Лекция 12, 01.12.23

**Опр:** $x = y \iff \forall z\,(z \in x \iff z \in y)$

$\{1,0\} = \{0,1\}$

Хотим $(a,b) = (c,d) \iff a = c \wedge b = d$

**Опр (по Куратовскому):** $\forall a,b \quad (a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$

↑упоряд. пара мн-в a и b

**Теорема 1 (критерий равенства упоряд. пар):** $\forall a,b,c,d$

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \wedge b = d$$

**Док-во:** $\Leftarrow$ „равные множества ведут себя одинаково"

$\Rightarrow$ $(a,b) = (c,d)$, т.е. $\{\{a\},\{a,b\}\} \overset{(*)}{=} \{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \{a\} \in \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \{a\} = \{c\}^{\ni c} \vee \{a\} = \{c,d\}^{\ni c}$

$\Rightarrow c \in \{a\} \vee c \in \{a\}$

$\Rightarrow c = a$

Имеем: $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$

$\Rightarrow \{a,b\} \in \{\{a\},\{a,d\}\}$

$\Rightarrow \{a,b\} = \{a\} \lor \{a,b\} = \{a,d\}$

$b\in$ $\quad$ $b\in$

$\Rightarrow b \in \{a\}$ $\quad\mid\quad$ $\Rightarrow b \in \{a,d\}$

$\Rightarrow b = a$ $\quad\mid\quad$ $\Rightarrow b=a \lor \boxed{b=d}$ $\oplus$

I сл.

I сл.: $c=a \land b=a$

Тогда: $\{\{a\}\} = \{\{a\},\overbrace{\{a,\ \}}^{=\{a\}}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$

$\Rightarrow \{a,d\} \in \{\{a\}\}$

$\Rightarrow d \in \{a,d\} = \{a\}$

$\Rightarrow d \in \{a\}$

$\Rightarrow \boxed{d=a}=b$ $\oplus$

**Следствие 2:** $(a,b) = (b,a) \Leftrightarrow a=b$

**Лемма 3:** $a,b \in X \Rightarrow (a,b) \in P(P(X))$

**Док-во:** $a,b \in X \Rightarrow \{a\},\{a,b\} \subseteq X$

$\Rightarrow \{a\},\{a,b\} \in P(X)$

$\Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq P(X)$

$\Rightarrow \underbrace{\{\{a\},\{a,b\}\}}_{(a,b)} \in P(x)$

декартово произв. $A \times B$

**Опр:** $\forall A,B \quad A\times B := \{z \in P(P(A\cup B)) \mid \exists x\, \exists y\, (z=(x,y) \land x\in A \land y \in B)\}$

Утв. 4: $\forall z\,(z \in A\times B \Leftrightarrow \exists x\, \exists y\,(z=(x,y) \wedge x\in A \wedge y \in B))$

Док-во: $z \in A\times B \underset{\text{опр. } A\times B + (\text{II})}{\Rightarrow} \exists x\,\exists y\,(\ldots)$

($\Leftarrow$) Пусть $\exists x\,\exists y\,(z=(x,y) \wedge x\in A \wedge x \in B)$

Тогда $x, y \in A\cup B$. По Л3, $z=(x,y)\in P(P(A\cup B))$

По опр. $A\times B$, $z \in A\times B$.

Лемма 4: $(x,y)\in A\times B \Rightarrow x\in A \wedge y\in B$.

Пример: Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$

$$A\oplus B \overset{\text{опр.}}{=} \{z\in \mathbb{N} \mid \exists x\in A\ \exists y \in B\quad z=x+y\}$$

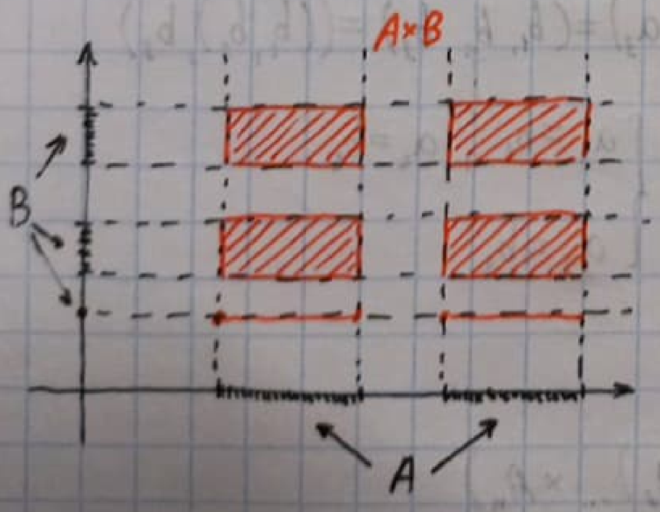
$$2+2=3+1=1+3 \in \{1\}\oplus\{3\}$$

$$2\notin\{1\}$$

$$2\notin\{3\}$$

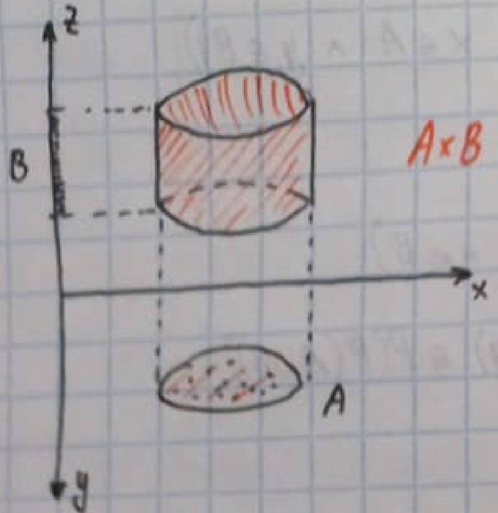
Док-во: $(x,y)\in A\times B \underset{\text{опр.}}{\Rightarrow} \exists x_1\,\exists y_1\,(\underbrace{(x,y)=(x_1,y_1)}_{\substack{\Downarrow\ \text{T1, круп} \\ x=x_1\ \wedge\ y=y_1}} \wedge x_1\in A \wedge y_1 \in B)$

