Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

Εργασία 3

2/5/2020

Μακρυλάκη Βασιλική Ελένη
makrylav@ece.auth.gr
9174

Στο πρώτο κομμάτι της εργασίας (ερωτήματα 1-6) το ζητούμενο είναι να κατασκευαστεί ένα σύστημα MA-q (q=5), με γνωστή είσοδο και έξοδο, και να ελεγχθεί με βάση αυτό η εγκυρότητα της φόρμουλας του Γιαννάκη.

Η διαδικασία αυτή υλοποιείται σε ένα αρχείο `demo_x.m`, το οποίο θα παρουσιαστεί μετά τις επιμέρους συναρτήσεις που το αποτελούν.

Καταρχάς, στο αρχείο `X.m` κατασκευάζεται το σύστημα, δηλαδή η είσοδος, η κρουστική απόκριση και η έξοδος σύμφωνα με τον παρακάτω αλγόριθμο:

```
% construct x(k), v(k)
function [x,v] = X
v = exprnd(1, [1,2048]);
theta = [1 0.93 0.85 0.72 0.59 -0.1];
x = zeros(1, 2048);

for t = 1:2048
for i =1:6
if t-i+1>0
x(t) = x(t) + theta(i)*v(t-i+1);

end
end
end
end
```

Στη συνέχεια, υλοποιήθηκε το αρχείο `skew.m` για τον υπολογισμό της λοξότητας του σήματος εισόδου `v[k]`.

```
% skewness
function y = skew(v)
m = mean(v);
s = std(v);
y = sum((v([1:2048])-m).^3)/(2047*s^3);

% or y = skewness(v)

end
```

Για τον υπολογισμό των σωρειτών 3ης τάξης χρησιμοποιήθηκε από το HOSA TOOLBOX του Matlab η συνάρτηση `cum3est()` η οποία καλείται από την `cumest()`.

```
function cmat = cum3(x,flag)
% x to sima
%flag: gia flag==1 pairnoume kai ta diagrammata twn cumulants

for k=-20:20

    cmat(:,k+20+1)=cumest(x,3,20,64,0,'unbiased',k);
end

if flag==1
[X,Y] = meshgrid(-20:20);
subplot 121
mesh(X, Y, cmat)
title('3^{rd} Order Cumulant (\itV \rm^{3} )')

subplot 122
contour(X, Y, cmat, 4)
title('3^{rd} Order Cumulant Peaks')

end
end
```

Εφόσον οι σωρείτες στην πραγματικότητα είναι της μορφής $c_3(\tau_1,\tau_2)$ με τ_1 και τ_2 να κυμαίνονται από -20 έως 20, ο πίνακας σωρειτών cmat είναι μεγέθους 41x41 με κάθε $\tau \in [-20,20]$ να αντιστοιχίζεται σε ένα $\kappa = \tau + 21$.

Το αρχείο όπου γίνεται εφαρμογή της φόρμουλας του Γιαννάκη είναι το `h_est.m`, στο οποίο υπολογίζεται η κρουστική απόκριση χρησιμοποιώντας μόνο τους σωρείτες στην έξοδο, εκτιμώντας ακριβώς, υπό-εκτιμώντας κατά 2 και υπέρ-εκτιμώντας κατά 3 την τάξη του συστήματος.

```
function [hest, hsub, hsup] = h_est(c)
q=5;
%h_est
for k=0:q
hest(1+k) = c(q+21,k+21)/c(q+21,21);
end

%h_sub
for k=0:q-2
hsub(1+k) = c(q-2+21,k+21)/c(q-2+21,21);
end


%h_sup
for k=0:q+3
hsup(1+k) = c(q+3+21,k+21)/c(q+3+21,21);
end
end
```

Μέσω αυτών των εκτιμούμενων κρουστικών αποκρίσεων μπορεί να εκτιμηθεί το σήμα εξόδου `x[k]` κάνοντας χρήση του αρχείου `x_est.m`

```
function  xest = x_est(x,v,h,flag)
% gia flag=1 pairnoume to plot tou xestimated kai tou x

xest = conv(v, h, 'same');
k= 1:2048;
y1 = x(k);
y2= xest(k);

if flag==1
plot(k,y1,'blue',k,y2,'red');
end

end
```

Τέλος, έχοντας το εκτιμούμενο σήμα εξόδου ελέγχεται το “Normal Root Mean Square Error”, μέσω του `NRMSE_fun.m`

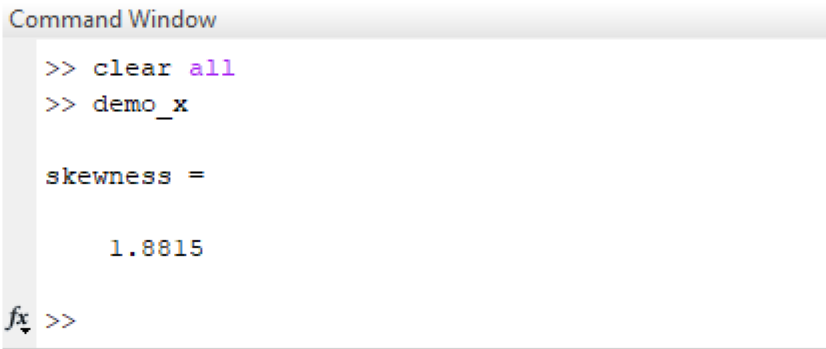
```
function NRMSE = NRMSE_fun(xest,x)

for k=1:2048
    a(k) = (xest(k) - x(k))*(xest(k) - x(k));
end
RMSE = sqrt(sum(a)/2048);
NRMSE = RMSE/(max(x)-min(x));

end
```

