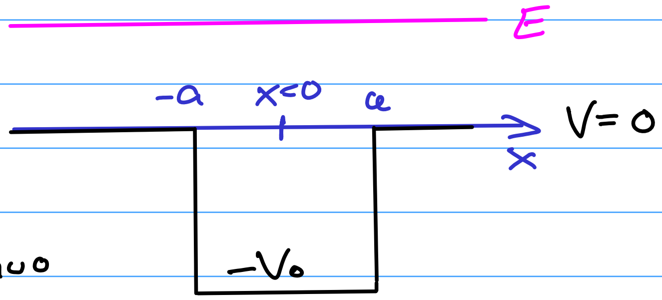
$n = 3$



0.02
0.01
−1.0
−0.5
0.5
1.0
−0.01

Pozo de potencial

$$V(x) = -V_0\, \mathcal{H}(a - |x|)$$



- $E > 0$ Estados del continuo

El problema es el mismo que en el caso de la barrera, con $E > V_0$, sustituyendo $V_0 \to -V_0$.

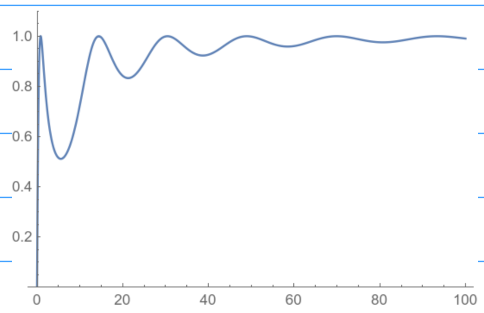
Las soluciones nos llevan a:

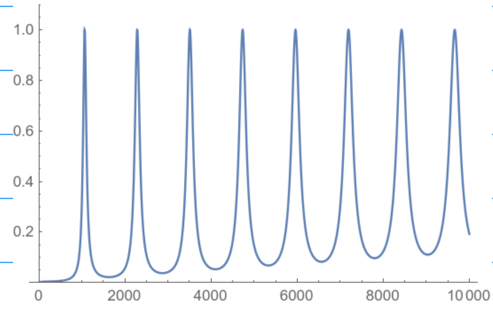
$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 2qa}{4\frac{E}{V_0}\left(1 + \frac{E}{V_0}\right)}} \qquad \text{con } q = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

De nuevo los máximos de $T(E)$ coinciden con los autovalores de un pozo de profundidad V_0.

$$2qa = n\pi \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}a = n\pi \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8a^2m} - V_0$$

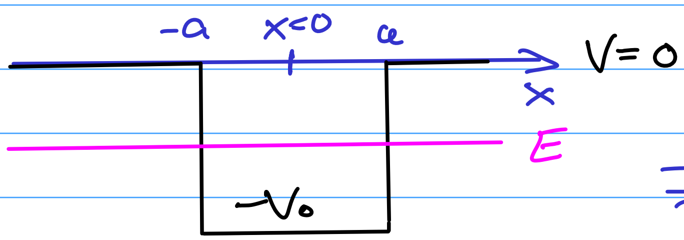
Cuando $E \ll V_0$ y $\xi = \sqrt{2mV_0}\,\frac{a}{\hbar}$ los máximos y mínimos están muy pronunciados y tienden a una distribución de deltas de Dirac.





$\xi \simeq 8$ $\qquad\qquad$ $\xi \simeq 775$

- $E \leq 0$. Estados ligados



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

$$V(x)=-V_0\,H(a-|x|)$$

- Para $|x|<a$ $\qquad \dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)\psi=0$ $\qquad E<0$, $V_0>0$

$$\psi(x)=\begin{cases} Ae^{-\kappa x}+Be^{\kappa x} & \text{para } |x|>a \quad \text{con } \kappa=\dfrac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \\ Ce^{-iqx}+De^{iqx} & \text{para } |x|<a \quad q=\dfrac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar} \end{cases}$$

$|E|<V_0$

Se puede aprovechar la simetría del problema. Como el potencial es par las soluciones van a ser pares o impares.

- Soluciones pares

$$\text{(1)} \quad \psi_{par}(x) = \begin{cases} A\cos qx & |x| < a \\ e^{-kx} & x > a \quad \text{Convergencia en } x \to \infty \\ e^{kx} & x < -a \quad \text{Convergencia en } x \to -\infty \end{cases}$$

- Soluciones impares

$$\psi_{impar}(x) = \begin{cases} A\sin qx & |x| < a \\ +e^{-kx} & x > a \\ -e^{kx} & x < a \end{cases}$$

Cambio de signo para la solución impar

- Simetría par

Condiciones de continuidad de la función y su derivada:

$$A\cos qx\Big|_{x=a} = e^{-kx}\Big|_{x=a}$$

$$-Aq\sin qx\Big|_{x=a} = -ke^{-kx}\Big|_{x=a}$$

Dividiendo la ecuación de abajo por la de arriba

$$\tan qa = \frac{k}{q} \qquad\qquad k = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

Voy a operar sobre q y k: $\quad q = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}$

Sumo y resto $2mV_0$

$$\tan qa = \frac{ka}{qa} = \frac{\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(-E)-2mV_0+2mV_0}}{qa} = \frac{\left[2mV_0\frac{a^2}{\hbar^2} - 2m(E+V_0)\frac{a^2}{\hbar^2}\right]^{1/2}}{qa} =$$

$$= \frac{\left[\xi^2 - (qa)^2\right]^{1/2}}{qa} \quad \text{con} \quad \xi = \sqrt{2mV_0}\,\frac{a}{\hbar}, \quad qa = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}\,a$$

