Лекция 29, 24.04.24 (Скип)

Опр: Для произв. кв. матрицы A определитель $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$ наз. характеристическим многочленом м-цы A, а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ характеристическим уравнением.

Замечание: Если n – порядок м-цы A, то $\chi_A(\lambda)$ – мн-н степени n.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Утв: Характеристические многочлены и уравнения подобных матриц совпадают.

□ A и A' подобны, если $\exists T$, $\det T \neq 0$: $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda E) = \det(T^{-1} A \cdot T - \lambda \cdot T^{-1} \cdot E \cdot T) = \det(T^{-1} (A - \lambda E) T) =$$

$$= \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda)$$ ■

Следствие: Хар. многочлены и уравнения для матрицы л.о. в разных базисах совпадают (сами матрицы могут различаться).

$\Rightarrow$ корректно говорить о хар. мн-не для л.о. (т.е. хар. мн-н инвариант л.о. при замене базиса).

Опр: Мн-во всех с.з. лин. оператора наз. спектром лин. оператора.

Теорема: λ – с.з. лин. оператора $\Leftrightarrow$ λ – корень хар. уравн. лин. оператора.

□ Необход: Дано: λ – с.з. л.о. $\mathcal{A}$; $\quad$ Д-ть: λ – корень $\chi_A(\lambda) = 0$.

По опр: $\exists x \neq 0$, $\mathcal{A}(x) = \lambda x$, т.е. $\mathcal{A}(x) = \lambda \cdot \mathcal{I}(x)$ тождественный л.о.

$(\mathcal{A} - \lambda I)(x) = 0$ $(*)$

Запишем равенство $(*)$ в нек. базисе $\mathbb{e}$:

$(A_e - \lambda E) \cdot x^e = 0$ - это ОСЛАУ с ненулевым решением $x^e \neq 0$.

$\Rightarrow$ по критерию $\exists$я ненул. реш. $\det(A_e - \lambda E) = 0$, а это и есть

$\chi_A(\lambda) = 0$.

Достат: Дано: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$
Док-ть: λ - с.з. л.о. $\mathcal{A}$.

Если λ - корень, то в зад. базисе $\mathbb{e}$ выполнено равенство

$\det(A_e - \lambda E) = 0 \Rightarrow$ ОСЛАУ $(A_e - \lambda E)x^e = 0$ имеет ненул.

решение и соотв. выполнено $(*)$ $(\mathcal{A} - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(x) = \lambda x$
$(x \neq 0)$

$\Rightarrow x$ - с.в., отвеч. с.з. λ. ∎

Опр: Алгебраической кратностью с.з. λ наз. его кратность как корня хар. ур-ния.

Обознач: m_i - алг. кр-ть с.з. λ_i

Пример: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^{\boxed{3}} \cdot (\lambda - 2)^{\boxed{2}}$

$\lambda_1 = 5 \leftarrow$ алг. кр. $m_1 = 3$

$\lambda_2 = 2 \leftarrow$ алг. кр. $m_2 = 2$.

Опр: Пусть $\mathcal{A}: V \to V$ - лин. оператор, λ - с.з. л.о. $\mathcal{A}$. Тогда мн-во $V_\lambda = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda x\}$ наз. собственным подпространством, отвечающим с.з. λ.

Замечание: V_λ является лин. подпространством в V (состоящим из с.в., отвеч. с.з., и нулевого вектора).

□ $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$

$\Rightarrow V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda I)$ ← л.о. с матрицей $(A-\lambda E)$

$Ker\, B$ $\forall$ л.о. B явл. подпространством в V (провер. замкн.) ■

Опр: Размерность собств. подпространства V_λ наз. геометрической кратностью с.з. λ.

Обознач: S_i – геом. кр-сть с.з. λ_i.

Замечание: Геом. кр. с.з. λ всегда ≥ 1. $(S_i \geq 1)$.

Теорема (б/д): Геом. кр-ть с.з. λ_i всегда $\leq$ его алгебр. кр. $(S_i \leq m_i)$.

Опр: Следом матрицы $A \in M_n(F)$ наз. сумма её диаг. эл-тов:

$tr A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Утв: $\forall A, B \in M_n(F)$ $\quad tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$.

Утв: Пусть $\mathcal{A}$ – л.о. в л.п. V.

Пусть A_e – м-ца л.о. $\mathcal{A}$ в базисе e.

Тогда $tr A_e$ не зависит от выбора базиса.

□ $A_{e'} = T^{-1} \cdot A_e \cdot T$, где $A_{e'}$ – матрица л.о. $\mathcal{A}$ в базисе e'.

