Лекция 18, 31.01.24

Теорема Кэли: $\forall$ конечная группа порядка n изоморфна некот. подгруппе в группе S_n (гр. подстановок или симметр. группе).

□ Пусть G - группа, $|G| = n$.

$\forall a \in G$ рассм. отображение: $L_a : G \to G$, действ. по формуле:

$L_a(g) = ag$. $\forall g \in G$ (т.е. это умножение слева на a, или „левый сдвиг").

Пусть $\underset{g_1}{e}$, g_2, g_3, ..., g_n - эл-ты гр. G, тогда

a, ag_2, ag_3, ..., ag_n - это те же эл-ты, но в другом порядке.

(если $ag_i = ag_j$, то $a^{-1}ag_i = a^{-1}ag_j \iff g_i = g_j$, т.е. „склеиваний" нет)

$\Rightarrow L_a$ - это биективное отображение, т.е. перестановка эл-тов гр. G.

При этом мн-во отображений L_a устроено хорошо:

1) Есть нейтр. эл-т: $L_e = eg = g = Id$

2) $\forall a$ $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$, т.е. $\forall L_a$ есть обратный $(L_{a^{-1}}(L_a(g)) = a^{-1}ag = g)$

3) $L_{ab}(g) = (a \cdot b) \cdot g \underset{\text{(из ассоц. в G)}}{=} a \cdot (b \cdot g) = L_a(L_b(g))$

$\Rightarrow L_{ab} = L_a \circ L_b$ (ассоц., как композиция отображений)

$\Rightarrow$ Мн-во $\{L_e, L_{g_2}, L_{g_3}, \dots, L_{g_n}\}$ образует подгруппу H в группе $S(G)$ всех биективных отображ. в себя.

H - подгруппа, т.к. это мн-во замкнуто относит. операции и взятия обратного (св-ва 2 и 3) и есть нейтр. эл-т (св-во 1)

$\Rightarrow H \subseteq S(G)$ - подгруппа

При этом $S(G) \cong S_n$, потому что биективные отображения элементов $g_1, \ldots, g_n$ ничем не отличаются от биект. отображ. $1, 2, \ldots, n$, т.е. подстановок.

Покажем, что $\varphi : a \mapsto L_a$ $(\varphi : G \to H)$ - изоморфизм.

Это гомоморфизм, т.к. $\varphi(a \cdot b) = L_{ab} \overset{\text{(св-во 1)}}{=} L_a \circ L_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ и число эл-тов в G и в H совпадает.

$\Rightarrow \varphi$ - биективно $\Rightarrow \varphi$ - изоморфизм. ■

Напоминание: H - нормальная подгруппа в G, если $\forall g \in G$ $gH = Hg$.

Пример: S_n - группа подстановок длины n (симметр. группа)

$H = A_n$ - подгруппа чётных подстановок (знакопеременная группа)

A_n - нормальная подгруппа в S_n.

Опр: Пусть H - нормальная подгруппа в G ($\forall g \in G$ $gH = Hg$). Множество левых (или правых) смежных классов с операцией умножения смежных классов: $(g_1 H) \cdot (g_2 H) = (g_1 \cdot g_2) H$ называется **факторгруппой** группы G по подгруппе H.

Обознач: $G/_H$ - факторгруппа G по нормальной подгруппе H.

Замеч: Умножение задано корректно, т.к. из нормальности H следует, что результат умножения (смежных классов) не зависит от выбора представителя класса.

□ Пусть g_1 и $g_1' \in g_1H$ $\iff$ $g_1' = g_1h_1$, $g_2' = g_2h_2$, где h_1 и $h_2 \in H$

g_2 и $g_2' \in g_2H$

$$(g_1H)\cdot(g_2H) = (g_1\cdot g_2)H$$
$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel\, ?$$
$$(g_1'H)\cdot(g_2'H) = (g_1'\cdot g_2')H$$

$$g_1'\cdot g_2' = g_1 h_1\cdot g_2 h_2 = g_1 g_2 g_2^{-1} h_1 g_2 h_2$$

Покажем, что $\exists h_3 \in H : g_2^{-1}h_1g_2 = h_3$, если H - нормальная подгр.

