Семинар 27, 11.04.24

Пусть F - поле, $\operatorname{char} F \neq 2$, V - векторное пространство над F

Рассмотрим БФ f на V.

f наз. симметричной, если $f(u,v) = f(v,u)$

f симм. $\Leftrightarrow$ её матрица симметрична.

Функция $q: V \to F$ наз. квадратичной формой, если $\exists$ БФ f на V, такая что $q(v) = f(v,v)$

В координатах: если $B = (b_{ij})$ - матрица f, то

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j$$

$\Downarrow$

$\exists$ беск. много БФ, задающих одну и ту же КФ: КФ определяется $\frac{n(n+1)}{2}$ коэфф-ми.

Но ∃! симм. БФ, задающее q: если

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$, то соответств. симм. БФ задаётся коэфф-ми $b_{ii} = a_{ii}$, $b_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$

В безкоординатной записи:

$$f(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$ (формула поляризации)

Матрицей к.ф. q наз. матрица соответствующей симметричной БФ. Отсюда $Q' = C^T \cdot Q \cdot C$ – замена базиса

$q(x) = x^T Q x$ – вычисление в коорд.

(1) Найти симм. БФ, соотв-ую КФ: $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$

Матрица: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ => симм. БФ

$x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$

Пусть q – КФ. Если в нек. базисе матрица q диагональна, то такой вид наз. канонический: $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

Канонический вид формы над $\mathbb{R}$, в котором все λ_i равны ± 1 и 0 наз. нормальным: $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$.

Канонический вид определён неоднозначно. Но над $\mathbb{R}$ числа s и t определены однозначно. Они наз. положительным и отрицательным индексом инерции.

Пусть $\dim V = n$. Форма q наз. положит. / отрицательно / неотр. / / неположит. определённой, если $\forall x \in V \setminus \{0\}$ $q(x) > / < / \geq / \leq 0$

В терминах индексов инерции: $s = n / l = n / l = 0 / s = 0$.

Форма наз. неопределённой иначе.

Любую КФ можно привести к канонич. виду подходящей заменой координат.

Метод Лагранжа:

Пусть $q(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + \ldots + a_n x_1 x_n + s(x)$, где $s(x)$ незав. от x_1.

1) $a_1 \neq 0 \Rightarrow q(x) = a_1 \left(x_1 + \frac{a_2}{2a_1} x_2 + \ldots + \frac{a_n}{2a_1} x_n\right)^2 + s_1(x)$, где $s_1(x)$ не зависит от x_1.

Делаем замену $x_1' = x_1 + \frac{a_2}{2a_1} x_2 + \ldots + \frac{a_n}{2a_1} x_n$ и переходим к s_1.

2) $a_1 = 0$. Если все $a_i = 0$, то переходим к $s(x)$.

Пусть $a_i \neq 0$. Делаем замену $x_1 = x_1' + x_i'$, $x_i = x_1' - x_i' \Rightarrow$

$\Rightarrow q(x) = a_i (x_1')^2 + \ldots$ — свели к пункту 1.

Чтобы из канонич. вида $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$, $\lambda_i \neq 0$ получить нормальный, делаем замену $x_i' = \sqrt{|\lambda_i|}\, x_i$

② $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$.

Замена $x_1 = x_1' + x_2'$

$x_2 = x_1' - x_2'$

$(x_1')^2 - (x_2')^2 + x_1' x_3 + x_2' x_3 + x_1' x_3 - x_2' x_3 = (x_1')^2 - (x_2')^2 + 2x_1' x_3 =$

$= (x_1' + x_3)^2 - x_3^2 - (x_2')^2$

Замена $x_1'' = x_1' + x_3$

$(x_1'')^2 - (x_2')^2 - x_3^2.$

Найдём замену координат.

$x_1' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$, $x_2' = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2$, $x_1'' = x_1' + x_3 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_3$

$x'' = T \cdot x$, $T = C^{-1}$ – переход между базисами

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть A – квадратная матрица порядка n.

