

1. В университете MIT(O) для удобства работы с цифровыми данными у каждого студента есть свой уникальный идентификационный номер ИСУ: $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. В вузе есть различные клубы из студентов:

- клуб любителей мат. анализа (обознач. буквой M), состоит из студентов: $\{1, 2, 5, 6\}$
- клуб любителей лин. алгебры (обознач. буквой L), состоит из студентов: $\{1, 7, 5, 9, 4\}$
- клуб любителей алгоритмов (обознач. буквой A), состоит из студентов: $\{2, 8, 3, 1\}$
- клуб любителей программирования (обознач. буквой P), состоит из студентов: $\{1, 2, 6, 3, 8, 9\}$

Студент Вася очень любит ДМ, и поэтому он захотел создать клуб любителей дискретной математики. Для создания клуба необходимо отправить письмо в студ. офис, указав там список участников. Но Вася решил продемонстрировать свои знания дискретки, и отправил вместо списка эту записку:

$$\text{"множество участников клуба – это } X, \text{ где } M \cap A \cup M \cap P \cap A \cup (L \cap (\bar{L} \cup P))"$$

Помогите студ. офису составить список участников клуба, упростив выражение Васи.

Автор – Тимур Гонтарь, М3206

2. Пусть у нас есть P – множество студентов города Санкт-Петербург, из них A – третьекурсники, B – проходят профессиональную переподготовку, а C – стажируются в Яндексе. Для статьи “Как учиться на третьем курсе университета ИТМО, проходить профессиональную подготовку и не умереть” Мегабайт создал выборку D .

Студенты ИТМО участвуют в специальной лотерее. Мы спросили номера лотерейных билетов некоторых из них. Получилась такая статистика:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 7, 12, 15, 19, 22\} \\ B &= \{2, 3, 7, 9, 13, 16, 18, 21, 24\} \\ C &= \{2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 14, 17, 21, 23\} \\ D &= \{1, 2, 9, 13, 16, 19, 21, 22, 24\} \end{aligned}$$

Помогите Мегабайту понять, какие номера билетов у студентов из их выборки, которые стажируются в Яндексе.

Автор – Антонина Чернова, М33081

3. В самом мирном городе мира, Лос-Сантосе, орудуют несколько бандитских группировок: Гроув-стрит, Баллос и Вагос. Некоторые районы города, для удобства бандитов помеченные цифрами $\{0 \dots 9\}$, находятся под влиянием этих банд:

- Гроув-стрит: $\{1, 2, 3, 7, 9\}$
- Баллос: $\{1, 3, 7, 8\}$
- Вагос: $\{4, 6, 7, 9\}$

Районы, оказавшиеся под влиянием нескольких банд, называются спорными территориями.

В один прекрасный летний день Си-Джей увидел на стене своего дома граффити с сообщением от информатора из банды Баллосов. Для конспирации он оставил его в таком виде:

$$B \cap \bar{G} \cup G \cap V \cap \bar{B} \cup G \cap B \cap \bar{V}$$

В нем содержатся номера районов, на которые полиция планирует совершить облаву. Вам, как самому умному представителю Гроув-Стрит, необходимо расшифровать граффити, а затем ответить на следующие вопросы:

- Какие районы не под контролем ни одной из этих банд?
- Какое количество районов охватывают все три банды?
- На какие из районов, находящихся под вашим влиянием, будет совершена облава?

Автор – Константин Васильев, М3213

4. В самом мирном городе мира, Лос-Сантосе, орудуют несколько бандитских группировок: Гроув-стрит, Баллос и Вагос. Некоторые районы города, для удобства бандитов помеченные цифрами $\{0\dots 9\}$, находятся под влиянием этих банд:

- Гроув-стрит: $\{1, 2, 3, 7, 9\}$
- Баллос: $\{1, 3, 7, 8\}$
- Вагос: $\{4, 6, 7, 9\}$

Районы, оказавшиеся под влиянием нескольких банд, называются спорными территориями.

В один прекрасный летний день Си-Джей увидел на стене своего дома граффити с сообщением от информатора из банды Баллосов. Для конспирации он оставил его в таком виде:

$$B \cap \bar{G} \cup G \cap V \cap \bar{B} \cup G \cap B \cap \bar{V}$$

В нем содержатся номера районов, на которые полиция планирует совершить облаву. Вам, как самому умному представителю Гроув-Стрит, необходимо расшифровать граффити, а затем ответить на следующие вопросы:

- Какие районы являются спорными территориями, под влиянием двух или трех банд?
- Какие районы полностью находятся под влиянием банды Вагос, без участия других банд?
- На какие из районов полиция не планирует совершать облаву?

Автор – Константин Васильев, М3213

5. Вы – великая искательница сокровищ Лариса Крафтовое. Очередное путешествие забросило вас в подземные гробницы Сигизмунда I. К сожалению, на вашем пути встал очень назойливый мраморный привратник, который по всем канонам жанра имеет для вас пару загадок.

Привратник загадывает свое множество X , а также дает вам парочку других (A, B, C, \dots) , объединяя, пересекая, дополняя и/или выполняя разность над которыми вы должны получить его множество. Загвоздка лишь в том, что привратник сам выбирает расстановку множеств в формуле, поэтому вам остается лишь вставить операции и расставить скобки (при надобности).

