$$(1)\quad \Delta^t a_n = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k\, a_{n+t-k}$$

$$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n.$$

(2) cm a_n = mu-h cT. $m > 0$, ∞

$$\Delta^{m+1} a_n = 0$$

$$0 = \Delta^{m+1} a_n = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k C_{m+1}^k\, a_{n+m+1-k}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k\, a_{n+m+1-k} = a_{n+m+1}.$$

$m = 2$

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n.$$

$m = 2$

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n.$$

рек. соотн. пор. 3, стац

рек. соот. пор 1, нестац

(*) $a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n$

$a_0 = 42$

$a_1 = 1\cdot 42$

$a_2 = 2\cdot 1\cdot 42$

$a_n = n!\cdot c$

Опр П-ть $\vec{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ уд-т рек. соотношению φ порядка $k > 0$,

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R} \\ \forall n \quad a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n, n) \end{cases}$$

Опр Если φ не завис. от n $\left(\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k\ \forall n,m\ \ \varphi(\vec{x}, n) = \varphi(\vec{x}, m)\right)$

то такое рек. соотн-е наз. стационарным

Пусть φ — рек. соотн. пор. k и $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$\leadsto$ рек. задача

$$(*) \begin{cases} \forall n \;\; a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, \dots, a_n, n) \\ a_0 = \alpha_0, \dots, a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$\exists$-в (сущ) очевидно, т.к. φ даёт „рецепт" вычисления каждого a_n.

Т. о рекурсии из Т. Мальцева

(ед-ть) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ уд-т $(*)$

Док $\vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \exists n \;\; a_n \neq b_n$.

$$\overset{\text{ПНЧ}}{\Longrightarrow} \exists n \left(a_n \neq b_n \wedge \forall m < n \;\; a_m = b_m \right)$$

I сл

$n < k$

$$a_n = \alpha_n = b_n \quad \perp$$

II сл

$n \geq k$

$$a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, \dots, a_n, n)$$

$$\| \Leftarrow \quad \| \quad (\text{пи}) \quad \| \quad \|$$

$$b_{n+k} = \varphi(b_{n+k-1}, \dots, b_n, n)$$

$\perp$

Лин. стац. рек. соотн.

$C_i \in \mathbb{R}$

$$a_{n+k} = C_1 a_{n+k-1} + C_2 a_{n+k-2} + \ldots + C_k a_n + C_0$$

своб. член

|| если $c_0 = 0$, то соотн-ие однородное

T.2

$\exists C_1', \ldots, C_{k+1}' \in \mathbb{R}$ $\exists \beta_0, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$

$$(*) \begin{cases} \forall n \; a_{n+k} = C_1 a_{n+k-1} + \ldots + C_k a_n + C_0 \\ a_0 = \alpha_0, \ldots, a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

пор. k, неодн.

$\Longleftrightarrow$ пор. $k+1$, одн.

$$\Longleftrightarrow (\#) \begin{cases} \forall n \; a_{n+k+1} = C_1' a_{n+k} + \ldots + C_{k+1}' a_n \\ a_0 = \beta_0, \ldots, a_{k-1} = \beta_{k-1}, \\ a_k = \beta_k \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_{n+k} = C_1 a_{n+k-1} + C_2 a_{n+k-2} + \ldots + C_{k-1} a_{n+1} + C_k a_n + C_0 & \boxed{-1} \\ a_{n+k+1} = a_{(n+1)+k} = C_1 a_{n+k} + C_2 a_{n+k-1} + \ldots + C_k a_{n+1} + C_0 & \boxed{+1} \end{cases}$$

$(+)$

$$a_{n+k+1} = \underbrace{(C_1+1)}_{C_1'} a_{n+k} + \underbrace{(C_2 - C_1)}_{C_2'} a_{n+k-1} + \underbrace{(C_3 - C_2)}_{C_3'} a_{n+k-2} + \ldots + \underbrace{(C_k - C_{k-1})}_{C_k'} a_{n+1} \underbrace{- C_k}_{C_{k+1}'} a_n$$

$$\beta_0 := \alpha_0$$

$$\_\ \_\ \_$$

$$\beta_{k-1} := \alpha_{k-1}$$

$$\beta_k := c_1 \cdot \alpha_{k-1} + c_2 \alpha_{k-2} + \dots$$

$$\dots + c_k \alpha_0 + \underset{\sim}{c_0}$$

<u>Док-ми</u>:

$$(*) \Rightarrow (\#)$$