Лекция 31, 22.05.24

Утв (5е свойство м-цы Грама):

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – нек. векторы (необязат. базис). Тогда

векторы $a_1, \ldots, a_k$ л.н.з $\Longleftrightarrow \det \Gamma = Gr(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$.

□ Рассм. л/к $a_1, \ldots, a_k$ и приравняем к нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0 \qquad (1)$$

Умножим (1) скалярно последовательно на $a_1, \dots, a_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

Это СЛАУ вида: $\underbrace{\Gamma(a_1, \dots, a_k)}_{\text{м-ца Грама}} \cdot \alpha = 0$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Это ОСЛАУ с кв. м-цей.

По критерию $\exists$я ненул. решения:

$\exists$ нетрив. $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (т.е. они л/з) $\Leftrightarrow \det \Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0$. ■

Замечание: В V_3 если a_1, a_2, a_3 – л.н.з. столбцы координат в-ов в нек. ОНБ, то $\Gamma(a_1, a_2, a_3) \overset{\text{св-во (2)}}{=} A^T \cdot \underset{\text{м-ца Грама в ОНБ}}{E} \cdot A = A^T \cdot A$,

где $A = [a_1, a_2, a_3]$ ← м-ца по столбцам

(т.к. A – м-ца перехода от ОНБ к a)

Тогда $\det \Gamma(a_1, a_2, a_3) = (\det A)^2$.

Но $\det A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = V(a_1, a_2, a_3)$ – ориентир. объём параллелепипеда, построенного на a_1, a_2, a_3.

$$|V(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{Gr(a_1, a_2, a_3)}$$

Замечание: В n-мерном случае принимают

$$\underset{\text{объём n-мерного парал-да, построенного на в-ах } a_1, \dots, a_k}{V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)} = \sqrt{Gr(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)}$$

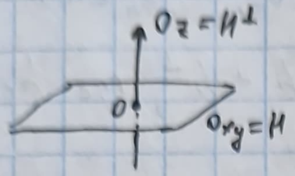
Ортогональное дополнение

Опр: Пусть H - подпр-во в евкл. пр-ве $\mathcal{E}$.

Мн-во $H^\perp = \{x \in \mathcal{E} \mid (x, y) = 0 \ \ \forall y \in H\}$ наз.

ортогональным дополнением к H.

Пример: V_3



Утв: $H^\perp$ явл. лин. подпр-вом в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$.

Следствие: $\dim \mathcal{E} = \dim H + \dim H^\perp$.

□ Для док-ва того, что $H^\perp$ - лин. подпр-во, достат. проверить замкн.

операции: $\forall x_1, x_2 \in H^\perp$ $\quad x_1 + x_2 \in H^\perp$, т.к. $\forall h \in H$

$(x_1 + x_2, h) = \underbrace{(x_1, h)}_{=0} + \underbrace{(x_2, h)}_{=0} = 0 + 0 = 0$

$\forall x \in H^\perp, \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha x \in H^\perp$, т.к. $\forall h \in H \ (\alpha x, h) = \alpha (x, h) = \alpha \cdot 0 = 0$.

$\Rightarrow H^\perp$ - подпр-во в $\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ можно $\measuredangle$ $H + H^\perp$ ← сумма подпр-в.

Проверим, что сумма $H + H^\perp$ - прямая. Пусть $x \in H \cap H^\perp$, тогда

$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (по св-ву ③ ск. пр-я)

$\Rightarrow H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow$ сумма прямая по опр.

Покажем, что $H \oplus H^\perp = \mathcal{E}$. Пусть $f_1, \dots, f_m$ - ОНБ в H ($\exists$ет по утв. о мет. Г-Ш)

Дополним его до базиса в $\mathcal{E}$ векторами $f_{m+1}, \dots, f_n$.

Применим процесс Грама-Шмидта $\Rightarrow \underbrace{f_1, \dots, f_m}_{\text{не изм., т.к. уже ОНБ}}, e_{m+1}, \dots, e_n$ - ортогон. базис $\mathcal{E}$.

Тогда $e_{m+1}, \dots, e_n$ по построению ортогон. каждому из $f_1, \dots, f_m$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow e_{m+1}, \dots, e_n$ ортогональны всему H, т.к. $H = L(f_1, \dots, f_m)$ ← лин. оболочка

$\Rightarrow e_{m+1}, \dots, e_n \in H^{\perp}$ по опр.

$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{E}$ можно представить в виде

$$x = \underbrace{x_1 f_1 + \dots + x_m f_m}_{h \in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \dots + x_n e_n}_{h^{\perp} \in H^{\perp} \text{ (т.к. } e_{m+1}, \dots, e_n \in H^{\perp})}.$$

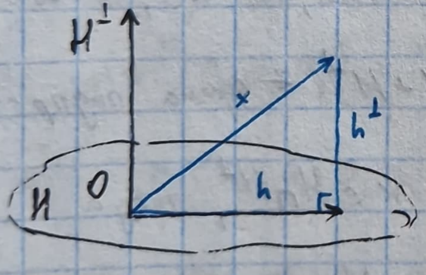
Т.е. $\forall x \in \mathcal{E}$ представим в виде $x = h + h^{\perp}$, где $h \in H$ и $h^{\perp} \in H^{\perp}$,

что и означает, что $\mathcal{E} = H \oplus H^{\perp}$ ■

Опр: Пусть $x = h + h^{\perp}$, где $h \in H$ и $h^{\perp} \in H^{\perp}$, тогда

h – ортогональная проекция x на H, а $h^{\perp}$ – ортогональная составляющая x относит. H.

