1.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$$

Возьмём равномерное разбиение на n отрезков:

$$x_i = 1 + \frac{i}{n},\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Выберем разметку $\xi_i = x_{i-1},\ i \in \{1, \dots, n\}$

Т.к. функция $\frac{1}{x^2}$ непрерывна на отрезке $[1; 2]$, то она интегрируема и предел любых интегральных сумм при диаметре разбиения, стремящемся к нулю, стремится к значению интеграла. В нашем случае диаметре равен $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i^2}\cdot(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}.$$

Оценим сумму под пределом:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{n+i}{n}\right)^2} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^2}{(n+i)^2} = n^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n+i)^2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^2}{(n+i)(n+i+1)} < \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^2}{(n+i)^2} < \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^2}{(n+i)(n+i-1)}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{n^2}{n+i} - \frac{n^2}{n+i+1}\right) < \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^2}{(n+i)^2} < \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{n^2}{n+i-1} - \frac{n^2}{n+i}\right)$$

$$\frac{n^2}{2n} < \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^2}{(n+i)^2} < \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{2n-1}$$

В силу вышенаписанного:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{2n}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{2n-1}\right)$$

$$\frac{1}{2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1} - \frac{n}{2n-1}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

По теореме о двух милиционерах, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

Значит, $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}$.

2a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n} = \left\{\begin{gathered} f = \sqrt{x - x^2} \\ a = 0 \\ b = 1 \\ x_k = \xi_k = \frac{k}{n} \end{gathered}\right\} =$$

$\left\{\begin{gathered}\text{Т.к. функция } \sqrt{x-x^2} \text{ непрерывна на отрезке } [0;1], \\ \text{то она интегрируема и предел любых интегральных сумм} \\ \text{при диаметре разбиения, стремящемся к нулю,} \\ \text{стремится к значению интеграла.}\end{gathered}\right\}$

$$= \int_0^1\sqrt{x - x^2}\,dx = \int_0^1\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \left\{\begin{gathered} x - \frac{1}{2} = t \\ x = t + \frac{1}{2} \\ x = 0 \to t = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \to t = \frac{1}{2} \end{gathered}\right\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} + \frac{1}{8}\arcsin 2t\right]\Big|_{-1\backslash 2}^{1\backslash 2} = \frac{1}{8}\arcsin 1 - \frac{1}{8}\arcsin(-1) = \frac{1}{4}\arcsin 1$$

2.b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \left\{\begin{gathered} f = \frac{1}{1+x} \\ a = 0 \\ b = 2 \\ x_i = \xi_i = \frac{i}{n} \end{gathered}\right\} =$$

$\left\{\begin{gathered}\text{Т.к. функция } \frac{1}{1+x} \text{ непрерывна на отрезке } [0;2], \\ \text{то она интегрируема и предел любых интегральных сумм} \\ \text{при диаметре разбиения, стремящемся к нулю,} \\ \text{стремится к значению интеграла.}\end{gathered}\right\}$

$$= \int_0^2\frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)|_0^2 = \ln 3$$

3a)

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^4 x = \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 x\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}(3\pi - 0) = \frac{3\pi}{4}$$

3b)

$$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx^3}{1+x^6} = \left\{\begin{gathered} x^3 = t \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = 1 \end{gathered}\right\} = \frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\arctan t|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

3c)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx = (-x\cot x)|_{\pi\backslash 4}^{\pi\backslash 3} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(-\cot x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x}d\sin x = \ln|\sin x|\,\Big|_{\pi\backslash 4}^{\pi\backslash 3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3d)

$$\int_0^{\sqrt{3}}x\arctan x\,dx = \int_0^{\sqrt{3}}\arctan x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \arctan x\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{2}d\arctan x =$$

$$= \arctan\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2} - \arctan 0\cdot\left(\frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x - \arctan x)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\left[\sqrt{3} - \arctan\sqrt{3}\right] - [0 - \arctan 0]\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

3e)

$$\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx + \int_1^3\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx = \left\{\begin{gathered} \frac{1}{x} = t \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \\ x = \frac{1}{3} \to t = 3 \\ x = 1 \to t = 1 \end{gathered}\right\} = \int_3^1\frac{\arctan\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= -\int_3^1\frac{\arctan\frac{1}{t}}{1 - t + t^2}dt = \int_1^3\frac{\arctan\frac{1}{t}}{1 - t + t^2}dt = \int_1^3\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan t}{1 - t + t^2}dt$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx + \int_1^3\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx =$$

$$= \int_1^3\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{1 - x + x^2}dx + \int_1^3\frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}dx =$$

$$= \int_1^3\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{1 - x + x^2} + \frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^3\frac{1}{1 - x + x^2}dx = \frac{\pi}{2}\int_1^3\frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - x + x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^3\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}dx = \left\{\begin{gathered} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \\ x = 1 \to t = \frac{1}{2} \\ x = 3 \to t = \frac{5}{2} \end{gathered}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + t^2}dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}\Big|_{1\backslash 2}^{5\backslash 2} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{5}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

3f)

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4 + \cos^2 x}$$

Заметим, что $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4 + \cos^2 x}$ (обоснование справа).

