Homework #2.

#1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\overline{II}-7\overline{I} \\ \overline{III}-4\overline{I} \\ \overline{IV}+\overline{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 0 & -44 & -48 & -64 \\ 0 & -26 & -29 & -39 \\ 0 & 8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\overline{IV}\cdot\frac{1}{2} \\ \overline{IV}\leftrightarrow\overline{II}}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & -26 & -29 & -39 \\ 0 & -44 & -48 & -64 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2\cdot\overline{III}+13\cdot\overline{II} \\ \overline{IV}+11\,\overline{II}}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 7 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{IV}-\overline{III}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#2.

$$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}]{\substack{\mathrm{I}-3\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 55 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{3} \\ \mathrm{III}\cdot\frac{1}{5}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II}}} \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 + \frac{4}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \\ 8x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_2 - x_3 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{11}{8}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{11}{8}x_4 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{11}{8}x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{24}x_4 - \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{11}{8}x_4 \end{cases}$$

Ответ

#3.

$n \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n$

$T_{ij} = E_n + E_{ij} + E_{ji} \quad E_{ii} - E_{jj}$

$$T_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$

A разм. $n \times m$

$$T_{ij}A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ j \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} & & i\downarrow & & & j\downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 & \\ & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & 0 & \vdots & & \\ & & \vdots & 0 & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & 0 & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,m} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \to \\ \\ j \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m} \\ a_{n,1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

"То же самое, что перестановка i-ой и j-й строки"

B разм. $m \times n$

$$B \cdot T_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i\downarrow & & & j\downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & 0 & \vdots & & \\ & & & \vdots & 0 & 1 & \vdots & & \\ & 0 & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,j} & \dots & a_{m-1,i} & \dots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccc} & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & i & & j & & \end{array} \end{array}$$

"То же самое, что перестановка i-го и j-го столбца"

#4.

$n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$D_i(\lambda) = E_n + (\lambda - 1) E_{ii} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} i \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 \ddots & \\ & 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

Умножение i-й строки на λ

$$D_i(\lambda) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & 0 & & & 1 \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \dots & \lambda \cdot a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$B \cdot D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & 0 & & & 1 \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение i-го столбца на λ

#5.

Алгоритм преобразований: движемся из верхнего левого угла

1) Если текущий элемент равен 1, то просматриваем все следующие элементы текущей строки. Если находим элемент не равный 0, то умножаем текущий столбец на этот элемент с противоположным знаком и прибавляем к столбцу, в котором находится этот элемент. Повторяем шаг ①. Если все следующие элементы 0, то переходим на следующую строку и ищем элемент равный 1. (Уточнение: текущий столбец – тот, в котором находится эл.-т равный 1). Если прошли все строки, то переходим к шагу ②.

2) На этом шаге в матрице есть только эл-ты 0 и 1. Поэтому теперь необходимо „поставить" все столбцы с 1 в начало. Если в матрице k единиц, то они должны стоять по порядку. Идём по столбцам слева направо. В первом столбце 1 должна быть на первом месте, во втором – на втором, ..., в k-м столбце – на k-м, в остальных столбцах нули.

$1 \leq i \leq k$ – столбцы, в которых должны быть 1

Проходимся по всем i-столбцам, если в нём на i-м месте, то берём следующий i. Если нет, то ищем столбец j, в котором 1 на i-м месте, и прибавляем столбец j к столбцу i, а потом у столбца j отнимаем столбец . Переходим к след. i.

Пример: $a\neq 0,\ b\neq 0$, $c\neq 0,\ d\neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{III}-b\cdot \overline{I}]{\overline{II}-a\cdot \overline{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{VI}-d\cdot\overline{IV}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{VI}-c\cdot\overline{V}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV}-\overline{II}]{\overline{II}+\overline{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{V}-\overline{III}]{\overline{III}+\overline{V}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{VII}-\overline{IV}]{\overline{IV}+\overline{VII}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Использовались преобразования второго и третьего типов.

#7.

$C = (c_{ij}) = 0$ при $i \neq j$ $\qquad A_{n\times m}$

$B_{m\times n}$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} c_{11} & & & 0 \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}a_{11} & c_{11}\cdot a_{12} & \dots & c_{11}\cdot a_{1m} \\ c_{22}a_{21} & c_{22}\cdot a_{22} & \dots & c_{22}\cdot a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{nn}\cdot a_{n1} & c_{nn}\cdot a_{n2} & \dots & c_{nn}\cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

Равносильно умножению ~~каждого элемента~~ i-й строки на c_{ii}.

$$BC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & & & 0 \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \cdot a_{11} & c_{22} \cdot a_{12} & \dots & c_{nn} \cdot a_{1n} \\ c_{11} \cdot a_{21} & c_{22} \cdot a_{22} & & c_{nn} \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{11} \cdot a_{m1} & c_{22} \cdot a_{m2} & \dots & c_{nn} \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение i-го столбца на c_{ii}.

#8.

$A = (a_{ij})$, $a_{ij} = 0$ при $i > j$

$B = (b_{ij})$, $b_{ij} = 0$ при $i > j$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots \; 0 & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots \; 0 & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} & \dots & a_{11} \cdot b_{1k} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nk} \\ \boxed{0} & a_{22} \cdot b_{22} & \dots & a_{22} \cdot b_{2k} + \dots + a_{2n} \cdot b_{nk} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{mn} \cdot b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + \dots + a_{2n} \cdot b_{n1} =$$

$$= 0 \cdot b_{11} + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 + \dots + a_{2n} \cdot 0 = 0$$

Т.к. у всех c_{ij} при $i > j$ во всех слагаемых есть множитель d_{kl} с $k > l \Rightarrow d_{kl} = 0$. Тогда $c_{ij} = 0$ $\forall i > j$.

#9.

$$(*)\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1-5}{4}\right) \\ \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\cdot 1 & -1\cdot\left(\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Из прошлого ДЗ: $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}^n$

Из произведений матриц $(*)$ получаем:

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} & \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$$

Отсюда можем предположить, что:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

По мат. индукции:

$$n=0: \quad f_0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$$

$$n: \quad f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$f_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$n \to n+1: \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \text{ аналогично для } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right] =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

ч.т.д.

#6.

$A_{m \times n}, \quad B_{m \times m}, \quad C_{n \times n}$

Т.к. B и C – это произведение нескольких матриц вида $L_{ij}(\lambda)$ и $D_i(\lambda)$, то они будут менять матрицу A следующим образом:

1) $L_{ij}(\lambda) = E_n + \lambda \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ Умножение на такую матрицу равносильно преобразованию III типа (i-я строка/столбец $+= \lambda \cdot$ (j-я строка/столбец))

2) $D_i(\lambda) = E_n + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow i & \end{array}$ Умножение на такую матрицу равносильно преобразованию II типа (i-я строка/столбец $= \lambda \cdot$ i-я строка/столбец)

Тогда, используя эти преобразования, можно получить такие матрицы B и C, что $BAC = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hline & & & \end{array}\right)$. Т.к. $L_{ij}(\lambda)$ и $D_i(\lambda)$ равносильны преобразованиям II и III типа, то B и C могут быть абсолютно любыми, какие нам нужны. А имея такие матрицы, можно получить нужную матрицу.