Лекция 5, 04.10.23

⑧ Теорема Лапласа (разлож. опр. по строке и столбцу)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{\underset{\text{фикс}}{i}j} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\underset{\text{фикс}}{j}} \cdot A_{ij}$$

разл. по i-й строке

разл. по j-м стб.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Алгебр. дополн. к эл.-ам a_{ij}

⑨ Фальшивое разл. определителя

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot A_{jk} = 0 \quad , \text{ где } k \neq i$$

фикс

по i-й строке

по j-му стб.

Алг. доп. к эл-там др. стр.

□ Для м-цы A с одинак. i-й и k-й стр. (или стб.)

⇒ из св.-ва ⑧ и св-ва ④б ■

⑩ Определитель верхнетреуг. матрицы

← ступенчатый вид квадр. м-цы

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

нули

⑪ Определитель блочной матрицы

Опр: Блочная м-ца – представление м-цы, при котором рассек. вертик. и гориз. линиями на прямоуг. блоки (клетки).

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A_{k\times k} & C \\ \hline 0 & B_{p\times p} \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$$

блок нулей

($n = k+p$; $A_{k\times k}$ и $B_{p\times p}$ – квадратные)

обязательно есть блок 0; м-ца C ничего не меняет

Пример: $\det\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{array}\right) = \det 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2$

⑫ $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ $\qquad \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

□ Идея: по следствию из Утв. 2 (для $\forall$ полилин. кососимм. ф-ции от строк (стб.) кв. м-цы справедл. предст-е $f(A) = \det A \cdot f(E_n)$).

Д-во: ∢ (рассмотрим) ф-цию $f(B) = \det(\overset{\text{фикс.}}{A} \cdot B)$. Покажем, что для f выполн. св-ва ② (линейность) и ④б (обнул. на паре совп. эл-в).

$\Updownarrow$ ← по утв. 1.

кососимм. ③

1) ④б

Если в B j-й и k-й столбцы одинаковые, то в м-це $\underset{\text{строки}}{A}\cdot\underset{\text{столбцы}}{B}$ они тоже одинак. $\Rightarrow$ вып. ④б для стб. $\Rightarrow$ по утв. 1 есть кососимм.

2) ②

Если в м-це B j-й стб. имеет вид $\lambda \cdot B_j' + \mu \cdot B_j''$ $\Rightarrow$ в м-це $A\cdot B$ он имеет вид $\lambda \cdot A \cdot B_j' + \mu \cdot A \cdot B_j''$ $\Rightarrow$ есть св-во ② для f

(т.к. м-цы умнож. лин.)

По след. из утв. 2 $\Rightarrow f(B) = \det B \cdot f(E_n)$

Но $f(E_n) = \det(A\cdot E_n) = \det A$

$\Rightarrow \det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$

док-но для $n=2$, но верно всегда

■

Вычисление определителя

I способ. Элементарные преобраз-я строк и столбцов

Приводим м-цу A к верхнетреугольному (ступ. для кв. м-цы) виду и применяем св-во ⑩.

Пусть м-ца B получится из м-цы A с пом. операций

1) $(i) \leftrightarrow (j) \Rightarrow |B| = -|A|$ по свойству ③

2) $(i) \mapsto \lambda(i) \Rightarrow |B| = \lambda|A|$ по свойству ②

3) $(i) \mapsto (i) + \lambda(j) \Rightarrow |B| = |A|$ по свойству ⑥

II способ. Рекуррентные соотношения

$\Delta_n = f(\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_{n-k})$, где k - глубина рек. соотношения

(Для разлож. по стр. $k=1$)

Правило Крамера

Пусть для СЛАУ с кв-ой м-цей A

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Матричн. предст. $A_{n\times n} \cdot X_{n\times 1} = b_{n\times 1}$

Векторная форма записи $\underbrace{x_1 A_1 + \dots + x_n \cdot A_n}_{\text{это лин. комб. столбцов м-цы } A \text{ с некот. коэфф.}} = b$, где $A = (A_1, \dots, A_n)$ — ст. м-цы A

Теорема: Пусть $Ax = b$ - совместная СЛАУ с кв-ной м-цей A (т.е. у неё $\exists$ решения). Тогда $x_i \det A = \Delta_i = \det(A_1, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \dots, A_n)$, $\forall i = \overline{1,n}$

x_i — i-я неизвестная

(т.е. справа стоит det м-цы, у кот. i-й стб. заменён на стб. правых частей, т.е. b.)