Тогда:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} +$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} = 4I$$

(верно в силу чётности косинуса)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4 + \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2dx}{9 + \cos 2x} =$$

$$= \left\{\begin{gathered} 2x = t \\ 2dx = dt \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = \pi \\ x = 0 \to t = 0 \end{gathered}\right\} = \int_0^{\pi}\frac{dt}{9 + \cos t} = \left\{\begin{gathered} u = \tan\frac{t}{2} \\ \cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ dt = \frac{2du}{1 + u^2} \\ t = 0 \to u = 0 \\ t = \pi \to u = +\infty \end{gathered}\right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\frac{2du}{1 + u^2}}{9 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}} = 2\int_0^{+\infty}\frac{du}{10 + 8u^2} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\frac{5}{4} + u^2} =$$

$$= \left\{a = \sqrt{\frac{5}{4}}\right\} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\arctan\sqrt{\frac{4}{5}}u\,\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} = 4I = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{4 + \cos^2 x} = \left\{\begin{gathered} x = \frac{\pi}{2} + t \\ dx = dt \\ x = \pi \to t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = 0 \end{gathered}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{4 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{4 + \sin^2 t} = \left\{\begin{gathered} t = \frac{\pi}{2} - u \\ u = \frac{\pi}{2} - t \\ dt = -du \\ t = \frac{\pi}{2} \to u = 0 \\ t = 0 \to u = \frac{\pi}{2} \end{gathered}\right\} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-du}{4 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{4 + \cos^2 u}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

4a)

$$y = 6x^2 - 6x + 1$$

$$y = \cos\pi x$$

$$0 \le x \le \frac{1}{2}$$

$y = \cos\pi x$ выше на всём участке, чем $y = 6x^2 - 6x + 1$. Поэтому:

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\cos\pi x - \left(6x^2 - 6x + 1\right)\right]dx = \left(\frac{\sin\pi x}{\pi} - 2x^3 + 3x^2 - x\right)\Big|_0^{0.5} =$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}$$

4b)

$$y = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

Графики пересекаются при $x = \pm 1$;

На всей области $\frac{1}{1 + x^2}$ выше, чем $\frac{x^2}{2}$. Поэтому:

$$S = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{1 + x^2} - \frac{x^2}{2}\right]dx = \left(\arctan x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

4c)

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$2y = x^2$$

По условию задачи нас интересует область $2y \ge x^2$.

Верхней границей области будет кривая $y = \sqrt{5 - x^2}$

Графики пересекаются при $x = \pm\left(\sqrt{6} - 1\right) = \pm c$.

На всей области $\sqrt{5 - x^2}$ выше, чем $\frac{x^2}{2}$. Поэтому:

$$S = \int_{-c}^{+c}\left[\sqrt{5 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right]dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{5 - x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-c}^{c} =$$

$$= \left\{\begin{gathered}\text{в силу нечётности всех} \\ \text{слагаемых}\end{gathered}\right\} = c\sqrt{5 - c^2} + 5\arcsin\frac{c}{\sqrt{5}} - \frac{c^3}{3}$$

4d)

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + x - 1$$

$$y = \frac{5x}{2}$$

По условию задачи нас интересует область $y \le x^2$.

Графики пересекаются в точках $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Верхней границей первой области будет кривая $y = \frac{5x}{2}$;

верхней границей второй области будет кривая $y = x^2$.

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left[\frac{5x}{2} - \left(x^2 + x - 1\right)\right]dx + \int_0^1\left[x^2 - \left(x^2 + x - 1\right)\right]dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} + x\right)\Big|_{-0.5}^{0} + \left(-\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{24} - \frac{3}{16} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{13}{48} + \frac{1}{2} = \frac{27}{48}$$

4e)

$$y^2 = \sin^2 x\cos x$$

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

В силу симметричности функции относительно обеих осей будем исктаь площадь правого верхнего лепестка, умноженную на 4.

Тогда $y = \sqrt{\cos x}\sin x$ и:

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{2}}d(\cos x) =$$

$$= \left\{\begin{gathered} t = \cos x \\ x = 0 \to t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = 0 \end{gathered}\right\} = -\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$S = 4S_1 = \frac{8}{3}$$