ИДЗ-1. Вариант 5.

#1.

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & -10 & 17 \\ -9 & -1 & -9 & 0 \\ -7 & 8 & 1 & -17 \\ -18 & 9 & 10 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\text{III}+\text{I} \\ \text{IV}-2\cdot\text{II}}} \begin{pmatrix} 6 & -9 & -10 & 17 \\ -9 & -1 & -9 & 0 \\ -1 & -1 & -9 & 0 \\ 0 & 11 & 28 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{I}\leftrightarrow\text{III} \\ \text{III}\cdot(-1)}]{\substack{\text{I}+6\text{III} \\ \text{II}-9\text{III}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 72 & 0 \\ 0 & -15 & -64 & 17 \\ 0 & 11 & 28 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-11\text{II}]{\substack{\text{II}\cdot\frac{1}{8} \\ \text{III}+15\text{II}}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 71 & 17 \\ 0 & 0 & -71 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}\cdot\frac{1}{71}]{\substack{\text{I}-\text{II} \\ \text{IV}+\text{III}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{71} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-9\text{III}} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{153}{71} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{71} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

#2.

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 & -9 \\ -32 & -49 & 45 & -67 \\ -36 & -27 & 58 & -83 \\ -4 & -5 & 14 & -43 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\substack{\boxed{\text{II}-8\text{I}} \\ \text{III}-9\text{I}}} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 & -9 \\ 0 & -9 & -3 & 5 \\ 0 & 18 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -34 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+2\text{II}} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 & -9 \\ 0 & -9 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{IV}+4\text{III}} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 & -9 \\ 0 & -9 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{8} & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили L, записывая коэфф. k с противоположным знаком в (i, j), где k, i, j берём из наших преобразований: i+kj

Например: получили 8 из II-8I

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 & -9 \\ -32 & -49 & 45 & -67 \\ -36 & -27 & 58 & -83 \\ -4 & -5 & 14 & -43 \end{pmatrix} = LU = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 & -9 \\ 0 & -9 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

#3.

$$X = A - BX$$

$$X + BX = A$$

$$(E+B)\cdot X = A$$

$$X = (E+B)^{-1}\cdot A$$, где E – единичная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 363 & -160 & -65 \\ -236 & 48 & 16 \\ 160 & -64 & -16 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -19 \\ 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(E+B)^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -19 \\ 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4\cdot 4\cdot 8}\begin{pmatrix} -32 & 0 & 0 \\ 8 & 32 & 0 \\ 90 & 56 & -16 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{45}{64} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{45}{64} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 363 & -160 & -65 \\ -236 & 48 & 16 \\ 160 & -64 & -16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{363}{4} - \frac{59}{4} + \frac{450}{4} & 40 + 3 - 45 & \frac{65}{4} + 1 - \frac{45}{4} \\ -59 + 70 & 12 - 28 & 4 - 7 \\ -20 & 8 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 11 & -16 & -3 \\ -20 & 8 & 2 \end{pmatrix}}$$ – Answer

#4.

$$ABA^{-2} = C^{-1}XC^{-1}$$

$$CABA^{-2}C = X$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

#5.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} = (152436)(789)$$

$\boxed{\text{Порядок}: \ \text{НОК}(6;3) = 6}$

$$\sigma^{-733} = (152436)^{-733} \cdot (789)^{-733} = \left((152436)^6\right)^{-122} \cdot (152436)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left((789)^3\right)^{-244} \cdot (789)^{-1} = Id^{-122} \cdot (163425) \cdot Id^{-244} \cdot (798) =$$

$$= \boxed{(163425)(798)}$$

#7.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 15 & 18 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -63 & 15 & 18 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -63 & 15 & 18 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 15 \end{vmatrix} \overset{\text{по I стр.}}{=} 15 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 18 & 0 & \dots & 0 \\ -63 & 15 & 18 & \dots & 0 \\ 0 & -63 & 15 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 15 \end{vmatrix} - 18 \begin{vmatrix} -63 & 18 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 15 & 18 & \dots & 0 \\ 0 & -63 & 15 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 15 \end{vmatrix} \overset{\text{по I стб.}}{=}$$

