Лекция 7, 20.10.23 (онлайн)

Предел функции

Опр: **Функцией**, отображающей мн-во X в мн-во Y, наз. мн-во пар $\{(x;y)\}$ $x \in X$, $y \in Y$ такое, что каждый эл-т из X встречается лишь однажды.

Опр: **Графиком функции** наз мн-во точек на коорд. плоскости таких, что их координаты – это пара функции.

Опр: **График ур-я** – мн-во точек координатной плоскости, что их коорд. $(x;y)$ явл. решениями ур-я.

X – область определения – D_f $\quad y=f(x)$

Опр: **Множество значений функции** – мн-во вторых эл-ов пар функции $(x_0; y_0)$ $\quad E_f \subset Y$

Опр: Если $E_f = Y$, то функция наз. **сюрьекцией**.

Опр: Если $\forall y \in E_f \quad \exists! \, x \in X : y = f(x)$, то $f(x)$ наз. **инъекцией**.

Пример: $y=x^2$ не инъекция, т.к. $y=4 \to \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{matrix}$

$f(x)=x^2 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$E_f = [0; +\infty) \neq \mathbb{R}$

Опр: Функция явл. инъективной и сюрьективной наз. **биекцией**.

Вопрос обратной функции

Опр: Функцию $y=f^{-1}(x)$ наз. обратной к $y=f(x)$, если мн-во её пар есть симметрия мн-ва пар $y=f(x)$

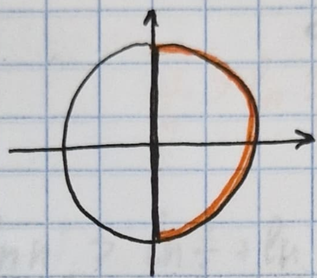
$y=f^{-1}(x)$: $\{(a;b)\}$ $a\in X$, $b\in Y$

$y=f(x)$: $\{(b;a)\}$

Вывод: обращать можно только инъекции.

Пример: триг. функция $y=\sin x$

$X=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$



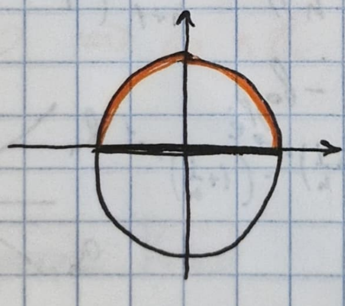
$Y=[-1;1]$

$y=f(x)=\sin x$

биекция

$y=\arcsin x \rightarrow X=[-1;1]$ $Y=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$y=\cos x$



$X=[0;\pi]$

$Y=[-1;1]$

$y=\arccos x \rightarrow X=[-1;1]$ $Y=[0;\pi]$

Замечание: $f(f^{-1}(x))=x$; $f(f^{-1}(x))=x$

Пример: $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{2}))=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$ – не вход. в мн-во заданное

$f(x)=e^x \leftarrow f(x)=\ln x$

$f(x)=a^x \leftarrow f(x)=\log_a x$

Обратные

$y=a^x$ – возр. при $a>1$ и уб. при $a<1$

$D_f=\mathbb{R}$ $E_f=(0;+\infty)$

$y=\log_a x$ возр. при $a>1$

$D_f=(0;+\infty)$

Постоянная Эйлера

$$\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n$$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$ ← п. Эйлера

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$

гармонический ряд

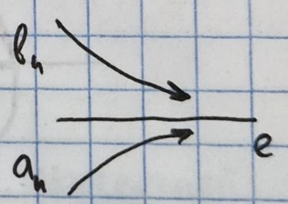
1) γ_n убывает

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n+1}\left(1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{} e$ — возр.

$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} e$ $\Downarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to e\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1$



b_n — убывает

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)>$$

$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$, $1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$

$$>\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n^3+4n^2+4n}=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}>1 \iff b_n>b_{n+1}$$

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0}\left(\overbrace{1-\ln b_n}^{<0}\right)<0 \qquad b_n\downarrow \text{ к } e$$

$\Downarrow$

γ_n — убывает

b_n — убывает к e $\Rightarrow$ $b_n > e$

$\ln b_n > \ln e = 1$

$1 - \ln b_n < 0$

2) Ограниченность снизу

$a_n < e$ $\qquad\qquad$ $[\ln(1+x) \le x]$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$

$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \dots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n$

$\cancel{\ln 2} - \underbrace{\ln 1}_{0} + \ln 3 - \ln 4 + \dots + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)} - \ln(n) = \ln\frac{n+1}{n} > \ln 1 = 0$

γ_n убывает и $\gamma_n > 0$ $\Rightarrow$ по т. В. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$