Лекция 34, 10.06.24

5 разложение

Утв: (О QR-разложении):

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ – кв. невыр. м-ца ($\det A \neq 0$)

Тогда $\exists$ют м-цы Q и R, такие что $A = Q \cdot R$, где

Q – ортогональная м-ца, R - верхнетреуг. м-ца с положит. диагональю.

□ Столбцы $A_1, \dots, A_n$ м-цы л.н.з. по усл. $\Rightarrow$

применим процесс ортогонализации Г.-Ш. и получим $B_1, \dots, B_n$ – ортогональный базис $\Rightarrow$ нормируем $Q_i = \dfrac{B_i}{\|B_i\|}$ $\Rightarrow$ получим ОНБ $Q_1, \dots, Q_n$ в $\mathbb{R}^n$

Матрица $Q = [Q_1, \dots, Q_n]$ - ортогон. м-ца = м-ца перехода от ОНБ к ОНБ.

Столбец $A_k \in \mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_n)$, $k = \overline{1,n}$ по формулам Г.-Ш.

$\Rightarrow A_k = r_{1k} Q_1 + \dots + r_{kk} Q_k$, где $r_{kk} = \|B_k\| > 0$, т.к.

$Q_k = \dfrac{B_k}{\|B_k\|^2}$, а коэфф. при B_k в процессе Г.-Ш. равен 1.

В матричном виде $A = Q \cdot R$, где $Q = [Q_1, \dots, Q_n]$,

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix}$$ ■

Приведение кв. ф. к главным осям

Теорема: $\forall$ кв.ф. можно ортогональным преобразованием привести к каноническому виду $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, где числа λ_i, $i = \overline{1,n}$ – это с.з. л.о. с той же матрицей в ОНБ.

□ Пусть дана кв. ф. $q(x)$. Рассмотрим её м-цу A в нек. ОНБ

$\Rightarrow q(x) = x^T A x$

Рассм. лин. оператор с той же м-цей в том же ОНБ – л.о. $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ – самосопр. л.о. (т.к. A – сим. м-ца в ОНБ)

Применим к $\mathcal{A}$ теорему о спектр. разложении $A = U \Lambda U^T$, где

U – ортог. м-ца, Λ – диагональная.

Заметим, что если взять U в качестве м-цы перехода к

новому базису (к ОНБ из с.в. л.о. $\mathcal{A}$), то м-ца кв. ф. будет

равна (по формуле перехода к новому базису для кв. ф.)

$\Lambda = U^T A U$ (и для оператора $\mathcal{A}$ $\Lambda = U^{-1} A U = U^T A U$, т.к. U – ортог.)

$\Rightarrow$ в новом базисе м-цы кв. ф. и л.о. опять совпадут, и

обе равны диаг. м-це Λ (в м-це Λ на диаг. стоят с.з. л.о. $\mathcal{A}$) ■

у кв.ф. с.з. нет

Алгебра над полем

Опр: Пусть A – вект. пр-во над нек. полем F, снабжённое доп.

операцией умножения векторов $* : A \times A \to A$.

A наз. <u>алгеброй над полем F</u>, если

$\forall x, y, z \in A$ 1) $(x+y) * z = x * z + y * z$

$\forall \alpha, \beta \in F$ 2) $x * (y+z) = x * y + x * z$

3) $(\alpha x) * (\beta y) = (\alpha \cdot \beta)(x * y)$

Опр: Алгебра наз. ассоциативной, если операция умножения ассоциативна, и алгеброй с единицей, если есть нейтр. элемент по умножению.

Пример:

1) $\mathbb{C}$ явл. двумерной операцией над $\mathbb{R}$ $(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2)$

Доп. операция – умнож. к. чисел.

2) $F[x]$ – многочлены над полем F $(\dim_F F[x] = \infty)$, и есть базис $1, x, x^2, \dots$

Опер. – умножение многочленов

3) $M_n(\mathbb{R})$ – кв. м-цы с опер. умножения м-у $(\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{R}) = n^2)$

4) Кватернионы над $\mathbb{R}$

$H = \{x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot i + x_3 \cdot j + x_4 \cdot k \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ $(\dim_{\mathbb{R}} H = 4)$.