Лекция 12, 24.11.23

(I) Пусть $a_1, \dots, a_n$, $n \geq 1$ — нек. множество. Тогда

$\exists$ мн-во $\{a_1, \dots, a_n\}$, т.ч.

$$\forall y\,(y \in \{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow y = a_1 \lor y = a_2 \lor \dots \lor y = a_n)$$

$$A = B \Leftrightarrow \forall y\,(y \in A \Leftrightarrow y \in B)$$

(II) (Выделение подмножества) Пусть A — множество и φ — предикат.

Тогда $\exists$ множество $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$, т.ч.

$$\forall y\,(y \in \{x \in A \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow y \in A \land \varphi(y))$$

Опр: Множество E пустое $\Leftrightarrow \forall x\ \neg x \in E$.

Опр: $\varnothing = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg n = n\}$

Утв0: $\forall A\ \ A = A$.

Утв 1: $\varnothing$ — пусто.

Док-во: Рассмотрим произв. x и допустим $x \in \varnothing$.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Тогда по (II)} & \neg x = x \\ \text{По утв.0,} & x = x \end{array}\right] \Rightarrow ⊥ \quad \text{Значит, } x \notin \varnothing$$

Лемма 2: Пусть E - пустое. Тогда

(1) $\forall A \quad E \subseteq A$

(2) $E = \varnothing$

Док-во: Рассмотрим произв. A, произв. x.

(1) Хотим: $\underbrace{\underbrace{x \in E}_{\text{ложь}} \Rightarrow x \in A}_{\text{истина}}$

по опр. $\forall x \ \neg x \in E$

(2) По (1), $E \subseteq \varnothing$

По утв. (1) $\varnothing$ тоже пуст. Значит, по (1), $\varnothing \subseteq E$ $\Big] \Rightarrow E = \varnothing$

Утв. 3 („парадокс Рассела"):

$\neg \exists R \quad \forall y (y \in R \Leftrightarrow \neg y \in y)$ (*)

Док-во: ~~П~~ Пусть такое R существует.

Допустим $R \in R \underset{(*)}{\overset{y=R}{\Longrightarrow}} \neg R \in R$

$\Rightarrow$ ⊥

Значит, $R \notin R$. По (*), $R \in R$. ⊥

(III) (Множество-степень). Пусть A-множество. Тогда $\exists$ мн-во $P(A)$, т.ч.

$\forall y (y \in P(A) \Leftrightarrow y \subseteq A)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall y (y \in A \Rightarrow y \in B)$

Утв. $\forall A \quad A \subseteq A$

$\varnothing \subseteq \varnothing \overset{\text{III}}{\Longrightarrow} \varnothing \in P(\varnothing)$

$x \in P(\varnothing) \Rightarrow x \subseteq \varnothing$

$\Rightarrow \forall y (y \in x \Rightarrow \overbrace{x \in \varnothing}^{\text{ложь}})$ $\Rightarrow \forall y (\neg y \in x)$ $\overset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} x$ - пуст. $\overset{\text{Л2}}{\Longrightarrow} x = \varnothing$

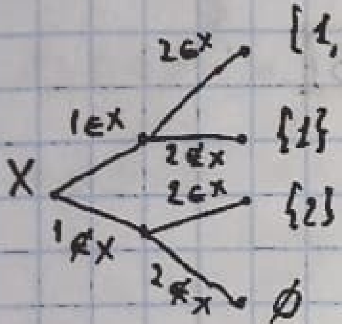
$\forall x\,(x \in P(\varnothing) \Leftrightarrow x = \varnothing) \overset{I}{\Leftrightarrow} x \in \{\varnothing\}$

$P(\overbrace{\varnothing}^{0}) = \overbrace{\{\varnothing\}}^{1=2^0}$

$P(\overbrace{\{\varnothing\}}^{1}) = \overbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}^{2=2^1}$

$P(\overbrace{\{1,2\}}^{2}) = \overbrace{\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}}^{4=2^2}$

$x \subseteq \{1,2\}$



IV (объединение – слабая форма). Пусть A и B – множества.

