Семинар 11, 23.11.23

(7) $\sum\limits_{k=1}^{n} z^k = \dfrac{z^{n+1} - z^n - z + 1}{-4\sin^2\frac{x}{2}}$ (*) (по семинару 10)

$$\mathrm{Im}(z^k) = \sin(kx)$$

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\, z^k = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \overset{(*)}{=} \mathrm{Im}\, \frac{z^{n+1} - z^n - z + 1}{-4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left(\sin((n+1)x) - \sin(nx) - \sin x\right) = \frac{-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left(2\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \left(-2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot \sin\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$ ч.т.д.

Многочлены:

f - многочлен $\Rightarrow f = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ ← неприводимый

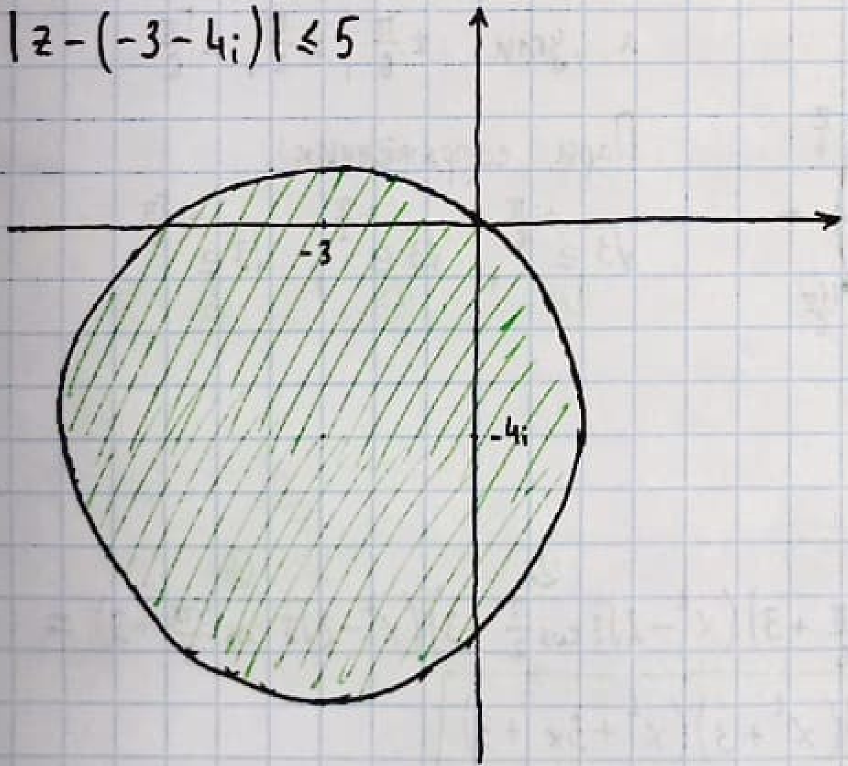
Над $\mathbb{C}$: неприв. $\equiv \alpha x - \beta, \ \alpha \neq 0$

Над $\mathbb{R}$: неприв. $\equiv \left[\begin{array}{l} \alpha x - \beta, \ \alpha \neq 0 \\ \underbrace{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}_{\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0}, \ \alpha \neq 0 \end{array}\right.$

① Множество $|z+3+4i| \leq 5$ на плоскости

$|z-w|$ - это расстояние между z и w.

$|z-(-3-4i)| \leq 5$



② Разложить на мн. многочлен над $\mathbb{C}$ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$x = 1$ - корень;

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \hline -\ x^3 - x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ -5x^2 + 11x & \\ -\ -5x^2 + 5x & \\ 6x - 6 & \end{array}$$

$\Rightarrow (x^2 - 5x + 6) = (x-2)(x-3)$

$\boxed{\text{Ответ: } (x-1)(x-2)(x-3).}$

Если $f \in \mathbb{R}[x]$ и $c \in \mathbb{C}$: $f(c)=0$, то

$$f(\bar{c}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (\bar{c})^k \overset{a_k=\bar{a}_k}{=} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \cdot (\bar{c})^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k c^k} = \overline{f(c)} = \bar{0} = 0$$

$f(x) = x^2 + ax + b$, $c = u + iv$ – не веществ. корень f

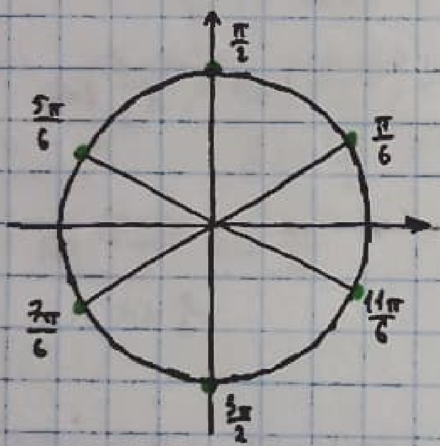
$\Rightarrow \bar{c} = u - iv$ – тоже корень $\Rightarrow f(x) = (x-c)(x-\bar{c})$

$$= x^2 - (c+\bar{c})x + c\bar{c} = x^2 - 2 \cdot \mathrm{Re}(c)x + |c|^2$$

3 Разложить на неприводимые над $\mathbb{R}$: $f(x) = x^6 + 27$

Над $\mathbb{C}$ у f корни $\sqrt[6]{-27}$

$f(x) = 0 \iff x^6 = -27$ по модулю они будут равны $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$,



