Homework 7.

#4. Решить

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{\mathrm{III}-2\mathrm{I},\ \mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_2 = 2k$, тогда $x_3 = \frac{7 \cdot 2k}{2} = 7k$

$x_1 = 3x_3 - 4x_2 = 21k - 8k = 13k$

$\boxed{\text{Ответ: } (13k,\ 2k,\ 7k),\ k \in \mathbb{Z}.}$

#5. LU-разложение

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+\frac{3}{4}\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -\frac{11}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} \end{pmatrix} = U}$$

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

получили L, беря коэф. при эл. преобразованиях с обратным знаком

#6. Скелетное разложение

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I},\ \mathrm{IV}+\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}-5\mathrm{III}]{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{36}\right)]{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}-4\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = C$$

$$B=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 10 & 4\\ 2 & 8\\ -2 & -8\end{pmatrix}$$

$$A = BC = \boxed{\begin{pmatrix}10 & 4\\ 10 & 4\\ 2 & 8\\ -2 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}$$

#2. Вычислить ранг

$$\begin{pmatrix}24 & 19 & 36 & 72 & -38\\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80\\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118\\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-\text{I}-\text{II},\ \text{II}-2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix}24 & 19 & 36 & 72 & -38\\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0\\ -2 & -4 & -2 & -6 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}\leftrightarrow\text{II}]{\text{I}-24\,\text{II},\ \text{IV}+2\,\text{II}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 29 & -12 & 0 & -58\\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\boxed{rk = 3. \text{ - Answer}}$

#1. Найти ранг при всех λ

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}\leftrightarrow\text{III}]{\text{II}-2\,\text{III},\ \text{I}-\text{III}} \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & 12+\lambda & 3\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\frac{\lambda-10}{21}\text{II}} \begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & -21 & 3\\ 0 & 0 & \underbrace{\frac{(\lambda+5)(\lambda-3)}{21}}_{1} & \underbrace{\frac{\lambda-3}{7}}_{2}\end{pmatrix}$$

① $5+\frac{(12+\lambda)(\lambda-10)}{21} = \frac{105+\lambda^2+2\lambda-120}{21} = \frac{\lambda^2+2\lambda-15}{21} = \frac{(\lambda+5)(\lambda-3)}{21}$ ①

② $1+\frac{3\cdot(\lambda-10)}{21} = \frac{7+\lambda-10}{7} = \frac{\lambda-3}{7}$

III строка обнуляется при $\lambda=3$, тогда $Rg=2$

$\boxed{\text{Ответ: при } \lambda=3 \quad Rg=2, \text{ при } \lambda\neq 3 \quad Rg=3.}$

#3. Найти λ для выраж. b через a_1, a_2, a_3

$a_1=(3, 2, 5)$ $\qquad b=(1, 3, 5)$

$$\begin{cases} x\cdot 3+2y+5z=1\\ 2x+4y+7z=3\\ 5x+7y+\lambda\cdot z=5\end{cases}$$

$a_2=(2, 4, 7)$

$a_3=(5, c, \lambda)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & \lambda & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} - \frac{5}{3}\text{I}]{\text{II} - \frac{2}{3}\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8/3 & 8/3 & 7/3 \\ 0 & 11/3 & \lambda - \frac{25}{3} & 10/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \cdot 3]{\text{II} \cdot 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 11 & 3\lambda - 25 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - \frac{11}{8}\text{II}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3\lambda - 36 & 3/8 \end{array}\right)$$

$$z \cdot (3\lambda - 36) = \frac{3}{8} \quad \Big| : 3$$

$$z(\lambda - 12) = \frac{1}{8}$$

$$z = \frac{1}{8(\lambda - 12)}$$ $\Rightarrow$ b линейно выражается через a_1, a_2, a_3 при $\forall b$, кроме $b = 12$.