<u>Угловыми минорами</u> A наз. миноры $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ с наборами индексов строк и столбцов $1, \dots, k$, где

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta_n \end{pmatrix}$$

Если не нужна замена координат, то можно использовать **метод Якоби**:

Пусть в нек. базисе КФ q имеет матрицу Q. Обознач. $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ – угловые миноры Q и пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$. Тогда $\exists$ базис, в котором q имеет вид: $\frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2$, где $\Delta_0 = 1$.

③ Норм. вид формы $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

Матрица: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Угловые миноры: $\Delta_1=1$, $\Delta_2=-3$, $\Delta_3=-7$.

Канонич. вид: $\frac{1}{1}x_1^2+\frac{-3}{1}x_2^2+\frac{-7}{-3}x_3^2=$

$=x_1^2-3x_2^2+\frac{7}{3}x_3^2 \Rightarrow$ норм вид $x_1^2+x_2^2-x_3^2$.

Пусть в нек. базисе e заданы формы $f(x)$ и $g(x)$, они наз. эквивалентными, если $\exists$ базис e', в котором f имеет такой же вид, как и g.

$f\sim g \Leftrightarrow f$ и g имеют одинак. канонич. вид:

если C приводит f к канонич. виду, а D приводит g к канонич. виду, то CD^{-1} приводит f к g.

④ Перевести f в g.

$f(x)=3x_1^2+10x_2^2+25x_3^2-12x_1x_2-18x_1x_3+40x_2x_3$.

$g(y)=5y_1^2+6y_2^2+12y_1y_2$

$f: 3(x_1-2x_2-3x_3)^2-12x_2^2-27x_3^2-36x_2x_3+10x_2^2+25x_3^2+40x_2x_3$

$\tilde{x}_1=x_1-2x_2-3x_3$

$3\tilde{x}_1^2-2x_2^2-2x_3^2+4x_2x_3=3(\tilde{x}_1)^2-2(x_2-x_3)^2$

$\tilde{x}_2=x_2-x_3$

$3\tilde{x}_1^2-2\tilde{x}_2^2$

$\tilde{\tilde{x}}_1=\sqrt{3}\,\tilde{x}_1$

$\tilde{\tilde{x}}_2=\sqrt{2}\,\tilde{x}_2$ $\Rightarrow \tilde{\tilde{x}}_1^2-\tilde{\tilde{x}}_2^2$

HSE

Замена: $\tilde{\tilde{x}}_1 = \sqrt{3}x_1 - 2\sqrt{3}x_2 - 3\sqrt{3}x_3$, $\tilde{\tilde{x}}_2 = \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3$, $x_3 = x_3$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g: \ 5(y_1 + \frac{6}{5}y_2)^2 - \frac{36}{5}y_2^2 + 6y_2^2$

$\tilde{y}_1 = y_1 + \frac{6}{5}y_2$

$5\tilde{y}_1^2 - \frac{6}{5}y_2^2$

$\tilde{\tilde{y}}_1 = \sqrt{5}\tilde{y}_1$

$\tilde{\tilde{y}}_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}\tilde{y}_2 \Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_1^2 - \tilde{\tilde{y}}_2 \qquad y_3 = y_3$

Замена:
$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{\frac{6}{5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{6}{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Чтобы перевести f в g нужно сделать замену базиса $C \cdot D^{-1}$.

5) Какие формы эквивалентны над $\mathbb{R}$:

$f_1 = x_1^2 - x_2x_3$

$f_2 = y_1y_2 - y_3^2$

$f_3 = z_1z_2 + z_3^2$

Нужно найти индекс инерции. Метод Якоби неприменим.

$f_1: \ x_2 = \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3$
$\quad x_3 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$
$f_1 = x_1^2 - \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2$
$s = 2$
$l = 1$

$f_2: \ \tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2 - y_3^2$
$s = 1$
$l = 2$

$f_3: \ \tilde{z}_1^2 - \tilde{z}_2^2 + z_3^2$
$s = 2$
$l = 1$

$f_1 \sim f_3$

⑦ Найти значения λ, при котором форма положит. опред.

$$5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Матрица: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

• Применяем метод Якоби, переставив, если нужно, λ в конец.

$x_2 \leftrightarrow x_3$, т.е. $x_2' = x_3$, $x_3' = x_2$

$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Он будет неприменим только при конечном кол-ве значений λ: для них делаем Лагранжа.