Η υλοποίηση των παραπάνω συναρτήσεων γίνεται στο αρχείο `demo_x.m` όπως παρακάτω:

```
[x,v] = X;

%erwtima 1
skewness = skew(v)

%erwtima 2
cmat = cum3(x,1);

%erwtima 3-4
[hest, hsub, hsup] = h_est(cmat);

%erwtima 5
figure;
xest = x_est(x,v,hest,1);
N1 = NRMSE_fun(xest,x);
title('X estimated Plot');
xlabel('k');
ylabel('Xest');
legend('original X[k]', 'estimated X[k]');

%erwtima 6
figure;
xsub = x_est(x,v,hsub,1);
N2 = NRMSE_fun(xsub,x);
title('X sub-estimated Plot');
xlabel('k');
ylabel('Xsub');
legend('original X[k]', 'sub-estimated X[k]');
```

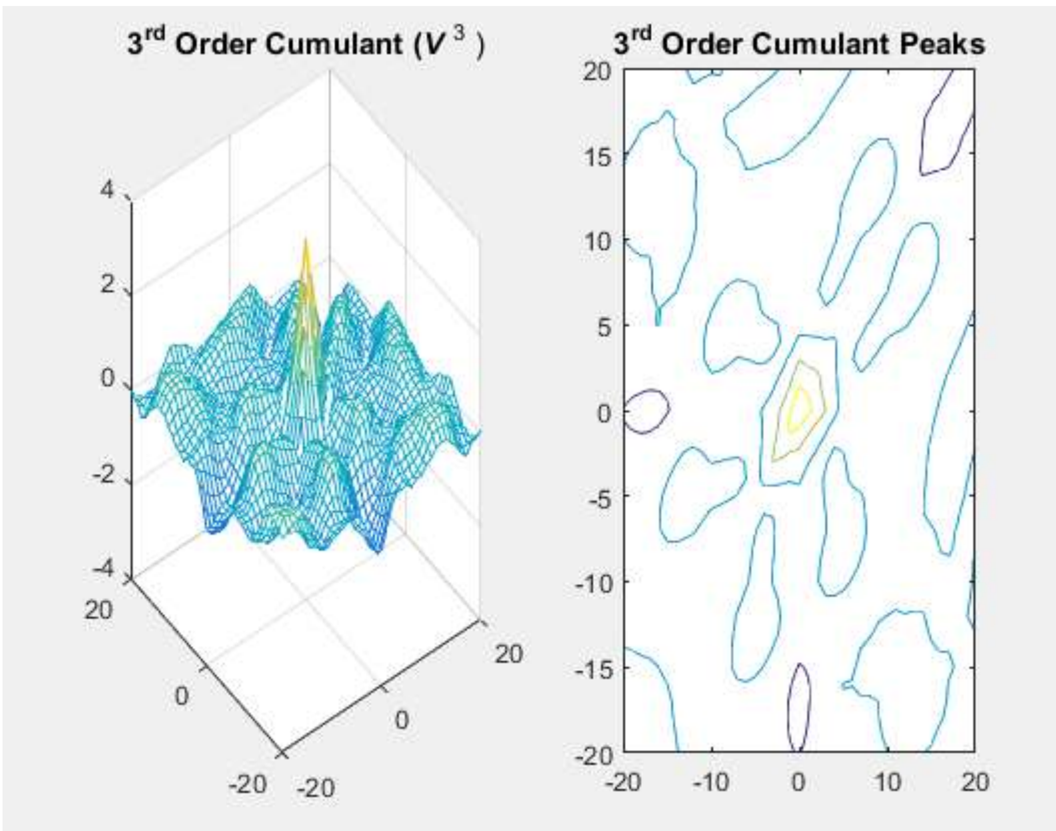
```
figure;
xsup = x_est(x,v,hsup,1);
N3 = NRMSE_fun(xsup,x);
title('X sup-estimated Plot');
xlabel('k');
ylabel('Xsup');
legend('original X[k]', 'sup-estimated X[k]');

NRMSE = [N1 N2 N3];
f = figure;
uit = uitable(f,'Data', NRMSE);
uit.RowName = {'NRMSE'};
uit.ColumnName = {'hest', 'hsub', 'hsup'};
```

Τρέχοντας το αρχείο εμφανίζεται στο command window το αποτέλεσμα της λοξότητας του σήματος εισόδου `v[k]`, για το οποίο ισχύει skewness(v)≠0, κι έτσι επιβεβαιώνεται ότι το σήμα `v[k]` είναι non-Gaussian.

