Лекция 14, 15.12.23

Правило Лопиталя

Теорема: (раскрытие неопр. $\frac{0}{0}$) $\lim\limits_{x\to a^-}$; $f(x)$, $g(x)$

1) дифф. в $(a-\delta_1; a)$ для какого-то δ_1

2) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} g(x) = 0$

3) $g'(x) \neq 0$ по $(a-\delta; a)$

4) Сущ. $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $\quad (A \in \overline{\mathbb{R}})$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Док-во:

1) Доопр. f и g в точке a: $f(a) = g(a) = 0$

2) Возьмём $x \in (a-\delta; a)$

$[x; a]$ выполн. усл. т. Коши

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \xi \in (x; a)$$

$x \to a^-$

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \xrightarrow[x\to a^-]{} A$$

$$\xi(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} a$$

Теорема: (раскрытие $\frac{\infty}{\infty}$) $\lim\limits_{x\to a^-}$; $f(x)$, $g(x)$

1) дифф. на $(a-\delta_1; a)$ для какого-то δ_1
2) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \infty$
3) $g'(x) \neq 0$ по $(a-\delta_1; a)$
4) $\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Док-во:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 \quad \forall x \in (a-\delta_2; a): \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon \quad (A \in \mathbb{R})$$

Если $A \in \{+\infty; -\infty; \infty\}$, поменяем f и g местами.

Будем рассматривать $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Зафиксируем $x_0 \in (a - \min\{\delta_1; \delta_2\}; a)$

$$\exists \delta_3 \quad \forall x \in (a-\delta_3; a): \quad |f(x)| \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{f(x_0)}{f(x)}\right| \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$\exists \delta_4 \quad \forall x \in (a-\delta_4; a): \quad |g(x)| \geqslant \frac{|g(x_0)|}{\varepsilon}$$

$[x_0; x] \quad x \in (a - \min\{\delta_1 \ldots \delta_4\}; a)$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon$$

$$\xi \in (a-\delta_2; a)$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| + \underbrace{\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - A\right|}_{<\varepsilon}$$

$$< \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| \cdot \left|\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1\right| + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant (|A|+\varepsilon) \cdot \frac{\overbrace{\left|\frac{f(x_0)}{f(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right|}^{\leqslant 2\varepsilon}}{\underbrace{\left|1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\right|}_{>\frac{1}{2}}} + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon(|A|+\varepsilon) + \varepsilon < \varepsilon\left(4\left(|A| + \frac{1}{2}\right) + 1\right)$$

ч.т.д.

Пример: $\alpha > 0,\ \beta > 0$

① $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln^\beta x} = +\infty$

$= \left(\dfrac{x^{\alpha/\beta}}{\ln x}\right)^\beta$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha/\beta}}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\alpha}{\beta} x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\overset{>0}{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \overset{>0}{x^{\alpha/\beta}}\right) = +\infty$$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha}$ $\quad a > 1,\ \alpha > 0$

$$= \left(\frac{(\sqrt[\alpha]{a})^x}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x} \overset{b>1}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{b^x} \cdot \overset{>0}{\ln b}}{1} = +\infty$$

Формулы Тейлора

Опр: Многочленом Тейлора для функции $f(x)$ n раз дифф. в т. x_0 наз. $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \qquad f(x) = A + \bar{o}(1),\ x \to x_0$

$\exists f'(x_0) \qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$

$\Rightarrow A = f(x_0)$

$f(x) = P_n(x) + \bar{o}((x - x_0)^n) \quad x \to x_0$

Теорема: Если $f(x) = P_n(x) + \bar{o}((x - x_0)^n)$, то $P_n(x) = T_n(x)$

Док-во: $g(x) = f(x) - P_n(x) = \bar{o}((x - x_0)^n)$

$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{g(x)}{(x - x_0)^k}} = 0 \qquad 1 \le k \le n$$

$= \bar{o}(1) \cdot (x - x_0)^{n-k}$

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall\ 1 \le k \le n \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} = \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} = 0$$

$P_n(x)$ – многочлен

$$P_n^{(k)}(\cancel{x}x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad 0 \le k \le n$$