

ПРОГРАММНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ НЕПАРАКСИАЛЬНЫХ ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ТОНКУЮ ЛИНЗУ

Фатыхов Тимур
Гончаренко Валентина
2 курс ФРКТ, группа Б01-009

Май 2022

Содержание

1	Введение	2
2	Условие поставленной задачи с точки зрения физики	3
3	Решение поставленной задачи и вывод формулы	3
4	Основные этапы сборки с точки зрения программирования	9
5	Результат	10
6	Источники и ресурсы	12

1. Введение

Предыстория вопроса по выбору весьма витиеватая - так как мы студенты физтех-школы компьютерных технологий, то хотели оправдать это название и совместить физику с посильными нам задачами на компьютере. Изначально мы планировали написать модель дискретных полярных сияний на Марсе, чтобы можно было пронаблюдать их точечное возникновение наглядно в зависимости от различных параметров, которые могли задаваться «by hand». Нам пришлось отказаться от этой идеи, так как при детальном рассмотрении физика явления оказалась не слишком «оптична», несмотря на иллюзорно кажущееся прямое отношение к визуальным феноменам. К тому же, необходимо было учитывать ограничения по нашей компетентности в сфере программирования, что существенно сужало круг рассматриваемых вариантов проекта. Несколько раз модифицируя курс наших усилий, мы пришли к воплощению прохождения непараксиальных лучей через тонкую линзу.

2. Условие поставленной задачи с точки зрения физики

Необходимо найти формулу, связывающую положение предмета и изображения, даваемого тонкой собирающей линзой, в случае, когда угол между лучом и оптической осью нельзя считать малым. На основе полученной формулы качественно проанализировать изменения изображения по сравнению с изображением, построенным по правилу, справедливому для параксиальных лучей.

3. Решение поставленной задачи и вывод формулы

Изображение какого-либо объекта можно построить по точкам, поэтому достаточно вывести формулу, связывающую положение точечного источника и его изображения.

Рассмотрим предварительно вспомогательную задачу. Вычислим угол отклонения луча, проходящего через треугольную призму, относительно его первоначального направления. Будем считать угол α при вершине призмы малым, что соответствует приближению тонкой линзы.

Формулировка вспомогательной задачи: на кварцевый клин с углом при вершине α падает из воздуха луч света под углом β к нормали к поверхности клина. Под каким углом γ к нормали к другой поверхности луч выходит из клина в воздух? Коэффициент преломления кварца n .

Решение: Возможны три случая хода луча. Рассмотрим случай произвольных углов α и β . Возможный ход лучей в призме показан на рис.1 (а, б, в).

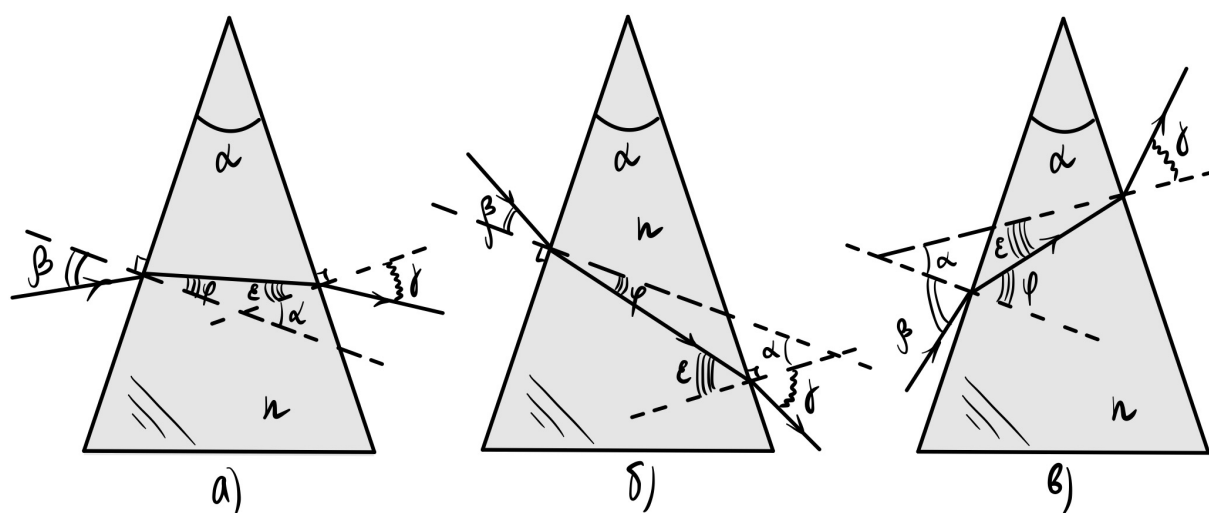


Рис. 1: Три случая хода луча

Во всех случаях выполняется закон преломления на обеих боковых поверхностях клина:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = n; \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon} = n.$$