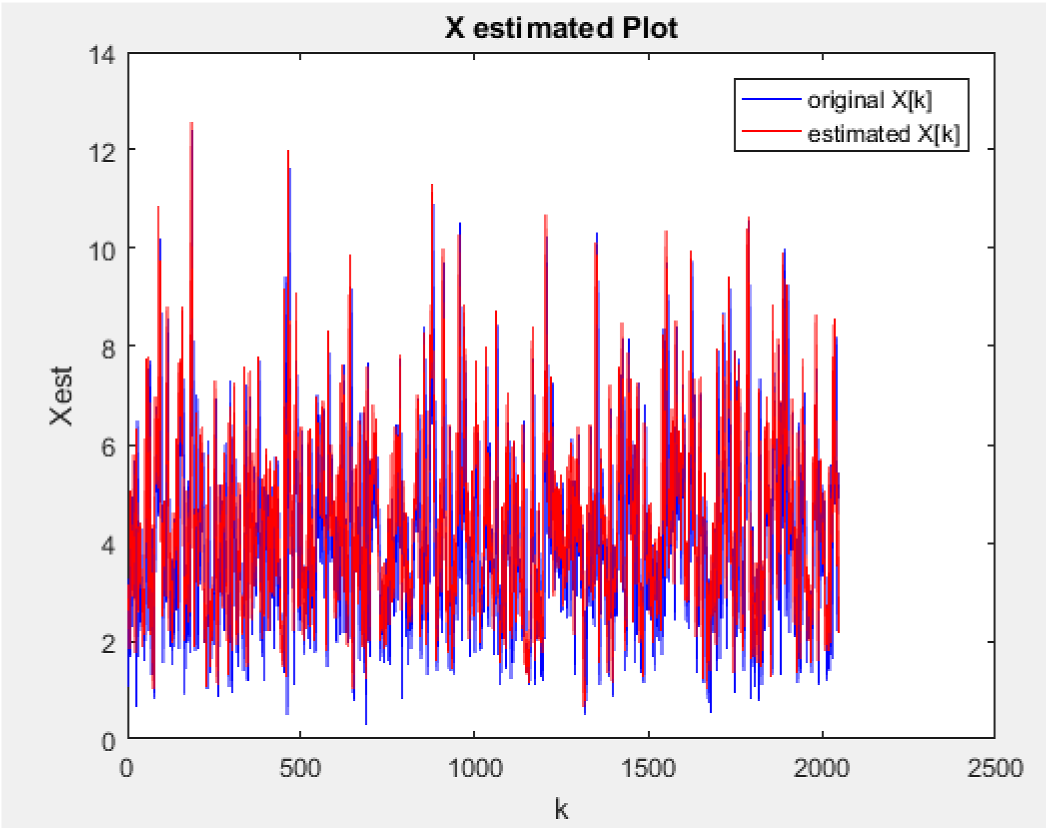


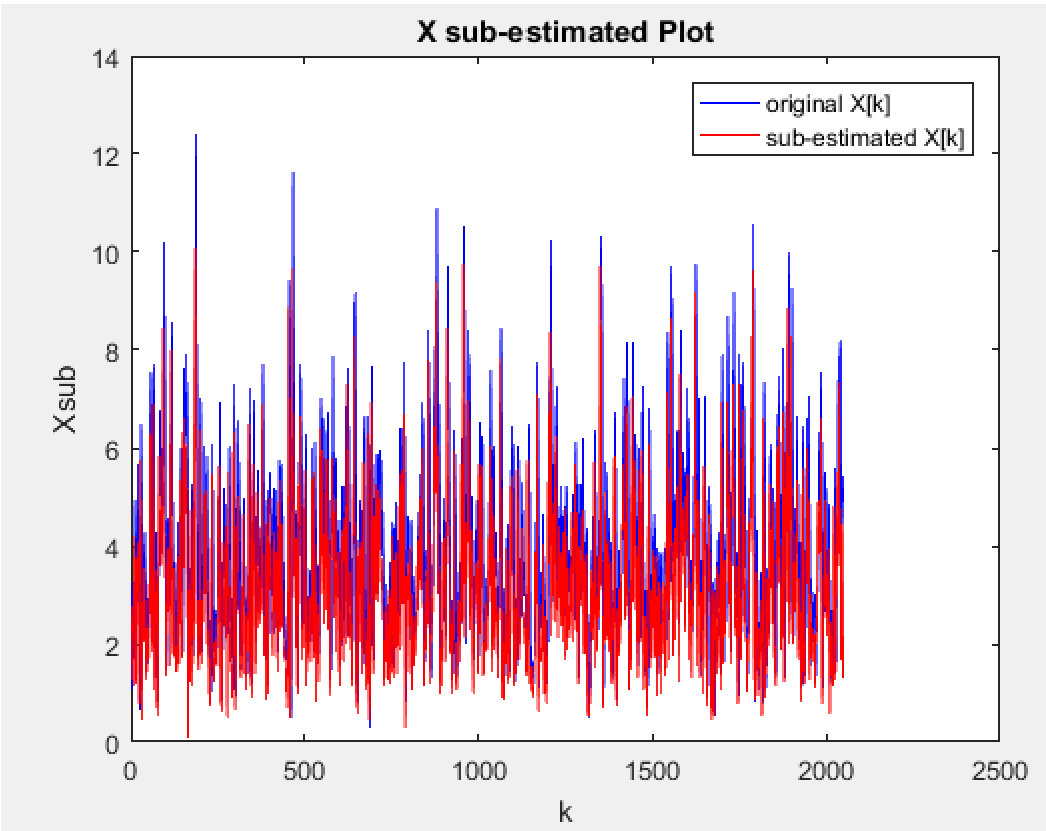
```
Command Window
>> clear all
>> demo_x

skewness =

    1.8815

>>
```

