

Предел функции

1. Доказать по Коши и по Гейне сходимости

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25, \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{7}{3}.$$

2. Показать по Коши и по Гейне, что у функции $y = \sin \frac{\pi}{x}$ нет предела в нуле.

3. Найти пределы функций, используя арифметику предела функции и теорему о пределе сложной функции

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x - 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2 - x}{x^2}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 8} - 2}{\sqrt{1 + 2x} - 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}, \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}, \quad h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x}$$

1. Вычислить пределы, используя результаты семинара 7

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}, \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{3n-2},$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{4n^2+1}, \quad d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$$

2. Доказать по Коши и по Гейне сходимости

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3, \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = -1.$$

3. Найти пределы функций, используя арифметику предела функции и теорему о пределе сложной функции

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}, \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы, используя результаты семинара 7

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n}, \quad b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n} \right)^{2n-7},$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{5n+1} \right)^n, \quad d) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2+1} \right)^n$$

2. Найти пределы функций, используя арифметику предела функции и теорему о пределе сложной функции

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}, \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x - x^2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right), \quad d) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2} - \sqrt{1+x+x^2}}{2x - x^2}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{9+x} + x + 7}{\sqrt[3]{15+2x} + 1}, \quad f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right),$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} + 2x \right) - 1}{\sin x}, \quad h) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} \cos x - 1},$$