ФКН ПИ. Математический анализ, 2023-2024. Домашняя работа по семинару 23.

Task: 1.

Доказать, что если последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ равномерно сходятся на множестве E соответственно к $f(x)$ и $g(x)$, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ последовательность $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}$ равномерно сходится к $\alpha f(x) + \beta g(x)$ на E.

Proof:

1. По определению равномерной сходимости:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n > N_1\, \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n > N_2\, \forall x \in E : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

2. Рассмотрим $N_3(\varepsilon) = \begin{cases} \max\left(N_1\left(\left|\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right|\right), N_2\left(\left|\frac{\varepsilon}{2\beta}\right|\right)\right), \alpha \neq 0 \land \beta \neq 0 \\ N_2\left(\left|\frac{\varepsilon}{2\beta}\right|\right), \alpha = 0 \land \beta \neq 0 \\ N_1\left(\left|\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right|\right), \alpha \neq 0 \land \beta = 0 \\ 1, \alpha = 0 \land \beta = 0 \end{cases}$

Тогда: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 = N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3\, \forall x \in E : \left|f_n(x) - f(x)\right| < \left|\dfrac{\varepsilon}{2\alpha}\right|$

Т.к. $\varepsilon > 0$, то: $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \left|\dfrac{\varepsilon}{2\alpha}\right| \implies |\alpha|\left|f_n(x) - f(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \implies -\dfrac{\varepsilon}{2} < \alpha f_n(x) - \alpha f(x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Следовательно: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 = N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3\, \forall x \in E : -\dfrac{\varepsilon}{2} < \alpha f_n(x) - \alpha f(x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

По аналогии: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 = N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3\, \forall x \in E : -\dfrac{\varepsilon}{2} < \beta g_n(x) - \beta g(x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

3. Таким образом:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 = N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3\, \forall x \in E : -\varepsilon < \alpha f_n(x) - \alpha f(x) + \beta g_n(x) - \beta g(x) < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 = N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3\, \forall x \in E : -\varepsilon < \big(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\big) - \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 = N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3\, \forall x \in E : \Big|\big(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\big) - \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\Big| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 = N_3(\varepsilon)\, \forall n > N_3\, \forall x \in E : \Big|\big(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\big) - \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\Big| < \varepsilon$

Т.е. по определению $\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} \alpha f(x) + \beta g(x)$

■

Task: 2.

Доказать, что если последовательность $\left\{f_n(x)\right\}$ равномерно сходятся на множестве E к $f(x)$ и $g(x)$ - ограниченная на E функция, то последовательность $\left\{f_n(x) \cdot g(x)\right\}$ равномерно сходится к $f(x) \cdot g(x)$ на E

Proof:

1. По определению равномерной сходимости:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n > N_1 \, \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
2. По определению функции, ограченной на множестве:
$\exists C > 0 \, \forall x \in E : |g(x)| < C$
3. Рассмотрим $N_2(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{C}\right)$
Тогда: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 \in \mathbb{N} \, \forall n > N_2 \, \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{C}$
Т.к. $\varepsilon > 0 \wedge C > 0$, то: $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{C} \implies |g(x)| \cdot \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \cdot \dfrac{|g(x)|}{C} \implies$
$\implies \left|f_n(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)\right| < \varepsilon$
3. Таким образом:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \, \forall n > N_2 \, \forall x \in E : \left|f_n(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)\right| < \varepsilon$
Т.е. по определению $f_n(x) \cdot g(x) \underset{n \to +\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x) \cdot g(x)$

■

Task: 3.

Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\left\{f_n(x)\right\}$ на множестве E

a) $f_n(x) = (x-1)\arctan(x^n), E = (0; +\infty)$
1. $0 < x < 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} \arctan(x^n) = 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} (x-1)\arctan(x^n) = 0$
Следовательно $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
2. $x = 1$
$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = 0 \implies f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
3. $x > 1$
$x > 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty \implies \lim\limits_{n \to +\infty} \arctan(x^n) = \dfrac{\pi}{2} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} (x-1)\arctan(x^n) = \dfrac{\pi}{2}(x-1)$
Ответ: $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, 0 < x \le 1 \\ \frac{\pi}{2}(x-1), x > 1 \end{cases}$

b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $E = [0; +\infty)$

$f_n(x) = e^{\frac{\ln\left(1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}{n}}$

