Лекция 17, 26.01.24

Теорема КШБ: $A \lesssim B \wedge B \lesssim A \Rightarrow A \sim B$.

Пример: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\Downarrow$

$\mathbb{N} \lesssim \mathbb{Z} \lesssim \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{N} \lesssim \mathbb{Q}$

хотим: $\mathbb{Q} \lesssim \mathbb{N}$

$-\frac{2}{3} = -\frac{10}{15} = -\frac{14}{21} = \ldots$

|| у каждого рац. числа q есть единств. неприводим. представление

$q = \pm \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $НОД(m,n) = 1$

Пример: $0 = +\frac{0}{1} = -\frac{0}{1}$ $\quad -\frac{14}{21} = -\frac{2}{3}$

$$f(q) = \begin{cases} (0, m, n), & \text{если } q = \frac{m}{n} \wedge НОД(m,n) = 1 \wedge m,n \in \mathbb{N} \\ (0, 0, 1), & \text{если } q = 0 \\ (1, m, n), & \text{если } q = -\frac{m}{n} \wedge m,n \in \mathbb{N} \wedge НОД(m,n) = 1 \end{cases}$$

$\| \ f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^3$

при этом: $f(q) = (\varepsilon, m, n) \Rightarrow q = (-1)^{\varepsilon} \cdot \frac{m}{n}$

$\Rightarrow$ если $f(q_1) = f(q_2)$, то $q_1 = q_2$.

Значит, f - инъекция.

$\mathbb{Q} \overset{f}{\lesssim} \mathbb{N}^3 \sim \mathbb{N}$

$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Значит, $\mathbb{Q} \lesssim \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \lesssim \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \lesssim \mathbb{N} \overset{\text{т. КШБ}}{\Longrightarrow} \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z} \lesssim \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \lesssim \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

Вывод: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.

„Континуум - гипотеза"

Было $\forall A \quad A \underset{\not\sim}{\lesssim} P(A)$

Факт: $\mathbb{R} \sim \underline{2}^{\mathbb{N}} \sim P(\mathbb{N})$

„континуум"

Вопрос:

$\mathbb{N} \lesssim X \lesssim P(\mathbb{N})$

$\Downarrow ?$

$X \sim \mathbb{N} \vee X \sim P(\mathbb{N})$

„Континуум-гипотеза"

$CH = (\forall X (\mathbb{N} \lesssim X \lesssim P(\mathbb{N}) \Rightarrow X \sim \mathbb{N} \vee X \sim P(\mathbb{N}))$ ← утв.

Известно: если аксиомы теории множеств непротивор., то

из акс. т.м. - нельзя вывести CH
- нельзя вывести $\neg CH$.

Пример 2:

$$\mathbb{R} \lesssim \mathbb{R}\times\{0\} \underset{\subseteq}{\lesssim} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim \underline{2}^{\mathbb{N}} \times \underline{2}^{\mathbb{N}} \sim (\underline{2}\times\underline{2})^{\mathbb{N}} \sim \underline{4}^{\mathbb{N}} \overset{\lesssim}{\subseteq} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \lesssim$$

$x \mapsto (x, 0)$

$$\lesssim \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (\underline{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$$

Значит, по т. КШБ:

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Г. Кантор: „Вижу, но не верю".

$X = \{\pi, e\} \subseteq \mathbb{R}$

$X^2 = \{(\pi,\pi), (\pi, e), (e, \pi), (e, e)\}$

$$X^{\underline{2}} = \{f \in P(\underline{2}\times X) \mid f : \underline{2} \to X\} = \{\{(0,e),(1,\pi)\}, \{(0,\pi),(1,e)\}, \{(0,\pi),(1,\pi)\}, \{(0,e),(1,e)\}\}$$

$(f(0), f(1)) \longleftrightarrow f$

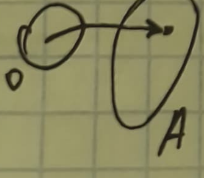
Теорема 1: $\forall A\ \forall n \in \mathbb{N} \quad A^{\underline{n}} \sim A^{n}$

Док-во: индукция по n

$n = 0 \quad A^{\underline{0}} = A^{\varnothing} = \{\varnothing\}$

$A^{0} \overset{\text{опр.}}{=} \{0\}$ $=$

$n = 1 \quad A^{\underline{1}} = A^{\{0\}} = \{(0, a) \mid a \in A\} \sim A \overset{\text{опр.}}{=} A^{1}$

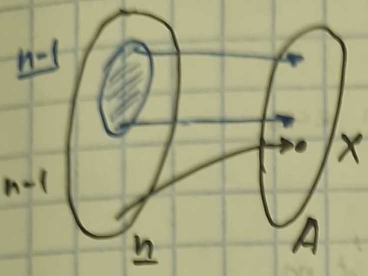


доп. $n \geq 2$ и ПИ: $A^{\underline{n-1}} \overset{\varphi}{\sim} A^{n-1}$

Рассмотрим $A^{\underline{n}} = \{ f \in \dots \mid f : \underline{n} \to A \}$

„ограничение функции“

$$f \restriction \underline{n-1} = f \cap (n-1 \times A)$$



$g = f \restriction \underline{n-1} : \underline{n-1} \to A$ $\qquad g \in A^{\underline{n-1}}$

