Лекция 14, 13.12.23

Элементы общей алгебры

Опр: Пересечение множеств:

$$S \cap T = \{x \mid x \in S,\ x \in T\}$$

Опр: Объединение множеств:

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ или } x \in T\}$$

Опр: Разность множеств:

$$S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ и } x \notin T\}$$

Опр: Прямое (декартово) произведение мн-в:

$$S \times T = \{(x; y) \mid x \in S,\ y \in T\}$$

Опр: Отображение $f: X \to Y$ – правило, по которому каждому элементу x множества X сопоставляется опред. эл-т y из Y.

(Если Y – числ. мн-во, то отображение наз. функцией)

Отобр. $f: X \to X$ наз. также преобразованием мн-ва X или оператором на X.

Опр: Пусть дано отобр. $f: X \to Y$ (X и Y – мн-ва)

Тогда $\operatorname{Im} f = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \equiv f(X) \subseteq Y$ – образ мн-ва X под действием отображ. f.

$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ – полный прообраз эл-та y ($y \in \operatorname{Im} f$).

Пример: Рассмотрим отображение $f(z) = z^n$ $(f: \mathbb{C} \to \mathbb{C})$

$f^{-1}(1)$ – множество из n компл. корней из 1. ($z^n = 1 \leftarrow n$ корней)

Опр: Отобр. $f: X \to Y$ наз. **сюръективным**, если $\forall y \in Y \ \exists x \in X$: $f(x)=y$ (если $\mathrm{Im}\, f = Y$). Т.е. у каждого эл-та из Y есть прообраз.

„отображ. на"

Пример: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$\mathrm{Im}\, f = \{x \geq 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$

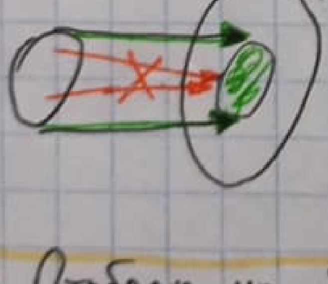
f - не сюръективно ($-1 \notin \mathrm{Im}\, f$)

Опр: Отобр. $f: X \to Y$ наз. **инъективным**, если $\forall x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

(т.е. f не склеивает разные элементы из X)

Т.е. у каждого элемента из Y не более одного прообраза из X.

„отображение в" или вложение



Опр: Отображ. наз. **биективным** (взаимно однозначным), если оно инъективно и сюръективно

Пример: подстановка

Опр: **Произведением** двух отображений наз. их композиция (последовательное применение).

Замечание: Композиция отображения всегда ассоциативна, т.е.

$U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} T$, то

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

$(h: U \to V,\ g: V \to W,\ f: W \to T)$

Замечание: Композиция вообще говоря не явл. коммутативной

Т.е. $f \circ g \neq g \circ f$ (Пример: подстановки)

Бинарные отношения

Опр: $\forall$ мн-во X и Y всякое подмножество W их прямого произведения $X \times Y$ наз. <u>бинарным</u> <u>отношением</u> (это бин. отн. на X, если $X = Y$).

Замечание: Часто вместо $(x, y) \in W$ $(\subseteq X \times Y)$ используют обозн. xWy.

Опр: Бинарное отношение $\sim$ на X наз. <u>отношением</u> <u>эквивалентности</u>, если $\forall x, x', x'' \in X$ выполнено 3 условия:

1) $x \sim x$ (рефлексивность)

2) $x \sim x' \Rightarrow x' \sim x$ (симметричность)

3) $x \sim x',\ x \sim x'' \Rightarrow x \sim x''$ (транзитивность)

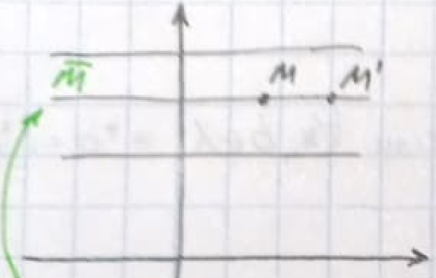
Опр: Подмн-во $\bar{x} = \{x' \in X \mid x' \sim x\} \subseteq X$ наз. <u>классом</u> <u>эквивалентности</u>, содерж. x

Замеч: Мн-во классов эквивалентности по отн. экв-ти $\sim$ явл. разбиением мн-ва X, т.е. $X = \cup \bar{x}$, $\bar{x}' \cap \bar{x}'' = \varnothing$.