$$= 15\Delta_{n-1} - 18 \cdot (-63) \cdot \Delta_{n-2}$$

Характеристическое уравнение:

$$x^2 = 15x + 18 \cdot 63$$

$$x^2 - 15x - 63 \cdot 18 = 0$$

$$D = 225 + 4536 = 4761 = 69^2; \quad x_{1,2} = \frac{15 \pm 69}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow -\frac{54}{2} = -27 \\ \searrow \frac{84}{2} = 42 \end{matrix}$$

$$(x+27)(x-42) = 0$$

$$\Delta_n = C_1(-27)^n + C_2 \cdot 42^n$$

$$\begin{cases} n=1: -C_1 \cdot 27 + 42 \cdot C_2 = 15 & \Big| \cdot (-42) \\ n=2: \ 27^2 \cdot C_1 + 42^2 \cdot C_2 = 225 + 18 \cdot 63 \end{cases}$$

$$27^2 C_1 + 27 \cdot 42 \cdot C_1 = 225 + 18 \cdot 63 - 42 \cdot 15$$

$$27 C_1 \cdot 69 = 15(15-42) + 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 \quad \Big| : 27$$

$$C_1 \cdot 69 = -15 + 42$$

$$C_1 = \frac{27}{69}$$

$$C_1 = \frac{9}{23} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{42}\left(27 \cdot \frac{9}{23} + 15\right) = \frac{1}{42}\left(\frac{243 + 345}{23}\right) =$$

$$= \frac{588}{23 \cdot 42} = \frac{14}{23}$$

$$\Delta_n = \frac{14}{23}\cdot 42^n + \frac{9}{23}(-27)^n$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{14}{23}\cdot 42^n + \frac{9}{23}(-27)^n.}$$

#10.

$$A=\begin{pmatrix}-3&-1&2&-4\\3&\lambda&3&-4\\1&-2&2&-2\\-1&0&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{III}+\text{IV}]{\text{II}+\text{I}}\begin{pmatrix}-3&-1&2&-4\\0&\lambda-1&5&-8\\0&-2&2&-7\\-1&0&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{I}\leftrightarrow\text{IV}]{\text{I}-3\text{IV}}\begin{pmatrix}-1&0&0&-5\\0&\lambda-1&5&-8\\0&-2&2&-7\\0&-1&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{III}-2\text{IV}}\begin{pmatrix}-1&0&0&-5\\0&\lambda-1&5&-8\\0&0&-2&-29\\0&-1&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{IV}+\text{III}}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1&0&0&-5\\0&\lambda-1&5&-8\\0&0&-2&-29\\0&-1&0&-18\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{II}+\frac{5}{2}\text{III}}\begin{pmatrix}-1&0&0&-5\\0&\lambda-1&0&-\frac{161}{2}\\0&0&-2&-29\\0&-1&0&-18\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{II}-\frac{161}{36}\text{IV}}\begin{pmatrix}-1&0&0&-5\\0&\lambda+\frac{125}{36}&0&0\\0&0&-2&-29\\0&-1&0&-18\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{При } \lambda = -\frac{125}{36} & RgA = 3.\\ \text{При } \lambda \neq -\frac{125}{36} & RgA = 4.\end{array}}$$ – Answer.

