Вычисление определённого интеграла.

1. Вычислить интеграл как предел интегральной суммы:

$$a)\int\limits_1^2 x^3dx;\quad b)\int\limits_0^1 e^x dx.$$

2. Вычислите предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}.$$

3. Вычислите интегралы:

$$a)\int\limits_1^2 \ln x dx;\quad b)\int\limits_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx;\quad c)\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2}\frac{dx}{(4+x^2)^2};$$

$$d)\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2-\sin x}dx;\quad e)\int\limits_{-3}^{3}\sin x\cdot e^{-x^2}dx;\quad f)\int\limits_{0.1}^{10}\frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$a)\ y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=a,\ x=b,\ 0<a\le b;$$

$$b)\ y=|x^3|e^{-x^2},\ y=0,\ |x|=a,\ a>0;$$

$$c)\ x^2+y^2=2,\ y^2=2x-1\ x\ge 1/2;$$

$$d)\ y=\ln(x+6),\ y=3\ln x,\ x=0,\ y=0.$$

Домашнее задание

1. Вычислить интеграл как предел интегральной суммы:

$$a)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}dx;\quad b)\int\limits_1^e \ln x dx.$$

2. Вычислите пределы:

$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)},\quad b)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}\right).$$

3. Вычислите интегралы:

$$a)\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 x dx;\quad b)\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx;\quad c)\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x}{\sin^2 x}dx;$$

$$d)\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\arctan x dx;\quad e)\int\limits_{1/3}^{3}\frac{\arctan x}{x^2-x+1}dx;\quad f)\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos^2 x}dx.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$a)\ y=6x^2-6x+1,\ y=\cos\pi x,\ 0\le x\le 1/2;$$

$$b)\ y=x^2/2,\ y=1/(1+x^2);$$

$$c)\ x^2+y^2=4,\ 2y=x^2,\ 2y\ge x^2;$$

$$d)\ y=x^2,\ y=x^2+x-1,\ y=5x/2,\ y\le x^2;$$

$$e)\ y^2=\sin^2 x\cos x,\ -\pi/2\le x\le \pi/2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите пределы:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{\prod_{k=1}^{2^n}\left(1+\frac{k}{2^n}\right)};\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}.$$

2. Выяснить, какой интеграл больше:

$$a)\ \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx\ \textit{или}\ \int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx;\quad b)\ \int\limits_0^{1}e^{-x}\sin x dx\ \textit{или}\ \int\limits_0^{1}e^{-x^2}\sin x dx.$$

3. Доказать неравенства:

$$a)\ 0<\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx<\frac{\pi}{\sqrt[5]{2}};\quad b)\ \frac{\sqrt{2}}{3}<\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos x}{2+x^2}dx<1;$$

$$c)\ \frac{1}{10\sqrt{2}}<\int\limits_0^{1}\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx<\frac{1}{10};\quad d)\ 1-\frac{1}{n}<\int\limits_0^{1}e^{-x^n}dx<1;$$

$$e)\ \sin 1<\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos x}{1+x^2}dx<2\sin 1;\quad f)\ \frac{2}{\pi}<\int\limits_0^{1}e^{-x^n}dx<1;$$

4. Построить функцию:

- Не интегрируемую на отрезке, чей квадрат интегрируем на отрезке;
- Непрерывную в точке, но не интегрируемую ни на одном отрезке, содержащем эту точку.

5. Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[0;1]$ функции выполняются равенства:

$$a)\ \int\limits_0^{\pi/2}f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}f(\cos x)dx;\quad b)\ \int\limits_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2}f(\sin x)dx.$$

Используя результат, полученный в пункте a), вычислите $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$.

6. Вычислите интегралы:

$$a)\int\limits_0^1 \arccos x dx; \quad b)\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx; \quad c)\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\arctan x dx;$$

$$d)\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}dx; \quad e)\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx; \quad f)\int\limits_0^e \sin\ln x dx;$$

$$g)\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx; \quad h)\int\limits_0^1 x\arctan^2 x dx.$$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$a)\ y=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}},\ y=2a,\ a>0;$$

$$b)\ y=\tan x,\ y=\frac{2}{3}\cos x,\ x=0;$$

$$c)\ y=\sin^3 x+\cos^3 x,\ y=0,\ -\pi/4\le x\le \pi/4;$$

$$d)\ x=y^2(y-1)\ x=0;$$

$$e)\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\ x=y^2,\ y=0;$$

$$f)\ a^4y^2=(a^2-x^2)^3.$$

8. Используя рекуррентное соотношение для вычисления I_n, вычислите интеграл

$$I_n=\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$