1η Εργαστηριακή Άσκηση

Εργασία της Πλευρίδη Βασιλική Βαρβάρα (AEM:10454)

Η άσκηση αυτή έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση δοσμένων κυρτών συναρτήσεων μιας μεταβλητής $x\epsilon[a,b]$ με την χρήση των εξής μεθόδων αναζήτησης:

- Μέθοδος της Διχοτόμου
- Μέθοδος του Χρυσού Τομές
- Μέθοδος Fibonacci
- Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγων

Οι αντικειμενικές συναρτήσεις των οποίων ψάχνουμε το ελάχιστο είναι οι:

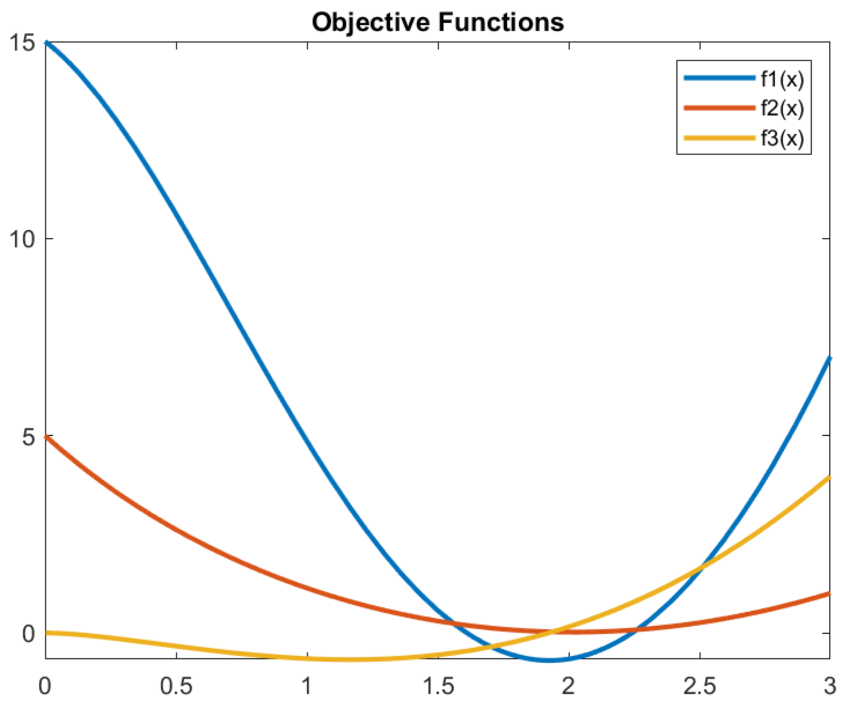
$$f1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2\cos(x)$$

$$f2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$$

$$f3(x) = x^2\ln(0.5\mathrm{x}) + \sin((0.2\mathrm{x})^2)$$

Και τα υπόλοιπα δεδομένα που απαιτούνται για την βελτιστοποίηση είναι τα $a = 0$, $b = 3$, $\varepsilon = 0.001$, $l = 0.01$ (όπου l και ε είναι σταθερά).

Αρχικά, απεικονίζω τις 3 συναρτήσεις σε ένα γράφημα έτσι ώστε να έχω μια οπτική εικόνα του που αναμένω να βρίσκονται περίπου τα ελάχιστα των αντικειμενικών συναρτήσεων. Το γράφημα παρουσιάζεται παρακάτω:



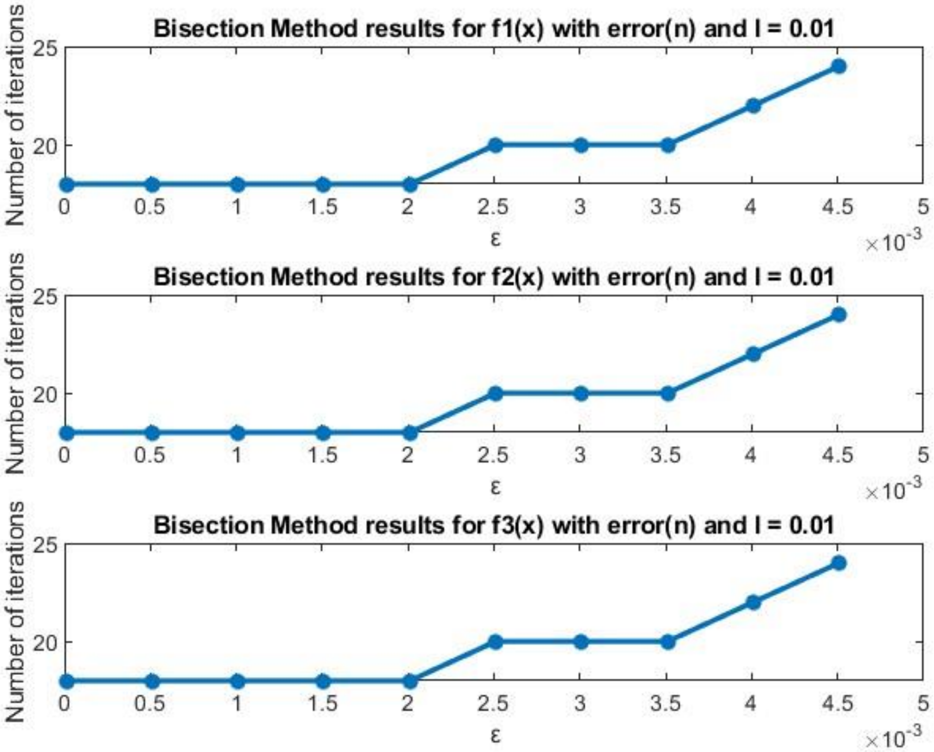
Καθώς η εργασία ζητάει την υλοποίηση των ίδιων ζητημάτων για διαφορετικές μεθόδους, χρησιμοποιώ όπως φαίνεται και στους κώδικες στο MATLAB τις ίδιες συναρτήσεις οι οποίες όμως ανάλογα με την μέθοδο που θέλουμε να εκτελέσουμε, χρησιμοποιούν εσωτερικά τον κατάλληλο αλγόριθμο μεθόδου.

