Resolución Práctica 1
Análisis Avanzado

Francisco Vassolo

26 de agosto de 2025

Resumen

Prefacio y uso recomendado. Este documento contiene una *resolución detallada* de cada ejercicio de la Práctica 1: la idea principal, todos los pasos intermedios, cálculos y justificaciones formales aparecen explícitamente para que la solución sea completamente verificable paso a paso.

Importante: se ruega usar estas soluciones **como herramienta de verificación** o **únicamente** en caso de que, después de haber intentado resolver cada ejercicio por un tiempo razonable y haber quedado atascado, se necesite desbloquear el avance. Si se consultan las soluciones sin haber intentado primero resolver los ejercicios por cuenta propia, se reduce considerablemente el aprendizaje y la consolidación de los métodos.

Índice

Notación y recordatorios

Convención. En este documento adoptamos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Recordamos dos hechos básicos que usamos constantemente:

Lema 0.1 (Propiedad arquimediana)**.** *Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. En particular, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$.*

Lema 0.2 (Principio del buen orden para $\mathbb{Z}$)**.** *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ que está acotado inferiormente tiene un elemento mínimo.*

Definición 0.3 (Cota superior)**.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $M \in \mathbb{R}$ es una *cota superior* de E si

$$\forall x \in E, \quad x \leq M.$$

Decimos que E está *acotado superiormente* si existe al menos una cota superior de E.

Definición 0.4 (Supremo)**.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Decimos que $s \in \mathbb{R}$ es el *supremo* de E si:

1. s es cota superior de E, i.e. $\forall x \in E,\ x \leq s$;
2. si M es otra cota superior de E, entonces $s \leq M$.

En símbolos, $s = \sup E$. Intuitivamente, s es la *menor* de todas las cotas superiores de E.

Definición 0.5 (Ínfimo)**.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Decimos que $i \in \mathbb{R}$ es el *ínfimo* de E si:

1. i es cota inferior de E, i.e. $\forall x \in E,\ i \leq x$;
2. si m es otra cota inferior de E, entonces $m \leq i$.

En símbolos, $i = \operatorname{ínf} E$. Intuitivamente, i es la *mayor* de todas las cotas inferiores de E.

Observación. Aclaración sobre notación: Cuando necesitemos el *menor entero estrictamente mayor* que un real x lo definiremos explícitamente como

$$\operatorname{mín}\{n \in \mathbb{Z} : n > x\},$$

y cuando necesitemos el *mayor entero estrictamente menor* que un real y lo denotaremos por

$$\operatorname{máx}\{n \in \mathbb{Z} : n < y\}.$$

Estas construcciones se basan en la propiedad arquimediana y en el principio del buen orden.

1. Ejercicio 1

Enunciado

Pruebe que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ entonces $x \leq y$. Deduzca que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ entonces $x = y$.

Solución detallada

Idea. La hipótesis dice que no importa qué tan pequeño sea el margen ε, siempre se cumple $x < y + \varepsilon$. Si $x > y$ existirá una diferencia positiva fija $\delta = x - y$; tomando $\varepsilon = \delta$ se obtiene una contradicción. Procedemos con cuidado paso a paso.

Parte 1: $x < y + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \implies x \leq y$.

Demostración. Queremos probar $x \leq y$. Procedemos por contradicción:

Supongamos que $x > y$. Entonces la cantidad

$$\delta := x - y$$

satisface $\delta > 0$ porque la diferencia de dos reales con $x > y$ es positiva.

La hipótesis nos dice que la desigualdad $x < y + \varepsilon$ es verdadera para *todo* $\varepsilon > 0$. En particular, podemos elegir $\varepsilon = \delta$ (que es un número positivo), y entonces la hipótesis implica

$$x < y + \delta.$$

Sustituimos $\delta = x - y$ en el miembro derecho:

$$y + \delta = y + (x - y) = x.$$

Con lo cual obtenemos la desigualdad

$$x < x,$$

que es una contradicción porque ningún número real es estrictamente menor que sí mismo. Por tanto la suposición $x > y$ es falsa. Esto deja dos posibilidades: $x < y$ o $x = y$. En ambos casos se cumple $x \leq y$, que era lo que queríamos demostrar. □

Parte 2: $|x - y| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \implies x = y$.

