ДЗ к семинару 28

Задача 1. Пусть отображение $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задано в координатах (здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$)

1. $\phi(x) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$,
2. $\phi(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2)$.

Выяснить, какие из этих ϕ являются линейными операторами, и в случае линейности найти их матрицы в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$.

Задача 2. Доказать, что существует единственный линейный оператор на $\mathbb{R}^3$, переводящий векторы

$$a_1 = (2, 0, 3),\ a_2 = (4, 1, 5),\ a_3 = (3, 1, 2)$$

соответственно в векторы

$$b_1 = (1, 2, -1),\ b_2 = (4, 5, -2),\ b_3 = (1, -1, 1),$$

и найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathrm{M}_2(F)$ умножения на данную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. слева,
2. справа.

Найти матрицы этих операторов в базисе, состоящем из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

Задача 5. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ \ f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,\ \ f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

Задача 6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе

$$a_1 = (8, -6, 7),\ \ a_2 = (-16, 7, -13),\ \ a_3 = (9, -3, 7)$$

имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$b_1 = (1, -2, 1),\ \ b_2 = (3, -1, 2),\ \ b_3 = (2, 1, 2).$$