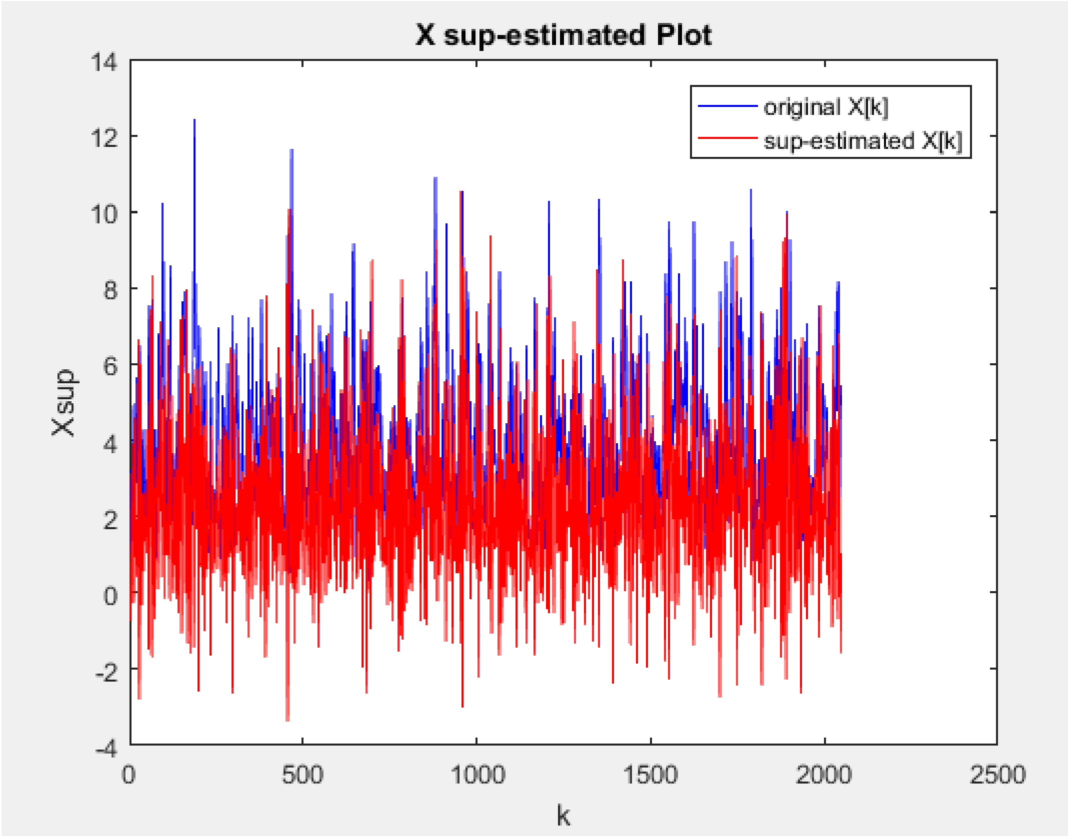
Επίσης, ανοίγουν 5 εικόνες, εκ των οποίων η πρώτη είναι το διάγραμμα των σωρειτών 3^{ης} τάξης του σήματος x[k], σε 3-D και σε κάτοψη.



Οι επόμενες τρεις εικόνες είναι το διάγραμμα του πρωτότυπου σήματος x[k] με μπλε χρώμα, στο ίδιο σύστημα αξόνων με το εκτιμούμενο σήμα x[k] με κόκκινο χρώμα, έχοντας αντίστοιχα εκτιμήσει ακριβώς, υποεκτιμήσει κατά 2, και υπερεκτιμήσει κατά 3 την τάξη του συστήματος.







Τέλος, η πέμπτη εικόνα είναι το αποτέλεσμα του NRMSE του σήματος για κάθε μια από τις κρουστικές αποκρίσεις.

	hest	hsub	hsup
NRMSE	0.1631	0.1709	0.2609

Για την υπερεκτίμηση της τάξης κατά 3, είναι φανερό τόσο από τα διαγράμματα των σημάτων, όσο και από την τιμή του NRMSE, που είναι πιο υψηλή σε σχέση με τις άλλες δύο τιμές, ότι η προσέγγιση του σήματος δεν είναι καλή.

Για την ακριβή εκτίμηση και την υποεκτίμηση της τάξης κατά 2, με μια πρώτη ανάλυση τα εκτιμούμενα σήματα φαίνεται να είναι κοντά στο πρωτότυπο, με το hest να δίνει λίγο μικρότερο NRMSE.

Στο ερώτημα 7, ζητείται να ελεγχθεί η εγκυρότητα της φόρμουλας του Γιαννάκη, έχοντας προσθέσει στο σήμα x[k] λευκό Γκαουσιανό θόρυβο 8 διαφορετικών επιπέδων SNR, κατασκευάζοντας τελικά το σήμα $y_i[k]$, i = 1 έως 8.

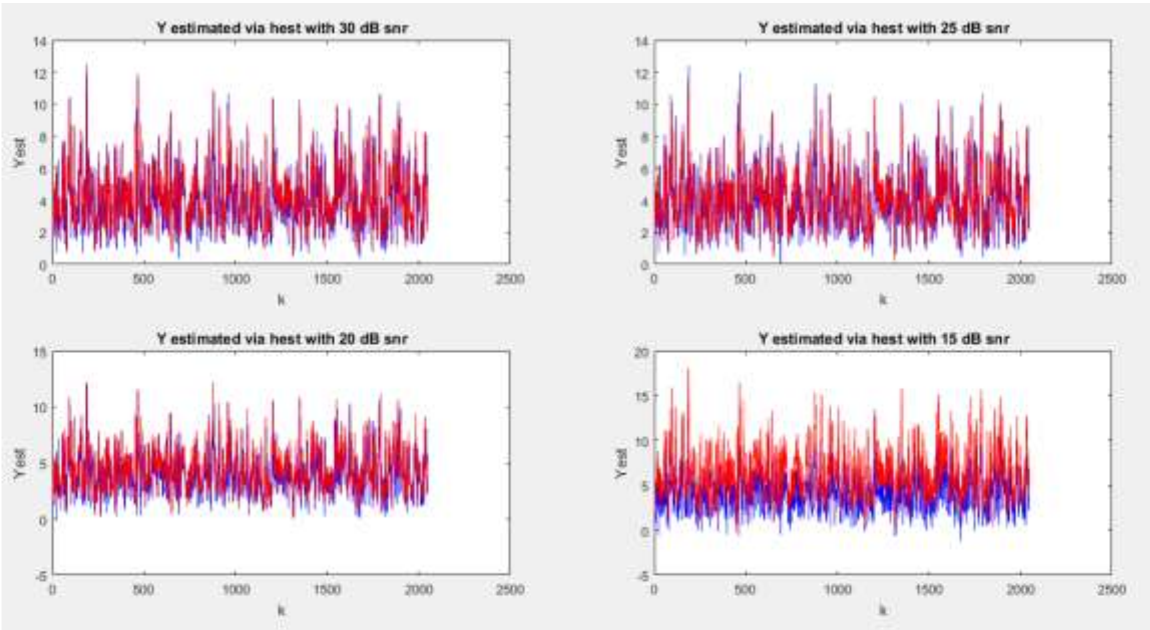
Η υλοποίηση αυτή γίνεται στο αρχείο `demo_y.m` όπως παρακάτω:

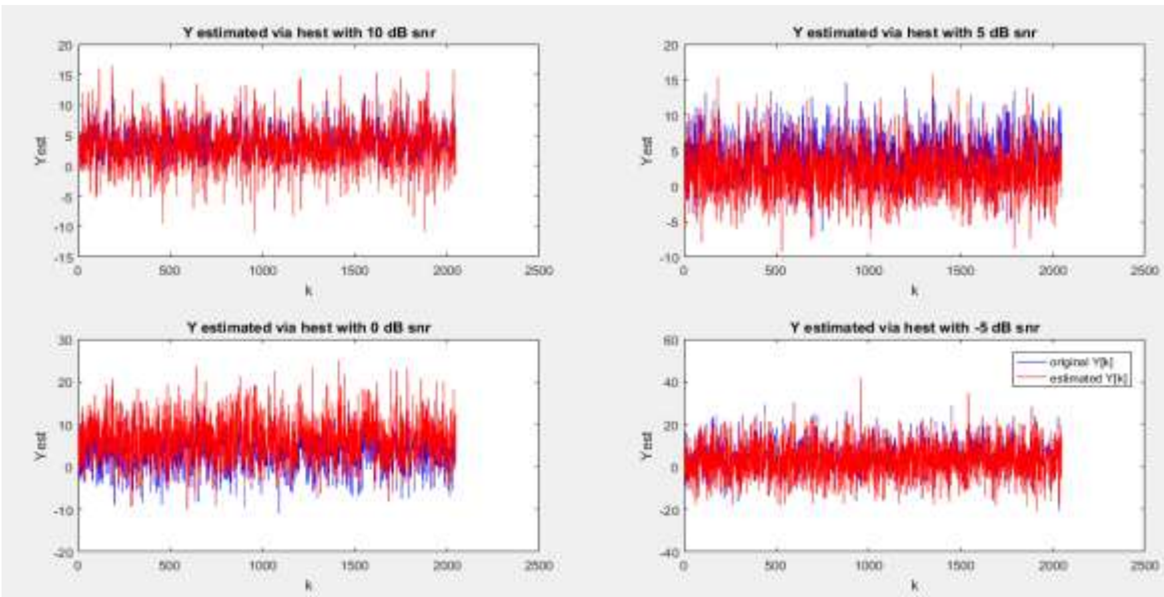
```
snr = [30:-5:-5];
figure;
k=1:2048;
for i=1:8
y = awgn(x, snr(i), 'measured');
n = y - x;  %o thoruvos pou prostethike
cmat = cum3(y,2);
[hest, hsub, hsup] = h_est(cmat);
if i>=5
    if i==5
        figure;

    end
    j=i-4;
    subplot(2,2,j)
else
subplot(2,2,i)
end
xest = x_est(x,v,hest,1);
yest = xest + n;
plot(k,y,'b',k,yest,'r')
NRMSE1(i) = NRMSE_fun(yest,y);

xsub = x_est(x,v,hsub,0);
ysub = xsub + n;
NRMSE2(i) = NRMSE_fun(ysub,y);

xsup = x_est(x,v,hsup,0);
ysup = xsup + n;
NRMSE3(i) = NRMSE_fun(ysup,y);

xlabel('k');
ylabel('Yest');
title(sprintf('Y estimated via hest with %d dB snr',snr(i)));
end
legend('original Y[k]', 'estimated Y[k]');

%ci = confidence interval
ci1 = [mean(NRMSE1)-1.96*std(NRMSE1)/sqrt(8),
mean(NRMSE1)+1.96*std(NRMSE1)/sqrt(8)];
ci2 = [mean(NRMSE2)-1.96*std(NRMSE2)/sqrt(8),
mean(NRMSE2)+1.96*std(NRMSE2)/sqrt(8)];
ci3 = [mean(NRMSE3)-1.96*std(NRMSE3)/sqrt(8),
mean(NRMSE3)+1.96*std(NRMSE3)/sqrt(8)];

figure;
plot(snr,NRMSE1,snr,ones(size(snr))*ci1(1),'k--
',snr,ones(size(snr))*ci1(2),'k--');
xlabel('SNR(dB)');
ylabel('NRMSE');
title('NRMSE estimated using hest');

figure;
plot(snr,NRMSE2,snr,ones(size(snr))*ci2(1),'k--
',snr,ones(size(snr))*ci2(2),'k--');
xlabel('SNR(dB)');
ylabel('NRMSE');
title('NRMSE estimated using hsub');

figure;
```

```
plot(snr,NRMSE3,snr,ones(size(snr))*ci3(1),'k--
',snr,ones(size(snr))*ci3(2),'k--');
xlabel('SNR(dB)');
ylabel('NRMSE');
title('NRMSE estimated using hsup');
```

Τρέχοντας το αρχείο, ανοίγουν και πάλι πέντε εικόνες.