Demostración. La desigualdad $|x - y| < \varepsilon$ equivale por definición a

$$-\varepsilon < x - y < \varepsilon.$$

Esto implica simultáneamente las dos desigualdades:

$$x < y + \varepsilon \quad \text{y} \quad y < x + \varepsilon,$$

válidas para todo $\varepsilon > 0$.

Aplicando la Parte 1 a la desigualdad $x < y + \varepsilon$ (válida para todo ε) obtenemos $x \leq y$. Análogamente, aplicando la Parte 1 intercambiando x y y a la desigualdad $y < x + \varepsilon$, obtenemos $y \leq x$.

De $x \leq y$ y $y \leq x$ se sigue $x = y$. (Recordemos que si dos reales se acotan mutuamente entonces son iguales.) $\square$

Observación. Conclusión práctica: que una diferencia absoluta sea menor que cualquier $\varepsilon > 0$ solo es posible si la diferencia es cero.

2. Ejercicio 2: Densidad en los Reales

Enunciado

(a) Si $y - x > 1$, pruebe que existe un entero entre x e y.
(b) Si $x < y$, pruebe que existe un racional entre x e y.
(c) Si $x < y$, pruebe que existe un irracional entre x e y.
(d) Si $x < y$, pruebe que existen infinitos racionales e infinitos irracionales entre x e y.

Solución

(a) Existe un entero entre x e y si $y - x > 1$.

Idea. Tomamos el *menor* entero estrictamente mayor que x, que existe por buen orden, y mostramos que queda estrictamente menor que y.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$S := \{n \in \mathbb{Z} : n > x\}.$$

Primero verificamos que S no es vacío. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ (y por ende $N \in \mathbb{Z}$) tal que $N > x$. Por tanto $N \in S$ y $S \neq \varnothing$.

Además S está acotado inferiormente (por ejemplo, por cualquier entero menor o igual que x). Por el principio del buen orden sobre $\mathbb{Z}$, el conjunto S tiene un mínimo; lo denotamos $k := \min S$.

Por definición de k tenemos $k > x$. Además, por ser mínimo en S, el entero $k - 1$ no pertenece a S. La negación de $k - 1 \in S$ significa $k - 1 \leq x$. Sumando 1 a ambos lados se obtiene

$$k \leq x + 1.$$

La hipótesis del problema es $y - x > 1$. Reescribiéndola da $x + 1 < y$. Combinando con la desigualdad anterior:

$$k \leq x + 1 < y \quad \Longrightarrow \quad k < y.$$

Así hemos probado $x < k < y$ y $k \in \mathbb{Z}$, es decir, existe un entero entre x e y. $\square$

(b) Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Idea. Escalamos el intervalo hasta que su longitud supere 1 (usando el arquimediano), aplicamos (a) y desescalamos.

Demostración. Sea $x < y$. La cantidad $y - x$ es positiva, por lo tanto por la propiedad arquimediana (ver definicion arriba, en particular la idea de $1/n < \varepsilon$) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(y - x) > 1.$$

(De hecho se puede escoger cualquier $n > \frac{1}{y-x}$; la existencia de tal n es garantizada por el arquimediano.)

Multiplicamos las desigualdades $x < y$ por $n > 0$ para obtener $nx < ny$. Ahora $ny - nx = n(y - x) > 1$, así que entre nx y ny la distancia es mayor que 1. Aplicando el inciso (a) al par nx y ny existe un entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$nx < m < ny.$$

Dividiendo la cadena desigualdad por $n > 0$ (la desigualdad se mantiene porque $n > 0$) obtenemos

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Como $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, hemos encontrado un racional en (x, y). Esto demuestra la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. $\square$

(c) Densidad de los irracionales en $\mathbb{Q}$.

