Лекция 21, 01.03.24

$P, Q \subseteq A \times A$

$P \in S(A)$ – строгий (частичный) порядок на A

(1) $\forall x \; \neg x P x$ (иррефлексивность)

(2) $\forall x \forall y \forall z \; (x P y \land y P z \to x P z$ (транзитивность)

$Q \in N(A)$ – нестрогий (част.) порядок на A

(1) $\forall x \in A \quad x Q x$ (рефл.)

(2) $\forall x, y, z \; (x Q y \land y Q z \to x Q z)$

(3) $\forall x, y, z \; (x Q y \land y Q x \to x = y)$ (антисимм.)

$\varphi : S(A) \to N(A)$ $\qquad$ $\psi : N(A) \to S(A)$

$\varphi(P) = P \cup id_A$ $\qquad$ $\psi(Q) = Q \setminus id_A$

$$\boxed{\begin{aligned}\psi(\varphi(P)) &= P \\ \varphi(\psi(Q)) &= Q\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} S(A) &\overset{\varphi}{\sim} N(A) \\ \psi &= \varphi^{-1}\end{aligned}}$$

Частично-упорядоченное множество (ЧУМ)

$A, \underset{S(A)}{<}, \underset{N(A)}{\leq}$, где $\leq = \varphi(<)$, $< = \psi(\leq)$

Пример: $(P(U), \subsetneq, \subseteq)$

Опр: Для Ч.У.М. $\mathcal{A} = (A, <)$ и $B \subseteq A$ определим:

(1) $x \in \min_< B \iff x \in B \land \forall y \in B \; \neg y < x$

(2) $x \in \max_< B \iff x \in B \land \forall y \in B \; \neg x < y$.

(3) x – наим. в $B \iff x \in B \land \forall y \in B \; x \leq y$

(4) x – наиб. в $B \iff x \in B \land \forall y \in B \; y \leq x$

next

Утв: Если x – наим. (наиб.) в B, то $\min_< B$ ($\max$) $= \{x\}$

(5) <u>мн-во верхних граней B</u>

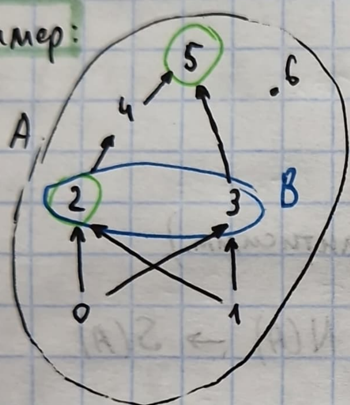
$x \in B^{\Delta} \Leftrightarrow \forall y \in B \quad y \le x$

(6) $x \in B^{\nabla} \Leftrightarrow \forall y \in B \quad x \le y$

(7) $x = \sup B \Leftrightarrow x$ - наим. в B^{Δ}

(8) $x = \inf B \Leftrightarrow x$ - наиб. в B^{∇}

Пример:



$\min_< A = \{0, 1, 6\}$ $\quad B^{\Delta} = \{5\}$; $5 = \sup B$

$\max_< A = \{5, 6\}$ $\quad B^{\nabla} = \{0, 1\}$; $\nexists \inf B$

$\min_< B = \{2, 3\} = \max_< B$ $\quad C^{\Delta} = \{5\} \subseteq C$

$5 = \sup C$

$C = \{2, 5\}$ $\quad C^{\nabla} = \{0, 1, 2\}$

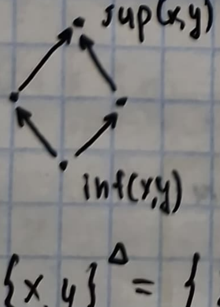
$\min_< C = \{2\}$ $\quad 5 =$ наиб. в C $\quad 2 = \inf C$

$\max_< C = \{5\}$ $\quad 2 =$ наим. в C

Утв: $x \in B^{\Delta} \cap B \Rightarrow x$ - наиб. в B

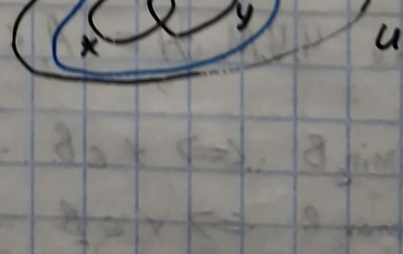
Опр: Пусть $\mathcal{A} = (A, <)$ ч.у.м.

