Модуль 2

Лекция 8, 01.11.23

Вычисление ранга

① Метод эл. преобраз. (строк и столбцов)

Цель – привести м-цу к ступ. виду. В ступ. виде $Rg\,A$ = числу ненул. строк (можно взять БМ в ненул строках и столбцах, соотв. ведущ. эл-м – минор треуг. м-цы с ненул. диаг.)

② Опр: Минор N наз. окаймляющим для минора M м-цы A, если N получен добавлением к M одной новой стр. и одного нового стб. (из м-цы A)

При этом порядок минора N = порядку минора $M+1$.

Утв (об окаймл. минорах):

Пусть в прямоуг. м-це A

1) $\exists$ минор M порядка r, не равный нулю

2) Все миноры, окаймляющ. M, равны 0.

Тогда $Rg\,A = r$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 6 \end{matrix} & \begin{matrix} 9 & 12 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad M^{12}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-8 = -3 \neq 0$$

$Rg A \geq 2$

$$M^{123}_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

столбцы $(3) = 2\cdot(2) - (1)$

$\Rightarrow$ по теор. об окаймл. минорах $Rg A = 2$.

$$M^{124}_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

столбцы $(3) = 3(2) - 2(1)$

СЛАУ

Пусть $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ – произв. прямоуг.

Опр: СЛАУ $Ax = 0$ наз. <u>однородной</u> (<u>ОСЛАУ</u>)

Опр: СЛАУ $Ax = b$ наз. <u>совместной</u>, если у неё $\exists$ реш. (хотя бы 1).

Св-ва решений СЛАУ

① Пусть $x^1, \ldots, x^s$ – решения однород. СЛАУ $Ax = 0$.
вектор-столбцы

Тогда $\forall \lambda_1 \ldots \lambda_s \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_s x^s$ – тоже яв. решением

$\square$ $A(\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_s x^s) = \lambda_1 \underbrace{Ax^1}_{=0} + \ldots + \lambda_s \underbrace{Ax^s}_{=0} = 0 + \ldots + 0 = 0$ $\blacksquare$

② Пусть x^1 – решение СЛАУ $Ax = b$, а x^2 – реш. однор. СЛАУ $Ax = 0$.

Тогда $x^1 + x^2$ – реш. СЛАУ $Ax = b$.

$\square$ $A(x^1 + x^2) = \underbrace{Ax^1}_{=b} + \underbrace{Ax^2}_{=0} = b$ $\blacksquare$

③ Пусть x^1 и x^2 – решения $Ax = b$.

Тогда их разность $x^1 - x^2$ – реш. однор. СЛАУ $Ax = 0$.

$\square$ $A(x^1 - x^2) = Ax^1 - Ax^2 = b - b = 0$ $\blacksquare$

Следствие: Для произв. СЛАУ $Ax = b$ выполнено одно из 3х ут.:

1) Она может не иметь реш. Например, $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

2) Она может иметь единственное решение

3) Если СЛАУ имеет больше 1го решения, то она имеет бесконечно много решений

$\square$ Если x^1 и x^2 – различные реш. СЛАУ $Ax = b$, то

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \underbrace{x^1 + \underbrace{\lambda \underbrace{(x^1 - x^2)}_{\text{по ③ реш. СЛАУ}}}_{\text{по ① реш. ОСЛАУ}}}_{\text{по ② реш. } Ax = b}$ — тоже реш. ■

Запись СЛАУ

Координатная:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}}_{A_1} \qquad \underbrace{\begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}}_{A_n}$$

Матричная форма: $Ax = b$

Векторная: $x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = b$

Критерий совместности СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$ $(A \in M_{mn}(\mathbb{R}))$

Матрицу $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ — наз. расширенной матрицей системы.

Теорема Кронекера – Капелли:

СЛАУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow$ $Rg A = Rg(A|b)$

□ Необх. ($\Rightarrow$) $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$

Дано: $Ax = b$ совместна, док-ть: $Rg A = Rg(A|b)$

По усл. $\exists$ реш., т.е. $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$, такое что $Ax^0 = b$ $(A = (A_1 \ldots A_n))$ матрица как набор столбцов

или в векторной форме (*) $x_1^0 A_1 + \ldots + x_n^0 A_n = b$ (т.е. столбец b явл. л/к столбцов $A_1 \ldots A_n$)

Пусть $Rg A = r \Rightarrow \exists$ базисный минор M пор. r в м-це A

Предположим, что он расп. в левом верхнем углу м-цы A:

$A = \left(\begin{array}{c|c} M & \vdots \\ \hline \dots & \dots \end{array} \right)_{r \times r}$ $\Rightarrow$ столбцы $A_1 \dots A_r$ базисные, а столбцы $A_{r+1} \dots A_n$ - их лин. комб.-ции по теор. о БМ.