Idea. Tomamos un irracional fijo α (por ejemplo $\sqrt{2}$), reducimos el intervalo dividiendo por α, usamos la densidad de $\mathbb{Q}$ para encontrar q, y multiplicamos para recuperar el irracional $q\alpha$. Hay que justificar que $q \neq 0$ y que $q\alpha$ es irracional.

Demostración. Sea $\alpha := \sqrt{2}$ (lo único que necesitamos es que α sea un número real irracional y $\alpha \neq 0$; $\sqrt{2}$ cumple ambas condiciones). Dado $x < y$, como $\alpha > 0$ se cumple

$$\frac{x}{\alpha} < \frac{y}{\alpha}.$$

Aplicando la densidad de $\mathbb{Q}$ (inciso (b)) a este nuevo intervalo $\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}\right)$ existe un racional q tal que

$$\frac{x}{\alpha} < q < \frac{y}{\alpha}.$$

Observaciones importantes:

- $\alpha > 0$ garantiza que al multiplicar por α las desigualdades conservan el sentido.
- La densidad de $\mathbb{Q}$ permite elegir q distinto de cualquier valor prefijado (por ejemplo, distinto de 0) porque hay infinitos racionales en cualquier intervalo abierto no vacío. Por tanto siempre podemos escoger $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con $\frac{x}{\alpha} < q < \frac{y}{\alpha}$ si lo deseamos.

Multiplicando por α obtenemos

$$x < q\alpha < y.$$

Si por contradicción $q\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces $q\alpha = r$ para algún $r \in \mathbb{Q}$. Si además $q \neq 0$ se deduce $\alpha = r/q \in \mathbb{Q}$, contradicción. Por tanto $q\alpha$ es irracional y se encuentra en (x, y). $\square$

(d) Densidad de los irracionales en $\mathbb{R}$.

Idea: Para obtener un irracional entre x e y, podemos aprovechar el resultado del inciso (b), que nos garantiza la existencia de un racional en cualquier intervalo real. La idea es fijar un irracional conocido, como $\sqrt{2}$, y usar el inciso (b) aplicado al intervalo escalado $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$. Así conseguimos un racional q en ese intervalo, y al multiplicarlo por $\sqrt{2}$ obtenemos un número $q\sqrt{2}$ que será irracional y estará entre x e y.

Resolución: Sea $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, y sea $\alpha = \sqrt{2}$. Como $\alpha > 0$, se cumple

$$\frac{x}{\alpha} < \frac{y}{\alpha}.$$

Por el inciso (b), aplicado al intervalo $\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}\right)$, existe un racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{x}{\alpha} < q < \frac{y}{\alpha}.$$

Multiplicando por $\alpha > 0$, obtenemos

$$x < q\alpha < y.$$

Ahora, si $q\alpha$ fuera racional, como $q \neq 0$, se tendría que $\alpha = \frac{q\alpha}{q}$ sería racional, contradiciendo que $\alpha = \sqrt{2}$ es irracional. Por lo tanto, $q\alpha$ es irracional y además cumple

$$x < q\alpha < y.$$

Con esto queda probado que entre x e y existe al menos un irracional.

3. Ejercicio 3: Caracterización del ínfimo

Enunciado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Pruebe la equivalencia:

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a, & \forall a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Solución detallada

Idea. i es la mayor cota inferior; la primera condición expresa que i es cota inferior; la segunda que no existe cota inferior estrictamente mayor (o equivalentemente que hay elementos de A arbitrariamente cerca de i por encima).

Demostración. Mostramos las dos implicaciones.

($\Rightarrow$) Supongamos $i = \inf A$. Por definición i es cota inferior de A, por lo que $i \leq a$ para todo $a \in A$ (esto prueba la primera condición). Ahora demostramos la segunda por contradicción.

