Тамэси-вари

Гончаренко Валентина, 1 курс ФРКТ, группа Б01-009

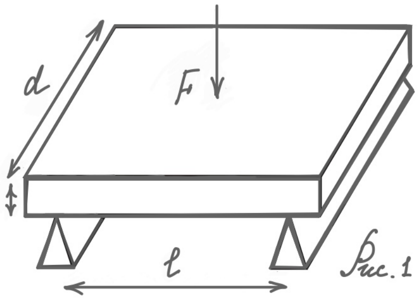
Январь 2021

Сначала было каратэ...

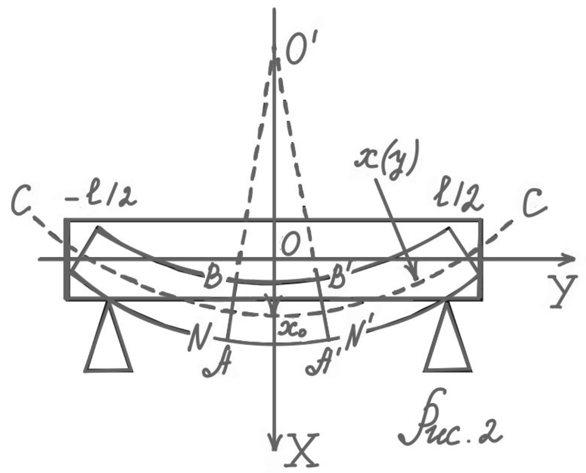
Тамэси-вари - это проверка психологической подготовки и техники удара в каратэ различных предметов. Известно, что каратэ пришло к нам с Окинавы, крупнейшего острова Японии. Наибольшее развитие каратэ получило в 16-17 веках, когда власти, опасаясь восстаний, изъяли у населения все оружие, включая кухонные ножи и церемониальные мечи. Конечно, сопротивляться хорошо вооруженной армии самураев голыми руками крестьянам было не под силу, но, зная приёмы каратэ, они могли дать отпор нескольким оголтелым насильникам. Видимо, отсюда и берет начало практика тамэси-вари, которая всегда интересна для зрителей и производит на непосвященных впечатление некоторого чуда. В наше время на показательных выступлениях и соревнованиях по каратэ в тамэси-вари чаще всего используются доски определенных размеров из деревьев хвойных пород.

Когда я выбирала тему вопроса по выбору, я просматривала архивы физических статей в журнале "Квант". Среди многих названий более-менее знакомых терминов, которые интуитивно можно было отнести к разделу механики, я увидела необычное слово, никогда раньше мне не попадавшееся (более того, я до сих пор не знаю правильной постановки ударения в нём, потому что нигде это не отыскала). Нажав на ссылку, я удивилась и обрадовалась, так как статья показалась наиболее интересной для детального разбора. Мне, как и автору, стало интересно исследовать характерные параметры и значения для этой техники удара, если не брать во внимание психологический аспект вопроса. В связи с этим была рассмотрена физическая модель удара по доске, которая позволяет сделать некоторые расчеты и оценить возможности человека в тамэси-вари. Определение ряда величин этой модели требует решения нескольких самостоятельных задач, которые вынесены в Приложения (1-3) для более наглядного изложения основного текста.

Пусть по центру лежащей на двух опорах доски с размерами d, l, h (рис.1) наносят удар кулаком массой m со скоростью v в момент контакта. Волокна доски направлены параллельно опорам, расстояние между которыми для оценки также будем полагать равным длине доски l. Из «секретов» каратэ известно, что для увеличения эффективности удара надо к уже разогнанному перед ударом кулаку в течение времени его взаимодействия с доской прикладывать еще и силу, которую обозначим через F. Введем систему координат так, как показано на рисунке 2. Обозначим через x_0 смещение центра доски из положения равновесия. Пусть разрыв доски, т.е. разрыв ее внешней поверхности, происходит при некотором значении $x_0 = x_p$. Такой разрыв происходит, когда напряжение σ (сила, действующая на единицу площади сечения доски) на поверхности доски достигает определенного значения σ_p, характеризующего материал.



Найдем вначале связь между x_p и σ_p, которая, очевидно, определяется упругими свойствами и геометрическими размерами доски. Максимальный изгиб и, следовательно, максимальное напряжение на поверхности доски будет в ее середине.