(классы экв.-ти либо не пересекаются, либо совпадают).

Пример: Пусть $X = \mathbb{R}^2$ (плоскость)

Введём отн. экв-ти $M \sim M'$, если они лежат на одной гориз. прямой.
(точки)



$$\mathbb{R}^2 = \cup \overline{M}$$

гориз. прямая

класс экв-ти, т.е. гориз. прямая

Утв: Если $\exists$ разбиение мн-ва X на непересек. подмножества C_x, то C_x будут классами экв-ти по нек. отнош. экв-ти.

То есть задать разбиение множества и задать отношение экв-ти одно и то же.

$\square$ Пусть $x \sim x' \Leftrightarrow$ лежат в одном подмножестве (классе)

Тогда это отн. рефлекс., симм. и транзитивным $\Rightarrow$ отн. экв-ти. $\blacksquare$

Опр: Разбиение (т.е. набор непересек. подмн-в, объединение которых даёт X) отвечающее некоторому отношению экв-ти назовём <u>фактормножеством</u> относительно отнош. экв-ти $\sim$.

Обознач: $X/\sim$

Пример: 1. Мн-во всех гориз. прямых

2. Рассм. все целые числа $\mathbb{Z}$ и пусть 2 числа z_1 и z_2 эквивалентны, если $z_1 - z_2$ кратно $n \in \mathbb{N}$ (т.е. z_1 и z_2 им. одинак. остаток при делении на n). Получаем n классов экв-ти. Соотв. фактормнож-во обознач. $\mathbb{Z}_n$ и наз. вычетом по модулю n.

(**Пример:** $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$).

Опр: **Бинарной операцией** наз. отображение $\tau: X \times X \to X$.

Опр: Бин операция наз. **ассоциативной**, если $\forall a, b, c \in X$

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Опр: Бин. операция наз. **коммутативной**, если $\forall a, b \in X \quad a * b = b * a$.

Алгебраические структуры

Опр: Мн-во M с (корректно) заданной на нём бинарной операцией наз. **группоидом** (или **магмой**).

Замечание: Операция корректно задана, если применение операции не выводит из множества (т.е. мн-во замкнуто относ. операции).

Пример: Векторы в V_3 с опер. векторного произведения $(V_3, [,])$.

Опр: Мн-во (группоид) с заданной на нём ассоциативной бин. операцией наз. **полугруппой**.

Пример: $M = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ с опер. умножения целых чисел.

Опр: **Нейтральным эл-м** в полугруппе M наз. элемент e:

$$e * x = x * e = x \quad \forall x \in M.$$

Опр: Полугруппа, в которой есть нейтральный эл-т, наз. **моноидом**.

Пример: 1. $(\mathbb{N}, \cdot)$, $e = 1$

2. Мн-во всех отображений нек. конечного мн-ва в себе с операцией композиции. ($e = id$ - тожд. отобр.)

Замеч.: Нейтральный элемент единственный.

□ $\boxed{\text{П}}$: e_1, e_2 - нейтр. эл-ты, то $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$ ■

Опр: Эл-т a моноида $(M, *, e)$ наз. обратным, если $\exists b \in M$:

$a * b = b * a = e$ ($\Rightarrow$ b тоже обратный)

↑нейтр. эл-т

Опр: Моноид G, все эл-ты которого обратимы, наз. группой.