Supongamos que la segunda condición es falsa. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que no hay elementos de A en el intervalo $[i, i + \varepsilon_0)$. Es decir,

$$\forall a \in A, \quad a \geq i + \varepsilon_0.$$

Pero entonces $i + \varepsilon_0$ es también una cota inferior de A, porque es menor o igual que cualquier $a \in A$. Y claramente $i + \varepsilon_0 > i$. Esto contradice que i sea la *mayor* cota inferior de A. Por lo tanto la segunda condición debe cumplirse.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que se cumplen las dos condiciones dadas. La primera condición implica que i es cota inferior de A. Queremos probar que i es la mayor cota inferior, es decir, que cualquier otra cota inferior c satisface $c \leq i$.

Sea c una cota inferior cualquiera de A. Si por contradicción $c > i$, entonces definimos $\varepsilon := c - i$, que es positivo. Por la segunda condición existe $a \in A$ tal que

$$i \leq a < i + \varepsilon = c.$$

Pero esto contradiría que c sea cota inferior, porque la existencia de tal a muestra que $a < c$. Por tanto no puede ocurrir $c > i$. Así $c \leq i$ para toda cota inferior c, lo que es exactamente la definición de que i sea la mayor cota inferior, es decir $i = \inf A$. $\square$

Observación. La segunda condición es una forma precisa de decir que el ínfimo puede aproximarse por elementos de A desde la derecha.

4. Ejercicio 4: Caracterización del supremo

Enunciado

Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Pruebe la equivalencia:

$$s = \sup B \iff \begin{cases} b \leq s, & \forall b \in B, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists b \in B \text{ tal que } s - \varepsilon < b \leq s. \end{cases}$$

Solución detallada

Idea. Es el dual del ejercicio anterior: el supremo es la menor cota superior y puede aproximarse por debajo por elementos de B.

Demostración. Mostramos las dos implicaciones.

($\Rightarrow$) Si $s = \sup B$ entonces por definición s es cota superior, por tanto $b \leq s$ para todo $b \in B$. Si la segunda condición fuera falsa existiría $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall b \in B$, $b \leq s - \varepsilon_0$. Entonces $s - \varepsilon_0$ sería una cota superior de B menor que s, contradicción con que s es la menor cota superior. Así la segunda condición se cumple.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que se cumplen las dos condiciones. La primera implica que s es cota superior. Sea d cualquier cota superior de B. Si $d < s$ entonces $\varepsilon := s - d > 0$. Por la segunda condición existe $b \in B$ tal que

$$s - \varepsilon < b \leq s.$$

Sustituyendo $\varepsilon = s - d$ se obtiene $d < b \leq s$. Pero esto contradice que d sea cota superior (porque hay un elemento $b \in B$ mayor que d). Por tanto no es posible $d < s$, y se concluye $d \geq s$. Como esto vale para cualquier cota superior d, s es la menor cota superior, es decir $s = \sup B$. □

Observación. Al igual que en el caso del ínfimo, la segunda condición expresa que el supremo puede aproximarse por elementos de B desde la izquierda.

5. Ejercicio 5: Subconjuntos acotados

Enunciado

Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$. Pruebe: (a) Si B está acotado superiormente, también A, y $\sup A \leq \sup B$. (b) Si B está acotado inferiormente, también A, y $\inf B \leq \inf A$.

Solución detallada

Prueba de (a). Supongamos B está acotado superiormente y sea $s_B := \sup B$. Por definición de supremo, para todo $b \in B$ se tiene $b \leq s_B$. Como $A \subseteq B$, cada elemento $a \in A$ es también elemento de B, por lo que $a \leq s_B$ para todo $a \in A$. Esto muestra que s_B es cota superior de A, es decir, A está acotado superiormente.