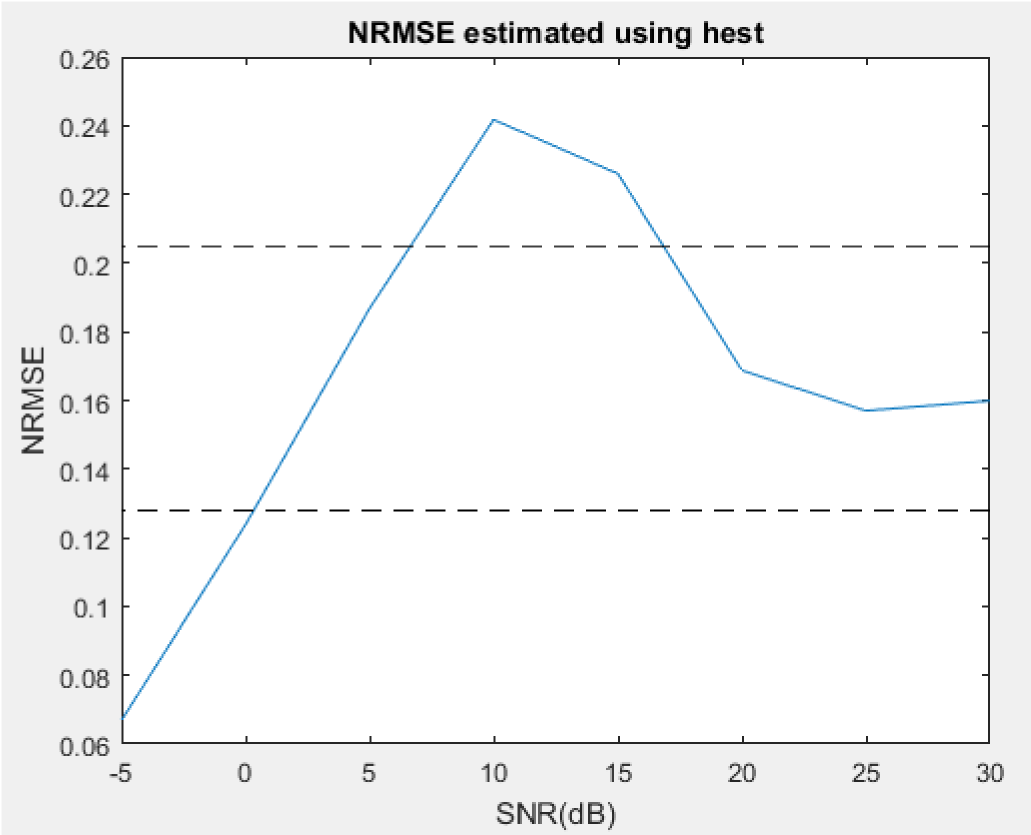
Στις πρώτες δύο απεικονίζεται το πρωτότυπο σήμα y[k] (με μπλε χρώμα) στο ίδιο σύστημα αξόνων με το εκτιμούμενο y[k] (κόκκινο χρώμα) για κάθε ένα από τα επίπεδα SNR , έχοντας χρησιμοποιήσει στη φόρμουλα του Γιαννάκη ακριβή εκτίμηση της τάξης q.