Тогда $\exists$ множество $A \cup B$, т.ч.

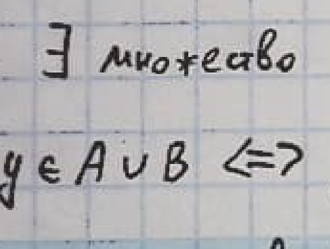
$\forall y\,(y \in A \cup B \Leftrightarrow y \in A \vee y \in B)$

IV (объединение – вообще). Пусть X – множество.

Тогда $\exists$ множество $\bigcup X$ т.ч.

$\forall y\,(y \in \bigcup X \Leftrightarrow \exists A\,(y \in A \wedge A \in X))$

$X = \{A_1, A_2, \dots\},\ A_i \in X$



$A \cup B \overset{\text{опр.}}{=} \bigcup\{A, B\}$

$\{1, 2, 3\} = \{1, 1\} \cup \{2, 3\}$

Алгебра множеств

Опр: $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$

Утв: $\forall y \,(y \in A \cap B \overset{(\mathrm{II})}{\Leftrightarrow} y \in A \wedge y \in B\}$

$\Leftrightarrow y \in B \wedge y \in A$

$\Leftrightarrow y \in B \cap A$

Опр: разность $A \setminus B = \{x \in A \mid \neg x \in B\}$

Лемма 4.

(1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

(2) $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

(3) $(A \setminus B \subseteq A) \wedge ((A \setminus B) \cap B = \emptyset)$

$A \setminus \emptyset = A$

Лемма 5. $\forall A, B$ след. утв. равносильны

(1) $A \subseteq B$

(2) $A \cap B = A$

(3) $A \cup B = B$

Док-во: $(1) \Rightarrow (2)$

дано: $A \subseteq B$

хотим $A \cap B = A$

$\Updownarrow$

Л4. $\underline{A \cap B \subseteq A} \wedge \underline{A \subseteq A \cap B}$

$x \in A \overset{(\text{дано})}{\Rightarrow} x \in B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

(2) = (3)

дано: $A \cap B = A$

хотим: $A \cup B = B$

$\Updownarrow$

$A \cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A \cup B$ л4

$x \in A \cup B \overset{(\text{IV})}{\Rightarrow} x \in A \vee x \in B$

$\overset{(\text{дано})}{\Rightarrow} x \in A \cap B \vee x \in B$

л4. $A \cap B \subseteq B \Rightarrow x \in B \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

(3) ⇒ (1)

Дано: $A \cup B = B$

Хотим: $A \subseteq B$

По л4, $A \subseteq \overbrace{A \cup B}^{B}$, $A \subseteq B$

Опр: Пусть фиксир. U – множество („универсум"). Тогда $\forall A \subseteq U$ определено дополнение: $\overline{A} = U \setminus A$

Утв: $\forall A, B \subseteq U \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Док-во: $x \in A \setminus B \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \in U)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in U \setminus B$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$

Тождество 6. (Тождество алгебры множеств): $\forall U\ \forall A, B, C \subseteq U$

(1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$

(2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(4) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(6) $\overline{\overline{A}} = A$

(7) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(8) $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap U = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup U = U$

(9) $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$

Док-во: (7) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{A}$

$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$

α	β	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$x \in \overline{A \cap B} \iff x \in U \wedge \neg(x \in A \cap B)$

$\iff x \in U \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$

$\iff x \in U \wedge ((\neg x \in A) \vee (\neg x \in B))$

$\iff (x \in U \wedge \neg x \in A) \vee (x \in U \wedge \neg x \in B)$

$\overset{(\text{IV})}{\iff} x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

Пример: $\forall A, B, C$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Пуст: $U = (A \cup B) \cup C$, тогда

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{(B \setminus C)} = A \cap \overline{(B \cap \bar{C})} =$$

$$= A \cap (\bar{B} \cup C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$