Лекция 13, 08.12.23

Лемма 0:

(1) $(P^{-1})^{-1} = P$

(2) $(P \cup Q)^{-1} = P^{-1} \cup Q^{-1}$

(3) $(\overline{P})^{-1} = \overline{P^{-1}}$

$P \subseteq A \times B$

$\overline{P} = (A \times B) \setminus P$

$P^{-1} \subseteq B \times A$

$\overline{P^{-1}} = (B \times A) \setminus P^{-1}$

Док-во: (1) $(x, y) \in \underline{\underline{(P^{-1})^{-1}}} \Leftrightarrow (y, x) \in P^{-1}$

$\Leftrightarrow (x, y) \underline{\underline{\in P}}$

(2) $(x, y) \in (P \cup Q)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P \cup Q$

$\Leftrightarrow yPx \vee yQx$

$\Leftrightarrow xP^{-1}y \vee xQ^{-1}y$

$\Leftrightarrow (x, y) \in P^{-1} \cup Q^{-1}$

(3) $\forall (x, y) \in B \times A$

$(x, y) \in (\overline{P})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \overline{P}$

$\Leftrightarrow (y, x) \notin P$

$\Leftrightarrow (x, y) \notin P^{-1}$

$\Leftrightarrow (x, y) \in \overline{P^{-1}}$

$\| \; id_A^{-1} = id_A$

Ещё примеры:

- предикат "x меньше, чем y" на $\mathbb{N}$

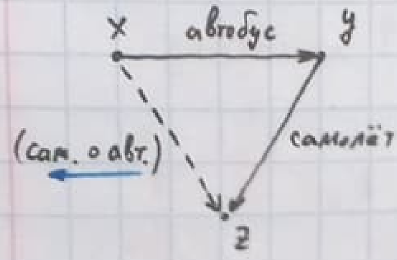
$< \; = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x$ меньше чем $y\}$

$(2, 3) \in \; <$

$(2, 2) \notin \; <$

$<^{-1} \; = \; > \quad | \quad \overline{<} \; = \; \not>$

$(x, y) \in \; <^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \; < \; \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow x > y \Leftrightarrow (x, y) \in \; >$



Опр: $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq C \times D$

Тогда композиция P и Q $Q \circ P = \{(x,z) \in \mathrm{dom}P \times \mathrm{rng}Q \mid \exists y(xPy \wedge yQz)\}$

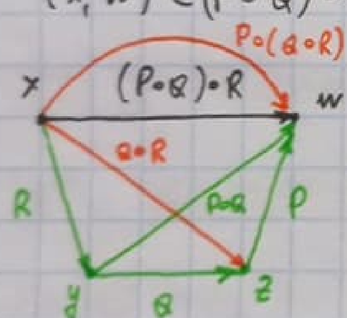
Утв: $\forall P\ \forall Q\ \forall x\ \forall z$

$$(x,z) \in Q \circ P \iff \exists y(xPy \wedge yQz)$$

Теорема 1 (ассоциативность композиции)

$$\forall P, Q, R \quad (P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$

$$(x,w) \in (P \circ Q) \circ R \iff \exists y(xRy \wedge y(P \circ Q)w)$$



$$\iff \exists y(xRy \wedge \exists z(yQz \wedge zPw))$$

$$\iff \exists z \exists y((xRy \wedge (yQz) \wedge zPw))$$

$$\iff \exists z(\exists y(xRy \wedge yQz) \wedge zPw)$$

$$\iff \exists z(x(Q \circ R)z \wedge zPw)$$

$$\iff (x,w) \in P \circ (Q \circ R)$$

Лемма 2: $(Q \circ P)^{-1} = P^{-1} \circ Q^{-1}$

Док-во: $(x,y) \in (Q \circ P)^{-1} \iff (y,x) \in Q \circ P$

$$\iff \exists z(yPz \wedge zQx)$$

$$\iff \exists z(zP^{-1}y \wedge xQ^{-1}z)$$

$$\iff \exists z(xQ^{-1}z \wedge zP^{-1}y) \iff (x,y) \in P^{-1} \circ Q^{-1}$$

Лемма 3: Если $P \subseteq A \times B$, то $P \circ id_A = P$ и $id_B \circ P = P$

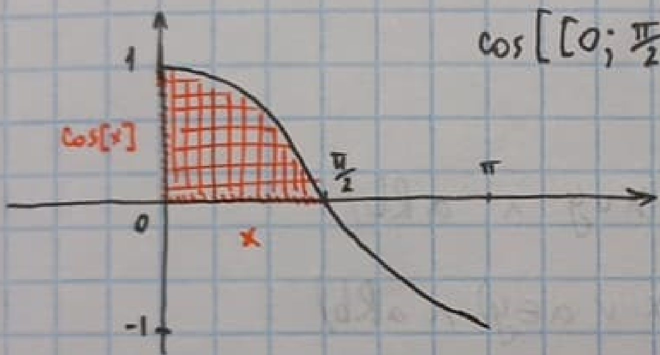
|| $B, A \subseteq A \cup B$ $\quad P \subseteq A \times B \Rightarrow P \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$

