Домашнее задание #2.

#1.

Послед. $\{x_n\}$ огранич. сверху, если $\exists C\ \forall n: x_n < C$.

Послед. $\{x_n\}$ огранич. снизу, если $\exists C\ \forall n: x_n > C$.

По определению, послед. $\{x_n\}$ ограничена, если $\exists C\ \forall n: |x_n| < C$

$$|x_n| < C \iff -C < x_n < C \iff \begin{cases} x_n < C \Rightarrow \{x_n\} \text{ огр. сверху} \\ x_n > -C \Rightarrow \{x_n\} \text{ огр. снизу} \end{cases}$$

Следовательно, послед. огранич., если она огранич. сверху и снизу.

#2.

(a) $a_n = \{1, 1, 1, \ldots\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $1 \in \{a_n\}$

(b) $a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $0 \notin \{a_n\}$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ $a_n = \{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, \ldots\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

бесконечно много членов равны 0 (при $n=2k$ и не равны 0 (при $n=2k$)

(d) $a_n = (-1)^n + 1$ $a_n = \{0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ - не существует.

#4.

$$a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1-1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$$

$$\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{-n}{\sqrt{n^2}} = \frac{-n}{n} = -1$$

$-1 < a_n \leq 0 \Rightarrow a_n$ - ограничена

#5.

$a_n = n^{(-1)^n}$ При $n=1: a_n = 1^{-1} = 1$

При $n=2k,\ k \in \mathbb{N}:\ a_n = a_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k \Rightarrow a_n \geqslant 2k \geqslant 2$

При $n=2k+1,\ k \in \mathbb{N}:\ a_n = a_{2k+1} = (2k+1)^{(-1)^{2k+1}} = \frac{1}{2k+1} \Rightarrow a_n \leqslant \frac{1}{2k+1} \leqslant \frac{1}{3}$

Тогда $a_n \geqslant 1$ и $a_n \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow a_n$ – неограничена

#6.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-11}} = 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N: \left|\frac{1}{\sqrt{3n-11}} - 0\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{\sqrt{3n-11}} < \varepsilon$

$\sqrt{3n-11} > \frac{1}{\varepsilon}$

$3n - 11 > \frac{1}{\varepsilon^2}$

$n > \frac{1}{3\varepsilon^2} + \frac{11}{3}$

$N = \left[\frac{1}{3\varepsilon^2} + \frac{11}{3}\right] + 1$

$N = \left[\frac{1}{3\varepsilon^2}\right] + 5$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2} = 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N: \left|\frac{2n+3}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$

$\frac{2n+3}{n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ n \geqslant 3}}{\leqslant} \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon$; $n > \frac{3}{\varepsilon}$; $N = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right] + 4$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N : \left| \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$

$\frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$

$n > \frac{1}{\varepsilon^2}$

$N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right] + 1$

#3.

Т.к. по определению число x – предел послед. $\{x_n\}$, то, начиная с номера N, все члены лежат в окрестности $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$. Т.е. есть конечное число членов с номерами $1, \dots, N-1$, которые никак не влияют на предел всей последовательности. и их можно отбросить. Так же и с добавлением – всегда найдётся номер N, что при $\forall n > N$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Следовательно, изменение конечного числа членов сходящ. послед. оставляет её сходящейся к тому же пределу.