Приложение 2

П2.1 Теоретическая модель

П2.1.1 Модификация модели Коимбры и Рей

Основной характеристикой чертой модели Коимбры и Рей служит возможность проанализировать распределение риска, взятого на себя банками-посредниками, с помощью Value-at-Risk ограничения и склонности к риску. С помощью модели был найден нелинейный компромиссный выбор между проведением в жизнь мягкой монетарной политики и финансовой устойчивостью. Финансовая устойчивость является одним из ограничений на проведение монетарной политики; модель позволяет оценить соответствующие эффекты. Исследователи взяли критерием финансовой устойчивости $\alpha_l -$ склонность к риску, при которой банк начинает занимать на рынке, чтобы инвестировать в репрезентативную фирму. Другими словами, это минимальная склонность к риску, при которой банк перестает использовать только собственный капитал. Принимая во внимание, что это явно не лучший из доступных критериев, а также то, что в реальной экономике он скорее будет бесполезен (практически отсутствуют банки, не использующие заемные средства), нами был выбран другой критерий. Также в модели были изменены принципы функционирования монетарной политики и репрезентативного домохозяйства.

П2.1.2 Описание модели

Производственная функция единственной репрезентативной фирмы:

$$Y_t = Z_t K_t^{\theta} L_t^{1-\theta} \ (1).$$

Прибыль фирма полностью распределяет между собственниками, в данном случае она полностью становиться доходом репрезентативного домохозяйства. Производительность Z определяется как AR(1) процесс:

$$logZ_t = (1-\rho)\mu_z + \rho logZ_{t-1} + \varepsilon_t^z \ (2)$$

$$\varepsilon_t^z \approx N(0; \sigma^z)$$

С вероятностью ξ может произойти шок продуктивности, который делает Z_t в момент времени t нулевой.

Функция прибыли банка-посредника:

$$\pi_{t+1}^i = R_{t+1}^k k_t^i - R_{t+1}^d d_t^i - (sign)\ \varphi R_{t+1}^r \left(d_t^i + w_t^i\right) \ (2),$$

причем $k^i = d^i + w^i + (\text{sign})\varphi(d^i + w^i)^i$, где $\varphi -$ норма, которую определяет ЦБ для банков, которые хотят занять или разместить ликвидность с помощью ЦБ. Значок знака (sign) раскрывается двояко:

$$+\varphi \text{ при } R_{t+1}^r < \min\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right),$$

или как $-\varphi$ при $R^r_{t+1} > max(R^k_{t+1}, R^d_{t+1})$.

Всего банков бесконечное множество, каждому банку соответствует его точка $\alpha^i \in (\xi, 0.5]$ (причина будет объяснена ниже). Предполагается, что банки выплачивают дивиденды и распределяют прибыль среди домохозяйств. Доля распределённой прибыли определяется впоследствии в модели как один параметров для калибровки.

Взаимодействие между банками и производственной фирмой такое, что фирма устанавливает соотношение цены и-доходности, а банки предлагают по такой доходности инвестиции. Соответственно, можно перенести решение из инвестиционного рынка сразу на рынок заемного капитала, представив $R^k_{t+1} = Function(P_{t+1},\ K_t,\ L_t)$. Также применяется обязательное страхование депозитов, плату за которое государство взимает с домохозяйства в виде налогов. Государство исполняет за банки обязанности по депозитам только в случае шока продуктивности ξ. Соответственно, депозиты (в силу обязательной страховки) становятся безрисковым вложением средств для домохозяйства.

Функция полезности репрезентативного домохозяйства:

$$U = C^{\psi}(H-L)^{1-\psi} \ (4),$$

$$\text{где } C = \frac{1}{P_t}\left(W_t L_{t-1} - T_t + R^d_t D_{t-1} + A_{t-1} + \tau\Pi_{t-1} - D_t\right) + \frac{\beta}{P_{t+1}}\left(W_{t+1}L_t - T_{t+1} + R^d_{t+1}D_t + A_t + \tau\Pi_t\right) \ (5)$$

Налоги собираются в виде части от отчисляемых депозитов, однако государство собирает взносы-налоги за страхование вклада уже в следующем периоде, то есть$T_{t+1} = \xi D_t$

Для упрощения модели будем считать, что государство не имеет проблем с исполнением обязательств по страховке в любой момент времени, невзирая на объем средств в фонде, который действует без издержек и не преследует цели извлечения прибыли из страхования.

Домохозяйство имеет представление о своей будущей зарплате и взаимосвязи между предложением труда и будущей зарплатой, поэтому $W_{t+1} = f(L)$.

Некоторые обозначения: T – налоги, W – зарплата, D – депозиты от домохозяйства, R – доходность, индекс обозначает доходность чего имеется в виду, H – количество часов, A – дивидендный доход от фирмы, П – совокупная прибыль банков посредников, τ – дивидендная политика банков-посредников. Сбережениями домохозяйства будем считать $S_t = W_t L_{t-1} - T_t + R^d_t D_{t-1} + A_{t-1} + \tau\Pi_{t-1}$.

П2.1.2 Спрос со стороны банков на заемный капитал.

