Предел функции. Непрерывность функции.

1. Сформулировать с помощь кванторов, что означает

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Сформулировать и доказать аналог теоремы о двух миллиционерах для функций (в точке и на бесконечности).

3. Доказать с помощь теоремы о двух миллиционерах сходимости

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad b)\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$c)\quad \lim_{x\to0}\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad d)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

4. Доказать непрерывность на своей области определения тригонометрических функций, полинома, рациональной функции, корня.

5. Исследовать функции на непрерывность

$$a)\quad f(x) = x\cdot D(x),\ D(x)- \text{ функция Дирихле}, \quad b)\quad f(x) = \sin\frac{1}{x},$$

$$c)\quad f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \qquad d)\quad f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}].$$

Домашнее задание

Если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$. Принята следующая классификация точек разрыва.

Точки разрыва 1 рода:

a) Если односторонние пределы в точке x_0 существуют и не равны, то точка x_0 называется точкой разрыва типа «Скачок».

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A, \qquad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = B, \qquad A \neq B.$$

b) Если существует предел функции в точке, но он не равен значению функции в точке, то точка x_0 называется устранимой точкой разрыва

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A, \qquad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = B, \qquad A = B \neq f(x_0).$$

Точки разрыва 2 рода:

a) Если один из одностронних пределов равен $\pm\infty$, то точка x_0 называется точкой разрыва типа «Полюс».

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

b) Во всех остальных случаях x_0 называется точкой существенного разрыва.

1. Установить, существуют или не существуют значения a и b, при которых функция $y = f(x)$ непрерывна на своей области определения

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{если } x \leqslant 0; \\ ax + b, & \text{если } 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

2. Доказать, что если функция монотонна, то всякая ее точка разрыва является точной разрыва первого рода.

3. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать эскиз графика функции.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & \text{если } x < 0; \\ (x-1)^3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 4 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

4. Найти точки разыва функции, установить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва

$$y = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^3 - x^2}$$

5. Вычислить пределы

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}}, \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}\right),$$

$$c)\quad \lim_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}\right),$$

$$d)\quad \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}\right)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Установить, существуют или не существуют значения a и b, при которых функция $y = f(x)$ непрерывна на своей области определения

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leqslant 1; \\ x^2 + ax + b, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\cos(x/2)}{\sin x}, & \text{если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right],\ x \neq 0,\ x \neq \pi; \\ a, & \text{если } x = 0; \\ b, & \text{если } x = \pi. \end{cases}$$

2. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать эскиз графика функции.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{если } x = \frac{\pi}{4}; \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Найти точки разыва функции, установить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва

$$a)\ y = \frac{2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}, \qquad b)\ y = \frac{x}{\cos x},$$

$$c)\ y = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \qquad d)\ y = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

4. Вычислить пределы

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} - 2x^2\right), \quad b)\ \left(\sqrt{x^4 + x^2\sqrt{x^4 + 1}} - \sqrt{2x^4}\right),$$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x + 1}}\right), \qquad d)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2 - 7x + 4}\right).$$