Θέμα 1 – Μέθοδος της διχοτόμου

Η μέθοδος αυτή ουσιαστικά βρίσκει και επιλέγει το νέο βελτιστοποιημένο διάστημα αναζήτησης συγκρίνοντας κάθε φορά τα $f(x1)$ και $f(x2)$ μεταξύ τους όπου:

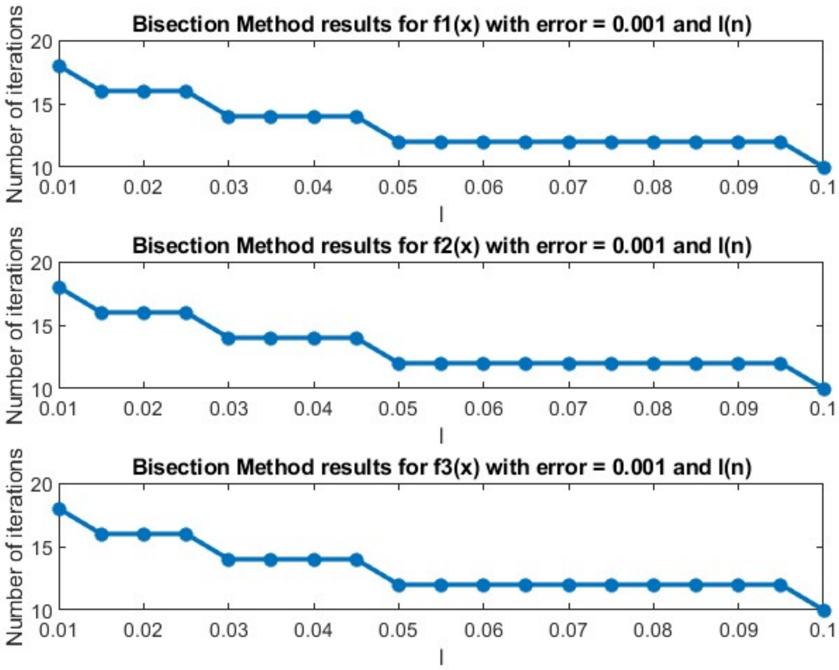
$x1 = (a + b)/2 - \varepsilon$ και $x2 = (a + b)/2 + \varepsilon$ της εκάστοτε επανάληψης.

Το πρώτο ζητούμενο είναι η απεικόνιση της μεταβολής των υπολογισμών των αντικειμενικών συναρτήσεων συναρτήσει του ε για $l = 0.01$. Το εύρος τιμών που επιλέχθηκε για το ε είναι $[0.0001, 0.004995]$ με βήμα αύξησης δειγματοληψίας = 0.0005. Να τονιστεί ότι η σχέση που πρέπει να ισχύει μεταξύ των ε και l είναι $\boldsymbol{2\varepsilon < l}$ και για αυτό επιλέχθηκαν και τα ανάλογα όρια. Το ζητούμενα γραφήματα παρουσιάζεται παρακάτω:

