Семинар 22, 12.03.24

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абс. сх-ся : $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ абс. сх-ся : $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ сх-ся

#1.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos 2n|}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{n+1}^{\sim n}}{\underbrace{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}_{\sim n^{\frac{7}{3}}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \text{ - сходится}$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)}_{\sim \frac{1}{\sqrt[5]{n}}} \underbrace{\operatorname{arctg}\left|\frac{\sin n}{n}\right|}_{\underset{n\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin n}{n}\right|} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \cdot \frac{|\sin n|}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} \text{ -сх-ся}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{arctg} \le t \ (t>0) \\ \operatorname{arctg} t \underset{t\to 0}{\sim} t \end{array}}$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n+1)}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\ln^2 n} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n\cdot \ln^2 n}$$

$$1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}} \sim 2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{2n}$$ (можно раскрыть cos по Маклорену)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln^2 n} \text{ сходится} \Longleftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx \text{ сходится}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ усл. сходится : сх-ся, но не абсолютно

<u>Признак Лейбница</u>: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_i \geq 0$

$a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad a_n \geq a_{n+1}$ $\quad \forall n > 1$ $\quad (\forall n \geq N)$

Пример: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \ldots$ $(= \ln 2)$

$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ сходится

Пример: $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$ – абс. сходится $\alpha > 1$
усл. сходится при $0 < \alpha \leq 1$
расходится при $\alpha \leq 0$

$\alpha > 0$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ – сходится

$\alpha \leq 0$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ – расходится

#2.

(a) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}$

$\frac{\ln^2 n}{n} > 0$ $\quad \frac{\ln^2 n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ $\quad f'(x) = \frac{\frac{2}{x}\ln x \cdot x - \ln^2 x}{x^2} =$

$= \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x\,(2 - \ln x)}{x^2} < 0$ при $\ln x > 2$ (при $x > 9$)

$\Rightarrow f(x)$ убывает при $x \geq 9$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$ сходится

#3.

$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ – сходится по признаку Лейбница (не абсолютно)

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

расходится

Признак Дирихле:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$$

$a_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \quad \left(\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ a_{n+1}\leq a_n\right)$

$\sum_{k=1}^{n}b_k=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$ ограничен, т.е. $|b_1+\ldots+b_n|\leq C \quad \forall n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится

Пример: $b_n=(-1)^{n-1}$

$b_1=1 \quad b_2=-1 \quad b_3=1 \quad b_4=-1,\ldots$

$B_1=1 \quad B_2=0 \quad B_3=1 \quad B_4=0,\ldots$ где $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится

$a_1+a_2-a_3-a_4-a_5+a_6+$

$+a_7+a_8-a_9-a_{10}-a_{11}+a_{12}+$

$+a_{13}+a_{14}-a_{15}-a_{16}-a_{17}+a_{18}+\ldots$

$b_n: 1, 1, -1, -1, -1, 1; 1, 1, -1, -1, -1, 1, \ldots$

$|B_n|\leq 2 \quad (\leq 2024)$

#4.

$$b_n = \sin(n\alpha)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(n\alpha)$$

$$B_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(n\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\alpha}{2}\right] \cdot \sin\left[\frac{n\alpha}{2}\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left| \frac{\sin\left((n+1)\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

$$/* \; B_n = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha} \qquad */$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \overset{?}{=} \sin\left((n+1)\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} + \cos\frac{5\alpha}{2} + \ldots + \cos\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \sin\left((n+1)\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

#5

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$

$$a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\searrow} 0; \quad b_n = \cos n; \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant C$$

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{n}{2}}{\sqrt[5]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{2\sqrt[5]{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}}_{\substack{\text{расходится,}\\ \text{т.к. } \alpha = \frac{1}{5} < 1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt[5]{n+1}}}_{\text{пр. Дирихле}}\right) \text{ - расходится}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \searrow 0$, $b_n = \cos n$ - сходится

(1) $\sum a_n$ сходится
$\sum b_n$ сходится
$\Rightarrow$ $\sum (a_n + b_n)$ сходится

(2) $\sum a_n$ сходится
$\sum b_n$ расходится
$\Rightarrow$ $\sum (a_n + b_n)$ расходится

(3) $\sum a_n$ расходится
$\sum b_n$ расходится
$\Rightarrow$??