Ahora $\sup A$ es la menor de todas las cotas superiores de A. En particular, puesto que s_B es una cota superior de A, debe cumplirse $\sup A \leq s_B$, que es exactamente $\sup A \leq \sup B$. □

Prueba de (b). Supongamos B está acotado inferiormente y sea $i_B := \inf B$. Por definición $i_B \leq b$ para todo $b \in B$. Dado que $A \subseteq B$, entonces $i_B \leq a$ para todo $a \in A$, es decir i_B es cota inferior de A. Como $\inf A$ es la mayor cota inferior de A, debe verificarse $i_B \leq \inf A$. Reescribiendo, $\inf B \leq \inf A$. □

Observación. Ninguna de las hipótesis exige que A sea no vacío para la parte (a) respecto de acotación superior; sin embargo la igualdad de supremos sólo tiene sentido si A no es vacío y está acotado superiormente (enunciado la incluye).

6. Ejercicio 6: Operaciones con conjuntos

Enunciado

(a) Si A está acotado superiormente, pruebe que $-A$ lo está inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$. *(b) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente, pruebe que* $\sup(cA) = c \sup A$.

Solución detallada

Prueba de (a). Sea $s := \sup A$. Por definición de supremo, para todo $a \in A$ se cumple $a \leq s$.

Multiplicamos por -1 (operación que invierte el sentido de las desigualdades): para todo $a \in A$,

$$-a \geq -s.$$

Recordemos que $-A := \{-a : a \in A\}$. Entonces la desigualdad anterior dice exactamente que para todo $x \in -A$ (con $x = -a$) se tiene $x \geq -s$. Esto significa que $-s$ es una cota inferior de $-A$, por lo tanto $-A$ está acotado inferiormente.

Ahora hay que probar que $-s$ es la *mayor* de las cotas inferiores de $-A$, es decir $\inf(-A) = -s$. Tomemos m una cota inferior cualquiera de $-A$. Por hipótesis $m \leq x$ para todo $x \in -A$. Es decir,

$$m \leq -a \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Multiplicando la desigualdad anterior por -1 (invertimos el sentido):

$$-m \geq a \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Esto muestra que $-m$ es una cota superior de A. Como s es la menor cota superior de A, se tiene $s \leq -m$. Reordenando obtenemos $m \leq -s$. Esto muestra que cualquier cota inferior m de $-A$ cumple $m \leq -s$; por tanto $-s$ es la mayor cota inferior de $-A$, i.e. $\inf(-A) = -s$. □

Prueba de (b). Sea $s := \sup A$ y supongamos $c > 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $a \leq s$. Multiplicando por $c > 0$ (que conserva el orden) obtenemos $ca \leq cs$. Como ca recorre los elementos de $cA := \{ca : a \in A\}$, esto implica que cs es una cota superior de cA.

Ahora probamos que es la menor. Sea M cualquier cota superior de cA; es decir,

$$\forall a \in A, \quad ca \leq M.$$

Dividiendo por $c > 0$ (conserva el sentido de la desigualdad) obtenemos

$$\forall a \in A, \quad a \leq \frac{M}{c}.$$

Esto muestra que M/c es una cota superior de A. Como s es la menor cota superior de A, se cumple $s \leq M/c$. Multiplicando por $c > 0$ volvemos a obtener $cs \leq M$. Concluimos que cs es la menor cota superior de cA, i.e. $\sup(cA) = c \sup A$. □

Observación. Si $c < 0$ la fórmula cambia de signo y hay que tener en cuenta la inversión del orden; el enunciado pedía $c > 0$, por eso evitamos ese caso aquí.

7. Ejercicio 7: Un teorema de punto fijo

Enunciado

Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ *una función creciente con* $f(a) > a$*. Sea*

$$x_0 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) > x\}.$$

Pruebe que $f(x_0) = x_0$*.*

Solución extremadamente detallada

Idea. Definimos $A := \{x \in [a, b] : f(x) > x\}$. Dado que $f(a) > a$, A no está vacío. Tomamos $x_0 = \sup A$. La prueba consiste en dos desigualdades opuestas:

1. Demostrar $f(x_0) \leq x_0$. (Si fuera $>$, podríamos encontrar por monotonicidad un $y > x_0$ en A, contradicción con que x_0 es supremo.)
2. Demostrar $f(x_0) \geq x_0$. (Aproximamos x_0 por una sucesión $x_n \in A$ y pasamos a límites con la ayuda de monotonicidad.)

