Лекция 16, 19.01.24

Теорема 0. $\forall A, B, C$

(1) $A \sim B \Rightarrow A \times C \sim B \times C \wedge A^C \sim B^C \wedge C^B \sim C^A$

(2) $A \times B \sim B \times A$; $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$

(4) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$; $(C^B)^A \sim C^{A \times B}$

$Y^X = \{ f \in P(X \times Y) \mid f : X \to Y \}$

(1) Пусть: $A \overset{\varphi}{\sim} B$ Хотим: $A^C \overset{\psi}{\sim} B^C$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, dashed, "\psi(f)"] & \\ A \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] & & B \arrow[ll, bend left, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$f \mapsto \psi(f) \in B^C$
$\underset{A^C}{\in}$

ψ-инъективно: пусть: $\psi(f) = \varphi \circ f : C \to B$

дано: $\psi(f_1) = \psi(f_2)$ | хотим: $f_1 = f_2$

$\varphi \circ f_1 = \varphi \circ f_2$

$(\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f_1 = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f_1) = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f_2) = f_2$
$\qquad \shortparallel$
$id_A \circ f_1 = f_2$

ψ-сюръект.: $\forall g : C \to B \ \exists f : C \to A \quad \psi(f) = g$

$\varphi \circ ? = g$ пусть $f = \varphi^{-1} \circ g : C \to A$

$\psi(f) = \varphi \circ f = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ g) = (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ g = id_B \circ g = g$

(2) $A \times B \overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} B \times A$ | $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$

$\quad \Psi \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Psi \qquad\qquad \Psi$

$(a, b) \mapsto (b, a)$ | $(a, (b, c)) \mapsto ((a, b), c)$

(4) хотим ψ, т.ч. $\underbrace{(A\times B)^C}_{f} \overset{\psi}{\sim} \underline{A^C \times B^C}$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, dashed, bend right, "\pi_1\circ f"'] \arrow[d, "f"] \arrow[d, bend right, "f_1"'] \arrow[d, bend left, "f_2"] \arrow[dr, dashed, bend left, "\pi_2\circ f"] & \\
A & A\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

$\pi_1(a,b)=a$

$\pi_2(a,b)=b$

пусть $\psi(f) = (\pi_1\circ f,\ \pi_2\circ f)$

ψ-инъекция : ?

$$f_1 \neq f_2 \Rightarrow \psi(f_1)\neq\psi(f_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c_0 \in C$$

$$(a_1,b_1) = f_1(c_0) \neq f_2(c_0) = (a_2,b_2)$$

Два случая:

$$a_1\neq a_2 \quad \vee \quad b_1\neq b_2$$

$$\underset{(\pi_1\circ f_1)(c_0)}{\underset{\parallel}{\pi_1(f_1(c_0))}} = a_1 \neq a_2 = \underset{(\pi_1\circ f_2)(c_0)}{\underset{\parallel}{\pi_1(f_2(c_0))}} \qquad \text{аналогично}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_1\circ f_1 \neq \pi_1\circ f_2$$

$$\Downarrow$$

$$\psi(f_1)\neq\psi(f_2)$$

ψ - сюръект.:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[d, "?f"] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & A\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$g_1(c) = \pi_1(g_1(c), g_2(c)) =$$
$$= \pi_1(f(c)) =$$
$$= (\pi_1\circ f)(c)$$

$$g_1 = \pi_1\circ f$$

$$\psi(f_1) = (\pi_1\circ f,\ \pi_2\circ f)$$
$\parallel$ хочу
$$(g_1, g_2)$$

положим: $f: C \to A\times B$

$$f(c) = (g_1(c),\ g_2(c))$$

$\psi : f \mapsto \psi(f)$

$f : A \to C^B$ | положим $\psi(f) : A \times B \to C$

$$\boxed{\psi(f)(a,b) = (f(a))(b)}$$

ψ - инъект. : $f_1 \neq f_2 \overset{?}{\Rightarrow} \psi(f_1) \neq \psi(f_2)$

$\Downarrow$

$\exists a_0 \in A \quad f_1(a_0) \neq f_2(a_0) : B \to C$

$\exists a_0 \in A \quad \exists b_0 \in B \quad (f_1(a_0))(b_0) \neq (f_2(a_0))(b_0)$

$$\underset{(\psi(f_1))(a_0,b_0)}{\overset{\parallel}{}} \qquad \underset{(\psi(f_2))(a_0,b_0)}{\overset{\parallel}{}}$$

