# Семинар 30, 16.05.24

ДЗ: 5 $\mathcal{A}: f(x) \mapsto f(ax+b)$

$f(x)$ т.ч. $f(ax+b) = a f(x)$

$f(x) = x + s$, $f(ax+b) = ax + b + s = a(x+s) = ax + as \Rightarrow s = \frac{b}{a-1}$

Поэтому $\underset{\text{с.в.}}{\mathcal{A}\left(x + \frac{b}{a-1}\right)} = \underset{\text{с.з. } a}{a\left(x + \frac{b}{a-1}\right)}$

Но $\mathcal{A}(f^k) = \mathcal{A}(f)^k$ $\quad [f^k(ax+b) = (f(ax+b))^k]$

$\mathcal{A}(f^k) = (\mathcal{A}(f))^k = (a \cdot f)^k = a^k \cdot f^k \Rightarrow f^k$ - с.в. с с.з. $a^k$.

6 $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$, $V = \mathbb{R}[x]_{\le n}$

Пусть $U \le V$ инвариантно.

Пусть $g(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \ldots + \alpha_0 \in U$ наиб. степ., $\alpha_d \neq 0$

$\mathcal{A}g \in U$, $\mathcal{A}g = d\alpha_d x^{d-1} + \ldots$

Вычитая из $g$ $\mathcal{A}g$ с нек. коэфф., можно считать $\alpha_{d-1} = 0$.

И т.д., берём $\mathcal{A}^2 g$, $\mathcal{A}^3 g \ldots$

В итоге получим $x^d \in U \xRightarrow{\mathcal{A}(x^d)} x^{d-1} \in U, \ldots, 1 \in U \Rightarrow U = \mathbb{R}[x]_{\le d}$

Зафиксируем оператор $\mathcal{A}$ на $n$-мерном пространстве $V$ над полем $F$.

Пусть $\lambda \in F$. Алгебраической кратностью $\lambda$ наз. кратность корня $\lambda$ в многочлене $\chi_{\mathcal{A}}(t)$.

Геометрической кратностью $\lambda$ наз. $\dim V_\lambda(\mathcal{A})$.

Следующие условия эквивалентны:

1) Алг. кратность $\lambda$ больше нуля

2) Геом. кратность $\lambda$ больше нуля

3) $\lambda$ является с.з. $\mathcal{A}$.

Всегда алг. кратность $\geq$ геом. кратность:

В базисе, согласованном с $V_\lambda(\mathcal{A})$

$\mathcal{A}$ имеет матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right) \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_B(t) \cdot (t-\lambda)^{\dim V_\lambda(\mathcal{A})}$$

Оператор $\mathcal{A}$ наз. диагонализуемым, если в нек. базисе матрица $\mathcal{A}$ диагональна.

Критерий диагонализуемости $\mathcal{A}$:

1) Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ раскладывается на лин. множители.

2) Геом. кратность любого $\lambda \in F$ совпадает с алгебраической.

Замечание: Понятие диагонализуемости зависит от поля $F$.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} - \begin{array}{l} \text{не диаг. над } \mathbb{R} \\ \text{диаг. над } \mathbb{C} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \end{array}$$

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Очевидно, что $\lambda = 1$ явл. с/з.

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Геом. кратность равна $4 - 2 = 2.$ $\Rightarrow$ алг. кр-ть $\geqslant 2.$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1)$

Лайфхак: Для любого оператора $B$

$\operatorname{tr} B = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, $\det B = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все корни $\chi_B(t)$

$\operatorname{tr} A = 4$

$|A| = 1$

$\lambda_3 + \lambda_4 = 4 - (\lambda_1 - \lambda_2)$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$

$\begin{cases} \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \\ \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ алг. кр-ть равна 4. $\chi_A(t) = (t-1)^4$

Оператор $A$ НЕ диагонализуем.

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Т.к. $A$ вырождена, то $\lambda = 0$ – с/з.

$$A - 0\cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базис $V_0(A)$: $(0, 1, 0, 0)$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$(0, 0, 1, 0)$

$$\lambda = 1: \quad A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис $V_1(A)$: $(0, 0, 0, 1)$, $\lambda_3 = 1$.

$tr A = 2 = 1 + \lambda_4 \Rightarrow \lambda_4 = 1.$

НЕ диагонализуем.

3 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(t) = t^3 - 5t^2 + (4+8+4)t - 4 = t^3 - 5t^2 + 16t - 4 = (t-1)(t-2)^2$$

$\lambda = 1$:
$$A - 1\cdot E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Базис $V_1(A)$: $(7, 6, 3)$

$\lambda = 2$:
$$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Базис $V_2(A)$: $(1, 1, 0)$
$(-1, 0, 3)$

Оператор $A$ диагонализуем. Матрица перехода $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица $A$ в новом базисе

Пусть задана матрица $A \in M_n(F)$ и $N \in \mathbb{N}$ (большое)

Используя с/з, можно вычислить $\boxed{A^N}$.

В общем случае нужна Жорданова норм. форма.

Мы ограничимся случаем, когда $A$ диагонализуема.

$\exists$ невыр. $C \in GL_n(F)$ т.ч. $D = C^{-1} A C$ диагональна

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad D^N = \begin{pmatrix} \lambda_1^N & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^N \end{pmatrix}$

$A^N = (CDC^{-1})^N = CDC^{-1} \cdot CDC^{-1} \cdot \ldots \cdot CDC^{-1} = CD^N C^{-1}$

4) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$

$\chi_A(t) = t^2 + t = t(t+1)$

$\lambda = 0$: $\quad A - 0E = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (7 \ \ -4)$

Базис $V_0(A)$: $(4, 7)$

$\lambda = -1$: $\quad A + E = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2 \ \ -1)$

Базис $V_{-1}(A)$: $(1, 2)$

$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{64} = (CDC^{-1})^{64} = C \cdot D^{64} \cdot C^{-1} = C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$

Аналогично, можно решать уравнения вида $\boxed{X^k = A}$, где $A$ диагонализ.

$\exists\, C \in GL_n(F): \quad D = C^{-1}AC.$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Берём $F = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[k]{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Тогда $F^k = D$.

Обозначим $B = CFC^{-1} \Rightarrow B^k = CF^kC^{-1} = CDC^{-1} = A \Rightarrow$ можно взять $X = B$.

5. $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\chi_A(t) = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$

$\lambda = 1: \quad A - E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to (1 \;\; 2)$

Базис $V_1(A): (1, -2)$

$\lambda = 4: \quad A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to (1 \;\; -1)$

Базис $V_4(A): \quad (1, 1)$

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$X = CFC^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$