На рис. 1(а) $\varepsilon = \alpha - \varphi$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= n \sin \varepsilon = n \sin(\alpha - \varphi) = n(\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) = \\ &= n \left(\sin \alpha \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \beta}{n^2}} - \cos \alpha \frac{\sin \beta}{n} \right) = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta} - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

На рис. 1(б) $\varepsilon = \alpha + \varphi$. Имеем:

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= n \sin \varepsilon = n \sin(\alpha + \varphi) = n(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = \\ &= n \left(\sin \alpha \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \beta}{n^2}} + \cos \alpha \frac{\sin \beta}{n} \right) = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta} + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

На рис. 1 (в) $\varepsilon = \varphi - \alpha$. В этом случае

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= n \sin \varepsilon = n \sin(\varphi - \alpha) = n(\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha) = \\ &= n \left(\frac{\sin \beta}{n} \cos \alpha - \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \beta}{n^2}} \sin \alpha \right) = \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}.\end{aligned}$$

Воспользуемся рисунками и обозначениями, приведенными в задаче выше. Для первого разобранного в решении случая угол отклонения от первоначального направления луча δ связан с углами, приведенными на рисунке, соотношением $\delta = \beta - \varphi + \gamma - \varepsilon$.

Во втором случае формула, приведенная в решении, и формула для δ получаются из формул первого случая заменой β, φ на $-\beta, -\varphi$. Соответственно, решение и формула для δ в третьем случае получается заменой γ, ε на $-\gamma, -\varepsilon$. Таким образом, достаточно рассмотреть только первый случай, для которого

$$\sin \gamma = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta} - \cos \alpha \sin \beta.$$

Учтем далее малость угла α и пренебрежем слагаемыми порядка α^2 и выше. Мы получим соотношение $\sin \gamma + \sin \beta = \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}$. Преобразуем это выражение к виду

$$2 \sin \left(\frac{\gamma + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma - \beta}{2} \right) = \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}.$$

Правая часть этого выражения стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$. Поскольку углы γ и β меньше $\pi/2$, это возможно лишь при малом значении $\gamma + \beta$. Так как при этом $\beta \approx -\gamma$, значение косинуса в последнем выражении можно с той точностью, с которой производятся вычисления, заменить на $\cos \beta$. В результате получим соотношение

$$(\gamma + \beta) \cos \beta = \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}.$$

Учитывая, что $\alpha = \varepsilon + \varphi$, получим для угла δ выражение

$$\begin{aligned}\delta &= \beta - \varphi + \gamma - \varepsilon = \beta + \gamma - \alpha \\ \delta &= \alpha \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}}{\cos \beta} - 1 \right).\end{aligned}$$

Заметим, что это выражение справедливо для всех трех случаев, рассмотренных выше.

Применим это выражение для нахождения координат изображения точечного источника. Выберем систему координат так, как указано на рис. 2. Пусть точечный источник находится в точке A с координатами (x_1, y_1) , а его изображение - в некоторой точке B , координаты которой (x_2, y_2) необходимо найти. Для нахождения положения изображения воспользуемся двумя лучами. Первый луч проходит через центр линзы без преломления. Уравнение соответствующей лучу прямой имеет вид: $y = kx$, где $k = y_1/x_1$. Вторым луч пусть под небольшим углом ψ по отношению к первому.

Проходя через линзу, этот луч поворачивается на некоторый угол. Чтобы определить угол поворота, заменим линзу призмой, грани которой касаются линзы в точках, где этот луч пересекает поверхность линзы.