Загадка 1:

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 5, 6\} \\ A &= \{1, 2, 3, 4\}; B = \{2, 3, 4, 5\}; C = \{2, 5\}; D = \{4, 5, 6\} \\ A?B?C?D &= X \end{aligned}$$

Загадка 2:

$$\begin{aligned} X &= \{3, 4, 5\} \\ A &= \{2, 3, 4, 5\}; B = \{1, 2, 3\}; C = \{3, 4, 5\}; D = \{1, 5, 6\} \\ A?B?C?D &= X \end{aligned}$$

Автор – Константин Васильев, М3213

6. Вы – великая искательница сокровищ Лариса Крафтовое. Очередное путешествие забросило вас в подземные гробницы Сигизмунда I. К сожалению, на вашем пути встал очень назойливый мраморный привратник, который по всем канонам жанра имеет для вас пару загадок.

Привратник загадывает свое множество X , а также дает вам парочку других (A, B, C, \dots) , объединяя, пересекая, дополняя и/или выполняя разность над которыми вы должны получить его множество. Загвоздка лишь в том, что привратник сам выбирает расстановку множеств в формуле, поэтому вам остается лишь вставить операции и расставить скобки (при надобности).

Загадка 1:

$$\begin{aligned} X &= \{2, 3\} \\ A &= \{1, 2, 3\}; B = \{3, 4, 5\}; C = \{1, 4, 5\}; D = \{2, 3, 5\} \\ A?B?C?D?A?C &= X \end{aligned}$$

Загадка 2:

$$\begin{aligned} X &= \{5, 6\} \\ A &= \{1, 2, 3, 4\}; B = \{2, 4, 6\}; C = \{1, 3, 5\} \\ A?B?C?A &= X \end{aligned}$$

Автор – Константин Васильев, М3213

7. Ребята приехали в математический лагерь, где каждый получил футболку с уникальным номером от 1 до 23. Отправившись на очередной полдник, они обнаружили, что нет ни одного кекса – их украли! Ребята сразу приступили к расследованию. Таким образом, они сделали вывод, что виновник – не один человек, а целая группа! У них получилось разделить всех ребят на 4 группы подозреваемых, в зависимости от того, кто где был в предположительное время совершения преступления по словам очевидцев. (Легенда: С – столовая, D – двор, В – баскетбольная площадка, А – аллея):

$$\begin{aligned} A &: \{1, 2, 3, 21, 23, 5, 22, 18, 19, 6\} \\ B &: \{6, 22, 10, 15, 11, 13, 7, 18, 14, 9\} \\ C &: \{7, 8, 14, 20, 12, 4, 1, 2, 19, 6\} \\ D &: \{9, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 14, 5, 6\} \end{aligned}$$

Так как ребята были отличными математиками, у них получилось составить выражение, которое раскроет, кто виноват в преступлении.

$$A \cup B \cap \overline{C} \cup (A \cap D \cup \overline{C}) \cup D$$

Помогите им найти виновных.

Автор – Баженова Мария, М3219

1. Упростите следующее выражение с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset U; A \neq \emptyset$

$$\overline{A} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cup A \cap B$$

Примечание: U – универсум

2. Упростите следующее выражение с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset U; A \neq \emptyset$

$$\overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{A} \cap B$$

Примечание: U – универсум

3. Упростите следующее выражение с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset U; A \neq \emptyset$

$$A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C}$$

Примечание: U – универсум

4. Упростите следующее выражение с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset U; A \neq \emptyset$

$$A \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{D} \cup \overline{A} \cap C \cap \overline{D}$$

Примечание: U – универсум

5. Упростите следующее выражение с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset U; A \neq \emptyset$

$$A \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap D \cup B \cap C \cap D$$

Примечание: U – универсум

6. Упростите следующее выражение с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset U; A \neq \emptyset$

$$A \cap C \cap D \cup B \cap \overline{C} \cap D \cup B \cap C \cap D$$

Примечание: U – универсум

7. Упростите следующее выражение с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset U; A \neq \emptyset$

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap D$$

Примечание: U – универсум

1. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = A \cap \bar{D} \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C$$

- 1) $P = B \cap C \cap D \cup \bar{A} \cap B \cap C;$
- 2) $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cap D \cup B \cap \bar{C} \cap \bar{D};$
- 3) $P = A \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C \cap D;$
- 4) $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$

2. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = A \cap \bar{D} \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C$$

- 1) $P = A \cap \bar{B} \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap C;$
- 2) $P = A \cap B \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cap D;$
- 3) $P = B \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup A \cap B \cap \bar{C};$
- 4) $P = A \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$

3. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = A \cap \bar{D} \cup B \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap D$$

- 1) $P = B \cap C \cap D \cup \bar{A} \cap B \cap C;$
- 2) $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cap D \cup B \cap \bar{C} \cap \bar{D};$
- 3) $P = A \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C \cap D;$
- 4) $P = \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$

4. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = A \cap \bar{D} \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C$$

- 1) $P = A \cap \bar{B} \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap C;$
- 2) $P = A \cap B \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cap D;$
- 3) $P = B \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup A \cap B \cap \bar{C};$
- 4) $P = A \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$

5. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = \bar{A} \cap B \cup A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cap \bar{D}$$

- 1) $P = B \cap C \cap D \cup \bar{A} \cap B \cap C;$
- 2) $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cap D \cup B \cap \bar{C} \cap \bar{D};$
- 3) $P = A \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C \cap D;$
- 4) $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$

6. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = \bar{A} \cap B \cup A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cap \bar{D}$$

