Homework 5.

#7.

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_1+\dots+a_n+x \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{x^{n-1}\cdot(a_1+a_2+\dots+a_n+x)}$$ - Answer

#8

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & ab & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & ab & a+b & 1 & \dots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underset{\Delta_n}{\underset{\parallel}{\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & ab & a+b \end{vmatrix}}} \overset{\text{разложим по I стр.}}{=}$$

$$= (a+b)\cdot\Delta_{n-1} - ab\cdot\Delta_{n-2}$$

Характеристический многочлен: $x^n = (a+b)\cdot x^{n-1} - ab\cdot x^{n-2} \quad \big|\cdot x^{2-n}$

$$x^2 = (a+b)\cdot x - ab$$

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

$$(x-a)(x-b)=0$$

$$\Delta_n = c_1\cdot a^n + c_2\cdot b^n$$

$$\begin{cases} n=1: & a+b = c_1\cdot a + c_2\cdot b \quad |\cdot a \\ n=2: & a^2+ab+b^2 = c_1\cdot a^2 + c_2 b^2 \quad - \end{cases}$$

$$b^2 = c_2 b^2 - c_2 ab \qquad |:b\neq 0 \qquad (1)$$

$$b = c_2(b-a)$$

$$c_2 = \frac{b}{b-a} \qquad (2)$$

Аналогично, $c_1 = \frac{a}{a-b}$, тогда $\Delta_n = \frac{a^{n+1}}{a-b} + \frac{b^{n+1}}{b-a} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

(1) Если $b=0$ или $a=0$, тогда матрица верхнетреугольная $\Rightarrow \Delta_n = a^n$ $(\Delta_n = b^n)$

(2) Если $a=b$

$$f_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2a \end{vmatrix} = 2a\cdot f_{n-1} - a^2\cdot f_{n-2}$$

$$y^2 - 2ay + a^2 = 0$$

$$(y-a)(y-a)=0$$

$$f_n = d_1\cdot a^n + d_2\cdot a^n = d\cdot a^n$$

$$\begin{cases} n=1: & 2a = d\cdot a \\ n=2: & 3a^2 = d\cdot a^2 \end{cases} \Rightarrow d=(n+1) \Rightarrow \Delta_n = f_n = (n+1)a^n$$

$\boxed{\text{Ответ: } a\neq b\text{, то } \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\text{; } a=b\text{, то } (n+1)a^n}$