Семинар 26, 04.04.24

Пусть F - поле, X - нек. мн-во.

Рассмотрим мн-во F^X всех функций $X \to F$.

F^X является векторным пространством над F относительно поточечного сложения и умножения на скаляр:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad$ $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

① $|X| = m \Rightarrow \dim F^X = m$

$|X| = \infty \Rightarrow \dim F^X = \infty$

□ $\forall x_0 \in X$ обозначим $1\!\!1_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$

Функции $1\!\!1_{x_0}$ при $x_0 \in X$ л/н. : $\sum\limits_{x_0 \in X} \lambda_{x_0} \cdot 1\!\!1_{x_0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подставляем $x \in X$, получаем $\lambda_x = 0$.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\} \Rightarrow f = \sum\limits_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot 1\!\!1_{x_i} \Rightarrow 1\!\!1_{x_1}, \dots, 1\!\!1_{x_m}$ - базис

$\Rightarrow \dim F^X = m$.

У нас имеется бесконечный набор л/н функций $1\!\!1_{x_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim F^X = \infty$. ■

Пусть $f_1, \dots, f_n \in F^X$. Пусть для нек. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ выполнено

$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0 \quad (*)$

Другими словами, $\forall x \in X$ выполнено $\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$ - лин. однородн. ур-ие на $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. При $|X| = \infty$ получаем бесконечную ОСЛУ.

Как для заданных $f_1, \dots, f_n$ выяснить их л/н? В общих чертах:

1) Подставлять различные $x \in X$ в $(*)$, и получить конечную ОСЛУ, из которой следует $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2) Применять функциональные преобразования к $(*)$. Например, в случае $F = \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ брать производные, опред. интегралы и т.д.

Когда X бесконечно, то „наугад взятая" система функций $f_1, \dots, f_n$ будет, скорее всего, л/н, т.к. на коэфф.-ты наклад. беск. ОСЛУ.

Пример: Функции 1, $\cos 2x$, $\sin^2 x$

л/з: $1 \cdot 1 + (-1) \cdot \cos 2x - 2 \cdot \sin^2 x = 0$.

② л/н функций $\sin x$, $\cos x$.

$\lambda \sin x + \mu \cos x = 0$

$x = 0 \Rightarrow \mu = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda = 0$

③ л/н функций $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin(nx)$

Вычислим $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin lx \, dx$ при $k, l \in \mathbb{N}$

$I = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-l)x - \cos(k+l)x) \, dx$

При $r \in \mathbb{Z}$ $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos rx \, dx$

Если $r = 0$, то $I = 2\pi$

Если $r \neq 0$, то $I \overset{t = rx}{=} \frac{1}{r} \int\limits_{-r\pi}^{r\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{r} \sin t \Big|_{-r\pi}^{r\pi} = \frac{1}{r}(0 - 0) = 0$

$$I = \begin{cases} \pi - 0 = \pi, & k = l \\ 0 - 0 = 0, & k \neq l \end{cases}$$

$\lambda_1 \sin x + \ldots + \lambda_n \sin x = 0$

Интегрируем обе части: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cdot \sin kx\, dx$ при $1 \leq k \leq n \Rightarrow \pi \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$.

④ В пространстве функций на $\mathbb{R}$ если $\exists a_1, \ldots, a_n : \det(f_i(a_j)) \neq 0$, то $f_1, \ldots, f_n$ л/н.

□ Пусть $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$.

Подставляем a_j, получаем $\lambda_1 f_1(a_j) + \ldots + \lambda_n f_n(a_j) = 0$ – ОСЛУ на $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с матрицей $(f_i(a_j)) \Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$

$A\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = A^{-1} \cdot 0 = 0$ ■

⑤ Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ – попарно различны. Док-ть л/н функций.

1) $e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$

$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \ldots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$

I) Подставим $x = 0, 1, \ldots, n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$

$\lambda_1 e^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n e^{\alpha_n} = 0$

$\ldots$

$\lambda_1 e^{(n-1)\alpha_1} + \ldots + \lambda_n e^{(n-1)\alpha_n} = 0$

Это ОСЛУ с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ e^{\alpha_1} & \ldots & e^{\alpha_n} \\ \ldots & & \ldots \\ (e^{\alpha_1})^{n-1} & \ldots & (e^{\alpha_n})^{n-1} \end{pmatrix}$ – её определитель – это опр. Вандермонда $W(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}) \neq 0$, т.к. e^{α_i} попарно различны $\overset{④}{\Rightarrow}$ л/н.

