Параметрическое задание функций.

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывныы на интервале (α, β) и фукнция $\varphi(t)$ строго монотонна на (α, β). Тогда система уравнений

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

определяет единственную и непрерывную функцию

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

на интервале $(a; b)$, где

$$a = \lim_{t\to\alpha+0} \varphi(t), \qquad b = \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t).$$

1. Доказать, что данная система уравнений определяет непрерывную функцию $y(x)$ или $x(y)$

$$a)\ x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \frac{1}{1+t^2}, \qquad b)\ x = \frac{t-1}{\sqrt{t}}, \quad y = \frac{t+1}{\sqrt{t}}.$$

2. Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$a)\ x = e^{-t},\ y = t^3,\ t \in \mathbb{R}; \qquad b)\ x = t^2 + 6t + 5,\ y = \frac{t^3 - 54}{t},\ t > 0.$$

3. Найти интервалы возрастания и убывания фукнции $y = f(x)$, заданной параметрически

$$x = \frac{e^{-t}}{1-t}, \quad y = \frac{e^t}{1-t}, \quad t > 1.$$

4. Написать уравнение касательной и нормали к кривой в точке M

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad M\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}; \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$$

5. Найти точки перегиба графика функции $y = f(x)$, заданной параметрически

$$x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t^3}{t-1}, \quad t > 2.$$

Домашнее задание

1. Доказать, что данная система уравнений определяет непрерывную функцию $y(x)$ или $x(y)$

$$a)\ x = \ln(1+e^{-t}), \quad y = \ln(1+e^t), \qquad b)\ x = \frac{1}{4}(t-4)e^t, \quad y = \sqrt{t}\cdot e^t.$$

2. Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$a)\ x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \qquad t \in (0;\pi);$$

$$b)\ x = (t-1)^2(t-2), \quad y = (t-1)^2(t-3), \qquad t > \frac{5}{3}.$$

3. Исследовать на экстремум функцию $y = f(x)$, заданную параметрически

$$x = \ln\sin\frac{t}{2}, \quad y = \ln\sin t, \quad t \in (0;\pi).$$

4. Написать уравнение касательной и нормали к кривой в точке M

$$x = \frac{1+t}{t^3}, \quad y = \frac{3+t}{2t^2}, \quad M(2;2).$$

5. Построить кривую с учетом замечаний ниже

$$x = \frac{1}{t(t+1)}, \quad y = \frac{(t+1)^2}{t}$$

Система уравнений $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ в случае, когда $\varphi(t)$ не является строго монотонной функцией, может задавать не функцию (т.е. одному значению x может соответствовать несколько значений y), а просто множество пар $(\varphi(t); \psi(t))$, где t пробегает либо указанное множество значений, либо множество значений, при которых φ, ψ имеюn смысл, если множество для t не указано явно.

Множество точек на координатной плоскости с координатами $(\varphi(t); \psi(t))$ называется кривой, задаваемой системой уравнений.

Если $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ достаточно «хорошие функции» (дифференцируемые несколько раз на своей области определения), то построение кривой происходит следующем образом:

• Исследуются промежутки монотонности функций $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Выбирается та, у которой их меньше. Пусть это $x(t)$.

• Внутри каждого промежутка монотонности верно замечание из начала классной работы т.е. существует функция $y(x)$, которую можно исследовать с помощью подсчета первой и второй производной. На границах промежутка функции исследуются отдельно подсчетом пределов.

• На каждом промежутке отдельно строится график получившейся функции, которые потом «склеиваются» в кривую.

Из этой схемы выпадает вопрос с нахождением асимптот, они в параметрическом случае определяются иначе.

Прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a} y(t) = \infty, \tag{8}$$

или

$$\lim_{t\to a+0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a+0} y(t) = \infty, \tag{9}$$

или

$$\lim_{t\to a-0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a-0} y(t) = \infty. \tag{10}$$

Прямую $y = b$ называют *горизонтальной асимптотой* кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $x \to +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a} y(t) = b, \tag{11}$$

или

$$\lim_{t\to a-0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a-0} y(t) = b, \tag{12}$$

или

$$\lim_{t\to a+0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a+0} y(t) = b. \tag{13}$$

Прямую $y = kx + b$, $k \neq 0$, называют *наклонной асимптотой* кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ *при* $x \to +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a} y(t) = \infty, \tag{14}$$

$$\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = k, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to a} (y(t) - kx(t)) = b, \tag{16}$$

или условия (14)–(16) выполнены при $t \to a - 0$, или условия (14)–(16) выполнены при $t \to a + 0$. Аналогично даются определения асимптот при $x \to -\infty$.

Задачи для самостоятельного решения

На квизе будут предложены системы уравнений, задающих кривые (т.е. не обязательно функции), и нужно будет провести полный или частичный анализ данных кривых и построить их. Имеет смысл написать программу, которая будет строить данные кривые, чтобы проверить себя, правильный ли график получился.

1. $$x = \frac{t^2}{t-1}, \qquad y = \frac{t^2-1}{t};$$
2. $$x = \frac{(t+1)^2}{t}, \qquad y = \frac{t+1}{t+2};$$
3. $$x = \frac{t^2}{1-2t}, \qquad y = \frac{t^3}{1-2t};$$
4. $$x = \frac{t^2}{1+t^3}, \qquad y = \frac{t^3}{1+t^3};$$
5. $$x = e^t - t, \qquad y = e^{2t} - 2t;$$
6. $$x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t, \qquad y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t.$$