$A_{r+1} = \lambda_{1\,r+1} A_1 + \dots + \lambda_{r\,r+1} A_r$

$\dots$

$A_n = \lambda_{1n} A_1 + \dots + \lambda_{rn} A_r$

Подставим в (*):

$\Rightarrow b = x_1^0 A_1 + \dots + x_r^0 A_r + x_{r+1}^0 (A_{r+1}) + \dots + x_n^0 (A_n) =$

$= (x_1^0 + \lambda_{1\,r+1} \cdot x_{r+1}^0 + \dots + \lambda_{1n} \cdot x_n^0) \cdot A_1 + \dots + (x_r^0 + \lambda_{r\,r+1} \cdot x_{r+1}^0 + \dots + \lambda_{rn} \cdot x_n^0) \cdot A_r$

$\Rightarrow$ M - базисный минор и в расшир. м-це $(A|b)$, т.к.

1) он $\neq 0$

2) все окаймл. его миноры $= 0$, т.к. в них один из стб. явл. л/к стб. $A_1 \dots A_r$

$\Rightarrow Rg\, A = Rg\,(A|b)$

Достаточность ($\Leftarrow$) Дано: $Rg\, A = Rg\,(A|b)$

Д-ть: СЛАУ совместна

Пусть $Rg A = r$. Пусть M - БМ матрицы A.

Предп., что M располож. в верх. левом углу м-цы A.

Тогда M - явл. БМ и в расшир. м-це $(A|b)$ (т.к. $Rg A = Rg\,(A|b) = r$ и M - ненул. минор порядка r) $\Rightarrow$ по теор. о БМ столбец b явл. л/к. столбцов $A_1, \dots, A_r$ (базисных)

$b = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$ (т.е. $\exists$ такие $\lambda_1, \dots, \lambda_r$).

$\Rightarrow$ столбец $x^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ - реш. СЛАУ $Ax = b$, т.к. справедлива вект. форма

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r + 0 \cdot A_{r+1} + \dots + 0 \cdot A_n = b \Leftrightarrow Ax^0 = b \quad \blacksquare$$

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\quad\quad A & \quad\quad\quad b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \end{array}$$

$Rg A = 2$
$Rg(A|b) = 3$
$\Downarrow$
по т. К.-К. СЛАУ несовместна
$0 = -5 \Rightarrow \varnothing$

Однородные СЛАУ

Рассм. ОСЛАУ $Ax = 0$, где $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$

Опр: Любые 1) $n - r$ (число неизвестных) (где $r = Rg A$) 2) линейно-независимых столбцов, 3) являющихся решениями однородн. СЛАУ $Ax = 0$, наз. фундаментальной системой решений (ФСР) однор. СЛАУ

Теорема о сущ. ФСР:

Рассм. однор. СЛАУ $Ax = 0$, у нее $\exists\, k = n - r$ линейно независимых реш., где n – число неизв.-ых, а $r = Rg A$.

$\square$ Предпол., что БМ M распол. в левом верхнем углу м-цы A

$$A = \begin{pmatrix} M & \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ a_{r+1\,1} & \dots \dots \dots a_{r+1\,n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots \dots \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда строки $A_1 \dots A_r$ — базисные, а $A_{r+1} \dots A_m$ — их л/к. по теор. о БМ

$$\begin{cases} A_{r+1} = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r \\ \dots \\ A_m = \mu_1 A_1 + \dots + \mu_r A_r \end{cases}$$

Сделаем элем. преобр. строк $A_{r+1} \mapsto A_{r+1} - \lambda_1 A_1 - \dots - \lambda_r A_r$

$A_m \mapsto A_m - \mu_1 A_1 - \dots - \mu_r A_r$

Получим м-цу, в которой последние $m-r$ строк нулевые

$$A \sim \left(\begin{array}{c|ccc} M & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & & \dots \\ & a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline 0 & & \dots & 0 \end{array}\right)$$

Заметим, что элем. преобр. строк м-цы A соотв. (эквив.) элем. преобразов. ур-ий исх. СЛАУ $Ax=0 \Rightarrow Ax=0$ эквивалентна

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \dots + x_n \cdot a_{1n} = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \dots + x_n a_{rn} = 0 \end{cases}$$

Будем называть пер-е, отвеч. базисным столбцам базисными (главными), а остальные пер-е — свободными

$x_1 \dots x_r$ — главные (их $r = rkA$)

$x_{r+1} \dots x_n$ — свободные (их $n-r$)