Homework 20

#2.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$$

Проверим это. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$
$r \mapsto r \bmod n$

1) $n\mathbb{Z} \bmod n = 0 \Rightarrow$
2) $\forall x \in \mathbb{Z}_n \ \exists y: f(y) = x$
3) $f(x+y) = (x+y) \bmod n =$
$= x \bmod n + y \bmod n =$
$= f(x) + f(y)$

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker} f = n\mathbb{Z} \\ \operatorname{Im} f = \mathbb{Z}_n \end{array}\right| \Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$

#1.

$A_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143),$
$(234), (243)\}$

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$

$V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$\forall \sigma \in A_4 \quad \sigma \cdot V_4 \cdot \sigma^{-1} = V_4 \Rightarrow V_4 \triangleleft A_4$

id - тривиальная группа

Группы порядка 3 не норм., т.к. $(421)(123)(124) = (243) \notin \langle(123)\rangle$

Ответ: V_4.

#3.

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{\tfrac{p}{q} \cdot \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

$(\frac{p}{q}\mathbb{Z})^q = q \cdot \frac{p}{q} \cdot \mathbb{Z} = p \cdot \mathbb{Z} = 1 \cdot \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{ord}(\frac{p}{q}\mathbb{Z}) = q < \infty$ ч.т.д.

#4.

$$\mathbb{Q}^\times \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_2 \times \prod_{p\in P} \mathbb{Z}$$

$\forall x \in \mathbb{Q}^\times \quad x = (-1)^k \cdot \prod_{p\in P} p^{k_p}$, где $k_p < \infty$

$(-1)^k$ - знак числа x. Определяется как $(-1)^{2n} = 1$

$(-1)^{2n+1} = -1 \Rightarrow k \bmod 2 \Downarrow k \in \mathbb{Z}_2$

Пусть $x = (-1)^m \cdot \prod_{p\in P} p^{m_p}$

$y = (-1)^l \cdot \prod_{p\in P} p^{l_p}$

$\Rightarrow (x\cdot y) = (-1)^{m+l} \cdot \prod_{p\in P} p^{m_p+l_p}$ - гомоморфизм

$\prod_{p\in P} p^k \in \prod_{p\in P} \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}^\times \cong \mathbb{Z}_2 \times \prod_{p\in P} \mathbb{Z}$ ч.т.д.

$(\mathbb{Q}^\times)^2 : \ \forall x \in (\mathbb{Q}^\times)^2 \quad x = (-1)^{2k} \cdot \prod_{p\in P} p^{2k_p} = \prod_{p\in P} p^{2k_p} = \prod_{p\in P} (2\mathbb{Z})$

$\Rightarrow (\mathbb{Q}^\times)^2 \cong \prod_{p\in P} 2\mathbb{Z}$

Тогда $\prod_{p\in P} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_2$