# Сопряжённое (двойственное) пр-во

<u>Опр:</u> Отображение $f: V \to \mathbb{F}$

$V$ — лин. пр-во; $\mathbb{F}$ — поле, над кот. зад. $V$

наз-ся <u>линейной формой</u> (<u>функционалом</u>), если

1) $f(x+y) = f(x) + f(y) \ \forall x, y \in V$

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \ \forall \alpha \in F, \forall x \in V$

<u>Зам:</u> Это частный лин. отобр-я при $V_2 = \mathbb{F}$

Пусть в $V$ фикс. базис $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$.

Тогда м-цей лин. отобр-я $f$ будет м-ца $1 \times n$ — м-ца строка.

$$[f]_e = (f(e_1), \dots, f(e_n))_{1\times n}$$

Тогда действие $f$ в базисе $\mathbb{e}$ можно записать как:

$$f(x) = [f]_e x_e = (f(e_1), \dots, f(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = f(x).$$

Что происходит при замене базиса?

<u>Утв</u> Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ - 2 базиса в $V$

Тогда $\boxed{[f]_b = [f]_a \cdot T_{a \to b}.}$

строка в нов. б-се.

(иногда выраж-е транспонируют,

тогда $\begin{pmatrix} f(b_1) \\ \vdots \\ f(b_n) \end{pmatrix} = \boxed{[f]_b^T = T_{a\to b}^T \cdot [f]_a^T}$ )

$\square$ $f(x) = [f]_a X_a = [f]_b X_b.$

$X_b = T_{a\to b}^{-1} \cdot X_a \Leftrightarrow X_a = T_{a\to b} \cdot X_b.$

$[f]_b X_b = [f]_a \cdot T_{a\to b} \cdot X_b. \Rightarrow$

$[f]_b = [f]_a T_{a\to b}$ (III)

**Опр:** Пр-вом, сопряжённым к лин. пр-ву $V$ наз-ся мн-во всех линейных форм на пр-ве $V$, со след. операциями:

1) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $\forall x \in V$

2) $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ $\forall \alpha \in F, \forall x \in V$

**Обозн:** $V^* = Hom(V, F)$

гомоморфизмы.

**Зам:** Т.к. коор-ты лин. форм записывают в строки и преобразуют с помощью $T_{a\to b}$ (а не $T^{-1}_{a\to b}$):

$[f]_b = [f]_a T_{a\to b}$ (хотя $x_b = T^{-1}_{a\to b} x_b$), их называют ковекторами, а „обычные“ в-ры — контрвекторами.

$[f]_b^T = T^T_{a\to b} [f]_a^T$

Когда ков-ры и в-ры преобр-ся одинаково?

**Зам:** Когда м-ца перехода $U_{a\to b}$ ортогональна (т.е. удовл. усл. $U^T_{a\to b} = U^{-1}_{a\to b}$), в частности, если это м-ца перех. от одного ОНБ к другому.

Опр: Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ в $V$ и базис $f = (f^1, \ldots, f^n)$ в сопр. пр-ве $V^*$ называю взаимными, если $f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Утв: Пусть $\dim V = n < \infty$. Тогда $\forall$ базиса в $V$ $\exists!$ взаимный базис в $V^*$ (и наоборот).

□ Пусть $e=(e_1,\dots,e_n)$ нек. базис в $V$. Пусть $S$ — нек. стандартный (канонич.) базис в $V$. Запишем м-цу перехода.

$$T_{S\to e}=([e_1]_S,\dots,[e_n]_S).$$

стб-цы коор-т в б-се $S$.

Для произв. б-са $f=(f^1,\dots,f^n)$ в $V^*$ тоже состав-им м-цу.

$$F=\begin{pmatrix}[f^1]_S\\ \vdots\\ [f^n]_S\end{pmatrix}.$$

Условие взаимности б-сов $e$ и $f$ запишется в виде:

$$F\cdot T=E\Rightarrow F=T^{-1}$$

всегда $\exists$ для м-цы перех. и единственен

$\Rightarrow$ Взаимный базис $\exists!$ ■

Пр: $V=\mathbb{R}^2$, $[e_1]_S=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ м-ца перехода

$$T_{S\to e}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow F\cdot T=E\Rightarrow \underline{F=T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}}$$

$[f^1]_S=(1,0)$, $[f^2]_S=(1,1)$.

$\underline{f^1(x)=x_1}$, $\underline{f^2(x)=x_1+x_2}$.

Утв: $\forall$ евкл. пр-во изоморфно своему сопряженному $(\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^*)$.

$\square$. Построим этот изоморфизм.

$$a \in \mathcal{E} \xmapsto{\varphi} f_a(x) = (a, x) \in \mathcal{E}^*$$

Покажем, что $\varphi$ — гом-зм лин. пр-в.

$$\varphi(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2, x) = (a_1, x) + (a_2, x) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

$$\varphi(\lambda a) = (\lambda \cdot a, x) = \lambda (a, x) = \lambda \cdot \varphi(a) \Rightarrow \text{гом-зм.}$$

Оно сюръективно, т.к. $\forall$ лин.

ф-ция вида $a_1 x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n$

м.б. записана в кан. ОНБ как

$(a, x)$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ - прообр.

И оно инъективно $\Rightarrow$ это

изоморфизм $\blacksquare$