а углы $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{6}$

Пари сопряжённых:

$\sqrt{3}e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$, $\sqrt{3}e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{3}e^{\pm i\frac{5\pi}{6}}$

1, 2, 3

Соберём множители:

$$f(x) = \underset{1}{\left(x^2 - 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 3\right)} \underset{2}{\left(x^2 - 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} + 3\right)} \underset{3}{\left(x^2 - 2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} + 3\right)} =$$

$$= \boxed{(x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3)(x^2 + 3x + 3)}$$

4 Построить многочлен наим. степени с коэфф-ми из $\mathbb{C}$, имеющий двойной корень 1 и простые корни 2, 3, 1+i.

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)$$

Если с коэф. из $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)\overbrace{(x-1-i)(x-1+i)}^{(x^2-2x+2)}$

Опр: Рациональная дробь над $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ – это дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f, g \in \mathbb{R}/\mathbb{C}[x]$ и $g \neq 0$.

Опр: Рациональная дробь наз. правильной, если $\deg f < \deg g$.

Опр: Рациональная дробь наз. простейшей, если $g = p^k$ для нек. $k \geqslant 1$ и неприводимого p и $\deg f < \deg g$.

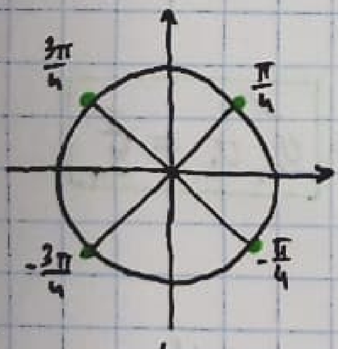
Примеры: Над $\mathbb{C}$ простейшие дроби – это только $\frac{\alpha}{(x-c)^k}$, $\alpha, c \in \mathbb{C}$.

Над $\mathbb{R}$: $\frac{\alpha}{(x-c)^k}$; $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^k}$. $(a^2-4b<0)$

Теорема: Пусть $\frac{f}{g}$ – это правильная, несократимая дробь над $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ и $g = \prod_{i=1}^{d} p_i^{\alpha_i}$ – разложение на неприв.

Тогда $\exists!$ разложение в сумму простейших дробей $\frac{f}{g} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{h_{ij}}{p_i^j}$.

⑤ $\frac{1}{x^4+4}$ в сумму простейших.



$$x^4+4 = (x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{\pi}{4}})(x-e^{i\frac{3\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{3\pi}{4}})$$

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{\alpha_1}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{\alpha_2}{x-e^{-i\frac{\pi}{4}}} + \frac{\alpha_3}{x-e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{\alpha_4}{x-e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$$

Разложим обе части на x^4+4

$$\Rightarrow 1 = \alpha_1 \frac{x^4+4}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}} + \alpha_2 \frac{x^4+4}{x-e^{-i\frac{\pi}{4}}} + \alpha_3 \frac{x^4+4}{x-e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \alpha_4 \frac{x^4+4}{x-e^{-i\frac{3\pi}{4}}}.$$

Подставляем $x = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ и $e^{\pm\frac{3\pi}{4}i}$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}}) \\ 1 = \alpha_2 \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

6 Какой угол образуют единичные векторы s и t, если известно, что $p = s + 2t$, $q = 5s - 4t$ перпендикулярны?

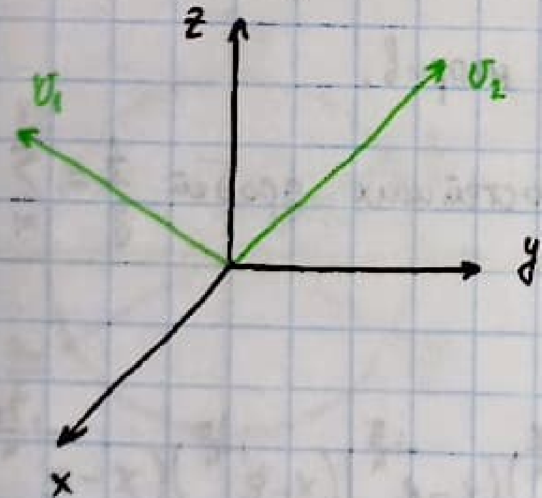
$\varphi = \widehat{s,t}$? $(s,s) = 1$, $(t,t) = 1$, $|v| = \sqrt{(v,v)}$

$$\cos\varphi = \frac{(s,t)}{|s|\cdot|t|} = (s,t)$$

$$0 = (p,q) = (5s-4t,\ s+2t) = (s,5s) - (s,4t) + (2t,5s) - (2t,4t) =$$
$$= 5 - 4(s,t) + 10(s,t) - 8 = 6(s,t) - 3$$

$$(s,t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$$

7 Угол между биссектрисами координат углов xOz, yOz.



$v_1 = (1,0,1)$

$v_2 = (0,1,1)$

$$\cos\widehat{v_1,v_2} = \frac{(v_1,v_2)}{|v_1|\cdot|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\widehat{v_1,v_2} = \frac{\pi}{3}}$$