# Семинар 15

## 1 Повторение

Эквивалентное определение группы. Примеры групп: симметрическая группа, общая линейная группа. Абелева группа.

Подгруппа. Собственная подгруппа. Пример: специальная линейная подгруппа. Критерий подгруппы с доказательством.

Гомоморфизм. Примеры гомоморфизма: детерминант, логарифм. Эпиморфизм и мономорфизм. Изоморфизм групп. Примеры.

Таблица Кэли. Порядок элемента. Примеры.

Циклическая группа. Примеры циклических групп: целые числа по сложению и группа вычетов по модулю n. Таблица Кэли для вычетов по модулю 4.

## 2 Задачи

Бинарные операции. 4 аксиомы для бинарной операции $\mu : X \times X \to X$: ассоциативность, существование нейтрального элемента, существование обратного и коммутативность. Примеры множеств с бинарной операцией, удовлетворяющих только некоторым аксиомам:

$$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot),\ (\mathbb{N}, \cdot),\ \{1, x, y \mid xy = x^2 = y^2 = 1\}.$$

Группоид, не удовлетворяющий ни одной аксиоме:

$$(\mathbb{R}^3, [\cdot, \cdot]).$$

**Задача 1.** Ассоциативна ли операция $*$ на множестве $M$, если

1. $M = \mathbb{N}$, $x * y = x^y$;
2. $M = \mathbb{N}$, $x * y = \gcd(x, y)$;
3. $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x - y$;
4. $M = \mathbb{R}$, $x * y = \sin x \cdot \sin y$?

Подгруппоиды, подполугруппы, подмоноиды, подгруппы. Подгруппа в моноиде: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

**Задача 2.** В моноиде $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ найти подполугруппу, которая является моноидом с другим нейтральным элементом.

Левые и правые нейтральные элементы. Элементы, обратимые слева или справа.

**Задача 3.** Пусть $S$ – полугруппа матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$ с операцией умножения. Найти в этой полугруппе левые и правые нейтральные элементы, а также элементы, обратимые слева или справа относительно этих нейтральных.

**Задача 4.** На множестве $M$ определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Доказать, что $(M, \circ)$ – полугруппа. Что можно сказать о нейтральных и обратимых элементах этой полугруппы? В каких случаях она является группой?

**Задача 5.** Доказать, что естественное определение операции на произведении группоидов сохраняет свойства ассоциативности, коммутативности, и т. д.

Обозначения $\mathbb{Q}^\times$, $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$ (или $\mathbb{Q}^*$). Композиция отображений как операция.

**Задача 6.** Какие из указанных множеств с операциями являются группами:

1. $(A, +)$, где $A$ – одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;
2. $(A, \cdot)$, где $A$ – одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;
3. $(A_0, \cdot)$, где $A$ – одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;
4. $(n\mathbb{Z}, +)$, где $n$ – натуральное число;
5. множество степеней данного вещественного числа $a \neq 0$ с целыми показателями относительно умножения;
6. множество всех комплексных корней фиксированной степени $n$ из 1 относительно умножения;
7. множество всех непрерывных отображений $\phi : [0,1] \to [0,1]$, для которых $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, и $x < y \implies \phi(x) < \phi(y)$, относительно суперпозиции?

**Задача 7.** Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя образуют группу относительно умножения:

1. множество всех отображений;
2. множество всех сюръективных отображений;

3. множество всех нечётных перестановок;

4. множество всех перестановок, оставляющих неподвижными элементы некоторого подмножества $S \subseteq M$?

**Задача 8.** Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу:

1. множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно сложения;

2. множество матриц с фиксированным определителем $d$ относительно умножения;

3. множество диагональных матриц относительно сложения;

4. множество верхних нильтреугольных матриц относительно умножения?

**Задача 9.** Пусть $f : X \to Y$ – отображение. Отображение $g : Y \to X$ называется *левым обратным* для $f$, если $g \circ f = 1_X$. Доказать, что отображение $f$ инъективно тогда и только тогда, когда оно обладает левым обратным.

**Задача 10.** Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$. Найти число:

1. отображений;

2. инъективных отображений $X \to Y$.