ФКН ПИ. Математический анализ, 2023-2024. Домашняя работа по семинару 22.

Task: 1.

Доказать по индукции равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Используя его и результат:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \overline{o}\,(1)$$

доказать, что:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Докажем первое равенство:

Proof:

1. База индукции: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \iff 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Предположение индукции:

Предполагая, что $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, докажем, что равенство выполняется и для $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k}\right) + \frac{1}{n+n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$ то есть равенство верно для $n+1$

3. Следовательно, по принципу математической индукции, равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

■

Докажем второе равенство:

Proof:

1. По определению числового ряда: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

2. По утверждению, доказанному ранее: $\forall M \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{2M} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{M+k}$

2. $\forall M \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{2M} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{M+k} = \sum_{k=M+1}^{2M} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2M} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k} =$

   $= (\ln(2M) + \gamma + \overline{o}\,(1)) - (\ln(M) + \gamma + \overline{o}\,(1)) = \ln(2M) - \ln(M) + \overline{o}\,(1) = \ln 2 + \overline{o}\,(1)$

3. Обозначим $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

   Тогда $\forall M \in \mathbb{N} : S_{2M} = \ln 2 + \overline{o}\,(1)$

4. $\frac{1}{n}$ монотонно убывает к 0 $\implies$ ряд S сходится по признаку Лейбница. $\implies \exists \lim_{N \to +\infty} S_N \in \mathbb{R}$

   $\{S_{2M}\}$ - сходящаяся подпоследовательность $\{S_N\}$ и обе из них сходятся $\implies$

   $\implies \lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{M \to +\infty} S_{2M} = \ln 2 \implies S = \lim_{N \to +\infty} S_N = \ln 2$

■

Task: 2. Доказать или опровергнуть

(a) Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Следует ли отсюда, что знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится?

Ответ: нет, не следует.

Proof:

1. Рассмотрим ч.п. $\{a_n\}$, такую что:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, n \equiv 1 \pmod 2, \\ \frac{4}{n^2}, n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

Следовательно, $\forall k \in \mathbb{N} : a_{2k-1} = \dfrac{1}{k} \wedge a_{2k} = \dfrac{1}{k^2}$

2. Пусть $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n$

Т.к. $N \in \mathbb{N}$, то N либо $2K$, либо $2K-1$ для некоторого $K \in \mathbb{N}$.

Если $N = 2K$ для некоторого $K \in \mathbb{N}$, то:

$$S_N = \sum_{n=1}^{2K}(-1)^{n-1}a_n = \sum_{k=1}^{K} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{K} a_{2k} = \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{1}{k^2}$$

Иначе, если $N = 2K-1$ для некоторого $K \in \mathbb{N}$, то:

$$S_N = \sum_{n=1}^{2K-1}(-1)^{n-1}a_n = \sum_{k=1}^{K} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{K-1} a_{2k} = \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{1}{k^2}$$

3. Рассмотрим следующие числовые последовательности $\{S'_N\}$ и $\{S''_N\}$, такие что:

$$S'_N = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{1}{k}, N \equiv 0 \pmod 2, \\ \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}}\frac{1}{k}, N \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$S''_N = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{1}{k^2}, N \equiv 0 \pmod 2, \\ \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{1}{k^2}, N \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Тогда $\forall N \in \mathbb{N} : S_n = S'_N - S''_N$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится $\implies \lim\limits_{N\to+\infty} S'_N = +\infty$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится $\implies \lim\limits_{N\to+\infty} S'_N \in \mathbb{R}$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = +\infty \implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ расходится

∎

(b) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ тоже сходится?

Ответ: нет, не следует.

Proof:

1. Рассмотрим числовые последовательности $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ и $b_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n} + \dfrac{1}{n}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\ln n}}{\frac{(-1)^n}{\ln n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln n}{(-1)^n n} = 1$

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится по признаку Лейбница, так как $\dfrac{1}{\ln n}$ монотонно убывает к 0

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \text{ сходится} \\ \text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}\end{array}\right\} \implies \text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ расходится}$$

■

Task: 3. Докажите абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$a) \quad a_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$$

Proof:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le \dfrac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}} = b_n$
2. Рассмотрим ч.п. $c_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln^3(n)}}, n \ge 2$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{\ln^3(n)}}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+3)}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \implies b_n \sim c_n \text{ при } n \to +\infty$$

3. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ln^{\frac{3}{2}}(n)}$ сходится (смотри дз к семинару 21, задание 3) $\implies$

$\implies$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$ сходится по предельному признаку сравнения $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится $\implies$

$\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится по признаку сравнения $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно.

■

$$b)\quad a_n = \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Proof:

1. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = 1 \implies$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right|}{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(-1)^n}{n}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^3+3n}{n^3+4n}} = 1 \implies |a_n| \sim \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(-1)^n}{n}\right| \text{ при } n\to+\infty$$

2. $$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ сходится по предельному признаку сравнения $\implies$

$\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится абсолютно.

■

Task: 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$a) \quad a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\ln n}{\sqrt{n}}$

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \implies \forall x \in [3;+\infty) : f'(x) < 0 \implies a_n$ монотонно убывает, начиная с $n = 3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0 \implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится по признаку Лейбница.

2. $\forall n \geq 3 : |a_n| \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ расходится } \implies \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ расходится } \implies \sum_{n=3}^{+\infty} |a_n| \text{ расходится по признаку сравнения } \implies$$

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ расходится } \implies \text{ ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится условно.}$$

Ответ: сходится условно.