#9.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-9&1&8&8\\7&4&-6&5\\1&9&3&\lambda\end{array}\right)\xrightarrow[\text{III}+\frac{1}{9}\text{I}]{\text{II}+\frac{7}{9}\text{I}}\left(\begin{array}{ccc|c}-9&1&8&8\\0&\frac{43}{9}&\frac{2}{9}&\frac{101}{9}\\0&\frac{82}{9}&\frac{35}{9}&\lambda+\frac{8}{9}\end{array}\right)\xrightarrow[\text{III}\cdot 9]{\text{II}\cdot 9}\left(\begin{array}{ccc|c}-9&1&8&8\\0&43&2&101\\0&82&35&9\lambda+8\end{array}\right)\xrightarrow{\text{III}-\frac{82}{43}\text{II}}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}-9&1&8&8\\0&43&2&101\\0&0&\frac{1341}{43}&-\frac{7938}{43}+\lambda\cdot 9\end{array}\right)\Rightarrow z\cdot\frac{1341}{43} = 9\lambda - \frac{7938}{43} \quad |\cdot 43$$

$$z = \frac{387\lambda - 7938}{1341} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\boxed{\text{при любых } \lambda}$.

#6.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Пусть $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$

Хотим: $\sigma\tau = \tau\sigma \quad | \cdot \tau^{-1}$

$\tau\sigma\tau\tau^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1}$

$$\sigma = \tau\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ b & f & a & e & c & g & d \end{pmatrix} = (a\ b\ f\ g\ d\ e\ c)$$

$(1\ 2\ 6\ 7\ 4\ 5\ 3)$ $(3\ 1\ 2\ 6\ 7\ 4\ 5)$

$(2\ 6\ 7\ 4\ 5\ 3\ 1)$

$(6\ 7\ 4\ 5\ 3\ 1\ 2)$

$(7\ 4\ 5\ 3\ 1\ 2\ 6)$

$(4\ 5\ 3\ 1\ 2\ 6\ 7)$

$(5\ 3\ 1\ 2\ 6\ 7\ 4)$

#8.

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=f(x)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & -821 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -23 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 & -589 \\ 81 & -27 & 9 & -3 & 1 & -253 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}-5\mathrm{II}]{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{I}-16\mathrm{II}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -192 & -48 & -36 & -15 & -453 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -23 \\ 0 & 128 & 0 & 8 & 0 & 232 \\ 1 & -67 & -11 & -13 & -4 & -138 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{IV}+4\mathrm{V} \\ \mathrm{II}-65\mathrm{V} \\ \mathrm{III}\cdot\frac{1}{8}}]{\substack{\mathrm{II}-16\mathrm{IV} \\ \mathrm{I}+15\mathrm{V}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -192 & -48 & -36 & 0 & -468 \\ 0 & 1080 & 180 & 210 & 0 & 2250 \\ 0 & 16 & 0 & 1 & 0 & 29 \\ 1 & -67 & -11 & -13 & 0 & -142 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}\cdot\frac{1}{30}]{\substack{\mathrm{I}+12\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -67 & -11 & -13 & 0 & -142 \\ 0 & 36 & 6 & 7 & 0 & 75 \\ 0 & 16 & 0 & 1 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & -48 & -24 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-4\mathrm{II}]{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{III} \\ \mathrm{IV}\cdot\left(-\frac{1}{24}\right)}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -67 & -11 & -13 & 0 & -142 \\ 0 & 4 & 6 & 5 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & -24 & -19 & 0 & -39 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}+12\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -67 & -11 & -13 & 0 & -142 \\ 0 & 4 & 6 & 5 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}]{\substack{\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) \\ \mathrm{IV}-\mathrm{III}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -67 & -11 & -13 & 0 & -142 \\ 0 & 4 & 6 & 5 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}-5\mathrm{IV}]{\substack{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{2} \\ \mathrm{II}-6\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -67 & -11 & -13 & 0 & -142 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{I}+11\mathrm{III} \\ \mathrm{I}+13\mathrm{IV}}]{\substack{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{4} \\ \mathrm{I}+67\mathrm{II}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=4 \\ d=-3 \\ e=-1 \end{cases} \Longrightarrow -3x^4+2x^3+4x^2-3x-1=f(x)$$

Если бы многочлен был меньшей степени, то было бы $a=0$.

Следовательно, многочлен наим. степени $\boxed{f(x)=-3x^4+2x^3+4x^2-3x-1}$.