$\Rightarrow x\in A \wedge y \in B$

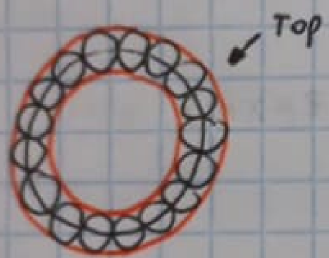



$A, B \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$




$\overset{\text{окр.}}{S} \times \overset{\text{круг}}{D}$




**Опр:** Пусть есть мн-ва $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 2$: $\quad | \ (x, y, z) := ((x, y), z)$

упор. набор или кортеж мн-в $a_1, \dots, a_n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) := ((\dots(((a_1, a_2), a_3), a_4) \dots, a_{n-1}), a_n)$$

**Следствие 5** (критерий равенства кортежей):

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall_i \ a_i = b_i$$

**Док-во:** опр: $((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = ((b_1, b_2), b_3)$

По круп, $\begin{cases} (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \\ a_3 = b_3 \end{cases} \overset{\text{круп}}{\Rightarrow} \begin{cases} a_1 = b_1, \ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

**Опр:** $A \times B \times C := (A \times B) \times C$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := (\dots((A_1 \times A_2) \times A_3) \dots \times A_n$$

**Следствие 6:** $z \in A_1 \times \dots \times A_n \Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \ (x \in A_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \wedge z = (x_1, \dots, x_n))$

**Следствие 7:** $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n \Rightarrow x_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n$

**Опр** (декартова степень):

$A^0 = \{\varnothing\}$

$A^1 = A$

$n \geqslant 2 \Rightarrow A^n = \overbrace{A \times \ldots \times A}^{n \text{ копий } A} = (\ldots(A \times A) \times A \times \ldots \times A$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$\not\asymp \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

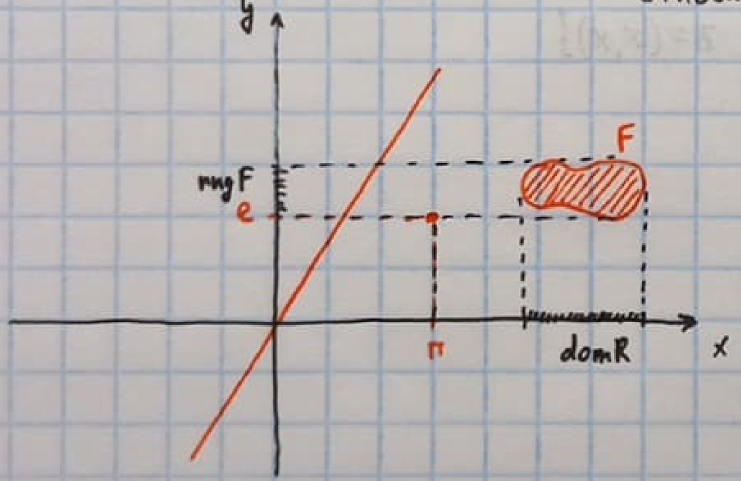
**Опр:** Пусть $A$ и $B$ – множества

Любые $R \subseteq A \times B$ называются (бинарным) отношением между $A$ и $B$.

**Пример:** $A := \mathbb{R}$; $B := \mathbb{R}$

отношения между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$

$\varnothing$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{(\pi, e)\}$, $\{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $F$




$R = \{(1,2), (2,2), (3,2), (5,1), (4,7)\}$

$\operatorname{dom} R = \{1, 2, 3, 5, 4\}$

$R \subseteq \{1, 2, 3, 5, 4\} \times \{2, 1, 7\}$

$\operatorname{rng} R = \{2, 1, 7\}$

**Опр:** Пусть $R \subseteq A \times B$

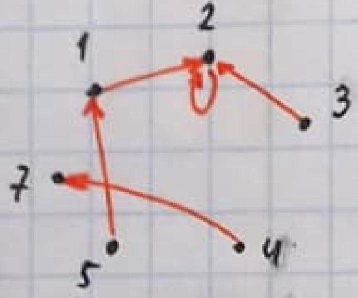
Тогда $\underset{\text{область определения}}{\operatorname{dom}} R = \{x \in A \mid \exists y\ (x, y) \in R\}$

$\underset{\text{область значений}}{\operatorname{rng}} R = \{y \in B \mid \exists x\ (x, y) \in R\}$

**Обознач:** $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

**Утв:** $\forall R \quad R \subseteq \operatorname{dom} R \times \operatorname{rng} R$

диаграмма $R$




**Опр (обращение):** Пусть $R \subseteq A \times B$

Тогда $R^{-1} := \{(y,x) \in B \times A \mid xRy\}$

<u>для педантов</u>

$$= \{z \in P(P(B \cup A)) \mid \exists x\ \exists y\ (\cancel{x \in A \wedge y \in B} \wedge z = (y,x) \wedge xRy)\}$$

**Опр:** $R$ – бинарное отношение на $A \Leftrightarrow R \subseteq A \times A$

**Опр:** $\forall A\quad id_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$

$$= \{z \in A^2 \mid \exists x\ \ z = (x,x)\}$$

$id_A^{-1} = id_A$

$\varnothing^{-1} = \varnothing$

$(A \times B)^{-1} = B \times A$