Банки-посредники имеют две опции: рисковую (занимать и инвестировать) и безрисковую (инвестировать только собственный капитал). Для каждого банка существует внутренняя мера риска, который он готов на себя взять. Эта мера определяется value-at-risk ограничением.

$$P\left[\pi_{t+1}^{i} < w^{i}\right] < \alpha^{i} \ (6)$$

Будем считать, что распределение вероятности того, что прибыль окажется меньше собственного капитала, равномерно на участке от [0; 0.5]. Это достаточно логично: вероятность того, что прибыль окажется меньше собственного капитала, не может быть больше 0.5. При такой вероятности банк просто перестанет занимать на рынке. Для простоты положим, что банков с $\alpha^{i} > 0.5$ у нас нет.

Доходность определяется из максимизации прибыли репрезентативной фирмы: $\mathrm{A}_t = P_{t+1}Y_t - (R_{t+1}^{k} + \delta - 1)K_t - W_{t+1}L_t \ \to \max\limits_{K,L}$, тогда доходность капитала будет $R_{t+1}^{k} = P_{t+1}\theta Z_t K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} + 1 - \delta$, а заработная плата $W_{t+1} = P_{t+1}(1-\theta) Z_t K_t^{\theta} L_t^{-\theta}$. Помня, что с вероятностью ξ может наступить шок продуктивности, поэтому $R_{t+1}^{k} = \begin{cases} P_{t+1}\theta Z_t K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} + 1 - \delta \text{ с вероятностью } 1-\xi \\ 1-\delta \text{ с вероятностью } \xi \end{cases}$

При шоке продуктивности фирма перестает нанимать, так как производная функции прибыли фирмы по труду будет строго отрицательной. Рассматриваются два случая: $E[R_{t+1}^{k}] > 1$ и $E[R_{t+1}^{k}] \leq 1$. В первом случае банк будет занимать на рынке и, соответственно, его функция прибыли будет (3) с учетом того, что Zt – это AR(1) процесс.

Покажем, что для $E[R_{t+1}^{k}] > 1$ банк-посредник будет занимать на рынке до момента, пока не упрется в VaR-ограничение.

$$E\left[\pi_{t+1}^{i}\right] = (1-\xi)\int_{\tilde{\varepsilon}_t^z}^{\infty} [R_{t+1}^{k} k_t^{i} - R_{t+1}^{d} d_t^{i} - R_{t+1}^{r}\varphi\left(d_t^{i} + w_t^{i}\right)] dF(e^{\varepsilon}),$$

$$\text{где } \tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^{i}\right) = \max\left(\frac{\dfrac{R_{t+1}^{d} d_t^{i} - R_{t+1}^{r}\varphi\left(d_t^{i} + w_t^{i}\right)}{(1+\varphi)\left(d_t^{i} + w_t^{i}\right)} - 1 + \delta}{P_{t+1}\theta Z_t^{e} K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta}}, 0\right)$$

То есть значение экспаненты от ошибки, при котором прибыль будет нулевая

$$\frac{\partial \pi_{t+1}^{i}}{\partial d_t^{i}} = (1-\xi)\left(\int_{\tilde{\varepsilon}_t^z}^{\infty} [(1+\varphi)R_{t+1}^{k} - R_{t+1}^{d} - R_{t+1}^{r}\varphi] dF(e^{\varepsilon}) - \pi_{t+1}^{i}(\tilde{\varepsilon}_t^z)\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^{i}\right)}{\partial d_t^{i}}\right) =$$

$$= (1-\xi)\int_{\tilde{\varepsilon}_t^z}^{\infty} [(1+\varphi)R_{t+1}^{k} - R_{t+1}^{d} - R_{t+1}^{r}\varphi] dF(e^{\varepsilon})$$

$$\frac{\partial^2 \pi_{t+1}^i}{\partial {d_t^i}^2} = -(1-\xi)\left(R_{t+1}^k\left(\tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^i\right)\right) - R_{t+1}^d + \varphi\left(R_{t+1}^k\left(\tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^i\right)\right) - R_{t+1}^r\right)\right)\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_t^z}{\partial d_t^i}$$

Если существует такое $\widetilde{d_t^i}$, что первая производная обращается в ноль, то тогда, помня, что R_{t+1}^k монотонно возрастает по ошибке ε, $R_{t+1}^k(\tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^i\right) < 0$, иначе первая производная просто не может обратиться в ноль. Если $R_{t+1}^k(\tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^i\right) < 0$, следует, что $R_{t+1}^k(\tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^i\right)) - R_{t+1}^d + \varphi(R_{t+1}^k(\tilde{\varepsilon}_t^z\left(d_t^i\right)) - R_{t+1}^r < 0$. Зная про правило получение ликвидности в ЦБ, можно определить, что $\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_t^z}{\partial d_t^i}$ всегда больше нуля. Таким образом, вторая производная всегда $\frac{\partial^2 \pi_{t+1}^i}{\partial {d_t^i}^2} > 0$, а из этого следует, что $\widetilde{d_t^i}$, — это точка минимума. Следовательно, максимум прибыли будет либо при отсутствии заимствования, либо при максимально возможном для ограничения VaR. Отсутствие заимствования будет максимумом при условии $E[R_{t+1}^k] > 1$, $(1+\varphi)R_{t+1}^k - R_{t+1}^d - R_{t+1}^r\varphi > 0$ или $(1+\varphi)R_{t+1}^k > R_{t+1}^d + R_{t+1}^r\varphi$, то есть тогда, когда доходность от инвестирования больше стоимости заемных средств, что логично.

