Лекция 13, 06.12.23

Уравнения плоскости

① Общее уравнение плоскости π

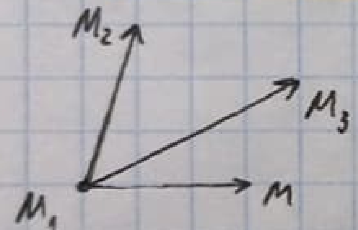
$$\pi: \boxed{Ax+By+Cz+D}, \quad A^2+B^2+C^2 \neq 0$$

Здесь $n=(A, B, C)$ - вектор нормали к пл-ти π, $n \perp \pi$

② Уравнение на трёх точках

$$\pi: \boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0},$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
$M_3(x_3, y_3, z_3)$
(точки, принадлеж. пл-ти π)



③ Уравнение в отрезках

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}, \quad \text{где} \quad a, b, c \neq 0$$

Здесь a, b, c называют отрезками (со знаком), отсекаемыми плоскостью π на осях координат.

④ Каноническое уравнение плоскости

$$\pi: \boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка плоскости π.
($M_0 \in \pi$)

$\bar{a}=(a_1, a_2, a_3) \leftarrow$ направляющие векторы
$\bar{b}=(b_1, b_2, b_3) \leftarrow$ плоскости π

$(a, b \parallel \pi)$

⑤ Векторное ур-ние плоскости

$M_0(r_0) \in \pi$ (где $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - радиус-вектор т. M_0)

$\bar{a}, \bar{b} \parallel \pi$ (направляющий векторы)

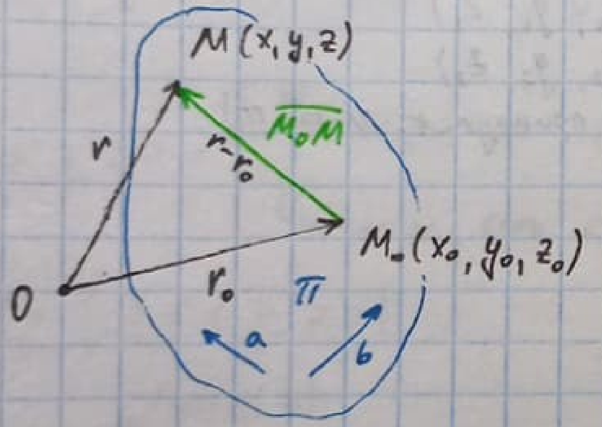
$$\boxed{\langle r - r_0, a, b \rangle = 0} \iff \langle r, a, b \rangle = \langle r_0, a, b \rangle = d$$

$$\Updownarrow$$

$$(\underset{M_0M}{\underset{\parallel}{r - r_0}}, [a, b]) = 0 \qquad (\bar{n} = [a, b] \text{ - вектор нормали})$$

$$\Updownarrow$$

$$(r - r_0, n) = 0 \iff (r, n) = (r_0, n) = d$$



⑥ Параметрическое ур-ние плоскости

$r - r_0$ линейно выражается через векторы a, b (направ. вектори плоскости π)

$$\Rightarrow \bar{r} = \bar{r}_0 + u \cdot \bar{a} + v\bar{b}$$

$$\Updownarrow \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \text{ (параметры)}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}}$$

Взаимное расположение плоскостей

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$F = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Располож.	Условие	Условия в рангах
1. Совпадают ($\pi_1 = \pi_2$)	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	$Rg\, G = 1$
2. Параллельны ($\pi_1 \parallel \pi_2$)	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	$\begin{cases} Rg\,F = 1 \\ Rg\,G = 2 \end{cases}$
3. Пересекаются ($\pi_1 \cap \pi_2$)	$[n_1, n_2] \neq 0$ (строки матрицы не пропорциональны)	$Rg\,F = 2$
3.1 $\pi_1 \perp \pi_2$	$(n_1, n_2) = 0$	

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = |\cos(\widehat{n_1, n_2})| = \frac{|(n_1, n_2)|}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

