Дискретная математика. HSE-SE-DM-HW6.

Ахундов Алексей Назимович

Март 2021

Содержание

Задача 1 **2**
Пункт a 2
Пункт b 2
Пункт c 2

Задача 2 **2**

Задача 3 **2**

Задача 4 **3**

Задача 5 **3**

Задача 6 **3**

Задача 7 **4**

Задача 8 **4**

Задача 9 **5**

Задача 10 **5**
Пункт a 5
Пункт б 5

Задача 1

Пункт a

$$A = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (b, a), (c, b)\}$$

Пункт b

$$A = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$$

Пункт c

Такого не существует

Задача 2

В P, Q нет пар с одинаковыми элементами, их же не будет в объединении и пересечении (т.к. их нет в исходных)

В P^{-1} в парах элементы меняются местами, а так как нет одинаковых элементов в P, не будет и в P^{-1}

Задача 3

Рассмотрим следующий изоморфизм:

$$x \in A, \varphi(x) = \{y \mid y \in A \wedge y \leq x\}$$

Это инъекция, поскольку не может быть у различных элементов одинаковый набор меньше равных ему, и это сюръекция, поскольку для каждого такого множества, беря максимальный из него, получим однозначно соответствующий x, т.е. φ – биекция.

φ сохраняет порядок, поскольку:

$$\forall x, y \in A : \begin{cases} \varphi(x) \subseteq \varphi(y) & x \leq y \\ \varphi(y) \subseteq \varphi(x) & y \leq x \end{cases}$$

Задача 4

Простроим следующую цепь: изначально будем отталкиваться от опрорного элемента - множества всех четных чисел. Предшествующие элементы строятся разностью опорного элемента и множества первых n четных чисел:

$$\dots \leftarrow,\ 2\mathbb{N} \setminus \{0, 2\},\ 2\mathbb{N} \setminus \{0\},\ 2\mathbb{N}$$

Последующие элементы строятся объединением опорного элемента с множеством первых n нечетных чисел:

$$\dots \leftarrow,\ 2\mathbb{N} \setminus \{0, 2\},\ 2\mathbb{N} \setminus \{0\},\ 2\mathbb{N},\ 2\mathbb{N} \cup \{1\},\ 2\mathbb{N} \cup \{1, 3\},\ \rightarrow \dots$$

Видно, что мы можем сколь угодно много продолжать цепочку в обе стороны (влево - получая каждый раз новый минимум, вправо - получая каждый раз новый максимум), при этом не нарушая порядка, значит эта цепь не имеет наибольшего и наименьшего элементов.

Задача 5

Максимальный элемент - единственный, значит ему нет равных, т.е. $\forall a \in A : b \leq x, b \neq x \implies x -$ наибольший

Задача 6

Нужно найти такой порядок, что любые элементы множества были сравными по нему, т.е. чтобы не возникало ситуации:

$$\overline{a \leq b} \wedge \overline{b \leq a},\ \text{где } R - \text{отношение порядка}$$

Введем следующее отношение порядка:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) = \begin{cases} x_1 \leq x_2 & x_1 \neq x_2 \\ y_1 \leq y_2 & x_1 = x_2 \end{cases}$$

Оно рефлексивно из-за $\leq$ над $\mathbb{R}$ (второй случай - условие $x_1 = x_2$). Проверим остальные свойства:

Антисимметричность

Какие-то компоненты равны из-за $\leq$ над $\mathbb{R}$, рассмотрим случаи: $x_1 = x_2$, то равны и $y_1 = y_2$ (поскольку выполнилось сравнение при равных x); $y_1 = y_2$ - произошло сравнение компонент y, то есть компоненты x равны

Транзитивность

Дано: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2), (x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$, значит: либо $x_1 \leq x_2$, $x_2 \leq x_3$: $x_2 = x_3 \implies x_1 \leq x_3$, $x_2 \leq x_3 \implies x_1 \leq x_3$ - выполнено, либо $x_1 = x_2, y_1 \leq y_2$: $x_2 \leq x_3 \implies x_1 \leq x_3$, $x_2 = x_3, y_2 \leq y_3 \implies y_1 \leq y_3$ - выполнено

