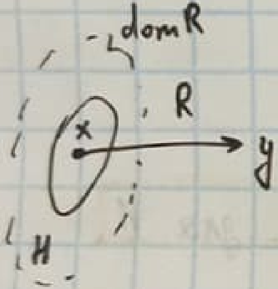
Лекция 14, 15.12.23

Опр: (3) R тотально для $H \iff \forall x \in H \ \exists y \ \ xRy$

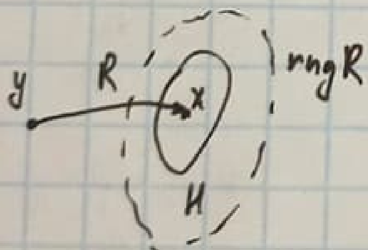


$\iff H \subseteq \operatorname{dom} R$

| $\forall R$ R тот. для $\operatorname{dom} R$

(4) R сюръективно для $H \iff \forall x \in H \ \exists y \ \ yRx$

$\iff H \subseteq \operatorname{rng} R$



3) R тот. для $H \iff R^{-1}$ сюръект. для H

4) R сюр. для $H \iff R^{-1}$ тот. для H.

Терминология:

Пусть $R \subseteq A \times B$, тогда "R тот." $\iff$ R тот. для A

"R сюр." $\iff$ R сюр. для B.

Лемма 1: (1) P, Q функц. $\Rightarrow$ $Q \circ P$ функц.

Док-во: дано: $\forall x, y, z\ (xPy \wedge xPz \Rightarrow y = z)$ | хотим: $b = c$

$\forall x, y, z\ (xQy \wedge xQz \Rightarrow y = z)$

$a,\ a(Q \circ P)b,\ a(Q \circ P)c$

$\exists u\ (\underbrace{aPu}_{\substack{P \text{ функц.} \\ u = w}} \wedge uQb) \wedge \exists w\ (aPw \wedge \underset{u}{\overset{\shortparallel}{w}}Pb)$ | Тогда $\exists u\ (\underbrace{uQb \wedge uQc}_{\Downarrow\ Q \text{ функц.}})$

$b = c$

(2) P, Q инъект. $\Rightarrow$ $Q \circ P$ инъект

Док-во: дано: P, Q инъект | хотим: $Q \circ P$ инъект

$\Downarrow$

P^{-1}, Q^{-1} функц. $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $P^{-1} \circ Q^{-1}$ функц.

$\shortparallel$

$\Rightarrow (Q \circ P)^{-1}$ функц.

$\Rightarrow Q \circ P$ инъект.

(3) P тот. для H, Q тот. для $P(H)$ $\Rightarrow$ $Q \circ P$ тот. для H

Док-во: $\forall x \in H\ \exists y\ xPy$

$\forall u \in P[H]\ \exists w\ uQw$

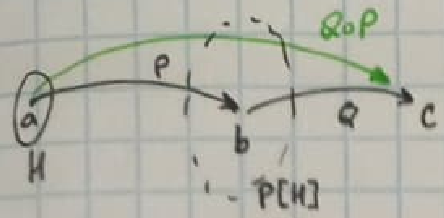
Пусть $a \in H$; хочу $\exists c\ a(Q \circ P)c$

$a \in H \Rightarrow \exists b\ (aPb \wedge b \in P[H])$

$\Rightarrow \exists b\ (aPb \wedge \exists c\ (bQc))$

$\Rightarrow \exists c\ \exists b\ (aPb \wedge bQc)$

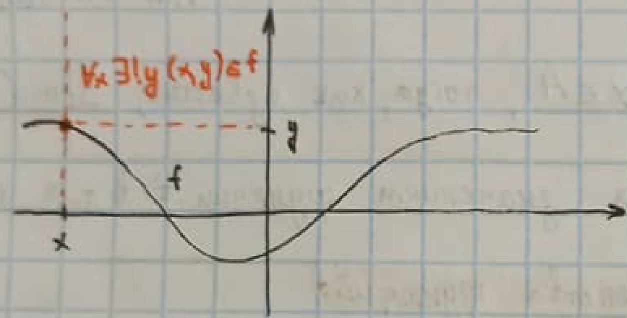
$\Rightarrow \exists c\ ((a, c) \in Q \circ P)$



