Лекция 24, 13.03.24

Пример:

1) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ - арифметич. пространство

$x+y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$

$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ => линейное пространство

2) $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

По аналогии $\mathbb{F}^n$ - декартова n-я степень поля F

3) $M_{m\times n}$ - пространство матриц $m\times n$

4) $C[a,b]$ - непривод. функции на отрезке $[a;b]$ - лин. пространство, т.к.

$f(x)+g(x) \in C[a;b]$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda f(x) \in C[a;b]$

5) Пространство $\mathbb{R}_n[x]$ - пространство мн-нов $\deg f \leq n$

6) Рассмотрим ОСЛАУ $\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{0}$ $A \in M_n(F)$, $x \in F^n$

Пусть L - мн-во её реш., тогда L - лин. пространство, т.к.

$\forall x, y \in L$ $x+y \in L$ и $\forall \lambda \in F$ $\lambda x \in L$

Замечание: Сумма x и противоположного к y наз. разностью x и y. $x+(-y)=x-y$

Базис и размерность

Опр: Векторы $a_1, \dots, a_k$ наз. линейно зависимыми (л.з.), если $\exists$ числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

Опр: Если из $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, то система векторов $a_1, \dots, a_k$ наз. линейно независимой (л.н.з.)

Опр: Базисом лин. пр-ва V наз. система векторов $b_1, \dots, b_k$, такая что:

1) $b_1, \dots, b_k$ линейно независимы

2) $\forall$ вектор $x \in V$ представим в виде линейной комбинации (л/к) векторов $b_1, \dots, b_k$ (т.е. линейно выражается через базисные векторы) $x = x_1 b_1 + \dots + x_k b_k$.

При этом координаты $x_1, \dots, x_k \in F$ наз. координатами вектора x в базисе $b_1, \dots, b_k$

Утв: Если $b_1, \dots, b_k$ – базис, то $\forall$ вектор $x \in V$ раскладывается по базису $b_1, \dots, b_k$ единственным образом.

$\square$ Д: Пусть есть 2 разложения: $x = x_1 b_1 + \dots + x_k b_k = x_1' b_1 + \dots + x_k' b_k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_1') b_1 + \dots + (x_k - x_k') b_k = 0$, но $b_1, \dots, b_k$ – л.н.з. $\Rightarrow \forall i \in [1;k]$ $x_i = x_i'$. $\blacksquare$

Опр: Максимальное число л.н.з. векторов в данном пр-ве V наз. его размерностью.

Обознач.: $\dim V$

Пример: $\dim F^n = n$

Замечание: Если пр-во n-мерно ($\dim V = n$), то $\forall$ л.н.з. система из n векторов образ. базис.

Замечание: Если в пр-ве V $\exists$ базис из n векторов, то $\dim V = n$.

Пусть $x \in V$ и $b_1, \ldots, b_n$ - базис в V.

Разложение $x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ можно записать в матрич. форме:

$$x = (b_1 \; b_2 \; \ldots \; b_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

столбец координат (чисел из F)

строка векторов базиса

Замечание: То есть при фикс. базисе есть соответствие

$x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, т.е. отображение из V в F^n.

Оно взаимно однозначно (из единственности разл. по базису)

И при сложении векторов координаты складываются, а при умножении на число умнож. на число:

$$(\alpha x = \alpha x_1 b_1 + \ldots + \alpha x_n b_n \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$$

Замечание: Если V - конечномерное пр-во ($\dim V = n$), то при фикс. базисе мы получаем изоморфизм пространства V с F^n.

Переход к другому базису

Пусть V - n-мерное пространство, $\begin{matrix} \mathbb{a} = (a_1 \dots a_n) \\ \mathbb{b} = (b_1 \dots b_n) \end{matrix}$ — базисы в V.

Разложим векторы второго базиса $\mathbb{b}$ по базису $\mathbb{a}$

$$\begin{cases} b_1 = t_{11} a_1 + t_{21} a_2 + \dots + t_{n1} a_n \\ \vdots \\ b_n = t_{1n} a_1 + t_{2n} a_2 + \dots + t_{nn} a_n \end{cases} \quad (*)$$

Опр: **Матрицей перехода** от базиса $\mathbb{a}$ к базису $\mathbb{b}$ наз. матрица вида:

$$T_{a \to b} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{t_{n1}}_{\substack{\text{координаты вектора } b_1 \\ \text{в базисе } a_1, \dots, a_n}} & \dots & \underbrace{t_{nn}}_{\substack{\text{коорд. вектора } b_n \\ \text{в базисе } a_1, \dots, a_n}} \end{pmatrix}$$

! Коорд. новых базисных векторов в старом базисе выписывает по столбцам.