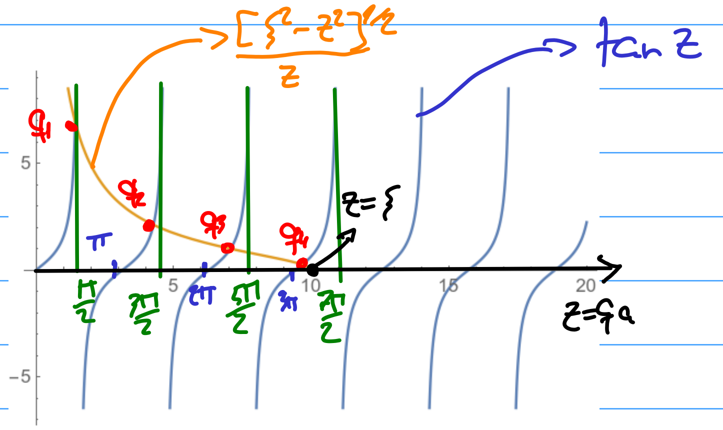
Como $-V_0 \leq E \leq 0$ los números de onda están limitados a:

$$0 \leq qa \leq \xi \longrightarrow E=0$$
$$\hookrightarrow E=-V_0$$

Para determinar los posibles valores de q hay que resolver la ecuación transcendental

$$\tan z = \frac{\left[\xi^2 - z^2\right]^{1/2}}{z} \quad \text{con } z = qa$$

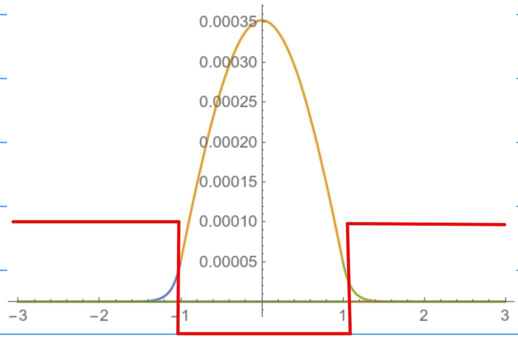
Esto se puede resolver numérica o gráficamente.



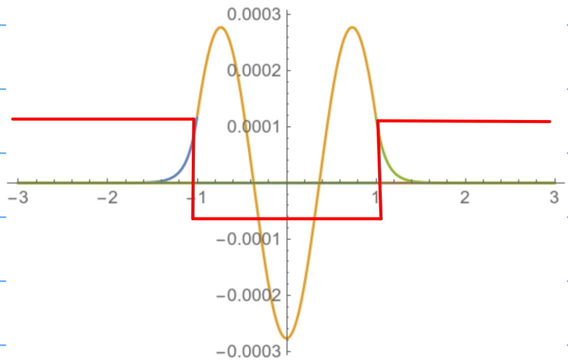
Como $q = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$ al hallar los q_n que intersectan se obtienen las energías cuantizadas:

$$E_n = -V_0 + \frac{(\hbar q_n)^2}{2m}$$

- Como $\frac{\left[\xi^2 - z^2\right]^{1/2}}{z}$ se anula para $z=\xi$ no importa lo pequeño que sea ξ siempre habrá un estado ligado de simetría par
- Como hay una intersección cada $z=\pi$ el nº de energías será $n_{pares} = \mathrm{int}\left[\frac{\xi}{\pi}\right] + 1$
- Una vez obtenidos los q_i podemos aplicar la ecuación de continuidad en $x=a$ ① para obtener A.



Primer estado par



Segundo estado par

• Simetría impar

Condiciones de continuidad de la función y su derivada:

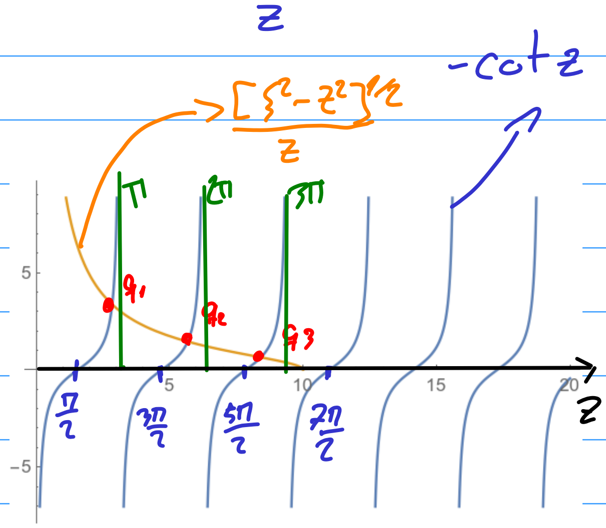
$$A \sin qx \Big|_{x=a} = e^{-kx} \Big|_{x=a}$$

$$Aq \cos qx \Big|_{x=a} = -k e^{-kx} \Big|_{x=a}$$

En este caso:

$$-\cot qa = \frac{k}{q} = \underbrace{\frac{[\xi^2 - (qa)^2]^{1/2}}{qa}}_{\text{Parte igual que en el caso par}}$$

