ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. ФСР – любы $n-r$ линейно независимых столбцов, являющихся решениями ОСЛАУ $Ax=0$.
(n – кол-во переменных, $r=RgA$).

2. Критерий $\exists$ ненулевого решения ОСЛАУ с квадратной матрицей: A – кв. матрица

$Ax=0$ имеет ненул. решение $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

3. Теорема о структуре общего решения ОСЛАУ.
Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ – ФСР ОСЛАУ $Ax=0$ ($k=n-r$, где n – кол-во пер., $r=RgA$).
Тогда $\forall$ реш. этой СЛАУ можно представить в виде:

$x = c_1\Phi_1 + \dots + c_k\Phi_k$, где $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ – некоторые числа.

4. Теорема о структуре общего решения НСЛАУ

$\tilde{x}$ – частное реш. $Ax=b$.
Тогда $\forall$ реш. этой СЛАУ можно представить в виде:

$x = \tilde{x} + c_1\Phi_1 + \dots + c_k\Phi_k$, где $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ – ФСР соотв. ОСЛАУ $Ax=0$,
$k=n-r$ (n – число пер., $r=RgA$).

5. Алгебраическая форма записи комплексного числа: $z = x+iy$, где $i=(0,1)$.

и **6.** Тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ – модуль к.ч., φ – аргумент к.ч. – угол между положительным направлением вещественной оси и числом $z=x+iy$ (отсчитывается против часовой стрелки).

7. Умножение и деление. Свойства аргумента и модуля.

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\qquad$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

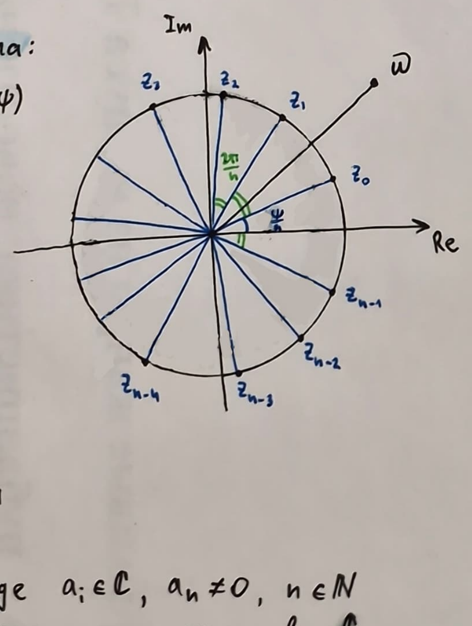
$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$ $\qquad$ $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

8. Комплексное сопряжение – смена знака у мнимой части компл. числа. $\bar{z} = x - iy$
Можно делить так: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

9. Формула Муавра:

$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

10. Нахождение компл. корней n-й степени из компл. числа:



1) Представить число в триг. форме: $\omega = P(\cos\psi + i\sin\psi)$
2) Ищем корни в триг. форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
3) Использовать ф. Муавра для z

$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
$\parallel$
$\omega = P(\cos\psi + i\sin\psi)$

приравнять модули и аргументы

$\begin{cases} P = r^n \\ \psi = n\varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} r = \sqrt[n]{P} \\ \varphi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Итог: $\sqrt[n]{\omega} = \left\{ z = \sqrt[n]{P}\left(\cos\left(\frac{\psi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\psi+2\pi k}{n}\right)\right)\right\}$ при $k=\overline{0, n-1}$

11. Основная теорема алгебры:
Для $\forall$ многочлена $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, где $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$
$\exists$ корень уравнения $f(z)=0$, и этот корень z_0 принадлежит множеству $\mathbb{C}$.
Теорема Безу: остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-c$ равен $f(c)$

12. Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

13. Формула Виета для многочлена третьей степени

$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, c_1, c_2, c_3 - корни

$$\begin{cases} a_1 = -(c_1 + c_2 + c_3) \\ a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 \\ a_3 = -c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \end{cases}$$

14. Многочлен называется неприводимым, если не существует нетривиальное разложение $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

15. Многочлен над $\mathbb{C}$ в степени n всегда разлагается в произведение степеней линейных множителей: $P_n(z) = a_0(z - z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{\alpha_k}$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$,

$\alpha_i \in \mathbb{N}$ - кратность корня

$z_i \in \mathbb{C}$ - корни многочлена

$i = \overline{1, k}$

16. Скалярное произведение:

$(x, y) = x \cdot \Gamma \cdot y^T$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$ - матрица Грама базиса e_1, e_2, e_3

17. Вектор $\bar{c}$ наз. векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ - угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$
2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$
3) тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - правая

18. Алгебраические свойства векторного произведения:

1) антикоммутативность

$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2) дистрибутивность

$(\alpha\bar{a}) \times \bar{b} = \alpha(\bar{a} \times \bar{b})$

$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$

3) следствие антикоммутативности

$\bar{a} \times \bar{a} = 0$

19. Вычисление векторного произведения в ОНБ.

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$

$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}(a_yb_z - b_ya_z) + \bar{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \bar{k}(a_xb_y - a_yb_x)$$

20. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ $\bar{a} \times \bar{b} = 0$.

21. Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ - число $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})$.

V - объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (они не компланарны)

$$(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = \begin{cases} V, \text{ если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ - правая тройка} \\ -V, \text{ если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ - левая тройка} \end{cases}$$

22. Объём тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, равен $V_T = \frac{1}{6}|\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle|$.

23. Смешанное произведение в ОНБ.

$$\langle x, y, z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2$$

24. Векторы $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ компланарны $\Leftrightarrow \langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\rangle = 0$

25. Прямоугольная декартова система координат – пара, состоящая из точки O и ОНБ $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

26. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ наз. уравнением поверхности S, если этому ур-ю удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на поверхности.

Поверхность S наз. геометрическим образом уравнения $F(x, y, z) = 0$.

27. Любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ определяет в пространстве плоскость.

28. $Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости, тогда

Вектор $\overline{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен плоскости и наз. её нормальным вектором.

29. Даны точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c) \in P$ $(a, b, c \neq 0)$

Тогда уравнение плоскости P в отрезках имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

a, b, c – отрезки (со знаками), отсекаемые плоскостью P на осях координат.

30. Даны плоскости $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $\quad P_1 \nparallel P_2$, тогда они пересекаются по прямой L.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$ – общие уравнения прямой L.

Векторное уравнение прямой: $\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{s}$, где $M_0(r_0) \in L$

$\overline{s} \neq 0$ – направляющий вектор прямой L, $\overline{s} = (l, m, n)$

t – параметр

Параметрическое уравнение: $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$

Каноническое уравнение: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ (Знаменатели могут равняться 0).

31. Критерий принадлежности двух прямых одной плоскости:

Прямые $L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ $\qquad \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ $\qquad \overline{s_1} = (l_1, m_1, n_1)$

$\overline{s_2} = (l_2, m_2, n_2)$

$L_1 \in \alpha$ и $L_2 \in \alpha \Leftrightarrow \langle \overline{M_1M_2}, \overline{s_1}, \overline{s_2} \rangle = 0$.

32. Бинарная операция наз. ассоциативной, если $\forall a, b, c \in X$ $\quad (a * b) * c = a * (b * c)$.

Бинарная операция наз. коммутативной, если $\forall a, b \in X$ $\quad a * b = b * a$.