Homework - 2c.

#17.

$$(a^{10}+b^{10}+c^{10}+d^{10}+e^{10}+f^{10}) \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow abcdef \overset{11^6}{\equiv} 0$$

Т.к. 11 - простое число, то по малой теореме Ферма:

1) если $11 \mid a$, то $a^{10} \overset{11}{\equiv} 0$

2) если $11 \nmid a$, то $a^{10} \overset{11}{\equiv} 1$

Аналогично, b, c, d, e, f. Тогда остаток при делении $(a^{10}+b^{10}+c^{10}+d^{10}+e^{10}+f^{10})$ на 11 будет принадлежать $[0; 6]$, т.к. все слагаемые дают остаток 1 или 0. По условию, число кратно 11 $\Rightarrow$ все слагаемые имеют остаток 0 $\Rightarrow a, b, c, d, e, f \vdots 11$

$\Rightarrow abcdef \overset{11^6}{\equiv} 0$

ч.т.д.

#18.

$19x + 22y = -21$

Найдём решение ур. $19x + 22y = 0$: $x = 22k$, $y = -19k$, $k \in \mathbb{Z}$

$(19, 22) \overset{1}{=} (19, 3) \overset{6}{=} (3, 1)$

$1 = 19 - 3 \cdot 6 = 19 - 6 \cdot (22 - 19) = 19 \cdot 7 - 6 \cdot 22$

$-21 = 19 \cdot \underbrace{7 \cdot (-21)}_{x = -147} - \underbrace{6 \cdot 22 \cdot (-21)}_{y = 126}$

$x = -147 \qquad y = 126$

Answer

$\begin{cases} x = -147 + 22k, \\ y = 126 - 19k, \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 7 + 22k, \\ y = -7 - 19k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}}$

#19.

$39x \equiv 104 \pmod{221}$

$39x - 104 \equiv 0 \pmod{221}$

$39x - 104 = 221k$, $k \in \mathbb{Z}$

$3x - 8 = 17k$

$3x = 17k + 8$

$3x \equiv 8 \pmod{17}$

$x = 14 + 17m$, $m \in \mathbb{Z}$, тогда у исходного уравнения решение

при $m = \overline{0, 12}$, т.к. $14 + 17 \cdot 12 = 218 < 221 < 14 + 17 \cdot 13 = 235$

$\boxed{\text{Ответ: 13 решений}}$ $(14 + 17m,\ m \in [0, 12],\ m \in \mathbb{Z})$.

#20.

$$\begin{cases} x \equiv -14 \pmod{12} \\ x \equiv 6 \pmod{11} \\ x \equiv 19 \pmod{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 10 \pmod{12} \\ x \equiv 6 \pmod{11} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 + 12k \\ x = 6 + 11m \end{cases}$$

$$10 + 12k = 6 + 11m$$

$$12k - 11m = -4$$

$$(12, 11) \overset{1}{=} (11, 1)$$

$$1 = 12 - 11; \quad -4 = 12\cdot(-4) - 11\cdot(-4) \Rightarrow k = -4,\ m = -4$$

$$x = 10 + 12\cdot(-4) = -38$$

$$x \equiv -38 \pmod{12\cdot 11 = 132}$$

$$\begin{cases} x \equiv 94 \pmod{132} \\ x \equiv 19 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 94 + 132k \\ x = 19 + 5m \end{cases}$$

$$94 + 132k = 19 + 5m$$

$$132k - 5m = -75$$

$$5m - 132k = 75$$

$$(5, 132) \overset{26}{=} (5, 2) \overset{2}{=} (2, 1)$$

$$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2\cdot(132 - 26\cdot 5) = 53\cdot 5 - 2\cdot 132$$

$75 = 53\cdot 5\cdot 75 - 132\cdot 2\cdot 75$

$k = 2\cdot 75 = 150$

$m = 53\cdot 75$

$x = 94 + 132\cdot 150 = 19894$

$x \equiv 19894 \pmod{132\cdot 5 = 660}$

$x \equiv 94 \pmod{660}$

$\boxed{\text{Ответ: } x \equiv 94 \pmod{660}}$

#21.

$НОД(3^{168}-1,\ 3^{140}-1) =$

$(3^{140}-1)\cdot 3^{28} = 3^{168} - 3^{28} \Rightarrow 3^{168}-1 = 3^{28}(3^{140}-1) + 3^{28}-1$

$= НОД(3^{140}-1,\ 3^{28}-1) =$

$(3^{28}-1)\cdot 3^{112} = 3^{140} - 3^{112} \Rightarrow 3^{140}-1 = 3^{112}(3^{28}-1) + 3^{112}-1$

$= НОД(3^{112}-1,\ 3^{28}-1) =$

$3^{112}-1 = 3^{84}(3^{28}-1) + 3^{84}-1;$

$3^{84}-1 = 3^{56}(3^{28}-1) + 3^{56}-1;$

$3^{56}-1 = 3^{28}(3^{28}-1) + 3^{28}-1$

$= НОД(3^{28}-1,\ 3^{28}-1) = 1$

$\boxed{\text{Ответ: } 1}$

#22.

$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{2020} \equiv ? \pmod{46}$$

Найдём остатки 3^x на 46: (r – остаток) в 3^x 2020 „3"

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
r	1	3	9	27	35	13	39	25	29	41	31	1	3	9	27

цикл 11

Найдём остатки 3^x на 11: в 3^x: 2019 троек

x	0	1	2	3	4	5	6	7
r	1	3	9	5	4	1	3	9

цикл 5

Найдём остатки 3^x на 5: в 3^x 2018 троек

x	0	1	2	3	4	5
r	1	3	4	2	1	3

цикл 4

Найдём остатки 3^x на 4: в 3^x 2017 троек

x	0	1	2	3	4	5
r	1	3	1	3	1	3

цикл 2

в 3^x 2016 троек

Найдём остатки 3^x на 2: всегда 1, т.к. $3 \not\vdots 2$

Тогда, 3^x (2016 троек) $\equiv 1 \pmod{2}$

3^x (2017) $\equiv 3 \pmod{4}$

3^x (2018) $\equiv 2 \pmod{5}$

3^x (2019) $\equiv 9 \pmod{11}$

3^x (2020) $\equiv 41 \pmod{46}$

$\boxed{\text{Ответ: 41.}}$