$$-\cot z = \frac{[\xi^2 - z^2]^{1/2}}{z}$$

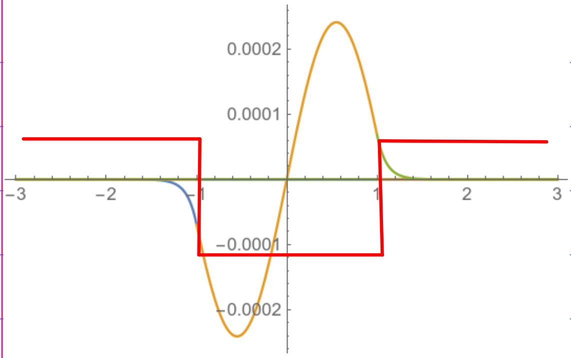


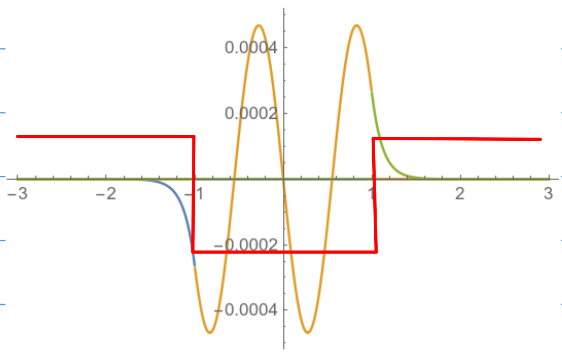
• Si $\frac{\pi}{2}(2n-1) < \xi < \frac{\pi}{2}(2n+1)$ entonces la ecuación tiene n soluciones

• Para que haya al menos una solución $\frac{\pi}{2} < \xi$

Es decir $\xi^2 > \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow 2mV_0 \frac{a^2}{\hbar^2} > \pi^2/4$

Pero siempre habrá al menos una solución par





Primer estado impar   Segundo estado impar

- Las energías estarán ordenadas

	qa	Paridad	Nodos
Estado base	$[0, \frac{\pi}{2}]$	par	0
Primer estado excitado	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	impar	1
Segundo estado excitado	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	par	2
Tercer estado excitado	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	impar	3

- Si $-V_0 \to -\infty$ se recupera el problema de la partícula cuántica en una caja de paredes infinitas.

Las soluciones son entonces:

Pares

$$\psi_p = H(a-|x|)\cos qx$$

$$qa = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\psi_p = H(a-|x|)\cos\left(\frac{(\overset{n'}{2n}+1)\pi x}{2a}\right)$$

$n' = 1, 3, 5, 7$

Impares

$$\psi_I = H(a-|x|)\,\text{sen}\, qx$$

$$qa = n\pi$$

$$\psi_I = H(a-|x|)\sin\left(\frac{\overset{n'}{2n}\pi x}{2a}\right)$$

$n' = 2, 4, 6, \ldots$

1. **Oscilador armónico**

Para un oscilador armónico con hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ se verifican las expresiones

$$\hat{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1} \qquad \hat{a}^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$$

donde ψ_n son las autofunciones del oscilador armónico y

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}\right) \qquad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

- Si $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, encuentre $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en función de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$. A partir del conmutador del $\hat{x}$ y $\hat{p}$ encuentre $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$ y úselo para encontrar $\hat{H}$ también en función de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$.

$\xi = \frac{x}{\alpha_0}$ con $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x} = \alpha_0\frac{\partial}{\partial x}$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\alpha_0} - \alpha_0\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}\hat{p}$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(m\omega\,\hat{x} - i\hat{p}\right)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(m\omega\,\hat{x} + i\hat{p}\right)$$

Por tanto: $\quad \hat{a} + \hat{a}^+ = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} \qquad \hat{a} - \hat{a}^+ = \frac{2}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,i\hat{p}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^+\right) \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^+\right)$$

- A partir de la regla de conmutación $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ vamos a encontrar el conmutador $[\hat{a}, \hat{a}^+]$.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = -\frac{i\hbar}{2}\left[\hat{a} + \hat{a}^+, \hat{a} - \hat{a}^+\right] = i\hbar$$

$$= -\frac{i\hbar}{2}\left(\cancel{[\hat{a}, \hat{a}]} - [\hat{a}, \hat{a}^+] + [\hat{a}^+, \hat{a}] - \cancel{[\hat{a}^+, \hat{a}^+]}\right) =$$

$$= i\hbar[\hat{a}, \hat{a}^+] \Rightarrow \boxed{[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}}$$

Por otro lado

$$\hat{p}^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left[\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^{+2}\right]$$

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^{+2}\right]$$

Y como: $1 = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+\hat{a}$

$$\hat{p}^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left[\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} - 2\hat{a}^+\hat{a} - 1\right]$$

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1\right]$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = -\frac{\hbar\omega}{4}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^{+2}\right) +$$

$$+ \frac{\hbar\omega}{4}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^{+2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}\right) =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(1 + 2\hat{a}^+\hat{a}\right) = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \hat{a}^+\hat{a}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

- Obtenga las representaciones matriciales de los operadores $\hat{x}, \hat{p}, \hat{x}^2$ y $\hat{p}^2$ en la base de autofunciones del oscilador haciendo uso del método algebraico.

