

Homework 30.

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A$$

#1.

Собственные числа: $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(6-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2-\lambda & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda)(2\lambda + \lambda^2 - 4) + 3(5\lambda - 6) + 2(10 - 6 - 3\lambda) = 0$$

$$(6-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 4) - 21\lambda + 26 = 0$$

$$6\lambda^2 + 12\lambda - 24 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 21\lambda + 26 = 0$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$-(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \text{Собств. знач: } 1 \text{ и } 2$$

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow НЕ диагонализируема

$$A - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C/\lambda: 2$$

$$C/\lambda: 2$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Базис $V_2(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C/\lambda: -2$$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Базис $V_2(A)$: $(-1, 1, 1, 1)$

Диагонализирuem

Матрица перехода:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

#3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C/\lambda: \pm 1$$

$$C/\lambda: 1: \quad A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{базис: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C/\lambda: -1: \quad A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{базис: } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Диагонализирuem

$$\text{Матрица перехода } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#4.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^{24} \quad C/\lambda: \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

$$\text{базис } V_{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}(A): (i, 1)$$

$$\text{базис } V_{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}(A): (-i, 1)$$

$$\text{Матрица перехода: } C = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}+i}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{24} = C \cdot D^{24} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}+i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#5.

$$X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad C/\beta: 9, 4$$

$$\text{Базиcи: } \left(\frac{2}{3}, 1\right) \text{ и } (-1, 1)$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 \\ 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \quad X_{3,4} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

#6.

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Пусть } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc=4 \\ ab+bd=1 \\ ac+dc=0 \\ bc+d^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+bc=4 \\ b(a+d)=1 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+d \neq 0 \text{ и } c=0$$

$$\text{т.к. } c=0, \text{ то } a^2=4, d^2=4. \text{ и } \begin{cases} a+d \neq 0 \\ b = \frac{1}{a+d} \end{cases}$$

$$\text{Пусть } a=2, d=2 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$