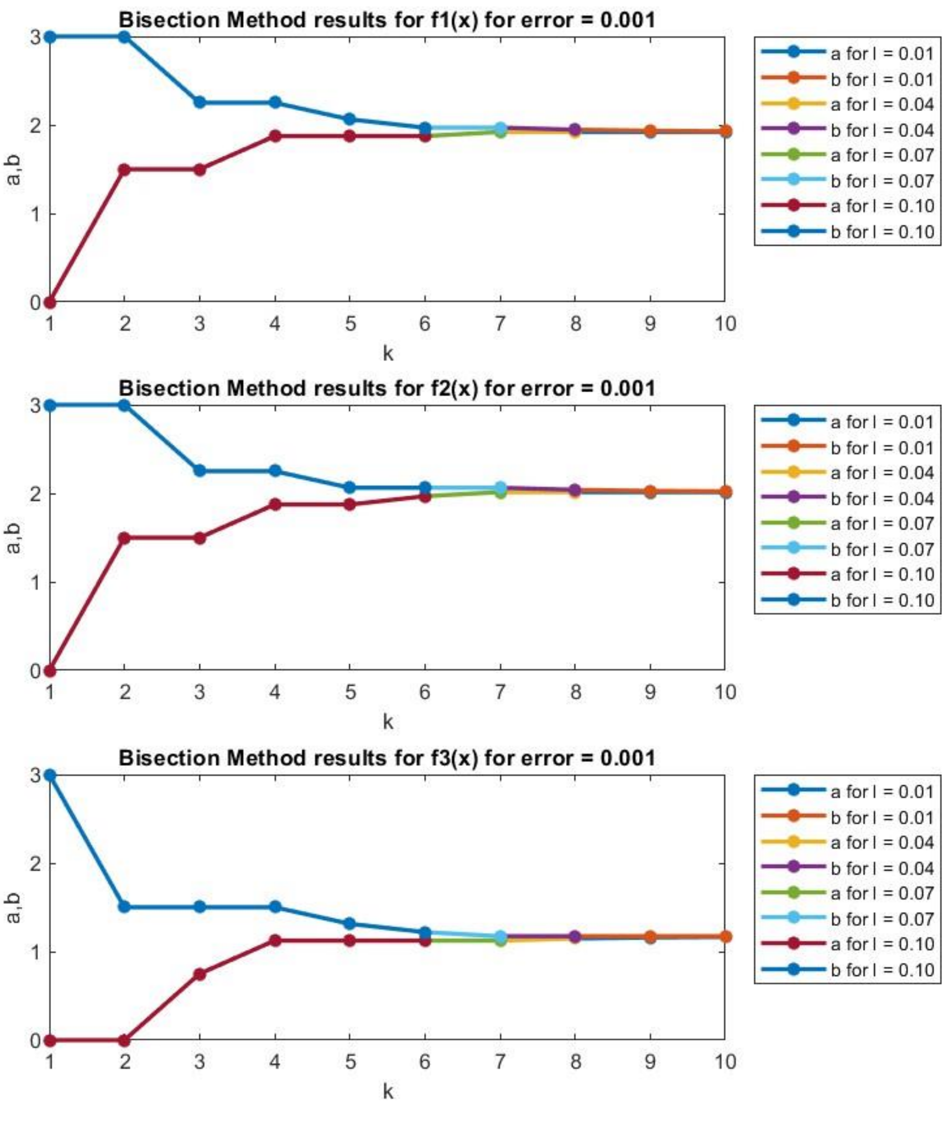


Όπως παρατηρείται παραπάνω, η μεταβολή του ε μέχρι και την τιμή $\varepsilon = 2$ δεν επηρεάζει τον αριθμό των υπολογισμών της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης ενώ στην συνέχεια αυξάνεται. Εάν παρατηρήσουμε με προσοχή την γραφική παράσταση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι προσεγγίζει την εκθετική συνάρτηση, γεγονός που δεν είναι φανερό εύκολα γιατί στο γράφημα έχουμε διακριτές τιμές.

Στην συνέχεια ζητούνται τα ίδια γραφήματα αλλά με σταθερό $\varepsilon = 0.001$ και μεταβλητό l όπου επιλέχθηκε το $[0.001, 0.01]$ ως διάστημα εύρους των τιμών του με βήμα αύξησης δειγματοληψίας=0.0005:



Τέλος, ζητείται ο σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων των άκρων του διαστήματος [a_k, b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος k, δηλαδή (k, a_k) και (k, b_k), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης $l = [0.01,0.04,0.07,0.1]$.



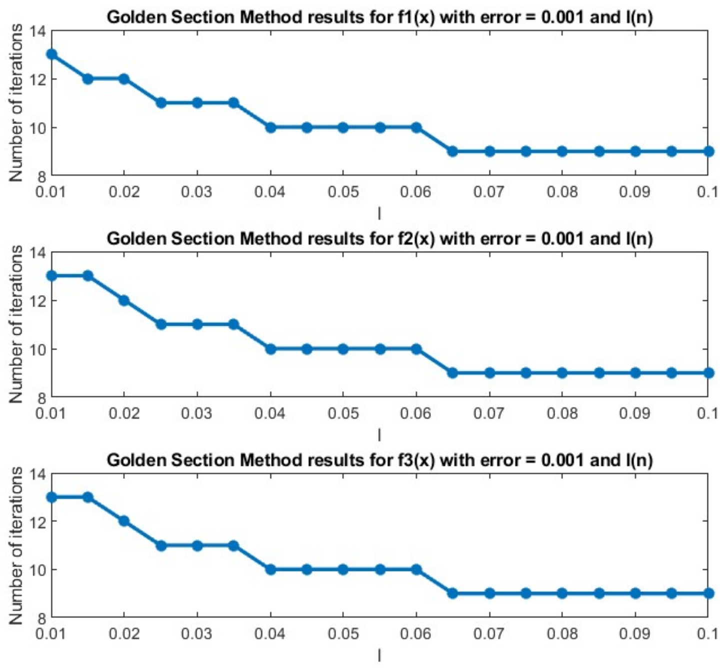
Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω γραφήματα, ο **τελικός δείκτης βημάτων k αυξάνεται καθώς μειώνεται το l**. Εάν σκεφτούμε ότι όσο μεγαλύτερο l έχουμε, τόσο πιο γρήγορα θα τερματίσει ο αλγόριθμος καθώς φτάνει στο όριο b_k-$a_k \leq l$, το παραπάνω γεγονός είναι απολύτως λογικά ακόλουθο. Επαληθεύοντας το με παράδειγμα, για $l = 0.01$ έχουμε εν τέλει $k = 10$ ενώ για $l = 0.1$, $k = 6$. Επίσης σημαντικό είναι σχολιαστεί ότι η μεταβολή των a και b είναι μεγαλύτερη για μικρότερα k και η τελική διαφορά τους $(b - a)$ φαίνεται να είναι ιδιαίτερα μικρή καθώς στο γράφημα είναι λες και συγκλίνουν. Οι δυο παραπάνω παρατηρήσεις αποτελούν επιβεβαίωση ότι ο αλγόριθμος λειτουργεί σωστά. Επίσης, όπως φαίνεται και στα παραπάνω γραφήματα, παρόλο που όπως σχολιάστηκε το n επηρεάζει τον δείκτη k, δεν επηρεάζει τα διαστήματα [a_k, b_k]. Το σχόλιο αυτό είναι κοινό και για τις παρακάτω μεθόδους.

