Лекция 7, 18.10.23

Пример 1: $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$a_1 - a_2 - 2a_3 + 0 \cdot a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-1 \\ 2-2 \\ 3-1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – л/з

Пример 2: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow$ система л.н.з.

Теорема: (Критерий линейной зависимости)

Для того, чтобы строки (столбцы) $a_1, \dots, a_n$ были л.з., необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из них яв-ся л.к. остальных (линейно выражалась через остальные (л.в.))

□ ($\Rightarrow$) Необходимость:

Дано: $a_1, \dots, a_n$ л/з, д-ть: хотя бы одна из них л/в через ост.

Пусть $a_1, \dots, a_n$ л/з по опр. $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все $= 0$:

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n = \bar{0}$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1 a_1 = -\alpha_2 a_2 + \dots + (-\alpha_n a_n) \Leftrightarrow a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot a_n \Rightarrow$$

представим a_1 в виде л/к $\alpha_1 \neq 0$ $a_2, \dots, a_n$

($\Leftarrow$) Достаточность

Дано: Одна из строк $a_1, \dots, a_n$ л/в через ост.

Док-ть: $a_1, \dots, a_n$ – л/з строки

Пусть $a_1 = \beta_2 a_2 + \dots \beta_n \cdot a_n \iff \underset{\neq 0}{\boxed{1}} \cdot a_1 - \beta_2 a_2 - \dots - \beta_n \cdot a_n = 0$ – нетрив. л/к $a_1, \dots, a_n$ ■

Пример: $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (0, 0)$ – л/з, т.к. $0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 0$

При этом $a_2 = 0 \cdot a_1$ – л/в через a_1

a_1 не выражается линейно через нулевой вектор

В примере 1. векторы $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – образ. макс. л.н.з. подсистемы.

Теорема (о базисном миноре):

1) Базисные строки (столбцы), соответствующие $\forall$ базисному минору м-цы A, явл. лин. независимыми (л.н.з.)

2) Строки (столбцы) м-цы A, не входящие в базисный минор M, явл. л/к базисных строк (столбцов)

□ Для строк:

Предп., что они л/з $\Rightarrow$ по критерию л/з одна из них явл. л/к остальных $\Rightarrow$ БМ $= 0$ по св-ву (5) det – противоречие с опр. БМ.

2) без огр. общности можем считать, что БМ M расположен в левом верхнем углу м-цы

$$A = \begin{pmatrix} M_r & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ & a_{r,r+1} & & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \dots & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_r \\ \\ A_k \\ \end{matrix}$$

Здесь $RgA = r$

Возьмём строку A_k, где $k > r$, и покажем, что $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$

$A_k = \lambda_1 \cdot A_1 + \dots + \lambda_r \cdot A_r$, где $A_1, \dots, A_r$ - базисные строки

Составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & M & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$$

, полученный добавлением к M k-й строки j-го столбца (выбранного произвольно), $j = \overline{1,n}$

$\leftarrow$ раскл. по j-му столбцу

Покажем, что $\Delta = 0$. Если $j \le r$, то в Δ есть 2 одинак. столбца $\Rightarrow$ по 4б) det $\Delta = 0$

Если $j > r$, то Δ - это минор м-цы A порядка $r+1$ $\Rightarrow \Delta = 0$ по опр. ранга. Теперь разложим Δ по посл. столбцу:

$a_{1j} \cdot B_1 + \dots + a_{rj} \cdot B_r + a_{kj} \cdot B_k \overset{\text{т.к. } \Delta = 0}{=} 0$, где

$B_1, \dots, B_k$ - алг. доп. соотв. эл-тов в Δ, причём $B_k = \pm M \ne 0$

$\Rightarrow a_{kj} = \left(-\frac{B_1}{B_k}\right) a_{1j} - \dots \left(-\frac{B_r}{B_k}\right) \cdot a_{rj}$, $j = \overline{1,n}$

То есть $a_{kj} = \lambda_1 \cdot a_{1j} + \dots + \lambda_r \cdot a_{rj}$, $j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

$\underbrace{(a_{k1}, \dots, a_{kn})}_{A_k} = \lambda_1 \underbrace{(a_{11} \dots a_{1n})}_{A_1} + \dots + \lambda_r \underbrace{(a_{r1} \dots a_{rn})}_{A_r}$ - л/к строк $A_1, \dots, A_r$ ∎

Пример: $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{\text{III}=\text{I}+\text{II}}$ $M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg\,A = 2$

Следствие 1: (Теорема о ранге матрицы)

Ранг м-цы равен максимальному числу её л.н.з. строк (стб.)

Замеч: это эквивалентно опр. ранга.

□ (для строк) Пусть $Rg\,A = r$, а макс. число л.н.з. строк $= k$.

Покажем, что $k = r$.

1) Т.к. в A есть r лнз строк (т.к. $Rg\,A = r$, это базисные строки нек. БМ по 1-й части теор. о БМ) $\Rightarrow$ $k \geq r$
макс. кол-во

2) Покажем, что $k \leq r$.

Вычеркнем в A все строки, кроме k л.н.з. строк. Получим м-цу A_1. В ней k строк, при этом $Rg\,A_1 = k$. (т.к. если бы $Rg\,A_1$ был $< k$, то среди её k строк только часть была бы базисной и по 2-й части теор. о БМ нашлась бы строк, явл. л/к. базисных, но тогда по критерию л/з все строки в A_1 л/з – противоречие)

Тогда БМ м-цы A_1 имеет порядок k и явл. неравным нулю минором м-цы A (исходной) $\Rightarrow$ $k \leq r$ ← макс. порядок ненул. минора в A.

$\Rightarrow k = r$

■

Пример: $a_1 = (1\ 2\ 3)$
$a_2 = (4\ 5\ 6)$ Проверить явл. ли они л.н.з. ?
$a_3 = (7\ 8\ 9)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Rg\,A = 2$$

Замеч: в ступ. виде м-цы ранг равен числу ненул. строк (= числу ведущ. эл-ов).

Следствие 2 (Условие невырожд. кв. матрицы):

Пусть A – кв. м-ца порядка n $(A \in M_n(\mathbb{R}))$. Тогда следующ. 3 усл. экв.

① $\det A \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ ② $Rg\,A = n$ $\Longleftrightarrow$ ③ Все строки A л.н.з.
(м-ца невыр.) (стб.)

□ ①⇒② Пусть $\det A \neq 0$ ⇒ в A есть минор n-го порядка, не равный 0 ⇒ $Rg\,A = n$ по опр.

ⓘ ① ⇒ ② ⇒ ③ ⇒ ①

②⇒③ Пусть $Rg A = n$ ⇒ все строки базисные ⇒

⇒ все они л.н.з. (по теор. о БМ)

③ ⇒ ① Пусть все стр. A л.н.з.. Предположим (П/п), что $\det A = 0$

⇒ $Rg\,A < n$ ⇒ по теор. о БМ по кр. мере одна строка явл.

л/к остальных ⇒ по крит. л/з. строки A явл. л/з ⇒ противоречие

⇒ $\det A \neq 0$ ■