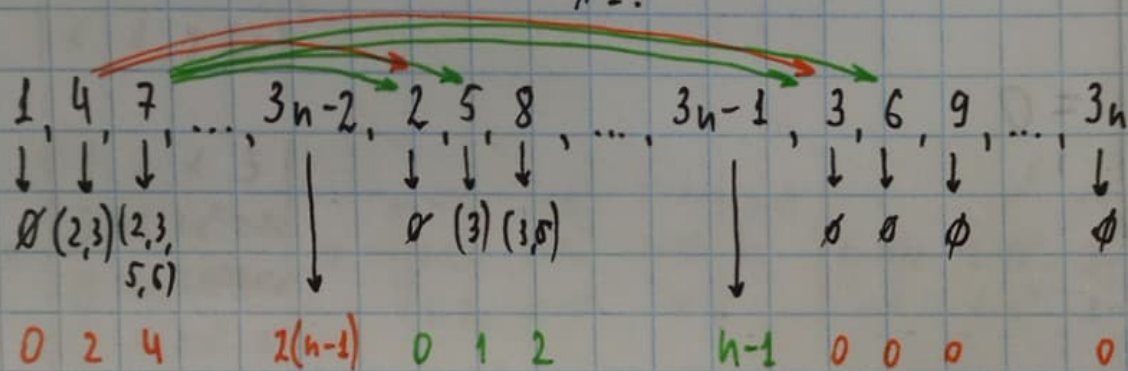


Домашняя работа №4.

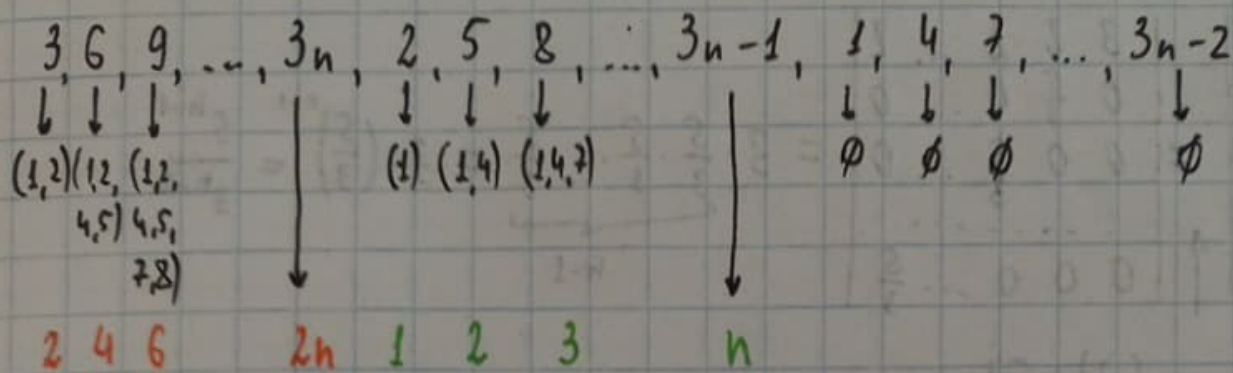
#1.



$$\begin{aligned} \text{Число инверсий} &: (0+2+4+\dots+2(n-1)) + (0+1+2+\dots+n-1) + 0 = \\ &= \frac{2(n-1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Чётно при $n=4k$ и $n=4k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, нечётно - при остальных

#2.



Число инверсий: $(2 + 4 + 6 + \dots + 2n) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) + 0 =$

$$= \frac{(2+2n) \cdot n}{2} + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

Чётно при $n = 4k$ и $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$, нечётно — при ост.

#3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 1 \cdot (-x)(1-x)(2-x) \dots ((n-1)-x) = 0$$

$$x \in \{0; 1; 2; \dots; n-2; n-1\}$$

Ответ: $\{0; 1; 2; \dots; n-2; n-1\}$.

#4.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} - \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array}
 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}
 \end{array}
 \stackrel{\substack{\times (-2) \\ +}}{=}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array}
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X \end{vmatrix}
 = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot X = X = 2n+1$$

Ответ: $2n+1$

$$[X = 2 \cdot (n-1) + 3 = 2n+1]$$

#5.

$$Q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh), \text{ где } a, b, c, d, e, f, g, h, i = \pm 1$$

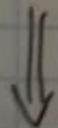
$\max(Q) = 4$ Например, при $(a, b, c, d, e, h, i = 1)$ и $(f, g = -1)$

Докажем, что не может быть $\max(Q) > 4$.

Т.к. все члены равны ± 1 , то все слагаемые в Q равны ± 1 .

Тогда $Q \in \{\pm 0; \pm 2; \pm 4; \pm 6\}$, т.е. надо док-ть, что $Q \neq 6$.

Пусть $Q = 6$, тогда $(aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh) = 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow aei = bfg = cdh = 1; \quad \underbrace{ceg = bdi = afh = -1}$



Также эти произведения должны быть 1.

Т.к. здесь все члены матрицы и каждое произведение равно -1 , то в каждом произведении нечётное кол-во членов, равных -1 . (В матрице нечётное кол-во членов, равных -1)

Но т.к. в матрице нечётное кол-во членов, равных -1 , а для того, чтобы "загасить" минусы необходимо чётное кол-во $((-1) \cdot (-1) = 1)$, то среди aei, bfg, cdh обязательно найдётся произведение равное -1 . \Rightarrow Противоречие.