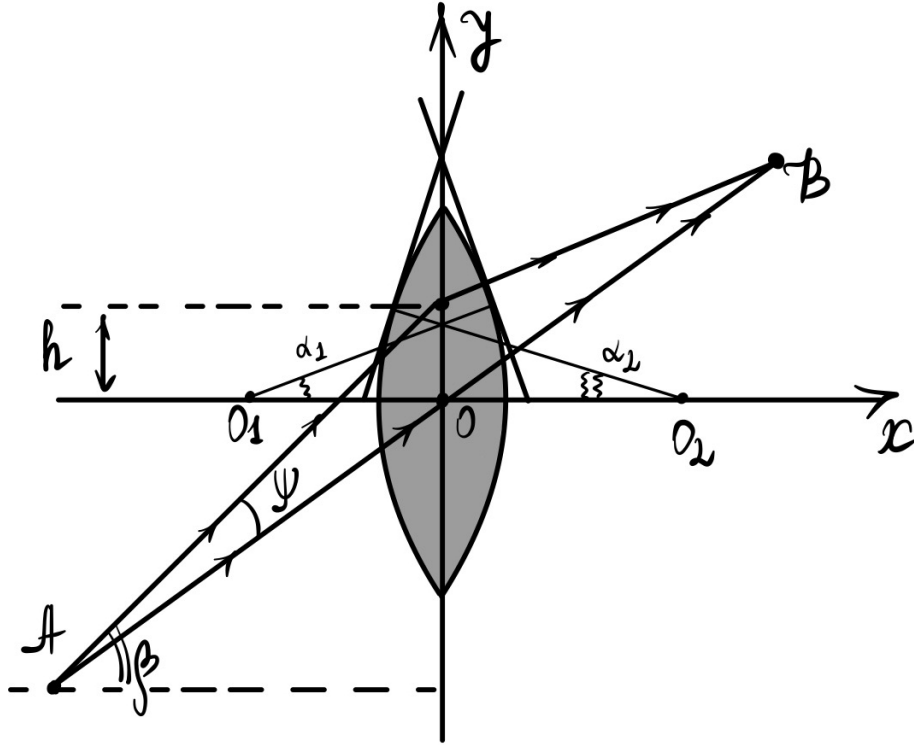


Рис. 2: К нахождению координат изображения

Чтобы определить угол при вершине призмы, проведем из центров сфер поверхностей линзы (точки O_1 и O_2) отрезки к точкам касания. Углы между отрезками и оптической осью обозначим через α_1 и α_2 . Эти отрезки ортогональны поверхностям линзы и, соответственно, поверхностям построенной призмы. Основываясь на геометрических соображениях, можно доказать, что угол при вершине призмы α связан с этими углами соотношением: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Этот угол входит в ранее выведенное выражение для δ и определяет ход второго луча после прохождения линзы. Пересечение этого луча с первым лучом дает точку B .

Второй (рассмотренный только что) луч проходит линзу (и соответствующую призму) на расстоянии h от оптической оси. В приближении тонкой линзы можно считать, что три точки - пересечение лучом первой поверхности линзы, пересечение лучом второй поверхности и пересечение лучом плоскости линзы одинаково удалены от оптической оси. Величина h связана с углом ψ соотношением

$$\operatorname{tg}(\beta + \psi) = \frac{|y_1| + h}{|x_1|}.$$

Выражая y_1 через x_1 , получаем соотношение

$$h = \frac{|x_1| \operatorname{tg} \psi}{(1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \psi) \cos^2 \beta}.$$

Будем рассматривать лучи, проходящие через линзу вблизи ее оптического центра. Поэтому, считая угол ψ малым, приходим к соотношению, справедливому для любых $\beta < \pi/2$:

$$h = \frac{|x_1|}{\cos^2 \beta} \psi.$$

С другой стороны, величину h можно связать с радиусами кривизны линзы: $h = R_1 \sin \alpha_1 \approx R_1 \alpha_1 \approx R_2 \alpha_2$. Замена синусов углов углами соответствует приближению тонкой линзы.