$\mathcal{A}$ наз. <u>решёткой</u> $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \quad \exists \inf(x, y)$ и $\exists \sup(x, y)$



Пример: $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$ - решётка

$x, y \in \mathcal{P}(U)$



$\{x, y\}^{\Delta} = \{z \subseteq U \mid x \subseteq z \wedge y \subseteq z\}$

$\sup\{x, y\} =$ наим. $\{x, y\} = x \cup y$

$x \vee y \in \{x, y\}^{\Delta}$

$x \leq x \vee y \quad \wedge \quad y \leq x \vee y$

$\forall w \in \{x, y\}^{\Delta} \quad x \vee y \leq w$

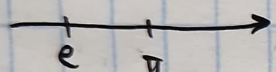
$\forall w \, (x \leq w \ \wedge \ y \leq w \Rightarrow x \vee y \leq w$

$\inf\{x, y\} = \text{наиб}\,\{x, y\}^{\nabla} = x \wedge y$

Опр: Пусть $\mathcal{A} = (A, <)$ ч.у.м.

$\mathcal{A}$ наз. <u>линейным</u> (л.у.м.) $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \ (x \leq y \vee y \leq x)$

Пример: $(\mathbb{R}, <)$



Утв: Если $\mathcal{A}$ л.у.м. и $x \in \min_{<} B$, то x - наим. в B

Док-во: Дано: $x \in B \ \wedge \ \forall y \in B \ \ \neg y < x$

Линейность: $\forall y \in B \ (y \leq x \ \vee \ \ \leq y) \Leftrightarrow (y < x \vee y = x \ \vee x < y)$

$\forall y \in B \quad x \leq y \qquad x$ - наим. в B.

Вообще, в л.у.м. $\neg x < y \Rightarrow y \leq x$

Опр: Пусть ч.у.м. $\mathcal{A} = (A, <)$ и $C, D \subseteq A$.

Тогда C - <u>цепь</u> в $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x, y \in C \ (x \leq y \ \vee \ y \leq x)$

D - <u>антицепь</u> в $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x, y \in D \ (\neg x < y \ \wedge \ \neg y < x)$

Пример: цепь : $C = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad 2^n \mid 2^m \Leftrightarrow n \leq m$

антицепь : $D = \{p \in \mathbb{N} \mid p\text{-простое}\}$, $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Опр: Пусть есть ч.у.м. $\mathcal{A} = (A, <_A)$ и $\mathcal{B} = (B, <_B)$

носитель чум $\mathcal{A}$

α - изоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ (1) $A \overset{\alpha}{\sim} B$

(2) $\forall x, y \in A$

$x <_A y \Leftrightarrow \alpha(x) <_B \alpha(y)$

Пишем: $A \overset{\alpha}{\cong} B$

и $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists \alpha \; \mathcal{A} \overset{\alpha}{\cong} \mathcal{B}$

Следствие: $x \leq_A y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x <_A y \\ x = y \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha(x) <_B \alpha(y) \\ \alpha(x) = \alpha(y) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \alpha(x) \leq_B \alpha(y)$

Лемма 1: (1) $\mathcal{A} \overset{id}{\cong} \mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A} \overset{\alpha}{\cong} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \overset{\alpha^{-1}}{\cong} \mathcal{A}$

(3) $\mathcal{A} \overset{\alpha}{\cong} \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \overset{\beta}{\cong} \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \overset{\beta \circ \alpha}{\cong} \mathcal{C}$

Лемма 2: Если $\mathcal{A} \overset{\alpha}{\cong} \mathcal{B}$, то

(1) $\mathcal{A}$ лум $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ лум.

(2) X - (анти)цепь в $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\alpha[X]$ - (анти)цепь в $\mathcal{B}$

(3) $\alpha[\min_{<_A} X] = \min_{<_B} \alpha[X]$

(4) X_0 - $<_A$ наим. в X $\Rightarrow$ $\alpha(X_0)$ - $<_B$ наиб. в $\alpha[X]$

Док-во: (2) X - цепь в $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow \forall u, w \in X \; (u \leq_A w \vee w \leq_A u)$

$\Leftrightarrow \forall u, w \in X \; (\alpha(u) \leq_B \alpha(w) \vee \alpha(w) \leq_B \alpha(u))$

$\forall z \in \alpha[X] \;\; \exists! \, u \in X \;\; z = \alpha(u)$

$\Leftrightarrow \forall z, y \in \alpha[X] \; (z \leq_B y \vee y \leq_B z)$

$\Leftrightarrow \alpha[X]$ - цепь в $\mathcal{B}$

ч.т.д.