

## ДЗ к семинару 1

**Задача 1.** Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** Вычислить  $f(A)$ , где  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  и

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** При целых неотрицательных  $n$  вычислить

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n.$$

**Задача 4.** Напомним, что числа Фибоначчи задаются рекуррентным соотношением  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  при  $n \geq 2$ . Рассмотрим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что  $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$  при  $n \geq 1$ .

**Задача 5.** Вычислить все степени квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Вычислить  $AE_{ij}$  и  $E_{ij}A$ , где  $A$  – произвольная матрица.

**Задача 7.** Доказать, что матрица  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0.$$

Здесь в левую часть матрица подставляется как в многочлен (было на семинаре), а в правой части стоит нулевая матрица (т. е. все её элементы равны нулю).

**Задача 8.** Найти все матрицы порядка 2, квадрат которых равен нулевой матрице.

**Задача 9.** \* Пусть дана матрица  $A$  порядка 2 и целое  $k > 2$ . Доказать, что  $A^k = 0$  тогда и только тогда, когда  $A^2 = 0$ .