Лекция 25, 12.04.24

$\boxed{0}$ Сходимость функциональных послед.

$f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in E \subseteq \mathbb{R}$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Опр: $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Пример: (ЗБЧ) $\eta_n(w) = \dfrac{\xi_1(w) + \ldots + \xi_n(w)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi_1 = a$

$$p\{w : \eta_n(w \xrightarrow[n\to\infty]{} a\} = 1$$

$\boxed{1}$ $f_n(x) = x^n$ $E = [0;1]$ $x_0 = 1$ — пример

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1^-} \begin{pmatrix} 0, & x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{pmatrix} = 0$$

Теорема: $f_n(x)$ непрер. в т. $x_0 \in E$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, то $f(x)$ непр. в точке x_0.

Следствие: $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\boxed{2}$ $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ $\quad x \in \mathbb{R} \quad x_0 = 0$

$f(x) \equiv 0 \qquad f'(0) = 0$

$f_n'(x) = \frac{\cos nx}{n} \cdot n = \cos(nx)\Big|_{x_0=0} \equiv 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Теорема: $f_n(x)$ непр. дифф. на $[a;b]$

$\exists c \in [a;b]$: $f_n(c)$ сход

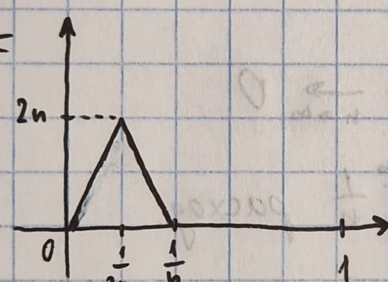
$f_n'(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}$, тогда

$f_n(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$\boxed{3}$ Пример: $f_n(x) =$

$f_n(x) \to 0 \ \forall x \in [0;1]$



$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \neq$

Теорема: $f_n(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\forall c$

$$\int_c^x f_n(t)\,dt \overset{[a;b]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \int_c^x f(t)\,dt$$

Сходимость функциональных рядов.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \qquad x \in E$

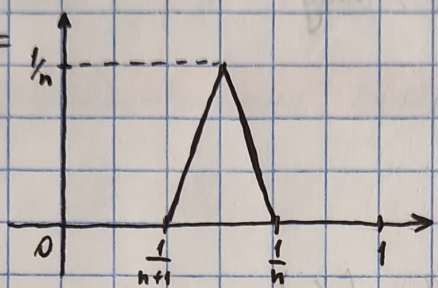
Ряд сход. равномерно $\sup_{x\in E} \Big| \underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x)}_{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|} \Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Теорема: (признак Вейерштрасса) Если послед. $u_n(x)$ мажорируется числ. послед. a_n: $|u_n(x)| \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in E$ и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сход., то $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сход. равномерно на E.

Док-во: Смотри!

Пример:

$u_n(x) =$



$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$$

$$\sup_{x\in[0;1]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sup_{x\in[0;1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ расход.}$$

Пример: $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \ldots$

Степенные ряды.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{c_n (x-a)^n}_{u_n(x)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot x^n \quad (1)$$

Лемма Абеля:

1) Если (1) сход. при $x = x_1$, то $\forall x_0 : |x_0| < |x_1|$ ряд (1) сход.

2) Если (1) расход при $x = x_2$, то $\forall x_0 : |x_0| > |x_2|$ ряд (1) расход.

Док-во: 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n \cdot x_0^n| \ominus$ $\qquad c_n \cdot x_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ огр. $\Rightarrow \exists M\ \forall n\ |c_n \cdot x_1^n| < M$

$$\ominus \sum_{n=0}^{+\infty} \left|c_n \cdot x_1^n \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n\right| \le M \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}_{\text{сход.}} \Rightarrow \text{сход. абс.}$$

2) ТП: т.е. сход. при $x = x_0 \underset{n-1}{\Rightarrow}$ сход. при $x = x_1$. (2)

Вывод: Возможен 1 из 3х вариантов:

1) (1) сход $\forall x \in \mathbb{R}$

2) (1) сход только при $x = 0$

3) $\exists R$: на $(-R; R)$ сход
на $(-\infty; -R)$ и $(R; +\infty)$ расход.

радиус сход. степенного ряда.

Теорема: $\forall r \quad 0 < r < R$ ряд (1) сход. равн. на $[-r; r]$

Док-во: $\sup\limits_{[-r;r]} \left| \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot x^k \right| = \sup\limits_{[-r;r]} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} c_k \cdot x^k \right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |c_k \cdot r^k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ч.т.д.

У-е: Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сход. и $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot x^k}_{f(x)}$ имеет радиус сход. $R = 1$

и $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ сущ., то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

Теорема: 1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = A$, то $R_{cx.} = A$

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = B$, то $R_{cx} = \frac{1}{B}$

Док-во: 1) $\boxed{1}$ $0 < R_{cx} < +\infty \qquad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |x| \cdot \frac{1}{A}$

$|x| < A$ сход по Даламберу
$|x| > A$ расход по Даламберу
$\Rightarrow R_{cx} = A$

$\boxed{2}$ $A = +\infty \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| \underset{\forall x}{=} 0 \Rightarrow \forall x$ по Дал. сход $\Rightarrow R_{cx} = +\infty$

$\boxed{3}$ $A = 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| \underset{x \ne 0}{=} +\infty \Rightarrow \forall x$ расход.