ДЗ к семинару 26

Задача 1. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ системы функций
$$1,\ \sin x,\ \cos x.$$

Задача 2. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ системы функций
$$1,\ \cos x,\ \cos(2x),\ \ldots,\ \cos(nx).$$

Указание. Рассмотреть производную и воспользоваться задачей из семинара.

Задача 3. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – попарно различные вещественные числа. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ системы функций
$$x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_2},\ \ldots,\ x^{\alpha_n}.$$

Задача 4. Пусть F – поле, $n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями на $\mathrm{M}_n(F)$:

1. $f(A,B) = \mathrm{tr}(AB - BA)$;
2. $f(A,B) = \mathrm{tr}(A + B)$;
3. $f(A,B) = \mathrm{tr}(A^T B)$.

Задача 5. Найти матрицу билинейной функции f в новом базисе, если заданы её матрица в старом базисе и формулы перехода:
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} e_1' &= e_1 + 2e_2 - e_3 \\ e_2' &= e_2 - e_3 \\ e_3' &= -e_1 + e_2 - 3e_3 \end{cases}.$$

Задача 6. Пусть билинейная функция f задана в некотором базисе матрицей F. Найти $f(x,y)$, если:
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x = (1,1,1) \\ y = (-2,0,3) \end{matrix}.$$