Модуль 3.

Лекция 15, 12.01.24

Опр: $f: A \to B \iff$ (0) $f \subseteq A \times B \Rightarrow \mathrm{dom} f \subseteq A$

(1) f функционально $\qquad \Downarrow \ \mathrm{dom} f = A \ \Uparrow$

(2) f тотально для $A \iff \mathrm{dom} f \supseteq A$

$f(x) = y \iff (x, y) \in f$

Опр: $B^A = \{ f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f: A \to B \}$

$B^\varnothing = ?$

$f \in B^\varnothing \iff f: \varnothing \to B$

$\Rightarrow f \subseteq \varnothing \times B = \varnothing$

$\Rightarrow f = \varnothing$

$B^\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

$? \ \varnothing: \varnothing \to B$

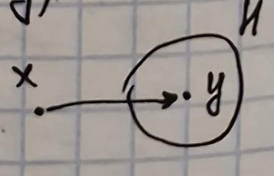
$\forall x \forall y \forall z \ \underbrace{(\overbrace{(x,y) \in \varnothing \wedge (x,z) \in \varnothing}^{\text{ложь}} \Rightarrow y = z)}_{\text{истина}}$

$\forall x \ \underbrace{(\underbrace{x \in \varnothing}_{\text{ложь}} \Rightarrow \exists y \ (x,y) \in \varnothing)}_{\text{истина}}$

$\Rightarrow \boxed{B^\varnothing = \{\varnothing\}}$

(1) R инъективно $\iff \forall x, y \in (yRx \wedge zRx \Rightarrow y = z)$

(2) R сюръективно для $H \iff \forall y \ (y \in H \Rightarrow \exists x \ xRy)$



Опр: f – инъекция из A в B $\iff$ $f: A \to B$, f инъективно

$\left.\begin{array}{l} y f x \wedge z f x \\ f(y)=x \wedge f(z)=x \end{array}\right| \Rightarrow y = z$

f – сюръекция из A в B $\iff$ $f: A \to B$, f сюръекция

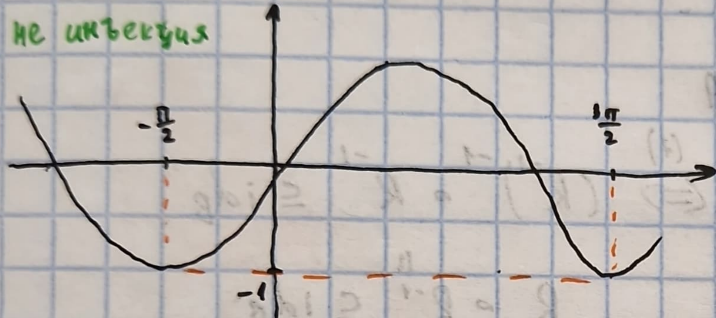
$\forall y \in B \ \exists x \ f(x) = y$

f – биекция из A в B $\iff$ f инъекция и сюръекция из A в B

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

не сюр.

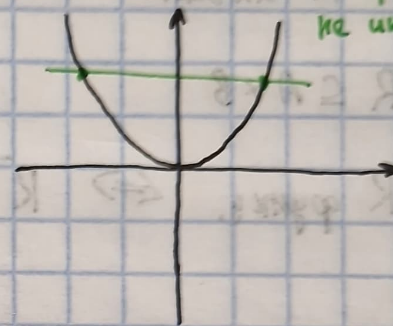
не инъекция



$(\lambda x. x^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

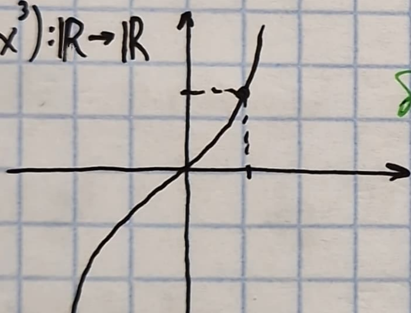
сюр.

не инъекц.