Второй случай, когда $E[R_{t+1}^k] \leq 1$, можно интерпретировать как отказ от инвестирования в репрезентативную фирму банками, так как у них есть возможность отказаться от инвестиций и оставить собственный капитал в сбережениях на следующий период. Если еще и $R_{t+1}^r > 0$, то банки будут целиком отдавать ликвидность ЦБ. В этом случае точкой максимума будет $d^i = 0$, а $k^i = w^i$.

Вернемся к первому случаю. Найдем максимально возможное заимствование банками с учетом ограничения VaR

$$\xi - (1-\xi)P\left[R_{t+1}^k k_t^i - R_{t+1}^d d_t^i - R_{t+1}^r\varphi\left(d_t^i + w_t^i\right) < w_t^i\right] \leq \alpha^i$$

$$P\left[e^{\varepsilon_t^z} < \frac{\frac{r_{t+1}^d + \varphi r_{t+1}^r}{1+\varphi} + \delta - r_{t+1}^d\frac{w_t^i}{k_t^i}}{P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1}L_t^{1-\theta}}\right] \leq \frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi},$$

где $Z_{t+1}^e e^{\varepsilon_t^z} = Z_{t+1}$, а $R_{t+1}^d = 1 + r_{t+1}^d$ $R_{t+1}^r = 1 + r_{t+1}^r$

Так как вероятность ошибки распределена нормально, то случайная величина в правой части неравенства имеет логнормальное распределение. Логнормальное распределение монотонно по случайной величине, а следовательно, максимально доступный уровень заимствований достигается, когда все неравенство обращается в равенство.

$$\frac{\frac{r_{t+1}^d + \varphi r_{t+1}^r}{1+\varphi} + \delta - r_{t+1}^d\frac{w_t^i}{k_t^i}}{P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1}L_t^{1-\theta}} = F^{-1}\left(\frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi}\right),$$

где $F^{-1}(\cdot)$ – критическое значение логнормального распределения

$$k_t^{i,VaR-constraint} = \frac{r_{t+1}^d}{\frac{r_{t+1}^d + \varphi r_{t+1}^r}{1+\varphi} - P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}\left(\frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi}\right) + \delta} w_t^i \text{ при } R_{t+1}^r < min\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right) (7.1)$$

$$k_t^{i,VaR-constraint} = \frac{r_{t+1}^d}{\frac{r_{t+1}^d - \varphi r_{t+1}^r}{1-\varphi} - P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}\left(\frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi}\right) + \delta} w_t^i \text{ при } R_{t+1}^r > max\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right) \quad (7.2)$$

$$k_t^{i,VaR-constraint} = \frac{r_{t+1}^d}{r_{t+1}^d - P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}\left(\frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi}\right) + \delta} w_t^i \text{ иначе} \quad (7.3)$$

$\frac{r_{t+1}^d+\varphi r_{t+1}^r}{1+\varphi}$ или $\frac{r_{t+1}^d-\varphi r_{t+1}^r}{1-\varphi}$ можно интерпретировать как чистые издержки r_{t+1}^c, которые несет банк на привлечение капитала k_t^i. Тогда уравнения 7.1 и 7.2 можно переписать как одно

$$k_t^i = \frac{r_{t+1}^d}{r_{t+1}^c - r_{t+1}^k} w_t^i \quad (7.4)$$

Из уравнения 7 можно понять, что вероятность VaR ограничения должна лежать в пределах отрезка $\alpha^i \in (\xi, 0.5)$.

Для каждого банка своя вероятность для VaR ограничения, а максимум достигается не обязательно для на границе этого ограничения. Найдем такой банк с α_l, для которого нет разницы между стратегией занимать до предела и не занимать вовсе.

$$E\left[R_{t+1}^k k_t^i - R_{t+1}^d d_t^i - R_{t+1}^r \varphi\left(d_t^i + w_t^i\right)\right] = E\left[R_{t+1}^k w_t^i\right]$$

Помня, что $d_t^i = \frac{k_t^i}{1+\varphi} - w_t^i$, и используя (7) можно получить, что:

$$\left(E[R_{t+1}^k] - \frac{1}{1+\varphi} R_{t+1}^d - \frac{\varphi}{1+\varphi} R_{t+1}^r\right) k_t^i = \left((1+\varphi)E[R_{t+1}^k] - R_{t+1}^r - R_{t+1}^d\right) w_t^i$$

Что равносильно $k_t^i = (1+\varphi)\, w_t^i$, то есть тогда, когда банк посредник перестает занимать на рынке. Используя уравнения 7.1-3, получаем

$$\xi - (1-\xi)F\left[\frac{\frac{\varphi r_{t+1}^r}{1+\varphi} + \delta}{P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta}}\right] = \alpha_l \text{при } R_{t+1}^r < \min(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d) \ (8.1)$$

$$\xi - (1-\xi)F\left[\frac{\frac{-\varphi r_{t+1}^r}{1-\varphi} + \delta}{P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta}}\right] = \alpha_l \ R_{t+1}^r > max\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right) (8.2)$$

$$\xi - (1-\xi)F\left[\frac{\delta}{P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta}}\right] = \alpha_l \quad \text{иначе} \quad (8.3)$$

