Homework 22

#3.

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left|\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right|}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\underbrace{\ln^3(n+3)}_{\sim (n+2)^3}}} \sim$$

$$\sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$$ – сходится.

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3}}}_{\sim n^{-\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\sim \frac{1}{n}} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$ – сход.

#4

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|(-1)^{n-1} \ln n|}{\sqrt{n}} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{4}}$ – расходится

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n\sqrt[4]{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$ – расходится.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos^3(2n)}{\ln(n+1)}$

$\cos^3(2n)$ огр. 1; $\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ – монотонно убывает, т.к.

$\left(\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)' = \dfrac{-1}{(n+1)\ln^2(n+1)} < 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dots$ – сходится

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} - 1} \sim \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – расходится

#2.

(a) $a_n > 0 \wedge \lim a_n = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$

Не верно, т.к. по интегральному признаку сходимости необходимо, чтобы a_n монотонно сходилось к 0. ①

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится $\wedge \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \overset{?}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится также. ч.т.д.

#1.

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \overset{?}{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

Мат. индукция:

База: $n=1$: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ☑

Пусть выполнено при $n=k$.

Шаг: при $n=k+1$:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{2}{2(k+1)} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$ ч.т.д.

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \bar{o}(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \gamma + \ln(2n) + \bar{o}(1)$

$$\underbrace{(\gamma + \ln(2n) + \bar{o}(1)) - (\gamma + \ln n + \bar{o}(1))}_{\ln(2)} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}} \Rightarrow$$

$$\ln 2 = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

q.t.g.