Лекция 28, 17.04.24

В фикс. базисе e $(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e$, где $\varphi : V \to V$ – л.о.

Для лин. отображения $\phi : V_1 \to V_2$: $\underset{m\times1}{(\phi(x))^f} = \underset{m\times n}{A_{ef}} \cdot x^e_{n\times1}$ $\dim V_1 = n$

фикс. пара базисов e и f $\dim V_2 = m$

Утв: Пусть A – матрица лин. оператора φ в базисе e

A' – матрица л.о. φ в базисе e'

Пусть T – матрица перехода от e к e'

Тогда $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

$\square$ $y = A \cdot x$ (1)

$y' = A' \cdot x'$ (2)

(тут $y = \underset{n\times1}{(\varphi(x))^e}$

$y' = \underset{n\times1}{(\varphi(x))^{e'}}$)

$y = T y'$ (т.к. $y' = T^{-1} y$) и $x = T \cdot x'$ (формула изменения коорд. вектора при замене базиса)

Подставим в (1):

$T y' = A \cdot T \cdot x'$, но T - невыр. матрица перехода $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ умножам на T^{-1} слева $\Rightarrow$ $y' = \underline{T^{-1} \cdot A \cdot T} \cdot x'$, сравним с (2)

$\Rightarrow A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$ (т.к. матрица л.о. единств. в фикс. базисе) ■

Утв: Пусть φ - лин. отображение лин. пространства V_1 в л.п. V_2

Пусть $A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ - м-ца лин. отобр. в паре базисов ε_1 в пространстве V_1 и ε_2 в пространстве V_2.

$\dim V_1 = n$ $\dim V_2 = m$

Тогда, если T_1 - м-ца перехода от ε_1 к ε_1' в V_1,

T_2 - м-ца перехода от ε_2 к ε_2' в V_2, то

$$\underset{m \times n}{A_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}} = \underset{m \times m}{T_2^{-1}} \underset{m \times n}{A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \cdot \underset{n \times n}{T_1}$$

□ Пусть y - образ x под действием φ, т.е. $y = \varphi(x)$, Тогда

$y^{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot x^{\varepsilon_1}$ (1) ← в старом базисе

$y^{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'} \cdot x^{\varepsilon_1'}$ (2) ← в новом базисе

Формулы изменения координат вектора:

$x^{\varepsilon_1} = T_1 \cdot x^{\varepsilon_1'}$

$y^{\varepsilon_2} = T_2 \cdot y^{\varepsilon_2'}$, подставляем в (1) и получаем:

$T_2 y^{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1 x^{\varepsilon_1'}$ $\Big|$ $\cdot T_2^{-1}$ слева, т.к. T_2 невыр. $\Rightarrow y^{\varepsilon_2'} = \underbrace{T_2^{-1} A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1}_{A_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}} x^{\varepsilon_2'}$,

сравнивая с (2) $\Rightarrow A_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'} = T_2^{-1} A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot T_1$ ■

Опр: **Ядром** лин. отображения φ наз-ся мн-во:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(0) \subseteq V_1$$

Опр: **Образом** лин. отображения φ наз-ся мн-во:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{x \in V_2 \mid \exists y \in V_1 : \varphi(y) = x\} = \varphi(V_1) \subseteq V_2.$$

Замечание: $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ являются подпространствами в V_1 и V_2 соответственно (проверить замкнутость по опр.)

Утв: Пусть $\varphi : V_1 \to V_2$ - лин. отображение. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = n = \dim V_1$$

□ Выберем в V_1 базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$.

$\forall x \in V_1$ можно записать в виде $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

$\varphi(x) \overset{\text{по лин.}}{=} x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, но $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ - столбцы м-цы лин. отображения (если фиксировать базис в V_2).

Т.е. $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ ← лин. оболочка

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = Rg A$ - ранг м-цы лин. отображ.

Ядро φ описывается ОСЛАУ.

$Ax = 0$, размерность пр-ва ее решений (т.е. число векторов ФСР) есть $\dim \operatorname{Ker}\varphi = k = n - Rg A = n - \dim \operatorname{Im}\varphi$.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = n = \dim V_1$. ■

Пример: Рассмотрим пространство $R_n[x]$ - пространство многочленов от x степени не выше n с вещ. коэфф. и оператор

$D : f \mapsto f'$

диффф. произв.

