Семинар 26

1 Повторение

Определение квадратичной формы и матрицы квадратичной формы. Связь билинейной и квадратичной форм. Формула для преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса.

Лемма о том, что ранг матрицы не меняется при умножении на невырожденную матрицу. Утверждение об инвариантности ранга квадратичной формы.

Положительная (отрицательная) определенность квадратичной формы, знакопеременные квадратичные формы, критерий Сильвестра (формулировка) и его следствие.

Канонический и нормальный вид квадратичных форм.

2 Задачи

Пусть F – поле и X – некоторое множество. Рассмотрим множество F^X всех функций $X \to F$. Множество F^X является векторным пространством над F относительно поточечного сложения и умножения функций:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

при $f, g \in F^X$, $\lambda \in F$ и $x \in X$.

Задача 1. Пусть F – поле и X – некоторое множество.

1. Если $|X| = m \in \mathbb{N}_0$, то $\dim F^X = m$.
2. Если $|X| = \infty$, то $\dim F^X = \infty$.

Пусть $f_1, \ldots, f_n \in F^X$. Пусть для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ выполнено

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0. \qquad (*)$$

Другими словами, для каждого $x \in X$ мы получаем однородное линейное уравнение на $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x) = 0.$$

В случае, когда X бесконечно – это бесконечная ОСЛУ.

Как для заданных $f_1, \dots, f_n \in F^X$ выяснить их линейную (не)зависимость? В общих чертах можно выделить два подхода.

1. Подставляя различные x в уравнение $(*)$, получить конечную ОСЛУ с единственным нулевым решением.

2. Применять различные функциональные преобразования к уравнению $(*)$. Например, для $F = \mathbb{R}$ и $X \subseteq \mathbb{R}$, можно брать производные, определённые интегралы и т. п.

Когда X бесконечно, то "наугад взятая" система функций $f_1, \dots, f_n$ скорее всего будет линейно независима, так как на коэффициенты линейной зависимости накладывается бесконечная ОСЛУ. Для того, чтобы функции $f_1, \dots, f_n$ были линейно зависимы, нужно, чтобы эти функции как-то выражались друг через друга.

Пример 1. Система $1,\ \cos(2x),\ \sin^2 x$ функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линейна зависима, так как

$$1 - \cos(2x) - 2\sin^2 x = 0.$$

Задача 2. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ системы функций

$$\sin x,\ \cos x.$$

Задача 3. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ системы функций

$$\sin x,\ \sin(2x),\ \dots,\ \sin(nx).$$

Задача 4. Доказать, что в пространстве функций одной вещественной переменной векторы $f_1, \dots, f_n$ линейно независимы, если существуют числа $a_1, \dots, a_n$ такие, что $\det(f_i(a_j)) \neq 0$.

Задача 5. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – попарно различные вещественные числа. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций:

1. $e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \dots,\ e^{\alpha_n x}$;

2. $(1 - \alpha_1 x)^{-1},\ \dots,\ (1 - \alpha_n x)^{-1}$.

Пусть F – поле и V – векторное пространство над F. Отображение $f : V \times V \to F$ называется *билинейным* (*билинейной формой на* V), если

$$f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x, z) + \mu f(y, z) \text{ и } f(x, \lambda y + \mu z) = \lambda f(x, y) + \mu f(x, z)$$

для всех $x, y, z \in V$ и $\lambda, \mu \in F$.

Задача 6. Пусть F – поле, $n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями на $\mathrm{M}_n(F)$:

1. $f(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$;

2. $f(A,B) = \det(AB)$.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис V и f – билинейная форма на V. *Матрицей формы f в базисе e* называется матрица

$$B = (f(e_i, e_j)).$$

Пусть $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ – ещё один базис F, и B' – матрица формы f в базисе e'. Пусть C – матрица перехода от e к e'. Тогда

$$B' = C^T BC.$$

Задача 7. Найти матрицу билинейной функции f в новом базисе, если заданы её матрица в старом базисе и формулы перехода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} e'_1 &= & e_1 - e_2 \\ e'_2 &= & e_1 + e_3 \\ e'_3 &= & e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис V, f – билинейная форма на V и $B = (b_{ij})$ – матрица формы f в базисе e. Рассмотрим два вектора $u, v \in V$ со столбцами координат x, y в базисе e соответственно. Тогда

$$f(u,v) = x^T By.$$

То есть в координатах форма f выглядит следующим образом:

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j.$$

Задача 8. Пусть билинейная функция f задана в некотором базисе матрицей F. Найти $f(x,y)$, если:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x = (1,0,3) \\ y = (-1,2,-4) \end{matrix}.$$