Используя это выражение и выражение для h , угол α можно выразить через угол ψ :

$$\alpha = h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{|x_1|}{\cos^2 \beta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \psi = \frac{|x_1|}{\cos^2 \beta} \frac{n-1}{f} \psi.$$

В этом выражении величина f – фокусное расстояние тонкой линзы, определяемое для параксиальных лучей:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Уравнение, определяющее прямую, по которой идет второй луч после прохождения линзы, имеет вид $y = k'x + h$. Величина k' определяется через соответствующий угол:

$$k' = \operatorname{tg}(\beta - \psi + \delta) \approx \operatorname{tg} \beta + \frac{\delta - \psi}{\cos^2 \beta} = k + \frac{\delta - \psi}{\cos^2 \beta}.$$

Поскольку точка B находится на пересечении двух лучей, ее координаты определяются в результате решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} y_2 &= kx_2, \\ y_2 &= k'x_2 + h, \end{aligned}$$

что с учетом равенства для k' приводит к уравнению для x_2 :

$$\frac{\delta - \psi}{\cos^2 \beta} x_2 + h = 0.$$

Используя выведенные ранее соотношения, выразим угол δ через угол ψ , величину h также выразим через угол ψ . В результате после подстановок и некоторых преобразований получим уравнение относительно x_2 :

$$\left(\frac{|x_1|}{\cos^2 \beta} \frac{n-1}{f} \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}}{\cos \beta} - 1 \right) - 1 \right) x_2 = |x_1|.$$

Учтем теперь, что $|x_1| = -x_1$, и выразим синус и косинус угла β через тангенс, т. е. через k . В результате соотношение, определяющее значение x_2 , можно привести к виду

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} (1 + k^2) \frac{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)k^2} - 1}{n - 1}.$$

Величина y_2 связана с величинами x_2, x_1 и y_1 указанным выше соотношением в системе уравнений, подставляем и находим явно. Полученные формулы определяют связь между координатами точечного источника и его изображения в случае, когда луч, идущий от источника через линзу, не является параксиальным.

Проведем анализ полученных выражений. Для параксиального луча угол β и, соответственно, величина k малы. При $k \rightarrow 0$ выражение выше совпадает с обычно используемой формулой для тонкой линзы (с учетом знака x_1). С возрастанием угла между падающим на линзу лучом и оптической осью возрастают поправки. Одно из качественных отличий заключается в том, что, если одну линзу заменить другой с тем же фокусным расстоянием, но другим показателем преломления (соответственно с другими радиусами кривизны), то изображение того же точечного источника сместится. Заметим, что, поскольку диапазон изменения показателя преломления незначителен, то, как показывают расчеты, этот эффект практически не проявляется.

Следствием изменения формулы, связывающей положение источника и изображения, является то, что для непараксиальных лучей геометрические правила построения изображений в тонкой линзе оказываются неприменимыми и все построения возможны лишь путем численного расчета. Некоторые качественные отличия получающихся изображений несложно понять, не прибегая к численному расчету. Так, например, при параксиальных лучах изображением отрезка прямой также является отрезок прямой. Это свойство можно вывести, исходя из правил геометрического построения изображений.

Если координаты точек объекта связаны линейным соотношением $y_{1i} = a_1 x_{1i} + b_1$, то соответствующая линейная связь будет справедлива и для точек изображения: $y_{2i} = a_2 x_{2i} + b_2$, где $a_2 = a_1 + b_1$, $b_2 = b_1$. При отличном от нуля значении k такая линейная связь пропадает, и изображением отрезка прямой становится кривая линия.

