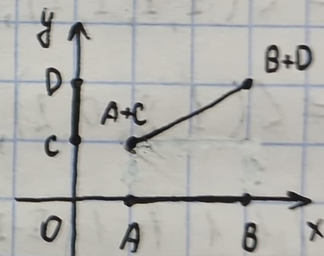
# Homework 25.

## #1.

(1) Векторы из $\mathbb{R}^2$, лежащие на $Ox$ и $Oy$.

<u>Не явл.</u> подпространством, т.к. при сложении вектора, лежащего на оси $Ox$, и вектора, лежащего на оси $Oy$, не получится вектор, лежащий на $Ox$ или $Oy$.

Пример: $(0,1)+(2,0)=(2,1)$: $2\neq 0$, $1\neq 0$.




(2) Векторы, лежащие в I четверти ($\mathbb{R}^2$).

<u>Не явл.</u> подпространством, т.к. у всех таких векторов неотрицательные координаты $\Rightarrow$ нет такого вектора, чтобы было $(a,b)+(c,d)=0 \Rightarrow \begin{cases} c=-a<0 \\ d=-b<0. \end{cases}$

## #2.

(1) Векторы, у которых чётные коорд. равны нулю.

Это абелева группа по сложению, есть нейтральность по ум., ассоциативность умножения на число, дистрибутивность – очев.

Базис: $\begin{pmatrix} (1, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0) \\ (0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 1, \ldots, 0) \\ \ldots \end{pmatrix}$

$\dim = \left[\frac{n+1}{2}\right]$

(2) Векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$

Это абелева группа по сложению, есть нейтральность, ассоц-сть, дистрибутивность $\Rightarrow$ это подпространство.

$\dim = 2$

Базис: $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0, \ldots) \\ (0, 1, 0, 1, \ldots) \end{pmatrix}$

## #3.

$U = \langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3) \rangle$

$W = \langle (1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1) \rangle$

$U$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}\leftrightarrow\text{III}]{\text{II}+\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}-\text{II}]{\text{II}\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim U = 2.$

$W$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-3\cdot\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right),\ \text{II}\leftrightarrow\text{III}]{\text{III}-3\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim W = 3.$

$U+W$: строку (вектор) $(1, -1, 1, -1)$ из $U$ не берём, т.к. он л.з.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{из } U]{\text{из } W} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}-\mathrm{II}]{\mathrm{I}-\mathrm{III}-\mathrm{V}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(U+W) = 3$

$\dim(U \cap W) = -\dim(U+W) + \dim U + \dim W = -3+2+3 = 2$

$\boxed{\text{Ответ: } \dim(U+W) = 3, \quad \dim(U \cap W) = 2.}$

## #5.

$U = \langle (1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1) \rangle \qquad \dim U = 2$

$W = \langle (-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1) \rangle \qquad \dim W = 2$

$U+W$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}-2\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I},\ \mathrm{III}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\mathrm{II}+\mathrm{III}]{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{2},\ \mathrm{IV}+2\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}-\mathrm{II}-\mathrm{III}-\mathrm{IV}]{\mathrm{IV}\cdot(-1),\ \mathrm{II}+2\mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(U+W) = 4$

$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-4 = 0 \Rightarrow$ сумма прямая

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV}-\overline{I}]{\overline{II}-\overline{I},\ \overline{III}-\overline{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{II}+\overline{III},\ \overline{IV}-2\overline{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{I}+\overline{III}]{\overline{II}+\overline{IV},\ \overline{IV}+\overline{II}\cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$(1, 2, 3, 4)$

$x = a_1 + 2a_2 + 3b_1 + 4b_2$

Проекция на $U$ равна: $a_1 + 2a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

## #4.

$U$ – мн-во симметричных матриц

$W$ – мн-во кососимметричных матриц. $\Rightarrow U, W \leq M_n(F)$

$\dim(M_n(F)) = n^2$, т.к. базис: $E_{ij}$, где $1 \leq i, j \leq n$

$\dim(U) = \frac{n(n+1)}{2}$, т.к. базис: $E_{ij} + E_{ji}$, где $1 \leq i \leq n$, $i < j \leq n$; $E_{ii}$

$\dim W = \frac{n(n-1)}{2}$, т.к. базис: $E_{ij} - E_{ji}$, где $1 \leq i \leq n$, $i < j \leq n$.

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = -n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = 0 \Rightarrow$ сумма прямая.

#6

$U = \langle (1, 2, 1, -2), (2, 3, 1, 0), (1, 2, 2, -3) \rangle$

$W = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, -1), (1, 3, 0, -4) \rangle$

$$U: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}-2\text{II}-\text{III}]{-\text{II}-\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \quad \dim U = 3$$

$$W: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}\cdot(-1)]{\text{III}+2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}-\text{II}-\text{III}]{\text{III}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{array}$$

$\dim W = 3$

Базис $U+W$

$$U+W: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{I}-\text{IV} \\ \text{II}-\text{V} \\ \text{III}-\text{VI}}} \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{15} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-5} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dim(U+W) = 4$$

$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 3 + 3 - 4 = 2$

$$U \cap W: \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_3 \\ 5\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = -10\beta_1 + 2\beta_2 + 9\beta_3 \end{cases} \Rightarrow 15\alpha_1 - 5\alpha_2 - 10\alpha_3 = 0$$

$3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$

$\alpha_1, \alpha_3$ – свободные; $\alpha_2 = 3\alpha_1 - 2\alpha_3$; $\beta_1 = \alpha_1$; $\beta_2 = 3\alpha_1 - 2\alpha_3$; $\beta_3 = \alpha_3$.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}+(3\alpha_1-2\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1+6\alpha_1-4\alpha_3+\alpha_3\\2\alpha_1+9\alpha_1-6\alpha_3+2\alpha_3\\\alpha_1+3\alpha_1-2\alpha_3+2\alpha_3\\-2\alpha_1-3\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\alpha_1-\alpha_3\\11\alpha_1-4\alpha_3\\4\alpha_1\\-2\alpha_1-3\alpha_3\end{pmatrix}$$

$\alpha_1=0,\ \alpha_3=1:\quad (-1,\ -4,\ 0,\ -3)$

$\alpha_1=1,\ \alpha_3=0:\quad (7,\ 11,\ 4,\ -2)$

$\leftarrow$ базис $U\cap W$.