

Homework 23.

① Разложить на неприводимые множители:

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ в $\mathbb{F}_5[x]$

$$f(2) = 8 + 8 + 8 + 1 = 25 = 0 \Rightarrow f(x) : (x-2)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + 4x + 1 & x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 - x + 1 \\ \hline 4x^2 + 4x & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline 2x + 1 & \\ 2x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2 - x + 1$ не имеет корней в $\mathbb{F}_2[x] \Rightarrow$ он не раскладывается

$$f(x) = (x-2)(x^2 - x + 1)$$

$$(b) f(x) = x^4 + x^3 + x + 2 \quad \text{в } \mathbb{F}_3[x]$$

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = 5 = 2$$

$$f(2) = 28 = 1$$

Неприводимые в $\mathbb{F}_3[x]$: $x^2 + 1$

$$x^2 + x + 2$$

$$x^2 + 2x + 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 + 0x^2 + x + 2 & x^2 + 1 \\ \hline x^4 & x^2 + x - 1 \\ \hline -x^3 - x^2 + x & \\ \hline x^3 & + x \\ \hline -x^2 + 2 & \\ \hline -x^2 - 1 & \\ \hline 3 = 0 & \end{array} \Leftrightarrow x^2 + x + 2$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$$

④ Док-ть, что поле и вычислить

$$\mathbb{F}_7[x]/(x^2 + 2)$$

у $(x^2 + 2)$ нет корней в $\mathbb{F}_7 \Rightarrow \mathbb{F}_7[x]/(x^2 + 2)$ - поле

$$\frac{x^3 + 4}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{x \cdot (-2) + 4}{5 \cdot (-2) + 4x + 1} = \frac{-2x + 4}{4x - 2} = (-2x + 4)(4x + 2) = x^2 - 12x - 8 =$$

$$\text{Найдём } \frac{1}{4x - 2} = g(x)$$

$$g(x) \cdot (4x - 2) = 1 \quad : (x^2 + 2)$$

$$g(x) \cdot (4x - 2) - a(x)(x^2 + 2) = 1$$

По обрат. алг. Евклида:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2 & 4x - 2 \\ \hline 8x^2 - 4x & 2x + 1 \\ \hline 4x + 2 & \\ \hline 4x - 2 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 = (4x - 2)(2x + 1) + 4$$

$$4 = (x^2 + 2) \cdot 1 - (4x - 2)(2x + 1) \quad | \cdot \frac{1}{4} = 2 \text{ в } \mathbb{F}_7$$

$$1 = 2(x^2 + 2) - (4x - 2)(4x + 2) \Rightarrow g(x) = 4x + 2$$

⑤ Доказать, что поле и вычислить

$x^2 + 2x + 3$ не имеет корней в $\mathbb{F}_5 \Rightarrow \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + 2x + 3)$ - поле

$$\frac{3x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{4x + 3} + (x^3 + 3x^2 + 1)(3x^2 + 3x + 3) - \frac{4x^3 + 3x^2 + 2}{4x^2 + 2x + 4}$$

$$(*) : \frac{3x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{4x + 3} = \frac{3x^2 \cdot x + 3(x^2 + 2x) - 2x + 4}{4x + 3} =$$

$$= \frac{3x(-3 - 2x) + 3 \cdot (-3) - 2x + 4}{4x + 3} = \frac{-6x^2 - 11x - 5}{4x + 3} =$$

$$= \frac{-x^2 - x}{4x + 3} = \frac{-(x^2 + 2x) + x - x}{4x + 3} = \frac{3}{4x + 3} = 3 \cdot 2x = -6x = x$$

Найдём $\frac{1}{4x + 3} = g(x)$:

$$g(x)(4x + 3) + a(x)(x^2 + 2x + 3) = 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x + 3 & 4x + 3 \\ -4x^2 - 3x & -x \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$3 = (x^2 + 2x + 3) \cdot 1 - x(4x + 3) \quad | \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ в } \mathbb{F}_5$$

$$1 = 2(x^2 + 2x + 3) - 2x(4x + 3)$$

$$g(x) = 2x$$

$$(*) : \frac{4x^3 + 3x^2 + 2}{4x^2 + 2x + 4} = \frac{4x(-2x - 3) + 3(-3 - 2x) + 2}{4(-2x - 3) + 2x + 4} = \frac{-8x^2 - 12x - 9 - 6x + 2}{-8x - 12 + 2x + 4} =$$

$$= \frac{-8(-2x - 3) - 18x - 7}{-6x - 8} = \frac{-2x + 17}{-x - 3} = (-2x + 2)(-x - 1) = 2x^2 + 4x - 2 =$$

$$g(x)(-x - 3) + a(x)(x^2 + 2x + 3) = 1$$

$$\begin{aligned} &= +4x + 6 + 2 + 4x = \\ &= +8x + 4 = \\ &= \underline{3x + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 + 2x + 3 & -x - 3 \\
 \hline
 x^2 + 3x & -x + 1 \\
 \hline
 & -x + 3 \\
 & -x + 3 \\
 \hline
 & 0 = 1
 \end{array}$$

$$1 = (x^2 + 2x + 3) + (-x - 3)(-x + 1) \Rightarrow g(x) = x - 1$$

$$(*) : (x^3 + 3x^2 + 1)(3x^2 + 3x + 3) = (x(-2x - 3) + 3(-2x - 3) + 1) \times$$

$$\times (3(-2x - 3) + 3x + 3) = (-2x^2 - 3x - 6x - 9 + 1)(-6x - 9 + 3x + 3) =$$

$$= (-2(-2x - 3) - 9x - 8)(-3x - 6) = (-5x - 2)(-3x - 6) =$$

$$= (0x - 2)(-3x - 1) = \cancel{6x^2 + 6x - 2x + 2} = \cancel{-6(-2x - 3) + 6x - 2x + 2} =$$

$$= \cancel{12x + 18 + 4x + 2} = \cancel{16x + 20} = \underline{x}$$

$$= 6x + 2 = x + 2$$