(4) Q сюр. для H и P сюр. для $Q^{-1}[H]$ $\Rightarrow$ $Q \circ P$ сюр. для H

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Опр: f – это функция из A в B $\Longleftrightarrow$ (0) $f \subseteq A \times B$

(1) f функционально

(2) f тот. для A

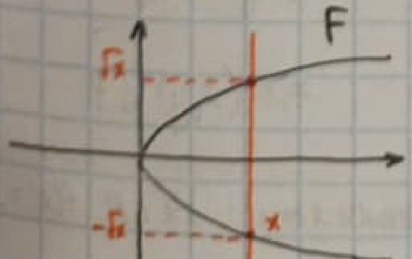
Обозначение: $f : A \to B$

Следствие: Если $f : A \to B$, то

(1) $\mathrm{dom}\, f = A$

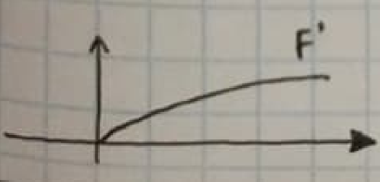
(2) $\mathrm{rng}\, f \subseteq B$

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x\}$



- F тот. для $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- F не функц.: $(4, 2) \in F$, $(4, -2) \in F$, но $2 \neq -2$

$F' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x \wedge y \geq 0\}$



$F' : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

$F' : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\sin : \mathbb{R} \to [-4; 4]$

$\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$

"Функция n аргументов" $f: A_1 \times \ldots \times A_n \to B$

"последовательность вещ. чисел" $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~ функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
т.ч. $\forall n\ f(n) = a_n$

Пусть $f: A \to B$ и $x \in A$, тогда, как известно, $\exists! y\ (x,y) \in f$

Опр: этот y называется значением функции f в т. x; пишем $y = f(x)$.

Теорема 3 (критерий равенства функций)

Пусть $f: A \to B$ и $g: C \to D$

Тогда $f = g \iff (A = C \wedge \forall x \in A\ (f(x) = g(x))$

Док-во: $(\Rightarrow)$ $f = g \Rightarrow \underset{A}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{dom} f}} = \underset{C}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{dom} g}}$

$\forall x \in A\ \overset{\text{принцип замены}}{(f(x) = g(x))}$

$(\Leftarrow)$ дано: $A = C$

$\forall x \in A\ (f(x) = g(x))$

$g \subseteq f$ $(x,y) \in g \Rightarrow y = g(x) \wedge x \in C = A$

$\Rightarrow y = g(x) \wedge x \in A$

$\Rightarrow y = f(x)$

$\Rightarrow (x,y) \in f$

Следствие: функции можно задавать уравнениями: $\forall x \in A\ f(x) = \ldots$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Теорема 4 (Композиция функций):

Пусть $f: A \to B$ и $g: B \to C$, тогда

(1) $(g \circ f): A \to C$

(2) $\forall x \in A \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Док-во: (1) $g \circ f \subseteq \underbrace{\mathrm{dom}\, f}_{=A} \times \underbrace{\mathrm{rng}\, g}_{\subseteq C} \subseteq A \times C$

f, g функциональны $\overset{\Longrightarrow}{\wedge 1}$ $g \circ f$ функц.

f тот. для A

g тот. для $B \iff B \subseteq \mathrm{dom}\, g \Rightarrow f[A] \subseteq \mathrm{dom}\, g$

$\mathrm{rng}\, f = f[A] \subseteq B \Rightarrow g$ тот. для $f[A]$

$\underset{A}{g \circ f}: A \to C$

$\wedge 1$: $g \circ f$ тот. для A

(2) $z = (g \circ f)(x) \iff (x, z) \in g \circ f$

$\iff \exists y \, (x f y \wedge y g z)$

$\iff \exists y \, (y = f(x) \wedge z = g(y))$

$\overset{y := f(x)}{\Longrightarrow} z = g(f(x))$ ч.т.д.

$f \in P(A \times B)$

Опр: $B^A = \{ f \in P(A \times B) \mid f: A \to B \}$