Лекция 26, 03.04.24

Квадратичные формы

Опр: Однородный многочлен 2й степени от n переменных, то есть выражение вида:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j, \quad (*)$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ наз. <u>квадратичной формой</u>.

Замечание: Многочлен $g(x)$ наз. однородным степени k, если

$$g(\alpha x) = \alpha^k \cdot g(x) \quad \forall \alpha \in F.$$

Замечание: Кв. форма – это отображение $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ (вектора в числа).

Рассмотрим n-мерное лин. пр-во V над $\mathbb{R}$. Выберем в нём базис $e_1, \dots, e_n$. Тогда $\forall x \in V$ есть единственный набор коорд. $x_1, \dots, x_n$ в этом базисе $(x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$.

Пусть $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец координат в базисе e $\Rightarrow$ $q(x)$ можно представить в виде:

$$\boxed{q(x) = \underset{1\times n}{(x^e)^T} \cdot \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x^e}},$$ где $A = (a_{ij})$ – матрица кв. формы в базисе e

a_{ij} – коэфф. из (*)

Пример: В $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2 + \overset{2\cdot 4}{8} x_1 x_3 = x_1^2 + 4\underbrace{x_1x_3} + 4\underbrace{x_3x_1} = (x_1\, x_2\, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание: Матрица кв. формы всегда симметрическая (т.е. $A^T = A$)

Замечание: По $\forall$ билинейной форме можно построить квадратичную:

$$\underset{\text{кв.ф.}}{q(x)} = \underset{\text{б.ф. на совп. арг.}}{b(x, x)}$$

Тогда $a_{ij} = \dfrac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$

Пример: $b(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x,x) = x_1^2 + 8x_1x_3$ – кв. ф.

Опр: Бил. форма наз. <u>симметрической</u>, если $\forall x, y \in V$ $b(x,y) = b(y,x)$, и <u>кососимметрической</u>, если $b(x,y) = -b(y,x)$

(М-ца кососимм., т.е. $B^T = -B$)

Пример: скалярное произведение – симметрическая б.ф.

Замечание: Обратно, $\forall$ кв. форме можно построить симметрическую б.ф., такую что $b(x,x) = q(x)$. Это наз. поляризацией кв. ф.

$b(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$ (б.ф. имеет ту же м-цу, что и кв.ф.)

Ут: При переходе от базиса e к базису e' м-ца кв.ф. меняется так:

$\boxed{A' = C^T A \cdot C}$ („Стас"), где A' – м-ца кв.ф. в новом базисе e', C – м-ца перехода

□ $x = C\cdot x'$ (т.к. $x' = C^{-1}\cdot x$ – формула изменения коордиат вектора при замене базиса.)

$$q(x) = x^T A x = (C\cdot x')^T\cdot A\cdot(C\cdot x') = (x')^T\cdot \underbrace{C^T\cdot A\cdot C}_{= A'}\cdot x' = (x')^T\cdot A'\cdot x'$$

$\Rightarrow A' = C^T\cdot A\cdot C$ (Можно в качестве x' брать все векторы канонического базиса $(0,\dots,\underset{i}{0,1},0,\dots,0)$ и показать совпадение матричных элементов. ■

Опр: Если кв. ф. записана в виде $q(x) = x^T A x$, где A – м-ца кв. ф. в некотором базисе, то $Rg\, A$ наз-ся рангом кв. ф. $q(x)$.

$Rg\, A$ не зависит от выбора базиса.

Лемма: Пусть $A, U \in M_n(\mathbb{R})$, $\det U \neq 0$ (т.е. U – невыр. м-ца)

Тогда $Rg\, A\cdot U = Rg\, A = Rg\, U\cdot A$ (т.е. при умн. на невыр. м-цу ранг не меняется).

□ $Rg\, A\cdot U \leq Rg\, A$ (т.к. столбцы м-цы $A\cdot U$ – лин. комб. столбцов A), а ранг матрицы (по теор. о ранге м-цы) равен макс. кол-ву л.н.з. столбцов. Макс. кол-во л.н.з. столбцов не могло вырасти, т.к. все столбцы в $A\cdot U$ л/в через столбцы м-цы A.

$$Rg\, A = Rg\, A\cdot(\underbrace{U\cdot U^{-1}}_{E}) = Rg\, (A\cdot U)\cdot \underset{\text{невыр. м-ца}}{U^{-1}} \leq Rg\, A\cdot U$$

по док. выше

$\Rightarrow Rg\, A = Rg\, A\cdot U$.

по док. выше

$$Rg\, U\cdot A = Rg\, (U\cdot A)^T = Rg\, A^T\cdot \underset{\text{невыр. м-ца}}{U^T} = Rg\, A^T = Rg\, A = Rg\, A\cdot U$$ ■

Утв: (об инвариантности ранга кв. ф.)

Пусть $q(x)$ - кв. ф. на лин. пр-ве V.

Пусть $\mathbb{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbb{b} = (b_1, \dots, b_n)$ - базиси в V.

Пусть A - м-ца кв.ф. в базисе $\mathbb{a}$

B - м-ца кв.ф. в базисе $\mathbb{b}$.

Тогда $Rg A = Rg B$ (и ранг кв.ф. определён корректно).

□ Было доказано, что $B = C^T \cdot A \cdot C$, где C - м-ца перехода от $\mathbb{a}$ к $\mathbb{b}$.

$\Rightarrow$ по лемме, т.к. умножаем на невыр. м-цу C^T слева и C справа, то $Rg B = Rg A$ ■

Опр: Кв. ф. $q(x)$ наз. положительно определённой, если $\forall x \neq 0$ $q(x) > 0$.

- отрицательно определённой, если $\forall x \neq 0$ $q(x) < 0$.

- знакопеременной, если $\exists x, y \in V$: $q(x) < 0 < q(y)$.

Пример: $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ - положительно

$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$ - знакопеременная
($y = (1,0,0)$, x $(0,0,1)$ $\Rightarrow$ $q(x) < 0 < q(y)$)

$q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$ - отрицательно опр.

Но $q_3'(x) = -x_1^2 - x_3^2$ не явл. отриц. опр-й, т.к. $q(010) = 0$ - непол. опр.

Теорема (Критерий Сильвестра положит. опр-ти кв. ф.): (б/д)

Пусть A - м-ца кв. ф. в нек. базисе, тогда

$\boxed{q(x) \text{ - положит. опр.}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{последовательность главных угловых миноров матрицы } A \text{ строго положительна}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \Delta_1 = a_{11} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$$

Следствие: кв. ф. отрицат. опр. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$

Т.е. знаки гл. угл. миноров чередуются, начиная с минуса.

$\square$ Если кв.ф. с м-цей A отр. опр., то кв.ф. с м-цей $(-A)$ полож. опр. и $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$ $\blacksquare$

Пример: $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ – отриц. опр. кв.ф.

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \; -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = -1 < 0 \\ \Delta_2 = 1 > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = (-1)^n \end{matrix}$$

Опр: Кв. форму $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots \alpha_n x_n^2$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ (т.е. в кв.ф. нет попарных произведений вида cx_ix_j) наз. кв. формой канонического вида.

Если $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, то канонический вид наз. нормальным.

Замечание: М-ца кв. ф. в канонич. виде имеет диагональный вид.