Homework 2.

#9.

$A_{2\times5}=\begin{pmatrix}5&1&2&-1&0\\1&4&-3&2&2\end{pmatrix}$ $B_{4\times3}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&3\\-2&1&4\\0&0&3\end{pmatrix}$ $C_{2\times4}=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\-3&0&1&2\end{pmatrix}$

$D_{2\times2}=\begin{pmatrix}4&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $F_{3\times2}=\begin{pmatrix}-4&1\\12&-7\\1&1\end{pmatrix}$

М-ца A может располагаться только в конце, т.к. нет м-ц вида $5\times k$.

Предпоследней могут быть м-цы D и F, т.к. только они имеют вид $k\times2$.

1) Если D, то третья – м-ца F, дальше B и C. $\Rightarrow C\cdot B\cdot F\cdot D\cdot A$.

2) Если F, то третья – м-ца B, дальше C и D $\Rightarrow D\cdot C\cdot B\cdot F\cdot A$.

① $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\-3&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&3\\-2&1&4\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-5&-2&7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&3\\-5&-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&1\\12&-7\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\3&16\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1&4\\3&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\28&-3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&1\\28&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1&2&-1&0\\1&4&-3&2&2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&4&-3&2&2\\137&16&65&-34&-6\end{pmatrix}}$

② $\begin{pmatrix}4&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\-3&0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&-5&-2\\1&2&-1&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}7&8&-5&-2\\1&2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&3\\-2&1&4\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&2&5\\1&0&3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}9&2&5\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&1\\12&-7\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&0\\-1&4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-7&0\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1&2&-1&0\\1&4&-3&2&2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-35&-7&-14&7&0\\-1&15&-14&9&8\end{pmatrix}}$

#10.

$AS = SA,\quad S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$AS = \begin{pmatrix} 3a & a+3b & b+3c \\ 3d & d+3e & e+3f \\ 3g & g+3h & h+3i \end{pmatrix}$$

$$SA = \begin{pmatrix} 3a+d & 3b+e & 3c+f \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a = 3a+d \\ a+3b = 3b+e \\ b+3c = 3c+f \\ 3d = 3d+g \\ d+3e = 3e+h \\ e+3f = 3f+i \\ 3g = 3g \\ 3h = g+3h \\ h+3i = 3i \end{cases} \quad \begin{cases} d=0 \\ a=e \\ b=f \\ g=0 \\ d=h \\ e=i \\ g\in\mathbb{R} \\ g=0 \\ h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=g=h=0 \\ a=e=i \\ b=f \end{cases}$$

Следовательно, $A = \boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$

#11.

$$\overset{①}{(E_{12} + 2E_{13} - E_{21} - E_{32})}\overset{②}{(E_{13} + 2E_{22} + 3E_{31})}\overset{③}{(E_{11} - 4E_{23})}$$

① $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

#12

Возможно, матрица A может иметь любой вид, если она коммутирует со всеми диагональными матрицами.

P.S. вряд ли это верно :(.