Тогда $\varphi(g) \in A^{n-1}$

Хотим: $A^{\underline{n}} \xrightarrow[\psi]{\sim} A^{n}$

$$\psi(f) = (\varphi(\overbrace{f \restriction \underline{n-1}}^{=g}), f(n-1))$$

ψ инъект: $\psi(f_1) = \psi(f_2) \Rightarrow \begin{cases} f_1(n-1) = f_2(n-1) \\ \varphi(f_1 \restriction \underline{n-1}) = \varphi(f_2 \restriction \underline{n-1}) \end{cases}$

φ биекц: $\Rightarrow \begin{cases} f_1(n-1) = f_2(n-1) \\ f_1 \restriction \underline{n-1} = f_2 \restriction \underline{n-1} \end{cases} \Rightarrow f_1 = f_2$

ψ сюръекц: пусть есть $\overbrace{(b_0, \dots, b_{n-2}, b_{n-1})}^{=\vec{b}} \in A^n$

хочу: $\exists f : n \to A \quad \psi(f) = \vec{b}$

$\vec{b} = (\underset{\in A^{n-1}}{\vec{c}}, b_{n-1})$; т.к. φ сюръект., то $\exists h : n-1 \to A$

Пусть $f(k) = \begin{cases} h(k), & \text{если } k < n-1 \\ b_{n-1}, & k = n-1 \end{cases}$ $\qquad \varphi(h) = \vec{c}$

Тогда $f \restriction \underline{n-1} = h$ и $\psi(f) = (\varphi(f \restriction \underline{n-1}), f(n-1)) =$

$$= (\varphi(h), b_{n-1}) = (\vec{c}, b_{n-1}) = \vec{b}$$

Как определить конечное множество:

Опр: Мн-во A конечно $\Leftrightarrow \exists n (n \in \mathbb{N} \wedge A \sim \underline{n})$.

Мн-во A бесконечно $\Leftrightarrow$ A не конечно.

(?) м.б. $n \neq m$, но $\underline{n} \sim \underline{m}$? Ответ: нет.

Лемма 2. $\forall n \quad \underline{n+1} \not\lesssim \underline{n}$.

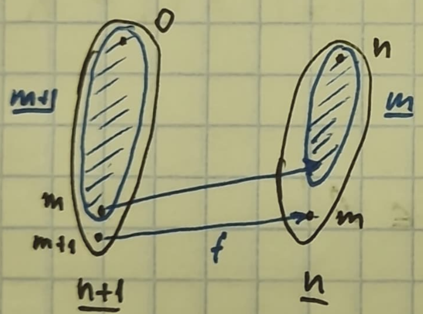
Док-во: от противного: пусть такое число n есть.

(!) по ПНЧ сущ-т такое n, что $\underline{n+1} \lesssim \underline{n}$,
но $\forall m<n \quad \underline{m+1} \not\lesssim \underline{m}$

Утв: $n \neq 0$. Иначе: $\exists f \quad \underline{1} \overset{f}{\lesssim} \underline{0} \Rightarrow f: \{0\} \to \varnothing$
$f(0) \in \varnothing$ (!)

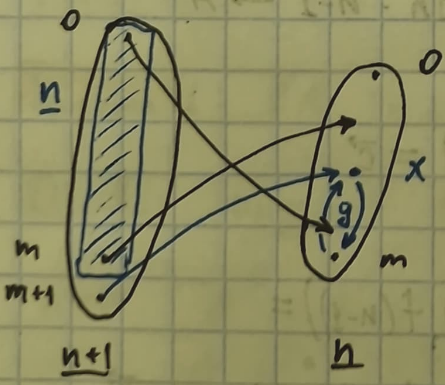
Тогда $\exists m \in \mathbb{N} \quad n = m+1$, тогда $\underline{m+1} \lesssim \underline{m}$

Допустим, $\exists f \quad \underline{n+1} \lesssim \underline{n}$



$\underline{m+1} \overset{f \restriction \underline{m+1}}{\lesssim} \underline{m}$ нам повезло.
(!)

Общий случай:



$x := f(m+1)$

Рассмотрим $g: \underline{n} \to \underline{n}$ Очевидно, что $\underline{n} \overset{g}{\sim} \underline{n}$

$$g(k) = \begin{cases} m, & k = x \\ x, & k = m \\ k, & \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим $R = \underbrace{g}_{\text{инъекция}}\circ\underbrace{(f\upharpoonright \underline{n})}_{\text{инъекция}}$

Итак, $\underline{m+1} = \underline{n} \overset{h}{\lesssim} \underline{n} = \underline{m+1}$

Утв: $m \notin \operatorname{rng} h$

Док-во: пусть $\exists k \in \underline{n} \quad h(k) = m$

$$(g\circ f\upharpoonright\underline{n})(k) = m$$

$$g(f(k)) = m$$

$$f(k) = x = f(m+1)$$

f инъекция, $n > k = m+1 = n$ $\perp$

Т.е. $\underline{m+1} \overset{h}{\lesssim} \underline{m}$

$\perp$

ч.т.д.