Тогда для банков $\alpha^i \in (\xi, \alpha_l]$, $k_t^{non-leverage} = (1+\varphi)w_t^i$, а для банков $\alpha^i \in (\alpha_l, 0{,}5)$ описывается уравнением 7.1 (так же и для остальных случаев с ликвидностью ЦБ). Предложение капитала со стороны банков тогда будет представлено следующим образом:

$$K_t = \int_{\xi}^{\alpha_l} k_t^{i,non-leverage}\, dG(\alpha^i) + \int_{\alpha_l}^{0.5} k_t^{i,VaR-constraint} dG(\alpha^i) \ (9),$$

где $G(\alpha^i) -$ функция распределения вероятности VaR среди банков. Для простоты положим это распределение равномерным. Как можно заметить, предложение выражено в неявном виде, так как $k_t^{i,VaR-constraint}$ зависят от предложения капитала.

Совокупный капитал всех банков определяется как $Equity_t = \int_{\xi}^{0.5} w_t^i(\alpha^i) dG(\alpha^i)$. Тогда совокупный спрос со стороны банков на заемный капитал будет:

$$D_t = \frac{K_t - (1+\varphi)Equity_t}{1+\varphi} = \int_{\alpha_l}^{0.5} d_t^i dG(\alpha^i) \ (10)$$

Вернемся ко второму случаю, когда $E[R_{t+1}^k] \le 1$. При такой доходности стратегий у банков может быть только две: размещать ликвидность в ЦБ или нет, что в свою очередь зависит от соотношения ставок по депозитам и ставки ЦБ. При размещении средств в ЦБ функция прибыли будет выглядеть как $\pi_{t+1}^i = R_{t+1}^r \varphi(d_t^i + w_t^i) - R_{t+1}^d d_t^i$, банк будет занимать у домохозяйства, если $\pi_{t+1}^i > w_t^i$, тогда и только тогда будет удовлетворено всякое VaR ограничение из-за того, что прибыль не будет более зависеть от случайного шока продуктивности. Это говорит о том, что все банки вне зависимости от склонности к риску будут брать депозиты в одинаковом количестве. Соответственно, условие для R_{t+1}^r и R_{t+1}^d будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} R_{t+1}^d > 1 \\ \dfrac{1}{\varphi} < R_{t+1}^r < \dfrac{R_{t+1}^d}{\varphi} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} R_{t+1}^d < 1 \\ \dfrac{R_{t+1}^d}{\varphi} < R_{t+1}^r < \dfrac{1}{\varphi} \end{cases} \ (11)$$

при условии $d_t^i > \dfrac{1-\varphi R_{t+1}^r}{\varphi R_{t+1}^r - R_{t+1}^d} w_t^i$; также точку "перелома" определим как

$$\breve{d}_t^i = \frac{1-\varphi R_{t+1}^r}{\varphi R_{t+1}^r - R_{t+1}^d} w_t^i; (12)$$

Иначе говоря, спрос на депозиты может быть любым, но не меньше, чем $\int_{\xi}^{0.5} \breve{d}_t^i dG(\alpha^i)$. Следовательно, предложение капитала со стороны банков $K_t = 0$. Правая система неравенств 11 возможна тогда, когда ставка по вкладам и ключевая ставка отрицательны.

П2.1.3 Предложение капитала со стороны домохозяйств

Домохозяйство имеет двухпериодный горизонт планирования, в первом периоде оно имеет возможность сберечь часть текущего дохода и дохода из прошлых периодов, а во втором периоде оно рассчитывает только потреблять. В моменте t (он же первый период) домохозяйство считает за данность все параметры из прошлого периода, а также ставку по депозитам.

Определим спрос на депозиты или предложение капитала со стороны домохозяйства из максимизации функции полезности (4) при условии (5).

Здесь так же, как и для предыдущего пункта, следует разбить на два случая, когда $E[R_{t+1}^k] > 1$ и когда $E[R_{t+1}^k] \leq 1$. В первом случае функция полезности не меняется и потребления не меняются.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_t}{\partial L_t} = \psi C^{\psi-1}\beta(1-\theta)^2 Z_t K_t^{\theta} L_t^{-\theta}(H-L_t)^{1-\psi} - (1-\psi)C^{\psi}(H-L_t)^{-\psi} = 0 \\ \dfrac{\partial U_t}{\partial D_t} = \psi C^{\psi-1}\left(\dfrac{\beta}{P_{t+1}}\left(P_{t+1}\theta(1-\theta)(1+\varphi)Z_t(K_t/L_t)^{\theta-1} + (1-\xi)R_{t+1}^d\right) - \dfrac{1}{P_t}\right)(H-L_t)^{1-\psi} = 0 \end{cases}$$

С помощью несложных алгебраических преобразований получаем предложение труда и предложение депозитов в зависимости от ставки по ним в неявном виде.

$$\begin{cases} L_t = H - \dfrac{(1-\psi)C}{\psi\beta(1-\theta)^2 Z_t K_t^{\theta} L_t^{-\theta}} \ (12) \\ R_{t+1}^d = \dfrac{P_{t+1}}{1-\xi}\left(\dfrac{1}{\beta P_t} - \theta(1-\theta)(1+\varphi)Z_t\left(\dfrac{(1+\varphi)(D_t + Equity_t)}{L_t}\right)^{\theta-1}\right) \ (13) \end{cases}$$

Полученные предложение и спрос из первой производной вовсе не обязательно являются выводом из точки максимума. Доказательство, что это все-таки точка максимума в П2.5.