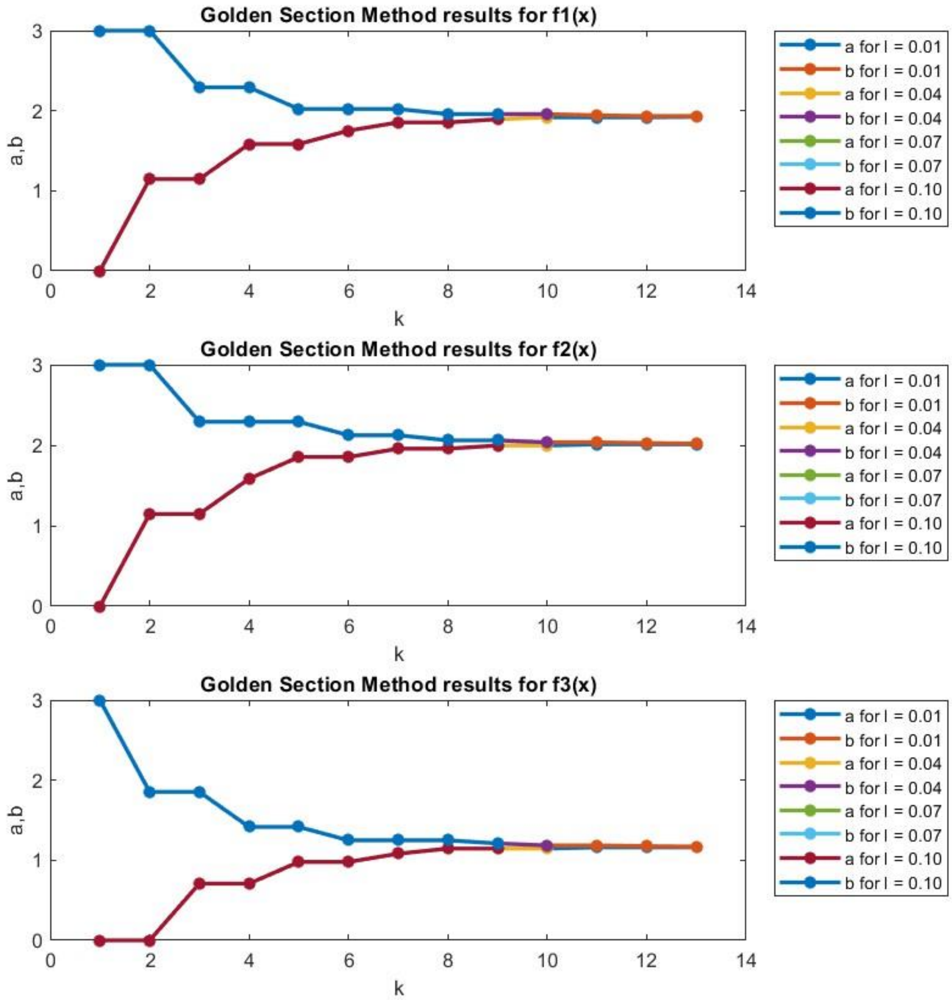
Συνδυάζοντας τις δύο ομάδες των παραπάνω γραφημάτων, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι πράγματι **ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίσο με το διπλάσιο των επαναλήψεων k**, γεγονός που παρατηρείται πολύ εύκολα από την μελέτη του του αλγορίθμου. Παραδείγματος χάριν, για την $f1(x)$ με $l = 0.01$ από το πρώτο γράφημα προκύπτει ότι num of iterations=18 ενώ από το δεύτερο καταλαβαίνουμε ότι το τελικό k είναι ίσο με 9.(Στο γράφημα βλέπουμε μέχρι και 10 για την παρουσίαση όλων των a, b πριν τον τερματισμό της μεθόδου).

Θέμα 2- Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

Η Μέθοδος του χρυσού τομέα έχει παρόμοια λογική στην υλοποίηση του με την μέθοδο της διχοτόμου με ειδοποιό διαφορά να είναι ο υπολογισμός των $x1(k)$ και $x2(k)$.

Τα ζητούμενα αυτού του θέματος είναι και πάλι τα εξής: γράφημα για κάθε αντικειμενική συνάρτηση του αριθμού των υπολογισμών της συναρτήσει μεταβλητού l καθώς και γράφημα των ακρών του διαστήματος [a_k, b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος k. Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι τα διαστήματα μελέτης για l μεταβλητό είναι τα ίδια με το πρώτο ερώτημα.





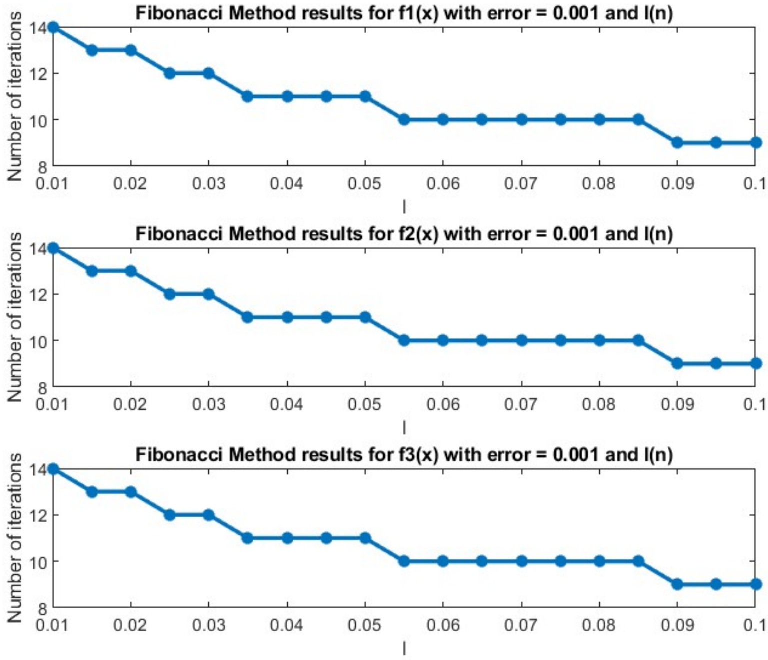
Με παρόμοια λογική με το πρώτο θέμα, μπορούμε να συμπεράνουμε **ότι ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίσος με k+1**. Αυτό επαληθεύεται και με την βοήθεια του αλγορίθμου όπου στην πρώτη επανάληψη έχουμε τον υπολογισμό της f σε δύο σημεία ενώ από την δεύτερη σε ένα.