Замечание: Если $\det A \neq 0$, то

$\boxed{x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}}$, $i = \overline{1,n}$ - формула Крамера

подстав. вект. форму СЛАУ

$\square$ $\Delta_i = \det(A_1, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot A_j, A_{i+1}, \dots, A_n) =$

$\stackrel{②}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_n) = x_i \cdot \underbrace{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n)}_{\det A} =$

по ④б все слаг $i \neq j$ зануляются

$= x_i \cdot \det A$ $\blacksquare$

Пример: $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow$ по форм. Крамера $\Rightarrow x = \dfrac{\Delta_1}{\det A}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\det A}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

Обратная матрица

$\forall$ квадр. м-ца A, B одинак. порядка

Опр: Кв. м-ца B наз. <u>обратной</u> к м-це A, если $A \cdot B = B \cdot A = E_n$

Обознач: A^{-1}

Утв.: Если обратная м-ца $\exists$, то она единственная.

□ Допустим, что $\exists$ B_1 и B_2 – обратные к A

по опр. $\Rightarrow \begin{cases} AB_1 = B_1A = E \\ AB_2 = B_2A = E \end{cases}$; $\underset{\text{по опр. ед. м-цы}}{B_1 = B_1E} = B_1 \cdot (A \cdot B_2) \underset{\text{ассоц.}}{=} (B_1A) \cdot B_2 = EB_2 = B_2$

$\Rightarrow B_1 = B_2$ ■

Опр: Если $\det A \neq 0$, то A наз. <u>невырожденной</u>.

Теорема: Критерий существования обр. м-цы:

М-ца $A \in M_n(\mathbb{R})$ имеет обратную $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ (A невырожд.)

□ Необходимость ($\Rightarrow$) Дано: $\exists A^{-1}$; док-ть: $\det A \neq 0$

По опр. обратной м-цы $A \cdot A^{-1} = E$

$\det(A\cdot A^{-1}) = \det E = 1$ (по св. ⑦)

$\parallel$ по св. ②

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0.$ (оба $\exists$ по усл.)

Достаточность ($\Leftarrow$) Дано: $\det \neq 0$, док-ть, что $\exists A^{-1}$

Предъявим явную формулу для обратной матрицы

$\sphericalangle$ м-цу $\underbrace{B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}}_{(*)}$, где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$ – союзная м-ца, т.е. транспонир. к м-це из алг. доп.

Покажем, что $B = A^{-1}$

$\sphericalangle A\cdot B$

$$[A\cdot B]_{ij} \overset{\text{по опр. умнож.}}{=} \sum_{r=1}^{n} \underset{a_{ir}}{[A]_{ir}} \cdot [B]_{rj} \overset{\text{подст. }(*)}{=} \frac{1}{\det A}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\,[\tilde{A}]_{rj} = \frac{1}{\det A}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\cdot A_{jr} \underset{\text{из-за трансп. }(*)}{=}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\det A}\cdot \begin{cases} \det A, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}}_{} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{разл. det по } i\text{-й стр. ⑧} \\ \leftarrow \text{фальш. разл. det ⑨} \end{matrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} = \delta^i_j = [E]_{ij}, \quad \forall i,j = \overline{1,n}$$

Для $B\cdot A$ – аналогично, но разл. по j-му стб. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A\cdot B = B\cdot A = E \Rightarrow B = A^{-1}$ ■

Следствие: Если $\exists A^{-1}$ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$