#1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

#2.

$f(A) - ?$ $\quad f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^3 - 3 \cdot A + 2 \cdot E$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

#3.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{Z},\ n > 0$$

$$n=2: \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ -2\cos\alpha \cdot \sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$n=3: \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha + \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \\ -\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\alpha) & \sin(\alpha + 2\alpha) \\ -\sin(\alpha + 2\alpha) & \cos(\alpha + 2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

$n \to n+1:$ $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\cdot\sin\alpha & \cos(n\alpha)\sin\alpha + \sin(n\alpha)\cos\alpha \\ -\sin(n\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha)\sin\alpha + \cos(n\alpha)\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha+\alpha) & \sin(n\alpha+\alpha) \\ -\sin(n\alpha+\alpha) & \cos(n\alpha+\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\alpha) & \sin((n+1)\alpha) \\ -\sin((n+1)\alpha) & \cos((n+1)\alpha) \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

#4.

$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geq 2$

$$F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$ $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ при $n \geq 1$

$n = 1:$ $F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$n:$ $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$

$n \to n+1:$ $F^{n+1} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} f_{n+1}\cdot f_2 + f_n f_1 & f_{n+1}\cdot f_1 + f_n\cdot f_0 \\ f_n\cdot f_2 + f_{n-1} f_1 & f_n\cdot f_1 + f_{n-1}\cdot f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot f_{n+1} + 1\cdot f_n & 1\cdot f_{n+1} + 0\cdot f_n \\ 1\cdot f_n + 1\cdot f_{n-1} & 1\cdot f_n + 0\cdot f_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

#7.

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a+d)\cdot A=\begin{pmatrix} a^2+ad & ba+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(ad-bc)\cdot A^0=(ad-bc)\cdot E=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$A^2-(a+d)\cdot A+ad-bc=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ba+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd+0 \\ ac+dc-ac-cd+0 & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

ч.т.д.

#8.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a+d=0 \\ c=0 \end{array}\right. \\ a^2+bc=0 \\ d^2+bc=0 \end{cases} \Rightarrow a^2=d^2\ ;\ a=\pm d$$

1) Если $b=0$, то $a=d=0$, $c\in\mathbb{R}$

2) Если $c=0$, то $a=d=0$, $b\in\mathbb{R}$

3) Если $a=d$, то $a=d=0 \Rightarrow$ Аналогично п. 1, 2.

4) Если $d=-a$, тогда $a^2+bc=0$; $b=-\frac{a^2}{c}$, $c\neq 0$

Замеч.: если $c=0$, тогда $a=d=0$ (случаи 1, 2)

Ответ: ① $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall b\in\mathbb{R}$

② $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ $\forall c\in\mathbb{R}$

③ $\begin{pmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$ $\forall a,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$

#6.

$A \cdot E_{ij}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

Матрица, где везде нули, кроме j-го столбца, который заполнен i-м столбцом матрицы A.

Пример:

$$\begin{array}{c} i=3 \\ \begin{pmatrix} a & b & \boxed{c} \\ d & e & \boxed{f} \\ g & h & \boxed{i} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{c} & 0 \\ 0 & \boxed{f} & 0 \\ 0 & \boxed{i} & 0 \end{pmatrix} \\ j=2 \end{array}$$

$i=3$; $j=2$

Понимаю, что решение некорректно, но не придумал, как записать это математически ☹

$E_{ij} \cdot A$

$$\begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} \dots & a_{jm} \\ \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\uparrow j$$

Матрица, где везде нули, кроме i-й строки, которая заполнена j-й строкой матрицы A.

Пример: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \boxed{g \quad h \quad i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{g \quad h \quad i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i=1$

$j=3$

$i=1; j=3$

#5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_n \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

A – квадратная матрица n-ого порядка

При возведении в k-ю степень столбцы м-цы A сдвигаются на $(k-1)$ вправо, слева добавляется столбец, содержащий только нули, а последний столбец убирает.

С k-й степени матрица будет нулевой.