Подготовка к КР1

1. Задачи на метод математической индукции

   (a) Доказательство равенств.

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^3 + \ldots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}.$$

   (b) Доказательство неравенств.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

   (c) Доказательство делимости.

$$5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} \text{ кратно } 19$$

   (d) Доказательство формул для рекуррентно заданных последовательностей.

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 7a_n + 3,\ \text{Докажите, что } a_n = \frac{1}{2}(7^n - 1).$$

2. Доказательство предела по определению.

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n!}{2n^2 - n + 7} = 0, \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 7}{n^2 - 2n + 8} = 2.$$

3. Доказательство неограниченности последовательности по определению.

$$(a)\ a_n = n^2 - n + 6, \qquad (b)\ a_n = \frac{n! + 7n - 2^n}{n^2 + 6n - 1}.$$

4. Подсчет предела последовательности, используя арифметику предела, стандартные сходимости и свойства б.б., б.м. и ограниченных.

$$(a)\ a_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}, \qquad (b)\ a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2},$$

$$(c)\ a_n = \frac{(-1)^n \cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}}, \qquad (d)\ a_n = \frac{3\sqrt[n]{16} - 4\sqrt[n]{8} + 1}{(\sqrt[n]{2} - 1)^2},$$

$$(f)\ a_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2+2n+4}}{\sqrt{n^2+3n-1}-n}, \qquad (g)\ a_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}},$$

$$(h)\ a_n = \frac{\sqrt[n]{6n^2}+\sqrt[n]{4,5}}{6\sqrt[n]{2n}+7}, \qquad (i)\ a_n = \frac{n\cdot 3^n+1}{n!+1}.$$

5. Подсчет предела с помощью теоремы о зажатой последовательности.

$$(a)\ a_n = \sqrt[n]{n^3-3n+1}, \qquad (b)\ a_n = \sqrt[n]{\frac{n^4-2n+3}{n^2+1}},$$

$$(c)\ a_n = \left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^{n^2}.$$

6. Подсчет предела с помощью теоремы Вейерштрасса.

Доказать существование и найти предел рекуррентно заданной последовательности

$$x_1 = 3, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2+3x_n}.$$