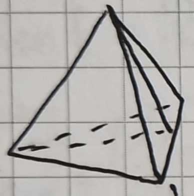
Семинар 19, 08.02.24

(2)



$$Sym^+(X) \leq Sym(X) \xrightarrow{\varphi} S_4 \geq A_4$$

$\longmapsto \sigma$ перестановка

φ сюръекция : $y \xleftrightarrow{g} 2$

φ инъекция : очевидно

$\Rightarrow \varphi$ - изоморфизм.

$$Sym(X) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\}$$

$$S_4 \xrightarrow{sgn}$$

Достаточно понять, что $\det(g) = \operatorname{sgn}(\varphi(g))$.

Но это равенство выполнено для порождающих эл-тов

$\overset{\text{гом-зм}}{\Longrightarrow}$ верно для всех.

Сопряжение

Пусть G - группа. $\forall g \in G$ определяет изоморфизм

$$C_g : G \to G \qquad (\text{сопряжение эл-том } g)$$
$$x \mapsto gxg^{-1}$$

□ Гомоморфизм: $C_g(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = C_g(x) \cdot C_g(y)$

Биекция: $C_g^{-1} = C_{g^{-1}}$: $C_g \circ C_{g^{-1}}(x) = gg^{-1}x(g^{-1})^{-1}g^{-1} = x$ ■

Свойства:

$C_1 = 1_G$, $C_{gh} = C_g \circ C_h$, $C_{g^{-1}} = C_g^{-1}$

Мы получили ещё гом-зм $G \to Aut(G)$
$$g \mapsto C_g$$

① Док-ть, что в группе G

1) эл-ты x и yxy^{-1} имеют одинаковый порядок.

□ В прошлый раз док-али, что порядок не изм. при изом-зме. (задача 4, сем. 18) ■

2) эл-ты ab и ba имеют одинаковый порядок.

□ $ba = babb^{-1} \Rightarrow$ доказ. по п. 1. ■

② В цикл. группе $\langle a \rangle$ порядка n найти все эл-ты g, удовлетв. условию $g^k = 1$ и все эл-ты порядка k, где $n=24$, $k=6$.

$g^k=1$: $g=a^m=1 \Rightarrow$ нужно, чтобы $m\cdot k \,\vdots\, 24$

Но $24=6\cdot 4 \Rightarrow 4 \mid m \Rightarrow m=0,4,8,12,16,20$

Среди них эл-ты порядка 6 — это $m=4,20$

(3) Найти все подгруппы в группе $\langle a\rangle_{24}$.

$H \subseteq \langle a\rangle_{24}$ — подгруппа

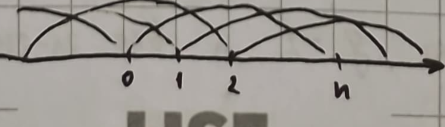
$\lvert H\rvert$	H
1	$\langle 1\rangle=\{1\}$
2	$\langle a^{12}\rangle$
3	$\langle a^{8}\rangle=\langle a^{16}\rangle$
4	$\langle a^{6}\rangle=\langle a^{18}\rangle$
6	$\langle a^{4}\rangle=\langle a^{20}\rangle$
8	$\langle a^{3}\rangle=\langle a^{9}\rangle=\langle a^{15}\rangle=\langle a^{21}\rangle$
12	$\langle a^{2}\rangle=\langle a^{10}\rangle=\langle a^{14}\rangle=\langle a^{22}\rangle$
24	$\langle a\rangle=\langle a^{5}\rangle=\langle a^{7}\rangle=\langle a^{11}\rangle=\langle a^{13}\rangle=\langle a^{17}\rangle=\langle a^{19}\rangle=\langle a^{23}\rangle$

(4) Существует ли беск. группа, все элементы которой имеют конечный порядок?

- $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{Z}_2\}$
- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(5) Найти смежные классы:

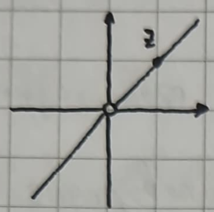
1) $\mathbb{Z}$ по $n\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$



HSE

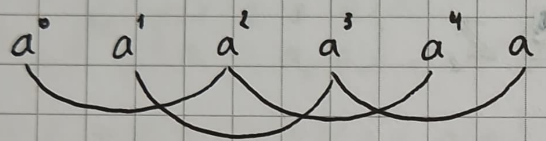
2) $\mathbb{R}$ по $\mathbb{Z}$

3) $\mathbb{C}^\times$ по $\mathbb{R}^\times$



$\overline{z} = \{ z \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$

4) $\langle a \rangle_6$ по $\langle a^4 \rangle$



⑥ Пусть $g \in G = GL_n(\mathbb{C})$ и $H = SL_n(\mathbb{C}) \leq G$.

Док-ть, что gH состоит из всех матриц $a \in G$, т.ч. $|a| = |g|$.

□ $X = \{ a \in G \mid |a| = |g| \}$

$gH \subseteq X$: $x \in gH \Rightarrow x = g \cdot h$ для нек. $h \in H$

$\Rightarrow |x| = |gh| = |g| \cdot |h| = |g|$

$gH \supseteq X$: пусть $a \in X$

Нужно найти $h \in H$: $a = gh$. Возьмём $h = g^{-1} a$

$\Rightarrow |h| = \frac{1}{|g|} \cdot |a| = 1 \Rightarrow h \in H$ и $g \cdot h = g \cdot g^{-1} \cdot a = a$ ■

⑦ Док-ть, что $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ циклична $\Leftrightarrow (m, n) = 1$.

□ $r = m \cdot n$ ($\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ циклическая $\Leftrightarrow \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_r$)

$\boxed{\Leftarrow}$ $(\bar{1}, \bar{1}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ имеет порядок $r = m \cdot n$:

$k \cdot (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{k}, \bar{k}) = (\bar{0}, \bar{0}) \Leftrightarrow m, n \mid k \Leftrightarrow (m, n) \mid k$

$\boxed{\Rightarrow}$ От противного. Пусть $d = (m, n) > 1$.

Тогда $\forall p, q \in \mathbb{Z}$ $\quad \frac{m \cdot n}{d} \cdot (\bar{p}, \bar{q}) = (\bar{0}, \bar{0})$

$\Rightarrow$ порядок любого элемента $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ не превосходит

$\frac{m \cdot n}{d} < r \Rightarrow$ нет эл-та порядка r – Противоречие $\blacksquare$

⑧ Разложить $\mathbb{Z}_6$ в прямую сумму циклических.

$6 = 3 \cdot 2 \Rightarrow \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_8 \ncong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$

⑨ Пусть два эл-та $g, h \in G$ коммутируют.

Пусть $ord(g) = n$, $ord(h) = m$ – конечны.

1) $ord(gh)$ конечен и $ord(gh) \mid \text{НОК}(n, m)$

$\square$ $(gh)^k = g^k \cdot h^k = 1$ при $k = \text{НОК}(m, n)$ $\blacksquare$

2) При $G = X \times Y$, $g = (x, 1)$, $h = (1, y)$ и

$ord(gh) = \text{НОК}(m, n)$

$\square$ $gh = (x, y) \Rightarrow (gh)^k = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^k = 1 \\ y^k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \mid \underset{ord(x)}{\overset{\shortparallel}{n}}, \underset{ord(y)}{\overset{\shortparallel}{m}} \Leftrightarrow k \quad \text{НОК}(n, m)$

$\blacksquare$

HSE