$\psi(f_1) \neq \psi(f_2)$

ψ - сюръект :

$\forall g : A \times B \to C$

$\exists f : A \to C^B$

$\psi(f) = g$

дано: $g : A \times B \to C$

как построить $f : A \to C^B$ т.ч.

$\forall a, b$

$g(a,b) = (\psi(f))(a,b) = (f(a))(b)$

Пусть : $f(a) = (b' \mapsto g(a,b')) : B \to C$

$(f(a))(b) = (b' \mapsto g(a,b'))(b) = g(a,b)$

„каррируем" $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ - дано $\qquad (+)(0) = id_{\mathbb{N}}$

$(+) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ - хотим

пусть $(+)(k) = (n \mapsto k+n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$((+)(k))(m) = k+m = +(k,m)$

Индикаторные (характеристические) функции

Пусть фиксировано множество X $\qquad \underline{2} = \{0, 1\}$

Тогда для каждого $A \subseteq X$ определим

функцию $1_A : X \to \{0, 1\}$

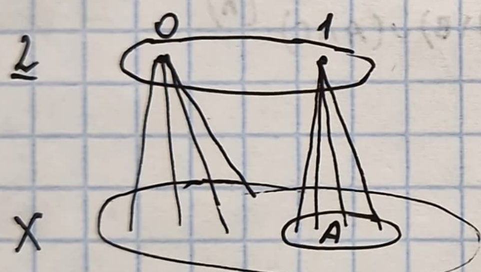
Опр: $\underline{n} = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$

$\underline{0} = \varnothing$

$\underline{1} = \{0\} \qquad \underline{2} = \{0, 1\} \qquad \underline{3} = \{0, 1, 2\}$

$\forall n \in X \quad 1_A(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } n \in A \\ 0, \text{ если } n \notin A \end{cases}$

индикатор подмн. A



Лемма 1: $\forall A, B \subseteq X \quad (A = B \Leftrightarrow 1_A = 1_B)$

Теорема 2: $\forall X \quad P(X) \sim \underline{2}^X$

Док-во: $\psi : P(X) \to \underline{2}^X$

пусть $\psi(A) = 1_A$

ψ сюръект: $\forall g : X \to \underline{2} \ \exists A \ g = \psi(A) = 1_A$

пусть $A = \{n \in X \mid g(n) = 1\} = g^{-1}[\{1\}]$

$\forall n \in X \quad 1_A(n) = 1 \Leftrightarrow n \in A \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} g(n) = 1 \qquad 1_A = g$

ψ инъект:

$\psi(A) = \psi(B) \Rightarrow 1_A = 1_B$

$\overset{Л1}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{l} \forall n \in X \ (1_A(n) = 1_B(n)) \\ \forall n \in X \ (n \in A \Leftrightarrow n \in B) \end{array} \right.$

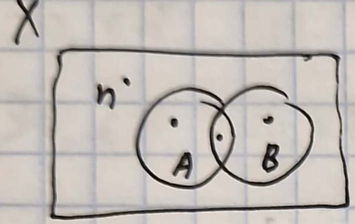
$\Rightarrow A = B$

Лемма 3. $\forall X \quad \forall A, B \subseteq X \quad \forall n \in X$

(1) $1_{A \cap B}(n) = 1_A(n) \cdot 1_B(n)$

(2) $1_{\bar{A}}(n) = 1 - 1_A(n)$

(3) $1_{A \cup B}(n) = 1_A(n) + 1_B(n) - 1_A(n) \cdot 1_B(n)$



Пример: док-ть: $\forall A, B, C \quad A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

док-во: $X := A \cup B \cup C$; $1_A^2 = 1_A$; $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

