Лекция 25, 20.03.24

Примеры подпространств

1) Лин. пространства $C[a;b]$ - непр. функции на отр. $[a;b]$

Подпространство $P[a;b]$ - многочлены на $[a;b]$ всех степ. от x.

2) Подпространство решений ОСЛАУ $Ax=0$ с коэфф. из поля F
$(x \in F^n,\ A \in M_n(F))$

- подпространство в $\mathbb{F}^n$

3) В $\forall$ пр-ве V есть $\{0\}$ - трив. подпр-во.

4) В V_3 - любые плоскости и прямые, проходящие через O.

Опр: Пусть в V задана система векторов $a_1, \dots, a_k$ (необяз. ЛНЗ).
Тогда мн-во $L(a_1, \dots, a_k) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in F\}$ наз. <u>линейной оболочкой системы векторов</u> $a_1, \dots, a_k$

(множество всевозможных лин. комбинаций векторов $a_1, \dots, a_k$).

Замечание: $L(a_1, \dots, a_k)$ — подпространство в V $\forall$ сист. $a_1, \dots, a_k$.

Пример: $L\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$

Обознач: $L(a_1, \dots, a_k)$ или $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$

Опр: Рангом системы векторов $a_1, \dots, a_k$ в ЛП наз. размерность лин. оболочки этой системы: $Rg(a_1, \dots, a_k) = \dim L(a_1, \dots, a_k)$.

Как, Вася, найти ранг системы векторов, а??

Вася, надо использовать изоморфизм $V \mapsto F^n$ при фикс. базисе. То есть фиксировать базис в V и записать матрицу координат векторов $a_1, \dots, a_k$ в этом базисе. Тогда ранг этой матрицы равен рангу системы векторов.

Пример: В $\mathbb{R}_n[x]$

$f_1 = 1 + x^2$

$f_2 = 1$

$f_3 = x^2$

Зафикс. базис $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ $\Rightarrow$

$f_1 \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

$f_2 \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

$f_3 \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

$$Rg(f_1, f_2, f_3) = Rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\\vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

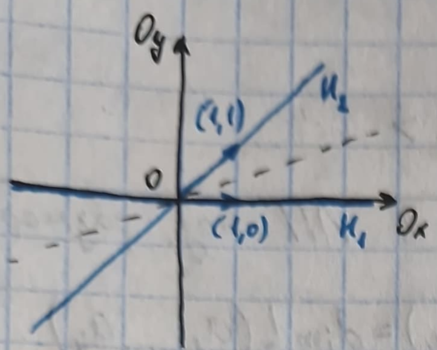
Сумма и пересечение подпространств.

Пусть H_1 и H_2 — лин. подпространство в ЛП V

Тогда $H_1 \cap H_2$ — тоже явл. подпространством

Замечание: $H_1 \cup H_2$ вообще говоря не явл. подпространством.

Пример: в $\mathbb{R}^2$



Здесь $H_1 \cup H_2$ – не подпр-во.

Опр: $H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in H_1, \ x_2 \in H_2\}$ наз. <u>суммой подпр-в</u>.

Замечание: $H_1 + H_2$ – всегда лин. подпр-во в V (если H_1 и H_2 – подпр-ства)

Утв: Пусть H_1 и H_2 – подпространства в V, тогда

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

□ Возьмём базис $H_1 \cap H_2$ и дополним его до базисов H_1 и H_2. Пусть $\dim(H_1 \cap H_2) = r$, $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$.

Тогда $\underbrace{e_1, \ldots, e_r}_{\text{базис } H_1 \cap H_2}, \underbrace{v_1, \ldots, v_{m-r}}_{\text{доп. до базиса } H_1}, \underbrace{w_1, \ldots, w_{n-r}}_{\text{доп. до базиса } H_2}$ (*)

(*) – это базис $H_1 + H_2$, т.к. это л.н.з. векторы и любого вектора вида $x + y$, где $x \in H_1$, $y \in H_2$ лежит в лин. оболочке этого набора векторов (*).

(т.к. $x + y = \underbrace{x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r + x_{r+1} v_1 + \ldots + x_m v_{m-r}}_{\text{разл. } x \text{ по базису } H_1} + y_1 e_1 + \ldots + y_r e_r +$
$+ y_{r+1} w_1 + \ldots + y_n \cdot w_{n-r} =$

$= (x_1 + y_1) e_1 + \ldots + (x_r + y_r) e_r + x_{r+1} v_1 + \ldots + x_m v_{m-r} + y_{r+1} w_1 + \ldots + y_n w_{n-r}$ – разл. по сист. векторов (*)

$\Rightarrow$ (*) – базис в $H_1 + H_2$

$\dim(H_1 + H_2) = r + m - r + n - r = m + n - r = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$ ■