$b) \quad a_n = \dfrac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)\sqrt[4]{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{(x+2)\sqrt[4]{x+1} - x\left(\sqrt[4]{x+1} + (x+2)\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}\right)}{(x+2)^2\sqrt[2]{x+1}} =$$

$$= \frac{(x+2)\sqrt[4]{x+1}\cdot 4(x+1) - x\left(\sqrt[4]{x+1}\cdot 4(x+1) + (x+2)\sqrt[4]{x+1}\right)}{(x+2)^2\sqrt[2]{x+1}\cdot 4(x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)\cdot 4(x+1) - x\left(4(x+1)+(x+2)\right)}{(x+2)^2\sqrt[4]{x+1}\cdot 4(x+1)} = \frac{-x^2+6x+8}{4(x+1)(x+2)^2\sqrt[4]{x+1}}$$

$\forall x \in [8;+\infty) : f'(x) < 0 \implies a_n$ монотонно убывает, начиная с $n = 8$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}} = 0 \implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится по признаку Лейбница.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_n|}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{n}}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}} = 1 \implies |a_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$ при $n \to +\infty$

3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$ расходится $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ расходится $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится условно.

Ответ: сходится условно.

$c) \quad a_n = \dfrac{\cos^3(2n)}{\ln(n+1)}$

1. Применяя тригонометрическую формулу $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$:

$$\cos^3(2n) = \frac{1}{4}\cos(6n) + \frac{3}{4}\cos(2n)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(6n)}{\ln(n+1)} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n)}{\ln(n+1)}$$

2. На семинаре была доказана следующая формула:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right), \alpha \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

И далее, применяя признак Дирихле, было доказано, что для любой ч.п. $\{a_n\}$,

которая монотонно убывает к 0, следующий ряд сходится: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(k\alpha) \qquad (\#)$

3. Ч.п. $\left\{\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right\}$ монотонно убывает к 0 $\implies$

$\implies$ оба ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(6n)}{\ln(n+1)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2n)}{\ln(n+1)}$ сходятся по $(\#)$ $\implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

4. Покажем, что данный ряд сходится условно:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = \left|\frac{\cos^3(2n)}{\ln(n+1)}\right| \geq \frac{\cos^4(2n)}{n}$$

$$\cos^4(2n) = \left(\frac{\cos(4n)+1}{2}\right)^2 = \frac{\cos^2(4n) + 2\cos(4n) + 1}{4} = \frac{\frac{\cos(8n)+1}{2} + 2\cos(4n) + 1}{4} =$$

$$= \frac{1}{8}\cos(8n) + \frac{1}{2}\cos(4n) + \frac{3}{8} \implies$$

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^4(2n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8}\cdot\cos(8n)\cdot\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\cos(4n)\cdot\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(8n)}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(4n)}{n} + \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(8n)}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(4n)}{n}$ сходится по $(\#)$

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos^4(2n)}{n}$ расходится $\implies$

$\implies \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ расходится по признаку сравнения $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится условно.

Ответ: сходится условно.

$d) \quad a_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$

1. Преобразуем n-е слагаемое ряда:

$$a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

1. Применяя формулу Маклорена при $n \to +\infty$:

$$a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} + \overline{o}\left(\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ при } n \to +\infty$$

2. Обозначим данную $\overline{o}\left(\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)$ как b_n и докажем, что $b_n = \overline{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ при $n \to +\infty$:

По определению о-малого:

$$b_n = \overline{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ as } n \to +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \cdot \overline{o}\left(\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \cdot \overline{o}\,(1) = \lim_{n\to+\infty} \sin(n) \cdot \overline{o}\,(1) = 0$$

3. Таким образом, доказали, что $b_n = \overline{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ при $n \to +\infty \implies$

$$\implies a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} + \overline{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2(n)}{n} + \overline{o}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) \text{ при } n \to +\infty$$

Аналогично можно доказать, что $\overline{o}\left(\dfrac{\sin(n)}{n}\right) = \overline{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to +\infty$

Следовательно, $a_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \dfrac{\sin^2(n)}{n} + \overline{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to +\infty$

4. Применяя тригонометрическую формулу $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$, получим:

$$a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2n)}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \to +\infty$$

5. $\forall N \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2n)}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

где $\overline{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ - бесконечно малая ч.п. при $n \to +\infty$

Оба ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n}$ сходится по признаку Дирихле (смотри (#) в задании 4 c))

Покажем, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ расходится:

$\forall N \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \overline{o}\,(1)\right)$ где $\overline{o}\,(1)$ - бесконечно малая ч.п. при $n \to +\infty$

Обозначим данную $\overline{o}(1)$ как c_n.

По определению бесконечно малой ч.п.: $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0 \implies$

$$\implies (\forall\varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n > N_\varepsilon : |c_n - 0| < \varepsilon) \implies \left(\exists N_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}\, \forall n > N_{\frac{1}{2}} : |c_n| < \frac{1}{2}\right) \implies$$

$$\implies \left(\forall n > N_{\frac{1}{2}} : \frac{-1}{2} < c_n < \frac{1}{2}\right) \implies \left(\forall n > N_{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} < 1 + c_n < \frac{3}{2}\right) \implies \left(\forall n > N_{\frac{1}{2}} : \frac{1}{n}(1 + c_n) > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}\right)$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=N_{\frac{1}{2}}+1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=N_{\frac{1}{2}}+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ расходится $\implies$

$\implies$ ряд $\sum\limits_{n=N_{\frac{1}{2}}+1}^{+\infty} \frac{1}{n}(1 + c_n)$ расходится по признаку сравнения $\implies$

$\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(1 + c_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ расходится $\implies$

$\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n} - \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Ответ: ряд расходится.