- 1) $P = A \cap \bar{B} \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap C;$
- 2) $P = A \cap B \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cap D;$
- 3) $P = B \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup A \cap B \cap \bar{C};$

$$4) P = A \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$$

7. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cap D$$

$$1) P = B \cap C \cap D \cup \bar{A} \cap B \cap C;$$

$$2) P = \bar{B} \cap \bar{C} \cap D \cup B \cap \bar{C} \cap \bar{D};$$

$$3) P = A \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C \cap D;$$

$$4) P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$$

8. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cap D$$

$$1) P = A \cap \bar{B} \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap C;$$

$$2) P = A \cap B \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cap D;$$

$$3) P = B \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup A \cap B \cap \bar{C};$$

$$4) P = A \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$$

9. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = \bar{A} \cup B \cap C \cup \bar{C} \cap \bar{D}$$

$$1) P = B \cap C \cap D \cup \bar{A} \cap B \cap C;$$

$$2) P = \bar{B} \cap \bar{C} \cap D \cup B \cap \bar{C} \cap \bar{D};$$

$$3) P = A \cap \bar{B} \cap D \cup A \cap C \cap D;$$

$$4) P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$$

10. Укажите номера множеств, являющихся подмножествами множества

$$Q = \bar{A} \cup B \cap C \cup \bar{C} \cap \bar{D}$$

$$1) P = A \cap \bar{B} \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap C;$$

$$2) P = A \cap B \cap D \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cap D;$$

$$3) P = B \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup A \cap B \cap \bar{C};$$

$$4) P = A \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap D.$$

1. Постройте разбиения множеств:

- a) $A = \{6, 7, 8, 9, 11, 14, 34, 54, 47, 18, 91\}$;
- b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- c) $A \cap B$

Таким образом, чтобы все разбиения имели как минимум 2 одинаковых множества в разбиениях. Мощность каждого разбиение была более 3. Докажите, что ваш ответ соответствует указанным условиям!

2. Постройте разбиения множеств:

- a) $A = \{6, 7, 8, 9, 11, 14, 34, 54, 47, 18, 91, 55, 65, 76, 28, 19\}$;
- b) $B = \{0, 11, 22, 33, 44, 55, 65, 76, 28, 19\}$
- c) $A \cup B$

Таким образом, чтобы все разбиения имели как минимум 2 одинаковых множества в разбиениях. Мощность каждого разбиение была более 3. Докажите, что ваш ответ соответствует указанным условиям!

3. Постройте разбиения множеств:

- a) $A = \{6, 7, 8, 9, 11, 14, 34, 54, 47, 18, 91, 55, 65, 76, 28, 19\}$;
- b) $B = \{0, 11, 14, 34, 22, 33, 44, 55, 65, 76, 28, 19\}$
- c) $A \cup B$
- d) $A \cap B$

Таким образом, чтобы все разбиения имели как минимум 2 одинаковых множества в разбиениях. Мощность каждого разбиение была более 5. Докажите, что ваш ответ соответствует указанным условиям!

4. Постройте разбиения множеств:

- a) $A = \{6, 7, 8, 9, 11, 14, 34, 91, 55, 65, 76, 28, 19\}$;
- b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 65, 76, 28, 19\}$
- c) $A \cup B$
- d) $A \cap B$

Таким образом, чтобы все разбиения имели как минимум 2 одинаковых множества в разбиениях. Мощность каждого разбиение была более 4. Докажите, что ваш ответ соответствует указанным условиям!

5. Постройте разбиения множеств:

- a) $A = \{6, 7, 8, 9, 11, 14, 34, 91, 55, 65, 76, 28, 19, 93, 94, \}$;
- b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 65, 111, 113, 67, 87, 91, 92, 93, 94, 95, 98\}$
- c) $A \cup B$
- d) $A \cap B$

Таким образом, чтобы все разбиения имели как минимум 2 одинаковых множества в разбиениях. Мощность каждого разбиение была более 4. Докажите, что ваш ответ соответствует указанным условиям!

6. Постройте разбиения множеств:

- a) $A = \{6, 7, 8, 9, 11, 14, 34, 91, 55, 65, 76, 28, 93, 94, \}$;
- b) $B = \{8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 65, 67, 87, 91, 92, 93, 94, 95, 98\}$
- c) $A \cup B$
- d) $A \cap B$

Таким образом, чтобы все разбиения имели как минимум 2 одинаковых множества в разбиениях. Мощность каждого разбиение была более 4. Докажите, что ваш ответ соответствует указанным условиям!

7. Постройте разбиения множеств:

a) $A = \{6, 7, 8, 9, 11, 14, 34, 54, 91\};$

b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

c) $A \cap B$

Таким образом, чтобы все разбиения имели как минимум 2 одинаковых множества в разбиениях. Мощность каждого разбиение была более 6. Докажите, что ваш ответ соответствует указанным условиям!

1. Пусть у нас есть P – множество студентов города Санкт-Петербург, из них A – третьекурсники, B – проходят профессиональную переподготовку, а C – стажируются в Яндексе. Для статьи “Как учиться на третьем курсе университета ИТМО, проходить профессиональную подготовку и не умереть” Мегабайт создал выборку D .

Упростите множество $E = (P \cap D \cup C \cap \bar{B} \cap \bar{D} \cup B \cap A \cap \bar{C}) \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cap P$, а затем опишите его словами.

Автор – Антонина Чернова, М33081

2. Пусть у нас есть P – множество студентов города Санкт-Петербург, из них A – третьекурсники, B – проходят профессиональную переподготовку, а C – стажируются в Яндексе. Для статьи “Как учиться на третьем курсе университета ИТМО, проходить профессиональную подготовку и не умереть” Мегабайт создал выборку D .