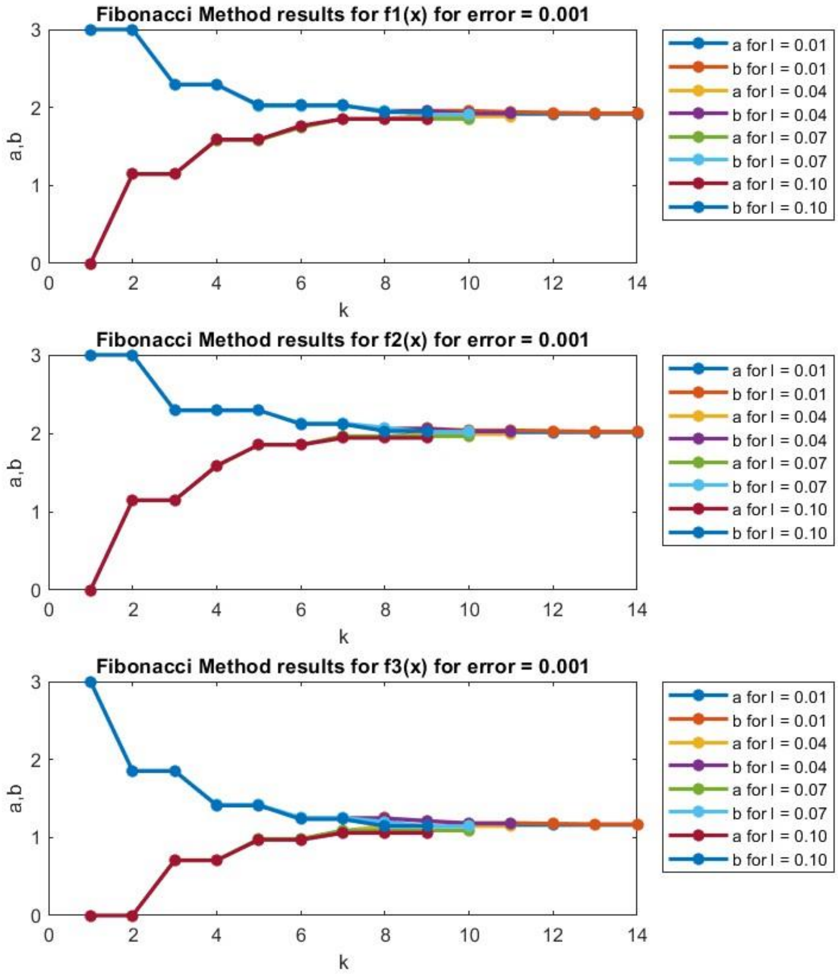
Ο σχολιασμός σχετικά με τον **αριθμό των επαναλήψεων σε σχέση με το l** είναι και πάλι ο ίδιος (**αντιστρόφως ανάλογη**).

Θέμα 3 - Μέθοδος Fibonacci

Η μέθοδος αυτή μοιάζει αρκετά με την μέθοδο του χρυσού τομέα που μελετήθηκε γραφικά στο προηγούμενο θέμα. Η διαφοροποίηση της είναι στο ότι το υπό διάστημα αναζήτησης στην k επανάληψη δεν συνδέεται με αυτό της $k-1$ με μια σταθερά, αλλά είναι μεταβλητό.

Τα ζητούμενα είναι ίδια με αυτά του θέματος 2 και παρουσιάζονται παρακάτω:


Fibonacci Method results for f1(x) with error = 0.001 and l(n)
Number of iterations
l
Fibonacci Method results for f2(x) with error = 0.001 and l(n)
Number of iterations
l
Fibonacci Method results for f3(x) with error = 0.001 and l(n)
Number of iterations
l


Fibonacci Method results for f1(x) for error = 0.001
a,b
k
a for l = 0.01
b for l = 0.01
a for l = 0.04
b for l = 0.04
a for l = 0.07
b for l = 0.07
a for l = 0.10
b for l = 0.10
Fibonacci Method results for f2(x) for error = 0.001
a,b
k
a for l = 0.01
b for l = 0.01
a for l = 0.04
b for l = 0.04
a for l = 0.07
b for l = 0.07
a for l = 0.10
b for l = 0.10
Fibonacci Method results for f3(x) for error = 0.001
a,b
k
a for l = 0.01
b for l = 0.01
a for l = 0.04
b for l = 0.04
a for l = 0.07
b for l = 0.07
a for l = 0.10
b for l = 0.10

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα παραπάνω γραφήματα, σε αντίθεση με τις προηγούμενες μεθόδους, οι τιμές των a_k, b_k για ίδιο k και διάφορες τιμές του l, δεν ταυτίζονται για ένα k και πάνω. Αυτό πιθανότατα οφείλεται σε αυτό που αναφέρθηκε παραπάνω, δηλαδή ότι k-οστό διάστημα αναζήτησης δεν συνδέεται με αυτό της $k-1$ επανάληψης με κάποια σταθερά, αλλά μεταβάλλεται.

