Homework 5b.

#1.

а) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + C_n^n\cdot(-1)^n$

$\boxed{n=0:}$ $\quad C_0^0 = \boxed{1}$

$n=1: \quad C_1^0 - C_1^1 = 0$ – база

Шаг: Выполнено $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$

Переход: $\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1) C_{n+1}^k = \sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^k(C_n^k + C_n^{k-1}) + C_{n+1}^0 =$

$= C_{n+1}^0 - C_n^0 - \cancel{C_n^1} + \cancel{C_n^1} + \cancel{C_n^2} - \cancel{C_n^2} - \cancel{C_n^3} + \cancel{C_n^3} + \cancel{C_n^4} + \ldots + \cancel{(-1)^n C_n^{n-1}} + \cancel{(-1)^n C_n^n} +$

$+ \cancel{(-1)^{n+1} C_n^n} + (-1)^{n+1} C_n^{n+1} = C_{n+1}^0 - C_n^0 + (-1)^{n+1} C_n^{n+1} = C_{n+1}^0 - C_n^0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq 1 \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0.}$

б) $\sum\limits_{2|k} C_n^k = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{2[n/2]}$

Т.к. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$, то $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k+1} \Rightarrow$

$\sum\limits_{2|k} C_n^{2k} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2}\cdot 2^n = \boxed{2^{n-1}}$

в) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k =$

$= \frac{1}{n+1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k - C_{n+1}^0\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right) = \boxed{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

#2.

Должно быть по 3 чёт. и нечёт.

Расставим чётние. Для них надо выбрать 3 места — C_6^3 вариантов. И расставим цифры (у каждого места по 5 вариантов): $C_6^3 \cdot 5^6$.

Уберём числа, начинающиеся с 0. Тогда выберем 2 места для чётных цифр и расставим все цифры: $C_5^2 \cdot 5^5$ (т.к. 0 уже поставили).

Всего $C_6^3 \cdot 5^6 - C_5^2 \cdot 5^5 = 5^5 \cdot \left(\frac{5 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} - \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} \right) =$

$= 5^5 \cdot (100 - 10) = 90 \cdot 5^5 = \boxed{281\ 250.}$

#3.

n фруктов, k человек

Кол-во вариантов разложить n по k : C^{n}_{n+k-1}

$$C^{6}_{6+4-1}\cdot C^{3}_{3+4-1}\cdot C^{2}_{2+4-1} = C^{6}_{9}\cdot C^{3}_{6}\cdot C^{2}_{5} = \frac{9!\cdot 6!\cdot 5!}{6!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{6}\cdot 7\cdot 8\cdot\cancel{9}^{\,3}\cdot 5\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2\cdot 3}\cdot\cancel{2\cdot 3}\cdot\cancel{2\cdot 3}\cdot\cancel{2\cdot 3}\cdot\cancel{2}} = 5\cdot 7\cdot 8\cdot 3\cdot 5\cdot 4 = 40\cdot 21\cdot 20 = \boxed{16800}$$

#4.

$$(x^2+x^7+x^9)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C^{k}_{20}(x^2+x^7)^{20-k}\cdot(x^9)^k =$$

$$= \underset{(*)}{(x^2+x^7)^{20}} + 20\cdot\underset{(*)}{(x^2+x^7)^{19}\cdot x^9} + C^{2}_{20}\underset{(*)}{(x^2+x^7)^{18}\cdot x^{18}} + C^{3}_{20}\underset{(*)}{(x^2+x^7)^{17}\cdot x^{27}} + \underbrace{\ldots}^{deg>57} =$$

(*) $\sum_{k=0}^{20} C^{k}_{20}\, x^{2k}\cdot(x^7)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} C^{k}_{20}\cdot x^{140-5k}$ – степень кратна 5 $\Rightarrow \neq 57$.