$(\lambda x. x^3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

биекция



Лемма 1: (1) $A \overset{R}{\sim} B \iff B \overset{R^{-1}}{\sim} A$ (0) $A \overset{id_A}{\sim} A$

(2) $A \overset{f}{\sim} B \wedge B \overset{g}{\sim} C \Rightarrow A \overset{g \circ f}{\sim} C$

Лемма 2. Пусть $R \subseteq A \times B$, тогда

(1) R инъект. $\iff$ $R^{-1} \circ R \subseteq id_A$

(2) R сюръект. $\iff$ $R \circ R^{-1} \subseteq id_B$

(3) R тот. для A $\iff$ $id_A \subseteq R^{-1} \circ R$

(4) R сюр. для B $\iff$ $id_B \subseteq R \circ R^{-1}$

1) $R^{-1} \circ R \subseteq id_A$

$\Leftrightarrow \forall x \forall z ((x, z) \in R^{-1} \circ R \Rightarrow x = z)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall z (\exists y (xRy \wedge yR^{-1}z) \Rightarrow x = z)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall z (\exists y (xRy \wedge zRy) \Rightarrow x = z)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall z \forall y (xRy \wedge zRy) \Rightarrow x = z)$

$\Leftrightarrow R$ инъект.

$\exists y\, A(y) \Rightarrow B \equiv$

$\equiv \neg \exists y\, A(y) \vee B \equiv$

$\equiv \forall y\, \neg A(y) \vee B \equiv$

$\equiv \forall y (\neg A(y) \vee B) \equiv$

$\equiv \forall y (A(y) \Rightarrow B)$

2) $R \subseteq A \times B$ $\quad$ $R^{-1} \subseteq B \times A$

R функц. $\Leftrightarrow R^{-1}$ инъект. $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (R^{-1})^{-1} \circ R^{-1} \subseteq id_B$

$R \circ R^{-1} \subseteq id_B$

3) $id_A \subseteq R^{-1} \circ R$

$\Leftrightarrow \forall x \in A ((x, x) \in R^{-1} \circ R)$

$\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists y\ (xRy \wedge yR^{-1}x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists y\ (xRy \wedge xRy)$

$\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists y\ xRy$

$\Leftrightarrow R$ тот. для A

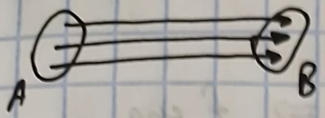
Следствие 3. (Критерий биективности)

Пусть $R \subseteq A \times B$, тогда

$A \overset{R}{\sim} B \Leftrightarrow R^{-1} \circ R = id_A \wedge R \circ R^{-1} = id_B$

Опр: Множества A и B равномощны $\Leftrightarrow \exists f A \overset{f}{\sim} B$

пишем: $A \sim B$

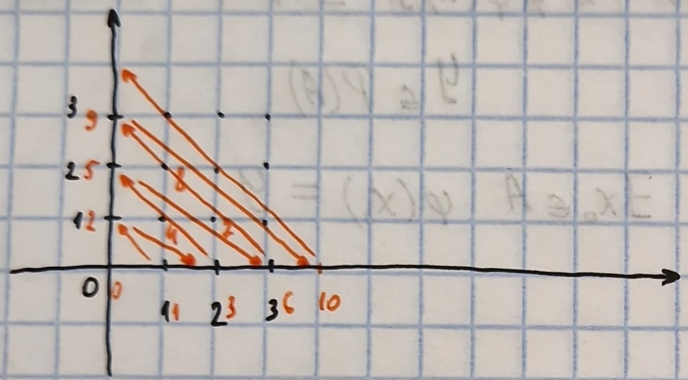


Следствие 4. (Лемма 1. (б) $A \sim A$)

(1) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

(2) $A \sim B \wedge B \sim C \Leftrightarrow A \sim C$

Лемма 5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$



Док-во: Рассмотрим $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$$

f инъективно:

Пусть $f(x,y) = f(a,b)$, тогда

$$2^x\underbrace{(2y+1)}_{\text{не чёт}} = 2^a\underbrace{(2b+1)}_{\text{не чёт}}$$

По ОТА, $x = a$

Далее, $2y+1 = 2b+1 \Rightarrow y = b$ | Значит $(x,y) = (a,b)$.