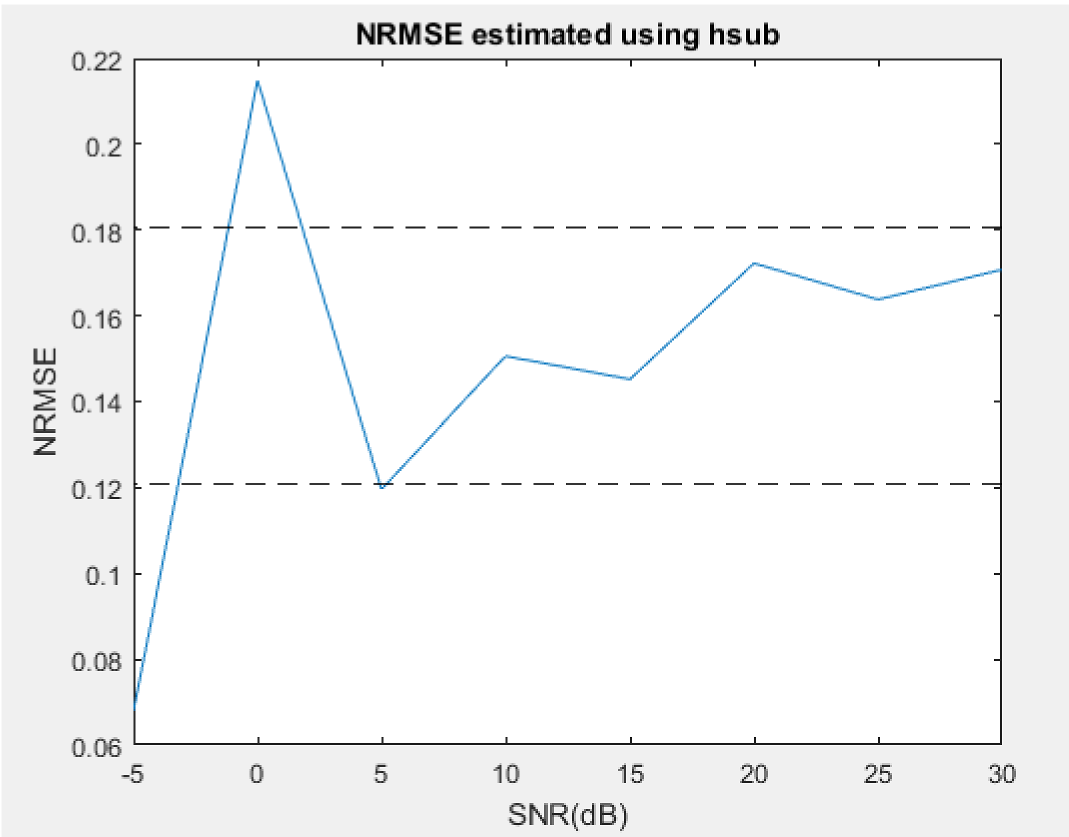


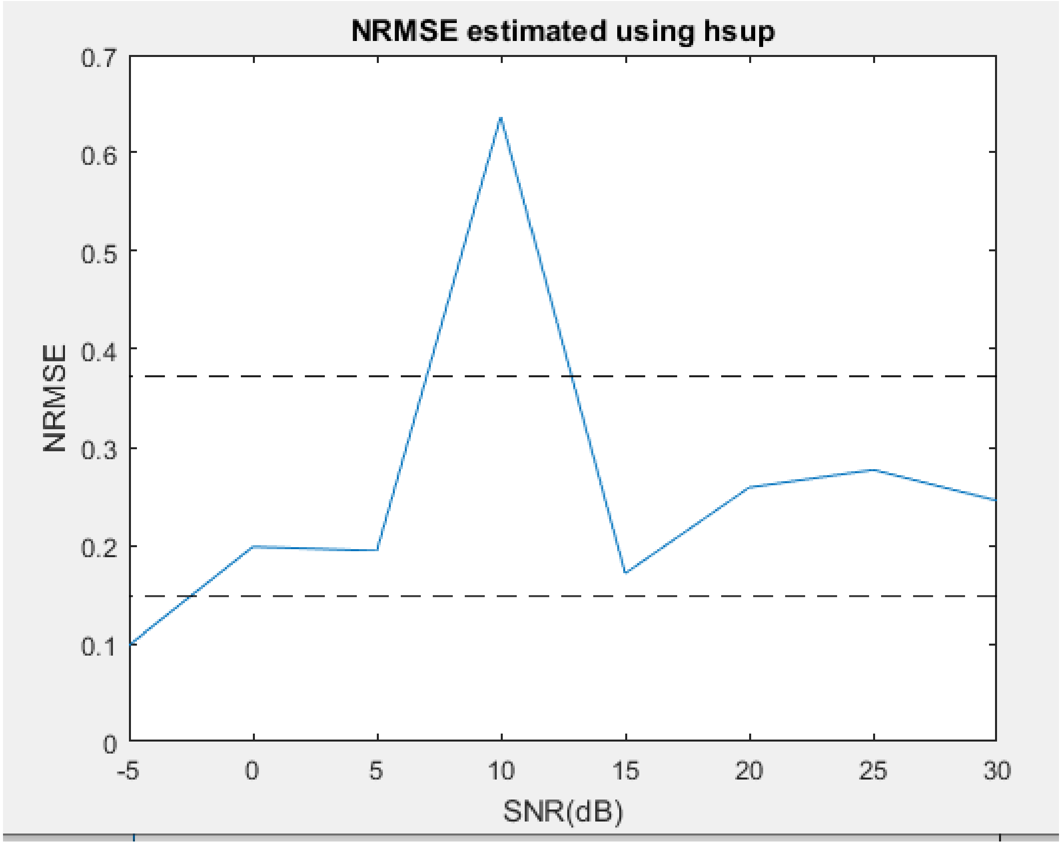


Από τα διαγράμματα βγαίνει το συμπέρασμα ότι στα υψηλότερα επίπεδα SNR, η προσέγγιση του σήματος φαίνεται να είναι καλύτερη.

Στις επόμενες τρεις εικόνες απεικονίζεται αντίστοιχα η τιμή του NRMSE του y[k] σε σχέση με το SNR, εκτιμώντας σωστά, υποεκτιμώντας κατά 2 και υπερεκτιμώντας κατά 3 την τάξη q.







Θεωρητικά, τα διαγράμματα αυτά θα έπρεπε να είναι οριζόντιες ευθείες γραμμές, καθώς η φόρμουλα του Γιαννάκη δεν επηρεάζεται από τον προσθετικό λευκό Γκαουσιανό θόρυβο, αφού για αυτόν ισχύει $c_3(\tau1,\tau2)=0$. Στην πράξη ωστόσο, τα πράγματα δε φαίνεται να είναι ακριβώς έτσι.

Στο πρώτο διάγραμμα (ακριβής εκτίμηση) φαίνεται να υπάρχει μέγιστο σφάλμα στα 10dB (NRMSE=0.2417).

