Семинар 28, 23.04.24 – Бельдиев

$U, V$ над $F$

$\tau : U \to V$

$\tau : (au_1 + bu_2) = a \cdot \tau(u_1) + b\tau(u_2)$

$U : (e_1, \ldots, e_n)$

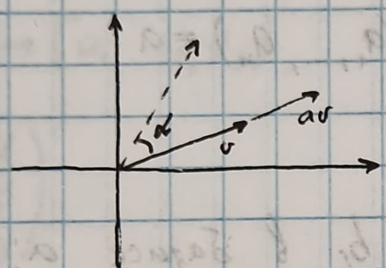
$V : (f_1, \ldots, f_m)$

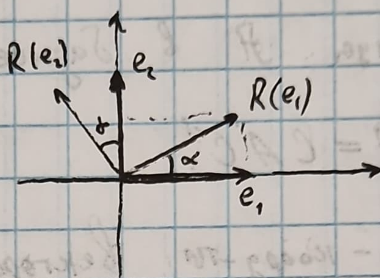
$$T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица $\tau$

$$\tau(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \cdot f_j$$

$$(\underbrace{\tau e_1}_{\in V}, \dots, \underbrace{\tau e_n}_{\in V}) = (f_1, \dots, f_n) T$$

**#1434.** $\mathbb{R}^2$




$$R(e_1) = (\cos\alpha, \sin\alpha) = e_1 \cdot \cos\alpha + e_2 \cdot \sin\alpha$$

$$R(e_2) = (-\sin\alpha, \cos\alpha) = -e_1 \cdot \sin\alpha + e_2 \cdot \cos\alpha$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

**#1441.** $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$

$$\varphi((y_1, y_2, y_3)) = (y_2 + y_3,\ 2y_1 + y_3,\ 3y_1 - y_2 + y_3)$$

$$\varphi((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \varphi((x_1, x_2, x_3)) + \varphi((y_1, y_2, y_3))$$

$$\varphi(e_1) = \varphi((1, 0, 0)) = (0, 2, 3) = 2e_2 + 3e_3$$

$$\varphi(e_2) = \varphi((0, 1, 0)) = (1, 0, -1) = e_1 - e_3$$

$$\varphi(e_3) = \varphi((0, 0, 1)) = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Доп: $$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

#1442. $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2+1, x_3+2)$

$\varphi(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \overset{?}{=} \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3)$

$(\alpha x_1, \alpha x_2+1, \alpha x_3+2) \overset{?}{=} \alpha(x_1, x_2+1, x_3+2) = (\alpha x_1, \alpha x_2+\alpha, \alpha x_3+2\alpha)$

Не линейно.

#1445. $T(a_i) = b_i \quad i = 1,2,3$

$v = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$

$T(v) = \lambda_1 T(a_1) + \lambda_2 T(a_2) + \lambda_3 T(a_3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{- ЛНЗ}$$

$T$ – искомая матрица

$(Te_1, Te_2, Te_3) = (e_1, e_2, e_3)T$

$T(e_1, e_2, e_3)$

$A$ – матрица перехода от $(e_1, e_2, e_3)$ к $(a_1, a_2, a_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$B$ – „матрица перехода" от базиса $(e_1, e_2, e_3)$ к системе векторов $(b_1, b_2, b_3)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3)A$

$(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_2, e_3)B$

$(\tau(a_1), \tau(a_2), \tau(a_3)) = (b_1, b_2, b_3)$ — знаем

$\tau((e_1, e_2, e_3)A) \qquad (e_1, e_2, e_3)B$

$\tau(e_1, e_2, e_3)\cdot A$ Домножаем на $A^{-1}$ справа

$\tau(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)B\cdot A^{-1} \Rightarrow T = B\cdot A^{-1}$.

Вычисление $BA^{-1}$: $(A|B) \to \dots \to (E|C)$ над столбцами

Вычисление $A^{-1}B$: над строками

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & -2(I) & & & -2(I) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & -3(II) & & & -3(II) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & +2(III) & -1 & & +2(III) & -1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & -9 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -17 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -19 & 9 \end{array}\right)$$

---

$(e_1, \dots, e_n)$; $T$ — матрица $\tau$ в этом базисе

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)X$

$T' = X^{-1}TX$ — матрица $\tau$ в базисе $(e'_1, \dots, e'_n)$

$(\tau a_1, \tau a_2, \tau a_3) = (b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)T_a$

$T$ — матрица $\tau$ в базисе $(e_1, e_2, e_3)$

$T_a$ — матрица $\tau$ в базисе $(a_1, a_2, a_3)$

матрица перехода от $(e_1, e_2, e_3)$ к $(a_1, a_2, a_3)$: $A$

$T_a = A^{-1}TA$

$T = AT_aA^{-1} = AA^{-1}BA^{-1} = BA^{-1}$.

#1449. (a) $\mathbb{R}^4 \cong Mat_2(\mathbb{R})$

$M_r: \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + cx_3 & bx_1 + dx_3 \\ ax_2 + cx_4 & bx_2 + dx_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1^1 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_1^1 + bE_1^2$$

$$E_2^1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = aE_2^1 + bE_2^2$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1^1 & E_2^1 & E_1^2 & E_2^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1^1 \\ E_2^1 \\ E_1^2 \\ E_2^2 \end{array}$$

#1454. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\Phi = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$

$f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$

$f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_f = X^{-1}\Phi X = (X^{-1}\Phi)X$$

Подсчёт $X^{-1}\Phi$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 15 & -11 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 20 & -15 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -7 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (*) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \text{ над строками}$$

$(*)\ X^{-1}\Phi$