En representación matricial

$\hat{x}$ $$\langle n|\hat{x}|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n|\hat{a}|m\rangle + \langle n|\hat{a}^+|m\rangle\right) =$$

$$\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{m}\,\delta_{n\,m-1} + \sqrt{m+1}\,\delta_{n\,m+1}\right)$$

$\hat{p}$ $$\langle n|\hat{p}|m\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\langle n|\hat{a}|m\rangle - \langle n|\hat{a}^+|m\rangle\right) =$$

$$= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{m}\,\delta_{n\,m-1} - \sqrt{m+1}\,\delta_{n\,m+1}\right)$$

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1\right]$$

$$\langle n|x^2|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n|\hat{a}^2|m\rangle + \langle n|\hat{a}^{+2}|m\rangle + 2\langle n|\hat{a}^+\hat{a}|m\rangle + \langle n|m\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n\,m-2} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n\,m+2} + (2m+1)\,\delta_{nm}\right)$$

$$\hat{p}^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left[\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} - 2\hat{a}^+\hat{a} - 1\right]$$

$$\langle n|\hat{p}^2|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n|\hat{a}^2|m\rangle + \langle n|\hat{a}^{+2}|m\rangle + 2\langle n|\hat{a}^+\hat{a}|m\rangle + \langle n|m\rangle\right)$$

$$-\frac{\hbar m\omega}{2}\left(\sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n\,m-2} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n\,m+2} - (2m+1)\,\delta_{nm}\right)$$

- Demuestre que para cualquier estado con energía E_n del oscilador armónico de frecuencia ω se cumple la igualdad

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \left(\frac{E_n}{\omega}\right)^2$$

analizando cómo se cumple el principio de indeterminación de Heisenberg.

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle n|\Delta x^2|n\rangle = \langle n|\hat{x}^2|n\rangle - \langle n|\hat{x}|n\rangle^2$$

$$\langle n|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|(\hat{a}+\hat{a}^+)|n\rangle = 0$$

$$\langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|[\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}+\hat{a}^{+2}]|n\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\underbrace{\hat{a}\hat{a}^+}_{1+\hat{N}}+\underbrace{\hat{a}^+\hat{a}}_{\hat{N}}|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|1+2\hat{N}|n\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle n|\hat{p}|n\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle n|(\hat{a}-\hat{a}^+)|n\rangle = 0$$

$$\langle n|\hat{p}^2|n\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|[\hat{a}^2-\hat{a}\hat{a}^+-\hat{a}^+\hat{a}+\hat{a}^{+2}]|n\rangle =$$

$$= -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|-2\hat{a}^+\hat{a}-1|n\rangle = \hbar m\omega(n+1/2)$$

Entonces:

$$\langle n|\Delta x^2|n\rangle\langle n|\Delta p^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar m\omega(n+1/2) =$$

$$= \hbar^2(n+1/2)^2 = \frac{E_n^2}{\omega^2}$$

Se cumple el principio de incertidumbre pues

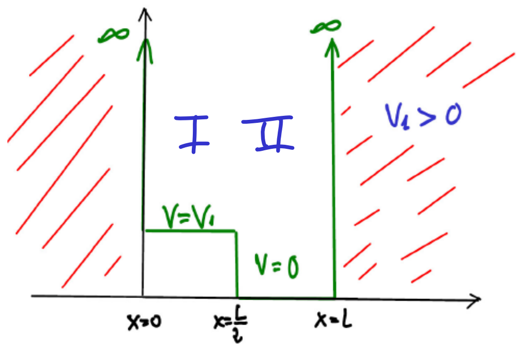
$\Delta x\Delta p \geq \hbar/2$ para cualquier n.

2. **Partícula confinada** Considere una partícula confinada en una caja de modo que el potencial es:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ V_1 & 0 < x < L/2 \\ 0 & L/2 < x < L \\ \infty & x \geq L \end{cases}$$

con $V_1 > 0$.

- Encuentre la ecuación trascendente que determina las energías permitidas de los estados ligados para una partícula de masa m a partir de las relaciones de los números de onda de las distintas regiones del potencial. Calcule la relación entre los coeficientes de estas regiones.
- Considere los casos $E < V_1$ y $E > V_1$.



Veamos primero el caso $0 < E < V_1$

En este caso las soluciones son de la forma:

- $\psi_I = A' e^{q_1 x} + B' e^{-q_1 x}$ con $q_1 = \frac{\sqrt{2m(V_1 - E)}}{\hbar}$

- $\psi_{II} = C' e^{i q_2 x} + D' e^{-i q_2 x}$ con $q_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

- De $\psi_I(0) = 0 \Rightarrow A' = -B'$

  - $\psi_I(x) = A \,\text{senh}(q_1 x)$

- De $\psi_{II}(L) = 0 \Rightarrow C' e^{i q_2 L} + D' e^{-i q_2 L} = 0 \Rightarrow D' = -C' e^{2 i q_2 L}$

  - $\psi_{II}(x) = C' \left(e^{i q_2 x} - e^{2 i q_2 L} e^{-i q_2 x}\right)$

$$= C' e^{i q_2 L}\left(e^{i q_2 (x-L)} - e^{-i q_2 (x-L)}\right) = C \,\text{sen}(q_2 (x - L))$$