Упростите множество, используя свойства операций и комментируя каждый шаг, а затем опишите его словами.

$$\overline{A \cap \bar{B}} \cap (A \cap \overline{B \cup \bar{C}} \cup \overline{A \cup B \cup \bar{C}}) \cup D$$

Автор – Антонина Чернова, М33081

3. Докажите, что два выражения равны.

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (1)$$

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad (2)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (3)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (4)$$

\times – декартово произведение

Автор – Алексей Лёвушкин, М3204

4. Упростить выражения, используя свойства операций над множествами:

a) $(A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap D)$;

b) $(\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cap \bar{B} \cap C) \cap \overline{(A \cup C)}$.

5. Упростить выражения, используя свойства операций над множествами:

a) $(\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cap \bar{B} \cap C) \cap \overline{(A \cup C)}$;

b) $(A \cap B \cap C \cap D) \cup (\overline{A \cup C} \cap D) \cup (D \cap (\bar{A} + C) + D) \cup (\bar{A} \cap B \cap C \cap D)$.

6. Упростить выражения, используя свойства операций над множествами:

a) $(A \cap B \cap C \cap D) \cup (\overline{A \cup C} \cap D) \cup (D \cap (\bar{A} + C) + D) \cup (\bar{A} \cap B \cap C \cap D)$;

b) $(A \cap B \cap C \cap D \cap (A \cup D \cup \bar{A} \cap \bar{D})) \cup \overline{A \cup \bar{B} \cup C \cup D} \cup (A \cap B \cap (D \cap \bar{C} \cup C \cap \bar{D}))$.

1. Определить и обосновать, являются ли рефлексивными/симметричными/транзитивными, отношениями порядка, одно-однозначными/одно-многозначными/много-однозначными/много-многозначными бинарные отношения:

- $aRb \Leftrightarrow a$ является ребёнком b (a и b – люди)
- $aRb \Leftrightarrow a$ и b живут в одной стране (a и b – люди)
- $aRb \Leftrightarrow a$ охотится на b (a и b – животные)

Выделите среди этих БО отношения эквивалентности и разбейте их на классы эквивалентности, продемонстрировав алгоритм разбиения.

Автор – Алексей Лёвушкин, М3204

2. Довольные студенты ИТМО сдали летнюю сессию и намерены поехать домой на некоторое время. К сожалению, чтобы добраться до пункта назначения, им потребуется сделать несколько пересадок.

Пусть множество всех населённых пунктов выглядит как: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тогда $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 5), (5, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ – можно доехать на автобусе, $S = \{(5, 6), (6, 5), (3, 6), (6, 3)\}$ – можно долететь на самолёте.

Какими свойствами обладают отношения R и S ?

Автор – Елизавета Котельникова, М3212

3. Возьмём множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Определите свойства и виды бинарных отношений:

- $xRy \Leftrightarrow x$ делит y
- $xRy \Leftrightarrow x + y = 8$
- $xRy \Leftrightarrow x + y \in M$

Автор – Алексей Лёвушкин, М3204

4. Бабушка Люда потеряла книгу со своими лучшими рецептами напитков. Вы, как добросовестный внук, проводивший у любимой бабушки большое количество времени, помните из чего бабуля варила вкуснейшие морсы и компоты. Обычно бабушка варила напитки из двух видов ягод и фруктов среди которых были: Малина, Облепиха, Жимолость, Смородина, Яблоки, Абрикосы и Груши. Также вы помните, что нельзя совмещать между собой Облепиху и красные ягоды, Абрикос и ягоды, Яблоко и ягоды. Постройте бинарное отношение содержащее все возможные сочетания для напитков таким образом, чтобы ингредиенты не повторялись.

Ответьте на вопросы касаясь построенного бинарного отношения:

- Какими свойствами обладает данное БО? Обоснуйте
- Является ли данное отношение функциональным?
- Каким из отношений соответствия оно является? (одно-многозначным, много-многозначным и т.д.)

Автор – Максим Акимцов, М3208

5. Дано отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$aRb \iff b > a$$

(ЧАСТЬ 1) Какими основным свойствами обладает отношение? (Дайте обоснованный ответ по всем пунктам ниже: доказите наличие или отсутствие свойств)

- а) рефлексивность / антирефлексивность / нерефлексивность
- б) симметричность / антисимметричность / асимметричность / несимметричность
- с) транзитивность / антитранзитивность / нетранзитивность

(ЧАСТЬ 2) Обоснуйте свой ответ по каждому из приведенных ниже вопросов:

- а) Является ли это отношение отношением эквивалентности?
- б) Является ли это отношение функциональным?
- с) Каким из отношений соответствия (одно-многочисленным, много-многочисленным и т.д.) оно является?
- д) К каким из отношений порядка (строгого, не строгого и т.д.) можно отнести данное отношение?

