$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) Предел + Непр + Св-ва непр.

2) Дифф. → не понятно

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} A_i (x^i - x_0^i) + \bar{o}(\rho(\vec{x}; \vec{x}_0))$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f(\vec{x}_0 + t\vec{e})}^{g(t)} - f(\vec{x}_0)}{t} \qquad |\vec{e}| = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \xrightarrow[\vec{e}]{} \max$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{d\,g(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{f(\vec{x}_0 + t\vec{e})}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{d(\overset{x_i^0 + t\cdot \underline{l_i}}{x_i})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot l_i =$$

$$= \langle \overrightarrow{\operatorname{grad} f}; \vec{l} \rangle = \operatorname{proj}_{\vec{l}} \overline{\operatorname{grad} f}$$

ед. длины

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} \to \max \Leftrightarrow \vec{\ell} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\operatorname{grad} f}$$

$$\max \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right|$$

Вивод:

Озн: Лінією рівня функції $y = f(\vec{x})$ наз. мн-во точок $\in \mathbb{R}^n$ таких, що $f(\bar{x}) = c$ для деякого $c \in \mathbb{R}$

Тв: $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\big|_{\bar{x}} \perp$ лінії рівня $f(\bar{x}) = \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{c}$

$\mathbb{R}^2$

$\vec{x}_1 - \bar{x}_2$

$\bar{x}_2 - \bar{x}_3$

$\bar{x}_3 - \bar{x}_4$

$\boxed{\overline{x_n}}$

$f(\bar{x}(t)) = c \quad \forall t$

Запараметр. лінію рівня

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{\operatorname{grad} f}; \vec{v}\right)$$

Кас. вектор к лін. рівня

Неявно заданные функции

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ F(x;y)=0 \end{array}\right] \quad \text{найти } y=f(x): \quad F(x;f(x))=0 \quad \forall x$$

$$x^2+y^2=1$$

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2} & -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2} \\ -\sqrt{1-x^2} & 1\ge |x|>\frac{1}{2} \end{cases}$$

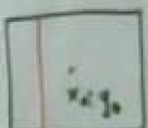
Опр: Функция $F(x;y)=0$ заданная на $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$\exists\, y=f(x):\ D_f = B \subseteq \mathrm{proj}_x A$

$\forall x \in B:\ F(x;f(x))=0$, то

$y=f(x)$ наз неявной функцией, определенной $F(x;y)=0$

Лемма: $F(x;y)$ непрерывна на $U_{\delta}(x_0) \times U_{y}(y_0)$

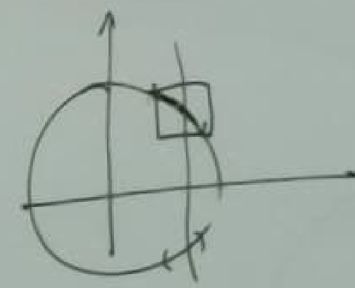


$\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ $F(x;y)$ строго монотонна по y, тогда

$\exists\, \delta, \varepsilon:\ \forall x \in U_{\delta}(x_0)\ \exists!\ y \in U_{\varepsilon}(y_0):\ F(x;y)=0$

Обозначим $y=f(x) \leftarrow$ непр. в т. x_0

Док: $F(x_0;y_0)=0$ Пусть возр.



Возьмём $\varepsilon < \delta$

$F(x_0;\ y_0+\varepsilon)>0$

$F(x_0;\ y_0-\varepsilon)<0$

$\exists\,\delta$: в δ-окр. т. $(x_0:y_0+\varepsilon)$ $F(x;y)>0$

$(x_0:y_0-\varepsilon)$ $F(x:y)<0$

Возьмём $\forall x\in U_\delta(x_0)$: $F(x:y_0-\varepsilon)<0$

$F(x;\ y_0+\varepsilon)>0$

$\Rightarrow \exists!\, y\in(y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon): F(x:y)=0$

св-во непр

строгая монотонность

$y=f(x)\leftarrow$ непр. „смотри"

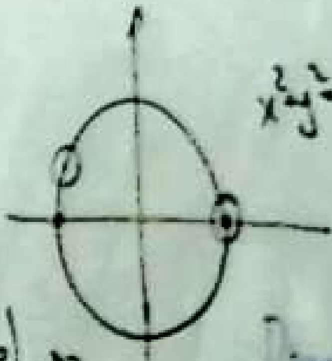
Теор. (о неявной функции)

$F(x;y)$ непр в окр $(x_0;y_0)$ и $\exists\, F'_y(x;y)$ непр в т. $(x_0;y_0)$

$F(x_0;y_0)=0$ $\quad F'_y(x_0;y_0)\neq 0$, то

$\exists\, \delta$ и ε $\quad \forall x \in U_\delta(x_0)\ \exists!\, y \in U_\varepsilon(y_0):\ F(x;y)=0$

$y=f(x)$ – непр. в т. x_0.



$x^2+y^2=1$

$F(x;y)=x^2+y^2-1$

$F'_y = 2y$

Бонус: Если $\exists\, F'_x(x;y)$ в окр. т. $(x_0;y_0)$ $\oplus$ непр в т. $(x_0;y_0)$, то

$$\exists\, f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_y(x_0;y_0)}$$

Пример: $\cos xy + x = 0$

$y=f(x)$ $\quad \boxed{\cos x y(x) + x = 0}$

$F(x;f(x))=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{df(x)}{dx}=0$$

$$\sin x y(x)\cdot\left(y(x)+x\cdot y'(x)\right)+1=0$$

$$y'(x)=\left(\frac{-1}{\sin x y(x)}-y(x)\right)\cdot\frac{1}{x}$$