В случае $E[R_{t+1}^k] \leq 1$ банки-посредники не предлагают капитал репрезентативной фирме, а следовательно фирма не предоставляет спрос на рабочую силу. Таким образом, потребление не зависит от труда в период t, а $L_t = 0$. Предложение депозитов со стороны домохозяйства будет определяться чистой доходностью от депозита $\frac{\beta P_t}{P_{t+1}}(R_{t+1}^d - \xi)$ в сравнении с единицей (то есть с вариантом оставить средства в сбережениях). Если чистая доходность больше единицы, то репрезентативное домохозяйство отдает все свои сбережения $S_t = D_t$, а если нет $D_t = 0$.

П2.2 Инструменты монетарной политики ЦБ и их эффект

Основным преимуществом модели является то, что она дает возможность посмотреть, как меняется концентрация риска внутри банковского сектора в зависимости от действий монетарных властей. В исходной модели был использован порог склонности к риску, при котором банк-посредник начинает использовать заемные средства как мера, с помощью которой рассматривается изменение риска внутри банковской системы. Чем меньше банков брали на себя риск использования заемных средств, тем менее равномерно риск распределен по банковской системе, а следовательно, повышается риск банкротства при падении производительности.

Этот параметр не так репрезентативен, как мера неравномерно распределенного риска в банковской системе, так как не отражает сколько «риска берут на себя» банки-посредники, которые более склоны к риску. Исходя из современных реалий, таких не склонных к риску банков крайне небольшое количество, если они вообще есть, потому сложно переложить этот коэффициент на реальные данные в будущем. В качестве альтернативной меры риска можно использовать соотношение двух площадей: между прямой, соединяющей две точки λ_t^i, при α_l и 0.5, и самой функцией λ_t^i, и площадью под прямой до оси абсцисс, где $\lambda_t^i = k_t^{i,VaR-constraint}\left(\alpha^i\right)/w^i$ (метод очень похож на измерение неравенства коэффициентом Джини). Тогда неравномерность распределение риска можно оценивать через степень неравенства его распределения. Поскольку влияние отдельных компонентов на это отношение сложно вычленить, появляется задача предложить некий критерий, который похожим образом отражал бы неравенство в принятии риска. Таким критерием можно считать отношение $u = \frac{\lambda_t^i(0.5)}{\lambda_t^i(\alpha_l)}$. Однако, используя это отношение, следует быть уверенным, что λ_t^i вогнута вниз, иначе отношение не будет однозначно определять неравенство в принятии риска. Несмотря на кажущуюся очевидность вогнутости вниз, это требует доказательства. Из уравнения 7 можно увидеть, что $\lambda_t^i\left(\alpha^i\right) = \frac{a}{b - cF^{-1}\left(\frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi}\right)}$, где a, b, c некоторые параметры, не зависящие от α^i, которые используются для упрощения записи. Также для упрощения записи обозначим $F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right) = x$. Таким образом, желательным условием использования критерия u будет неотрицательная вторая производная предложения капитала банком-посредником по α^i. Поскольку используется логнормальное распределение, можно представить $\frac{\partial F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right)}{\partial \alpha} = \frac{1}{p\left(F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right)\right)} = F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right)\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{ln^2 F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right)}{2\sigma^2}} = x\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{ln^2 x}{2\sigma^2}}$, а вторую производную как:

$$\frac{\partial^2 \lambda_t^i(\alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{ac\,\sigma\sqrt{2\pi}\,\frac{\partial x}{\partial \alpha}\;e^{\frac{ln^2 x}{2\sigma^2}}\left(\left(1+\frac{lnx}{\sigma^2}\right)(b-cx)+2cx\right)}{(b-cx)^3} \quad (14)$$

Следовательно, вторая производная будет положительной, когда выполняется неравенство

$$x > exp\left(-\frac{2\sigma^2 cx + 1}{b - cx}\right) \ (15)$$

Поскольку $x = F^{-1}\left(\frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi}\right) \in \left[F^{-1}\left(\frac{\alpha_l - \xi}{1-\xi}\right), F^{-1}\left(\frac{0,5-\xi}{1-\xi}\right)\right]$, который входит в отрезок [0, 1], а ξ достаточно мала, так что ее пока можно опустить. Поэтому, чтобы грубо оценить, при каких значениях α выполняется неравенство, следует обратить внимание на две детали.

