ДЗ к семинару 17

Задача 1. Рассмотрим моноид $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ всех отображений $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Пусть отображения $f, g \in \mathbb{N}$ заданы правилами

$$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 3,\ \ldots$$

и

$$g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 4,\ \ldots.$$

Доказать, что f и g необратимы, но $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$ (то есть у f нет левого обратного, а у g – правого).

Указание. Вспомнить задачи про описание инъективных/сюръективных отображений в терминах наличия левого/правого обратного.

Задача 2. Привести пример группы G и элементов $g, h \in G$ таких, что:

1. $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(h) = \infty$, но $\mathrm{ord}(gh) < \infty$;
2. $\mathrm{ord}(g) = \infty$, $\mathrm{ord}(h) < \infty$ и $\mathrm{ord}(gh) = \infty$.

Задача 3. Пусть G – циклическая группа конечного порядка n, порождённая элементом $g \in G$. Найти порядок элемента g^k, где $0 < k < n$.

Задача 4. Доказать, что группа S_3 порождается двумя элементами (явно их предъявив), но не порождается одним.

Задача 5. Чему равен порядок группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$? Какой группе изоморфна эта группа?