6. Дано отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$aRb \iff a \leq b$$

(ЧАСТЬ 1) Какими основными свойствами обладает отношение? (Дайте обоснованный ответ по всем пунктам ниже: докажете наличие или отсутствие свойств)

- а) рефлексивность / антирефлексивность / нерефлексивность
- б) симметричность / антисимметричность / асимметричность / несимметричность
- с) транзитивность / антитранзитивность / нетранзитивность

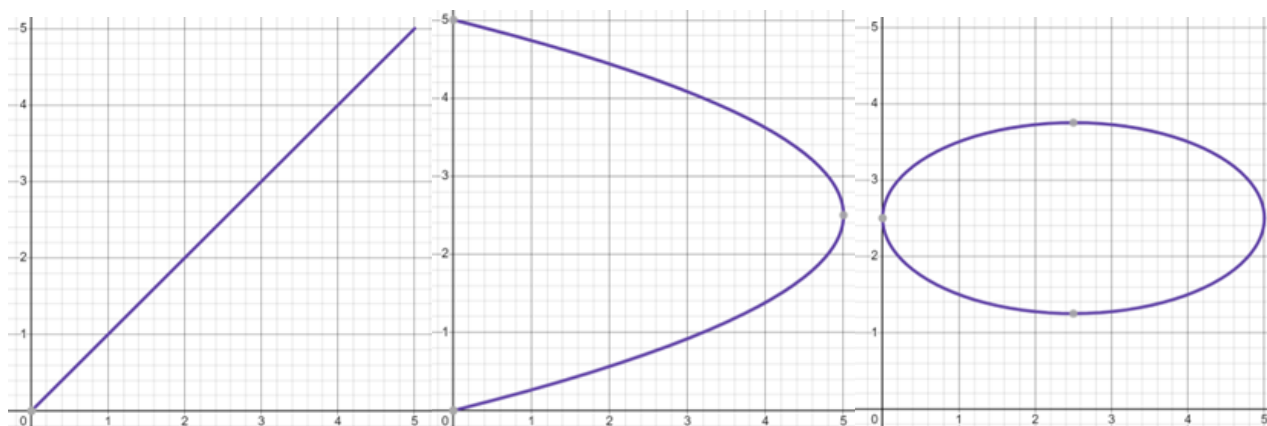
(ЧАСТЬ 2) Обоснуйте свой ответ по каждому из приведенных ниже вопросов:

- а) Является ли это отношение отношением эквивалентности?
- б) Является ли это отношение функциональным?
- с) Каким из отношений соответствия (одно-многочисленным, много-многочисленным и т.д.) оно является?
- д) К каким из отношений порядка (строгого, не строгого и т.д.) можно отнести данное отношение?

1. Дана декартова система координат. Ось x представляет собой множество X , ось y - множество Y . На этих двух множествах определены бинарные отношения, которые схематически изображены в виде графиков выше (то есть, например, для графика с рис. 1 будет верно, что пары $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$ входят в бинарное отношение, соответствующее графику). Для каждого из таких отношений определить:

- Каким типом отношения соответствия оно является?
- Является ли оно функциональным отношением? Если да, то каким именно (сюръекция, инъекция, биекция)?

Обоснуйте своё решение. После этого, аналогично данным в условии графикам, придумайте отношение (любое), которое будет представлять собой полностью определенную функцию, и при этом будет инъективно и не сюръективно.



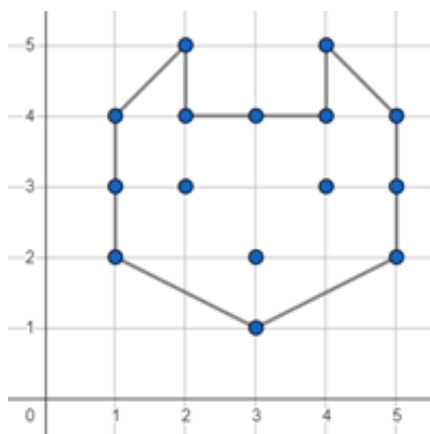
Автор – Тимур Гонтарь, М3206

2. Одним теплым вечером кот Степан вдохновился картинами, которые он увидел в Эрмитаже, и решил нарисовать свой автопортрет. Так как у Степана была тетрадка в клетку, оставшаяся после пройденного курса дискретной математики, он решил рисовать там. Нарисовав автопортрет ровно по клеткам, он подумал, что можно дорисовать координатные оси и обозначить все целые точки, пересекающиеся с контуром портрета. На обратной стороне листа он увидел конспект лекции по бинарным отношениям. Но так как память у кота не очень хорошая, он решил попросить вас найти бинарное отношение, соответствующее рисунку и два таких бинарных отношения, чтобы в композиции они давали исходное бинарное отношение и изобразить их.

Автор – Алёна Холмогорова, М3209

3. Приведите доказательства следующих утверждений:

- Доказать, что отношение «равенство по модулю 5» является отношением эквивалентности на множестве целых чисел.
- Докажите, что всякое отношение строгого порядка является асимметричным.
- R задано на декартовом квадрате натуральных чисел. Пара (m, n) принадлежит отношению R , если $n^3 + 3m^2 + 2m$ делится на 6. Докажите, что это - отношение эквивалентности.



