Лекция 2, 15.09.23

Способы доказательства утв.:

1) От противного

$A = И \iff \neg A = Л$

2) Метод математической индукции

дедуктивный (математика)

общий → частный

индуктивный (естеств. науки)

частный → общий

(наблюдения) ⇒ общий вывод

$$\left.\frac{\forall \text{ мальчики умные}}{\text{Витя – мальчик}}\right| \Rightarrow \text{Витя умный}$$

$\overbrace{\forall n \; P(n)}^{\text{высказывание}}$

$P(n)$ ← одноместный предикат

1) База индукции $P(1)$ – истина

2) Шаг индукции

$\forall n \; P(n) \Rightarrow P(n+1)$, истино

Пример: нер-во Бернулли

$\forall n \quad \boxed{\forall x \geq -1 \ (1+x)^n \geq 1+xn} \ P(n)$

Док-во:

1) $P(1)$: $\forall x \geq -1 \quad (1+x)^1 \geq 1+x$ - истина

2) $\forall n \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Пусть $P(n)$ - истина, т.е. $\forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \overset{\text{предположение}}{\geq} 1+xn$

Докажем, что $\forall x \geq -1 \quad \boxed{(1+x)^{n+1}}_{\text{вывод}} \overset{?}{\geq} 1 + x(n+1) = 1 + xn + x$

$(1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+xn)\underbrace{(1+x)}_{\geq 0} = \underbrace{1 + xn + x}_{} + x^2 n \geq 1+xn+x = 1+(n+1)x$

Бином Ньютона

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{C_n^k}_{\shortparallel} \underbrace{x^k \cdot y^{n-k}}_{\text{степень } n}$

биномиальный коэф.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

сумма индуцирования

$C_n^0 \cdot x^0 y^n + C_n^1 x^1 y^{n-1} + \ldots + C_n^n x^n y^0$

$(x+y)^2 = x^2 + \underset{C_2^1}{2}xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + \underset{C_3^1}{3}x^2 y + \underset{C_3^2}{3}xy^2 + y^3$

1) Перестановка - упорядоченное мн-во (кортеж) мн-во размера n

$\overline{n} \cdot \overline{(n-1)} \cdot \overline{(n-2)} \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \overline{1} = n!$ n мест

2) Размещения $k<n$ упоряд. подмнож. размера k множ. из n эл-ов

Кол-во размещений $= A_n^k$

$$\underline{n}\ \underline{(n-1)}\ \underline{(n-2)}\ \ldots\ \underline{\ }\ \underline{(n-k+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

3) Сочетания — неупоряд. подмнож. размера k мн-ва размера n

1 сочетание $\Leftrightarrow$ $k!$ размещений

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$(x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy$$

$$(x+y)^n = x^n + \ldots + y^n$$ 2^n слагаемых

Вопрос!

Сколько $x^k y^{n-k}$ в.

$$x^k \cdot y^{n-k}$$

$n+1$

$$0 \le k \le n$$

Столько же, сколькими способами можно выбрать скобки, от которых будет x. $= C_n^k$

$$(x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + xyy$$
$$+ yxx + yxy + yyx + yyy$$

Последовательности

Опр: П называется индексированное мн-во чисел.

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Задания

1) Формульно $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) Рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Опр: Послед. $\{a_n\}$ наз. **ограниченной**, если $\boxed{\exists C \ \forall n \ |a_n| < C}$
$P(\{a_n\})$

/*

Опр: $y = f(x)$ наз. **возрастающей** на E

$\forall x_1, x_2 \in E \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

Опр: Послед. $\{a_n\}$ наз **возрастающей**, если

$\forall n, k \in \mathbb{N} \ (n < k \Rightarrow a_n < a_k)$ */

Опр: Послед. $\{a_n\}$ наз. **возрастающей** (неубывающей / убывающей), если

$\forall n : a_n < a_{n+1}$ ($\le$ / $>$)

Опр: **Подпоследовательностью** послед $\{a_n\}$ наз. послед. $\{b_k\}$:

$b_k = a_{n_k}$, где n_k – возр. послед. натур. чисел.

Пример: $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{3n}$

$b_k = a_{\underbrace{\boxed{2k+1}}_{= n_k^1}} \equiv 0 \quad \forall k$

$n_k = 2k + 1$

$c_k = a_{\underbrace{\boxed{2k}}_{= n_k^2}} = \frac{2}{6k} = \frac{1}{3k}$

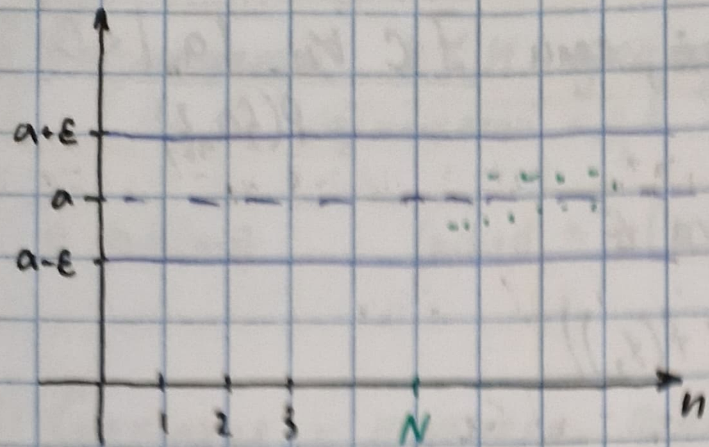
Опр: Число a наз. **пределом** последов. $\{a_n\}$, если

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |a_n - a| < \varepsilon}$ $P(\{a_n\}; a)$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$



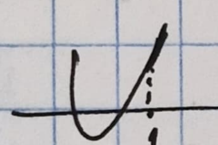
Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+7n-3}{4n^2-3n+1} = \frac{1}{4}$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N$

$$\left|\frac{n^2+7n-3}{4n^2-3n+1}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon \quad \boxed{\checkmark}$$

$$\left|\frac{4n^2+28n-12-4n^2+3n-1}{4(4n^2-3n+1)}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{31n-13}{4(4n^2-3n+1)}\right|<\varepsilon$$



$$\frac{31n-13}{4(4n^2-3n+1)}<\varepsilon$$

$$\frac{31n}{4(4n^2-3n+1)}<\varepsilon$$

$$\frac{31n}{4(n^2+\underbrace{3n^2-3n}_{\geq 0})}<\varepsilon$$

$$\frac{31n}{4n^2}<\varepsilon$$

$$\boxed{n>\frac{31}{4\varepsilon}}$$

верно $\forall n > \left[\frac{31}{4\varepsilon}\right]+1$

$$N=\left[\frac{31}{4\varepsilon}\right]+1$$