1. $0 \leq x < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}{n} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^0 = 1$$

2. $x = 1$

$f_n(x) = e^{\frac{\ln\left(2+\frac{1}{2^n}\right)}{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)}{n} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^0 = 1$$

3. $1 < x < 2$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}{\ln(x^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x^n) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{\ln(x^n)} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{\ln(x^n)} = 1 \implies$$

$$\implies \ln\left(1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right) \sim \ln(x^n) \text{ as } n \to +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x^n)}{n} =$$

$$= \ln(x) \implies \forall x \in (1; 2) : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$$

4. $x = 2$

$f_n(x) = e^{\frac{\ln\left(1+2^{n+1}\right)}{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + 2^{n+1}\right)}{\ln\left(2^{n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(2^{n+1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\ln\left(2^{n+1}\right)} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\ln\left(2^{n+1}\right)} = 1 \implies$$

$$\implies \ln\left(1 + 2^{n+1}\right) \sim \ln\left(2^{n+1}\right) \text{ as } n \to +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + 2^{n+1}\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(2^{n+1}\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\ln(2)}{n} = \ln(2)$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} f_n(2) = 2$$

5. $x > 2$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}{\ln\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} + \frac{x^n}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\right)}{\ln\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)} =$$

$$= 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n\right)}{\ln\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)} = 1 \implies \ln\left(1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right) \sim \ln\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right) \text{ as } n \to +\infty \implies$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln\left(\frac{x^2}{2}\right)}{n} = \ln\left(\frac{x^2}{2}\right) \implies$$

$$\implies \forall x > 2 : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Ответ: } f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1, 0 \le x < 1 \\ x, 1 \le x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, 2 \le x \end{cases}$$

Task: 4.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E, E_1, E_2

a) $f_n(x) = \dfrac{4n\sqrt{nx}}{3 + 4n^2 x}, E = [\delta; +\infty), \delta > 0$

1. $\forall x \in (0; +\infty) : \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4\sqrt{x}\cdot n\sqrt{n}}{4x\cdot n^2 + 3} = 0 \implies \forall x \in (0; +\infty) : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f(x)$

2. $x \in E = [\delta; +\infty), \delta > 0$

$x \ge \delta > 0 \implies 4n^2\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}} \ge 4n^2\sqrt{\delta}$

$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \dfrac{4n\sqrt{n}}{4n^2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}} \le \dfrac{4n\sqrt{n}}{4n^2\sqrt{\delta}} = \dfrac{1}{\sqrt{n\delta}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n\delta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x) = 0$ по достаточному признаку равномерной сходимости

Ответ: $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$

b) $f_n(x) = \arctan\left(\frac{n}{x}\right), E_1 = (0; a], a > 0, E_2 = (0; +\infty)$

1. $\forall x \in (0; +\infty) : \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \implies f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x) = \frac{\pi}{2}$

2. $x \in E_1 = (0; a], a > 0$

$\sup\limits_{x\in E_1} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup\limits_{x\in E_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{x}\right)\right)$

Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{x}\right)$

$g'(x) = -\frac{\frac{-n}{x^2}}{1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2} = \frac{n}{n^2 + x^2}$

$\left.\begin{array}{l} \forall x \in E_1 : g'(x) > 0 \\ E_1 = (0; a] \end{array}\right\} \implies \sup\limits_{x\in E_1} g(x) = g(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{a}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \implies$

$\implies \sup\limits_{x\in E_1} \left|f_n(x) - f(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \implies f_n(x) \overset{E_1}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$

3. $x \in E_2 = (0; +\infty)$

Покажем, что не выполняется определение равномерной сходимости:

$\exists \varepsilon = \frac{\pi}{8} > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n = N\, \exists x = N \in E_2 : \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\arctan(1) - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{8} = \varepsilon \implies$

$\implies \neg\left(f_n(x) \overset{E_2}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} f(x)\right)$

Ответ: $\forall x \in (0; +\infty) : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x) = 0$

$f_n(x) \overset{E_1}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$

$\neg\left(f_n(x) \overset{E_2}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} f(x)\right)$