Замечание: $\forall x \in \mathcal{E}$ разложение $x = h + h^{\perp}$ единственно для данного H, т.к. сумма $\mathcal{E} = H \oplus H^{\perp}$ – прямая.



Обознач: $h = \text{Пр}_H x$ – проекция

Утв: Пусть $H = L(a_1, \dots, a_k)$ и $a_1, \dots, a_k$ – л.н.з. (т.е. $a_1, \dots, a_k$ – базис в H)

Тогда $\forall x \in \mathcal{E}$. $\text{Пр}_H x = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{(A^T \cdot A)^{-1}} \cdot \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{x}$, где

$A = [a_1, \dots, a_k]$ – матрица $n \times k$, состоящая из столбцов $a_1, \dots, a_k$.

Замечание: $h^{\perp} = x - h = (E - A \cdot (A^T A)^{-1} A^T) \cdot x$.

□ По утв., док. выше, $\forall x \in \mathcal{E}$ $x = h + h^{\perp}$, при этом, т.к. $a_1, \dots, a_k$ – базис в H, то $x = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k}_{h \in H} + h^{\perp}$ (2)

т.е. если мы знаем коэф-ты $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, то мы знаем

$h = \Pi p_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$.

Рав-во (2) послед. скалярно умножим на $a_1, \dots, a_k$ $\Rightarrow$ получим СЛАУ на $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \vdots \\ \alpha_k(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases}$$

(в i-м ур-нии слаг. $(a_i, h^\perp) = 0 \quad \forall i = \overline{1,k}$, т.к. $h^\perp \in H^\perp$).

Перепишем в матр. виде (считаем, что все коорд. даны в ОНБ).

(3) $\Leftrightarrow$ $\underbrace{A^T \cdot A}_{\Gamma(a_1, \dots, a_k)} \cdot \alpha = A^T \cdot x$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

и $A = [a_1, \dots, a_k]_{n \times k}$

($\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A$, поскольку в ОНБ $(a_i, a_j) = a_i^T \cdot E \cdot a_j = a_i^T \cdot a_j$)

Таким образом, $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$ и эта матрица невырождена по св-ву ⑤ м-цы Грама, т.к. векторы $a_1, \dots, a_k$ – л.н.з. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ет $(A^T A)^{-1} = \Gamma^{-1}(a_1, \dots, a_k)$ $\Rightarrow$ $\underline{\alpha = (A^T A)^{-1} A^T \cdot x}$ (из (3))

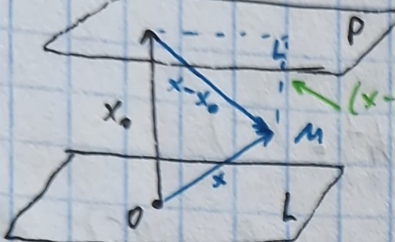
$\Rightarrow \Pi p_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = [a_1, \dots, a_k] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = A \cdot \alpha = A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot x$ ∎

Опр: Мн-во решений неоднородной СЛАУ $Ax = b$ наз. <u>линейным алгебраическим многообразием</u>.

Замечание: По теор. о структуре общего решения неодн. СЛАУ общее решение НСЛАУ (т.е. произв. эл-т лин. многообразия) = частн. реш. НСЛАУ + общ. реш. ОСЛАУ.

Это означает, что лин. многообразие $P = x_0 + L$, где $x_0 \in P$ – частн. реш. НСЛАУ, а L – мн-во реш. ОСЛАУ $Ax=0$, т.е. подпр-во, явл. лин. оболочкой ФСР.

Таким образом, L всегда содержит нулевой вектор, т.е. точку $\{0\}$ (начало координат), а x_0 – вектор сдвига, и $\forall$ многообразие P может быть получено (параллельным) сдвигом нек. подпр-ва L на вектор $x_0 \in P$.



$(x-x_0)^\perp$ и $\rho(M,P) = \|(x-x_0)^\perp\|$ – перпен. из т. M на P.

Опр: <u>Расстоянием</u> от точки M, заданной радиус-вектором x, до лин. многообразия P наз. $\rho(M,P) = \inf\limits_{u\in P} \rho(x,u) = \inf\limits_{u\in P} \|x-u\|$.

Заметим, что в конеч. евкл. пр-ве $\mathcal{E}$ inf всегда достигается (это min)

$$\rho(M,P) = \rho(x,P) = \min_{u\in P} \|x-u\|$$

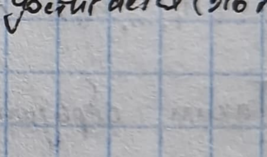
<u>Замечание:</u> $\rho(x,P)$ = длине ортогональной составляющей вектора $x-x_0$ относит. пр-ва L, где $P = x_0 + L$

Т.е. $\rho(x,P) = \|(x-x_0)^\perp\|$

□ Т.к. $\forall u \in P$ $\quad x-u = x-(x_0+l) = \Pi p_L(x-x_0-l) + (x-x_0-l)^\perp_L$, $l\in L$

$\Rightarrow l^\perp = 0 \Rightarrow x-u = \underbrace{\Pi p_L(x-x_0)-l}_{\in L} + \underbrace{(x-x_0)^\perp}_{\in L}$

↑ можно уменьшать, варьируя l



$\Rightarrow \forall u \in P \quad \|(x-x_0)^\perp\| \le \|x-u\|$ (катет ≤ гипотенуза)

$\Rightarrow$ При $l = \Pi p_L(x-x_0)$, т.е. $u = x_0 + \Pi p_L(x-x_0)$ достигается min

$\Rightarrow \rho(x,P) = \min\limits_{u\in P}\|x-u\| = \|x-x_0\|^\perp$ ■