Домашнее задание по дискретной математике №9

Ахундов Алексей Назимович

Июнь 2021

Содержание

Задача 1

Пункт a)

Рассмотрим a_n, a_{n-1}

$$a_n = \ln(n+1)$$
$$a_{n-1} = \ln n \implies n = e^{a_{n-1}}$$

Отсюда получим рекуррентное соотношение:

$$a_n = \ln(e^{a_{n-1}} - 1)$$

Пункт b)

Рассмотрим a_n и обратные к a_{n-1}, a_{n-2}:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{1}{a_{n-1}} = n \cdot (n+1) = n^2 + n$$
$$\frac{1}{a_{n-2}} = (n-1) \cdot n = n^2 - n$$

Тогда вычислим соответствующую для $n-1, n-2$ разность:

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} = 2n \implies n = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}}{2}$$

Подставим в формулу для n-го члена последовательности:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}}{2} + 1\right)\left(\frac{\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}}{2} + 2\right)}$$

Пункт c)

Рассмотрим a_n, a_{n-1}:

$$a_n = n + \sqrt{n} \implies a_n - n = \sqrt{n}$$
$$a_{n-1} = (n-1) + \sqrt{n-1} \implies a_{n-1} - (n-1) = \sqrt{n-1}$$

Возведем оба уравнения в квадрат и вычтем из первого второе:

$$(a_n - n)^2 - (a_{n-1} - (n-1))^2 = 1$$

Преобразуем левую часть:

$$(a_n - n \boldsymbol{-} a_{n-1} \boldsymbol{+} (n-1))(a_n - n \boldsymbol{+} a_{n-1} \boldsymbol{-} (n-1)) = 1$$

$$(a_n - n \boldsymbol{+} n - a_{n-1} - 1)(a_n \boldsymbol{-} 2n + a_{n-1} + 1) = 1$$

$$(a_n - a_{n-1} - 1)(a_n - 2n + a_{n-1} + 1) = 1$$

$$a_n - 2n + a_{n-1} + 1 = \frac{1}{a_n - a_{n-1} - 1}$$

$$-2n = \frac{1}{a_n - a_{n-1} - 1} - a_n - a_{n-1} - 1$$

Теперь явно выразим n из этого уравнения:

$$n = \frac{\frac{1}{a_n - a_{n-1} - 1} - a_n - a_{n-1} - 1}{-2} = \frac{a_n + a_{n-1} + 1 - \frac{1}{a_n - a_{n-1} - 1}}{2}$$

Подставим вычисленное n в наше рекуррентное соотношение:

$$a_{n+1} = n + 1 + \sqrt{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1} + 1 - \frac{1}{a_n - a_{n-1} - 1}}{2} + 1 + \sqrt{\frac{a_n + a_{n-1} + 1 - \frac{1}{a_n - a_{n-1} - 1}}{2} + 1}$$

Задача 2

Распишем формулу для конечной разности t-го порядка:

$$\begin{aligned}
\Delta^t P(x) &= \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \cdot C_t^i \cdot P(n+t-i) \\
&= \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \cdot C_t^i \cdot \left[\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot (n+t-i)^j \right] \\
&= \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \cdot C_t^i \cdot \left[\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^{j} C_j^k n^k \cdot (-i+t)^{j-k} \right\}}_{\text{Бином Ньютона}} \right] \\
&= \sum_{i=0,\ j=0,\ k=0}^{i<t,\ j<m,\ k<j} (-1)^i \cdot C_t^i C_j^k \cdot a_j \cdot n^k \cdot (-i+t)^{j-k}
\end{aligned}$$

Теперь поскольку коэффициенты при старших степенях не изменяются ($C_n^0 = 1$) и соответственно зануляются при нахождении конечных разностей, при увеличении порядка Δ понижается степень результирующего многочлена, взяв порядок t, многочлен сократит степень до старшей $= n - t$ ($k = m - t$):

$$\sum_{i\,=\,0,\ j\,=\,m-t}^{i\,<\,t,\ j\,<\,m} (-1)^i \cdot C_t^i C_j^{m-t} \cdot a_j \cdot n^{m-t} \cdot (-i+t)^{j+t-m}$$

