Домашняя работа №4.

#1.

1	4	7	$\dots$	$3n-2$	2	5	8	$\dots$	$3n-1$	3	6	9	$\dots$	$3n$
$\varnothing$	$(2,3)$	$(2,3,5,6)$			$\varnothing$	(3)	$(3,6)$			$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$		$\varnothing$
0	2	4		$2(n-1)$	0	1	2		$n-1$	0	0	0		0

Число инверсий: $\big(0+2+4+\ldots+2(n-1)\big)+\big(0+1+2+\ldots+n-1\big)+0=$

$$=\frac{2(n-1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3n(n-1)}{2}$$

Чётно при $n=4k$ и $n=4k+1$, $k\in\mathbb{N}_0$, нечётно – при остальных

#2.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
3, & 6, & 9, & \dots, & 3n, & 2, & 5, & 8, & \dots, & 3n-1, & 1, & 4, & 7, & \dots, & 3n-2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
(1,2) & (1,2,4,5) & (1,2,4,5,7,8) & & & (1) & (1,4) & (1,4,7) & & & \varnothing & \varnothing & \varnothing & & \varnothing \\
2 & 4 & 6 & & 2n & 1 & 2 & 3 & & n & & & & &
\end{array}$$

Число инверсий: $(2+4+6+\ldots+2n)+(1+2+3+\ldots+n)+0=$

$$=\frac{(2+2n)\cdot n}{2}+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}$$

Чётно при $n=4k$ и $n=4k+3$, $k\in\mathbb{N}_0$, нечётно – при ост.

#3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix}=1\cdot(-x)(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot((n-1)-x)=0$$

$x\in\{0;1;2;\ldots;n-2;n-1\}$

Ответ: $\{0;1;2;\ldots;n-2;n-1\}$.

#4.

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot \dots \cdot 1\cdot x = x = 2n+1
$$

$-$; $\cdot(-2)$, $+$

$[x = 2\cdot(n-1)+3 = 2n+1]$

Ответ: $2n+1$

#5.

$$Q=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh),$$ где $a, b, c, d, e, f, g, h, i = \pm 1$

$\max(Q) = 4$ Например, при $(a, b, c, d, e, h, i = 1)$ и $(f, g = -1)$

Докажем, что не может быть $\max(Q) > 4$.

Т.к. все члены равны ± 1, то все слагаемые в Q равны ± 1.

Тогда $Q \in \{\pm 0; \pm 2; \pm 4; \pm 6\}$, т.е. надо док-ть, что $Q \neq 6$.

Пусть $Q = 6$, тогда $(aei + bgf + cdh) - (ceg + bdi + afh) = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow aei = bgf = cdh = 1$; $\underbrace{ceg = bdi = afh}$ $= -1$

$\Downarrow$

Т.к. здесь все члены матрицы и каждое произведение равно -1, то в каждом произведении нечётное кол-во членов, равных -1. (В матрице нечётное кол-во членов, равных -1)

$\uparrow$

Также эти произведения должны быть 1.

Но т.к. в матрице нечётное кол-во членов, равных -1, а для того, чтобы „загасить" минусы необходимо чётное кол-во $((-1)\cdot(-1) = 1)$, то среди aei, bgf, cdh обязательно найдётся произведение равное -1. $\Rightarrow$ Противоречие.