Автор – разные студенты потока ИС2026

4. Установите, является ли каждое из перечисленных ниже отношений на A ($R \subseteq A \times A$) отношением эквивалентности (обоснование ответа обязательно). Для каждого отношения эквивалентности постройте классы эквивалентности и постройте граф отношения:
 - а) A – множество целых чисел и отношение $R = \{(a, b) | a + b = 5\}$
 - б) Пусть A – множество имен. $A = \{\text{Алексей, Иван, Петр, Александр, Павел, Андрей}\}$. Тогда отношение R верно на парах имен, начинающихся с одной и той же буквы, и только на них.
 - в) На множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ задано отношение $R = \{(1; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$
5. Установите, является ли каждое из перечисленных ниже отношений на A ($R \subseteq A \times A$) отношением эквивалентности (обоснование ответа обязательно). Для каждого отношения эквивалентности постройте классы эквивалентности и постройте граф отношения:
 - а) Пусть A – множество имен. $A = \{\text{Алексей, Иван, Петр, Александр, Павел, Андрей}\}$. Тогда отношение R верно на парах имен, начинающихся с одной и той же буквы, и только на них.
 - б) $A = \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$ и отношение $R = \{(a, b) | a^2 = b^2\}$
 - в) На множестве $A = \{1; 2; 3\}$ задано отношение $R = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (3; 2); (1; 2); (2; 1)\}$
6. Установите, является ли каждое из перечисленных ниже отношений на A ($R \subseteq A \times A$) отношением эквивалентности (обоснование ответа обязательно). Для каждого отношения эквивалентности постройте классы эквивалентности и постройте граф отношения:
 - а) $A = \{a, b, c, d, p, t\}$ задано отношение $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d), (p, p), (t, t)\}$
 - б) $A = \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$ и отношение $R = \{(a, b) | a^3 = b^3\}$
 - в) $F(x) = x^2 + 1$, где $x \in A = [-2, 4]$ и отношение $R = \{(a, b) | F(a) = F(b)\}$

1. Докажите (с подробным объяснением) или опровергните (приведя контрпример) следующие утверждения о бинарных отношениях $R \subseteq M^2$ и $S \subseteq M^2$:

- Если R и S рефлексивны, то $R \circ S$ тоже рефлексивно.
- Если R и S симметрично, то $R \circ S$ тоже симметрично.
- Если R и S транзитивно, то $R \circ S$ тоже транзитивно.
- Если R и S рефлексивны, то $R \circ S$ тоже рефлексивно.
- Если R и S симметрично, то $R \circ S$ тоже симметрично.
- Если R и S транзитивно, то $R \circ S$ тоже транзитивно.

Автор – Алексей Лёвушкин, М3204

2. Пусть имеется бинарное отношение R на $A \times A$. Докажите, что если R – одновременно и отношение эквивалентности и отношение частичного порядка, то оно – отношение равенства.

Автор – Алексей Ващенко, М3205

3. Пусть $A = \{a, b, c, 1, \Delta\}$. Рассмотрим следующее отношение R :

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (1, 1), (\Delta, \Delta), (a, b), (b, 1), (a, 1), (a, \Delta), (b, \Delta), (a, c), (c, \Delta)\}$$

- Докажите, что R – отношение порядка.
- У каких из следующих множеств есть наибольший/наименьший элемент?
 - $X_1 = \{b, 1, \Delta\}$
 - $X_2 = \{b, c, \Delta\}$
 - $X_3 = \{1, c, \Delta\}$
 - $X_4 = \{a, b, c, \Delta\}$
 - $X_5 = \{1, c\}$
 - $X_6 = \{\Delta\}$
 - $X_7 = \{b, c\}$
- Полностью или частично упорядочите множество A .

Автор – Алексей Ващенко, М3205

4. Приведите пример нескольких бинарных отношений:

- отношение, которое является композицией нескольких бинарных отношений, которое нестрого порядка и антисимметрично (укажите все бинарные отношения, участвующие в композиции)
- отношение, которое частично упорядочивает множество и как минимум 7 элементов упорядочены (обязательно покажите порядок элементов множества, полученный упорядочиванием бинарным отношением)
- отношение, такое что обратное к нему обладает одинаковыми с ним свойствами и оба антирефлексивны и симметричны (докажите, что свойства сохраняются)

примечание: важно показать множества, на которых задано бинарное отношение и доказать, что ваше бинарное отношение обладает заданными свойствами

5. Приведите пример нескольких бинарных отношений:

- a) отношение, которое является композицией нескольких бинарных отношений, которое нестрого порядка и функционально (укажите все бинарные отношения, участвующие в композиции)
- b) отношение, которое частично упорядочивает множество и как минимум 6 элементов упорядочены (обязательно покажите порядок элементов множества, полученный упорядочиванием бинарным отношением)
- c) отношение, такое что обратное к нему обладает одинаковыми с ним свойствами и оба эквивалентны (докажите, что свойства сохраняются)

примечание: важно показать множества, на которых задано бинарное отношение и доказать, что ваше бинарное отношение обладает заданными свойствами

6. Приведите пример нескольких бинарных отношений:

- a) отношение, которое является композицией нескольких бинарных отношений, которое обладает любым типом соответствия и симметрично (укажите все бинарные отношения, участвующие в композиции)
- b) два отношения, первое – частично упорядочивает множество, на котором оно задано и второе – полностью упорядочивает (обязательно покажите порядок элементов множества, полученный упорядочиванием бинарным отношением)
- c) отношение, такое что обратное к нему обладает одинаковыми с ним свойствами и оба функциональны (докажите, что свойства сохраняются)

примечание: важно показать множества, на которых задано бинарное отношение и доказать, что ваше бинарное отношение обладает заданными свойствами

1. Вася хочет устроиться бэкенд разработчиком в ИТМО, работать с ИСУ. На собеседовании тимлид дал ему тестовое задание, чтобы определить его уровень знаний:

ISU	id_предмета
1	2
1	4
2	2
1	1
3	1
3	3
3	2
2	4

id_дня_недели	id_предмета
1	3
1	2
6	4
3	2
2	4
6	1
2	3
4	1
5	1
4	3
3	4

В базе данных расписания ИТМО есть 2 таблицы:

- В таблице 1 (рис. 1) каждому студенту по его номеру ИСУ сопоставлены предметы по их id. У одного номера ИСУ (студента) может быть много предметов, при этом на один предмет может ходить несколько студентов.
- В таблице 2 (рис. 2) каждому дню недели по его id (порядковый номер: 1-пн, 2-вт, 3-ср и т. д.) сопоставлены предметы по их id. В один день могут проводиться пары по нескольким предметам, при этом пары по одному предмету могут проходить несколько дней в неделе.

