Семинар 15, 11.01.24

Пусть X – нек. множество и $\mu : X \times X \to X$. $(X \neq \varnothing)$

μ наз. бин. операцией на X, а (X, μ) наз. группоидой.

Обычно обозначают $\mu(x,y) = x \cdot y = xy$

$\mu(x,y) = x + y$

Аксиомы:

(1) $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in X$

(2) $\exists 1 \in X : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in X$

(3) $\forall x \in X \quad \exists x^{-1} \in X : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

(4) $xy = yx \quad \forall x, y \in X$

Опр: (1) – полугруппа

(1) и (2) – моноид

(1), (2) и (3) – группа

(...) + (4) – ... абелев(а) (коммутативная)

Примеры: • (1)+(2)+(3)–(4) : $GL_n(\mathbb{R}) = (\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid |A| \neq 0\}, \cdot)$

L general linear

• (1)+(4)–(2) : $(\mathbb{N}, +)$

$\cdot (2)+(3)+(4)-(1)$:

	1	x	y
1	1	x	y
x	x	1	1
y	y	1	1

$\overbrace{(x\cdot y)}^{1}\cdot y = y$

$x\cdot \underbrace{(y\cdot y)}_{1} = x$

$\cdot$ ни одна из них: $(V^3, [\cdot,\cdot])$

① Ассоциативна ли операция $*$ на мн-ве M, если:

1) $M=\mathbb{N}$, $x*y=x^y$

$\square$ $(x*y)*z=(x^y)*z=(x^y)^z=x^{yz}$ $\neq$

$x*(y*z)= x*(y^z)=x^{y^z}$ Нет $\blacksquare$

2) $M=\mathbb{N}$, $x*y=НОД(x,y)$

$\square$ $(x*y)*z = НОД(x,y,z) = x*(y*z)$ Да $\blacksquare$

3) $M=\mathbb{Z}$, $x*y=x-y$

$\square$ $x*(y*z)=x-(y-z)=x-y+z$ $\neq$

$(x*y)*z=(x-y)-z=x-y-z$ Нет $\blacksquare$

4) $M=\mathbb{R}$, $x*y=\sin x\cdot\sin y$

$\square$ $(x*y)*z = \sin(\sin x\cdot\sin y)\cdot\sin z$ $\neq$

$x*(y*z)=\sin x\cdot\sin(\sin y\cdot\sin z)$ Нет $\blacksquare$

Подмножество $Y\subseteq X$ наз. подгруппоидом, если $Y\neq\varnothing$ и

$\forall y_1, y_2\in Y$ $y_1\cdot y_2\in Y$.

HSE

—||— подмоноидом, если —||— и $1 \in Y$, где 1 - нейтр. элемент $(X, \cdot)$.

—||— подгруппой, если —||—, —||— и $\forall y \in Y \ y^{-1} \in Y$.

Пример (в моноиде может лежать подгруппа и т.д.):

$GL_n(\mathbb{R}) \leq M_n(\mathbb{R})$

② В моноиде $M_2(\mathbb{R})$ найти подполугруппу, которая является моноидом с другим нейтральным элементом.

□ $\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

↳ моноид с единицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

Можно определять левые и правые нейтральные эл-ты и левые и правые обратные.

③ Пусть S - полугруппа матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$ с операцией умножения. Найти левые и правые нейтральные и обратные относительно этих нейтральных.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Левая единица $1_L = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} xa = a & \forall a \\ xb = b & \forall b \end{cases} \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow 1_L = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} ua = 1 \\ ub = y \end{cases} \Rightarrow$ $a, u \neq 0$ & $a = u^{-1}$
v - любое
$b = \frac{y}{u} = ay$

HSE

Итого: для $1_l = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ обратимые слева м-цы – это

$\begin{pmatrix} a & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ с обратными $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall v$

• Правая единица $1_r = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} xa = x & \forall x \\ xb = y & \forall x, y \end{cases}$ таких нет.

④ На мн-ве M определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Док-ть, что $(M, \circ)$ – полугруппа. Что можно сказать о нейтр. и обратных эл-тах? В каких случаях $(M, \circ)$ – группа?

□ $(x \circ y) \circ z = x \circ z = x$

$x \circ (y \circ z) = x \circ y = x$

Левый нейтральный 1_l:

$\underset{1_l}{\underset{\parallel}{1_l \circ y}} = y \quad \forall y$ такое м.б. только при $|M| = 1$

Правый нейтральный 1_r:

$\underset{x}{\underset{\parallel}{x \circ 1_r}} = x \Rightarrow \forall m \in M$ явл-ся правым нейтральным

Фиксируем $a \in M$ и $1_l := a$: Пусть $x \in M$

$\underset{x}{\underset{\parallel}{x \circ y}} = a \Rightarrow$ обратимый справа эл-т это только a с $\forall$ обратным

$\underset{y}{\underset{\parallel}{y \circ x}} = a \Rightarrow$ любой x обратим с единств. обратным

■

Пусть $Y \subseteq X$ - подгруппоид. Очевидно, что:

- если X ассоциативен, то Y ассоциативен
- если X коммутативен, то Y коммутативен.

Пусть X, Y - группоиды.

Можно определить группоид $X \times Y$ с умножением $(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$

⑤ Док-ть, что это определение наследует любые свойства из (1), (2), (3), (4).

□ (1) X, Y - ассоциативны $\Rightarrow ((x, y) \cdot (x', y'))(x'', y'') =$

$= (xx', yy')(x'', y'') =$

$= ((xx')x'', (yy')y'') =$

$= (x(x'x''), y(y'y'')) =$

$= (x, y)((x', y'), (x'', y''))$

(4) аналогично

(2) Единица в $X \times Y$ - это $(1_x, 1_y)$

(3) Обратный к (x, y) - это (x^{-1}, y^{-1})

Обозначение: если $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то $F^{\times} = (F \setminus \{0\}, \cdot)$ (либо F^*)

Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$

Тогда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

□ $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ ■

HSE

В частности, можно определить моноид $X^X = (\{f: X \to X\}, \cdot)$

с единицей $1_X = Id_X = \{f(x) = x\}$

⑦ Какие из указанных мн-в отображений $M = \{1, \dots, n\}$ в себя образуют группу:

1) множество всех отображений нет при $n \geq 2$:

$f: f(x) = 1 \quad \forall x$

$g \circ f(x) = g(1)$

$\parallel$

$1_x(x) = x \quad \forall x$

Это не группа.

2) Множество всех сюръективных отображений:
(композиция биекций - это биекция)
это будет биекцией автоматически

$\Rightarrow$ все обратимы $\Rightarrow$ группа

3) Множество всех нечётных перестановок:

Нет: умножение даже не определено $(\operatorname{sgn}(12)(23) = 1)$

⑩ Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$. Найти число:

1) отображений $X \to Y$

$\square$ Нужно выбрать m раз один из n элементов

$\Rightarrow n^m \quad (Y^X)$ $\blacksquare$

2) инъективных $X \to Y$

$\square$ если $m > n$, то 0
если $m = n$, то $A_n^m = \binom{n}{m} \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!}$

(для сюръект.: $n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \dots$)

8. Является ли множество матриц с опред. d группой?

- $d \neq 0$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = d^2 = d \Rightarrow d = 1$

При $d = 1$ эта группа наз. $SL_n(\mathbb{R})$ ↳ special linear