Homework 15.

1. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M.

a) $M = \mathbb{N}, \quad x * y = 2xy$

$$(x*y)*z = 2xy * z = 2\cdot 2xy\cdot z = 4xyz$$

$$\parallel$$

$$x*(y*z) = x * 2yz = 2x\cdot 2yz = 4xyz$$

Da

b) $M = \mathbb{Z}, \quad x * y = x^2 + y^2$

$$(x*y)*z = (x^2+y^2)*z = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + z^2$$

$$\ne$$

$$x*(y*z) = x*(y^2+z^2) = x^2 + y^4 + 2y^2z^2 + z^4$$

Нет

c) $M = \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad x * y = x\cdot y^{\frac{x}{|x|}}$

$$(x*y)*z = xy^{\frac{x}{|x|}} * z = xy^{\frac{x}{|x|}}\, z^{\frac{xy^{\frac{|x|}{x}}}{\left|xy^{\frac{x}{|x|}}\right|}}$$

$$\ne$$

$$x*(y*z) = x * yz^{\frac{y}{|y|}} = x\left(yz^{\frac{y}{|y|}}\right)^{\frac{x}{|x|}}$$

Нет

② Является ли M^2 полугруппой? ∃ нейтральный элемент?

$$(x,y)\circ(z,t)=(x,t)$$

Ассоциативность:

$$((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f)=(a,d)\circ(e,f)=(a,f)$$

$$\parallel$$

$$(a,b)\circ((c,d)\circ(e,f))=(a,b)\circ(c,f)=(a,f)$$

$\Rightarrow$ Относительно операции M^2 $\boxed{\text{является полугруппой}}$

Пусть (a,b) – нейтральный элемент правый, тогда

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\circ(a,b)=(x,y)\\ \quad\parallel\\ (x,b)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} b=y \\ x=x \Rightarrow \forall x\end{cases}$$

Тогда (x,y) – правый нейтральный элемент при $\forall x$

Пусть (υ,v) – левый нейтр. элемент, тогда

$$\left.\begin{array}{l}(\upsilon,v)\circ(x,y)=(x,y)\\ \quad\parallel\\ (\upsilon,y)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \upsilon=x \\ y=y \Rightarrow \forall y\end{cases}$$

Тогда (x,y) – левый нейтр. элемент при $\forall y$

Следовательно, $\forall x\ \forall y$ $\boxed{\exists \text{ нейтральный элемент } (x,y)}$.

⑤ Какие из указанных множеств кв. вещ. матриц фикс. порядка образ. группу?

Множества образуют группу, если они 1) имеют нейтр. эл-т

2) имеют обратный эл-т

3) ассоциативны.

a) Диаг. матрицы относительно умножения.

(*) У каждой матрицы есть нейтр. эл-т: $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(**) Если $\det A \neq 0$, то у матрицы A есть обратная, равная $\frac{1}{\det A}\cdot \widetilde{A}$, где $\widetilde{A}$ – союзная матрица

Но т.к. у диаг. матрицы может быть $\det = 0$

(Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$), то не у всех будет обр. эл-т.

Следовательно, это $\boxed{\text{не группа}}$.

b) Верхние треуг. матрицы относит. умножения.

Аналогично (*), есть нейтральный эл-т.

Аналогично (**), не для всех матриц $\exists$ обратный эл-т.

Следовательно, это $\boxed{\text{не группа}}$.

c) ненулевые матрицы вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ относит. умножения.

По (*) есть нейтр. эл-т $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$ (т.к. матрицы ненулевые) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ обратный эл-т равный $\frac{1}{\det A}\widetilde{A} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

Ассоциативность:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ace-bde-adf-bcf & acf-bdf+ade+bce \\ -bce-ade+bdf-acf & -bcf-adf-bde+ace \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ce-df & cf+de \\ -de-cf & -df+ce \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ace-adf-bde-bcf & acf+ade-bdf+bce \\ -bce+bdf-ade-acf & -bcf-bde-adf+ace \end{pmatrix}$$

Следовательно, это $\boxed{\text{группа.}}$

③ Какие множества с операциями являются группами?

Должно выполняться: ассоциативность, $\exists$ нейтр. эл-т, $\exists$ обратн. эл-т.

a) $(\{-1, 1\}, \cdot)$

Нейтр. эл-ты: для -1 будет 1: $-1 \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$

для 1 будет 1: $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

Обратн. эл-т: для -1 будет -1: $-1 \cdot (-1) = 1$

для 1 будет 1: $1 \cdot 1 = 1$

Ассоц.: для всех $\mathbb{Z}$ чисел выполнена ассоц.-сть, в т.ч для $1, -1$.