Применим результат к $P(x) = n^m$ (учитывая, что $\forall i < m : a_i = 0$) и найдем старший коэффициент c_h для $\Delta^m(n^m)$:

$$c_h = \sum_{i\,=\,0,\ j\,=\,m-m}^{i\,<\,m,\ j\,<\,m} (-1)^i \cdot C_m^i C_j^{m-m} \cdot a_j \cdot n^{m-m} \cdot (-i+m)^{j+m-m}$$

$$= \sum_{i\,=\,0,\ j\,=\,0}^{i\,<\,m,\ j\,<\,m} (-1)^i \cdot C_m^i \cdot a_j \cdot (-i+m)^j = \sum_{i\,=\,0}^{i\,<\,m} (-1)^i \cdot C_m^i \cdot (-i+m)^m$$

$$= \sum_{k\,=\,0}^{m} (-1)^k \cdot C_m^k \cdot (m-k)^m = m!$$

Задача 4

Образуем новую последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из обратных к b, тогда:

$$\Delta\frac{a_n}{b_n} = \Delta\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \Delta(a_n \cdot t_n)$$

Воспользуемся свойством для конечной разности произведения:

$$\Delta(a_n b_n) = \Delta a_n \cdot \Delta b_n + (a_{n+1}b_n + b_{n+1}a_n - 2a_n b_n) = ... = \Delta a_n b_{n+1} + a_n \Delta b_n$$

Раскроем выражение:

$$\begin{aligned}\Delta(a_n \cdot t_n) &= \Delta a_n \cdot t_{n+1} + a_n \cdot \Delta t_n \\ &= a_n \cdot \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}\right) + \frac{\Delta a_n}{b_{n+1}} \\ &= \frac{a_n b_n - a_n b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} + \frac{\Delta a_n}{b_{n+1}} \\ &= \frac{a_n b_n - a_n b_{n+1} + b_n \Delta a_n}{b_n b_{n+1}} \\ &= \frac{a_n (b_n - b_{n+1}) + b_n \Delta a_n}{b_n b_{n+1}} \\ &= \frac{b_n \Delta a_n - a_n (b_{n+1} - b_n)}{b_n b_{n+1}} = \boldsymbol{\frac{b_n \Delta a_n - a_n \Delta b_n}{b_n b_{n+1}}}\end{aligned}$$

Задача 5

Определим две последовательности: $a_n = n^2, b_n = (-3)^n$, тогда найдем $\Delta \dfrac{a_n}{b_n}$:

$$\begin{aligned}\Delta \frac{n^2}{(-3)^n} = \Delta \frac{a_n}{b_n} &= \frac{b_n \Delta a_n - a_n \Delta b_n}{b_n b_{n+1}} \\ &= \frac{(-3)^n \Delta(n^2) - n^2 \Delta((-3)^n)}{(-3)^n \cdot (-3)^{n+1}} = \frac{(-3)^n \Delta(n^2) - n^2 \Delta((-3)^n)}{(-3)^{2n+1}} \\ &= \frac{(-3)^n \cdot (2n+1) + 4n^2 \cdot (-3)^n}{(-3)^{2n+1}} = \frac{(2n+1) + 4n^2}{(-3)^{n+1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{4n^2 + 2n + 1}{(-3)^{n+1}}}\end{aligned}$$

Задача 6

Выполним преобразования по определению и используем формулу разности косинусов:

$$\begin{aligned}\Delta \cos(\alpha n + \beta) &= \cos(\alpha(n+1) + \beta) - \cos(\alpha n + \beta) \\ &= -2 \sin \frac{(\alpha(n+1) + \beta) \boldsymbol{+} ((\alpha n + \beta))}{2} \cdot \sin \frac{(\alpha(n+1) + \beta) \boldsymbol{-} ((\alpha n + \beta))}{2} \\ &= -2 \sin\left(\alpha \left(n + \frac{1}{2}\right) + \beta\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

Задача 7

Посчитаем конечные разности четырех порядков для членов последовательности $a_n = n^4$:

$$\Delta(n^4) = (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \implies \Delta a_0 = 1$$

$$\Delta^2(n^4) = \Delta\Delta(n^4) = \Delta(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = 12n^2 + 24n + 14 \implies \Delta^2 a_0 = 14$$

$$\Delta^3(n^4) = 24n + 36 \implies \Delta^3 a_0 = 36$$

$$\Delta^4(n^4) = 24 \implies \Delta^4 a_0 = 24$$

Дальнейшее взятие Δ ведет к нулю. Тогда распишем формулу (из семинаров) для $\sum a_n$:

$$\sum n^4 = \underbrace{0}_{a_0=0} \cdot n + \frac{1}{2!} \cdot n^{(2)} + \frac{14}{3!} \cdot n^{(3)} + \frac{36}{4!} \cdot n^{(4)} + \frac{24}{5!} \cdot n^{(5)}, \quad n^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

Тогда, раскрыв и преобразовав всё получившееся, приведем явную формулу:

$$\sum n^4 = 0^4 + ... + (n-1)^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{20}$$