Док-во: $(x, y) \in A \times B$

$$(x, y) \in id_B \circ P \Leftrightarrow \exists z\, (x P z \wedge z (id_B) y)$$

$$\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists z\, (\underline{x P z}^{\, z \in B} \wedge z = y)$$

$$\overset{\Leftarrow \; z := y}{\Rightarrow} \underline{x P y}$$



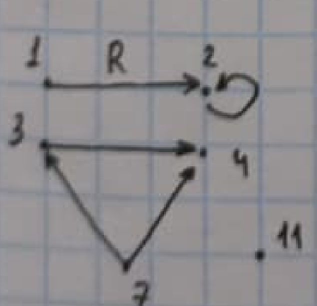
$$\cos[[0; \tfrac{\pi}{2}]] = [0; 1] \subseteq \operatorname{rng} \cos = [-1; 1]$$

Опр: Пусть $R \subseteq A \times B$ и X множество

Тогда $R[X] = \{ b \in \operatorname{rng} R \mid \exists a\, (a \in X \wedge a R b) \}$

образ X под действием R

$R = \{ (1,2), (2,2), (3,4), (7,3), (7,4) \}$ $\qquad X = \{1, 2, 7, 11\}$



$R[X] = \{2, 3, 4\}$

Опр: Прообраз X под действием $R \overset{\text{опр.}}{\equiv}$ образ X под действием R^{-1}

Обознач: $R^{-1}[X]$

Утв: (1) $b \in R[X] \iff \exists a (a \in X \wedge aRb)$ $\quad \forall a, b$

(2) $a \in R^{-1}[X] \iff \exists b (b \in X \wedge aRb)$

Док-во (2): $a \in R^{-1}[X] \overset{(1)}{\iff} \exists b (b \in X \wedge bR^{-1}a)$

$\iff \exists b (b \in X \wedge aRb)$

Пример: $R^{-1} = \{(2,1), (2,2), (4,3), (7,7), (4,7)\}$

$R^{-1}[X] = \{1, 2\}$

Лемма 4: $\forall R \quad \forall X, Y$

$R[X \cup Y] = R[X] \cup R[Y]$

Док-во: $b \in R[X \cup Y] \iff \exists a (a \in X \cup Y \wedge aRb)$

$\iff \exists a ((a \in X \vee a \in Y) \wedge aRb)$

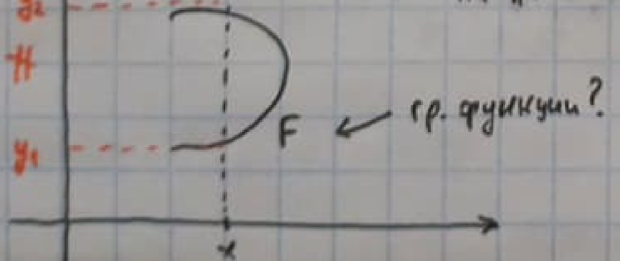
$\iff \exists a ((a \in X \wedge aRb) \vee (a \in Y \wedge aRb))$

$\iff \exists a (a \in X \wedge aRb) \vee \exists a (a \in Y \wedge aRb)$

$\iff b \in R[X] \vee b \in R[Y]$

$\iff b \in R[X] \cup R[Y]$

$F \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



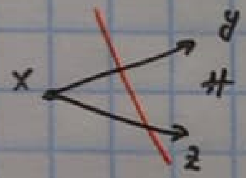
$(x, y_1) \in F \wedge (x, y_2) \in F$, но $y_1 \neq y_2$

! F не функционально

Опр: Пусть $R \subseteq A \times B$

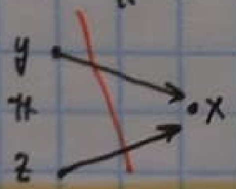
(1) R функционально $\iff \forall x \forall y \forall z \, (xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)$

нет „расщеплений"



(2) R инъективно $\iff \forall x \forall y \forall z \, (\overbrace{yRx}^{xR^{-1}y} \wedge \overbrace{zRx}^{xR^{-1}z} \Rightarrow y = z)$

нет „склеек"



Утв: 1) R инъект. $\iff R^{-1}$ функц.

2) R функц. $\iff R^{-1}$ инъект.