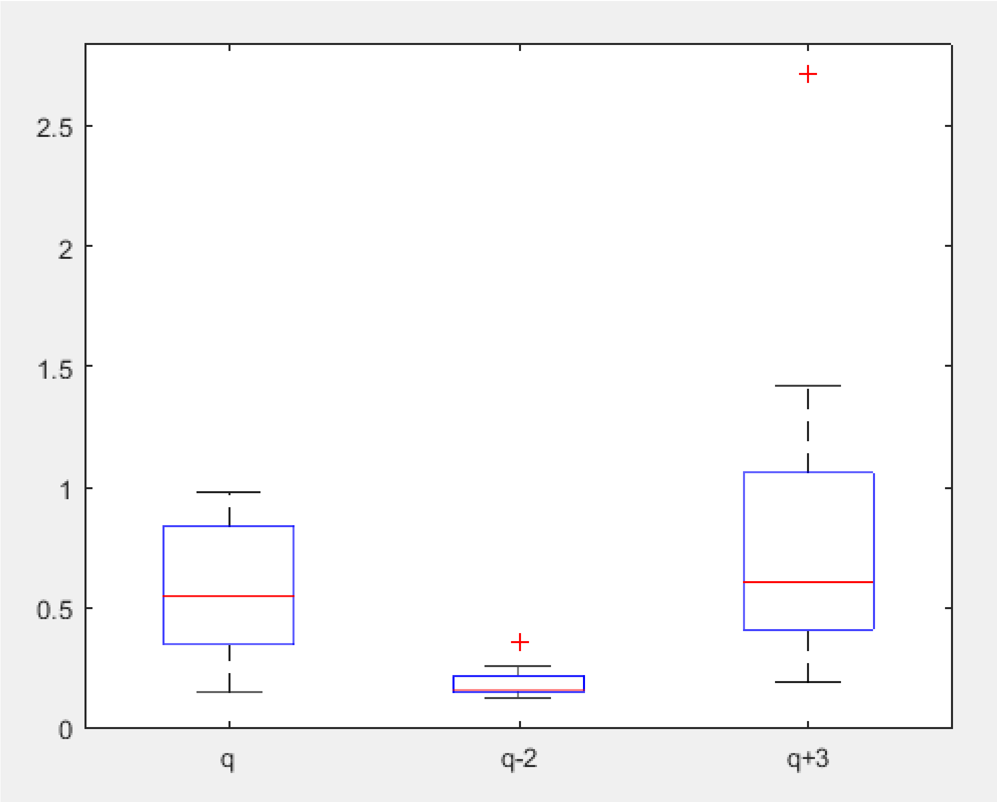
Στο δεύτερο διάγραμμα (υποεκτίμηση κατά 2), το μέγιστο σφάλμα είναι στα 0dB (NRMSE=0.2149), ενώ σε όλα τα άλλα επίπεδα SNR το σφάλμα δεν ξεπερνά την τιμή 0.1722, επομένως η προσέγγιση του σήματος αναμένεται σχετικά καλή.

Στο τρίτο διάγραμμα (υπερεκτίμηση κατά 3), το μέγιστο NRMSE φτάνει στα 0.637 στα 10dB, το οποίο είναι αρκετά μεγαλύτερο από τα μέγιστα των δυο προηγούμενων εκτιμήσεων, επομένως η ποιότητα του εκτιμούμενου σήματος δε θα ήταν το ίδιο καλή.

Στο ερώτημα 8 υλοποιείται η παραπάνω διαδικασία παραπάνω από μια φορά (εν προκειμένω 50) έτσι ώστε να μπορούν να βγουν πιο αντικειμενικά συμπεράσματα αναφορικά με την αξιοπιστία της φόρμουλας του Γιαννάκη. Το αρχείο είναι το `meanValues.m` με τον παρακάτω κώδικα:

```
clear all
snr = [30:-5:-5];
for j=1:50

[x,v] = X;

for i=1:8
y = awgn(x, snr(i), 'measured');
n = y-x;
cmat = cum3(y,2);
[hest, hsub, hsup] = h_est(cmat);

xest = x_est(x,v,hest,0);
yest = xest + n;
NRMSE1(j,i) = NRMSE_fun(yest,y);

xsub = x_est(x,v,hsub,0);
ysub = xsub + n;
NRMSE2(j,i) = NRMSE_fun(ysub,y);

xsup = x_est(x,v,hsup,0);
ysup = xsup + n;
NRMSE3(j,i) = NRMSE_fun(ysup,y);
end
end

NRMSE1 = mean(NRMSE1);
NRMSE2 = mean(NRMSE2);
NRMSE3 = mean(NRMSE3);

figure;
boxplot([NRMSE1(:) NRMSE2(:) NRMSE3(:)],{'q', 'q-2', 'q+3'})
```

Τρέχοντας αυτό το αρχείο (το οποίο κάνει γύρω στα 4.5 λεπτά να τρέξει), εμφανίζεται μια εικόνα με τα παρακάτω θηκογραφήματα:



Δουλεύοντας με τη μέση τιμή του NRMSE 50 υλοποιήσεων, είναι φανερό ότι υποεκτιμώντας την τάξη κατά 2, τα αποτελέσματα είναι αρκετά κοντά στο 0 και η απόκλιση του ελαχίστου από το μέγιστο δεν είναι τόσο μεγάλη.

Αντιθέτως, εκτιμώντας ακριβώς την τάξη, το NRMSE δείχνει να έχει μεγαλύτερο εύρος απομακρυνόμενο από το 0, κάτι που είναι ακόμα πιο έντονο στην περίπτωση της υπερεκτίμησης της τάξης κατά 3.

Συνοψίζοντας, από τις παραπάνω αναλύσεις βγαίνει το συμπέρασμα ότι η φόρμουλα του Γιαννάκη μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη, καθιστώντας εφικτό να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση ενός συστήματος με μόνη πληροφορία τους σωρείτες 3^{ης} τάξης, είτε υπάρχει λευκός προσθετικός Γκαουσιανός θόρυβος, είτε όχι, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η φόρμουλα είναι επιρρεπής στην εκτίμηση της τάξης.