- Condiciones de continuidad en $x = \frac{L}{2}$

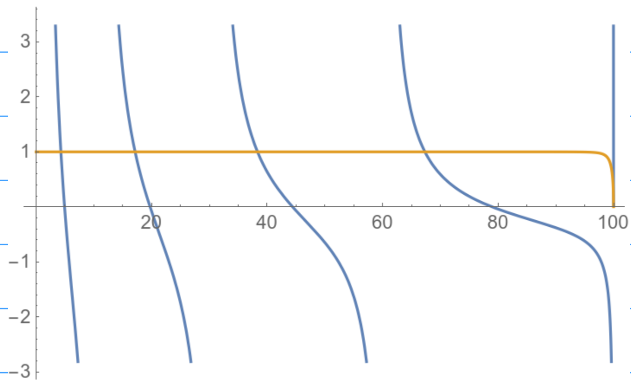
1) $\psi_I\left(\frac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A \operatorname{senh}\left(\frac{q_1 L}{2}\right) = -C \operatorname{sen}\left(q_2 \frac{L}{2}\right)$

2) $\psi_I'\left(\frac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A q_1 \cosh\left(\frac{q_1 L}{2}\right) = C q_2 \cos\left(q_2 \frac{L}{2}\right)$

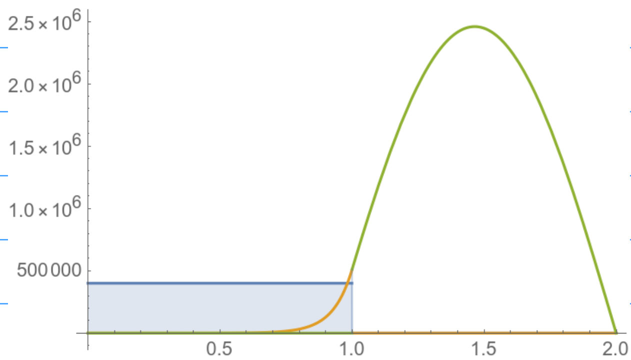
Divido 1 entre 2

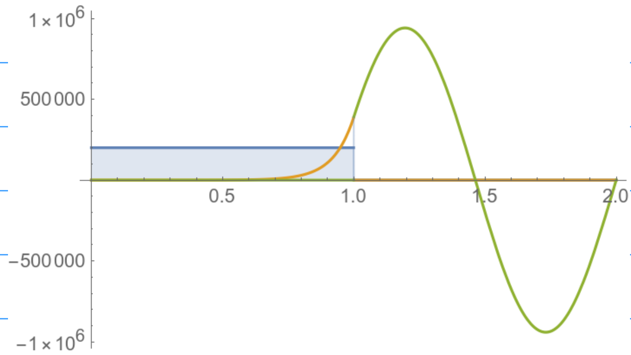
$$\tanh\left(\frac{q_1 L}{2}\right) = -\frac{q_1}{q_2} \tan\left(q_2 \frac{L}{2}\right)$$

Ecuación trascendente que me permite encontrar las energías permitidas:



- Una vez obtenida la energía con la ecuación 1 obtengo la relación entre los coeficientes A y B





- Consideremos ahora $E > V_1$

Las soluciones son de la forma:

- $\psi_I = A' e^{iq_1 x} + B' e^{-iq_1 x}$ con $q_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_1)}}{\hbar}$
- $\psi_{II} = C' e^{iq_2 x} + D' e^{-iq_2 x}$ con $q_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

- De $\psi_I(0) = 0 \Rightarrow A' = -B'$

  - $\psi_I(x) = A \operatorname{sen}(q_1 x)$

- De $\psi_{II}(L) = 0 \Rightarrow$ Como hemos visto antes

  - $\psi_{II}(x) = C \operatorname{sen}(q_2 (x - L))$

  - Condiciones de continuidad en $x = \frac{L}{2}$

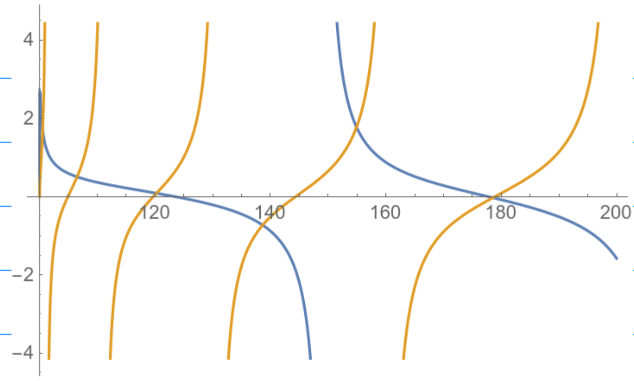
(3) $\psi_I\left(\frac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A \operatorname{sen}\left(\frac{q_1 L}{2}\right) = -C \operatorname{sen}\left(q_2 \frac{L}{2}\right)$

(4) $\psi_I'\left(\frac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A q_1 \cos\left(\frac{q_1 L}{2}\right) = C q_2 \cos\left(q_2 \frac{L}{2}\right)$

Divido (4) entre (3)