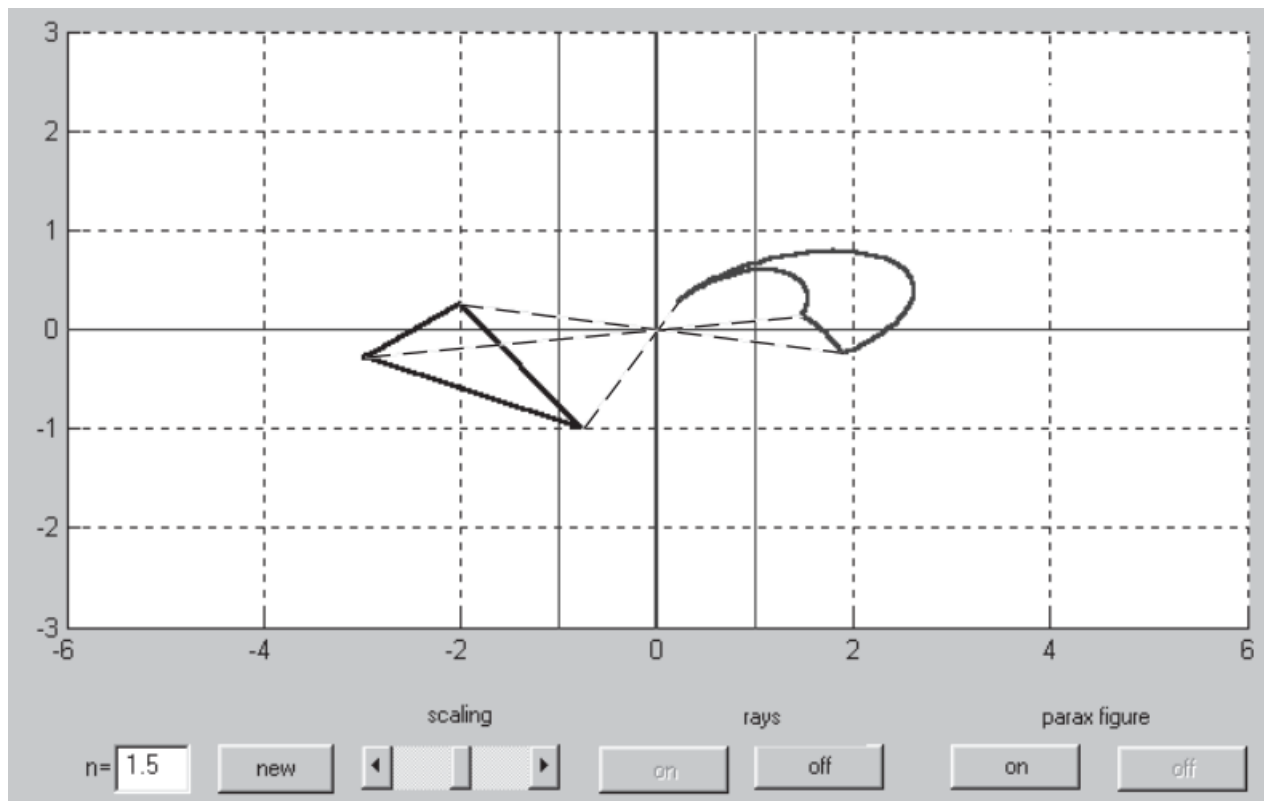


Рис. 3: Пример численного построения изображения

Пример построения изображения при численном расчете по выведенным формулам приведен на рисунке 3. Сплошная горизонтальная прямая на рисунке соответствует оптической оси, а сплошные вертикальные прямые - плоскости линзы и двум фокальным плоскостям ($f = 1$). Как видно из рисунка, лишь один из отрезков треугольника, для которого лучи можно считать параксиальными, дает изображение в виде отрезка. Из приведенного примера можно заметить еще одно свойство: если бы мы построили изображение приведенного треугольника по правилам, справедливым для параксиальных лучей, мы получили бы разорванную фигуру, так как два из отрезков треугольника пересекают фокальную плоскость. Однако в данном случае получается связная фигура.

Следствием вышесказанного является тот факт, что пучки параллельных лучей, идущие под большим углом к оптической оси, фокусируются уже не в фокальной плоскости. Точка фокусировки определяется выведенными формулами, в которых следует устремить $x_1 \rightarrow -\infty$ (настройка на бесконечность). Вместо двух фокальных плоскостей образуются две фокальные поверхности с координатами (x_f, y_f) . Эти поверхности заданы параметри-

чески уравнениями

$$x_f = \frac{f(n-1)}{(1+k^2)\left(\sqrt{n^2+(n^2-1)k^2}-1\right)}, \quad y_f = kx_f.$$

