

# Homework 6b.

#3.

$$(a,b) S (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} ad=bc \wedge b \neq 0 \neq d \\ a=c \wedge b=0=d \end{cases}$$

## 1. Рефлексивность

$$\forall x \in \mathbb{N}^2 : x S x \quad x=(a,b)$$

если  $b=0$ , то  $a=a$

если  $b \neq 0$ , то  $ab=ba$

## 2. Симметричность

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^2 \quad x S y \Rightarrow y S x, \text{ где } x=(a,b), y=(c,d)$$

Выполнено, т.к. есть коммутативность

## 3. Транзитивность

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}^2 \quad x S y \wedge y S z \Rightarrow x S z$$

где  $x=(a,b), y=(c,d), z=(e,f)$

$$\text{Хотим: } (af=be \wedge b \neq 0 \neq f) \vee (a=e \wedge b=0=f)$$

Если  $a=c \wedge b=0=d$ , то  $a=c=e, b=d=f=0$

Если  $ad=bc \wedge b \neq 0 \neq d$ , то  $af=be$ , т.к.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

$f \neq 0 \Rightarrow$  выполнено.

Ответ:  $S$  - отношение эквивалентности.



#4.

Должны быть выполнены по ЧУМ:

1. рефлексивность
2. транзитивность
3. антисимметричность

Должны быть выполнены по отком. экв.:

1. рефлекс.
2. транзитивность
3. симметричность

Антисимм. и симм. одновременно:

$$\forall x, y \quad (xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y) \wedge (xRy \Rightarrow yRx)$$

Тогда должно выполняться  $x=y$ , т.е. при  $R = \{(x, x) | x \in A\}$

#5.

$$a) E = \{(f, g) | f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$$

$$f = g \circ \varphi, \quad \varphi - \text{биекция}$$

Это отком. экв.:

1) рефлексивность:

$$\forall x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \quad x E x \quad x = x \circ \varphi, \quad \text{где} \quad \forall y \quad \varphi(y) = y$$

2) симметр.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \quad x E y \Rightarrow y E x \quad x = y \circ \varphi_1 \quad \text{и} \quad y = x \circ \varphi_2$$

$$\text{при} \quad \varphi_1 = \varphi_2^{-1}$$

3) Транзитивность

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \quad x E y \wedge y E z \Rightarrow x E z$$

$$x = y \circ \varphi_1$$

$$y = z \circ \varphi_2$$

$$x = (z \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = z \circ \varphi_3$$

$$\Rightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_3$$

б) Счётно

$$f \in g \Leftrightarrow f \text{ от } 1 \overset{\text{конечно}}{\text{счётно}} = g \text{ от } 1 \overset{\text{конечно}}{\text{счётно}}$$

или

$$g \text{ от } 0 \text{ конечно} = f \text{ от } 0 \text{ конечно}$$

Тогда кол-во классов эквивалентности из конечного числа!

счётно. Также с 0  $\Rightarrow$  Всего кл. экв. счётно.