Homework - 12.

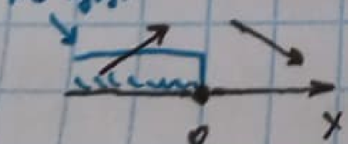
#1.

$y = \operatorname{arctg} x - \ln x$ $\qquad D_y = (0; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x-1-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{x^2-x+1}{-x(x^2+1)}$$

$x^2 - x + 1 > 0$, т.к. $D = 1 - 4 < 0$

$x^2 + 1 > 0$



$\boxed{\text{Ответ: убывает на } (0; +\infty)}$

#2.

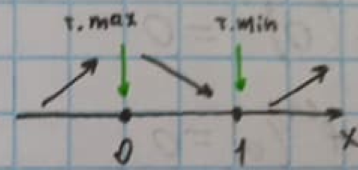
a) $y=(x^2+1)\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}x^2-x$

$$y'=2x\cdot\operatorname{arctg}x+\underbrace{(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+x^2}}_{=1}-\frac{2\pi}{4}x-1=x\left(2\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Нули: $x=0$; $2\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}=0$

$\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}$

$x=1$



$$y_{min}^{лок}=y(1)=(1+1)\operatorname{arctg}1-\frac{\pi}{4}\cdot1-1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi}{4}-1$$

$$y_{max}^{лок}=y(0)=(0+1)\operatorname{arctg}0-\frac{\pi}{4}\cdot0-0=\operatorname{arctg}0=0$$

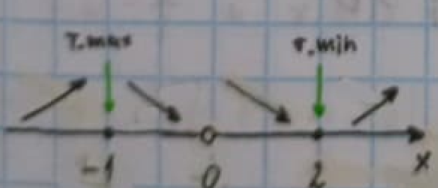
Ответ: $y_{min}^{лок}=\frac{\pi}{4}-1$; $y_{max}^{лок}=0$

b) $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

$$y'=e^{\frac{1}{x}}+(x+2)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(x+1)(x-2)$$

Нули: $x\neq0$; $x=-1$; $x=2$



$$y_{max}^{лок}=y(-1)=(-1+2)e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$y_{min}^{лок}=y(2)=(2+2)e^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{e}$$

Ответ: $y_{лок.max}=\frac{1}{e}$; $y_{лок.min}=4\sqrt{e}$

#3.

a) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} x e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(a) По методу математической индукции

$f'(0)=(0)'=0$

Пусть $f^{(n)}(0)=0$

$f^{(n+1)}=f(0)'=(0)'=0$

Т.к. все равны 0, то производные так же будут равны 0

Аналогично, $g^{(n)}(0)=0$, т.к. $g'(0)=0$

$g''(0)=0$

$g'''(0)=0\ldots$

ч.т.д.

(b) $f'(x)=\begin{cases} 2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Нули: $x=0$

при $x\in(-\infty;0)$ $\quad 2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}<0$

при $x\in(0;+\infty)$ $\quad 2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}>0$

$\Rightarrow$ в $x=0$ – строгий минимум

$g'(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\qquad \left[e^{-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right]$

Нули: $x=0$

при $x\in(0;+\infty)$ $\quad e^{-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)>0$

при $x\in(-\infty;0)$ $\quad e^{-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)>0$

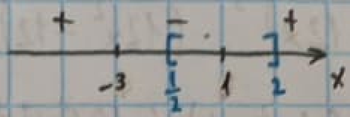
$\Rightarrow x=0$ – не т. экстремума

ч.т.д.

#4.

$y = |x^2 + 2x - 3| + 1{,}5 \ln x$ на $[0{,}5; 2]$

$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$



1) при $x \in [0{,}5; 1)$

$y = -x^2 - 2x + 3 + \frac{3}{2}\ln x$

$y' = -2x - 2 + \frac{3}{2x} = \frac{-4x^2 - 4x + 3}{2x} = \frac{4x^2 + 4x - 3}{-2x} = \frac{4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2})}{-2x}$

Нули: $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{3}{2}$, $x = 0$

2) при $x \in [1; 2]$

$y = x^2 + 2x - 3 + \frac{3}{2}\ln x$

$y' = 2x + 2 + \frac{3}{2x} = \frac{4x^2 + 4x + 3}{2x}$ $\quad 4x^2 + 4x + 3 > 0$, т.к. $D = 16 - 48 < 0$

Нули: $x = 0$

$D_y = (0; +\infty)$ # т.к. $\ln x$, то $x > 0$

из-за модуля

Тогда наиб. и наим. значения могут быть в $x = \{\frac{1}{2}; 1; 2\}$

($x = -\frac{3}{2}$ и $x = 0$ не удовлетворяют ОДЗ)

$y(\frac{1}{2}) = |\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3| + \frac{3}{2}\ln\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}\ln\frac{1}{2}$

$y(1) = |1 + 2 - 3| + 1{,}5\ln 1 = 0 + 1{,}5 \cdot 0 = 0$

$y(2) = |4 + 2 \cdot 2 - 3| + 1{,}5\ln 2 = 4 + 4 - 3 + \frac{3}{2}\ln 2 = 5 + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$

Ответ: $y_{наим.} = y(1) = 0$

$y_{наиб.} = y(2) = 5 + \frac{3}{2}\ln 2$

#5.

$$y = \sqrt[3]{4x^3-12x} = (4x^3-12x)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}(4x^3-12x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(12x^2-12) = (4x^3-12x)^{-\frac{2}{3}}(4x^2-4)$$

$$y'' = (12x^2-12)(4x^2-4)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(4x^3-12x)^{-\frac{5}{3}} + (4x^3-12x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 8x =$$

$$= \frac{-8}{(4x(x^2-3))^{\frac{5}{3}}}\left((4x^2-4)(x^2-1) - (4x^3-12x)x\right) =$$

$$= \frac{-8(4x^4-4x^2-4x^2+4-4x^4+12x^2)}{(4x(x^2-3))^{\frac{5}{3}}} = \frac{-8(4x^2+4)}{(4x(x^2-3))^{\frac{5}{3}}}$$

Нули: $x=0$; $x=\pm\sqrt{3}$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \quad x \end{array}$$

Ответ: 0, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ – точки перегиба

$(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ – выпукла вниз

$(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ – выпукла вверх