Лекция 11, 22.11.23

Формула Эйлера

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = Re\, e^{i\varphi} \\ \sin\varphi = Im\, e^{i\varphi} \end{cases}$$

Если взять $\varphi = \pi$: $e^{i\pi} + 1 = 0$ (тождество Эйлера, просто красиво)

Следствие: $\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}$ $\boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$

□

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\Rightarrow 2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$$ ■

Теорема: („основная" теорема алгебры)

Для $\forall$ многочлена

$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, где $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

существует корень уравнения $f(z) = 0$, и этот корень z_0 всегда принадлежит мн-ву $\mathbb{C}$ (т.е. компл. число).

Замечание: Это утверждение означает, что поле компл. чисел алгебраически замкнуто (у $\forall$ многочлена с коэфф-ми из $\mathbb{C}$ всегда есть корень из $\mathbb{C}$).

Пример: это не так для $\mathbb{R}$: $x^2 + 1 = 0$, $\pm i \notin \mathbb{R}$.

Для $\mathbb{Q}$ ($\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$) это тоже не так: $x^2 - 2 = 0$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Теорема Безу: остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-c$ равен $f(c)$.

$\square$ Разделим $f(x)$ на $x-c$ с остатком.

$$f(x) = (x-c)Q(x) + R(x), \text{ где } \underset{\uparrow}{\deg} R(x) < \underset{\uparrow}{\deg}(x-c) = 1 \Rightarrow$$

степень многочлена

$$\Rightarrow \deg R(x) = 0, \text{ т.е. } R(x) - const$$

$$f(c) = \underbrace{(c-c)\cdot Q(c)}_{=0} + const \Rightarrow R(x) = f(c) \quad \blacksquare$$

Следствие: Если делить многочлен $f(x)$ на $x-c$, где c - корень, то деление будет без остатка.

Следствие (из „осн." теоремы алгебры):

У многочлена степени n, $n \in \mathbb{N}$, над $\mathbb{C}$ (с компл. коэфф.-ми и компл. значением неизвестной) есть ровно n корней в $\mathbb{C}$ (с учётом кратности).

Идея: Находим корень $z_0 \in \mathbb{C}$ ($\exists$ по „осн." т. алгебры), потом делим на $z - z_0$ и получаем мн-н степени на 1 меньше (по т. Безу), для которого снова находим корень и т.д., пока степень положительна.

Пример: $f(z) = (z-1)^2(z^2+1)$, $\deg f = 4 = n \Rightarrow$ корни $z_1 = i$

$z_2 = -i$

$z_{3,4} = 1$ (кратность 2)

Опр: Разложение многочлена $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ называется нетривиальным, если $\begin{cases} \deg g < \deg f, \\ \deg h < \deg f, \end{cases}$ где $\deg f$ - степень f.

Пример: $f = (x^2+1)(x-1)$ - нетрив. разл., т.к. $\deg(x^2+1) = 2 < 3 = \deg f$ и $\deg(x-1) = 1 < 3 = \deg f$.

Опр: Многочлен наз-ся приводимым, если существует нетривиальное разложение $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, и неприводимым в противном случае. (над полем, из которого коэфф. f)

Утв: $\forall$ многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ представляется в виде произведения неприводимых многочленов.

Частные случаи:

1. Многочлен над $\mathbb{C}$ степени n всегда разлагается в произведение степеней линейных множителей.

$\boxed{P_n(z) = a_n (z - z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{\alpha_k}}$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_k = n$,

$\alpha_i \in \mathbb{N}$ (кратность корня)

$z_i \in \mathbb{C}$ (корни многочл.), $i = \overline{1,k}$

2. Разложение $\mathbb{R}$ (с коэфф-ми $\mathbb{R}$)

Утв: Если $z_0 \in \mathbb{C}$ явл. корнем мн-на $f(x)$ с веществ. коэфф., то $\overline{z_0}$ (компл. сопр. к z_0) тоже явл. корнем этого многочлена.

$\square$ Если z_0 - корень, то $f(z_0) = 0$, т.е.

$$f(z_0) = a_n \cdot z_0^n + a_{n-1} \cdot z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

Рассм. компл. сопряжение:

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n + \overline{a}_{n-1} \cdot \overline{z}_0^{n-1} + \ldots + \overline{a}_1 \overline{z}_0 + \overline{a}_0 = \overline{0}$$

Но $a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a}_i = a_i$, тогда

$$a_n \cdot \overline{z}_0^n + a_{n-1} \cdot \overline{z}_0^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = 0$$

т.е. $f(\overline{z}_0) = 0 \Rightarrow \overline{z}_0$ - тоже корень $\blacksquare$

Замечание:

$$(z-z_0)(z-\overline{z}_0) = z^2 - zz_0 - z\overline{z}_0 + \overset{|z_0|^2}{\overset{\shortparallel}{z_0\overline{z}_0}} = z^2 - z(z_0+\overline{z}_0) + |z_0|^2 \ominus$$

[если $z_0 = a+ib$, то $z_0+\overline{z}_0 = a+ib+a-ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}\, z_0$]

$$\ominus\ z^2 - 2\underbrace{\mathrm{Re}\, z_0}_{\in\mathbb{R}}\cdot z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in\mathbb{R}} \leftarrow \text{многочлен с вещ. коэфф.-ми}$$

Соответственно, разложение на неприводимые множители над $\mathbb{R}$ имеет вид:

$$f(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_s)^{k_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{l_t},\ \text{где}$$

$a_n; c_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$ $k_i, l_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $i=\overline{1,s}$, $j=\overline{1,t}$
(не все множители могут присутствовать)

Здесь квадратичные сомножители не имеют вещ. корней, а обладают парой комплексно сопряж. корней с ненулевой мнимой частью (дискриминант $D<0$).

Теорема Виета:

Пусть $c_1,\ldots,c_n$ – корни многочлена степени n:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Тогда
$$\begin{cases} a_1 = -(c_1+\ldots+c_n) \\ a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n = (-1)^n\cdot c_1\cdot\ldots\cdot c_n \end{cases}$$

Т.е. $(-1)^j a_j$ = сумме всех возможных произведений j корней.

Пример: $n=3$: $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$
$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3 = -a \\ c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3 = b\cdot(-1)^2 = b \\ c_1c_2c_3 = c\cdot(-1)^3 = -c \end{cases}$$