Homework - 2a.

#1.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

База: $n=1$: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$

Шаг: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Переход: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$ ч.т.д.

#2.

База: $n=2$ – из одного можно попасть в другой $1 \to 2$ – верно

Шаг: пусть верно для n городов $\Rightarrow \exists$ город i, из которого можно попасть в любой другой

Переход: есть $n+1$ город. Тогда также есть дорога между городом i и городом $n+1$. 1 случай: $i \to n+1$, тогда, используя то, что из i можно было попасть во все остальные города, а теперь ещё и в $n+1$ город, то из i можно попасть в любой.

2 случай: $n+1 \to i$, тогда, т.к. из i можно было попасть в любой другой, то теперь таким становится город $n+1$, потому что он может попасть в любой другой, проехав через город i.

ч.т.д.

#4.

$$99^{1000} \equiv (-1)^{1000} \pmod{100}$$

Также заметим, что при $k \in \mathbb{N}_0$ $\quad 99^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{100}$

$$99^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{100} \equiv 99$$

$1000 = 2 \cdot 500 \Rightarrow 99^{1000} \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow$ Две последние цифры „01".

#5.

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \Rightarrow a-b \mid a^3 - b^3 \Rightarrow a^3 \equiv b^3 \pmod{a-b}$

ч.т.д.

т.к. $a^3 - b^3 = k(a-b) + r$; $r = 0$

$\Downarrow$

$a^3 = k_1 \cdot (a-b) + r_1$

$b^3 = k_2 (a-b) + r_2$

$r = r_1 - r_2 = 0$; $r_1 = r_2$

#6.

Док-ть: $11 \mid (5m+3n) \Rightarrow 11 \mid (9m+n)$

$5 \cdot (9m+n) = 45m + 5n = 9 \cdot \underbrace{(5m+3n)}_{\vdots 11} - \underbrace{22n}_{\vdots 11} \Rightarrow 9m+n \vdots 11$

$\Downarrow$

$11 \mid (9m+n)$ ч.т.д.

#7.

$I(x) = \text{остаток}(x+M, 2M) - M$, $\quad I(x) \in [-M; M-1]$

а) $x \in [-M; M-1]$

$x + M \in [0; 2M-1] \Rightarrow \text{остаток}(x+M; 2M) = x+M$; $\quad I(x) = x+M-M = x$

ч.т.д.

b) Док-ть: $I(x+y) = I(I(x) + I(y))$

$I(x+y) = \text{остаток}(x+y+M, 2M) - M$

$I(x) = \text{остаток}(x+M, 2M) - M$ $\quad$ $I(y) = \text{остаток}(y+M, 2M) - M$

$I(x) + I(y) = \text{остаток}(x+M, 2M) + \text{остаток}(y+M, 2M) - 2M$

$I(I(x) + I(y)) = \text{остаток}(\text{остаток}(x+M, 2M) + \text{остаток}(y+M, 2M) - 2M + M, 2M) - M =$

$=$ [остатки можно сложить] $= \text{остаток}(\text{остаток}(x+y+2M, 2M) - M, 2M) - M =$

$= [\text{ост}(\text{ост}(p,q), q) = \text{ост}(p,q)$, т.к. $\text{ост}(p,q) \in [0; q)] =$

$= \text{остаток}(x+y+2M-M, 2M) - M = \text{остаток}(x+y+M, 2M) - M = I(x+y)$ ч.т.д.

c) Доказать: $I(xy) = I(I(x) \cdot I(y))$

$I(xy) = \text{остаток}(xy+M, 2M) - M$

$I(x) = \text{остаток}(x+M, 2M) - M$ $\quad$ $I(y) = \text{остаток}(y+M, 2M) - M$

$I(x) \cdot I(y) = \text{остаток}(x+M, 2M) \cdot \text{остаток}(y+M, 2M) - M \text{остаток}(x+M, 2M) -$

$- M \cdot \text{остаток}(y+M, 2M) + M^2 =$ [остатки можно перемножать] $=$

$= \text{остаток}(xy + M(x+y) + M^2, 2M) - M \cdot \text{остаток}(x+y+2M, 2M) + M^2$

$I(I(x) \cdot I(y)) = \text{остаток}(\text{остаток}(xy+M(x+y)+M^2, 2M) - M \cdot \text{остаток}(x+y+2M, 2M) + M^2, 2M) - M =$

$= \text{остаток}(\text{остаток}(xy + M(x+y) + M^2 - xM - My + 0, 2M) + M^2, 2M) - M =$

$= \text{остаток}(\text{остаток}(xy+M^2, 2M) + M^2, 2M) - M = [\text{ост}(\text{ост}(p,q), q) = \text{ост}(p,q)] =$

$= \text{остаток}(xy+M^2, 2M) + \text{остаток}(M^2, 2M) - M = \text{остаток}(xy + 2M^2, 2M) - M =$

$= \text{остаток}(xy+M, 2M) - M = I(xy)$

ч.т.д.