Матричная форма равенства $(*)$:

$$\boxed{\mathbb{b} = \mathbb{a} T_{a \to b}}$$

строка из векторов нового базиса

строка из векторов старого базиса

Замечание: Матрица $T_{a \to b}$ невырождена, т.к. векторы $b_1, \dots, b_n$ л.н.з. (по опр.), а столбцы матрицы перехода - это эл-ты F^n, которые при фиксации базиса $a_1, \dots, a_n$ изоморфно $V \Rightarrow$ все линейные зависимости сохраняются.

Т.е. л.н.з. векторов $b_1, \dots, b_n \Leftrightarrow$ л.н.з. столбцов $T_{a \to b} \Leftrightarrow$ невыр. матрицы $T_{a \to b}$ по т. о БМ.

Утв: Пусть $x \in V$, $\mathbb{a}$ и $\mathbb{b}$ – базисы в V.

Пусть $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$ – столбец координат x в базисе $\mathbb{a}$.

$x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$ – столбец координат x в базисе $\mathbb{b}$.

Тогда $\boxed{x^b = T^{-1}_{a\to b}\, x^a}$ (или $x' = T^{-1}x$)

коор. в новом базисе

□ Докажем, что $x^a = T_{a\to b}\, x^b$. (Индексы, а не степени!). Это равносильно требуемому, т.к. м-ца перехода невырождена.

$$x = x_1^a a_1 + \ldots + x_n^a a_n = (a_1, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix} = \mathbb{a}\cdot x^a$$

Аналогично в базисе $\mathbb{b}$ $x = \mathbb{b}\cdot x^b$, при этом $\mathbb{b} = \mathbb{a}\cdot T_{a\to b}$

$\Rightarrow x = \mathbb{a}\cdot T_{a\to b}\cdot x^b = \mathbb{a}\cdot x^a \Rightarrow$ т.к. разлож. по базису единств.

$\Rightarrow T_{a\to b}\, x^b = x^a$ ■

Утв: Матрица перехода от $\mathbb{b}$ к $\mathbb{a}$ – это $T^{-1}_{a\to b}$ (т.к. $\mathbb{b} = \mathbb{a}\cdot T_{a\to b}$, умножим справа на обратную $T^{-1}_{a\to b}$: $\Rightarrow \mathbb{a} = \mathbb{b}\cdot T^{-1}_{a\to b}$, но по опр. матрицы перехода это должна быть $T_{b\to a}$. $\Rightarrow$

$\boxed{T_{b\to a} = T^{-1}_{a\to b}}$

Замечание: $\boxed{x^b = T_{b\to a}\, x^a}$

Утв: Пусть $\mathbb{a} = (a_1 \ldots a_n)$ $\mathbb{b} = (b_1 \ldots b_n)$ $\mathbb{c} = (c_1 \ldots c_n)$

Тогда $\boxed{T_{a\to c} = T_{a\to b}\cdot T_{b\to c}}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{a} \arrow[dl, "T_{a\to c}"'] \arrow[dr, "T_{a\to c}"] & \\ \mathbb{b} \arrow[rr, "T_{b\to c}"'] & & \mathbb{c} \end{tikzcd}$$

– коммутативная диаграмма

□ $\mathbb{c} = \mathbb{a} T_{a \to c}$, $\mathbb{b} = \mathbb{a} T_{a \to b}$ $\mathbb{c} = \mathbb{b} \cdot T_{b \to c}$

$$\mathbb{c} = \mathbb{a} T_{a \to b} \cdot T_{b \to c} = \mathbb{a} \cdot T_{a \to c}$$

$\Rightarrow T_{a \to c} = T_{a \to b} \cdot T_{b \to c}$ из единств. разлож. по базису ■

Опр: Подмножество L вект. пространства V наз. линейным подпространством в V, если оно само явл. пространством отн. опер. в V.

Замечание: L - подпространство, если $\forall x, y \in L$, $\forall \lambda \in F$ $\begin{cases} x + y \in L \\ \lambda x \in L \end{cases}$

Т.е. достаточно проверять замкнутость относ. слож. и умн. на число.