

## ДЗ к семинару 15

**Задача 1.** Ассоциативна ли операция  $*$  на множестве  $M$ , если

1.  $M = \mathbb{N}$ ,  $x * y = 2xy$ ;
2.  $M = \mathbb{Z}$ ,  $x * y = x^2 + y^2$ ;
3.  $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x * y = x \cdot y^{x/|x|}$ ?

**Задача 2.** На множестве  $M^2$ , где  $M$  – некоторое множество, определена операция  $\circ$  по правилу  $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$ . Является ли  $M^2$  полугруппой относительно этой операции? Существует ли в  $M^2$  нейтральный элемент?

**Задача 3.** Какие из указанных множеств с операциями являются группами:

1.  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ;
2. множество комплексных корней *всех* степеней из 1 относительно умножения;
3. множество комплексных чисел с фиксированным модулем  $r$  относительно умножения;
4. множество ненулевых комплексных чисел с модулем, не превосходящим фиксированное число  $r$ , относительно умножения?

**Задача 4.** Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  в себя образуют группу относительно умножения:

1. множество всех инъективных отображений;
2. множество всех биективных отображений;
3. множество всех чётных перестановок;
4. множество  $\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ?

**Задача 5.** Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу:

1. множество диагональных матриц относительно умножения;
2. множество верхних треугольных матриц относительно умножения;
3. множество ненулевых матриц вида  $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) относительно умножения?

**Задача 6.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – отображение. Отображение  $g : Y \rightarrow X$  называется *правым обратным* для  $f$ , если  $f \circ g = 1_Y$ . Доказать, что отображение  $f$  сюръективно тогда и только тогда, когда оно обладает правым обратным.

**Задача 7.** Пусть  $|X| = m$ ,  $|Y| = n$ . Найти число:

1. биективных отображений;
2. сюръективных отображений  $X \rightarrow Y$ .