Лекция 6, 11.10.23

Док-во фальш. разл. det $\quad (A_{kj} = A'_{kj})$

□ $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{a'_{kj}}_{\text{i-я стр.} = \text{k-й}} \cdot A'_{kj} \overset{(8)}{=} \det A' \overset{(4б)}{=} 0$, где A' получ. из A заменой

k-й строки на i-ю. (В A' две одинак. стр.)

Свойства обратной матрицы

① $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ ($\forall$ невырожд. кв. м-ц одинак. порядка)

② $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

□ (1) $(A\cdot B)\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}\underset{\text{асс.}}{=}A\cdot\underbrace{(B\cdot B^{-1})}_{\overset{\shortparallel}{E}}\cdot A^{-1}=A\cdot E\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=E$

$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B)\underset{\text{асс.}}{=}B^{-1}\cdot\underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{E}\cdot B=B^{-1}\cdot E\cdot B=B^{-1}\cdot B=E$

$\Bigg\}$ по опр. $B^{-1}\cdot A^{-1}=(A\cdot B)^{-1}$

(2) $A^{T}\cdot(A^{-1})^{T}\underset{\text{по св. трансп.}}{=}(A^{-1}\cdot A)^{T}=E^{T}=E$

$(A^{-1})^{T}\cdot A^{T}\underset{\text{по св. трансп.}}{=}(A\cdot A^{-1})^{T}=E^{T}=E$

$\Bigg\}$ $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$ по опр. ■

Вычисление обр матрицы

I способ: С помощью формулы

$$A^{-1}=\frac{1}{\det}\cdot\tilde{A},$$ где $\tilde{A}$ – союзная м-ца $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}^{T}$, т.е. транспонир.

к м-це, составленной из алгебраических дополнений.

Пример: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

II способ: Составим матрицу $(A|E)_{n\times 2n}$, где E – ед. м-ца того же порядка

Элементарными преобразованиями строк приводим к каноническому виду (м-цы A) (используя строки расш. м-цы).

Замеч: Если A – кв. невырожд. м-ца, то её канонический вид E (ед. м-ца), т.к. все диаг. эл-ты $\neq 0$ $\Rightarrow$ ведущие $\Rightarrow =1$.

$(A|E) \sim (E|B)$. Тогда B и есть обр. м-ца $(B = A^{-1})$.

$\square$ Это так, так как элем. преобр. строк экв. умножению слева на м-цу элем. преобразований (невырожденную)

$(A|E) \sim (S_1 A \mid S_1 E) \sim \ldots \sim (S_k \cdot \ldots \cdot S_1 A \mid S_k \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot E) = (E|B)$,

т.е. $S_k \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A = E \quad | \cdot A^{-1} \iff S_k \cdot \ldots \cdot S_1 = A^{-1} \qquad (E \overset{\shortparallel}{|} A^{-1})$ $\blacksquare$

Матричные уравнения

1) $\underset{m\times m}{A} \cdot \underset{m\times n}{X} = \underset{m\times n}{B}$ (где A - кв. невыр. м-ца, B - любая подходящ. разм.)

Найти неизв. м-цу X.

I способ: $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$ (т.к. $\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$)

II способ: $(A|B) \underset{\substack{\text{эл.пр.} \\ \text{строк}}}{\sim} (E \mid A^{-1} \cdot B) = (E|X)$

2) $X \cdot A = B$ $(A$ кв, $\det A \neq 0)$

I способ: $\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$ $\quad (X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{E} = B \cdot A^{-1})$

II способ: Транспонированием можно свести ур-е 2-го типа к 1-му

$(X \cdot A)^T = B^T \iff A^T \cdot X^T = B^T \implies (A^T | B^T) \underset{\substack{\text{элем.пр.} \\ \text{строк}}}{\sim} (E | X^T)$

Утв: Пусть A - кв. невыр. м-ца ($\det A \neq 0$), тогда у СЛАУ $Ax = b$ $\exists!$ решение. Его можно найти:

1) либо по ф-ам Крамера

2) либо как реш-е матр ур-ния $\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$

Замеч: Для однор. $(b = 0)$ СЛАУ $Ax = 0$ с кв. A ($\det A \neq 0$) $\exists!$ нулевое решение.

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную м-цу $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$

Опр: <u>Минором</u> k-го порядка наз. определитель м-цы A, составленный из эл-ов, стоящих на пересечении произв. фиксир. k строк и k столбцов.

Пусть $i_1, \dots, i_k$ – номера строк, $j_1, \dots, j_k$ – номера столбцов.

Обознач: $M^{j_1, \dots, j_k \leftarrow \text{стр.}}_{i_1, \dots, i_k \leftarrow \text{стб.}}$

Пример 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Миноры 2-го пор. $M^{12}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $M^{13}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$M^{23}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Опр: <u>Рангом</u> матрицы наз. макс. порядок (наибольший размер) отличного от нуля минора м-цы.

Обознач: $\mathrm{Rg}\, A$ (rg, rk, rank, rang ...)

Замеч: Опр-е означает, что:

1) $\exists\, M^{j_1, \dots, j_r}_{i_1, \dots, i_r} \neq 0$ (минор r-го порядка, отличный от нуля)

2) Все миноры порядков $r+1, r+2, \dots$ $(>r)$ равны нулю (или не сущ.)

Тогда $\mathrm{Rg}\, A = r$.

Пример 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M^1_1 = 1 \neq 0$

$\mathrm{Rg}\, A = 1$, т.к. все миноры 2-го пор. $= 0$.

Замеч: $\mathrm{Rg}\, A_{m \times n} \leq \min(m, n)$

Свойства ранга

① $Rg\,A^T = Rg\,A$

② Элем. преобр. строк и столбцов не меняют ранг.

□ ① Покажем сначала, что $Rg\,A^T \geqslant Rg\,A$

Пусть $Rg\,A = r \Rightarrow$ по опр. в м-це A $\exists$ минор $M^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_k} \neq 0$

Опр: Любой отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу м-цы, наз. <u>базисным минором</u> м-цы (<u>БМ</u>). Строки (столбцы), попавшие в некоторый базисный минор, наз. <u>базисными</u>.

Тогда в м-це A^T $\exists$ минор $M^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ получ. из $M^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_k}$ опер. трансп.

Т.к. при трансп. det не меняется, $M^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} \neq 0 \Rightarrow Rg\,A^T \geqslant Rg\,A$

Теперь: $Rg\,A \leqslant Rg\,A^T \underset{\uparrow}{\leqslant} Rg\,(A^T)^T = Rg\,A$

то же св-во, но для A

■

Линейная зависимость строк (столбцов)

Опр: <u>Линейной комбинацией строк</u> (столбцов) $a_1, \ldots, a_s$ одинак. длины (высоты) наз. выражение вида:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s, \text{ где } \alpha_1, \ldots, \alpha_s \text{ — нек. числа}$$

Опр: Строки (столбцы) $a_1, \ldots, a_s$ наз. <u>линейно зависимыми</u> (<u>л.з.</u>), если $\exists$ числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, не все равны 0, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = \overline{0}$$ ← нулевая строка (столбец)

(т.е. $\exists$ нетривиальная л/к строк (столбцов), равная нулю).

Опр: Если равенство $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s = \overline{0}$ возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$, то строки (стб) $a_1, a_2, \ldots, a_s$ наз. <u>линейно независимыми</u> (<u>л.н.з.</u>)

(Т.е. строки (столбцы) явл. л.н.з., если только тривиальная их л/к равна 0).