Лекция 19, 09.02.24

Декартова степень:

$A^0 = \{\varnothing\}$

$A^1 = A$

$A^n = \underbrace{(\dots(A \times A) \times A) \times \dots \times A)}_{n \text{ раз}}$ при $n \geq 2$

Следствие 1. Если A кон., то $\forall n \in \mathbb{N}$ A^n тоже кон., причём $|A^n| = |A|^n$

Док-во: индукция по n

$n=0$: $A^0 = \{\varnothing\} \sim \{0\} = 1$ $|A^0| = 1 = |A|^0$

$n=1$: $A^1 = A$; $|A^1| = |A|^1 = A$

$n+1 > 1$: $A^{n+1} = A^n \times A$; по ПИ, A^n кон. и $|A^n| = |A|^n$

по Т.О, $|A^{n+1}| = |A^n| \cdot |A| \overset{\text{ПИ}}{=} |A|^{n+1}$

$A^n \sim A^{\underline{n}}$ ч.т.д.

$f: \underline{n} \to A \leftrightarrow (f(0), \dots, f(n-1))$.

$B^A = \{ f \in P(A \times B) \mid f: A \to B\}$

Следствие 2. Если A, B кон., то B^A тоже кон., причём $|B^A| = |B|^{|A|}$

Док-во: Пусть $A \sim \underline{n}$

$B^A \sim B^{\underline{n}} \sim B^n$

$|B^A| = |B^n| \overset{\text{Сл1}}{=} |B|^n = |B|^{|A|}$

ч.т.д.

Следствие 3. Если A кон., то $P(A)$ тоже кон., причём $|P(A)| = 2^{|A|}$

Док-во: $P(A) \sim 2^A$; $|P(A)| = |\underline{2}^A| \overset{\text{сл.2}}{=} |\underline{2}|^{|A|} = 2^{|A|}$ ч.т.д.

$\mathbb{N} \lesssim A \Rightarrow A$ беск.

Теорема 4. A беск. $\Rightarrow \mathbb{N} \lesssim A$.

Следствие: A беск $\Rightarrow \exists C \subseteq A \quad C \sim \mathbb{N}$

Док-во (идея):

Утв: Если A беск., и B кон., то $A \setminus B$ беск.

иначе: $A \setminus B$ кон, $A \subseteq \underbrace{(A \setminus B) \cup B}_{\text{кон.}}$ 1

A беск. $\Leftrightarrow \mathbb{N} \lesssim A$

$\mathrm{Inj}(A,B) = \{ f \in B^A \mid f \text{ инъект.} \}$

Лемма 5. („важен только размер“):

$A \overset{\varphi}{\sim} A'$, $B \overset{\psi}{\sim} B' \Rightarrow \mathrm{Inj}(A,B) \overset{\theta}{\sim} \mathrm{Inj}(A', B')$

Док-во:

$$
f \in \mathrm{Inj}(A,B) \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\theta(f)"] \\
B \arrow[r, bend left, "\psi"] & B' \arrow[l, bend left, "\psi^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$\theta(f) := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Inj}(A,B)$

θ инъекц: $\theta(f) = \theta(g)$

$\underset{\underset{f}{\parallel}}{\mathrm{id}_B \circ f \circ \mathrm{id}_A} \cdot g = \underset{\underset{f}{\parallel}}{\psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi} = \underset{\underset{g}{\parallel}}{\psi^{-1} \circ \psi \circ g \circ \varphi^{-1} \circ \varphi}$

θ сюр.: $\forall h \in \mathrm{Inj}(A', B')\ \exists f \in \mathrm{Inj}(A,B)$

$\theta(f) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = h$

$f := \psi^{-1} \circ h \circ \varphi \qquad \theta(f) = \psi \circ \psi^{-1} \circ h \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = h$

Опр: $inj(m,n) := |Inj(\underline{n}, \underline{m})|$

$$n^{(m)} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$$

↳ нисходящая (убывающая) степень

$$n^{(0)} = 1$$

Утв.: $n! = n^{(n)}$

Теорема 6. $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$inj(m,n) = \begin{cases} 0, & m > n \quad \text{(пр. Дирихле)} \\ n^{(m)}, & m \leq n \end{cases}$$

$$n^{(m)} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Док-во:

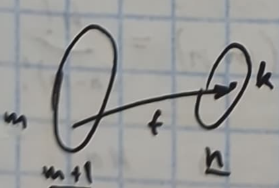
индукция по m

$$\forall m \ \underbrace{\forall n \ (n \geq m \Rightarrow inj(m,n) = \frac{n!}{(n-m)!}}_{\varphi(m)}$$

$m=0$: $inj(0,n) = \underline{n}^{\underline{0}} = \underline{n}^{\varnothing} = \{\varnothing\} = Inj(\underline{0}, \underline{n}) = 1 = \frac{n!}{n!} = 1$