Утв: $\forall k > 0 \quad \exists x, y \quad 2^x(2y+1) = k$

По ОТА, разложим k на простые множители:

$$k = 2^x \cdot \underbrace{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}}_{\text{нечёт}} \overset{\exists y}{=} 2y+1$$

$\equiv 1 \pmod 2$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x, y \quad 2^x(2y+1) = k+1$

$k = 2^x(2y+1) - 1 = f(x,y) \Rightarrow f$ сюр.

Теорема 6 (Кантора): $\forall A \quad A \not\sim P(A)$

Док-во: Пусть $\exists A \quad \exists \varphi \quad A \overset{\varphi}{\sim} P(A)$

в частности, φ - сюръекция $A \to P(A)$ | $\varphi: A \to P(A)$

Рассмотрим $Y = \{x \in A \mid x \notin \varphi(x)\} \subseteq A$

$Y \in P(A)$

Т.к. φ-сюр. для $P(A)$, то $\exists x_0 \in A \quad \varphi(x_0) = Y$

? $x_0 \in Y$?

$x_0 \in Y \overset{\text{опр } Y}{\Longrightarrow} x_0 \notin \varphi(x_0) = Y$

$\Rightarrow x_0 \notin Y$

$\Rightarrow \perp$

Значит, $x_0 \notin Y$

Но тогда $x_0 \in \varphi(x_0) = Y$

По опр. Y, $x_0 \in Y$ $\quad \perp$

Теорема 7. (1) $A \sim B \Rightarrow A \times C \sim B \times C$,

$C^A \sim C^B$, $A^C \sim B^C$.

(2) $A \times B \sim B \times A$

(3) $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$

(4) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$

(5) $(C^B)^A \sim C^{A \times B}$

Док-во: (1) Пусть $A \overset{\varphi}{\sim} B$; хотим $A \times C \overset{\psi}{\sim} B \times C$

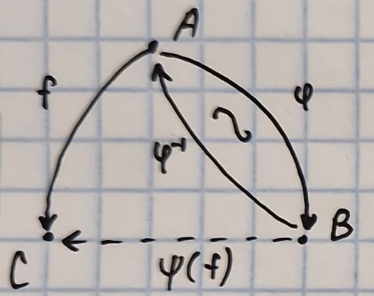
$\psi : A \times C \to B \times C$

$\psi : (a; c) \longmapsto (\varphi(a), c)$

Упр. ψ – биекция.

Хотим $C^A \overset{\psi}{\sim} C^B$.

допустим $f \in C^A$, т.е. $f : A \to C$



Пусть $\psi(f) = f \circ \varphi^{-1}$

$\psi : C^A \to C^B$

ψ инъективно: $f_1, f_2 : A \to C$

дано: $\psi(f_1) = \psi(f_2)$; хотим $f_1 = f_2$

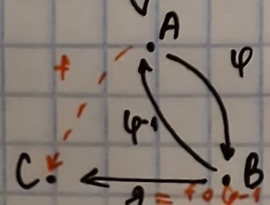
$f_1 \circ \varphi^{-1} = f_2 \circ \varphi^{-1}$

$(f_1 \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = (f_2 \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = f_2 \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) = f_2 \circ id_A = \boxed{f_2}$

$f_1 \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) = f_1 \circ id_A = \boxed{f_1}$

ψ сюръективно:

дано: $g : B \to C$; хочу: $\exists f : A \to C \quad \psi(f) = g$



$f \circ \varphi^{-1}$

$? \circ \varphi^{-1} = g$

$f := g \circ \varphi$; $A \to C$

$\psi(f) = (g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = g \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = g \circ id_B = g$