

ДЗ к семинару 21

Задача 1. Пусть U – это подгруппа \mathbb{C}^\times , состоящая из всех чисел, модуль которых равен 1. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим также через U_n подгруппу в U корней n -й степени из единицы. Доказать, что:

1. $\mathbb{C}/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$;
2. $\mathbb{C}^\times/U_n \cong \mathbb{C}^\times$;
3. $\mathbb{C}^\times/U \cong \mathbb{R}_{>0}^\times$.

Задача 2. Пусть

$$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad A = \{X \in G \mid |\det X| = 1\}, \quad C = \{X \in H \mid |\det X| = 1\}.$$

Доказать, что:

1. $G/A \cong \mathbb{R}_{>0}^\times$;
2. $H/C \cong \mathbb{R}_{>0}^\times$.

Задача 3. Доказать, что подгруппа H группы G нормальна, если:

1. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$;
2. $G = S_n, H = A_n$.

Задача 4. Пусть G – группа и $a \in G$. Доказать, что централизатор $Z_G(a)$ является подгруппой в G .

Задача 5. Зафиксируем натуральное число k . Пусть G – группа невырожденных верхнетреугольных матриц размера n , а $H \subseteq G$ – подмножество всех верхних унитреугольных матриц, у которых ненулевые элементы стоят не ниже k -й побочной диагонали, то есть H состоит из матриц вида

$$E + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j-i \geq k}} \alpha_{ij} E_{ij}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Доказать, что H является нормальной подгруппой в G .

Задача 6. Найти центр группы квадратных невырожденных верхнетреугольных матриц размера n .

Задача 7. Вы – участник A схемы Диффи-Хеллмана с группой $G = \mathbb{Z}_{13}^\times$, элементом $g = \bar{2}$, секретным числом $a = 5$. Чему равен порядок g ?

Какой у Вас будет общий ключ (по модулю 13) с участником B , если он сообщил всем элемент $\bar{9}$? Взломайте участника B : вычислите его секретное число b (достаточно дать только ответ без вычислений).

Задача 8. Вы – участник A схемы Эль-Гамала с группой $G = \mathbb{Z}_{17}^\times$, элементом $g = \bar{3}$, секретным числом $a = 8$. Чему равен порядок g ?

Пусть участник B сообщил всем элемент $\bar{4}$ и закодировал для Вас сообщение h с помощью пары $(\bar{8}, \bar{11})$. Восстановите h . Взломайте участника B : вычислите выбранное им k и его секретное число b (достаточно дать только ответ без вычислений).