Как показано в Приложении 1, это напряжение равно $\sigma = \dfrac{Eh}{2R}$, где R - это радиус кривизны центральной линии CC в середине доски (см. рис. 2), а E - модуль Юнга материала доски.

Зададим теперь форму доски при изгибе, учитывая, что края доски закреплены в точках $y = \pm\dfrac{l}{2}$, а максимальное смещение из положения равновесия имеет её центр. Отметим, что точная форма доски зависит от конкретных условий контакта ударной поверхности кулака с доской (при правильном ударе - это суставы указательного и среднего пальцев). Поэтому для расчетов можно ограничиться удобной формулой, основанной на практическом опыте и позволяющей провести простые оценки. Будем считать форму доски при изгибе косинусоидой, закрепленной в точках $y = \pm\dfrac{l}{2}$. В этом случае смещение x какой-либо точки центральной линии зависит от её координаты y по закону

$$x(y) = x_0 \cos\left(\frac{\pi y}{l}\right).$$

В Приложении 2 показано, что при этом радиус кривизны в центре доски будет равен

$$R = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

Подставив полученное выражение для радиуса кривизны в выражение для σ, найдем напряжение в середине доски на её поверхности при смещении центра доски на величину x_0:

$$\sigma = \frac{x_0 E h \pi^2}{2l^2}.$$

Отсюда видно, что разлом ($\sigma = \sigma_p$) происходит при смещении центра доски на величину

$$x_p = \frac{2\sigma_p l^2}{\pi^2 E h}.$$

Смоделируем далее упругие свойства доски относительно приложенной внешней силы пружиной жесткостью k. Этот коэффициент найден в Приложении 3 и имеет величину

$$k = \frac{\pi^2 E h^3 d}{3 l^3}.$$

После определения необходимых параметров вернемся к сформулированной раньше динамической задаче об ударе по доске и запишем уравнение движения кулака в виде второго закона Ньютона:

$$m x'' = -kx + F,$$

где x теперь - смещение кулака от исходной поверхности контакта с доской, а штрихи обозначают производные по времени. Для оценки будем полагать, что приложенная человеком к кулаку сила F постоянна во времени. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что общее решение уравнения движения имеет вид

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F}{k}$$

и содержит две произвольные константы A и B. Для их определения зададим условия в начальный момент времени $t = 0$: $x = 0$ и $x' = v$. Тогда получим

$$x = \frac{f}{\omega^2}(1 - \cos \omega t) + \frac{v}{\omega} \sin \omega t,$$

где $f = \dfrac{F}{m}$ - величина, имеющая размерность ускорения, и $w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - частота собственных колебаний кулака под действием упругой силы со стороны доски. Найдем теперь максимальное отклонение кулака x_{max} при заданном значении начальной скорости v и силы F. Приравнивая к нулю производную от x по времени t и затем исключая t, находим

$$x_{max} = \frac{f}{\omega^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v\omega}{f} \right)^2} \right).$$

Для получения условий разлома это отклонение нужно приравнять к отклонению x_p, откуда получаем уравнение

$$\frac{2\sigma_p h^2 d}{3Fl} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E h^3 v^2 d m}{3F^2 l^3}},$$

связывающее свойство материала доски и её геометрические размеры с параметрами, характеризующими удар.

Решим это уравнение относительно силы F, опять вводя для удобства значения x_p и k. В этих обозначениях получим простое выражение

$$F = \frac{k x_p}{2} - \frac{m v^2}{2 x_p}.$$

Такую силу необходимо приложить в момент контакта к кулаку, движущемуся с начальной скоростью v, чтобы разбить доску. Очевидно, что, если скорость кулака достаточно велика, выражение для F получается отрицательным и силу можно не прикладывать. В этом случае начальная скорость должна превышать значение

$$v = x_p w = \frac{2\sigma_p}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{\frac{lhd}{mE}},$$

