

Homework-8

#1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{\text{II} - 2\text{III} \\ \text{I} - 3\text{III} \\ \text{I} \leftrightarrow \text{III}}]{\substack{\text{II} - \text{III} \\ \text{III} + 4\text{II}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{совместна}$$

$$\begin{cases} x_3 = -7 - 9x_4 \\ x_2 = 8 + 14x_4 + 3x_3 + 3x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -7 - 9x_4 \\ x_2 = -13 - 13x_4 + 3x_1 \end{cases} \quad x_4, x_1 \in \mathbb{R}$$

Частное решение: $(0, -13, -7, 0)$

#2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{I} \leftrightarrow \text{IV} \\ \text{II} - 2\text{III}}]{\substack{\text{I} - 3\text{III} \\ \text{II} - 2\text{III}}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 25 & 40 & \lambda + 80 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{II} \cdot \frac{1}{4} \\ \text{IV} - 5\text{III}}]{\substack{\text{II} - 4\text{III} \\ \text{II} \leftrightarrow \text{III}}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Если $\lambda = 0$, то система несовместна!

Если $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{\lambda} \\ x_2 = \frac{1}{5} \left(9 - \frac{16}{\lambda} - 8x_3 \right) \\ x_1 = -11 + 20 \frac{1}{\lambda} + 9x_3 + \frac{6}{5} \left(9 - \frac{16}{\lambda} - 8x_3 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{\lambda} \\ x_2 = \frac{1}{5} \left(9 - \frac{16}{\lambda} - 8x_3 \right) \\ x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_3 \end{cases}$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

#3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{I} - \text{II} \\ \text{II} + 3\text{I}}]{\substack{\text{III} - 2\text{I}}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{I} - \text{II} \\ \text{I} \cdot (-1)}]{\substack{\text{III} - \text{II} \\ \text{II} \cdot \frac{1}{7}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_4 + 2x_2, \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4, \end{cases} \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ФСР: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_4 \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

P.S. не писал столбец 6, потому что СЛАУ однородная

#4.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & -9 & -3 & -5 & -14 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{I} - 2\text{III} \\ \text{II} - 4\text{III} \\ \text{IV} - 3\text{III} \\ \text{I} \leftrightarrow \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 & -5 & -14 \\ 0 & 40 & 20 & 25 & 60 \\ 0 & 25 & 10 & 15 & 36 \\ 0 & 32 & 16 & 20 & 48 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} \cdot \frac{1}{5} \\ \text{IV} \cdot \frac{1}{4} \\ \text{IV} - \text{II} \\ \text{III} - 3\text{II} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 & -5 & -14 \\ 0 & 8 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{I} + 9\text{II} \\ \text{I} - 9\text{II} \\ \text{II} \leftrightarrow \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{III} \cdot \frac{1}{20} \\ \text{I} + \text{III} \\ \text{II} + 2\text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{5}x_5 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = -\frac{6}{5}x_5 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -\frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

Общее реш. с целыми коэфф.

$$\begin{cases} x_1 = 7k - n \\ x_2 = -6k - 2n \\ x_3 = -3k - n \\ x_4 = 4n \\ x_5 = 5k \end{cases}$$

$$n, k \in \mathbb{Z}$$

#5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II - III - IV \\ IV - 3I + 2II}} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{I \leftrightarrow II \\ I \leftrightarrow III}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_g A = 2 \Rightarrow$ в матрице B надо выбрать только $5-2=3$ строки

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{I - II \\ II - 2IV \\ II - IV}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II - I \\ IV - 4I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & 18 & -15 & 6 \\ 0 & 4 & 9 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & -11 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II - III - IV \\ III - 2IV}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & 18 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -9 \\ 0 & 2 & 9 & -11 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 9 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{строка } (5, 3, 7, -6, -4) -$$

л/к остальных, поэтому её можно не брать.

Тогда остаётся 3 строки в матрице $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, которые

образуют ФСР для матрицы A , если они являются решением.

Проверим каждую строку, подставляя в матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, т.к. другие 2 строки являются их л/к.

1) $(6, 2, 3, -2, -7)$ - является решением

$$\begin{cases} 6 - 7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 0 = 6 - 14 + 12 - 4 = 0 = 0 \\ 0 + 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) - 7 = 18 - 15 + 4 - 7 = 0 = 0 \end{cases}$$

2) $(8, 0, -5, 6, -13)$ - является решением

$$\begin{cases} 8 - 7 \cdot 0 - 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 0 = 8 - 20 + 12 = 0 = 0 \\ 0 - 9 \cdot 0 - 5 \cdot (-5) - 2 \cdot 6 - 13 = 25 - 12 - 13 = 0 = 0 \end{cases}$$

3) $(4, -2, -7, 5, -7)$ - является решением

$$\begin{cases} 4 - 7 \cdot (-2) - 7 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 0 = 4 + 14 - 28 + 10 = 0 = 0 \\ 0 - 2 \cdot 9 - 7 \cdot (-5) - 2 \cdot 5 - 7 = -18 + 35 - 10 - 7 = 0 = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow Ответ: $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ образуют
ФСР для СЛУ.