по Л1, достаточно $1_{A \setminus (B \setminus C)}(n) = 1_{(A \setminus B) \cup (A \cap C)}(n)$

$$1_{A \setminus (B \setminus C)} = 1_A \cdot (1 - 1_{B \setminus C}) =$$
$$= 1_A \cdot (1 - 1_B(1 - 1_C)) =$$
$$= 1_A - 1_A \cdot 1_B + 1_A \cdot 1_B \cdot 1_C$$

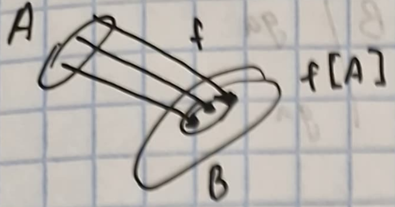
$$1_{(A \setminus B) \cup (A \cap C)} = 1_{A \setminus B} + 1_{A \cap C} - 1_{(A \setminus B)} \cdot 1_{A \cap C} =$$
$$= 1_A(1 - 1_B) + 1_A \cdot 1_C - 1_A(1 - 1_B) \cdot 1_A \cdot 1_C =$$
$$= 1_A - 1_A \cdot 1_B + \cancel{1_A \cdot 1_C} - \cancel{1_A^2 \cdot 1_C} + 1_A^2 \cdot 1_B \cdot 1_C =$$
$$= 1_A - 1_A \cdot 1_B + 1_A \cdot 1_B \cdot 1_C$$

ч.т.д.

Опр: $A \overset{f}{\lesssim} B \; :\Leftrightarrow \; f_{\text{инъекция}} : A \to B$

$A \lesssim B \; \Leftrightarrow \; \exists f \; A \overset{f}{\lesssim} B$

A вкладывается в B || смысл: в A не больше эл-тов, чем в B



Лемма 4. $\forall A, B, C$

(0) $A \subseteq B \Rightarrow A \precsim B$

(1) $A \precsim A$

(2) $A \precsim B \wedge B \precsim C \Rightarrow A \precsim C$

(3) $A \sim B \Rightarrow A \precsim B \wedge B \precsim A$

(4) $A \precsim B \Leftrightarrow \exists D \, (D \subseteq B \wedge A \sim D)$

Док-во: (0) $A \subseteq B$; $\quad id_A : A \to A$

$: A \to B \quad A \overset{id_A}{\precsim} B$

(1) следует из (0)

(2) $A \xrightarrow[\text{инъек.}]{f} B \xrightarrow[\text{инъек.}]{g} C$, $\quad A \xrightarrow[\text{инъект.}]{g \circ f} C$

(3) $A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\sim}} B \qquad A \overset{f}{\precsim} B, \quad B \overset{f^{-1}}{\precsim} A$

(4) „$\Leftarrow$" $\quad A \sim D \quad \wedge \quad D \precsim B$

(0)

$A \precsim D \qquad D \precsim B$

(2)

$A \precsim B$

„$\Rightarrow$" пусть $A \overset{f}{\precsim} B$ $\quad$ пусть $D := f[A]$

Тогда $f : A \xrightarrow{\text{инъект.}} f[A] = f[\operatorname{dom} f] = \operatorname{rng} f$

опр: $A \overset{f}{\sim} f[A] \subseteq B$

интуиция: (1) $A \lesssim B \wedge B \lesssim A \Rightarrow A \sim B$ | да

(2) $A \lesssim B \vee B \lesssim A$ | да

(1) – Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна

Теорема 5 (т. КШБ) $\forall A, B$

$$(A \lesssim B \wedge B \lesssim A) \Rightarrow A \sim B$$

Было: $\forall A \quad P(A) \nsim A$

Очевидно: $\forall A \quad A \lesssim P(A)$

$$f: x \mapsto \{x\}, \quad x \in A,\ \{x\} \in P(A)$$

$\xRightarrow{\text{т. КШБ}}$ **Следствие 6** $\forall A \quad P(A) \not\lesssim A$

Опр: $A \precnsim B \Leftrightarrow A \lesssim B \wedge A \nsim B$

$$\forall A \precnsim P(A) \precnsim P(P(A)) \precnsim P(P(P(A)))$$