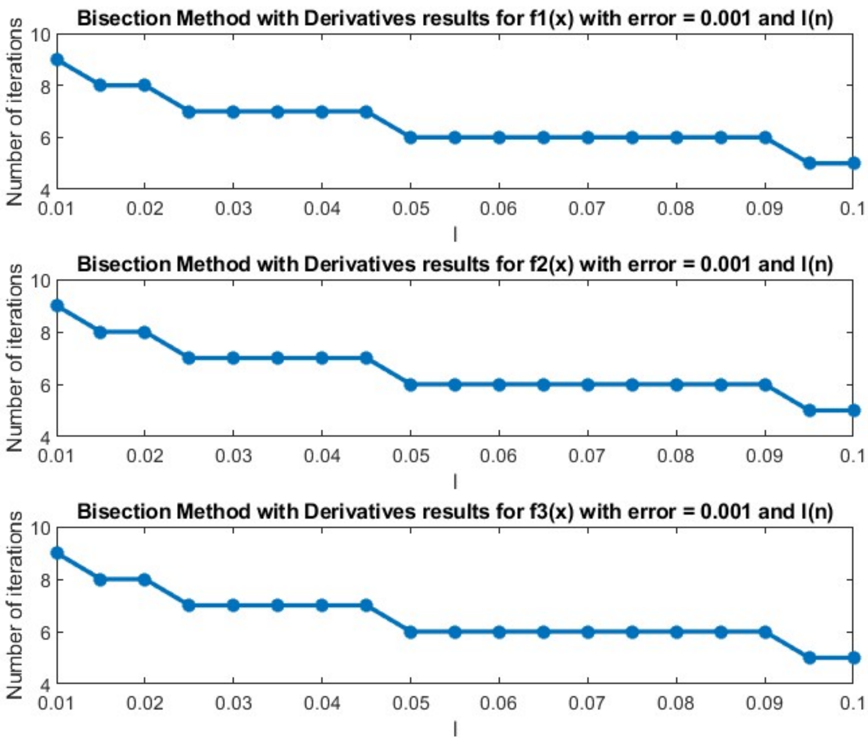
Σχετικά με **την σχέση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης με τον δείκτη βήματος $\boldsymbol{k}$ ισχύει $\boldsymbol{k = n - 2}$** και φαίνεται εύκολα από την υλοποίηση του αλγορίθμου Fibonacci. Ο αριθμός n, σε αντίθεση με τους προηγούμενους αλγορίθμους, είναι εξαρχής καθορισμένος και έτσι ολόκληρη η λογική του αλγορίθμου βασίζεται πάνω σε αυτό. Στα παραπάνω γραφήματα, η σχέση αυτή μπορεί να επαληθευτεί, αν λάβουμε υπόψιν βέβαια ότι στα διαγράμματα (k, a_k) και (k, b_k) περιλαμβάνονται όλες οι τιμές των $a(i), b(i)$, δηλαδή μέχρι και για $i = n$, για ολοκληρωμένη παρουσίαση του βελτιστοποιημένου διαστήματος. Οπότε για στην $f1(x)$ με $l = 0.01$ π.χ., το ότι $n = 14$ από το πρώτο γράφημα και το $k + 2 = 14 \ => k = 12$ αποτελεί μία ακριβής επαλήθευση των παραπάνω.

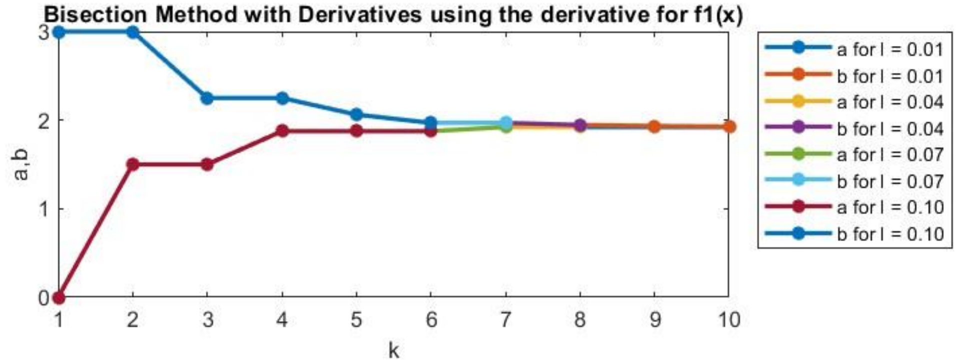
Ο σχολιασμός σχετικά με τον **αριθμό των επαναλήψεων σε σχέση με το l** είναι και πάλι ο ίδιος (**αντιστρόφως ανάλογη**).