Во-первых, при стремлении α к нулю, $F^{-1}(\alpha^i) \to 0$, правая часть неравенства 15 к константе больше нуля $\exp\left(-\frac{2\sigma^2 cx+1}{b-cx}\right) \to \exp\left(-\frac{1}{b}\right) > 0$, а, следовательно, неравенство 15 не выполняется. В свою очередь, при $\alpha^i \to 0.5$, $F^{-1}(\alpha^i) \to 1, exp\left(-\frac{2\sigma^2 cx+1}{b-cx}\right) < 1$, а, следовательно, неравенство 15 выполняется.

Во-вторых, обе части неравенства 15 представлены в виде монотонных по x функций на отрезке [0, 1]; левая часть убывающая, правая возрастающая.

Эти две детали говорят о том, что на отрезке $\alpha^i \in [0, 0.5]$ существует «точка перелома», изменения знака второй производной, и только одна. Однако $\alpha^i \in [\alpha_l, 0.5]$, а $x = F^{-1}\left(\frac{\alpha^i - \xi}{1-\xi}\right)$, то есть отрезок чуть короче, и точка изменения знака второй производной может не лежать за пределами $[\alpha_l, 0.5]$. При достаточно стандартных значениях для ставок и вероятности шока продуктивности ξ (в оригинальной статье ξ была установлена на 0.01) $\max_{x\in[0,1]} exp\left(-\frac{2\sigma^2 cx+1}{b-cx}\right) = \exp\left(-\frac{1}{b}\right) = exp\left(-\frac{1}{\frac{r_{t+1}^d + \varphi r_{t+1}^r}{1+\varphi} + \delta}\right) < F^{-1}\left(\frac{0.5-\xi}{1-\xi}\right)$, а, следовательно, точка перелома не выходит за пределы отрезка $\alpha^i \in [\alpha_l, 0.5]$ справа. Нахождение точки перелома из-за чувствительности α_l к изменению параметров может быть за пределами левой границы отрезка $\alpha^i \in [\alpha_l, 0.5]$, тогда вся функция $\lambda_t^i(\alpha^i)$ будет выгнута вниз на всем отрезке.

Исходя из обнаруженных деталей, требуется дополнить критерий $u = \frac{\lambda_t^i(0.5)}{\lambda_t^i(\alpha_l)}$ критерием $v = exp\left(-\frac{2\sigma^2 cx+1}{b-cx}\right) = \exp\left(-\frac{2\sigma^2 P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right)+1}{\frac{r_{t+1}^d+\varphi r_{t+1}^r}{1+\varphi} - P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right)+\delta}\right)$ как меры, которая оценивает движение точки перелома: при росте v точка сдвигается вправо, и функция $\lambda_t^i(\alpha^i)$ становится менее вогнута вниз. Соответственно, u и v – однонаправленные критерии: их рост свидетельствует о росте неравномерного распределения риска.

П2.3 Влияние монетарной политики на распределение риска.

Модель составлена таким образом, чтобы влияние действий монетарных властей было бы стандартным: снижение ставки приводит к увеличению предложения капитала банками-посредниками, увеличение φ приводит к увеличению предложения капитала банками-посредниками. Насколько ставка и φ влияют на увеличение предложение капитала, зависит от конечных параметров частного решения внутри модели, к тому же сама модель лишь иллюстрирует экономические процессы, а не объясняет их. Поскольку основной результат модели – распределение риска, наибольший интерес вызывает влияние на него монетарной политики. Для анализа нужно посмотреть на производные по ставке и φ. Как уже отмечалось, α_l не настолько волатильный параметр, а само значение скорее всего должно находиться очень близко к левой границе отрезка для $\alpha^i \in [\xi, 0.5]$, потому, руководствуясь экономической логикой и стремлением к простоте интерпретации, зададим влияние α_l на критерии u и v как незначительное. Тогда производные критериев будут:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \approx \Psi_t \frac{r_{t+1}^d - r_{t+1}^r}{(1+\varphi)^2} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial r_{t+1}^r} = \Psi_t \frac{\varphi}{(1+\varphi)}, \text{при } R_{t+1}^r < \min\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right) \ (16.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \approx \Psi_t \frac{r_{t+1}^r - r_{t+1}^d}{(1-\varphi)^2} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial r_{t+1}^r} = \Psi_t \frac{-\varphi}{(1-\varphi)}, \text{при } R_{t+1}^r > max\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right) \ (16.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial r_{t+1}^r} = 0, \text{иначе } (16.3)$$

$$\text{где } \Psi_t = P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} \left(\frac{F^{-1}\left(\frac{0.5-\xi}{1-\xi}\right) - F^{-1}(\alpha_l)}{\left(\frac{r_{t+1}^d + sign\varphi r_{t+1}^r}{1+sign\varphi} - P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}(0{,}5) + \delta\right)^2} \right) > 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} \approx \Upsilon_t \frac{r_{t+1}^d - r_{t+1}^r}{(1+\varphi)} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial r_{t+1}^r} = \Upsilon_t \frac{\varphi}{(1+\varphi)}, \text{при } R_{t+1}^r < \min\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right) \ (17.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} \approx \Upsilon_t \frac{r_{t+1}^r - r_{t+1}^d}{(1-\varphi)^2} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial r_{t+1}^r} = \Upsilon_t \frac{-\varphi}{(1-\varphi)}, \text{при } R_{t+1}^r > max\left(R_{t+1}^k, R_{t+1}^d\right) \ (17.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \text{ и } \frac{\partial v}{\partial r_{t+1}^r} = 0, \text{иначе } (17.3)$$

$$\text{где } \Upsilon_t = v \left(\frac{2\sigma^2 P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right) + 1}{\left(\frac{r_{t+1}^d + sign\varphi r_{t+1}^r}{1+sign\varphi} - P_{t+1}\theta Z_{t+1}^e K_t^{\theta-1} L_t^{1-\theta} F^{-1}\left(\frac{\alpha^i-\xi}{1-\xi}\right) + \delta\right)^2} \right) > 0$$

