Homework - 5a.

#1

$A \setminus B$ - бесконечно, B - конечно или счётно

Док-ть: $A \setminus B \sim A$

$\underbrace{A \setminus B}_{\text{беск.}} \cup \underbrace{B}_{\text{кон. или счётно}}$ - бесконечно и $A \setminus B \cup B = A \Rightarrow A$ - бесконечно

$\Rightarrow A \setminus B \sim A$ ч.т.д.

#2

Допустим, что в году 366 дней (чтобы не обидеть тех, у кого ДР 29 февраля). Тогда рассмотрим функцию:

человек $\mapsto$ дата рождения

Т.к. 366 дней, то мощность множества „даты рождения" $= 366$

Необходимо, чтобы функция была неинъективной. По принципу Дирихле, людей должно быть $366 + 1 = 367$.

$\boxed{\text{Ответ: } 367.}$

#3.

Числа вида $111\ldots11$ можно записать в виде $\frac{10^n - 1}{9}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$

Рассмотрим 2022 штуки таких чисел. Тогда, по принципу Дирихле, найдутся 2 числа, которые будут иметь одинаковый остаток при делении на 2021. Допустим, это числа $\frac{10^k - 1}{9}$ и $\frac{10^m - 1}{9}$.

$k > m$.

Тогда их разность $\frac{10^k-1}{9} - \frac{10^m-1}{9} = \frac{1}{9}(10^k - 1 - 10^m + 1) =$

$= \frac{1}{9}(10^k - 10^m) = \frac{10^m}{9}(10^{k-m} - 1) = 10^m \cdot \frac{10^{k-m}-1}{9}$ будет делиться

на 2021. $10^m \not\vdots 2021 \Rightarrow \frac{10^{k-m}-1}{9} \vdots 2021$ ч.т.д.

#4.

$1224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 153 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17^1$

Количество делителей: $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

+1, потому что можно взять 0, 1, 2, ..., n раз простой делитель p^n, т.е. n+1 вариант.

$\boxed{\text{Ответ: 24.}}$

#5.

монеты $\longrightarrow$ карманы (для каждой монеты можно выбрать карман)

$\underline{7} \longrightarrow \underline{3}$

варианты карманов

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2187$

I монета, II монета, ..., VII монета

$\boxed{\text{Ответ: 2187.}}$

#6.

$\alpha = cbcad$, латинский алфавит $\Rightarrow$ 26 букв (letters)

Перед α кол-во слов длины:

1: $|\underline{26}^1| = 26^1 = \boxed{26}$

2: $|\underline{26}^2| = \boxed{26^2}$

3: $|\underline{26}^3| = \boxed{26^3}$

4: $|26^4| = \boxed{26^4}$

5: если первая буква — a или b: $\boxed{2 \cdot 26^4}$ (a или b — 2, остальные — 26^4)

если первая c, вторая $\neg b$ => $ca\_\_\_$: $\boxed{26^3}$

если первая c, вторая b, третья не c => $cb\frac{a}{b}\_\_$: $\boxed{2 \cdot 26^2}$

если первая c, вторая b, третья c, четвёртая a : $cbca\_$ (abc) : $\boxed{3}$

Перед α было $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 2 \cdot 26^4 + 26^3 + 2 \cdot 26^2 + 3 =$

$= \boxed{3 \cdot 26^4 + 2 \cdot 26^3 + 3 \cdot 26^2 + 26 + 3}$ слов.

#7.

Надо добраться из $(0;0)$ в $(m;n)$, поэтому робот сделает $m+n$ шагов.

Из них m раз сделает шаг вправо, т.е. вариантов пути:

C_{n+m}^{m} (или C_{n+m}^{n})

$\boxed{\text{Ответ: } C_{n+m}^{m}}$.

#8.

$$\frac{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+(n-1))}{n!} = \frac{((a-1)+1)((a-1)+2) \cdot \ldots \cdot ((a-1)+n) \cdot (a-1)!}{n! \cdot (a-1)!} =$$

$$= \frac{(a-1+n)!}{n!(a-1)!} = \frac{(a-1+n)!}{n!((a-1+n)-n)!} = C_{a-1+n}^{n},$$ т.е. это биномиальный

коэффициент, а он по опр. $\in \mathbb{Z}$ ч.т.д.

#9.

Если в C x вар-тов мн-ва $\underline{u}$, а в B y вар-ов мн-ва C, то в A будет 2^y вариантов. Тогда всего вариантов: $\sum\limits_{x=0}^{n} C_n^x \cdot \sum\limits_{y=0}^{x} C_x^y \cdot 2^y = 2^n \cdot 2^x \cdot 2^y = 2^n \cdot 2^n = \boxed{4^n}$.