Homework - 26

#9.

$a > 1$, $a \not\vdots 4$, $a \vdots 2$

Все делители числа а разбиваются на пари различных чисел x_i и y_i, где $x_i \cdot y_i = a$. Различных, т.к. если они одинаковые, то $x_i \vdots 2$, $y_i = x_i \Rightarrow y_i \vdots 2$, потому что $a \vdots 2$ $\Rightarrow a \vdots 4$ - противоречие.

Т.к. $a \vdots 2$ и $a \not\vdots 4$, то в паре (x_i, y_i), только одно число будет $\vdots 2$, иначе число а будет $\vdots 4$ $\Rightarrow$ в каждой паре одинаковое кол-во чётних и нечётных чисел $\Rightarrow$ у а поровну положит. чётних и нечётних делителей.

#10.

Число а состоит из цифр 0, 1, 2, каждое из которых встречается 100 раз. Тогда сумма всех цифр числа а равна

$0 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 = 300$

Т.к. $300 \vdots 3$ и $300 \not\vdots 9$, то а не будет являться точним квадратом, т.к. простой множитель 3 встречается в а только 1 раз $(a = 2^{\alpha} \cdot 3^{1} \cdot 5^{\beta} \cdot 7^{\gamma} \cdot \ldots)$

#12.

Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$y = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\beta_i} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$

$z = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\gamma_i} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$

Без ограничения общности, $\forall i \ \alpha_i \le \beta_i \le \gamma_i$

$$НОК(x, y, z) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot \ldots \cdot p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)} =$$

$$= p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\gamma_i} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$$

Дальше, чтобы меньше писать ☺, рассмотрим p_i (это будет верно $\forall p_i$)

① $xyz \cdot НОД(x, y, z) = p_i^{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i} \cdot p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)} = p_i^{2\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}$

② $НОД(x, y) \cdot НОД(x, z) \cdot НОД(y, z) = p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \cdot p_i^{\min(\alpha_i, \gamma_i)} \cdot p_i^{\min(\beta_i, \gamma_i)} =$

$= p_i^{\alpha_i} \cdot p_i^{\beta_i} \cdot p_i^{\alpha_i} = p_i^{2\alpha_i + \beta_i}$

③ $\dfrac{①}{②} = \dfrac{p_i^{2\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}}{p_i^{2\alpha_i + \beta_i}} = p^{\gamma_i}$

Тогда ③ $= p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\gamma_i} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n} = НОК(x, y, z)$ ч.т.д.

#15.

$$\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} = 1 - \frac{n}{n^2 + 1}, \quad n > 0, \ n \in \mathbb{Z}$$

$n < n + 1 < n^2 + 1 \Rightarrow$ числитель всегда меньше знаменателя

в дроби $\frac{n}{n^2+1} \Rightarrow n \equiv n \pmod{n^2 + 1}$ — остаток $n > 0$.

Тогда $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима.

#13.

$$24 \mid (p^2-1) \iff \begin{cases} 3 \mid (p^2-1) & (1) \\ 8 \mid (p^2-1) & (2) \end{cases}$$

Докажем (1): $(p^2-1) = (p-1)(p+1)$. Среди трёх подряд идущих чисел есть 1 число, кратное 3. $\Rightarrow$ Среди чисел $p-1$, p, $p+1$ есть число $\vdots\, 3$. $p > 3$ и p - простое $\Rightarrow$ $p \not\vdots\, 3$, тогда среди чисел $p-1$ и $p+1$ есть $\vdots\, 3$ $\Rightarrow$ $(p^2-1) \vdots\, 3$

Докажем (2): $(p^2-1) = (p-1)(p+1)$

$p-1$ и $p+1$ - это два подряд идущего чётного числа, т.к. p - простое, большее 3 и любое простое > 3 - нечётное, а нечётное $\pm$ нечётное = чётное. Среди двух подряд идущих чётных чисел есть число, кратное 4. $\Rightarrow$ Б.О.О. $(p-1) \vdots\, 2$ и $\not\vdots\, 4$, $(p+1) \vdots\, 2$ и $\vdots\, 4$ $\Rightarrow$ $(p^2-1) \vdots\, 8$ $\Rightarrow$ $(p^2-1) \vdots\, 3$ и $\vdots\, 8 \Rightarrow 24 \mid (p^2-1)$

#11

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ - это единственные простые числа вида $6k+5$. Рассмотрим число $6p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 5$. Это число не делится на $p_1, p_2, \dots, p_n$ (остаток 5) и имеет вид $6k+5 \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$ - не единственные простые числа вида $6k+5 \Rightarrow$ их бесконечно много.

14.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots$ – арифм. прогрессия с разностью d, $(d \neq 0)$,
тогда $a_1 = a_1$, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $\ldots$, $a_i = a_1 + (i-1)d$, $\ldots$

$i-1$ – это множество всех натуральных чисел при $\forall i$ (т.к. последовательность бесконечна)

$a_1 \in N \Rightarrow \exists i : i-1 = a_1 \Rightarrow \exists a_{a_1+1} = a_1 \cdot d + a_1$

$НОД(a_1, a_{a_1+1}) = НОД(a_1, a_1 + a_1 \cdot d) = a_1$

Если $a_1 \neq 1$, то $НОД(a_1, a_{a_1+1}) \neq 1 \Rightarrow$ элементы не взаимно просты.

Если $a_1 = 1$, то прогрессия имеет вид: $1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+jd, \ldots$

Рассмотрим подпоследовательность $b_1 = 1+d$, $b_2 = 1+2d$, $\ldots$, $b_{j+1} = 1+jd$

Она также является прогрессией (частью прогрессии a, только с исключением первого элемента).

Аналогично предыдущим рассуждениям, $\exists j : j = b_1 = 1+d \neq 1$, т.к. $d \neq 0 \Rightarrow \exists b_{b_1} = b_1 + b_1 d$

$НОД(b_1, b_1 + b_1 d) = b_1 \neq 1 \Rightarrow$ есть элементы, которые не взаимно просты $\Rightarrow$ такой последовательности не сущ.