Это так, поскольку если $Hg_2 = g_2H$, то $\exists h_3 \in H$:

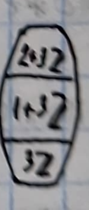
$$h_1g_2 = g_2h_3 \iff h_3 = g_2^{-1}h_1g_2$$

Следовательно, $(g_1'g_2')H = (g_1h_1)(g_2h_2)H = g_1g_2\underbrace{g_2^{-1}h_1g_2}_{\in H}\underbrace{h_2}_{\in H}\cdot H =$

$= g_1g_2h_3\cdot h_2\cdot H = g_1g_2H \Rightarrow$ умножение корректно ■

Замеч: Факторгруппа явл. группой, т.к. операция корректна (если H - норм. подгр.), операция ассоциативна, есть нейтр. эл-т $e\cdot H = H$, и $\forall$ см. класса gH есть обратный $(gH)^{-1} = g^{-1}H$.

Пример: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = (\{\underset{\bar{0}}{3\mathbb{Z}}, \underset{\bar{1}}{1+3\mathbb{Z}}, \underset{\bar{2}}{2+3\mathbb{Z}}\}, +) \cong \mathbb{Z}_3$



$$(1+3\mathbb{Z}) + (2+3\mathbb{Z}) = (1+2) + 3\mathbb{Z} = 3+3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$$

Теорема о гомоморфизме

Пусть f - гомоморфизм групп, $f: G_1 \to G_2$.

Замеч: Ядро $\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G_1 \mid f(g) = e_2\}$ гомоморфизма f всегда является нормальной подгр. в G_1.

Опр: Образом гомоморфизма $f: G_1 \to G_2$ наз-ся мн-во

$Im\, f = \{g_2 \in G_2 \mid \exists g_1 \in G_1\} : f(g_1) = g_2\} = f(G_1) \subseteq G_2$

Замеч: $Im\, f$ есть подгруппа в G_2 (необязат. норм.)

□ Замкнутость по операции (по опр. гом-зма);

$e_2 \in Im\, f$, т.к. $e_2 = f(e_1)$;

$\forall f(g)\ \exists$ обратный $(f(g))^{-1} = f(g^{-1})$ (по св-ву гом-зма) ■

Теорема (о гом-зме групп):

Пусть $f: G_1 \to G_2$ - гомоморфизм групп. Тогда группа $Im\, f = \{g_2 \in G_2 \mid \exists g_1 \in G_1 : f(g_1) = g_2\}$ изоморфна факторгруппе $G_1 / Ker\, f$. То есть $\boxed{G_1 / Ker\, f \cong Im\, f} \subseteq G_2$.

□ Рассмотрим отображение $\tau : G_1 / Ker\, f \to G_2$, заданное формулой $\tau(\underbrace{gH}_{g \cdot Ker\, f}) = f(g)$

(здесь H есть $Ker\, f$)

1) Проверим корректность определения τ, т.е., что результат отображения не зависит от выбора представителя см. класса.

$\forall h_1, h_2 \in Ker\, f$.

$$\overset{\tau(gh_1H)}{f(g \cdot h_1)} = f(g) \cdot \underset{e_1 \text{ (по опр. } Ker)}{f(h_1)} = f(g) \cdot e_2 = f(g) = f(g) \cdot \underset{e_2}{f(h_2)} = \overset{\tau(gh_2H)}{f(g \cdot h_2)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ отображ. τ задано корректно $(\tau(\underbrace{gh_1}_{g'}H) = f(g) = \tau(\underbrace{gh_2}_{g''}H))$

$g', g'' \in gH$

2) Покажем, что τ - гомоморфизм.

$$\tau((g \cdot Ker\, f) \cdot (g' \cdot Ker\, f)) \overset{\text{по опр. умн. см. кл.}}{=} \tau((g \cdot g') \cdot Ker\, f) = f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g') = \tau(g \cdot Ker\, f) \circ \tau(g' \cdot Ker\, f)$$

3) Отображение τ сюръективно на $\mathrm{Im}\, f$ по опр. (берём эл-ты $f(g)$ в качестве результата)

τ инъективно, т.к. $\tau(gH) = f(g) = e_2 \Leftrightarrow g \in \mathrm{Ker}\, f$

$\Rightarrow gH = g \cdot \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow$ это означает инъективность

по критерию о тривиальности ядра гомоморфизма.

$\Rightarrow \tau$ - биективен (на $\mathrm{Im}\, f \Rightarrow \tau$ - изоморфизм из $G_1/\mathrm{Ker}\, f$ в $\mathrm{Im}\, f$

и $G_1/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$. ∎