$\Rightarrow tr A_{e'} = tr((T^{-1} A_e)\cdot T) \overset{\text{по пред. утв.}}{=} tr(T\cdot(T^{-1} A_e)) = tr A_e$ ■

Итого: $rg A$, $det A$, $tr A$, $\chi_A(\lambda)$ – инварианты л.о. при замене базиса.

Замечание: $A \in M_n(F)$. $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot \underbrace{tr A}_{\text{коэф. при } \lambda^{n-1} \text{ с точн. до знака}} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \underbrace{det A}_{\text{своб. член}}$

Критерий диагонализируемости л.о.

Утв: Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – с.з. л.о. $\mathcal{A}$, и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.
Пусть $v_1, \dots, v_k$ – соответств. с.в. Тогда $v_1, \dots, v_k$ – линейно независимы.
(т.е. с.в., отвечающие различным с.з., л.н.з.)

□ Мат. индукция:

При $k = 1$ – утв. верно, т.к. с.в. по опр. $\neq 0$ и соотв. образует л.н.з. систему.

Пусть утв. верно при $k = m$.

Добавим ещё 1 с.в. v_{m+1}, отвеч. с.з. λ_{m+1}.

Докажем, что система $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ остаётся л.н.з.

Рассмотрим равенство:

(1) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$.

Применим к (1) л.о. $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ по линейности

$\alpha_1 \mathcal{A}(v_1) + \dots + \alpha_m \mathcal{A}(v_m) + \alpha_{m+1} \mathcal{A}(v_{m+1}) = 0$.

Вспомним, что v_i – с.в. для с.з. λ_i:

(2) $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0$.

Умножим (1) на λ_{m+1} и вычтем из (2):

$\alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) v_1 + \dots + \alpha_m \cdot (\lambda_m - \lambda_{m+1}) v_m = 0$

По предп. инд. $v_1, \dots, v_m$ л.н.з. $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \underset{\text{т.к. все } \lambda_i \text{ различн.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases}$

Теперь (1) можно записать в виде $0 + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$, но $v_{m+1} \neq 0$ (т.к. с.в.)

$\Rightarrow \alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$ по опр. система $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ л.н.з. ∎

Утв: (Критерий диагональности матрицы):

Матрица л.о. $\mathcal{A}$ явл. диагональной в данном базисе $\Leftrightarrow$ все векторы этого базиса явл. с.в. для л.о. $\mathcal{A}$.

□ <u>Необх</u>: Дано: A_e – диагональна

Док-ть: e состоит из с.в. л.о. $\mathcal{A}$

По определению матрицы л.о. в j-м столбце стоят координаты вектора $\mathcal{A}(e_j)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Если A_e – диагональна, то j-й столбец имеет вид $(0, \dots, 0, \lambda_j, 0, \dots, 0)$

$\Rightarrow \mathcal{A}(e_j) = 0 + \dots + 0 + \lambda_j \cdot e_j + 0 + \dots + 0$.

Т.е. $\mathcal{A}(e_j) = \lambda_j e_j$, $e_j \neq 0 \Rightarrow$ по опр. e_j – с.в., отв. с.з. λ_j

(на диагонали матрицы A_e – с.з.).

<u>Достат</u>: Дано: базис $e_1, \dots, e_n$, состоящ. из с.в.

Док-ть: A_e – диагональна.

$\mathcal{A}(e_j) = \lambda_j e_j \quad \forall j = \overline{1, n} \Rightarrow$ по опр. матрицы л.о. все элементы, кроме диагональных, равны нулю в каждом столбце (на диагонали с.з. λ_j) ∎

Опр: Линейный оператор, для которого в л.п. V $\exists$ет базис из собственных векторов, наз. <u>диагонализируемым</u>.

Теорема: (Критерий диагонализируемости л.о.) (б/д.)

Л.о. диагонализируем $\Leftrightarrow$ $\forall$ его с.з. λ_i алг. кратность равна геом. кратности ($m_i = s_i$).

Теорема: Если хар. уравнение л.о., действующего в пространстве V, где $\dim V = n$, имеет равно n попарно различных корней, то оператор диагонализируем. (корни лежат в поле, над которым рассм. л.п. V).

$\square$ Если с.з. $\lambda_i \in F$, то ему можно сопоставить хотя бы 1 с.в. v_i. Система $v_1, \dots, v_n$ – л.н.з., т.к. по усл. $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, их число равно $\dim V$ $\Rightarrow$ они образуют базис в V из с.в.

$\Rightarrow$ л.о. диагонализируем. $\blacksquare$