которое пропорционально квадратному корню из толщины доски h. Наоборот, если начальная скорость кулака v равна нулю, то из выражения для F следует, что, для того чтобы сломать (продавить) доску, необходимо приложить силу

$$F = \frac{kx_p}{2} = \frac{h^2\sigma_p d}{3l},$$

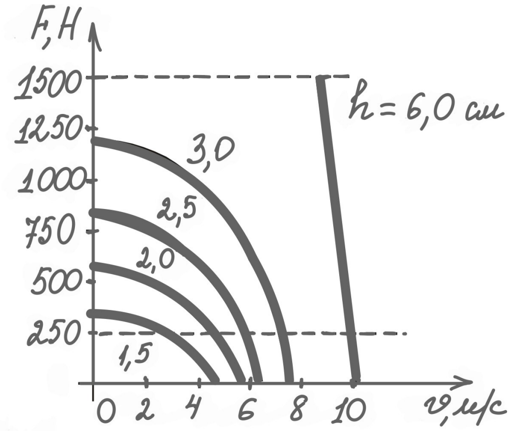
пропорциональную квадрату толщины h. Значит, с увеличением толщины доски выгоднее увеличивать скорость, а не силу.

Решим теперь уравнение, определяющее условие разлома доски относительно h и получим значение толщины доски, которую можно разбить при заданных параметрах удара:

$$h = \frac{3\pi^2 E v^2 m}{8{\sigma_p}^2 ld}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{64Fl^3{\sigma_p}^3 d}{3\pi^4 E^2 v^4 m^2}}\right).$$

Проведем некоторые численнные оценки, задав характерные параметры материала доски: $E = 10^8$ Н/м^2 и $\sigma_p = 5 \cdot 10^6$ Н/м^2, взятые из экспериментальных измерений. Стандартные в тамэси-вари ширина и длина доски составляют 20 см и 30 см, однако в расчетах будем полагать $l = 25$ см, поскольку края доски, выступающие за опоры, можно не учитывать. Массу кулака с учетом предплечья можно положить равной 1 кг. На рисунке 3 показана зависимость силы F от начальной скорости v при различных значениях толщины доски h. Если сила и скорость таковы, что соответствующая точка лежит выше кривой для заданного h, то доска ломается.

Теперь оценим толщину доски, которую может сломать человек. Примем реальную силу одной руки обычного человека равной $F = 250$ Н. Как видно из рисунка, продавить такой силой (показана пунктиром) даже достаточно тонкую доску толщиной 1,5 см при начальной скорости $v = 0$ обычному человеку невозможно. Для этого необходимо развить силу около 300 Н. Экспериментальное значение максимальной скорости удара кулаком оценивается как 10 м/с. Подставив в выражение для h значение $v = 10$ м/с и $F = 250$ Н, находим толщину доски: $h = 6$ см. Эта величина достаточно большая и доступная, по-видимому, только для тренированных людей, обладающих высокой техникой удара и психологически подготовленных.



Приложение 1

Определим напряжение на поверхности доски. Проведем (см. рис.2) симметричные сечения доски AB и $A'B'$, нормальные к линии CC и находящиеся на малом расстоянии l_0 друг от друга вдоль этой линии.

Рассмотрим элемент $AA'B'B$. Ввиду его малости, можно считать, что кривые AA', NN' и BB' есть дуги окружностей с центрами, лежащими на так называемой оси изгиба O', перпендикулярной к плоскости рисунка. Наружная поверхность доски между точками A и A' при изгибе растянута, а внутренняя поверхность между точками B и B' - сжата. Длины кривых AA' и BB' в отстутствие изгиба одинаковы и равны длине l_0 центральной кривой NN', не меняющей своей длины при изгибе доски. Пусть R - радиус кривизны линии NN', тогда $l_0 = R\alpha$, где α - центральный угол, опирающийся на дугу NN'. Если доска не слишком толстая, то есть $h \ll R$, длина кривой AA' будет

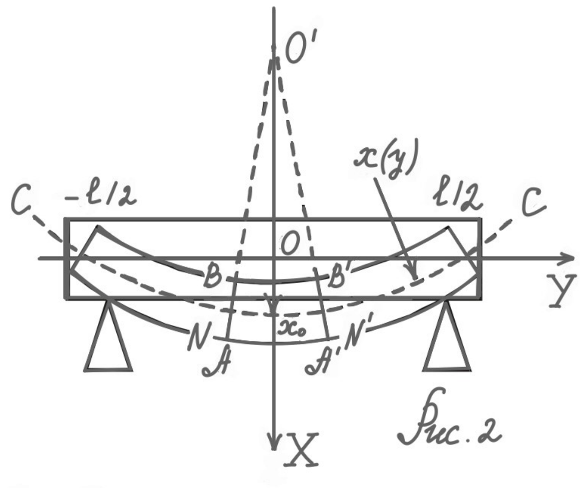


Рис. 2

$$l_1 = \left(R + \frac{h}{2}\right)\alpha,$$

а ее удлинение из-за изгиба составит

$$\Delta l = l_1 - l_0 = \frac{h\alpha}{2}.$$

Следовательно, напряжение, действующее вдоль наружной поверхности доски, согласно закону Гука, есть

