Лекция 9

Бесконечные пределы:

∞

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$-\infty$

$|f(x)| > M$

$\forall M > 0 \quad \exists \delta = \delta(M) : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad f(x) > M$

$f(x) < -M$

$+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \infty$

$-\infty$

$f(x) > \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L = L(\varepsilon) : \forall x > L \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad |f(x)| > \varepsilon$

$f(x) < -M$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > 0 \quad : \forall x \quad x < -L \quad |f(x) - A| < \varepsilon$
$= L(\varepsilon)$

Опр: Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$ /в т. x_0/ в окрестности x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Опр: Функция наз. бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Опр: Функция наз. ограниченной при $x \to x_0$, если $\exists \delta > 0 : f(x)$ ограничена на интервале $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

Опр: Функция наз. отделимой от нуля при $x \to x_0$, если $\exists \delta > 0$ и $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad |f(x)| > \varepsilon_0$.

Замечание: Все результаты о связи б.б., б.м., огр. и отдел. от 0, полученные для послед., остаются равны для функций.

Пример: $x \to +\infty$

$f(x)$ - огр. $\quad g(x)$ - отдел. от нуля

$\frac{f(x)}{g(x)}$ - огр.

Док-во: $\exists L_1 > 0 \ \exists C : \forall x : x \in (L_1; +\infty) \ |f(x)| < C$

$\exists L_2 > 0 \ \exists \varepsilon_0 : \forall x : x \in (L_2; +\infty) \ |g(x)| > \varepsilon_0$

$\forall x > \max(L_1; L_2) \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{C}{\varepsilon_0}$

Пример: б.м. $\cdot$ огр. $=$ б.м. при $x \to x_0$

$x_n \to x_0$; $x_n \neq x_0$ $\quad$ $\boxed{f(x_n) \text{ - б.м. послед.} \quad g(x) \text{ - огр.}}$

$\exists \delta: \ \exists C: \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad |(x)| < C$

$\boxed{\exists N \ \forall n > N \quad x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad |g(x)| < C \quad \Rightarrow g(x_n) - \text{огр.}}$

$f(x_n) \cdot g(x_n)$ – б.м. $\quad \lim\limits_{x \to x_0} (f(n) \cdot g(n)) = 0$

Односторонние пределы

Опр: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x: \ 0 < x - x_0 < \delta$

$|f(x) - A| < \varepsilon$

Утв: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

Док-во: $\Rightarrow$ очев (если для $\forall x$, то и для огр. кол-ва x)

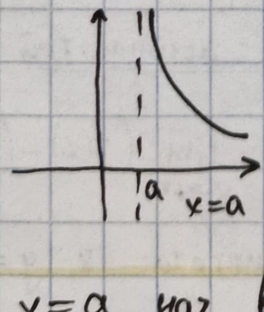
$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0: \quad \exists \delta_1: \ \forall x: \ 0 < x - x_0 < \delta_1 \quad \ldots$

$\exists \delta_2: \forall x: \quad 0 < x_0 - x < \delta_2 \quad \ldots$

$\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\} \qquad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

Асимптоты

1) **Вертикальные:**



Опр: прямая $x = a$ наз. вертикальной асимптотой для графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ и/или

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

Пример: $y = \dfrac{x-2}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{x+1} \quad (x-2 \to -3,\ x+1 \to \text{б.м. положит})$$

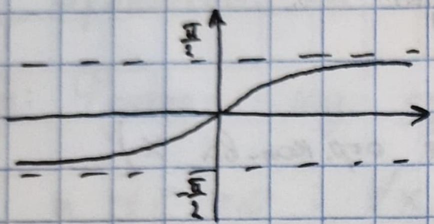
$$(x-2)\cdot\frac{1}{(x+1)} \xrightarrow[x\to -1^+]{} -\infty \quad (x-2\to -3,\ \tfrac{1}{x+1}\to +\infty)$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty \quad (x-2\to -3,\ x+1 \to 0^-)$$

2) Горизонтальная:

Опр: прямая $y=b$ наз. горизонтальной асимптотой для графика функции $y=f(x)$ на $\begin{smallmatrix}+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}$, если $\lim\limits_{x\to \begin{smallmatrix}+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}} f(x) = b$.

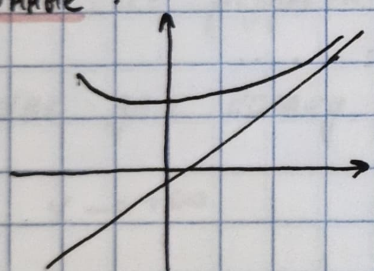
Пример: $y = \operatorname{arctg} x$



$y=\frac{\pi}{2}$ – гориз. асимптота при $x\to+\infty$

$y=-\frac{\pi}{2}$ – гориз. асимптота при $x\to-\infty$

3) Наклонные:



Опр: прямая $y=kx+b$ наз. наклонной асимптотой к графику функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$.

Теорема: прямая $y=kx+b$ – накл. асимптота к $y=f(x)$ при $x\to+\infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-kx) \end{cases}$$

Док-во: $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$

$f(x)-kx-b=$ б.м. при $x\to+\infty$

$$\frac{f(x)}{x}-k=\underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{б.м.}{x}}_{\to 0}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=k$$

$(\Leftarrow)$ $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ ч.т.д.

Пример: $y=\sqrt{x^2+4}$

$\forall x_0\in\mathbb{R}\ \ \exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\infty \Rightarrow$ вертик. асимпт. нет

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty \Rightarrow$ гор. асимпт. нет

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\pm 1$$

1) $x\to+\infty$: $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}\longrightarrow 1$

2) $x\to-\infty$: $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{-\sqrt{x^2}}\longrightarrow -1$

1) $x\to+\infty$: $\sqrt{x^2+4}-x=\dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

2) $x\to-\infty$: $\sqrt{x^2+4}-x=\dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=\dfrac{4}{\underbrace{\sqrt{x^2+4}}_{\to+\infty}+\underbrace{x}_{\to+\infty}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

При $x\to+\infty$ асимпт. $y=x$

При $x\to-\infty$ асимпт. $y=-x$