Подготовка к КР, 02.04.24

① Рассм. пр-во $F[x]_{\leq n}$ и его базиси $1, x, x^2, \ldots, x^n$ и $1, (x-c), (x-c)^2, (x-c)^3, \ldots, (x-c)^n$, где $c \in F$. Найти м-цу перехода

Выражаем $(x-c)^k$ через x^i:

$$(x-c)^k = \sum_{i=0}^{k} x^i \cdot (-c)^{k-i} \binom{k}{i} \Rightarrow$$ k-й столбец матрицы перехода C

равен

$$\begin{array}{cc} & \\ & \begin{pmatrix} (-c)^k \\ (-c)^{k-1}\binom{k}{1} \\ (-c)^{k-2}\binom{k}{2} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ k \rightarrow & \end{array}$$

$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & k & \\ & & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -c & (-c)^2 & \ldots & (-c)^n \\ 0 & 1 & & \vdots & \\ & & \ddots & (-c)^{k-l}\binom{k}{l} & \ldots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow l \end{array}$$

Найти координаты вектора $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ в новом базисе.

В старом базисе его коорд. равны $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$f(x) = f((x-c)+c) = \sum_{i=0}^{n} a_i ((x-c)+c)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} (x-c)^j \cdot c^{i-j} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_i (x-c)^j \cdot c^{i-j} \binom{i}{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_i (x-c)^j \cdot c^{i-j} \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{n} (x-c)^j \cdot \sum_{i=j}^{n} a_i c^{i-j} \binom{i}{j}$$