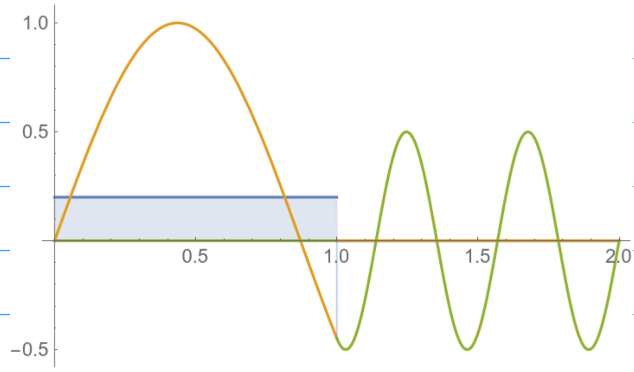
$$\tan\left(q_1 \frac{L}{2}\right) = \frac{-q_1}{q_2} \tan\left(\frac{q_2 L}{2}\right)$$

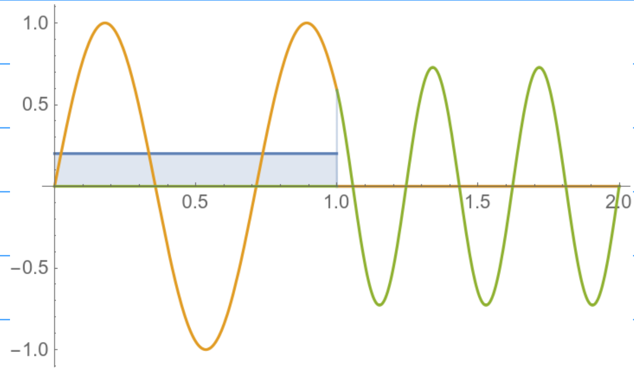
Esta es la ecuación trascendente. Una vez obtenidas las energías permitidas la ecuación (3) da la relación entre los coeficientes

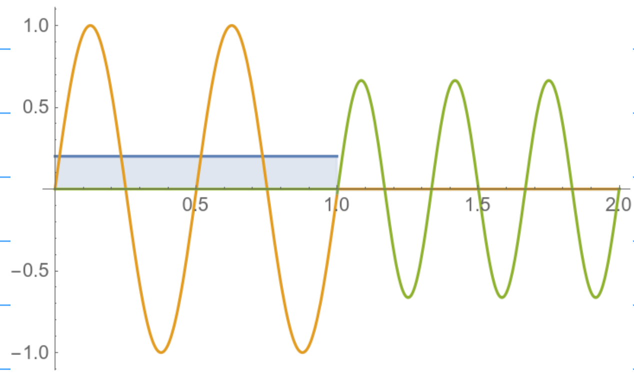


Ecuación trascendente

Algunos estados:







- De la ecuación (3) vemos que otras posibles soluciones ocurren si:

$$q_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_1)}}{\hbar}$$

$$q_1 \frac{L}{2} = n\pi \qquad q_2 \frac{L}{2} = n'\pi$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Para que se cumpla esta condición:

$$\frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2} = \frac{4n^2\pi^2}{L^2} \quad y \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{4n'^2\pi^2}{L^2}$$

$$E = \underbrace{\frac{2\hbar^2 n^2\pi^2}{mL^2}}_{E\,\text{caja}\,\frac{L}{2}} + V_1 = \underbrace{\frac{2\hbar^2 n'^2\pi^2}{mL^2}}_{E\,\text{caja}\,\frac{L}{2}}$$

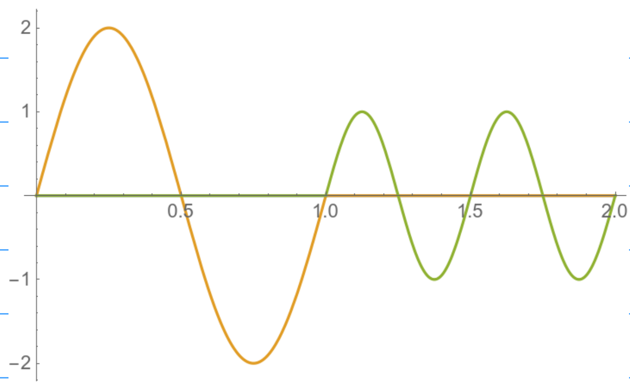
Esta solución será valida cuando V_1 sea exactamente igual a la diferencia energética entre dos estados de la caja $L/2$ $\Rightarrow V_1 = \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}(n^2 - n'^2)$

Si se cumple esta condición la solución será:

$$\psi_1 = A \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$$

$$\psi_2 = B \operatorname{sen}\left(\frac{2n'\pi}{L}(x-L)\right)$$

De (4) $C = A\frac{n}{n'}(-1)^{n+n'}$

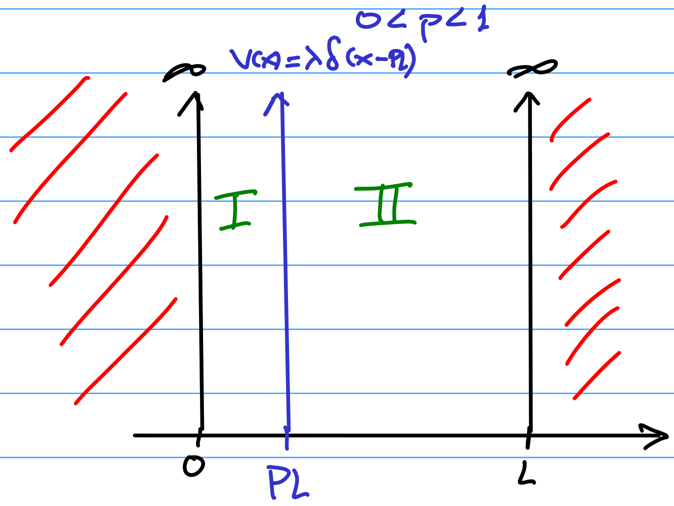


$n=2$

$n'=4$

Potenciales delta en confinamiento

Considere una partícula confinada en una caja de longitud $L, x \in (0, L)$, de forma que dentro de la caja también se tiene un potencial de tipo delta de Dirac de la forma $V(x) = \lambda\delta(x - pL)$ con $0 < p < 1$. Proponga la forma de las funciones en cada región para este potencial y encuentre la condición de cuantización general en función de λ, p y L. Resuelva numéricamente el caso específico con $2m\lambda/\hbar^2 = 8$, $L = 3$ y p=0.5, de forma que pueda encontrar las energías de los tres primeros estados ligados y dibuje las funciones de onda para estos tres primeros estados ligados. Analice en sus fórmulas en el límite asintótico con $\lambda \to 0$, comparando con el resultado exacto.



$$\psi_I = A' e^{ikx} + B' e^{-ikx}$$

$$\psi_{II} = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

En I $\quad \psi_I(0) = 0 \Rightarrow A' + B' = 0 \Rightarrow \boxed{\psi_I(x) = A \sin kx}$

En II $\quad \psi_{II}(L) = 0 \Rightarrow C e^{ikL} + D e^{-ikL} = 0 \Rightarrow D = -C e^{2ikL}$

$$\psi_{II}(x) = C\left(e^{ikx} - e^{2ikL} e^{-ikx}\right) = C'\left(e^{-ikL} e^{ikx} - e^{ikL} e^{-ikx}\right)$$

$$C' = C e^{ikL}$$

$$= C'\left(e^{ik(x-L)} - e^{-ik(x-L)}\right) = B \operatorname{sen} k(x-L)$$

$$\boxed{\psi_{II}(x) = B \operatorname{sen} k(x-L)}$$

• Continuidad en $x = LP$

$$A \sin kLP = B \sin k(LP - L) \begin{cases} (i) \Rightarrow \sin k(LP-L) = \frac{A}{B} \sin kLP \\ (ii) \Rightarrow \begin{cases} \sin kLP = 0 \\ \sin k(LP-L) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Hay 2 tipos de soluciones

- Discontinuidad de la derivada

$$\int_{LP-\varepsilon}^{LP+\varepsilon} \frac{d^2\psi}{dx^2}\, dx = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{LP-\varepsilon}^{LP+\varepsilon} V\psi(x)\, dx - \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}\int_{LP-\varepsilon}^{LP+\varepsilon} \psi(x)\, dx}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0}$$

$V(x) = \lambda\delta(x-PL)$

$$\left[\frac{d\psi}{dx}\right]_{LP-\varepsilon}^{LP+\varepsilon} = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} A \sin kLP \quad \text{con} \begin{cases} \psi_I'(x) = kA\cos kx \\ \psi_{II}'(x) = kB\cos k(x-L) \end{cases}$$

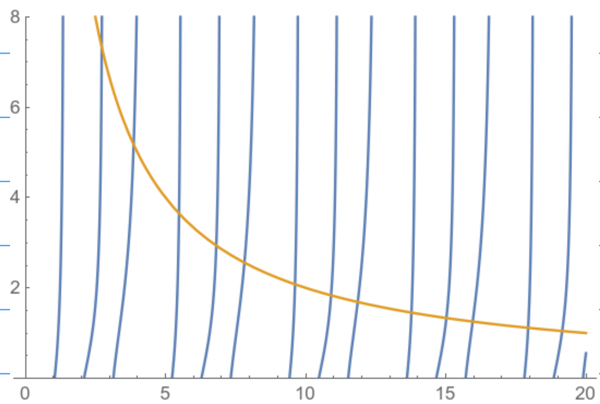
$$\cos k(LP-L) = \frac{A}{B}\left(\frac{2m\lambda}{k\hbar^2}\sin kLP + \cos kLP\right)$$

Veamos los 2 tipos de soluciones

(i) $$\sin k(LP-L) = \frac{A}{B}\sin kLP$$

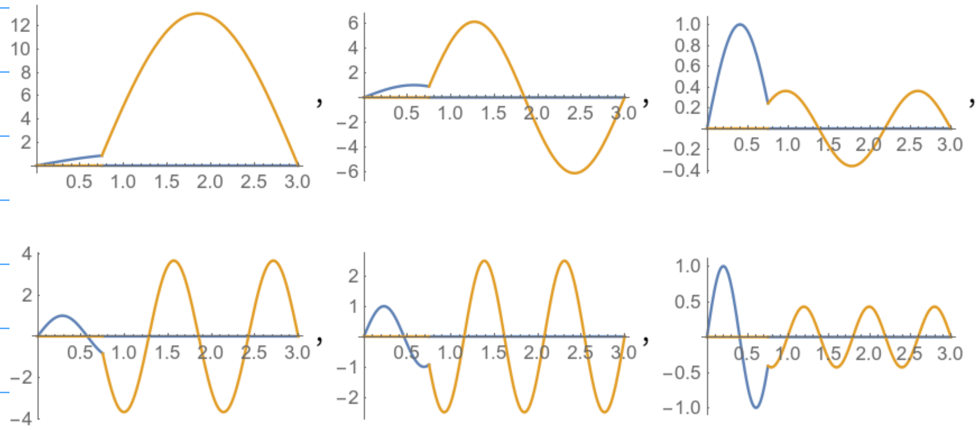
De la derivada $$\cos k(LP-L) = \frac{A}{B}\left(\frac{2m\lambda}{k\hbar^2}\sin kLP + \cos kLP\right)$$

$$\cot k(LP-L) = \frac{2m\lambda}{k\hbar^2} + \cot kLP$$ Ecuación trascendental



$\longrightarrow k$

Esta ecuación dará los posibles valores de k y de la ecuación (i) obtenemos las autofunciones



