Семинар 21, 27.02.24 - Бельдиев

$(R, +, \cdot)$ - кольцо

$(R, +)$ - коммут. группа

$(ab)c = a(bc)$

$a(b+c) = ab + ac$

$(b+c)a = ba + ca$

R коммутативно, если : $ab = ba \ \forall a, b \in R$

R - кольцо с единицей, если : $\exists 1 \in R$, т.ч. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ \forall a \in R$

#63.1. (3) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$

$(a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$

(4) $\{x + y\sqrt[3]{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$

$(x + y\sqrt[3]{2})(z + t\sqrt[3]{2}) = xz + (xt + yz)\sqrt[3]{2} + yt\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \overset{?}{=} a + b\sqrt[3]{2}$

$(\sqrt[3]{2})^2 - b\sqrt[3]{2} - a = 0$

$\sqrt[3]{2}$ - корень $x^2 - bx - a = 0$

$\sqrt[3]{2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 + 4a}{4}} = s \pm \sqrt{t}$

$\sqrt[3]{2} = s \pm \sqrt{t}$

$2 = s^3 \pm 3s^2\sqrt{t} + 3st \pm t\sqrt{t}$

$2 - s^3 - 3st = \pm\sqrt{t}(3s^2 + t)$

$\sqrt{t} \in \mathbb{Q}$

HSE

#63.2 (a) $A = A^T$

$(A+B)^T \overset{?}{=} A+B$

$\parallel$

$A^T + B^T = A + B$

$(AB)^T \overset{?}{\neq} AB$

$\parallel$

$B^T A^T = BA \Rightarrow$ не кольцо

(g) $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ ay_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ ay_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ a(y_1+y_2) & x_1+x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ ay_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ ay_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + ay_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ ay_1x_2 + ax_1y_2 & ay_1y_2 + x_1x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{кольцо}$$

#63.3 $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$

$(fg)h \overset{?}{=} f(gh)$ – да

$(f(x)g(x))\,h(x) = f(x)\,(g(x)h(x))$

$f(g+h) \overset{?}{=} fg + fh$

$(f(g+h))(x) \overset{?}{=} (fg+fh)(x) \Rightarrow f(x)(g(x)+h(x)) \overset{?}{=} f(x)g(x) + f(x)h(x)$

(a) кольцо

(b) $\{f : \exists f''(x) \ \ \forall x \in (a;b)\}$

$(f+g)'' = f'' + g''$

$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$

HSE

e) $a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ – кольцо

#63.4 $(f\circ g)(t) = f(g(t))$

$(f+g)(t) = f(t)+g(t)$

$f\circ(g+h) \overset{?}{=} f\circ g + f\circ h$

$f(g(t)+h(t)) = f(g(t)) + f(h(t))$

$f(t)=t^2: \quad (g(t)+h(t))^2 \neq g(t)^2 + h(t)^2$

Алгоритм Евклида

$$\text{НОД}(f,g) \underset{f=g\cdot q+r}{=} \text{НОД}(g\cdot q+r,\, g) = \text{НОД}(r,g)$$

#25.2.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x^3+x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
x^4+x^3-x^2-x & x \\ \cline{1-1}
-2x^2-3x-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3+x^2-x-1 & -2x^2-3x-1 \\ \cline{2-2}
x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ \cline{1-1}
-\;-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & \\
-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} & \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\;-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ \cline{2-2}
-\frac{3}{4}x+\frac{3}{8} & \frac{3}{2} \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{8} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\;-2x^2-3x-1 & -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \Rightarrow x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^2-2x & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \\ \cline{1-1}
-\;-x-1 & \\
-x-1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ответ: $x+1$ – НОД$(x^4+x^3-3x^2-4x-1,\; x^3+x^2-x-1)$

$ax+by=d$ $\quad x, y$ – неизв.

$d \not\vdots\ НОД(a,b)$ – решений нет

$d \vdots\ НОД(a,b)$ – реш. есть

$ax+by = НОД(a,b)$

$a(x)f(x)+b(x)g(x) = НОД(f(x), g(x))$

$f = g\cdot q_1 + r_1$; $\quad r_1 = 1\cdot f + (-q_1) g$

$g = r_1 \cdot q_2 + r_2 = q_2(f - g\cdot q_1) + r_2$

$r_2 = g - q_2 f + q_2 q_1 g = (-q_2) f + (1+q_1q_2) g$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$; $\quad r_3 = r_1 - r_2 q_3 = a_1 f + b_1 g - q_3(a_2 f + b_2 g) = a_3 f + b_3 g$

$(f,g)\to(r_1,g)\to(r_1,r_2)\to(r_3,r_2)\to(r_3,r_4)$

#25.3a $\quad f(x) = x^4+2x^3-x^2-4x-2 \qquad g(x) = x^4+x^3-x^2-2x-2$

(1)
$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3-x^2-4x-2 & x^4+x^3-x^2-2x-2 \\ \hline -\ x^4+x^3-x^2-2x-2 & 1 \\ \hline x^3 \quad -2x = r_1 & \end{array}$$

$r_1 = x^3-2x = f-g$

(2)
$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3-x^2-2x-2 & x^3-2x \\ \hline -\ x^4-2x^2 & x+1 \\ \hline x^3+x^2-2x-2 & \\ -\ x^3-2x & \\ \hline x^2-2 = r_2 & \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r|l} x^3-2x & x^2-2 \\ \hline -\ x^3-2x & x \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow НОД(f,g) = x^2-2$

$x^2-2 = -(x+1)f + (x+2)g$

$g = (x+1)(f-g) + r_2 \iff r_2 = g-(x+1)(f-g) = -(x+1)f + (x+2)g$

HSE