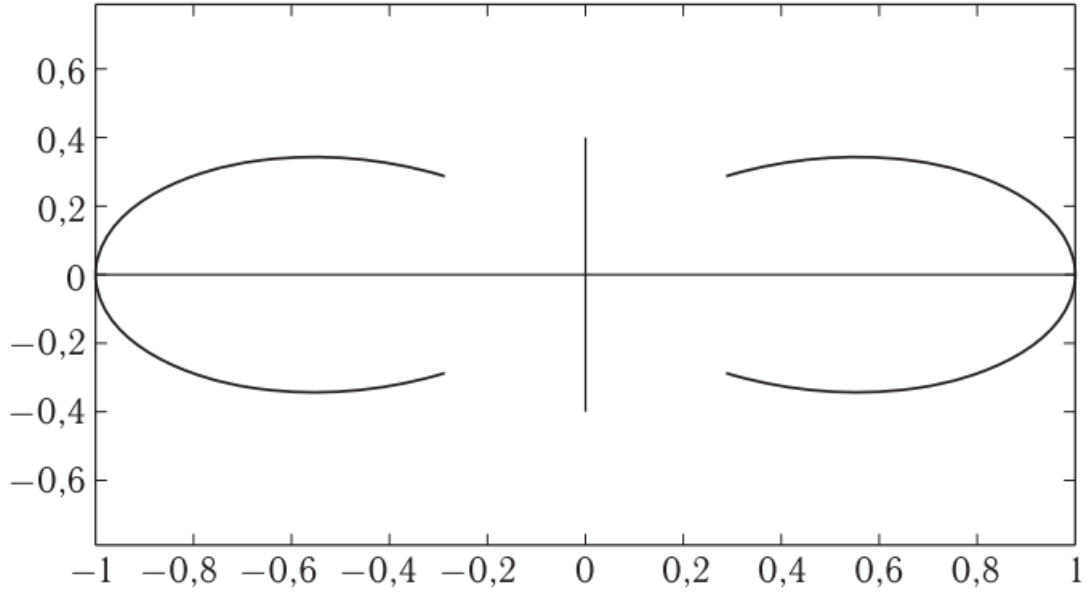


Рис. 4: Две фокальные поверхности

Из рис. 4 видно, насколько эти поверхности отличаются от плоскостей (расчет выполнен для $f = 1, n = 1,5, k \in [-1,1]$).

4. Основные этапы сборки с точки зрения программирования

Программа написана на языке C++. Нам нужно было работать с графикой для отрисовки макета линзы, загрузки картинок, работы с пикселями и их координатами. Также нам нужно было создать объекты со свойствами точек предмета и изображения, создать саму линзу и функции конвертации точек предмета в точки изображения по формулам, которые справедливы для параксиальных лучей и непараксиальных лучей, чтобы пронаблюдать разницу. Код лежит в репозитории на сервисе «GitHub», и при желании его можно посмотреть полностью. Для разделения труда и работы отдельно с графикой и физикой преобразования точек каждый писал свою часть работы, после этого мы объединили полученные куски программы. Было принято решение оставить увеличивающееся изображение полупрозрачным, чтобы эффект увеличения можно было сравнить с первоначальной картинкой. На рис.5 представлены воплощенные в коде функции конвертации точек предмета в точки изображения для параксиального и непараксиального случаев.

```
120 double ParaxConvert(Lens& lens, Point& point) {
121     Point image(0, 0);
122     double gamma = 0;
123     image.SetX((lens.GetFocus() * abs(point.GetX())) / (abs(point.GetX() - lens.GetFocus())));
124     image.SetY(image.GetX() * abs(point.GetY()) / point.GetX());
125     gamma = image.GetY() / point.GetY();
126     return gamma;
127 }
128
129 double NonParaxConvert(Lens& lens, Point& point) {
130     Point image(0, 0);
131     double slope_factor = point.GetY() / point.GetX();
132     double koef1 = (1 + pow(slope_factor, 2)) / (lens.GetFocus() * (lens.GetNLens() - 1));
133     double koef2 = sqrt(pow(lens.GetNLens(), 2) + (pow(lens.GetNLens(), 2) - 1) * pow(slope_factor, 2)) - 1;
134     double denominator = 1 / point.GetX() + koef1 * koef2;
135     image.SetX(1 / denominator);
136     image.SetY(slope_factor * image.GetX());
137     double gamma = image.GetY() / point.GetY();
138     return gamma;
139 }
```

Рис. 5: Функции для параксиальных и непараксиальных лучей

5. Результат

Репозиторий с кодом можно найти по ссылке:

https://github.com/vasyavasilevs/Non-approximated-ray-simulation/blob/valya/non_parax_rays_sim.cpp

Ниже представлен результат работы программы для нескольких картинок. Также можно провести демонстрацию в онлайн-режиме.