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{Eh}{2R}.$$

Приложение 2

Найдем радиус кривизны поверхности доски в ее середине ($y = 0$) при изгибе. Заметим, что если R есть радиус кривизны какой-либо кривой в данной точке, то проходящая через эту точку окружность радиусом R, центр которой лежит на нормали к кривой в этой точке, совпадает (по определению радиуса кривизны) с кривой в малой окрестности этой точки. Из формулы для $x(y)$ при $|\frac{\pi y}{l}| \ll 1$ имеем

$$x(y) = x_0 - \frac{x_0}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 y^2$$

(здесь использована известная приближенная формула $\cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2!}$ для $|\gamma| \ll 1$).

Искомая окружность радиусом R с центром в точке O'(см. рис. 2), проходящая через точку с координатами $(x_0, 0)$, о которой говорилось также в Приложении 1, описывается уравнением

$$y^2 + (x - x_0 + R)^2 = R^2,$$

которое легко решить относительно смещения $x(y)$:

$$x(y) = x_0 - R + R\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}.$$

Пользуясь известной приближенной формулой $\sqrt{1-\gamma} \approx 1 - \frac{\gamma}{2}$ при $|\gamma| \ll 1$, находим при $|\frac{\gamma}{R}| \ll 1$

$$x(y) = x_0 - \frac{y^2}{2R}.$$

Сравнивая два выражения для $x(y)$, получаем значения для радиуса кривизны:

$$R = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

Приложение 3

Определим зависимость величины отклонения x_0 центра доски, лежащей на двух опорах, от величины приложенной к ней внешней силы F, распределенной вдоль центральных волокон и направленной вниз. Массой доски будем пренебрегать.

Вследствие предполагаемой симметрии, сила F распределится между опорами поровну. Рассечем мысленно доску на две части, проведя нормальное сечение через центр доски (см. рис. 2), и рассмотрим условие равновесия левой половины доски. Справа на нее будет действовать внешняя сила $\frac{F}{2}$, сосредоточенная вблизи ее края и направленная вниз. Эта сила компенсируется силой реакции левой опоры. Сумма моментов обеих сил относительно центра доски будет, очевидно, определяться только моментом силы со стороны левой опоры:

$$M = \frac{Fl}{4}.$$

С другой стороны, этот момент уравновешивается моментом сил растяжения и сжатия, действующих в проведенном нормальном сечении на левую часть доски со стороны правой части. Значение этого момента сил можно получить из формулы для σ, модифицировав ее для вычисления напряжения в объеме доски вдоль оси Y. Как следует из вывода этой формулы (см. Приложение 1), для этого достаточно вместо отклонения $\frac{h}{2}$ от линии NN', соответствующего точке на внешней поверхности доски, ввести расстояние δ от этой линии ($-\frac{h}{2} < \delta < \frac{h}{2}$). Тогда для напряжения в объеме доски получим

$$\sigma = \frac{E\delta}{R}.$$

Искомый момент упругих сил растяжения и сжатия относительно центра доски будет равен

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta\sigma d d\delta = \frac{E}{R} d \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta^2 d\delta = \frac{Eh^3 d}{12R}$$

.

Подставив сюда значения радиуса кривизны R и приравняв правые части двух выражений для M, находим связь между силой F и смещением x_0:

$$x_0 = \frac{3Fl^3}{\pi^2 E h^3 d}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$F = kx_0,$$

откуда следует искомое выражение для коэффициента жесткости k эквивалентной пружины:

$$k = \frac{\pi^2 E h^3 d}{3l^3}.$$

Литература

1. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», 1998 год, №5, А.Бирюков, "Тамэси-вари".

Иллюстрация П.Шевелева