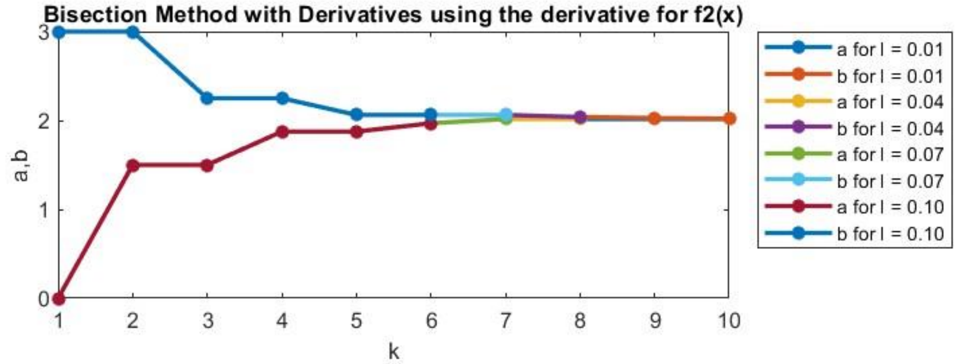
Θέμα 4- Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

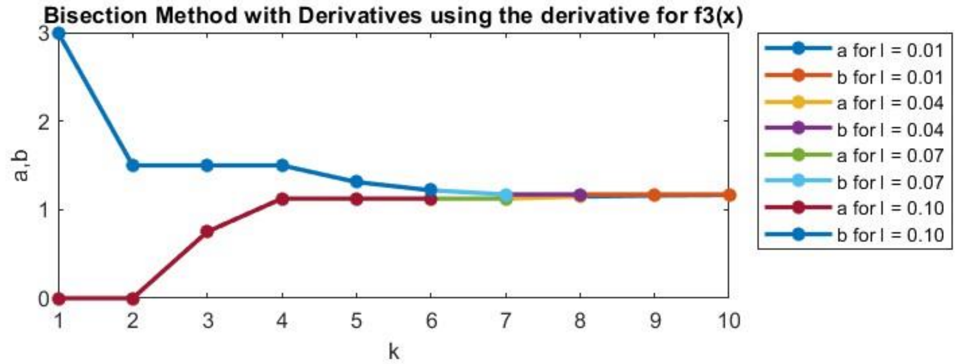
Η μέθοδος αυτή διαφοροποιείται αρκετά από τις παραπάνω καθώς είναι η μόνη που κάνει χρήση παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης για την εύρεση του ελαχιστοποιημένου διαστήματος.

Τα ζητούμενα είναι ξανά ίδια με αυτά των θεμάτων 2 και 3 και παρουσιάζονται παρακάτω:









Ο καθορισμένος **αριθμός των n υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης** με την βοήθεια του αλγόριθμου της μεθόδου **προκύπτει πολύ λογικά ίσος με $\boldsymbol{k}$**, γεγονός που επαληθεύεται ξανά από τα παραπάνω γραφήματα (θυμίζοντας ότι τα a, b παρουσιάζονται μέχρι και $k+1$).

Ο σχολιασμός σχετικά με τον **αριθμό των επαναλήψεων σε σχέση με το $\boldsymbol{l}$** είναι και πάλι ο ίδιος (**αντιστρόφως ανάλογη**).

<u>Συγκριτικά Συμπεράσματα και σχόλια</u>

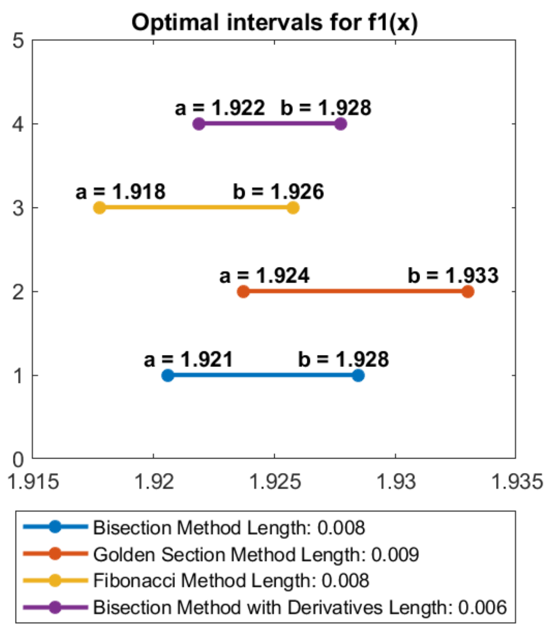
Σχετικά με την σύγκριση των $f1(x), f2(x), f3(x)$ παρατηρώ ότι τα διαγράμματα $[k, l]$ αλλά και $[k, error]$ του 1ου θέματος είναι ίδια, το οποίο είναι λογικό εάν σκεφτούμε ότι χρησιμοποιήθηκαν ίδια χαρακτηριστικά και για τις 3 συναρτήσεις (l, $error$ και διάστημα αναζήτησης).

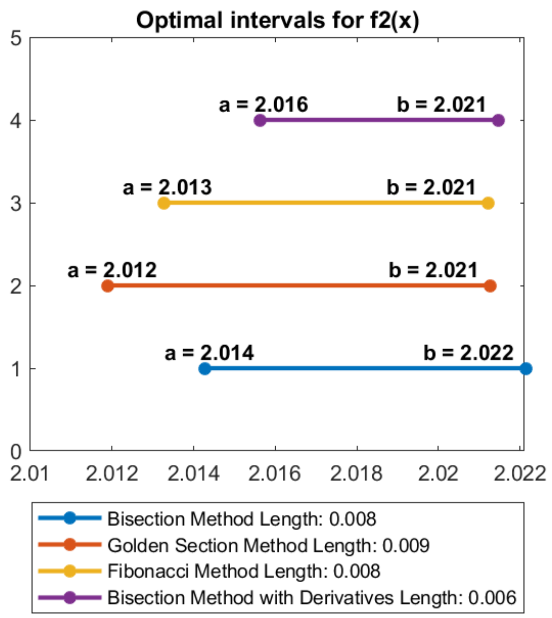
Έπειτα από την μελέτη και των 4 μεθόδων μέσα από διάφορα γραφήματα, χρήσιμο θα ήταν να σχολιαστούν συγκριτικά. Είναι προφανές ότι ο αριθμός n των επαναλήψεων συσχετίζεται άμεσα με την αποτελεσματικότητα της εκάστοτε μεθόδου. Συγκεκριμένα, όσο πιο μικρό είναι το n τόσο πιο αποτελεσματικός είναι ο αλγόριθμος. Από τα παραπάνω λοιπόν συμπεράσματα, προκύπτει ότι η οι μέθοδοι μπορούν να διαταχθούν με βάση τον αριθμό n κατά φθίνουσα σειρά ως εξής:

