Homework 19.

④ Разложить в прямую сумму группу $\mathbb{Z}_{60}$.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$\mathbb{Z}_{60} = \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ $(\mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5)$.

② Найти смежные классы:

1. $\mathbb{C}$ по $\mathbb{R}$: $G = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$

2. $\mathbb{C}^\times$ по $\mathbb{R}^\times_+$: $G = \{r \cdot e^{i\varphi} \mid r \in \mathbb{R}^\times_+,\ \varphi \in [0; 2\pi)\}$

③ $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$; $[H_2 : H_1] = n$; $[G : H_2] = m \overset{?}{\Rightarrow} [G : H_1] = nm$.

~~Пусть $[G : H_1] = \alpha$~~. По т. Лагранжа $|H_2| = |H_1| \cdot [H_2 : H_1] = |H_1| \cdot n$;

$|G| = |H_2| [G : H_2] = |H_1| \cdot n \cdot m$.

$$[G : H_1] = \frac{|G|}{|H_1|} = \frac{|H_1| \cdot n \cdot m}{|H_1|} = n \cdot m$$ ч. т. д.

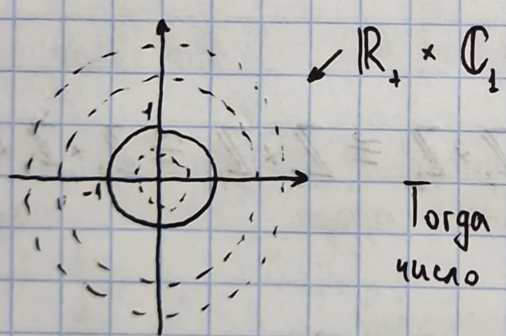
⑤ $(\mathbb{C},\cdot) \cong (\mathbb{R}_+,\cdot)\times(\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\},\cdot)$?

□ 1. Покажем, что $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}_1$ – биекция.

Комплексные числа можно представить в виде плоскости в декартовой системе координат, где каждое число $z=a+bi$ представимо как пара координат $(a;b)$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Группа $\mathbb{C}_1$ задаёт комплексные числа с модулем 1, т.е. $q=e^{i\varphi}$, где $\varphi\in[0;2\pi)$. Тогда каждое такое число можно представить парой $(1,\varphi)$ (1 – модуль числа).

Умножением на число $\mathbb{R}_+$ получаем все возможные точки на коорд. плоскости (простым языком: „растягиваем окружность радиуса 1 и с центром $(0;0)$ на $\mathbb{R}_+$")



Тогда можно однозначно представить число z, т.е. $(a;b)\mapsto(r;\varphi)$

$\Rightarrow$ f – биекция

2. Покажем, что f – гомоморфизм.

Пусть $z=r\cdot e^{i\varphi}$; $w=q\cdot e^{i\psi}$.

$$f(zw)=f(r\cdot e^{i\varphi}\cdot q\cdot e^{i\psi})=f(r\cdot q\cdot e^{i(\varphi+\psi)})=(r\cdot q;\ e^{i(\varphi+\psi)})=$$

$$=(r;e^{i\varphi})\circ(q;e^{i\psi})=f(z)\circ f(w)\Rightarrow f\text{-гомоморфизм}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f$-изоморфизм $\Rightarrow(\mathbb{C},\cdot)\overset{f}{\cong}(\mathbb{R}_+,\cdot)\times(\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\},\cdot)$ ■

⑥ Найти все гомоморфизмы $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$.

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$f(0) = 0$

$f(1) = a$

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2a$

Аналогично, $f(3) = 3a$; $f(4) = 4a$; $f(5) = 5a$

Проверка гом-зма: $f(k+l) = (k+l)a = ka + la = f(k) + f(l)$, $0 \le k, l \le 5$

$\boxed{\text{Answer: } f(0)=0,\ f(1)=a,\ f(2)=2a,\ f(3)=3a,\ f(4)=4a,\ f(5)=5a.}$

⑦ Найти число эл-тов порядка p^m в цикл. группе порядка p^n, где p - простое число, $0 < m \le n$.

Пусть $A_k = \{x \mid 0 \le x < p^l \wedge x \vdots p^k\} \Rightarrow |A_k| = p^{l-k}$

$B_k = \{x \mid 0 \le x < p^l \wedge x \vdots p^k \wedge x \not\vdots p^{k+1}\} \Rightarrow |B_k| = |A_k \setminus A_{k+1}| =$

$= p^{l-k} - p^{l-k-1} = p^{l-k-1}(p-1)$

Т.к. порядок группы p^n, то $xp^m = e$ при $(xp^m) \vdots p^n \Rightarrow$

$\Rightarrow x \vdots p^{n-m}$. Также должно выполняться $x \not\vdots p^{n-m+1}$.

Тогда количество таких элементов равно $|B_{n-m}| =$

$= p^{n-(n-m)-1}(p-1) = p^{m-1}(p-1) = p^m - p^{m-1}$

$\boxed{\text{Ответ: } p^m - p^{m-1}.}$