Тогда при смягчении политики ЦБ (уменьшение ставки или увеличение φ), обе производные в уравнениях 16.1 и 17.1 больше нуля, что говорит о двояком влиянии ставки и φ: при снижении ставки соотношение кредитного плеча между банком-посредником с пороговым значением склонности к риску и банком-посредником с максимальной склонностью к риску падает, а функция кредитного плеча $\lambda_t^i\left(\alpha^i\right)$ становится вогнутой вниз при меньшем значении склонности к риску. Это значит, что распределение риска становится более неравномерным и концентрируется у самых склонных к риску банков при расширении возможностей по предоставлению ликвидности, но снижение ставки приводит к обратному эффекту для распределения риска. Эффект от расширения объема предоставляемой ликвидности на распределение риска тем больше, чем больше разница между ставками по депозитам и ключевой ставкой, а эффект от снижения ставки на распределение зависит от предоставляемой ликвидности.

Таким образом, дилемма центрального банка между мягкой монетарной политикой и финансовой устойчивостью выглядит неоднозначно: мягкая политика может вызывать рост неустойчивости, но это зависит от соотношения применяемых параметров. Если же центральный банк проводит жесткую политику (случай $R_{t+1}^{r} > max\left(R_{t+1}^{k}, R_{t+1}^{d}\right)$), то влияние на отношение также смешанное. Рост ставки уменьшает неравномерность распределения риска, и функция кредитного плеча $\lambda_t^i\left(\alpha^i\right)$ становится вогнутой вниз при большем значении склонности к риску, но рост доли φ, наоборот, приводит к росту концентрации риска и кредитное плечо становится вогнутой вниз функцией при меньшем значении склонности к риску. Эффект от жесткой монетарной политики практически идентичен эффекту от мягкой политики при прочих равных условиях, но при жесткой политике (в силу того, что $\varphi \in [0, 1]$) снижение неравномерности распределения риска при росте ставок происходит быстрее, чем при мягкой политике и снижении ставок. Этот нетривиальный вывод объясняется тем, что склонные к риску банки привлекают больше ликвидности с рынка, чем менее склонные к риску, а потому рост степени участия ЦБ на рынке капитала (чем большую долю от привлеченных вкладов ЦБ принимает, тем больше влияние ставки) приводит к более неравномерному распределению. Такое смешанное влияние политики говорит о том, что при проведении монетарной политики нет устойчивой стратегии для снижения неравномерности распределения риска. Потому ЦБ стоит обеспечивать баланс между ставкой и объемом привлеченной на рынке ликвидности.

П2.4 Приток и отток капитала и их влияние на монетарную политику

Приток и отток капитала можно достаточно просто отобразить в модели: это изменение предложения капитала банками при прочих равных. Даже если предположить, что портфельные инвестиции в долговые инструменты – это субститут предложения депозитов репрезентативным домохозяйством, то депозиты в модели связаны с предложением капитала линейной функцией $D_t = \frac{K_t-(1+\varphi)Equity_t}{1+\varphi}$, что сводит сам случай к изменению предложения капитала банками. Чтобы определить, насколько поток капитала ограничивает свободу действий монетарных властей, посмотрим, как потоки влияют на распределение риска. В производных по двум критериям только Υ_t и Ψ_t зависят от капитала, а $\frac{\partial \Psi_t}{\partial K_t} < 0$ и $\frac{\partial \Upsilon_t}{\partial K_t} < 0$, при $\theta \in [0, 1]$, $\frac{\partial r_{t+1}^d}{\partial K_t^{domestic}} \frac{\partial K_t^{domestic}}{\partial K_t^{foreign}} > 0$ и $\frac{\partial L_t}{\partial K_t^{domestic}} \frac{\partial K_t^{domestic}}{\partial K_t^{foreign}} < 0$, а потому можно сделать следующие выводы. Приток капитала при мягкой политике будет комплементарен действиям центрального банка по расширению предложению ликвидности, а также будет снижать чувствительность неравномерного распределения риска по обоим инструментам монетарной политики, таким образом, для смягчения политики снижение ставки становится более эффективным инструментом по отношению к увеличению φ. Отток капитала, наоборот, сделает более чувствительными оба инструмента, а также будет иметь компенсирующий эффект по отношению к расширительной политике. Тогда ЦБ будет сталкиваться с дилеммой между дополнительным увеличением φ и неравномерным распределением риска, что сделает его политику более ограниченной, а значит – менее независимой.