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">12. Принцип Гюйгенса-Френеля. Количественная формулировка принципа Гюйгенса-Френеля. Общая задача о дифракции на тонком экране. Граничные условия. Волновой параметр и зависимость характера дифракции от его значения. Критерий геометрической оптики.13. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Спираль Френеля. Пятно Пуассона и условия его наблюдения. Дифракция на краю экрана, спираль Корно (качественно).14. Зонная пластинка Френеля. Фокусы зонной пластинки: положение и интенсивность света в них. Линза Френеля. Идеальная линза с точки зрения дифракции Френеля. Оценка размера фокального пятна.15. Дифракция Фраунгофера. Связь с преобразованием Фурье. Дифракция Фраунгофера на щели (строгий вывод) и круглом отверстии (качественно). Поле в фокальной плоскости линзы, размеры фокального пятна.16. Роль дифракции Фраунгофера в оптических приборах. Разрешающая способность телескопа и микроскопа. Критерий Рэлея. Разрешающая способность при когерентном освещении. | <ul style="list-style-type: none">12. Принцип Гюйгенса-Френеля. Количественная формулировка принципа Гюйгенса-Френеля. Общая задача о дифракции на тонком экране. Граничные условия. Волновой параметр и зависимость характера дифракции от его значения. Критерий геометрической оптики.13. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Спираль Френеля. Пятно Пуассона и условия его наблюдения. Дифракция на краю экрана, спираль Корно (качественно).14. Зонная пластинка Френеля. Фокусы зонной пластинки: положение и интенсивность света в них. Линза Френеля. Идеальная линза с точки зрения дифракции Френеля. Оценка размера фокального пятна.15. Дифракция Фраунгофера. Связь с преобразованием Фурье. Дифракция Фраунгофера на щели (строгий вывод) и круглом отверстии (качественно). Поле в фокальной плоскости линзы, размеры фокального пятна.16. Роль дифракции Фраунгофера в оптических приборах. Разрешающая способность телескопа и микроскопа. Критерий Рэлея. Разрешающая способность при когерентном освещении. |
|--|--|

Рис. 6: Непараксиальные лучи

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">12. Принцип Гюйгенса-Френеля. Количественная формулировка принципа Гюйгенса-Френеля. Общая задача о дифракции на тонком экране. Граничные условия. Волновой параметр и зависимость характера дифракции от его значения. Критерий геометрической оптики.13. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Спираль Френеля. Пятно Пуассона и условия его наблюдения. Дифракция на краю экрана, спираль Корно (качественно).14. Зонная пластинка Френеля. Фокусы зонной пластинки: положение и интенсивность света в них. Линза Френеля. Идеальная линза с точки зрения дифракции Френеля. Оценка размера фокального пятна.15. Дифракция Фраунгофера. Связь с преобразованием Фурье. Дифракция Фраунгофера на щели (строгий вывод) и круглом отверстии (качественно). Поле в фокальной плоскости линзы, размеры фокального пятна.16. Роль дифракции Фраунгофера в оптических приборах. Разрешающая способность телескопа и микроскопа. Критерий Рэлея. Разрешающая способность при когерентном освещении. | <ul style="list-style-type: none">12. Принцип Гюйгенса-Френеля. Количественная формулировка принципа Гюйгенса-Френеля. Общая задача о дифракции на тонком экране. Граничные условия. Волновой параметр и зависимость характера дифракции от его значения. Критерий геометрической оптики.13. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Спираль Френеля. Пятно Пуассона и условия его наблюдения. Дифракция на краю экрана, спираль Корно (качественно).14. Зонная пластинка Френеля. Фокусы зонной пластинки: положение и интенсивность света в них. Линза Френеля. Идеальная линза с точки зрения дифракции Френеля. Оценка размера фокального пятна.15. Дифракция Фраунгофера. Связь с преобразованием Фурье. Дифракция Фраунгофера на щели (строгий вывод) и круглом отверстии (качественно). Поле в фокальной плоскости линзы, размеры фокального пятна.16. Роль дифракции Фраунгофера в оптических приборах. Разрешающая способность телескопа и микроскопа. Критерий Рэлея. Разрешающая способность при когерентном освещении. |
|--|--|

