Лекция 18, 02.02.24

Определённый интеграл

$f(x)$, $[a;b]$

Опр: Число I наз. опр. инт. $f(x)$ на $[a;b]$ $I=\int_a^b f(x)\,dx$, если

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta : \forall \tau$ - разб. $[a;b]$: $d(\tau)<\delta$ $\forall$разметки $\{\xi_i\}$

$|\sigma_\tau(f)-I|<\varepsilon$

$\tau=\{[x_{i-1};x_i]\}_{i=1}^n \qquad \{\xi_i\}_{i=1}^n \qquad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

$\sigma_\tau(f)=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$

$\boxed{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sup\limits_{k\geq n} x_k}_{y_n \searrow} = A \qquad \boxed{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k = B$

x_n сход $\iff A=B$

Верхние и нижние суммы Дарбу

Разбиение τ отр. $[a;b]$

$s_\tau := \sum\limits_{i=1}^n m_i\,\Delta x_i \qquad m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$

нижняя сумма Дарбу

$S_\tau := \sum\limits_{i=1}^n M_i\,\Delta x_i \qquad M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$

верхняя сумма Дарбу

Теорема (необх. условие интегрир. $f(x)$ на $[a;b]$):

Если $f(x)$ интегр. на $[a;b]$, то $f(x)$ огр. на $[a;b]$.

Док-во: П-т $f(x)$ не огр. на $[a;b]$, но интегр.

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \delta \quad \forall \tau : d(\tau) < \delta \quad \forall \xi :$$

$$|\sigma_\tau(f) - I| < 1$$

$$|\sigma_\tau(f)| < |I| + 1$$

зафиксируем τ : $f(x)$ не огр. на каком-то $[x_{i-1}; x_i]$

Пусть на $[x_0; x_1]$

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1 < |I| + 1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i}_{const}$$

Зафиксируем $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$. Тогда

$$\forall M \quad \exists \xi_1 \in [x_0; x_1] : |f(\xi_1)| > M$$

С другой стороны $|f(\xi_1)| < \frac{const}{\Delta x_1}$ (ш)

Свойства сумм Дарбу:

$\boxed{1}$ Если $f(x)$ огр., то s_τ и S_τ опред. $\forall \tau$.

Опр: τ' наз. измельчением τ ($\tau' \succ \tau$), если $\tau' = \{[x'_{i-1}; x'_i]\}_{i=1}^{n}$

$$\forall j \quad \exists i : x_j = x'_i \qquad \tau = \{[x_{j-1}; x_j]\}_{j=1}^{k}$$

$\boxed{2}$ Если $\tau' \succ \tau$: $S_{\tau'} \leq S_\tau$

$$s_{\tau'} \geq s_\tau$$

Док-во: для нижней

$$s_{\tau'} = \sum_{i=1}^{n} m'_i \Delta x'_i \qquad s_\tau = \sum_{j=1}^{k} m_j \Delta x_j$$

$$\forall j \quad \exists n_{j-1}, n_j \quad m_j \Delta x_j \leq \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} m'_i \Delta x'_i \quad ; \quad m_j \leq m'_i \qquad n_{j-1} < i \leq n_j$$

и.т.д.

Следствие: $\forall \tau_1$ и τ_2 : $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$.

Док-во: Построим τ' по точкам τ_1 и τ_2

$\tau' \succ \tau_1, \tau_2$

$$s_{\tau_1} \leq \underset{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}{\underset{\shortparallel}{s_{\tau'}}} \leq \underset{\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}{\underset{\shortparallel}{S_{\tau'}}} \leq S_{\tau_2}$$

ч.т.д.

$\boxed{3}$ $s_\tau = \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau$ $\qquad S_\tau = \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau$

Док-во: $S_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $\quad M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$ $\qquad \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

Опр: Верхний интеграл Дарбу $I^* = \inf\limits_{\tau} S_\tau$

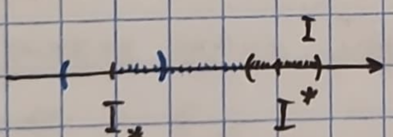
Нижний интеграл Дарбу $I_* = \sup\limits_{\tau} s_\tau$

Замечание: $I_* \leq I^*$

Теорема: Огр. $f(x)$ интегрир. на $[a;b] \Leftrightarrow I_* = I^*$.

Док-во: $\Rightarrow$ ПП $I_* < I^*$ и $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall \tau \ d(\tau) < \delta \ \forall \xi$

$|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$



Возьмём $\varepsilon = \dfrac{I^* - I_*}{7}$.

Возьмём наиболее удалённый от I интеграл. Пусть I_*.

$\rho(I_*;$ границу $U_\varepsilon(I)) > \underbrace{\frac{1}{4}|I^* - I_*|}_{= \varepsilon_1}$

$I_* = \sup\limits_{\tau} s_\tau$

Выберем $s_\tau : |s_\tau - I_*| < \varepsilon_1$ по п.3. $\exists$ разметка τ':

$$|\sigma_{\tau'} - s_{\tau'}| < \varepsilon_1$$

Измельчим $\tau : d(\tau') < \delta$ $s_\tau \le s_{\tau'} \to \sigma_\tau$

$$\Downarrow$$

$$|\sigma_{\tau'} - I| > \varepsilon$$

Теорема: Если $f(x)$ n раз дифф. в точке x_0 и $f(x) = P_n(x) + \bar{o}((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, то $P_n(x) = T_n(x)$

Док-во: $f(x) = T_n(x) + \bar{o}((x-x_0)^n)$

$$P_n(x) - T_n(x) = \bar{o}((x-x_0)^n)$$

$$\Downarrow$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$P_n(x) \equiv T_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

Перейдём к $\lim\limits_{x \to x_0}$ $\Rightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$

Поделим $P_n(x)$ на $(x-x_0)$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} - a_k \right)(x-x_0)^{k-1} = \bar{o}((x-x_0)^{n-1})$$

ч.т.д.