

$V_3$  - пространство геометрических векторов длины 3

Скалярное произведение

$$(\cdot, \cdot): V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (число)}$$

Опр:  $(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$

Алгебраические свойства:

1) Линейность:  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

2) Симметричность:  $(x, y) = (y, x)$

Геометрические свойства:

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

В ОНБ  $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

При равенстве нулю:  $(a, b) = 0 \Leftrightarrow a$  и  $b$  ортогональны

В произвольном базисе:  $(x, y) = x^T \cdot \Gamma \cdot y$

$$a = \sum_{i=1}^3 a_i e_i \quad b = \sum_{j=1}^3 b_j e_j$$

$$(a, b) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j (e_i, e_j) = (a_1, a_2, a_3) \Gamma \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

В ОНБ  $\Gamma = E$ ,  $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$|a| = \sqrt{(a, a)}$$

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}$$

## Векторное произведение

$$[\cdot, \cdot]: V_3 \times V_3 \rightarrow V_3 \text{ (вектор)}$$

Опр:  $c = [a, b]$ , если

Обознач:  $\begin{matrix} [a, b] \\ a \times b \end{matrix}$

1)  $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\widehat{a, b})$

2)  $c \perp a, c \perp b$

3) Тройка векторов  $a, b, c$  - правая.

Алгебраические свойства:

1) линейность

2) кососимметричность:  $[a, b] = -[b, a]$

В ОБИ:

$$[x, y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$[x, y] = 0 \Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ коллинеарны}$$

$$|[x, y]| = S_{\text{параллелограмма на векторах } x \text{ и } y}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[a, b]|$$

## Смешанное произведение

$$\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle: V_3 \times V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (число)}$$

Опр:  $\langle a, b, c \rangle = ([a, b], c)$

Свойство:  $([a, b], c) = (a, [b, c]) = \langle a, b, c \rangle$



## Алгебраические свойства:

1) Линейность

$$\begin{aligned} 2) \langle a, b, c \rangle &= \langle b, c, a \rangle = \langle c, a, b \rangle = \\ &= -\langle a, c, b \rangle = -\langle c, b, a \rangle = -\langle b, a, c \rangle \end{aligned}$$

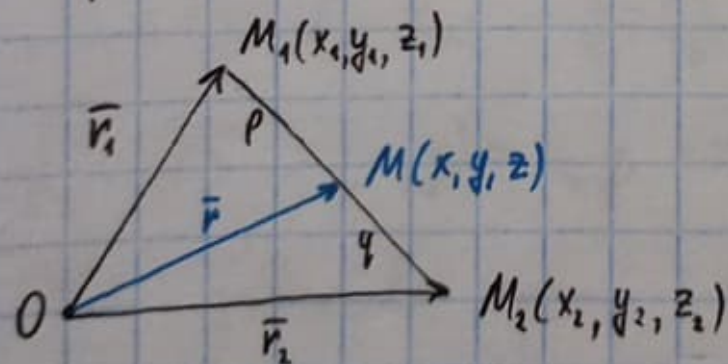
В ОНБ:

$$\langle x, y, z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\langle x, y, z \rangle = 0 \Leftrightarrow x, y \text{ и } z \text{ компланарны}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \begin{cases} V_{\text{паралл-да}}, \text{ если } x, y, z - \text{правая тройка} \\ -V_{\text{паралл-да}}, \text{ если } x, y, z - \text{левая тройка} \end{cases}$$

$$V_{\text{гетр.}} = \frac{1}{6} |\langle x, y, z \rangle|$$



$$\bar{r} = \frac{q\bar{r}_1 + p\bar{r}_2}{p+q}$$