Лекция 8, 03. 11. 23

Критерий Коши

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Theorem: a_n - сход. $\iff$ a_n - фунд.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n, k > N(\varepsilon) \quad |a_n - a_k| < \varepsilon$

Док: $\lim a_n = a$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1(\varepsilon) \quad |a_n - a| < \varepsilon$

? $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n, k > N(\varepsilon) \quad |a_n - a_k| < \varepsilon$

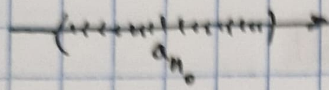
$\Updownarrow$

$N(\varepsilon) = N_1(\frac{\varepsilon}{2}) \quad \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_k - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |(a_n - a) + (a - a_k)| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ 1) Если a_n фунд., то a_n огр.

Возьмём $\varepsilon = 10$ $\forall n, k > N(10)$ $|a_n - a_k| < 10$

Зафиксируем $n_0 > N(10)$ $\forall n > N(10)$ $a_n \in U_{10}(a_{n_0})$



огр. сверху $\max\{a_{n_0}+10, a_1, \dots, a_{n_0}\}$

огр. снизу $\min\{a_{n_0}-10, a_1, \dots, a_{n_0}\}$

2) По т. Б-В:

$\exists n_k : a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_2(\varepsilon) : \forall k > N_2(\varepsilon)$ $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$

$|a_n - a| < \varepsilon$

$\Uparrow$

$\underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$

$k > N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, тогда $n_k > N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$n, k > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$n, n_k > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

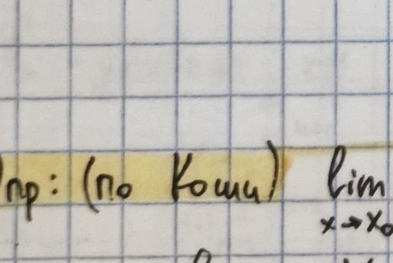
$N_1(\varepsilon) = \max\{N(\frac{\varepsilon}{2}); N_2(\frac{\varepsilon}{2})\}$ ч.т.д.

Предел функции

Опр: (по Коши) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ $x_0 \in \mathbb{R}$

если верно $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$



Пример: $\lim\limits_{x\to 3}(2x+7) = 13$

$0 < |x-3| < \delta$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(3)$ $|2x + 7 - 13| < \varepsilon$

$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$

$|2x - 6| < \varepsilon$

$|2(x-3)| < \varepsilon$

$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$

Опр: (по Гейне)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если $\forall \{x_n\}$ $\underset{x_n \neq x_0}{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Пример: $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 7) = 13$

$\forall \underset{x_n \neq 3}{x_n \to 3} \Rightarrow f(x_n) = 2x_n + 7 \xrightarrow[n\to\infty]{} 13$

арифм. lim послед.

Th: опр. Коши $\Leftrightarrow$ опр. Гейне

Док-во: „$\Rightarrow$"

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ $\forall \lambda > 0$ $\exists N(\lambda): \forall n > N(\lambda)$ $0 < |x_n - x_0| < \lambda$

? $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1(\varepsilon): \forall n > N_1(\varepsilon): |f(x_n) - A| < \varepsilon$

$= N(\delta(\varepsilon))$

$\delta(\varepsilon) \to N(\delta(\varepsilon))$

$\forall n > N(\delta(\varepsilon)): 0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$\Downarrow$

$|f(x) - A| < \varepsilon$

„$\Leftarrow$" $\overline{\text{Th}}$: $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall \delta$ $\exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0): |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$

Будем последовательно брать $\delta_n = \frac{1}{n}$

$\delta_n \to x_n: \; x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Leftrightarrow |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$

$|f(x) - A| \geq \varepsilon$

Построили x_n: $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$

$|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq A$ (!)

ч.т.д.

Арифм. предела функции

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$

1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = A+B$

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$

3) Если $B\neq 0$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$

4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$ (если $\sqrt[k]{\ }$ можно извлечь)

Док (4): Рассмотрим $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, то

$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ ← арифм. lim послед.

$\Downarrow$

$\sqrt[k]{f(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[k]{A}$

$g(x_n) \longrightarrow B$

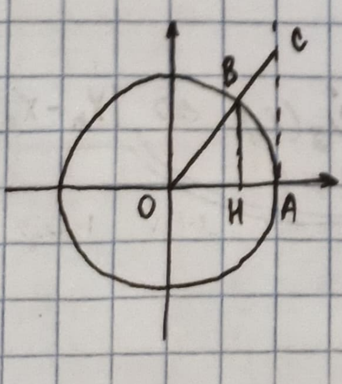
$g(x) = \sqrt[k]{f(x)}$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$ ч.т.д.

Первый замечательный lim:

Пример 0: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\overbrace{x-1}^{\to 0}}{\underbrace{x+1}_{\to 2}} = 0$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \in I: \ \sin x < x < \operatorname{tg} x$



$S_{\triangle OBA} < S_{\triangleright OBA} < S_{\triangle OAC}$

сектор

$S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2} BH\cdot \underset{=1}{OA} = \sin x$

$S_{\triangleright OBA} = \pi\cdot\frac{x}{2\pi} = x$

$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \underset{=1}{OA}\cdot AC = \operatorname{tg} x$