Семинар 12, 30.11.23

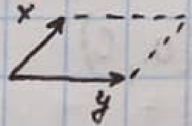
Ангем

Если $v_1, \dots, v_n$ – это некоторая система векторов, то их матрицей Грама наз.

$$G(v_1, \dots, v_n) = ((v_i, v_j))_{i,j=1}^{n}$$

$$\det G = \begin{cases} 0, & \text{если } v_1, \dots, v_n \text{ л/з} \\ |V|^2, & \text{где } V \text{ – это параллелепипед, натянутый на } v_1, \dots, v_n \end{cases}$$

$$[x, y] = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$



$$\begin{cases} [x + x', y] = [x, y] + [x', y] \\ [\alpha x, y] = \alpha [x, y] \end{cases} \Longleftrightarrow [\alpha x + \beta x', y] = \alpha [x, y] + \beta [x', y]$$

$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

Тождество Якоби:

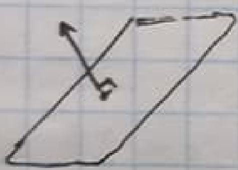
$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Смешанное произведение:

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \pm |V|$$

$(x, y, z) = (x, [y, z]) = ([x, y], z)$

Плоскость: $Ax + By + Cz = D$

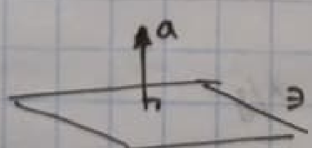


(A, B, C) - вектор, перпендикулярный плоскости

① Пусть $a \in V_3 \setminus \{0\}$. Является ли отношение

$x \mapsto [x, a]$, $V_3 \to V_3$ биективным?

Ответ: нет.



② $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$

$[[a, b], c] = -a(b, c) + b(a, c)$

Рассмотрим ПСК, в которой:

1) e_1 направлен так же, как b

2) c лежит в плоскости $\langle e_1, e_2 \rangle$

3) e_3 любой

В этой ПСК:

$b=(b_1, 0, 0)$ $\quad c=(c_1, c_2, 0)$ $\quad a=(a_1, a_2, a_3)$

$$[b,c]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, b_1c_2)$$

$$[a,[b,c]]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_1c_2 \end{vmatrix} = (a_2b_1c_2, -a_1b_1c_2, 0) \quad (*)$$

С другой стороны:

$(a,c)=a_1c_1+a_2c_2$ $\qquad (a,b)=a_1b_1$

$$b(a,c)-c(a,b)=(b_1(a_1c_1+a_2c_2), 0, 0)-(a_1b_1c_1, a_1b_1c_2, 0)=$$
$$=(a_2b_1c_2, -a_1b_1c_2, 0) = (*)$$

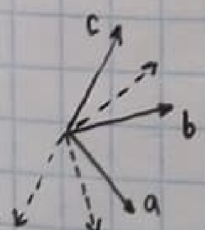
$$[[a,b],c]=-[c,[a,b]]=-(a(c,b)-b(c,a))=-a(b,c)+b(a,c)$$

③ Даны 3 некомпланарных вектора a, b, c и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Найти x, т.ч. $(a,x)=\alpha$, $(b,x)=\beta$, $(c,x)=\gamma$.

Вектора $[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$ образуют базис

$$x=x_1[a,b]+x_2[a,c]+x_3[b,c]$$



$(a,[a,b])=0$,

$(a,[a,c])=0$

$\Downarrow$

$$(a,x)=x_3(a[b,c])=x_3(a,b,c), \text{ т.к.}$$

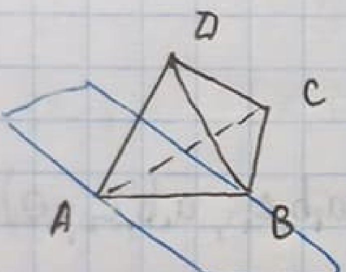
$$(a,x)=(a, x_1[a,b]+x_2[a,c]+x_3[b,c])=(a,x_1[a,b])+(a,x_2[a,c])+(a,x_3[a,c])$$

Аналогично, $(b, x) = x_2 (b, [a, c]) = x_2 (a, b, c)$

$(c, x) = x_1 (c, [a, b]) = x_1 (a, b, c)$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{\gamma}{(a,b,c)}, \quad x_2 = \dfrac{\beta}{(a,b,c)}, \quad x_3 = \dfrac{\alpha}{(a,b,c)}$

④ Даны векторы тетраэдра $A(5,1,3)$, $B(1,6,2)$, $C(5,0,4)$, $D(4,0,6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.



Плоскость проходит через A, B; $\overline{CD}$ лежит в плоскости

Пусть $\Pi: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

Найдём (α, β, γ) используя векторы $\overline{CD}$, $\overline{AB}$.

$\overline{AB} = (-4, 5, 1) \qquad \overline{CD} = (-1, 0, 2)$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \cdot (-1)]{\text{I} - 4 \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ 5\beta = 9\gamma \end{cases}$$

$\Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (10, 9, 5)$

$A \in \Pi \Rightarrow$ находим δ

$\delta = 50 + 9 + 15 = 74$

Ответ: $10x + 9y + 5z = 74$

⑤ 1) $x = 1 + 2v, \quad y = -2, \quad z = 1 - u$

$\Pi \ni (1, -2, 1)$ при $v = u = 0$

Чтобы найти 2 вектора, можно взять $(v, u) = (1, 0), (0, 1)$

$(2v, 0, -u)$

$(1, -2, 1)$

Получаем 2 вектора $(0, 0, -1)$, $(2, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 1, 0)$$

$y = D = -2$, итого $\Pi: y = -2$.