Дискретная математика. HSE-SE-DM-HW4.

Ахундов Алексей Назимович

Январь-февраль 2020

Содержание

Задача 1

Пункт а

$$P = \{(x, y) \mid x = 1, y \in \mathbb{R}\}$$

Пункт б

$$P = \{(x, y) \mid y = 1, x \in \mathbb{R}\}$$

Задача 2

Пункт а

По определению распишем $R^{-1}[X]$:

$$R^{-1}[X] = \big\{y \mid x \in X \land xR^{-1}y\big\}$$

Теперь распишем $R[R^{-1}[X]]$:

$$R[R^{-1}[X]] = \big\{y \mid x \in R^{-1}[X] \land xRy\big\}$$

Учитывая определение $R^{-1}[X]$:

$$R[R^{-1}[X]] = \big\{y \mid z \in X \land zR^{-1}x \land xRy\big\}$$

По свойству обратного отношения:

$$R[R^{-1}[X]] = \{y \mid z \in X \land xRz \land xRy\}$$

Поскольку R функционально, имеем $z = y$, при этом по определению $z \in X \implies y \in X$.
Ч.Т.Д.

Пункт б

Рассмотрим следующий пример:

$$A = \{1, 2, 3\}\,, B = \{4, 5, 6\}$$
$$X = \{7\}\,, R = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$$
$$R^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

Тогда:

$$R^{-1}[\{7\}] = \varnothing, R[\varnothing] = \varnothing$$

Получаем противоречние:

$$\{7\} \nsubseteq \varnothing$$

Найден контрпример.

Задача 3

Тотальность для $f \cup g$ соблюдается, поскольку даже только в f для каждого элемента из A есть элемент из B (f содержится в $f \cup g$).

Пойдем от противного, пусть $f \cup g$ тотальна и функциональна, но $f \neq g$.
Тогда найдутся такие $y, y' \in B$ (иначе функции равны), что:

$$x \in A : (f(x) = y) \neq (g(x) = y')$$

Из этого получаем две пары в $f \cup g : (x, y), (x, y')$, что противоречит функциональности $f \cup g$.

Тогда данное в условиях утверждение верно. Ч.Т.Д.

Задача 4

Распишем формально композицию:

$$g \circ f = \{(x, y) \mid \exists z : x\mathbf{f}z \wedge z\mathbf{g}y\}$$

Докажем от противного, пусть f - не инъекция, тогда:

$$\exists x, x' : x \neq x' \wedge x\mathbf{f}y \wedge x'\mathbf{f}y$$

Тогда и для x, и для x' обязательно найдется (тотальность, функциональность для f) z такое, что

$$x\mathbf{f}z, x'\mathbf{f}z$$

По тотальности g получим соответственно:

$$t, t' : z\mathbf{g}t, z\mathbf{g}t'$$

Поскольку g функционально, $t = t'$, то есть получаем две пары в $g \circ f : (x, t), (x', t)$, противоречие с посылкой ($g \circ f$ - не инъекция).

Тогда данное в условиях утверждение верно. Ч.Т.Д.

Задача 5

Докажем, что если f инъективна, выполняется данное в условиях утверждение:

При данной инъективности для f для нее существует обратная функция f^{-1}, а если так, то домножим данное в условиях равенство (для всех C, g, h) слева (обе части) на f^{-1}, немедленно получим $g = h$.

А теперь докажем, что если f неинъективна, данное в условиях утверждение не выполняется:

Требуется показать:

$$\exists C, h, g : f \circ g = f \circ h \;\not\Longrightarrow\; g = h$$

Из неинъективности имеем:

$$\exists x_1 \neq x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$$

Тогда рассмотрим такой пример:

$$C = \{1\}$$
$$g = \{(1, x_1)\}$$
$$h = \{(1, x_2)\}$$

Тогда посмотрим на данное условие:

$$f \circ g = \{(1, f(x_1))\}$$
$$f \circ h = \{(1, f(x_2))\}$$

Поскольку $f(x_1) = f(x_2), f \circ g = f \circ h$, но при этом поскольку $x_1 \neq x_2, g \neq h$.
Контрпример найден.