$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, т.к. $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$\operatorname{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

(константы)

$\operatorname{Ker} D = \mathcal{L}(1)$

$\dim \operatorname{Im} D = n \qquad \dim \operatorname{Ker} D = 1$

$\dim \operatorname{Ker} D + \dim \operatorname{Im} D = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$, но $\operatorname{Ker} D \subseteq \operatorname{Im} D$.

Замечание: Если φ - лин. оператор (т.е. $\varphi: V \to V$ и $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi \subseteq V$), то вообще говоря $V \neq \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$, хотя и $\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$. (см. пример)

Опр: Матрицы A и B наз-ся подобными, если $\exists$ невыр. м-ца C : $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$ $(\det C \neq 0)$

Замечание: Матрицы лин. операторов (и отображений) в различных базисах подобны между собой.

Утв: Определители подобных квадратных матриц равны.

$\square$ Пусть A подобна B, т.е. $B = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow \det B = \det(C^{-1} A \cdot C) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \dfrac{\det C}{\det C} \cdot \det A = \det A$ $\blacksquare$

Замечание: Это означает, что $\det A$ - определитель матр. лин. оператора не зависит от выбора базиса, т.е. явл. инвариантом замены координат ($\Rightarrow$ ранг тоже).

Действия с лин. операторами и их матрицами

Пусть A и B - лин. операторы на лин. пр-ве над полем F, тогда

Опр: $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$

$(\lambda \cdot A)(x) = \lambda \cdot A(x)$ - умножение на число $\lambda \in F$.

$(A \cdot B)(x) = A \cdot (B(x))$ - умножение (= композиция)

Замечание: $A+B$, λA, $A \cdot B$ - снова лин. операторы.

Утв: Пусть фикс. базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда

1) $(A+B)_e = A_e + B_e$
2) $(\lambda A)_e = \lambda \cdot A_e$
3) $(AB)_e = A_e \cdot B_e$

$(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e$

□ 3) $\underset{(AB)_e x^e}{\underset{\shortparallel}{((AB)(x))^e}} = (A(B(x))^e = A_e \cdot (B(x))^e = A_e \cdot B_e x^e$

$\Rightarrow (AB)_e = A_e \cdot B_e$, т.к. пр-ние в фикс базисе единственно. ■

Собственные векторы и собственные значения

Опр: Число λ наз. собственным числом (или собственным значением, т.е. с.з.) линейного оператора $\varphi: V \to V$, где V – лин. пр-во, если $\exists$ вектор x, $x \neq 0$, такой, что $\boxed{\varphi(x) = \lambda \cdot x}$

При этом x наз. собственным вектором (с.в), отвечающий с.з. λ.

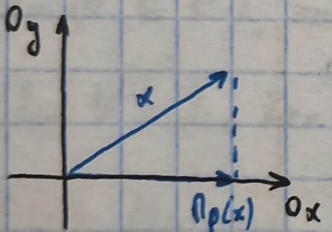
Замечание: $\forall\ \alpha \cdot x$, $\alpha \neq 0$ – число, x – с.в. с ед. зн. λ.

$$\varphi(\alpha x) = \alpha \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \lambda x = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x \text{ – тоже с.в.}$$

Замечание: Другими словами, с.в. – это ненулевой вектор, остающийся коллинеарным самому себе под действием л.о. φ

Пример: 1) Л.о. проекции на O_x в $V_2 \cong \mathbb{R}^2$

$$\text{Пр}_{O_x}: V_2 \to V_2$$



$\forall$ вектора x оси O_x, напр. для $\bar{i} = (1, 0)$.

$\varphi(i) = i \Rightarrow i$ - с.в., отвеч. с.з. $\lambda_1 = 1$

$\varphi(j) = 0 \Rightarrow j$ - с.в., отвеч. с.з. $\lambda_2 = 0$

В базисе $\{i, j\}$ матрица л.о. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

базис из с.в.

Замечание: $V_2 = O_x \oplus O_y$

Пример 2. Бывает так, что нет с.з. и с.в. для л.о.

Например, если φ – оператор вращения плоскости на $\pi/2$.

Тогда на один ненулевой вектор не переходит в пропорциональный себе.