Seminar 19, 13.02.24 - Beldiev

#58.1. (в) $A_n \subset S_n$

$\sigma \in A_n \overset{?}{\Rightarrow} \tau^{-1}\sigma\tau \in A$

$sgn(\tau^{-1}\sigma\tau) = sgn(\tau^{-1}) \cdot sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau) = sgn(\sigma) = 1$

(г) $V_4 \subset S_4$

$V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\tau^{-1}(12)(34)\tau \overset{?}{\in} V_4$

Пусть $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} = (a_1 a_2)(a_3 a_4) \in V_4$

Сопряжённость

G; $a, y \in G$; $a \sim y^{-1}ay$

Транзитивность: $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

□ $b = y^{-1}ay$, $c = x^{-1}bx$

$c = x^{-1}bx = x^{-1}y^{-1}ayx = (yx)^{-1}a(yx)$ ■

$a \in G \to \{x^{-1}ax\}$ – класс сопряжённости элемента a

$a = e \to x^{-1}ex = e$

Когда a сопряжён только самому себе?

$\forall x \in G: x^{-1}ax = a \Leftrightarrow ax = xa$

HSE

S_n ; $\sigma \in S_n$

$\sigma = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)(10)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \\ a_1 & a_2 & & a_9 & a_{10} \end{pmatrix} (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)(10) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & a_9 & a_{10} \\ 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \end{pmatrix} = (a_1 a_2 a_3 a_4)(a_5 a_6 a_7) \ldots$$

S_3 : id

(12) $(123)(132)$

(13) (23)

$\{id\}$, S_3, $\{id, (123), (132)\} = A_3 \cong \mathbb{Z}_3$

S_4 :	ч. id	1	24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1
	ч. $(12)(34)$	3	
	ч. $(123)(4)$	8	
	ч. (1234)	6	
	ч. $(12)(3)(4)$	6	

(1) $(123)(4)$ берём : $1+8=9$

$1+8+3=12$

$id, (12)(34), (123)(4) - A_4 \subset S_4$

(2) $1 + \overset{?}{3} + \overset{?}{6} + \overset{?}{6}$

$1+6=7$ – bad (не можем добрать до делителя 24)

$1+3=4$

$id, (12)(34) - V_4 \subset S_4$

(3) $\{id\} \subset S_4$

(4) $S_4 \subset S_4$

hello !!!

$A_4 \ (\subset S_4)$

$|A_4| = 12$

id

$(12)(34)$ – класс сопр-сти

$(123)(4)$ – два класса сопр-сти

$\left[\begin{array}{l|l} (12)(34) \sim (13)(24) \text{ в } S_4: & (12)(34) \sim (13)(24) \text{ в } A_4: \\ \exists \tau \in S_4 : \tau^{-1}(12)(34)\tau = (13)(24) & \exists \tau \in A_4 : \tau^{-1}(12)(34)\tau = (13)(24) \end{array} \right]$

1 2 3 4

$1+4=5$ – bad
$1+3=4$

в A_4: $\{(123), (243), (134), (142)\}$

$\{(132), (234), (143), (124)\}$

Факт природы: если $n \geq 5$, то в A_n нет нетрив. норм. подгрупп.

$\underset{\text{норм}}{K \subset} \underset{\text{норм}}{H \subset} G$

$K \triangleleft H : \forall h \in H \ \forall k \in K \quad h^{-1}kh \in K$

$H \triangleleft G : \forall g \in G \ \forall h \in H \quad g^{-1}hg \in H$

(?) $K \triangleleft G : \forall g \in G \ \forall k \in K \quad g^{-1}kg \in K$ – не всегда

$\{id, (12)(34)\} \subset V_4 \subset S_4$

$V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

HSE

#58.11

a) $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$

$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$

b) $Z(G) \subset G$

$Z(G) = \{g \in G : ga = ag \ \forall a \in G\}$

$g_1, g_2 \in Z(G) \overset{?}{\Rightarrow} g_1 \cdot g_2 \in Z(G)$

$(g_1 g_2) a = g_1 a g_2 = a (g_1 g_2)$

$g \in Z(G)$: класс сопр-сти g – ?

$x^{-1} g x = x^{-1} x g = g$ Answer: это только сам g.

#58.20.

a) $Z(S_n) = id \quad (n \geqslant 3 \text{ or } n = 1)$

$n = 2$: $S_n = \{id, (12)\} \cong \mathbb{Z}_2 \Rightarrow Z(S_2) = S_2$

b) $Z(A_n)$ – ?

$A_1 = \{id\}$

$A_2 = \{id\}$

$A_3 = \{id, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$

$A_n, \ n \geqslant 4 \quad Z(A_n) = \{id\}$