HSE SE. MA-1 2023-2024. Домашняя работа по семинару 21

Task: 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, используя признак сравнения.

$a)\; a_n = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$

$1.\; \forall n \in \mathbb{N} : 0 < \dfrac{\pi}{4n} \le \dfrac{\pi}{4} \implies \forall n \in \mathbb{N} : a_n \ge \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$

$2.\; \forall n \in \mathbb{N} : 0 < 2n^5 - 1 < 2n^5 \implies \forall n \in \mathbb{N} : a_n > \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{\sqrt[5]{2n^5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt[5]{2}}\dfrac{1}{n}$

$3.\; \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[5]{2}}\frac{1}{n}$ расходится

$4.\; \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[5]{2}}\frac{1}{n}$ расходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится по признаку сравнения.

Ответ: расходится

$b)\; a_n = \dfrac{n+2}{n^2\left(4+3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right)}$

$1.\; \forall n \in \mathbb{N} : -1 \le \sin\left(\dfrac{\pi n}{3}\right) \le 1 \implies \forall n \in \mathbb{N} : 1 \le 4 + 3\sin\left(\dfrac{\pi n}{3}\right) \le 7 \implies$

$\implies \forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n \ge \dfrac{n+2}{n^2 \cdot 7}$

$2.\; \forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{n+2}{n^2 \cdot 7} > \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{n} \implies \forall n \in \mathbb{N} : a_n > \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{n}$

$3.\; \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$ расходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$ расходится

$4.\; \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$ расходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n$ расходится по признаку сравнения.

Ответ: расходится

$c)\; a_n = \dfrac{\arctan\left(n^2+2n\right)}{3^n + n^2}$

$1.\; \forall n \in \mathbb{N} : \arctan(3) \le \arctan\left(n^2+2n\right) < \dfrac{\pi}{2} \implies \forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n < \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{3^n + n^2} < \dfrac{1}{n^2}$

$2.\; \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2}$ сходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n$ сходится по признаку сравнения.

Ответ: сходится

Task: 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, используя предельный признак сравнения.

$a)\, a_n = \dfrac{3n+1}{(2n+1)^2}$

1. $\dfrac{3n+1}{(2n+1)^2} \sim \dfrac{3n}{4n^2} = \dfrac{3}{4n}$ as $n \to +\infty$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{3}{4n}$ расходится

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{3}{4n}$ расходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n$ расходится по предельному признаку сравнения.

Ответ: расходится

$b)\, a_n = \sin \dfrac{2n+1}{n^3+5n+3}$

1. $\sin \dfrac{2n+1}{n^3+5n+3} \sim \dfrac{2n+1}{n^3+5n+3} \sim \dfrac{2n}{n^3} = \dfrac{2}{n^2}$ as $n \to +\infty$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{2}{n^2}$ сходится

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{2}{n^2}$ сходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n$ сходится по предельному признаку сравнения.

Ответ: сходится

$c)\, a_n = \sqrt{\dfrac{n-1}{n^2+1}} \arctan\left(\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}\right)$

1. $\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2+1}} \arctan\left(\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}\right) \sim \sqrt{\dfrac{n}{n^2}}\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}} \sim \sqrt{\dfrac{n}{n^2}}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^4}} = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$ as $n \to +\infty$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$ расходится $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n$ расходится по предельному признаку сравнения.

Ответ: расходится

Task: 3. С помощью интегрального признака и необходимого условия исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ при всех значения параметров.

1. Пусть $\alpha < 0$, тогда:

$\forall \beta \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{-\alpha}}{\ln^\beta(n)} = +\infty \implies \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ расходится

2. Пусть $\alpha \geq 0$, тогда:

Рассмотрим функцию $f(x) : [2; +\infty) \to \mathbb{R}$, такую что $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$

$$f'(x) = \left(-\alpha x^{-\alpha-1} \ln^{-\beta}(x) + x^{-\alpha} \frac{-\beta \ln^{-\beta-1}(x)}{x}\right) = \left(\frac{-\alpha \ln^{-\beta}(x) - \beta \ln^{-\beta-1}(x)}{x^{\alpha+1}}\right)$$
$$= \left(\frac{-\alpha \ln(x) - \beta}{x^{\alpha+1} \ln^{\beta+1}(x)}\right)$$

Тогда для $C = \begin{cases} \max\left(2; \left\lceil e^{\frac{-\beta}{\alpha}} \right\rceil\right), \alpha > 0 \\ 2, \alpha = 0 \end{cases}$

$\forall x \in [C; +\infty) : f'(x) < 0$

Также, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и $\forall k \geq 2 : a_k = f(k)$

Таким образом, интегральный признак может быть использован.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_{\alpha,\beta} = \int_C^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$$

$\forall x \in [C; +\infty) : x^\alpha > 0 \land \ln^\beta(x) > 0$

На лекции было доказано, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$ сходится $\iff \gamma > 1$ (#)

2.1 Пусть $\alpha = 0$, тогда:

$$I_{\alpha,\beta} = \int_C^{+\infty} \frac{dx}{\ln^\beta(x)}$$

2.1.1 Пусть $\beta > 0$, тогда:

$\beta > 0 \implies \exists C_0 \geq C : \forall x \in [C_0; +\infty) : \ln^\beta(x) < x \left(\text{так как } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln^\beta(x)} = +\infty\right)$

$\implies \forall x \in [C_0; +\infty) : \dfrac{1}{\ln^\beta(x)} \geq \dfrac{1}{x} > 0$

По (#) $\displaystyle\int_{C_0}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится $\implies \displaystyle\int_{C_0}^{+\infty} \frac{dx}{\ln^\beta(x)}$ расходится по признаку сравнения (для интегралов) $\implies$

$\implies I_{\alpha,\beta}$ расходится, если $\beta > 0$

2.1.2 Пусть $\beta \leq 0$, тогда:

$$\int_C^{+\infty} \frac{dx}{\ln^\beta(x)} = \int_C^{+\infty} \ln^{-\beta}(x) dx$$

$\forall x \in [C; +\infty) : \ln^{-\beta}(x) \geq \ln^{-\beta}(C) \geq \ln^{-\beta}(2) > 0 \implies \displaystyle\int_C^{+\infty} \frac{dx}{\ln^\beta(x)}$ расходится $\implies$

$\implies I_{\alpha,\beta}$ расходится, если $\beta \leq 0$

2.2 Пусть $0 < \alpha < 1$, тогда:

Пусть $\eta = \dfrac{1+\alpha}{2}$, тогда $0 < 1-\eta < \dfrac{1}{2} < \eta < 1$

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} = \frac{1}{x^\eta} \cdot \frac{x^{1-\eta}}{\ln^\beta(x)}$$

$$1-\eta > 0 \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\eta}}{\ln^\beta(x)} = +\infty \implies \exists C_1 \geq C\ \forall x \in [C_1; +\infty) : \frac{x^{1-\eta}}{\ln^\beta(x)} \geq 1 \implies$$

$$\implies \forall x \in C_1 : \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} = \frac{1}{x^\eta} \cdot \frac{x^{1-\eta}}{\ln^\beta(x)} \geq \frac{1}{x^\eta}$$

$\eta < 1 \implies$ по (#) $\displaystyle\int_C^{+\infty} \frac{dx}{x^\eta}$ расходится $\implies \displaystyle\int_{C_1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\eta}$ расходится $\implies$

$\implies \displaystyle\int_{C_1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ расходится $\implies I_{\alpha,\beta}$ расходится при $0 < \alpha < 1$

2.3 Пусть $\alpha = 1$, тогда:

$$I_{\alpha,\beta} = \int_C^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta(x)} = \int_{\ln(C)}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$$

Тогда, по (#) $I_{\alpha,\beta}$ сходится $\iff \beta > 1$

2.4 Пусть $\alpha > 1$, тогда:

Пусть $\eta = \dfrac{\alpha-1}{2}$, тогда $\eta > 0$

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} = \frac{1}{x^{1+\eta}} \frac{1}{x^\eta \ln^\beta(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\eta \ln^\beta(x)} = 0 \implies \exists C_2 \geq C : \forall x \in [C_2; +\infty) : \frac{1}{x^\eta \ln^\beta(x)} \leq 1 \implies$$

$$\implies \forall x \in [C_2; +\infty) : \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} \leq \frac{1}{x^{1+\eta}}$$

$1+\eta > 1 \implies$ по (#) $\displaystyle\int_{C_2}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\eta}}$ сходится $\implies \displaystyle\int_{C_2}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ сходится $\implies I_{\alpha,\beta}$ сходится

3. Таким образом, интеграл $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_C^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ сходится $\iff \alpha > 1 \lor (\alpha = 1 \land \beta > 1) \implies$

$\implies$ ряд $\displaystyle\sum_{n=C}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ сходится $\iff \alpha > 1 \lor (\alpha = 1 \land \beta > 1)$

Ответ: сходится $\iff \alpha > 1 \lor (\alpha = 1 \land \beta > 1)$

Task: 4 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, используя признак Даламбера.

$a)\ a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{(2n+3)!}{(3n+7)3^{n+1}}\right)}{\left(\frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{3n+7}\dfrac{(2n+3)!}{3(2n+1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty}(2n+3)(2n+2) = +\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится по признаку Даламбера.

Ответ: расходится

$b)\ a_n = \dfrac{n^{2n}(2n)!}{5^{2n}(n!)^4}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{(n+1)^{2n+2}(2n+2)!}{5^{2n+2}((n+1)!)^4}\right)}{\left(\frac{n^{2n}(2n)!}{5^{2n}(n!)^4}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}}\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}\dfrac{5^{2n}}{5^{2n+2}}\dfrac{(n!)^4}{((n+1)!)^4} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}(2n+2)(2n+1)\dfrac{1}{25}\dfrac{1}{(n+1)^4} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^2}{25}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} =$

$= \dfrac{4e^2}{25} = \left(\dfrac{e}{2.5}\right)^2 > 1$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится по признаку Даламбера.

Ответ: расходится

Task: 5 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, используя признак Коши.

$a)\ a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}} = e^{-1}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится по признаку Коши.

Ответ: сходится

$b)\ a_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{2n+1}\right)^{n-1} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = e^{-1}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится по признаку Коши.

Ответ: сходится