ДЗ к семинару 5

Я приведу здесь решения задач с семинара, которые были разобраны в спешке.

Была задача вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Действуем следующим образом. Пусть сначала существует i такой, что $a_i = 0$. Тогда разложим определитель по $(i+1)$-ой строке: в этой строке все нули, кроме первого элемента. Поэтому, после разложения, наш определитель равен

$$(-1)^{i+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & a_{i-1} & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & a_{i+1} & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Аналогично, разложим новый определитель по i-ому столбцу: в нём все нули, кроме первого элемента. После разложения наш определитель равен

$$(-1)^{i+2}(-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{i-1} & & & \\ & & & a_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_n \end{vmatrix} = -a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n = -a_1 \dots \widehat{a_i} \cdots a_n.$$

В произведении крышечкой обычно обозначается элемент, которого на самом деле нет. Это короче, чем писать $a_1 \ldots a_{i-1}a_{i+1} \ldots a_n$.

Пусть теперь $a_i \neq 0$ для любого i. Для каждого $i = \overline{1, n}$ вычтем из первого столбца $(i+1)$-ый столбец, домноженный на $-\frac{1}{a_i}$. Получим верхнетреугольную матрицу, у которой на диагонали стоят числа

$$-\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right),\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Отсюда получаем, что определитель равен

$$-a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = -\sum_{i=1}^{n} a_1 \ldots \widehat{a_i} \ldots a_n.$$

Заметим, что эта формула при подстановке $a_i = 0$ совпадает с той, которую мы получили отдельно. Поэтому в ответ можно просто записать её, без разбора случаев.

Задача про определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Доказываем по индукции. Случай $n = 2$ (или $n = 1$, если угодно) очевиден. Шаг индукции делаем следующим образом. Вычтем из i-ой строки предыдущую, домноженную на x_1 для всех $i = n,\ n-1, \ldots,\ 2$ (именно так, в обратном порядке). Тогда мы получим матрицу

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Пользуемся определителем с углом нулей, и выносим из $(i-1)$-го столбца множитель $x_i - x_1$ для всех $i = \overline{2, n}$. Тогда у нас останется определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

который совпадает с $V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)$. Итого, мы получили равенство

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \cdot V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n).$$

По предположению индукции

$$V_{n-1}(x_2, \dots, x_n) = \prod_{2 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Собирая всё вместе, получаем

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \cdot \prod_{2 \le j < i \le n} (x_i - x_j) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Задача 1. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{i,j} = \min(i,j)$.

Задача 2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Доказать, что для всех $n \ge 2$ выполнено

$$f_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

где определитель имеет порядок $n-1$, а f_n – это n-ое число Фибоначчи.

Задача 5. Доказать, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его строки пропорциональны. Доказать то же самое для столбцов.