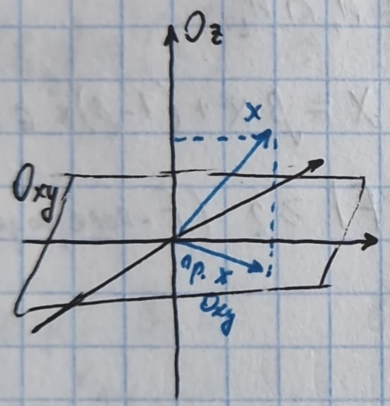
число векторов (*)

Опр: Сумма подпространств H_1 и H_2 наз. прямой, если $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ ← тривиально

Обозн: $H_1 \oplus H_2$ – прямая сумма.

Следствие: $\dim(H_1 \oplus H_2) = \dim H_1 + \dim H_2$ (т.к. $\dim H_1 \cap H_2 = 0$)

Пример: $V_3 = O_{xy} \oplus O_z$



Утв: Сумма $H_1 + H_2$ явл. прямой (где H_1 и H_2 подпр-ва в V) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in H_1 + H_2$ его представление в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ – единственно.

(т.е. единств. образом раскладывается в сумму проекций $x_1 + x_2$ вектора x на подпространство H_1 вдоль (параллельно) H_2 и на подпр.-во H_2 вдоль H_1 соотв.)

Обознач: $x_1 = пр_{H_1} x$, $x_2 = пр_{H_2} x$

□ **Необх-ть.** Дано: сумма прямая
Д-ть: проекции единств.

Предп., что $\exists$ет два разл. разложения: $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$.

$\Leftrightarrow \underset{\in H_1}{x_1 - y_1} = \underset{\in H_2}{y_2 - x_2} \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{0\}$, т.к. сумма прямая $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$ ч.т.д.

Достаточность. Дано: Представление единственно
Д-ть: Сумма $H_1 + H_2$ – прямая

Π: Предположим, что $\exists\, x \neq 0 : x \in H_1 \cap H_2$.

$\Rightarrow \forall \beta \in F$ рассмотрим представление $x = \beta \cdot x + (1-\beta) x \in H_1 + H_2$, и представление не единственно, т.к. $|F| \geq 2$ (F-поле, содержит 0 и 1) $\Rightarrow$ противоречие. ■

Билинейные формы

Опр: Функцию $b : V \times V \to R$ (V – ЛП над R) (т.е. паре векторов ставится в соотв-вие число) наз. <u>билинейной формой</u> (б.ф.) если: $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in R$:

1) $b \cdot (\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$

2) $b \cdot (x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta b(x, z)$

(линейность по каждому из 2х аргументов).

Пример: В V_3 скал. произв. $g(x, y)$ – бил. форма.

Выберем в V базисе $e_1, \dots, e_n$ $(\dim V = n)$.

Тогда $b(x,y) = b\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j \boxed{b(e_i e_j)}$ $(*)$

x_i – коорд. вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$
y_j – коорд. y в e.

Опр: Матрица $B_e = (b(e_i, e_j))$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ наз.

матрицей билинейной формы в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Замечание: Выраж. $(*)$ для б.ф. можно записать матрично:

$b(x,y) = \underset{1\times n}{(x^e)^T} \cdot \underset{n\times n}{B_e} \cdot \underset{n\times 1}{y^e}$, где $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец коорд. 1го вектора

$y^e = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – столбец коорд. 2го вектора

Пример: В $\mathbb{R}^2$: $b(x,y) = x_1 \cdot y_2 = (x_1 x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$B_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Замечание: Между произв. матрицами $n\times n$ и бил. ф-ми есть биекция (при фикс. базисе). Т.е. $\forall$ б.ф. соотв. ровно одна мат. в зад. базисе.

Пример: $(x_1 x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 x_2)\begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$.

(В каконич. базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Утв: Пусть C – м-ца перехода от базиса e к базису f (т.е. $C_{e\to f}$)

Пусть B_e – матрица б.ф. в базисе e
B_f – матрица б.ф. в базисе f

Тогда $B_f = C^T \cdot B_e \cdot C$

□ $b(x,y) = (x^e)^T B_e y^e = (x^f)^T \cdot B_e y^f$

(здесь x^e – столбец коорд. x в базисе e)

$x^e = C_{e\to f}\, x^f$ (т.к. $x^f = C^{-1} \cdot x^e$)

$b(x,y) = (C \cdot x^f)^T \cdot B_e (C y^f) = (x^f)^T \cdot \underbrace{C^T B_e C}_{\shortparallel} y^f \Rightarrow B_f = C^T \cdot B_e \cdot C$ ■

B_f, т.к. между матрицами и б.формами есть биекция (при фикс. базисе)