Абсолютная и условная сходимость рядов

1. Доказать абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$a)\ a_n = \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}, \qquad b)\ a_n = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n},$$

$$c)\ a_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2. Доказать сходимость знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Что с абсолютной сходимостью?

$$a)\ a_n = (-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}, \qquad b)\ a_n = (-1)^{n-1}\frac{\sin^2(n/2)}{\sqrt[5]{n+1}}.$$

3. Показать, что ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots,$$

полученный из сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ перестановкой его членов, расходится.

4. Доказать формулы

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha = \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\alpha}{2}\right]\sin\left[n\frac{\alpha}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]}, \quad \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\cos\left[(n+1)\frac{\alpha}{2}\right]\sin\left[n\frac{\alpha}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]}$$

и их помощью доказать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\sin n\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n\alpha,\ \alpha\neq 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$$

для любой монотонно стремящейся к нулю последовательности $\{a_n\}$.

5. Исследовать сходимость рядов (в случае знакопеременных условную и абсолютную)

$$a)\ a_n = \frac{\sin^2(n/2)}{\sqrt[5]{n+1}}, \qquad b)\ a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right), \qquad c)\ a_n = \frac{\cos n}{n}.$$

Домашнее задание

1. Доказать по индукции равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Используя его и результат:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\gamma+\ln n+o(1)$$

доказать, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

2. Доказать или опровергнуть

(a) Пусть $a_n>0$ и $\lim a_n=0$. Следует ли отсюда, что знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n+1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится?

(b) Пусть ряд $\sum\limits_{n+1}^{+\infty}a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum\limits_{n+1}^{+\infty}b_n$ тоже сходится?

3. Доказать абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$

$$a)\ a_n=\frac{\cos(\pi n/4)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}},\qquad b)\ a_n=\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$

$$a)\ a_n=\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{\sqrt{n}},\qquad b)\ a_n=\frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}},$$

$$c)\ a_n=\frac{\cos^3 2n}{\ln(n+1)},\qquad d)\ a_n=\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Том 2, гл.4, §15

1. Доказать абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$a)(1.6) \quad a_n = \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2}, \qquad b)(1.8) \quad a_n = n^3 \cdot \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}},$$

$$c)(2.1) \quad a_n = \frac{(-n)^n}{(2n)!}.$$

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$a)\ (3.5) \quad a_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin\frac{1}{n}, \qquad b)\ (3.6) \quad a_n = (-1)^n \left(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right),$$

$$c)\ (3.8) \quad a_n = (-1)^n \frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}} \qquad d)\ (4.3) \quad a_n = \frac{\cos(n+\pi/4)}{\ln^2(n+1)},$$

$$e)\ (4.4) \quad a_n = (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}} \qquad f)\ (6.6) \quad a_n = \frac{\cos n \cdot \cos(1/n)}{\sqrt[4]{n}}.$$