Последовательность. Определение предела последовательности

1. Доказать ограниченность последовательности $a_n = \frac{2n^2-1}{2+n^2}$.

2. Доказать неограниченность последовательности $b_n = n^2 - n$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ неограничена. Доказать, что она содержить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \geqslant k$ для $k \in \mathbb{N}$, либо $x_{n_k} \leqslant -k$ для для $k \in \mathbb{N}$.

4. Сформулировать, используя кванторы, утверждения:

   a) последовательность $\{x_n\}$ не является возрастающей;

   b) последовательность $\{y_n\}$ не является убывающей;

5. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что:

   (a) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

   (b) $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится.

6. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1,\ K_2, \ldots, K_8$ — множества всех последовательностей, удовлетворяющих соответственно условиям:

   1) $\exists\varepsilon > 0\ \exists N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   2) $\exists\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   3) $\exists\varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   4) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   5) $\exists\varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   6) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   7) $\forall\varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   8) $\forall\varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   Какие из следующих включений верны: a) $K_6 \subset K_2$; b) $K_2 \subset K_6$; c) $K_7 \subset K_2$; d) $K_8 \subset K$; e) $K \subset K_8$;

7. Доказать по определению сходимости

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0; \quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+4n+3} = 3 \quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1} = 0.$$

8. Доказать, что последовательности расходятся

$$a)\ x_n = (-1)^n, \quad b)\ b_n = n^2; \quad c)\ c_n = \sin n;$$

Домашнее задание

1. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если $\exists C\ \forall n: \ x_n < C$. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если $\exists C\ \forall n: \ x_n > C$. Доказать, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда она ограничени сверху и снизу.

2. Пусть a – некоторое вещественное число. Приведите пример последовательности $\{a_n\}$ (если такая существует), у которой:

   (a) Есть предел, равный числу a.

   (b) Есть предел равный a, но ни один из членов последовательности не равен a.

   (c) Есть предел равный a, при этом бесконечно много членов последовательности равны a и бесконечно много членов последовательности не равны a.

   (d) Число a не является пределом последовательности, при этом бесконечно много членов последовательности равны a.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geqslant n_0$. Доказать, что последовательность y_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

   Иными словами, изменение (в частности отбрасывание или добавление) конечного числа членов сходящейся последовательности оставляет ее сходящейся к тому же пределу.

4. Доказать ограниченность последовательности $a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$.

5. Доказать неограниченность последовательности $a_n = n^{(-1)^n}$.

6. Доказать по определению следующие сходимости:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-11}} = 0; \quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2} = 0 \quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1,\ K_2, \ldots, K_8$ — множества последовательностей из задачи 6.

   1) Для каких $j = 1, 2, \ldots, 8$ верно включение $K_j \subset K$.

   2) Какие из множеств K_j содержать как сходящиеся, так и расходящиеся последовательности.

   3) Какие из множеств K_j содержать неограниченные последовательности.

   4) Какому из условий 1)-8) удовлетворяет любая последовательность.

   5) Какие из множеств K_j совпадают.

2. Доказать ограниченность последовательности

$$a)\ a_n = \frac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}; \quad b)\ b_n = \sqrt{n^2+1} - n; \quad c)\ c_n = \sqrt[n]{n}.$$

3. Доказать неограниченность последовательности

$$a)\ a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}; \quad b)\ b_n = n + (-1)^n n; \quad c)\ c_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n+1}.$$

4. Доказать по определению следующие сходимости:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2-2n+3} = 0; \quad b)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}} = 2.$$

5. * Пусть $x_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что

   1) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n > n_0: \ x_n < x_{n_0}$

   2) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n (1 \leqslant n < n_0): \ x_n > x_{n_0}$