II) Вычисляем k-ую производную и подставляем $x=0$.

$k=0: \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$

$k=1: \ \alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = 0$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$k=n-1: \ \alpha_1^{n-1}\lambda_1 + \ldots + \alpha_n^{n-1}\lambda_n = 0$

Получаем ОСЛУ с м-цей $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Дальше аналогично.

2) $(1-\alpha_1 x)^{-1}, \ldots, (1-\alpha_n x)^{-1}$

Обозначим $\alpha_0 = 0$ и будем считать, что у нас есть функция $(1-\alpha_0 x)^{-1} = 1$

$\lambda_0(1-\alpha_0 x)^{-1} + \ldots + \lambda_n(1-\alpha_n x)^{-1} = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\}$

Домножим равенство на $(1-\alpha_1 x) \cdot \ldots \cdot (1-\alpha_n x) \Rightarrow$

$\lambda_0(1-\alpha_1 x) \cdot \ldots \cdot (1-\alpha_n x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \prod\limits_{i \neq j} (1-\alpha_j x) = 0$

непрерывная функция, равная нулю везде, кроме точек $\frac{1}{\alpha_i} \Rightarrow$ она равна 0 везде на $\mathbb{R}$.

Подставляем $x = \frac{1}{\alpha_k} \Rightarrow \lambda_0 + \lambda_k \cdot \underbrace{\prod\limits_{j \neq k}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_k}\right)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_k = 0$ при $1 \leq k \leq n$

Возвращаемся к изначальному равенству $\Rightarrow \lambda_0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$.

Пусть F - поле, V - векторное пространство над F.

Отношение $f: V \times V \to F$ наз. билинейным, если:

1) $f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x,z) + \mu f(y,z)$

2) $f(x, \lambda y + \mu z) = \lambda f(x,y) + \mu f(x,z)$ $\quad \forall \lambda, \mu \in F$ и $x, y, z \in V$

Пусть $A \in M_n(F)$. **Следом** A наз. число $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA$.

Свойства: $tr(A+B) = trA + rtB$

$tr(\lambda A) = \lambda \cdot trA$ при $\lambda \in F$.

⑥ Пусть F – поле, $n \in \mathbb{N}$; $A, B \in M_n(F)$. Какие из отнош. являются билинейными?

1) $f(A,B) = tr(AB)$

2) $f(A,B) = det(AB)$

1) $f(A+C, B) = tr((A+C)B) = tr(AB+CB) = tr(AB) + tr(CB) =$

$= f(A,B) + f(C,B)$ Справа аналогично $\Rightarrow f$ яв. БФ.

2) $f(A+C, B) = det((A+C)B) = det(AB+CB) \neq det(AB) + det(CB)$

при $n \geq 2$.

Нет. При $n=1$ да

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис в V.

Матрицей БФ f в базисе e наз. матрица $B = (f(e_i, e_j))$

Если $e' = (e_1', \ldots, e_n')$ и C – м-ца перехода от e к e', то м-ца f в базисе e' равна $B' = C^T \cdot B \cdot C$.

Если $u, v \in V$ и их коорд. равны в e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то $f(u,v) = x^T \cdot B \cdot y$. В частности, любая БФ в коорд. имеет вид: $f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$, где $b_{ij} = f(e_i, e_j)$.

⑦ Найти м-цу БФ в новом базисе, если дана её м-ца в старом базисе и заданы формулы перехода.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 \\ e_2' = e_1 + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B' = C^T \cdot B \cdot C = \ldots$$

8 Пусть БФ f задана в нек. базисе м-цей F. Найти $f(x,y)$, если $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad x = (1, 0, 3)$, $y = (-1, 2, -4)$

$$f(x,y) = (1, 0, 3) \cdot F \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \ldots$$