От Васи требуется по имеющимся данным вывести все возможные кортежи вида:

(номер ИСУ, день когда у этого студента есть пары)

Например, ответ вида $\{(1, 1), (1, 5), (2, 1)\}$ будет означать что студент с ISU №1 имеет пары в понедельник и пятницу, а студент с ISU №2 имеет пары только в понедельник.

Помогите Васе решить данную задачу, используя ваши знания по дискретной математике.

Автор – Тимур Гонтарь, М3206

2. Довольные студенты ИТМО сдали летнюю сессию и намерены поехать домой на некоторое время. К сожалению, чтобы добраться до пункта назначения, им потребуется сделать несколько пересадок.

Пусть множество всех населенных пунктов выглядит как: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тогда $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 5), (5, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ – можно доехать на автобусе, $S = \{(5, 6), (6, 5), (3, 6), (6, 3)\}$ – можно долететь на самолете.

- Найдите такие пары пунктов, для перемещения между которыми надо проехать на автобусе, а затем воспользоваться самолетом и наоборот.
- Найдите пары пунктов, между которыми можно перемещаться на автобусе с одной пересадкой (пары вида $(1, 1)$ не стоит указывать в ответе).

- Найдите пары пунктов, между которыми можно перемещаться на самолете с одной пересадкой в промежуточном пункте.

Автор – Елизавета Котельникова, М3212

3. Петя решил поучаствовать в конкурсе рисунков, к сожалению, проблема была в том, что он совершенно не умел рисовать, но Петя был умным мальчиком, который знал бинарные отношения.

На декартовом произведении множества $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ заданы бинарные отношения:

$$R_1 = (0, -2), (2, 0), (6, -2), (8, 0), (9, -2), (12, -2), (11, -1), (11, 1), (12, 2), (9, 2), (8, 0), (6, 2), (5, 5), (0, 5), (6, 7), (0, 6)$$

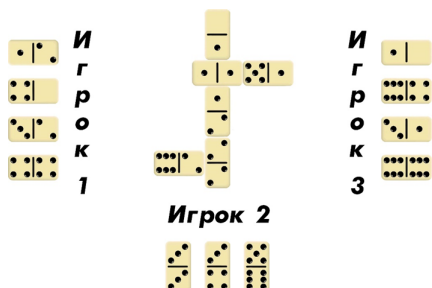
и

$$R_2 = \{(10, -1), (10, -1), (9, 0)\}$$

Помогите Пете выиграть в конкурсе! Постройте композиции отношений R_1^{-1}, R_2^{-1} и изобразите полученный результат на декартовой системе координат (задание можно дополнять другими композициями).

Автор – Анастасия Стеценко, М3207

4. В перерыве между парами дискретной математики вы с друзьями решили зарубиться в домино. Иллюстрация ниже визуализирует данный момент игры.



Так как вы — умные студенты, вам стало интересно интерпретировать партию в виде бинарных отношений. Запишите отношения:

- $G = \{(a, b) | a \text{ и } b - \text{стороны свободных доминошек, лежащих на столе, где } a - \text{свободная сторона}\}$
- $R_1 = \{(a, b) | a \text{ и } b - \text{стороны одной доминошки в руке у первого игрока}\}$
- $R_2 = \{(a, b) | a \text{ и } b - \text{стороны одной доминошки в руке у второго игрока}\}$
- $R_3 = \{(a, b) | a \text{ и } b - \text{стороны одной доминошки в руке у третьего игрока}\}$

Используя операцию композиции, составьте новые бинарные отношения:

- P_1 – возможные ходы у первого игрока
- P_2 – возможные ходы у второго игрока
- P_3 – возможные ходы у третьего игрока

Ходом является пара крайних номеров стоящих рядом доминошек.

Автор – Константин Васильев, М3213

5. Два контрабандиста затеяли сделку. Им кажется, что все должно пройти гладко и их план идеален, но стражи порядка уже взялись за это дело и планируют встать между ними, сорвав аферу. $\{1, 2, 3, 0\}$ – товары, которые планирует передать контрабандист А. $\{1, 2, 3, 4\}$ – планирует передать В. А, ничего не подозревая, уже готов передать две штуки товара 1 в руки полицейскому (притворившегося контрабандистом В) в обмен на 1 и 3 товар подставного В, две штуки товара 2 – тоже в обмен на 1 и 3 товар. Также

полиция связалась с B по поводу передачи товара 3 в обмен на 4, и 3 на 1. Таким образом, если у полиции получилось перехватить сделки с обоих концов – работа выполнена, и товар не окажется в руках ни у A ни у B . Какие и сколько сделок полиции удалось предотвратить?

