Homework 5.

#2

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 5 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{по 1 стр.}}{=} 7\cdot(-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & & \\ 2 & 7 & 5 & & 0 \\ 0 & 2 & 7 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 7 \end{vmatrix}}_{=\Delta_{n-1}} + 5\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & & \\ 0 & 7 & 5 & & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 5 \\ & 0 & & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7\Delta_{n-1} - 2\cdot 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 5 & & \\ 2 & 7 & 5 & 0 \\ & 2 & 7 & \ddots \\ & & \ddots & 5 \\ 0 & & 2 & 7 \end{vmatrix}}_{=\Delta_{n-2}} = 7\Delta_{n-1} - 10\Delta_{n-2}$$

Характеристический многочлен: $x^n = 7x^{n-1} - 10x^{n-2} \quad | \cdot x^{2-n}$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-5)(x-2) = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = 2$

Тогда $\Delta_n = a\cdot 5^n + b\cdot 2^n$

$$\begin{cases} a\cdot 5 + b\cdot 2 = 7 \\ 25a + 4b = 39 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Delta_n = \frac{1}{3}\cdot 5^{n+1} - \frac{1}{3}\cdot 2^{n+1} = \boxed{\frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right)}$$

#3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+1-n \end{vmatrix} = 1\cdot(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1) = \boxed{\prod_{i=1}^{n-1}(x-i)}$$

#5.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc$$

Если ни одно число не равно 0, то поделим на d и c:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow$ строки пропорциональны

Поделим на b и d: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$ столбцы пропорциональны

Если b или c равно 0, то нулю равно a или d, тогда строки или столбцы будут пропорциональны с коэфф. 0.

#1.

$a_{ij} = \min(i, j)$ м-ца A порядка n

$$\begin{array}{c|c} {}_{i}\,{}^{j} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix} \end{array} = \left[\begin{array}{l} \text{из I-й строчки} \\ \text{вычитаем I-1 для } \forall I=\overline{2,n} \\ \text{(в обратном порядке} \end{array}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

#4

$$f_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{= f_{n-1}} + 1\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= f_{n-1} + 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{= f_{n-2}} = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $\forall n \geq 2$ ч.т.д.