

Математический анализ. Консультация 21.02.2024

Вычислить интегралы в заданиях, зная, что:

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, C \in \mathbb{R}, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$
- $\int \cos x dx = \sin x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, C \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, C \in \mathbb{R}, |x| < a$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C, C \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2-a^2} \right| + C, C \in \mathbb{R}, |x| > a \neq 0$
- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right) + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right) + C, C \in \mathbb{R}$

Task 1. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} dx \\ & \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} dx = |t = \ln x| = \int \frac{dt}{t \ln t} dt = \\ & = \int \frac{d(\ln t)}{\ln t} = \ln |\ln t| + C = \ln |\ln \ln x| + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Task 2. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \sin^6 x \cos x dx \\ & \int \sin^6 x \cos x dx = \int \sin^6 x d(\sin x) = \frac{\sin^7 x}{7} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Task 3. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx \\ & \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\arcsin x} d(\arcsin x) = \frac{2 \arcsin^{\frac{3}{2}} x}{3} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Task 4. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt[3]{\arctan x}}{1+x^2} dx \\ & \int \frac{\sqrt[3]{\arctan x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt[3]{\arctan x} d(\arctan x) = \frac{3 \arctan^{\frac{4}{3}} x}{4} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Task 5. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\int (2x + 7)^{11} dx$$

$$\int (2x + 7)^{11} dx = \frac{1}{2} \int (2x + 7)^{11} d(2x + 7) = \frac{(2x + 7)^{12}}{24} + C, C \in \mathbb{R}$$

Task 6. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4 + 1} dx$$

$$\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{2x^4 + 1} d(x^4) = \frac{1}{8} \int \sqrt{2x^4 + 1} d(2x^4 + 1) =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{(2x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_1 \right) = \frac{(2x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{12} + C, C \in \mathbb{R}$$

Task 7. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \left| \sqrt{e^x + 1} = t > 1, e^x = t^2 - 1, dx = \frac{2t dt}{t^2 - 1} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t} \frac{2t dt}{t^2 - 1} = \int \frac{2 dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + C, C \in \mathbb{R}$$

Task 8. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cot \frac{x}{2} dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \int \cot \frac{x}{2} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C, C \in \mathbb{R}$$

Task 9. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\int x^2 \cos x dx$$

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - \int \sin(x) \cdot 2x dx = x^2 \sin x + \int 2x d(\cos x) =$$

$$= x^2 \sin x + \int 2x d(\cos x) = x^2 \sin x + \left(2x \cos x - \int \cos x d(2x) \right) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C, C \in \mathbb{R}$$

Task 10. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^4}{1-x^4} dx \\ & \int \frac{x^4}{1-x^4} dx = \int \frac{1}{1-x^4} - 1 dx = -x + \int \frac{1}{1-x^4} dx = -x + \int \frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)} dx = \\ & = -x + \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-x^2)} + \frac{1}{(1+x^2)} \right) dx = -x + \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-x^2)} + \frac{1}{(1+x^2)} \right) dx = \\ & = -x + \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{1-x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) = -x + \frac{1}{2} \left(-\int \frac{1}{x^2-1} dx + \arctan x \right) = \\ & = -x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \arctan x + C_1 \right) = -x - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \arctan x + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Task 11. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \tan^3(x) dx \\ & \text{(быть может, используя тригонометрическую формулу)} \\ & \int \tan^3(x) dx = \int \tan(x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan x dx = \\ & = \int \tan(x) d(\tan(x)) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\tan^2(x)}{2} + \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = \frac{\tan^2(x)}{2} + \ln |\cos x| + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Task 12. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} \\ & \text{(быть может, преобразовав числитель)} \\ & \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \\ & = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\cos x} + C, C \in \mathbb{R} \text{ (see Ex. 8)} \end{aligned}$$

Task 13. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sin^4 x} \\ & \text{(быть может, используя тригонометрическую формулу)} \\ & \int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{dx}{\sin^2 x} d(\cot x) = -\int (\cot^2 x + 1) d(\cot x) = \\ & = -\int \cot^2 x d(\cot x) - \int 1 d(\cot x) = -\frac{\cot^3 x}{3} - \cot x + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Task 14. Вычислить неопределённый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ & \text{(быть может, сделав замену переменной)} \\ & \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \sqrt{1-x^2} = t \geq 0, dt = \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} \right| = \int -(1-t^2)^2 dt = \\ & = \int -t^4 + 2t^2 - 1 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t + C = -t \left(\frac{t^4}{5} - \frac{2t^2}{3} + 1 \right) + C = \\ & = -\sqrt{1-x^2} \left(\frac{(1-x^2)^2}{5} - \frac{2(1-x^2)}{3} + 1 \right) + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15} (3x^4 + 5x^2 + 8) + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$