Прямая в пространстве

① Общее уравнение прямой l

$$l: \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{matrix} \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

(прямая l – линия пересеч. плоскостей π_1 и π_2)

Направл. вектор прямой l: $s = [n_1, n_2] \neq 0$ ($\pi_1 \not\parallel \pi_2$), где $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$

В ОНБ: $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

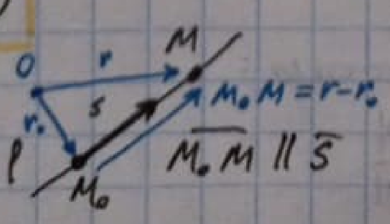
② Векторные уравнения прямой

$M_0(r_0) \in l$ (точка на прямой l)

$\bar{s} = (m, l, n)$ – направл. вектор прямой l

$\boxed{[r - r_0, s] = 0}$ $\Leftrightarrow [r, s] = [r_0, s] = \bar{M}$

т.к. $r - r_0 \parallel s$



$\overline{M_0 M} \parallel \bar{s}$

$\Rightarrow \bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{s} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s}, \; t \in \mathbb{R}$

③ Параметрические ур-ния прямой L

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой L

$s = (l, m, n)$ – направ. в-р L

④ Канонические ур-ния прямой

$$t = \boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

$\bar{s} = (l, m, n)$ – направ. вектор прямой

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$
$M_1(x_1, y_1, z_1)$
точки на прямой

Замечание: Один или 2 знаменателя могут быть равны 0

$\Rightarrow$ соотв. числители равны 0 (т.е. $l = 0 \Leftrightarrow x = x_0$)

Взаимное расположение прямой и плоскости

$L: \ M_0(r_0) = M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad \pi: \ Ax + By + Cz + D, \ \bar{n} = (A, B, C)$

$\bar{s} = (l, m, n)$

Расположение	Условие векторное	Условие по коорд.
1. $L \in \pi$ (прямая лежит в пл.)	$\begin{cases} (s, n) = 0 \\ (r_0, n) = -D \end{cases}$	$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$
2. $L \parallel \pi$	$\begin{cases} (s, n) = 0 \\ (r_0, n) \neq -D \end{cases}$	$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$
3. L пересекает π в одной точке	$(s, n) \neq 0$	$Al + Bm + Cn \neq 0$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin(\widehat{L, \pi}) = |\cos(\widehat{\bar{s}, \bar{n}})| = \frac{|(s, n)|}{|s| \cdot |n|}$$

Взаимное расположение прямых

$L_1: [r - r_1, s_1] = 0 \qquad (M_1(r_1) \in L_1, \quad s_1 \parallel L_1)$

$L_2: [r - r_2, s_2] = 0 \qquad (M_2(r_2) \in L_2, \quad s_2 \parallel L_2)$

$r_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad s_1 = (l_1, m_1, n_1)$

$r_2 = (x_2, y_2, z_2), \qquad s_2 = (l_2, m_2, n_2)$

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

Расположение	Условие	Условие в рангах
1. Совпадают $L_1 = L_2$	$\begin{cases} [s_1, s_2] = 0 \\ [r_2 - r_1, s_1] = 0 \end{cases}$	$Rg\, B = 1$
2. Параллельны $L_1 \parallel L_2$	$\begin{cases} [s_1, s_2] = 0 \\ [r_2 - r_1, s_2] \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} Rg\, A = 1 \\ Rg\, B = 2 \end{cases}$
3. Пересекаются	$\begin{cases} \langle r_2 - r_1, s_1, s_2 \rangle = 0 \\ [s_1, s_2] \neq 0 \end{cases}$	$Rg\, A = 2 = Rg\, B$
4. Скрещивающиеся	$\langle r_2 - r_1, s_1, s_2 \rangle \neq 0$	$Rg\, B = 3$

Угол между прямыми:

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = |\cos(\widehat{s_1, s_2})| = \frac{|(s_1, s_2)|}{|s_1| \cdot |s_2|}$$