Лекция 3, 22.09.23

Опр: Последовательностью $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ наз. набор индексированних чисел.

Опр: Число a наз. пределом послед. $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

$$a\ \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$a_n \in (a - \varepsilon ; a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a)$$

Опр: Последовательность наз. сходящейся, если у неё есть предел

$$\exists A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \; a_n \in U_\varepsilon(A)$$

Св-ва:

1) $\forall$ сходящаяся послед. ограничена

т.е. $\exists C \quad \forall n \quad |a_n| < C$

Док-во:

$$\exists A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$: $\forall n > N(1) \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$

$$C = \max\{|A - \varepsilon|; |A + \varepsilon|; |a_1|; |a_2|, \ldots, |a_{N(1)}|\} + 1$$

$\forall n \quad |a_n| < C$

2) У сходящейся послед. может быть только 1 предел

Док-во: Пп $\exists$ хотя бы 2 предела

$A \neq B$ $\quad A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ \forall n > N_1(\varepsilon) \quad a_n \in U_\varepsilon(A)$

$B = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ \forall n > N_2(\varepsilon) \quad a_n \in U_\varepsilon(B)$

Выберем $\varepsilon_0 = \frac{|A-B|}{3} \quad U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B) = \varnothing$

$\forall n > N_1(\varepsilon) \qquad a_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$

$\forall n > N_2(\varepsilon) \qquad a_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$

$n_0 = N_1(\varepsilon_0) + N_2(\varepsilon_0)$

$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \varnothing$ W

Арифметика пределов

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \iff a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то

1) $a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \pm B$

2) $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \cdot B$

3) + $B \neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{A}{B}$

4) $\sqrt{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{A}$

Док-во 1:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ \forall n > N_1(\varepsilon) \quad |a_n - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ \forall n > N_2(\varepsilon) \quad |b_n - B| < \varepsilon$

Нужно: $\forall \varepsilon>0 \ \exists N_3(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ \forall n > N_3(\varepsilon) \quad |(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon$

$$|(a_n - A) + (b_n - B)| < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$\underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{2\varepsilon}{3}} + \underbrace{|b_n - B|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$$\forall n > N_1\left(\tfrac{2\varepsilon}{3}\right) \quad \forall n > N_2\left(\tfrac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$\forall n > \underbrace{\max\left\{N_1\left(\tfrac{2\varepsilon}{3}\right); N_2\left(\tfrac{\varepsilon}{3}\right)\right\}}_{N_3(\varepsilon)}$$

Теория бесконечно больших (б.б.) и бесконечно малых (б.м.)

Опр: Послед. $\{a_n\}$ наз. б.б. $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если

$$\forall M > 0 \quad \exists N(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(M) \quad |a_n| > M$$

Пример: $a_n = 2^n$ б.б.

$$\forall M > 0 \quad \exists N(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(M) \quad 2^n > M$$

$$2^n = (1+1)^n > M$$

$$\Uparrow$$

$$1 + 1 \cdot n > M$$

$$n > M - 1$$

$$N(M) = [M-1] + 2$$

Опр: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = {+\infty \atop -\infty}$, если

$$\forall M > 0 \quad \exists N(M) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(M): \quad a_n > M$$

$$a_n < -M$$

Опр: Послед. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ наз. б.м., если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad |a_n| < \varepsilon$$

$$\{a_n\} - \text{б.м.} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Св-ва б.м. и б.б.:

1) $\frac{1}{б.б.} = б.м.$ $\qquad \frac{1}{б.м.} = б.б.$

Док-во: a_n – б.б.

$\forall M>0 \ \exists N_1(M) \ \forall n > N_1(M): |a_n| > M$

Нужно $b_n = \frac{1}{a_n}$ – б.м., т.е.

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_2(\varepsilon) \ \forall n > N_2(\varepsilon) \ |b_n| < \varepsilon$

$N_2(\varepsilon) = N_1(\frac{1}{\varepsilon})$

$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$

$|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall n > N_1(\frac{1}{\varepsilon})$

2) б.м. · огр. = б.м.

3) б.б. / огр = б.б.

4) б.м. + б.б. = б.б.

5) б.м. · б.б. – ?

6) $\frac{1}{огр}$ = „отделённая от нуля"

Утв: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \iff a_n - A = б.м. \iff a_n = б.м. + A$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ $\qquad \forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

$\forall n > N(\varepsilon): |a_n - A| < \varepsilon$ $\qquad \forall n > N(\varepsilon): |a_n - A| < \varepsilon$

Док-во 1 св-ва:

$a_n \to A \iff a_n - A = \alpha_n$ – б.м.

$\Rightarrow a_n + b_n \to A + B$

$b_n \to B \iff b_n - B = \beta_n$ – б.м.

$A + B = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

$a_n + b_n = (\alpha_n + A) + (\beta_n + B) = \underbrace{A+B}_{const} + \underbrace{\alpha_n + \beta_n}_{б_м}$

Док-во: 2) $a_n = \alpha_n + A \quad b_n = \beta_n + B$

$$a_n \cdot b_n = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) = \underbrace{\underbrace{\alpha_n \cdot \beta_n}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\alpha_n \cdot B}_{\text{б.м.}} + \underbrace{\beta_n \cdot A}_{\text{б.м.}}}_{\text{б.м.}} + \underbrace{A \cdot B}_{\text{число}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = A \cdot B$$

3) $$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha_n + A}{\beta_n + B} - \frac{A}{B} = \frac{\overbrace{\alpha_n \cdot B}^{\text{б.м.}} + A \cdot B - \overbrace{A\beta_n}^{\text{б.м.}} - A \cdot B}{B \cdot (\beta_n + B)} = \frac{\alpha_n \cdot B - A \cdot \beta_n}{B(\beta_n + B)} = \text{б.м.} \cdot \frac{1}{B + \beta_n}$$

Опр: Послед. $\{a_n\}$ наз. отделённой от нуля, если

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \quad |a_n| > \varepsilon_0$$

$$\varepsilon = \frac{|B|}{2}$$