Ej:
$L=3 \quad p=1/4$
$\lambda = 10$

Obsérvese que si $p=0.5$ y $\lambda=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cot\left(-\frac{kL}{2}\right) = \cot\left(\frac{kL}{2}\right) \Rightarrow \frac{kL}{2} = \frac{(2n-1)}{2}\pi$$

$$E = \frac{\hbar^2(2n-1)^2\pi^2}{2mL^2} \longrightarrow \text{soluciones pares en } L$$

(ii)

$$\begin{cases} \sin kLP = 0 \\ \sin k(LP-L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} kLP = n\pi \\ kLP - kL = n'\pi \end{matrix}$$

$$kL = (n-n')\pi \qquad \frac{2mEL^2}{\hbar^2} = (n-n')^2\pi^2 \Rightarrow E = \frac{(n-n')^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

P debe cumplir $\Rightarrow$

$$\left.\begin{cases} P = \dfrac{n\pi}{kL} \\ P-1 = \dfrac{n'\pi}{kL} \end{cases}\right\} \frac{P}{P-1} = \frac{n}{n'} \Rightarrow n'P = nP - n \qquad \boxed{P = \frac{n}{n-n'}}$$

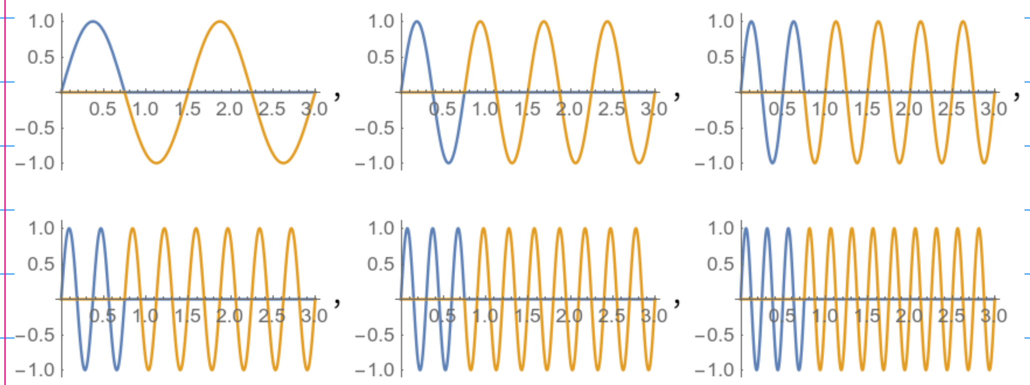
$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{p^2\, 2mL^2} = \frac{n'^2\pi^2\hbar^2}{(P-1)^2\, 2mL^2}$$

Si $p = \frac{1}{2} \Rightarrow E = \dfrac{(2n)^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \Rightarrow$ Energía de las soluciones impares

La discontinuidad me permite obtener las autofunciones

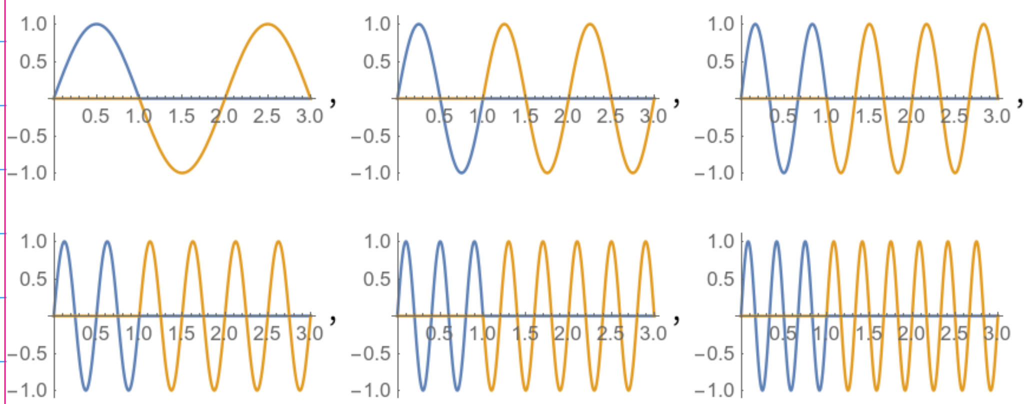
$$\underbrace{\cos(n'\pi)}_{(-1)^{n'}} = \frac{A}{B}\left(\underbrace{\frac{2m\lambda}{k\hbar^2}\phi}_{0} + \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right) \Rightarrow A = B(-1)^{n'-n}$$

$$B = (-1)^{n'-n} A$$



Soluciones con k δ en un nodo

$P = 1/4$



$P = 1/3$