

Предел функции многих переменных в точке.

1. Вычислить предел функции

$$a) \lim_{x \rightarrow 2, y \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 2} \frac{\sin xy}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 1} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}}.$$

2. Найти значение a , при котором функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ a, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $(0; 0)$ является:

а) непрерывной по x ; б) непрерывной по y ;

с) непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$, $\alpha \neq 0$; д) непрерывной.

3. Вычислить пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y), \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y)$$

для функций

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad b) f(x, y) = x + y \sin \frac{1}{y},$$

$$c) f(x, y) = \log_{1+x}(1 + x + y).$$

4. Пусть $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ непрерывная на своей области определения функция. Доказать, что $\{x : f(x) > y_0\}$ - открытое множество, $\{x : f(x) \geq y_0\}$ - замкнутое.

5. Доказать, что множество замкнуто т. и т.т., когда граница множества принадлежит множеству.