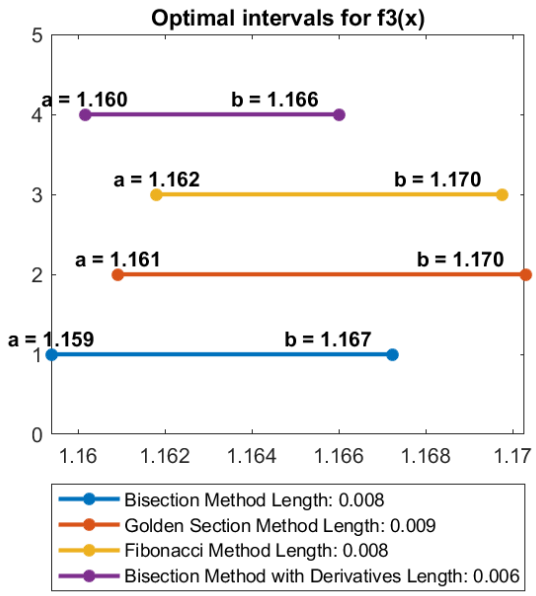
Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου	**>**	**Μέθοδος του Χρυσού Τομέα**	**>**	**Μέθοδος Fibonacci**	**>**	**Μέθοδος της διχοτόμου**
$\boldsymbol{n = k}$		$\boldsymbol{n = k + 1}$		$\boldsymbol{n = k + 2}$		$\boldsymbol{n = 2k}$

Σημαντικό βέβαια είναι να σημειωθεί ότι η μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων έχει ως πρόβλημα τον υπολογισμό της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, γεγονός που δεν είναι πάντα εύκολο. Για τις μεθόδους Fibonacci και χρυσού τομέα αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι για μεγάλα n, έχουν σχεδόν ίδια απόδοση καθώς χρειάζονται περίπου τον ίδιο αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η σύγκριση των βελτιστοποιημένων συναρτήσεων είναι επίσης ιδιαίτερα σημαντική. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα γράφημα για κάθε συνάρτηση όπου απεικονίζει το τελικό διάστημα $[a, b]$ κάθε συνάρτησης για $l = 0.01$ και $error = 0.001$ όπου αυτό απαιτείται. Για την παρουσίαση αυτή, δημιουργήθηκε μία απλή συνάρτηση που επισυνάπτεται και αυτή στο φάκελο με τα αρχεία MATLAB:







Όπως παρατηρείται από τα παραπάνω γραφήματα **το βελτιστοποιημένο διάστημα της Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου είναι πιο μικρό** συγκριτικά με τα υπόλοιπα ενώ **το μεγαλύτερο προκύπτει από την μέθοδο του Χρυσού Τομέα**. Αυτή η μέθοδος υστερεί συγκριτικά με τις άλλες γιατί η σταθερά αναλογίας γ που χρησιμοποιεί για τον υπολογισμό των $x1(k), x2(k)$ έχει προσεγγιστεί στην τιμή 0.618 ενώ κανονικά έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Σε συνδυασμό με τις αρχικές μας προβλέψεις λοιπόν, για το ελάχιστο συναρτήσεων με την βοήθεια της γραφικής παράστασης, συμπεραίνουμε ότι και οι 4 συναρτήσεις είναι αρκετά αποτελεσματικές και λειτουργούν σωστά με διαφοροποιήσεις στην απόδοση και το τελικό βελτιστοποιημένο διάστημα. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι αυτό που εν τέλει θα κρίνει ποια θα επιλέξουμε.

Υλοποίηση στο MATLAB

Σχετικά με την υλοποίηση στο MATLAB, σημαντικό είναι να σχολιαστεί ότι επιλέχθηκε η δημιουργία ενός αρχείο .m στο οποίο εμπεριέχονται όλα τα καλέσματα και για τα 4 ερωτήματα μαζί. Όλες οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται επισυνάπτονται μέσα στο φάκελο ως ξεχωριστά αρχεία για την αποτελεσματικότερη χρήση τους. Μόνο οι συναρτήσεις `find_min_n` και `find_max_fibonacci_n` για τον υπολογισμό των n υπολογισμών των αντικειμενικών συναρτήσεων για την Μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγων και την μέθοδο Fibonacci αντίστοιχα, εμπεριέχονται μαζί με τους αλγορίθμους της μεθόδου τους, καθώς χρησιμοποιήθηκαν μόνο για εκεί. Να σημειωθεί ότι για τα κοινά ζητούμενα γραφήματα χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες συναρτήσεις `plot_results_l` και `ab_plot_k` και ανάλογα την μέθοδο που θέλουμε να μελετηθεί χρησιμοποιούμε στο όρισμα option τον ανάλογο αριθμό (1,2,3,4).

Βιβλιογραφία

Για την υλοποίηση των αλγορίθμων όπως και για κάποια σχόλια για τον αριθμό των αντικειμενικών συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε το βιβλίο «Τεχνικές Βελτιστοποίησης» του κ.Ροβιθάκη, εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.