Demostración. Sea

$$A := \{x \in [a, b] : f(x) > x\}.$$

Primero notamos que $a \in A$ porque por hipótesis $f(a) > a$. Por tanto $A \neq \varnothing$. Además $A \subseteq [a, b]$ está acotado superiormente (por b, por ejemplo), luego $x_0 := \sup A$ existe y satisface $a \leq x_0 \leq b$.

(i) Prueba de $f(x_0) \leq x_0$. Procedemos por contradicción:

Supongamos $f(x_0) > x_0$. Entonces la diferencia

$$\delta := f(x_0) - x_0$$

es positiva ($\delta > 0$). Elegimos un número y tal que

$$x_0 < y < x_0 + \delta/2.$$

Es posible elegir tal y porque hay números reales estrictamente entre x_0 y $x_0 + \delta/2$. De la elección resulta $y < f(x_0)$ (pues $y < x_0 + \delta/2 < x_0 + \delta = f(x_0)$) y además $x_0 < y$.

Ahora usamos que f es creciente: como $x_0 < y$, se tiene

$$f(x_0) \leq f(y).$$

Combinando $y < f(x_0)$ con $f(x_0) \leq f(y)$ obtenemos

$$y < f(y).$$

Por definición de A, esto implica $y \in A$. Pero $y > x_0$ por construcción, lo que contradice que x_0 fuera una cota superior de A (recordar que $x_0 = \sup A$). Esta contradicción muestra que nuestra suposición $f(x_0) > x_0$ era falsa; por lo tanto $f(x_0) \leq x_0$.

(ii) Prueba de $f(x_0) \geq x_0$. Usaremos la caracterización del supremo (Ejercicio 4). Dado que $x_0 = \sup A$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0.$$

(Esta elección se justifica así: tomar $\varepsilon := \frac{1}{n} > 0$; por la propiedad del supremo existe $x_n \in A$ con $x_0 - \varepsilon < x_n \leq x_0$.)

De la pertenencia $x_n \in A$ se sabe que $f(x_n) > x_n$ para todo n. Además los x_n están acotados por arriba por x_0 (por construcción $x_n \leq x_0$), y $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$ porque $x_0 - 1/n < x_n \leq x_0$ y el lado izquierdo tiende a x_0.

Como f es creciente, de $x_n \leq x_0$ se obtiene

$$f(x_n) \leq f(x_0).$$

Combinando con $f(x_n) > x_n$ tenemos

$$x_n < f(x_n) \leq f(x_0).$$

Por tanto para todo n se cumple $x_n < f(x_0)$. Haciendo $n \to \infty$ y usando que $x_n \to x_0$ concluimos

$$x_0 \leq f(x_0).$$

Una explicación más formal es: dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe N tal que para $n \geq N$ se cumple $x_0 - 1/n > x_0 - \varepsilon$; entonces para tal n se tiene $x_0 - \varepsilon < x_n < f(x_0)$, de donde $x_0 - \varepsilon < f(x_0)$. Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, por el resultado del Ejercicio 1 se debe tener $x_0 \leq f(x_0)$.

Combinando las desigualdades obtenidas en (i) y (ii) llegamos a

$$x_0 \leq f(x_0) \leq x_0,$$

lo que implica $f(x_0) = x_0$. Esto demuestra que x_0 es un punto fijo de f. □

Observación. Observaciones finales:

- No usamos continuidad de f; la monotonía junto con las propiedades del supremo bastan.
- El argumento es estándar en teoría de orden: el supremo del conjunto donde $f(x) > x$ es siempre un punto fijo si f es monótona y el intervalo está mapeado en sí mismo.