Лекция 3, 20.09.23

Система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Замеч.: Элем. преобр-я строк расширенной м-цы $(A|b)$ соответствуют элем. преобразованиям ур-ний и не мн-во решений СЛАУ.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2 \\ x_2 = -1 - 2x_3 \end{cases}$$ – общее решение

$$\begin{array}{c} x_1 \; x_2 \; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{array}\right) \\ (A \mid b) \end{array} \sim \begin{array}{c} x_1 \; x_2 \; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \text{канонич. вид} \end{array}$$

Перестановки. Подстановки

Опр: Всякое расположение чисел $1, \ldots, n$ в определённом порядке наз. <u>перестановкой</u> $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Пример: $\alpha = (5, 3, 4, 1, 2)$

Опр: α_1 и α_2 образуют <u>инверсию</u> в перестановке α, если $\alpha_i > \alpha_j$, но $i < j$.

Опр.: <u>Знак перестановки</u> – это $(-1)^{\#\text{ инверсий в } \alpha}$ (в степени числа инверсий)

Обознач: $\operatorname{sgn}\alpha$

Пример: $\alpha = (4, 5, 1, 3, 6, 2)$

$3 + 3 + 0 + 1 + 1 + 0 = 8$ инверсий $\Rightarrow \operatorname{sgn}\alpha = (-1)^8 = 1$

Если $\operatorname{sgn}\alpha = 1$, то говорят, что α – чётная перестановка.

Если $\operatorname{sgn}\alpha = -1$, то α – нечётная перестановка.

Опр: <u>Транспозиция</u> – это преобраз-е, при котором в α меняются местами только α_i и α_j, а остальные эл-ты неподвижны. $(i \neq j)$

Утв.: $\forall$ транспозиция меняет чётность перестановки

Опр: **Подстановка** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ – отображение мн-ва $1, \dots, n$ в себя, являющееся взаимно однозначным.

Нижняя строка, т.е. $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ – это некоторая перестановка.

Пример: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ неподвижный элемент

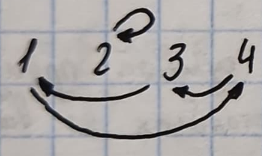
$\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 2$ и т.д.

Опр: **Знаком подстановки** наз. знак перестановки в её нижней строке.

Замеч: Транспозиция – тоже подстановка, в которой α_i и α_j переходят друг в друга, а все ост. эл-ты неподвижны.

$(\sigma(\alpha_i) = \alpha_j, \ \sigma(\alpha_j) = \alpha_i)$

Замеч: Иногда используется запись „в циклах" – в одну строку, где след. эл-т пишется слева.



$\sigma = (1\,4\,3)(2)$ не всегда пишется

последовательно записаны (что во что переходит)

Цикл. запись транспозиции: $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_1)\dots(\alpha_n)$

Опр: Если $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, то σ наз. **тождественной подстановкой**

Обознач: Id

Замеч: На мн-ве подстановок можно ввести операцию умножения – их последовательное применение или композиция отображений.

$\forall \sigma \in S_n \quad \sigma \circ Id = Id \circ \sigma = \sigma \Rightarrow Id$ – нейтр.

Обознач: S_n – мн-во подстановок длины n. $|S_n| = n!$

Обратная подстановка к подст. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ – подст., в кот. 1-я и 2-я строки поменяли местами.

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \ldots & \sigma^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = Id$$

! Но вообще говоря умножение подстановок не коммутативно.

Определитель

Опр: Определителем (детерминантом) квадратной матрицы порядка n наз. сумму $n!$ слагаемых:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{номер строк} \\ \leftarrow \text{номер столбцов} \end{matrix}$$

Обознач: $\det A$, $|A|$

Замеч: По сути определитель n-го порядка явл. суммой произведений эл-ов м-цы, стоящих в разных строках и столбцах по всем способам так сделать (с учётом знака).

Пример: $n = 2 \Rightarrow n! = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $-$ $+$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Id, \quad sgn\, Id = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad sgn\, \sigma_2 = -1$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\, \sigma\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} = sgn\, Id \cdot a_{11} \cdot a_{22} + sgn\, \sigma_2 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = \boxed{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Пример: $n = 3$ (правило Саррюса)

$$\boxed{\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Св-ва определителя.

① $|A^T| = A$

$(\det A^T = \det A)$

$\Rightarrow$ все свойства det, верные для строк, справедливы и для столбцов

□ Пусть $B = A^T \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, b^{-1}_{1\sigma(1)} \cdots b^{-1}_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

(можно переобозначить $\tau = \sigma^{-1}$) ∎