Шаг: $ПИ := \forall n' \ (n' \geq m \Rightarrow inj(m, n') = \frac{n'!}{(n'-m)!}$

доп. $n \geq m+1$; $inj(m+1, n) = ?$



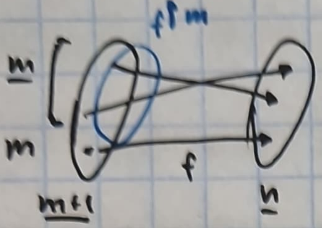
$$f \in \underbrace{Inj(\underline{m+1}, \underline{n})}_{X}$$

$$X_k = \{f \in Inj(\underline{m+1}, \underline{n}) \mid f^{(m)} = k\}, \quad 0 \leq k \leq n+1$$

$X = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}$ (попарно не пересек)

По правилу суммы: $inj(m+1, n) = |X| = |X_0| + \ldots + |X_{n-1}|$

$$X_k = \{ f \in X \mid f(m) = k \}$$



Утв.: $X_k \sim Inj(\underline{m}, \underline{n} \setminus \{k\})$

$$f \overset{\psi}{\longmapsto} f \restriction \underline{m} = f \setminus \{(m,k)\}$$

$$|X_k| = |Inj(\underline{m}, \underline{n} \setminus \{k\})| \overset{(15)}{=} |Inj(\underline{m}, \underline{n-1})| = inj(m, n-1) \overset{\text{пи}}{=}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!}$$

$$inj(m+1, n) = n \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!} = \frac{n!}{(n-(m+1))!}$$

Опр: $bij(n) = |\{ f : \underline{n} \to \underline{n} \mid \underline{n} \overset{f}{\sim} \underline{n} \}|$

Было: A, B кон. и $A \sim B \Rightarrow \forall f : A \to B$ (f инъекц $\Leftrightarrow$ f сюр. $\Updownarrow$ f биекц.)

$$bij(n) \leq inj(n, n) \leq bij(n)$$

Следствие 7. $bij(n) = inj(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

Пусть A — мн-во и $m \in \mathbb{N}_+$

Опр: Набор $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ наз. размещением из A по m, если $\forall i,j \, (a_i = a_j \Rightarrow i = j)$

Утв: Разм. из A по m $\sim Inj(\underline{m}, A)$

Следствие: Число разм. из $\underline{n}$ по m : $A_n^m = inj(m,n) = \frac{n!}{(n-m)!}$

Опр: пусть $|A| = m$. Тогда $\forall$ разм. из A по m наз. перестановкой мн-ва A.

$$A = \{a_1, \dots, a_m\}$$

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \in A^m$$

Следствие: Число перестановок $P_m = bij(m) = m!$

Опр: $P_k(A) = \{ X \in P(A) \mid |X| = k \}$

ВТР: $A \sim B \Rightarrow P_k(A) \sim P_k(B)$

Опр: $C_n^k := |P_k(\underline{n})|$

Лемма 8. $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$

Док-во: $X, Y \in P_0(\underline{n}) \Rightarrow X \sim \underline{0} \sim Y$

$\Rightarrow X = \varnothing = Y$

$\Rightarrow P_0(\underline{n}) = \{\varnothing\}$

$X, Y \in P_n(\underline{n})$; $\underline{n} \in P_n(\underline{n})$

пр. суммы

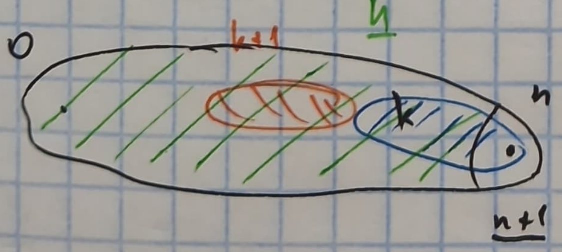
$\overline{X}, \overline{Y} \in P_{n-n}(\underline{n})$

$\Rightarrow \overline{X} = \overline{Y} \to X = \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} = Y$

Лемма 9. (Тождество Паскаля) $\forall n, k \in \mathbb{N}$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

Док-во: $|P_{k+1}(\underline{n+1})| = C_{n+1}^{k+1}$



$X \in P_{k+1}(\underline{n+1})$

сл. I: $n \in X$

$X = \{n\} \cup X'$,

где $X' = X \cap \underline{n} \in P_k(\underline{n})$

сл. II $n \notin X$

$X \in P_{k+1}(\underline{n})$

$$P_{k+1}(\underline{n+1}) = \underbrace{\{X \mid n \in X\}}_{\cong\, P_k(\underline{n})} \cup \underbrace{\{X \mid n \notin X\}}_{=\, P_{k+1}(\underline{n})}$$

По пр. суммы: $|P_{k+1}(\underline{n+1})| = |P_k(\underline{n})| + |P_{k+1}(\underline{n})| = C_n^{k+1} + C_n^k$

Если $k \le n$, то $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$