Теперь докажем, что порядок линеен:

$$\overline{(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)} \wedge \overline{(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)}$$

Первое условие означает: $x_1 > x_2 \equiv x_2 > x_1$, но тогда второе условие точно истино, поскольку $x_2 \neq x_1, x_2 > x_1$

Задача 7

Пусть такой изоморфизм φ существует, тогда возьмем некоторый ε такой, что:

$$-\varepsilon \leq 0 \leq \varepsilon$$

Теперь рассмотрим куда передут в таком случае элементы для ε. Поскольку φ - изоморфизм:

$$\varphi(-\varepsilon) \leq \varphi(0) \leq \varphi(\varepsilon)$$

А теперь устремим ε к нулю (рассмотрим окрестность нуля):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(-\varepsilon) \leq \varphi(0) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\varepsilon)$$

При этом известно, что пределы с двух сторон равны нулю, тогда по теореме о зажатой последовательности:

$$\varphi(0) = 0$$

Противоречие.

Задача 8

Проверим свойства отношения эквивалентности:

Рефлексивность

$$(a, b)S(a, b) \equiv (ab = ba \wedge b \neq 0) \vee (a = a \wedge b = 0) \equiv b \neq 0 \vee b = 0 - \text{Истина}$$

Симметричность

$$(a, b)S(c, d) \equiv (ad = bc \wedge b \neq d \neq 0) \vee (a = c \wedge b = d = 0)$$

$$\begin{aligned}(c, d)S(a, b) &\equiv (cb = da \wedge d \neq b \neq 0) \vee (c = a \wedge d = b = 0) \\ &\equiv (ad = bc \wedge b \neq d \neq 0) \vee (a = c \wedge b = d = 0)\end{aligned}$$

Преобразование сделано с учетом свойств натуральных чисел и их эквивалентности. Симметричность соблюдается.

Транзитивность

Либо произведение первого и четвертого, второго и третьего элементов равны, либо равны первый и четвертый элементы, второй и третий равны нулю.

Пусть последние элементы пар ненулевые, тогда произведения в аргументах будут равны и транзитивность выполнена, иначе первые элементы пар равны - транзитивность выполнена.

Данное отношение - отношение эквивалентности.

Задача 9

Должна соблюдаться рефлексивность, симметричность и антисимметричность - одновременно, транзитивность. Симметричность и антисимметричность выполняются одновременно только когда их посылки одновременно не выполняются, то есть отношение R состоит только из пар с одинаковыми элементами (чтобы выполнять рефлексивность):

$$R = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

Задача 10

Пункт а

Рефлексивность

Возьмем $\sigma : \sigma(x) = x$. Тогда: $fEf = f \circ \sigma = f$, - рефлексивность выполняется

Симметричность

Пусть для некоторой σ:

$$\sigma : f = g \circ \sigma \implies f \circ \sigma^{-1} = g$$

Т.е. в качестве σ для симметричной пары можно взять обратную к σ, поскольку это биекция, - симметричность выполняется.

Транзитивность

Пусть известно, что верно:

$$fEg \equiv f = g \circ \sigma_1,\ gEk \equiv g = k \circ \sigma_2$$

Тогда рассмотрим

$$fEk \equiv f = k \circ \sigma_3 \implies g \circ \sigma_1 = k \circ \sigma_3 \implies k \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = k \circ \sigma_3 \implies \sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$$

То есть мы всегда можем взять третью подстановку как композицию второй и первой, - транзитивность выполняется.

Пункт б

$2^N \setminus E$ - множество классов эквивлентности по нашем отношению. Будем рассматривать $2^{\mathbb{N}}$ как множество цепочек бесконечной длины состоящих из нулей и единиц в зависимости от результата функции. Рассмотрим все классы эквивалентности:

Единиц в цепочках конечно (одинаковое число), - таких счетно (как и количество единиц)
Нулей в цепокчках конечно, - аналогично
Обоих бесконечно, - ровно один класс

Получаем, что классов счетное количество, что и требовалось доказать.