Задача 6

Пункт а

$$\{(0, 0.5), (1, 1), (2, 1.5)\}$$

Пункт б

$$\left\{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y = x + \sqrt{2}\right\}$$

Пункт в

$$\{((a, b), c) \mid (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \wedge c = a \cdot b\}$$

Задача 7

Ввдем два множества (индексные, биекция между ними и исходными A и B тривиальна):

$$Id_A = \{(0, a) \mid a \in A\}$$

$$Id_B = \{(1, b) \mid b \in B\}$$

А так же две вспомогательные функции:

$$\kappa : C^{Id_A \cup Id_B} \mapsto C^A, \kappa(\phi) = \{(a, c) \mid ((0, a), c) \in \phi\}$$

$$\delta : C^{Id_A \cup Id_B} \mapsto C^B, \delta(\phi) = \{(b, c) \mid ((1, b), c) \in \phi\}$$

А теперь рассмотрим следующую функцию (тотальность и функциональность соблюдается):

$$f : C^{Id_A \cup Id_B} \mapsto C^A \times C^B,\ f = (\kappa(f), \delta(f))$$

Теперь если мы найдем обратную к ней функцию, получим биекцию (поскольку тогда f инъективна в силу функциональности обратной и сюръективна в силу тотальности обратной).

$$f^{-1} : C^A \times C^B \mapsto C^{Id_A \cup Id_B}$$

$$f^{-1}((\kappa(f), \delta(f))) = \{((0, a), c) \mid (a, c) \in \kappa(f)\} \cup \{((1, b), c) \mid (b, c) \in \delta(f)\}$$

Тотальность здесь объясняется тем, что пара - результат f - лежит либо в Id_A, либо в Id_B. Функционально это отображение будет тогда и только тогда, когда пара не находится в обоих Id_A и Id_B одновременно, но по условию это не так, значит $f^{-1}-$ функция, а f - биекция. Ч.Т.Д.

Задача 8

В множестве $\mathcal{P}_1(A)$, согласно определению, содержатся только синглетоны элементов множества A, т.е. поскольку никакие другие (содержащие больше одного элемента) подмножества A не являются синглетонами:

$$\mathcal{P}_1(A) = \{\{x\} \mid x \in A\}$$

Тогда каждому элементу из A сопоставим его синглетон, а каждому синглетону из $\mathcal{P}_1(A)$ вида $\{x\}$ сопоставим $x \in A$ - получим биекцию.

Задача 9

Пункт а

Рассмотрим правую часть с помощью характеристической функции

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\setminus C)\cup(B\setminus C)} &= \mathbb{1}_{A\setminus C} + \mathbb{1}_{B\setminus C} - \mathbb{1}_{A\setminus C}\cdot\mathbb{1}_{B\setminus C}\\
&= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C) + (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C) - \mathbb{1}_{A\setminus C}\cdot\mathbb{1}_{B\setminus C}\\
&= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C) + (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C) - (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C)\cdot(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C)\\
&= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C) + (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C) - (\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C\cdot\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C^2)\\
&\overset{\text{Поскольку } \mathbb{1}_C^2=\mathbb{1}_C}{=} (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C) + (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C) - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$

А теперь преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus C} &= \mathbb{1}_{A\cup B} - \mathbb{1}_{A\cup B}\cdot\mathbb{1}_C\\
&= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B) - (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B)\cdot\mathbb{1}_C\\
&= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C) + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B - (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B)\cdot\mathbb{1}_C\\
&= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C) + (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C) - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_C
\end{aligned}$$

Получаем одинаковые выражения для сторон равенства.

Пункт б

Рассмотрим левую часть равенства из условия с помощью характеристической функции:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\setminus B)\cup B} &= \mathbb{1}_{A\setminus B} + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\setminus B}\cdot\mathbb{1}_B\\
&= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B - (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B)\cdot\mathbb{1}_B
\end{aligned}$$

Из равенства:

$$\mathbb{1}_A = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B - (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B)\cdot\mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B - (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B)\cdot\mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B^2$$

Поскольку $\mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_B$:

$$\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B$$

Получаем (справа налево), что элемент лежит в B эквивалентно тому, что он лежит и в A, и в B, получаем определение вложения, проделав те же действия с конца получим данное в условиях равенство

Задача 10

Пункт а

Докажем $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim 2^N$

По инъекции в себя ($\varphi(n) = n$) для $2^{\mathbb{N}}$ имеем $2^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим функцию $I(a) = \dfrac{10^{a+1} - 1}{9}$ ($a + 1$ единиц в 10-чной системе счистления).

