Homework CR7 - Cristiano Ronaldo

#8.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ a & 2a & 2a-2 & a+4 \\ 3 & a & 5 & a \end{pmatrix}$$

$$M_{13}^{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5-6=-1\neq 0 \Rightarrow Rg A \geq 2$$

Рассмотрим минори 3 порядка, используя, что $M_{13}^{13}\neq 0$:

1) $$M_{123}^{123}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 2a & 2a-2 \\ 3 & a & 5 \end{vmatrix} = 10a+2a^2-12a-2a^2+2a=0$$

2) $$M_{134}^{123}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ a & 2a-2 & a+4 \\ 3 & 5 & a \end{vmatrix} = 2a^2-2a+6a+24-15a+18a-18-2a^2-5a-20=$$

$$=2a-14 \Rightarrow \text{при } a=7 \quad M_{134}^{123}=0$$

$\boxed{\text{Ответ: при } a=7 \quad RgA=2, \text{ при } a\neq 0 \quad RgA=3.}$

#9.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{IV-3III \\ I\leftrightarrow III}]{\substack{I-III \\ II-3III}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & -2 & a-4 & 4 \\ 0 & -10 & -10 & a-21 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+10II]{\substack{II\cdot(-\frac{1}{8}) \\ III+2II}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-2=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow Rg A \geq 3$$ (т.к. всегда есть хотя бы 3 ненулевые стр.)

Если $a=1$, то $RgA=3$
Если $a=2$, то $RgA=3$
Если $a\neq 1$ и $a\neq 2$, то $RgA=4$

← Answer

#7.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\0&1&1&2&1\\0&1&1&3&2\\-1&0&1&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{II}]{\mathrm{IV}+\mathrm{I}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\0&1&1&2&1\\0&0&0&1&1\\0&2&2&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{IV}-2\mathrm{II}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\0&1&1&2&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\mathrm{I}-\mathrm{III}]{\mathrm{IV}-\mathrm{III},\ \mathrm{II}-2\mathrm{III}}\begin{pmatrix}1&2&1&0&-1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

I, II и IV столбцы линейно независимые, а III и V выражаются через них:

$$\mathrm{III} = -\mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{I} - \mathrm{II} + \mathrm{IV}$$

$Rg\,A = 3$ (т.к. 3 л.нз. вектора)

#10.

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, где $a_{ij} = (i-j)^2 = i^2 - 2ij + j^2$

$$\begin{pmatrix}0&1&4&9&\dots&(n-1)^2\\1&0&1&4&\dots&(n-2)^2\\4&1&0&1&\dots&(n-3)^2\\9&4&1&0&\dots&(n-4)^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(n-1)^2&(n-2)^2&(n-3)^2&(n-4)^2&\dots&0\end{pmatrix} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\4&4&4&4&\dots&4\\9&9&9&9&\dots&9\\16&16&16&16&\dots&16\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n^2&n^2&n^2&n^2&\dots&n^2\end{pmatrix}}^{i^2}}_{Rg=1} + \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}-2&-4&-6&-8&\dots&-2n\\-4&-8&-12&-16&\dots&-4n\\-6&-12&-18&-24&\dots&-6n\\-8&-16&-24&-32&\dots&-8n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-2n&-4n&-6n&-8n&\dots&-2n^2\end{pmatrix}}^{-2ij}}_{Rg=1} +$$

$$+\overbrace{\begin{pmatrix}1&4&9&16&\dots&n^2\\1&4&9&16&\dots&n^2\\1&4&9&16&\dots&n^2\\1&4&9&16&\dots&n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&4&9&16&\dots&n^2\end{pmatrix}}^{j^2} Rg=1 \qquad \Rightarrow Rg \le 3$$

при $n=2 \quad Rg=2$

при $n=3 \quad Rg=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4+4=8 \neq 0 \Rightarrow Rg \geq 3 \Rightarrow Rg=3$

Ответ: при $n=2$ $Rg\,A=2$; при $n>2$ $Rg=3$.