Лекция 13, 08.12.23

Использование производной

Теорема Ролля: $f(x)$

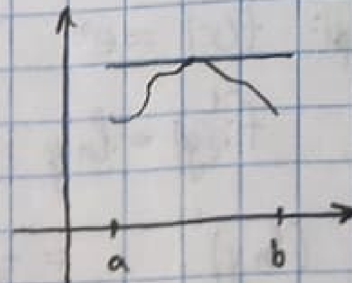
$\boxed{1}$ непрер. на $[a; b]$

$\boxed{2}$ дифф. на $(a; b)$

Если $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a; b) \quad f'(\xi) = 0$

Док-во: $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

$m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$



$\exists x_1, x_2 : f(x_1) = M, \ f(x_2) = m$

1) $M = m \Rightarrow f(x) = const \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a;b)$

2) $M \neq m \Rightarrow M > m \Rightarrow$ что-то из x_1, x_2 не совпадает с a v b

Пусть $x_1 \in (a;b)$ $\quad x_1$ - т. лок. max и $\exists f'(x_1) \underset{\text{т. Ферма}}{\Rightarrow} f'(x_1) = 0$

Следствия из т. Лагранжа

1) $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ выполнены и $f'(x) = 0$ на $(a;b) \Rightarrow f(x) = const$ на $(a;b)$

Док-во: $\forall x_1, x_2 \in [a;b]$, док $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) = 0 \qquad \xi \in (x_1; x_2)$$

2) f, g и верно $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$

$+$ $f' = g'$ на $(a;b)$ $\Bigg| \Rightarrow f - g = const$ на $[a;b]$

3) $\varphi(x)$, вып. $\boxed{1}$ и $+$ дифф. на $(a;b)$, кроме мб x_0

$+$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = A$

$\Rightarrow \exists \varphi'(x_0) = A$

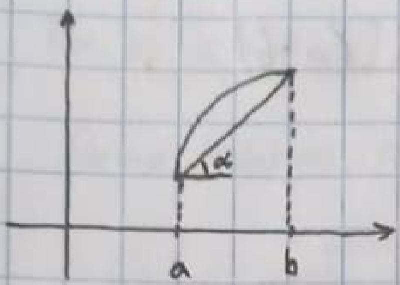
Док-во: $\varphi'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \boxed{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}} = A$

$= \varphi'(\xi(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$

$\xi(x) \in (x_0; x)$ $\qquad \xi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$

Теорема Лагранжа:

Если $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, то $\exists \xi \in (a;b)$, то $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$



Док-во: $F(x) = f(x) - \lambda x$

$\lambda: F(a) = F(b)$

$\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$F(a) = f(a) - a \cdot \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(a)\cdot b - a\cdot f(b)}{b-a}$

$F(b) = f(b) - b \cdot \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(a)\cdot b - a\cdot f(b)}{b-a}$

Для $F(x)$ верно $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$

$\exists \xi : F'(\xi) = 0 \qquad F'(\xi) - \lambda = 0 \qquad f'(\xi) = \lambda$ ч.т.д.

Теорема: f, g $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ и $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$, $g(a) \neq g(b)$

Тогда $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$\exists \xi \in (a;b)$

Док-во: $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$

$F(a) = F(b) \leftarrow$ при $\lambda = \dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$

Для $F(x)$ верно $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$

$\exists \xi \in (a;b) : F'(\xi) = 0 \qquad f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$ ч.т.д.

Теорема: Если $f(x)$ $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$

$f(x)$ неуб. на $[a;b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ на $(a;b)$

$f(x)$ возр. на $[a;b] \Leftarrow f'(x) > 0$ на $(a;b)$

Док-во:

$\Rightarrow$ $x_0 \in (a;b)$ $\quad f'(x_0) \overset{?}{\geq} 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Leftarrow$ $\forall x_1, x_2 \in [a;b]$

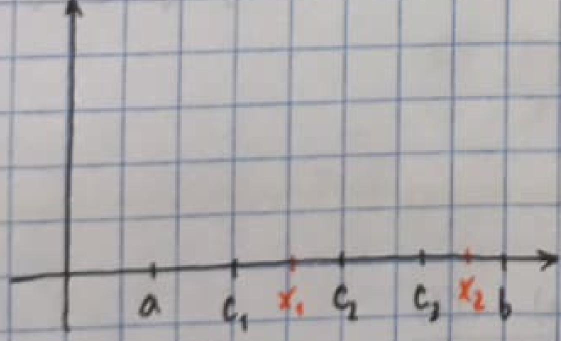
Для $f(x)$ на $[x_1;x_2]$ вып. $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$

$$(*)\ \underbrace{f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0}$$ т.е. $f(x_2) \geq f(x_1)$

$\xi \in (x_1; x_2) \subset (a;b)$

Если $f'(x) > 0$ на $(a;b)$, то $(*)$ со знаком $>$, т.е. $f(x_2) > f(x_1)$

Следствие: Если $f(x)$ непр. на $[a;b]$ и дифф. на $(a;b)$, кроме конечн. числа точек и $f'(x) \geq 0$, тогда $f(x)$ неуб. на $[a;b]$.



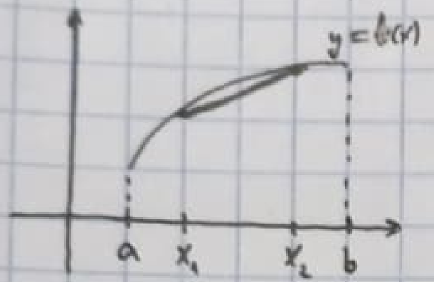
$\neg\exists f'(c_2)$

$f(x_2) \overset{??}{\geq} f(x_1)$

$f(x_2) \geq f(c_3) \geq f(c_2) \geq f(x_1)$ ч.т.д.

Выпуклость функции

Опр: Функция $f(x)$ наз. выпуклой вверх (вниз) на $[a; b]$, если $\forall x_1, x_2 \in [a; b]$ график функции $y = f(x)$ на $[x_1; x_2]$ лежит выше хорды, соед. точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$



$$f(x) \geq l(x) \qquad x \in [x_1; x_2]$$

Теорема (Достат. усл. выпуклости):

$f(x)$ $\boxed{1}$ и $\exists f''(x)$ на $(a; b)$

Если $f''(x) \geq 0$ на $(a; b)$ $\Rightarrow$ выпукла вниз

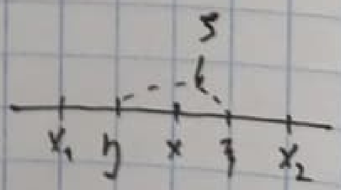
Если $f''(x) \leq 0$ $\Rightarrow$ выпукла вверх

Док-во: $l(x) - f(x) \overset{?}{\geq} 0$

$$= \frac{f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \qquad \begin{array}{l} \xi \in (x; x_2) \\ \eta \in (x_1; x) \end{array}$$

$$= \frac{f'(\xi)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\eta)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$



$$= \frac{(f'(\xi) - f'(\eta))(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f''(\varsigma)(\xi - \eta)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$\varphi(x) = f'(x)$ $\qquad \varphi(\xi) - \varphi(\eta) = \varphi'(\varsigma)(\xi - \eta)$

т. Лагранжа $\qquad \varsigma \in (\eta; \xi)$