Для жесткой монетарной политики ситуация практически зеркальная: отток капитала приводит к тому, что ставка становится более привлекательным инструментом, а монетарные власти получают больше свободы действий; приток, наоборот, делает политику менее независимой. Дополнительным свойством того, что при прочих равных условиях при жесткой монетарной политике возрастает чувствительность неравномерности распределения риска, что делает изменение ключевой ставки более благоприятным инструментом при проведении жесткой монетарной политики, нежели мягкой.

Суммируя, можно представить обобщенный вывод в следующей таблице.

	Жесткая монетарная политика	Мягкая монетарная политика
Отток капитала	Изменение ключевой ставки становится более благоприятным инструментом; в целом, у монетарных властей больше свободы действий.	Меньше свободы действий для монетарных властей, политика становится менее независимой из-за возросшей чувствительности неравномерно распределенного риска к φ
Приток капитала	Меньше свободы действий для монетарных властей, политика становится менее независимой из-за возросшей чувствительности	Изменение ключевой ставки становится более благоприятным инструментом; в целом, у монетарных властей больше свободы действий.

	неравномерно распределенного риска к φ	

Текущая модель позволяет смоделировать кризис с помощью падения ожидаемой производительности Z^e_{t+1}. Рост неопределенности может быть также интерпретирован через падание производительности. Из уравнения 7 можно увидеть, что падение ожидаемой производительности Z^e_{t+1} повлечет за собой падение предложения капитала репрезентативной фирме у каждого банка посредника вне зависимости от склонности к риску α^i, а, следовательно, приведет к уменьшению предложения капитала в целом всем финансовым сектором. Если экономика находиться в равновесии, то такое падение предложения капитала вызовет падение выпуска, а потому спровоцирует центральный банк проводить более мягкую монетарную политику. Более того, вызванный ростом неопределенности отток капитала дополнительно уменьшит предложение капитала, что приведет к «двойному удару», что отправит центральный банк в правый верхний квадрат. В этой оптике капитальные ограничения эффективны для преодоления шока неопределенности ровно настолько, насколько они ограничивают отток капитала.

П2.5 Единственность решения и точка максимума в неявном виде.

Положим $A = C^{\psi}, B = (H-L)^{1-\psi}$ для того, чтобы упростить сам процесс. Очевидно, что максимум будет в нуле производной, если

$$\begin{cases} U''_{LL} = A''_{LL}B + 2A'_L B'_L + AB''_{LL} < 0 \text{ (П1.1)} \\ U''_{DD} = A''_{DD}B < 0 \text{ (П1.2)} \\ U''_{LL}U''_{DD} - (U''_{LD})^2 = (A''_{LL}B + 2A'_L B'_L + AB''_{LL})A''_{DD}B - A''_{LD}B^2 < 0 \text{ (П1.3)} \end{cases}$$

Неравенства П1.1 и П1.2 выполняются всегда, так как каждый член слагаемого отрицательный. П1.3 можно представить как

$$(C^{\psi-2}(H-L)^{-1-\psi})^2\left(\left(\psi C\frac{\partial^2 C}{\partial L^2} + \psi(\psi-1)\left(\frac{\partial C}{\partial L}\right)^2\right)(H-L)^2 + 2\psi(1-\psi)C(H-L)\frac{\partial C}{\partial L}\right.$$

$$\left. + \psi(\psi-1)C^2\right)\left(\psi(\psi-1)\left(\frac{\partial C}{\partial D}\right)^2 + \psi C\frac{\partial^2 C}{\partial D^2}\right)(H-L)^2$$

$$- \left(C^{\psi-2}(H-L)^{-1-\psi}\right)^2\left(\psi(\psi-1)\frac{\partial C}{\partial L}\frac{\partial C}{\partial D} + \psi C\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L}\right)^2(H-L)^4 > 0$$

Сократив на заведомо положительные и воспользовавшись тем, что мы исследуем в нуле производной $\left(\frac{\partial C}{\partial D} = 0, \frac{\partial C}{\partial L} = \frac{1-\psi}{\psi}\frac{C}{H-L}\right)$, можно представить в виде

$$\left(\psi C(H-L)^2\frac{\partial^2 C}{\partial L^2} + \frac{\psi-1}{\psi}C^2\right)\left(\psi C\frac{\partial^2 C}{\partial D^2}\right)(H-L)^2 - (H-L)^4\left(\psi C\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L}\right)^2 > 0$$

$$\psi^2(H-L)^2\left(\frac{\partial^2 C}{\partial L^2}\frac{\partial^2 C}{\partial D^2}-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial D\partial L}\right)^2\right)+(\psi-1)C\frac{\partial^2 C}{\partial D^2}>0$$

так как $\frac{\partial^2 C}{\partial L^2}\frac{\partial^2 C}{\partial D^2}-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial D\partial L}\right)^2 = 0$, получаем $(\psi-1)C\frac{\partial^2 C}{\partial D^2}>0$ (П1.4)

При стандартных предпосылках для $\psi, \varphi, \theta, \beta$ неравенство П1.4 всегда выполняется. Если выполняется неравенства П1.1-3, то матрица Гессе функции полезности отрицательно определена в нуле первой производной, следовательно, (12) и (13) соответствуют максимуму полезности домохозяйства.