Автор – Мария Баженова, М3219

6. Даны отношения R_1 и R_2 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, постройте композиции отношений $R_1 * R_2$, $R_2 * R_1$, $R_1 * R_2^{-1}$, $R_1^{-1} * R_2$, R_1^2 , R_2^2 :

а) $R_1 = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (2; 1); (1; 2); (2; 3); (3; 2); (4; 1); (4; 5); (5; 4); (5; 5)\}$

б) $R_2 = \{(1; 3); (2; 4); (5; 4); (1; 5); (4; 2); (2; 5)\}$

с) задайте получившиеся отношения с помощью матриц, графов и перечислений

д) определите основные свойства, получившихся отношений

примечание: результатом может быть пустое множество

1. Даны отношения R_1 , R_2 и R_3 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \}$

- a) $R_1 = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (2; 1); (1; 2); (2; 3); (3; 2); (3; 1); (1; 3)\}$
- b) $R_2 = \{(1; 2); (2; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$
- c) $R_2 = \{(1; 2); (2; 2); (1; 3); (1; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$
- a) $R_1 \cap R_2$
- b) $(R_1 \cup R_2) \cap R_3$
- c) $R_3^2 \cap R_3^{-1}$
- d) $R_3 \cup R_2^2$
- e) $R_1 \cup \overline{R_2} \cup R_3$

определите основные свойства, получившихся отношений определите какие свойства сохраняются относительно исходных отношений R_1 , R_2 и R_3

примечание: результатом может быть пустое множество

2. Даны отношения R_1 , R_2 и R_3 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \}$

- a) $R_1 = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (2; 1); (1; 2); \}$
- b) $R_2 = \{(1; 1); (2; 2); (1; 3); (3; 4); (3; 5); \}$
- c) $R_2 = \{(1; 1); (2; 2); (1; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$
- a) $R_1 \cap R_2$
- b) $R_1 \cup R_2 \cup R_3$
- c) $R_1^2 \cap R_3^{-1}$
- d) $R_1 \cup R_3^4$
- e) $R_1 \cup \overline{R_3}$

определите основные свойства, получившихся отношений определите какие свойства сохраняются относительно исходных отношений R_1 , R_2 и R_3

примечание: результатом может быть пустое множество

3. Даны отношения R_1 , R_2 и R_3 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \}$

- a) $R_1 = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (2; 1); (3; 1); (1; 3)\}$
- b) $R_2 = \{(1; 2); (2; 2); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$
- c) $R_2 = \{(1; 3); (1; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$
- a) $(R_1 \cap R_2) \cup R_3$
- b) $R_1 \cup R_3$
- c) $R_1^3 \cap R_3^{-1}$
- d) $R_3 \cup R_2^2$
- e) $R_2 \cup \overline{R_1}$

определите основные свойства, получившихся отношений определите какие свойства сохраняются относительно исходных отношений R_1 , R_2 и R_3

примечание: результатом может быть пустое множество

4. Даны отношения R_1 , R_2 и R_3 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \}$

- a) $R_1 = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (2; 1); \}$

b) $R_2 = \{(1; 2); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$

c) $R_2 = \{(1; 3); (1; 5); (3; 4); (4; 5)\}$

a) $(R_1 \cap R_2) \cup R_3$

b) $R_1 \cup R_3$

c) $R_1^3 \cap R_3^{-1}$

d) $R_3 \cup R_2^2$

e) $R_2 \cup \overline{R_1}$

определите основные свойства, получившихся отношений определите какие свойства сохраняются относительно исходных отношений R_1 , R_2 и R_3

примечание: результатом может быть пустое множество

5. Даны отношения R_1 , R_2 и R_3 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \}$

a) $R_1 = \{(3; 2); (3; 1); (1; 3)\}$

b) $R_2 = \{(1; 2); (2; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 3); (4; 5)\}$

c) $R_2 = \{(1; 2); (2; 2); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$

a) $R_1 \cap R_2$

b) $(R_1 \cup R_2) \cap R_3$

c) $R_3^2 \cap R_3^{-1}$

d) $R_3 \cup \overline{R_2^2}$

e) $R_1 \cup \overline{R_2} \cup R_3$

определите основные свойства, получившихся отношений определите какие свойства сохраняются относительно исходных отношений R_1 , R_2 и R_3

примечание: результатом может быть пустое множество

6. Даны отношения R_1 , R_2 и R_3 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \}$

a) $R_1 = \{(3; 2); (3; 1); (1; 3)\}$

b) $R_2 = \{(1; 2); (2; 2); (1; 3); (4; 5)\}$

c) $R_3 = \{(1; 2); (2; 2); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$

a) $R_1 \cap R_2^{-1} \cup R_3^2$

b) $(R_1 \cup R_2) \cap R_3$

c) $R_3^2 \cap R_3^{-1}$

d) $R_3^{-1} \cup \overline{R_2^{-1}}$

e) $R_1^{-1} \cup \overline{R_2} \cup R_3$

определите основные свойства, получившихся отношений определите какие свойства сохраняются относительно исходных отношений R_1 , R_2 и R_3

примечание: результатом может быть пустое множество

7. Даны отношения R_1 , R_2 и R_3 на множестве $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \}$

a) $R_1 = \{(2; 1); (1; 2); (2; 3); (3; 2); (3; 1); (1; 3)\}$

b) $R_2 = \{(1; 2); (2; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (4; 5)\}$

c) $R_3 = \{(1; 2); (2; 2); (1; 3); (1; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 5)\}$

a) $\overline{R_1} \cap R_2^{-1} \cap R_3$

b) $(R_1^3 \cup R_2) \cap R_3^{-1}$

c) $R_3 \cap R_3^{-1}$

d) $R_3^{-1} \cup \overline{R_2^{-1}}$

e) $R_1^{-1} \cup \overline{R_2} \cup R_3$

определите основные свойства, получившихся отношений определите какие свойства сохраняются относительно исходных отношений R_1 , R_2 и R_3

примечание: результатом может быть пустое множество