Рис. 7: Параксиальные лучи

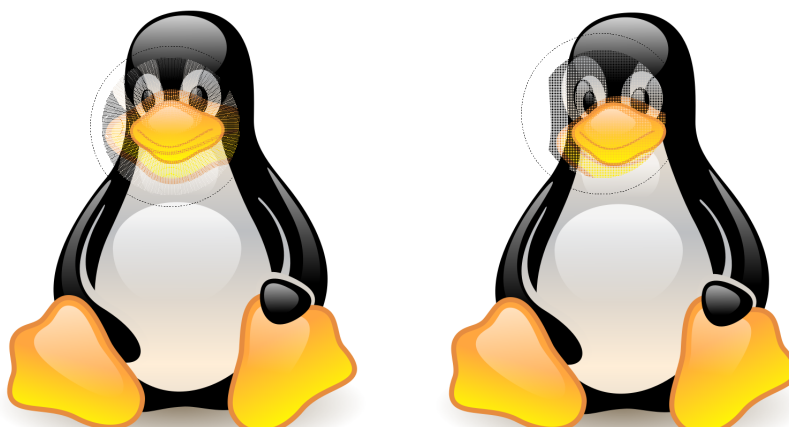


Рис. 8: Слева - непараксиальные лучи, справа - параксиальные

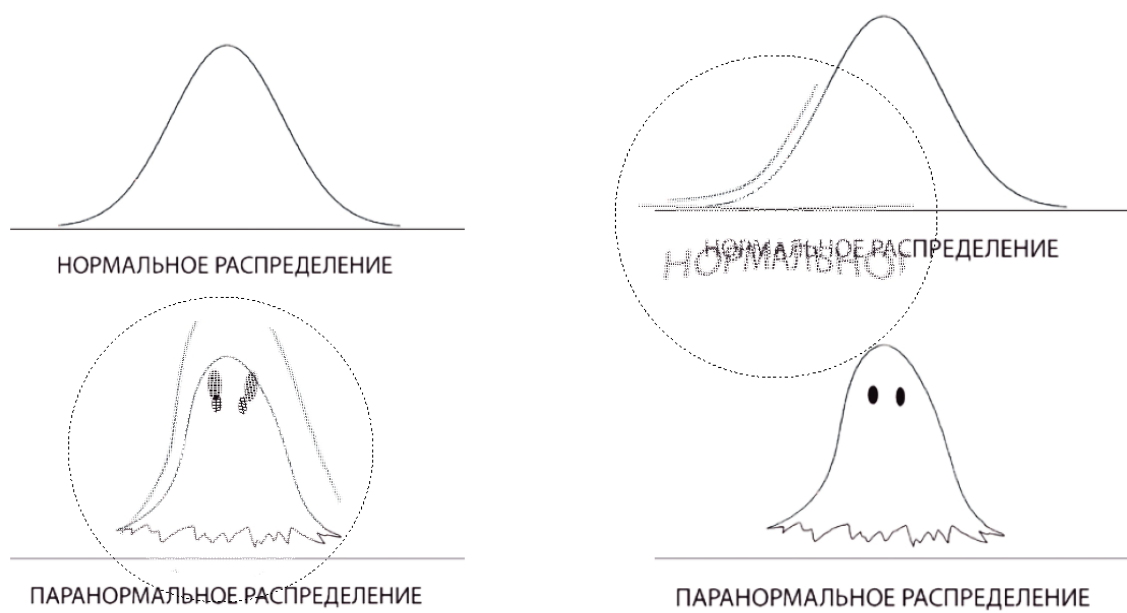


Рис. 9: Непараксиальные лучи



Рис. 10: Параксиальные лучи

6. Источники и ресурсы

1. Кондратьев А.С., Ляпцев А.В. Физика. Задачи на компьютере. ФИЗМАТЛИТ, 2008. 314-320 сс.
2. Д.В. Сивухин, "Общий курс физики". Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т.IV. Оптика.
3. Кондратьев А. С., Уздин В. М. Физика. Сборник задач. — М: Физматлит, 2005. — 392 с.
4. Семинарские презентации и советы преподавателя по программированию (Миряха Владислав Андреевич).
5. <https://www.youtube.com/hashtag/simplecode>