(*) $20\cdot(x^2+x^7)^{19}\cdot x^9 = 20\sum_{k=0}^{19} C^{k}_{19}\cdot x^{2k}\cdot(x^7)^{19-k}\cdot x^9 = 20\sum_{k=0}^{19} C^{k}_{19}\cdot x^{142-5k}$

$142-5k \,\vdots\, 57 :\; 142-5k = 57 \Rightarrow k = 17$

При $k=17$: $20\cdot C^{17}_{19} = \frac{20\cdot 19!}{17!\cdot 2!} = 20\cdot 18\cdot 19\cdot\frac{1}{2} = \boxed{3420}$

(*) $C^{2}_{20}\sum_{k=0}^{18} C^{k}_{18}\cdot x^{2k}\cdot(x^7)^{18-k}\cdot x^{18} = C^{2}_{20}\sum_{k=0}^{18} C^{k}_{18}\cdot x^{144-5k}$

$144-5k \,\vdots\, 57 :\; 144-5k = 57 \Rightarrow \varnothing$

(*) $C_{20}^{3}\sum_{k=0}^{17} C_{17}^{k} x^{2k}\cdot (x^{7})^{17-k}\cdot x^{27} = C_{20}^{3}\sum_{k=0}^{17}\cdot x^{146-5k}\cdot C_{17}^{k}$

$146-5k=57 \Rightarrow \varnothing$

$\boxed{\text{Ответ: } 3420.}$

#5.

Всего вариантов разложить 7 монет по 3 карманам: 3^7.

Уберём варианты, когда хотя бы 1 карман пустой. Их $3\cdot 2^7$.

Но дважды посчитали, когда пусто 2 кармана, поэтому надо прибавить 1 вариант для каждого кармана:

Всего: $3^7-3\cdot 2^7+3\cdot 1 = 3(3^6-2^7+1) =$

$= 3(729-128+1) = 3\cdot 602 = \boxed{1806}$

#6.

Выберем 4 книги, которые останутся на месте — C_{10}^{4} вариантов.

И теперь расставим 6 остальных книг — $6!$ вариантов

Всего: $C_{10}^{4}\cdot 6! = \frac{10!\cdot 6!}{4!\cdot 6!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 400\cdot 378 = \boxed{151200}$

#7.

Количество не взаимно простых с 2020 из $\underline{2020}$:

$|\underline{2020}| - \varphi(2020) = 2020 - \varphi(2020) = 2020 - \varphi(4)\cdot\varphi(5)\cdot\varphi(101) =$

$= 2020 - 2\cdot 4\cdot 100 = 2020 - 800 = \boxed{1220.}$

#8.

$\overline{a_7 a_6 \ldots a_1}$, где $a_i \le a_{i+1}$

Если мы можем выбрать цифру только одну, то таких вариантов — $C_7^1 \cdot C_9^1$

Если можем выбрать 2 цифра, то таких вариантов $C_7^2 \cdot C_9^2$

И т.д. до $C_7^7 \cdot C_9^7$

Всего вариантов: $C_7^1 \cdot C_9^1 + C_7^2 \cdot C_9^2 + C_7^3 \cdot C_9^3 + C_7^4 \cdot C_9^4 + C_7^5 \cdot C_9^5 +$

$+ C_7^6 \cdot C_9^6 + C_7^7 C_9^7 = \frac{7!}{6!} \cdot \frac{9!}{8!} + \frac{\cancel{7!} \cdot 9!}{2 \cdot 5! \cdot 2 \cdot \cancel{7!}} + \frac{7! \cdot 9!}{3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6!} + \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{9!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{4!} \cdot \cancel{5!}} +$

$+ \frac{\cancel{7!}\ \cancel{9!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{2!} \cdot \cancel{5!} \cdot \cancel{4!}} + \frac{\cancel{7!}\ \cancel{9!}}{\cancel{6!} \cdot 6!\ \cancel{7!}} + \frac{\cancel{7!}\ \cancel{9!}}{\cancel{7!}\ \cancel{7!} \cdot 2!} =$

$= 7 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 + 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 35 \cdot 18 \cdot 7 + 21 \cdot 42 \cdot 3 + 49 \cdot 12 + 4 \cdot 9 =$

$= 63 + 756 + 2940 + 4410 + 2646 + 588 + 36 = \boxed{11\,439}$