Homework 17.

#2.

1) $ord(g) = ord(h) = \infty$, $ord(gh) < \infty$

$G = GL_2(\mathbb{R})$

$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $gh = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ord(gh) = 1$

2) $G = GL_2(\mathbb{R})$

$ord(g) = \infty$ $ord(h) < \infty$ $ord(gh) = \infty$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $gh = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$ord(h) = 2$

#1.

$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f, g \in \mathbb{N}$

$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 3, \ldots$ # судя по всему $f(5) = 4$, иначе условие не выполнено

$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 4, \ldots$

1) Утв: $f: X \to Y$ инъективно $\Leftrightarrow \exists g: Y \to X \mid g \circ f = 1_X$

Но $f(1) = 1 = f(2)$ и $1 \neq 2 \Rightarrow f$ - не инъективно, тогда

у f нет левого обратного.

g - монотонно возрастающее отображение $(g(k) = k+1 \ \forall k \in \mathbb{N})$.

2) Тогда $\neg \exists k \ g(k) = 1$, т.к. тогда $k = 0$, но $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow g$ - не сюръективно $\Rightarrow$ у g нет правого обратного.

3) $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$ - верно, т.к.

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 1$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 2$

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(4) = 3$

Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \quad (f \circ g)(k) = f(g(k)) = f(k+1) = k$.

#3.

$|G| = n \quad g \in G \quad ord(g^k)$, где $0 < k < n$

Т.к. $|G| = n$, то $ord(g) = n$, тогда $g^{kd} = e = g^n$ для нек. $d \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow e = g^{\text{НОК}(n,k)} = g^{\frac{kn}{\text{НОД}(n,k)}} = (g^k)^{\frac{n}{\text{НОД}(n,k)}} \Rightarrow \boxed{ord(g^k) = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}}$

#4.

Группа S_3 - перестановки элементов $\{1, 2, 3\}$

Таких перестановок $3 \cdot 2 = 6$ штук

сдвиг вправо   смена мест

$(1\,2\,3)$ и $(1\,2)$ - порождающие элементы

1) $(1\,2)^0 (1\,2\,3)^1 = (3\,1\,2)$

2) $(1\,2)^0 (1\,2\,3)^0 = (1\,2\,3)$

3) $(1\,2)^1 (1\,2\,3)^2 = (2\,1\,3)^2 = (1\,3\,2)$

4) $(1\,2)^0 (1\,2\,3)^2 = (2\,3\,1)$

5) $(1\,2)^1 (1\,2\,3)^0 = (2\,1\,3)$

6) $(1\,2)^1 (1\,2\,3)^1 = (2\,1\,3)^1 = (3\,2\,1)$

Все возможные перестановки получены.

Одного элемента недостаточно, т.к. если этот один элемент - сдвиг вправо, то можно получить только эл-ты $(1\,2\,3)$, $(3\,1\,2)$, $(2\,3\,1)$; если смена мест, то $(1\,2\,3)$, $(2\,1\,3)$, $(1\,3\,2)$, $(3\,2\,1)$.

#5.

$Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$e = (0,0)$

$(0,1) + (1,0) = (1,1)$ $(0,1) + (1,1) = (1,0)$ $(1,0) + (1,1) = (0,1)$

Это изоморфно группе S_3:

$S_1 \mapsto (0,1)$

$S_2 \mapsto (1,0)$

$S_3 \mapsto (1,1)$

Т.к. $|S_3| = 2 \cdot 3 = 6$, то $|Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)| = \boxed{6}$.