Лекция 4, 29.09.23

Послед → св-ва послед. (монот. + огр.) → предел послед. → св-ва предела →

→ $\underset{\text{огр.}}{\text{б.б.}}$ и $\underset{\text{и отд. от 0}}{\text{б.м.}}$ → арифметика предела

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+7n-1}{2n-6n^2+7} = \frac{\overbrace{2+\underbrace{\frac{7}{n}}_{\text{б.м.}}-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{б.м.}}}^{\to 2}}{\underbrace{\underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{б.м.}}-\underbrace{6}_{\to -6}+\underbrace{\frac{7}{n^2}}_{\text{б.м.}}}_{\to -6}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

$\boxed{1}$ б.б. + б.б. = б.б.

Контр. пример: $n + (-n)$

$a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$

$\boxed{2}$ б.м. + б.б. = б.б.

Док-во: a_n – б.м.; b_n – б.б.; c_n

$a_n + b_n = c_n$

$b_n: \ \forall M \ \exists N_1(M): \forall n > N_1(M): \ |b_n| > M$

$|a+b| \geq |b| - |a|$

$a_n: \ \exists C_0 \ \forall n \ \ |a_n| < C_0$

?? $\forall M > 0 \ \exists N_2(M) \ \ \forall n > N_2(M) \ \ |a_n + b_n| > M$

$$\Uparrow$$

$$|b_n| - |a_n| > M$$

$$\Uparrow$$

$$|b_n| - C_0 > M$$

$$|b_n| > M + C_0$$

$$\forall n > N_1(M + C_0)$$

Утв: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \quad \alpha_n$ – б.м.

Док 4) $a_n \to a$, $b_n \to b \neq 0$ $\quad \frac{a_n}{b_n}$ – ?

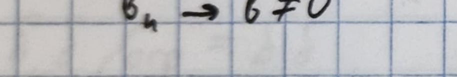
$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\cancel{ab} + \overset{\text{б.м.}}{b\alpha_n} - \cancel{ab} - \overset{\text{б.м.}}{a\beta_n}}{b(b+\beta_n)} =$$

$$= \overbrace{\frac{1}{b}}^{\text{огр.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b+\beta_n}}_{\text{огр?}} \overbrace{(b\alpha_n - a\beta_n)}^{\text{б.м.}}$$

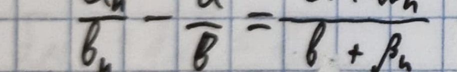
$\Uparrow$

$b + \beta_n$ отдел. от нуля

Утв: Если $b_n \to b \neq 0$ и $b_n \neq 0$, то b_n отделимая от нуля



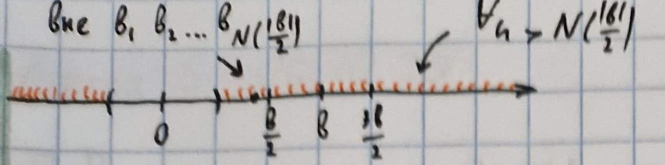
огр.



отд. от нуля

Док:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N(\varepsilon) \ \ b_n \in U_\varepsilon(b) \qquad \varepsilon = \frac{|b|}{2}$



$$\varepsilon = \min\left\{ \frac{|b|}{2};\ |b_1|;\ |b_2|, \dots, |b_{N(\frac{|b|}{2})}| \right\}$$

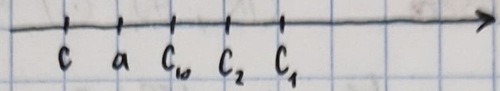
Предельный переход в неравенствах

Теорема: Пусть $\forall n \quad c_n \geq a$ и $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c \Rightarrow c \geq a$

$\quad >\qquad\qquad\qquad\qquad \ngeq$

$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Док-во: ПП $c < a$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon):\ c_n \in U_\varepsilon(c)$$

$$\varepsilon = \frac{a-c}{2} \quad \forall n > N_1\left(\frac{a-c}{2}\right) \quad c_n \in U_{\frac{a-c}{2}}(c) \Rightarrow c_n < a \quad W$$

Следствие: $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\forall n\ a_n \geq b_n$, то $a \geq b$

Док-во: $c_n = a_n - b_n \quad \forall n\ c_n \geq 0 \quad c_n \to a - b \Rightarrow a - b \geq 0$

Теорема о двух милиционерах: Если $a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ $\oplus$ $\forall n \quad a_n \leq c_n \leq b_n$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

Док.-во: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon)\ \forall n > N_1(\varepsilon): A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n > N_2(\varepsilon): A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$$

$\uparrow \forall n > N_1(\varepsilon) \quad \Downarrow \quad \uparrow \forall n > N_2(\varepsilon)$

$$A - \varepsilon \leq c_n < A + \varepsilon$$

$$\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$$

Применение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} < \frac{1}{n^2+1} < \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n^2}}$$

Аксиома непрерывности $(\mathbb{R}; \oplus; \odot)$

15) Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ и $A, B \neq \varnothing$ $(a \leq b)$

$\exists c \in \mathbb{R}$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ $a \leq c \leq b$

Проблема: У огр. мн-ва может не быть наиб. эл-та
$(0; 1)$

Нижняя

Опр: Верхняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$ наз. число $\alpha : \forall a \in A$ $a \leq \alpha$ $\geq$

нижней наибольшее

Опр.: Точной верхней гранью множества A наз. наименьшее значение из мн-ва верхних граней.

Обознач: $\sup A$ **Обознач:** $\inf A$

Примеры: $\sup [-1; 1] = 1$; $\sup (-1; 3) = 3$

Теорема: У ограниченного сверху мн-ва $\exists \sup A$

У ограниченного снизу мн-ва $\exists \inf A$

Док-во: Обозначим мн-во верхних граней S_A

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ S_A \neq \varnothing \\ 2)\ \forall a \in A \ \forall x \in S_A : a \leq x \\ 3)\ A \neq \varnothing \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \exists c \in \mathbb{R} : \\ \forall a \in A \\ \forall x \in S_A \end{array} \quad \underbrace{a \leq c}_{c \in S_A} \leq x$$

$$\Downarrow$$

$$c = \min S_A$$