Отобразим ряд натуральных чисел (конструируем число, склеивая цифры):

$$n_1, n_2 \dots n_n \mapsto I(n_1)\ 0\ I(n_2)\ 0\ I(n_3) \dots I(n_n)$$

Это отображение инъективно, поскольку если хотя бы одно число в последовательностях различается, мы получим различные цепочки (из-за "перегородок"в виде нулей).

Заметим также, что мы нашли биекцию (тем же образом) $\underline{n}^N \sim 2^N$

Приведем цепочку рассуждений, имея этот факт:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim N^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \sim 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$$

С другой стороны рассмотрим $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$$

Получаем тогда, что

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$$

Q.E.D.

Пункт б

Имея факт из пункта а, скажем:

$$\underline{3}^N \sim \underline{2}^N$$

$$\underline{5}^N \sim \underline{2}^N$$

В силу транзитивности

$$\underline{3}^N \sim \underline{5}^N$$

Q.E.D.

Пункт в

Инъекцию из квадрата в круг можно сделать, сдвигая и растягивая его так, чтобы окружность стала вписанной в него (сдвиги и растягивания - биекции в себя, поэтому круг и квадрат остаются равномощны своим оригинальным образам), и наоборот. Используем теорему КБШ и получаем доказуемое.

Пункт г

Треугольник задается 6 числами (соответственно координатами задающих его точек), то есть мощность множества треугольников равна мощности $\mathbb{R}^6$ (декаторва степень).
Воспользовавшись тем, что $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$, получаем

$$\mathbb{R}^6 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

.
Q.E.D.

Задача 11

Для каждой восьмерки выберем две точки с рациональными координатами (для детерменированности - всегда левую верхнюю), такие точно существуют, поскольку в каждую из окружностей восьмерки можно вписать квадрат:

$$f : X \to Q^2 \times Q^2$$

Покажем, что это инъекция.

> От противного - если найдется другая восьмерка, то она пересекает нашу, чего по условиям задачи быть не должно.

Тогда множество восьмерок биективно двум двойкам рациональных чисел:

$$|X| \lesssim Q^2 \times Q^2 \lesssim N^2 \times N^2 \lesssim N \times N \lesssim N$$

Q.E.D.

Задача 12

Замостим числовую прямую (по $\mathbb{R}$) отрезками: сначала отрезки (множество чисел между левым элементом меньшим, чем правый) из множества A, потом из множества B **попеременно**, причем множества не пересекаются. Также определим S как объединение A и B.

Условие а

"Распакуем" наши интервалы (то есть просто выпишем элементы из отрезков подряд) и получим как раз R по определению S

Условие б

Рассмотрим два случая. Мы либо взяли два отрезка из A, они не равны и их пересечение пустое, поскольку между ними есть отрезок из B (аналогично для двух отрезков из B), либо же мы взяли отрезки из A и B соответственно, тогда они по определению не равны поскольку отвечают за два разных интервалла (хоть и идущих подряд).

Условие в

Воспользуемся утверждением (доказано на семинаре) о том, что непрерывный интервалл ($\subseteq \mathbb{R}$)

Задача 13

Мощность множества J непрерывных функций не меньше континуума:

Приведем непрерывные функции $\forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} : f(x) = c$ как инъекцию из J в $\mathbb{R}$

Теперь докажем что их не больше континнума:

Построим инъекцию из $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ в множество непрерывных функций. Для этого докажем, что непрерывная функция однозначно определяется по значениям в рациональных точках (то есть только по ним можно точно определить значение в любой точке).

Используем определение по Гейне для непрерывной функции g: для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется последовательность $\{q\}_n$, сходящаяся к x и

$$\lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(x)$$

Поскольку мы знаем значения g в каждой рациональной точке, сможем определить значения во всех. Тогда искомая инъекция есть сопоставление $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ своей непрерывной функции со значениями f в рациональных точках.

Мы построили инъекцию из $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Применим теорему Кантора-Бернштейна-Шварца и получим $|J| = |\mathbb{R}|$. Q.E.D.