$(-1 \cdot 1) \cdot 1 = -1 \cdot (1 \cdot 1) = -1$

$(-1 \cdot (-1)) \cdot 1 = -1 \cdot (-1 \cdot 1) = 1$

Следовательно, $\boxed{\text{это группа.}}$

b) $(\{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \mid k, n \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$

Нейтр. эл-т: $1 \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \cdot 1 = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \Rightarrow \exists$ нейтр. эл-т

Обратн. эл-т: $e^{i\frac{2\pi k}{n}} \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{n}} = e^{-i\frac{2\pi k}{n}} \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}} = 1 \Rightarrow \exists$ обр. эл-т

Ассоц.: $\left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} \cdot e^{i\frac{2\pi l}{m}}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi t}{p}} = e^{i2\pi\left(\frac{k}{n}+\frac{l}{m}\right)} \cdot e^{i\frac{2\pi t}{p}} = e^{i2\pi\left(\frac{k}{n}+\frac{l}{m}+\frac{t}{p}\right)}$

$e^{i\frac{2\pi k}{n}} \cdot \left(e^{i\frac{2\pi l}{m}} \cdot e^{i\frac{2\pi t}{p}}\right) = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \cdot e^{i2\pi\left(\frac{l}{m}+\frac{t}{p}\right)} = e^{i2\pi\left(\frac{k}{n}+\frac{l}{m}+\frac{t}{p}\right)} \Rightarrow \boxed{\text{Это группа}}$

c) $(\{|r|\cdot e^{i\varphi} \mid \forall \varphi \in \mathbb{R}\}, \cdot)$ r - фикс.

Нейтр. эл-т: $|r|e^{i\varphi} \cdot x = |r|\cdot e^{i\varphi}$, где $x = |r|\cdot e^{i\gamma}$

$$x = e^{i\varphi} : e^{i\varphi} = 1$$

Тогда $|r|e^{i\gamma} = 1$; $e^{i\gamma} = \frac{1}{|r|}$; $i\gamma = \ln\frac{1}{|r|}$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{i}\ln\frac{1}{|r|} = -i\ln\frac{1}{|r|}$$

Но если $r=0$, то обратного элемента нет.

$\boxed{\text{Это не группа}}$

d) $(\{|k|\cdot e^{i\varphi} \mid \forall k, \varphi \in \mathbb{R} \wedge k \le r \wedge k \ne 0\}, \cdot)$

Нейтр. эл-т: $|k|e^{i\varphi} \cdot x = |k|e^{i\varphi}$

аналогично п. c, нейтр. эл-т $x = |k|\cdot e^{\ln\frac{1}{|k|}} = 1$

Но если $r < 1$, то все элементы множества < 1,

тогда нейтрального элемента не будет.

$\boxed{\text{Это не группа}}$

④ Какие совокупности отображений мн-ва $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя образуют группу относ. умножения?

a) множество инъект. отображ.

Нейтр. эл-т: id

Обрат. эл-т: σ^{-1}

Ассоциативность выполнена

$\boxed{\text{Это группа}}$

b) множество биективных отображений

Нейтр. эл-т: id

Обрат. эл-т: σ^{-1}

Ассоц. выполнена

Это группа

c) множество чётных перестановок

Нейтр. эл-т: id

Обратного эл-та нет (т.к. σ^{-1} – нечёт.)

Это не группа

d) множество $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Нейтр. эл-т: id

Обрат. эл-т: для id – id

для $(12)(34)$ – $(12)(34)$

для $(13)(24)$ – $(13)(24)$

для $(14)(23)$ – $(14)(23)$

Операция ассоциативна (т.к. это перестановки)

Это группа

7) $|X| = m, \ |Y| = n$

Число сюръект. отобр. $X \to Y$: $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot (n-k)^m} =$

$= n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1} (1)^m$

Число биективных отобр. : $\frac{n!}{(n-m)!}$ при $n=m \Rightarrow n!$

6 Док-ть: f - сюръект. $\Leftrightarrow$ $\exists$ правый обратный

$\square$ „$\Rightarrow$" сюръекция $\Rightarrow \forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x)=y$

отображение $\Rightarrow \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : f(x)=y$

$g: Y \to X$, тогда $f(x)=y$ и $f(g(y))=y$, где $g(y)=x$

$f \circ g \Rightarrow y \xrightarrow{g} x=g(y) \xrightarrow{f} f(g(y))=f(x)=y$

„$\Leftarrow$" $g: y \to x=g(y)$

$f \circ g : y \to g(x) \to f(g(x))=y \Leftrightarrow f \circ g = 1_Y$ ■