Лекция 20, 16.02.24 – Помним любим скорбим

Опр: $C_n^k = |P_k(\underline{n})|$

Лемма 0. $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; $k > n \Rightarrow C_n^k = 0$

тождество Паскаля: $\forall n, k \in \mathbb{N}$ $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Теорема 1. $\forall n, k \in \mathbb{N}$

$k \le n \Rightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\left(= \frac{n^{(k)}}{k!}\right)$

Док-во: Пусть $k=0$. Тогда $C_n^0 = 1 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$\| \forall n \ \forall k \ (0 < k \le n \Rightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ индукция по n.

База: $0 < k \le 0 \Rightarrow \perp$

Шаг: ПИ': $\forall k' \ (0 < k' \le n \Rightarrow C_n^{k'} = \frac{n!}{k'!(n-k')!}$

Хотим: $\forall k \ (0 < k \le n+1 \Rightarrow C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

Док-во: $0 < k \le n+1$, тогда $\exists k'$ $k = k'+1$

$k'+1 \le n+1$

$k' \le n$

$C_{n+1}^k = C_{n+1}^{k'+1} \overset{\text{т. Паск.}}{=} C_n^{k'+1} + C_n^{k'}$

I сл.: $k'+1 \le n$ $(\Rightarrow k' \le n)$, тогда по ПИ': $C_n^{k'+1} = \frac{n!}{(k'+1)!(n-k'-1)!}$,

$$C_n^{k'} = \frac{n!}{k'!(n-k')!}$$

$$C_{n+1}^{k} = \frac{n!}{(k'+1)!(n-k'-1)!} + \frac{n!}{(k')!(n-k')!} =$$

$$= \frac{n!(n-k') + n!(k'+1)}{(k'+1)!(n-k')!} = \frac{n!(n+1-k'+k')}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}$$

$$C_{n+1}^{k} = C_{n+1}^{n+1} = 1 \quad = \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-n-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!} = 1$$

Лемма 2. $\forall n \ \forall k \leq n \quad C_n^k = C_n^{n-k}$

Док-во: $C_n^k = |P_k(\underline{n})|$ $\quad \exists \varphi$

$C_n^{n-k} = |P_{n-k}(\underline{n})|$

$(x \mid \overline{x})^{\underline{n}} \quad x \in P_k(\underline{n});\ \overline{x} \in P_{n-k}(\underline{n})$

$\varphi(x) = \overline{x}$

Следствие 3. $C_{a+b}^{a} = C_{a+b}^{b}$

Лемма 3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

Док-во: индукция по n.

База: $n=0 \quad (1+x)^0 = 1 \quad = \quad C_n^0 x^0 = 1 \cdot 1 = 1$

Шаг: ПИ: $(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} = [l := k+1] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} x^l = [k := l] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k =$$

$$= C_n^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) x^k + C_n^n x^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(C_n^k + C_n^{k-1})}_{\parallel \atop C_{n+1}^k} x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k$$

Следствие 4. (Биномиальная теорема)

$\forall a, b \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

биномиальный коэфф.

Док-во: I сл.: $b=0$ $\quad (a+0)^n = a^n$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \cdot 0^{n-k} = C_n^n a^n \cdot 1 = a^n$$

II сл.: $b \neq 0$ $\quad (a+b)^n = \left(b\left(1+\frac{a}{b}\right)\right)^n = b^n\left(1+\frac{a}{b}\right)^n =$

$$= b^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Следствие 5. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n$$

Док-во: $\quad 2^n = |P(\underline{n})|$

$$P(\underline{n}) = P_0(\underline{n}) \cup P_1(\underline{n}) \cup \ldots \cup P_n(\underline{n})$$

по правилу суммы: $2^n = |P(\underline{n})| = \sum_{k=0}^{n} |P_k(\underline{n})| \overset{\text{опр.}}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

Следствие 6. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

$$(1+(-1))^n = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Опр: $sur(m,n) = |Sur(\underline{m}, \underline{n})| = |\{f : \underline{m} \to \underline{n} \mid f\text{-сюр.}\}|$

Утв: if $m < n$, then $sur(m,n) = 0$.

$sur(m,n) \leq n^m$

„не сюръекции" $X := \underline{n}^{\underline{m}} \setminus Sur(\underline{m}, \underline{n})$

$\forall f : \underline{m} \to \underline{n} \quad (f \in X \Leftrightarrow \exists k \in \underline{n} \quad k \notin \mathrm{rng}\, f$

$\Leftrightarrow \exists k \in \underline{n} \quad f : \underline{m} \to \underline{n} \setminus \{k\}$

/*

Принцип включений - исключений:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}| \quad */$$

$$X = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}$$

$$|X| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s} \sum_{0 \le i_1 < \ldots < i_s < n} |X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_s}|$$

$$f \in X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_s} \Leftrightarrow f : \underline{m} \to \underline{n} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$$

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_s$$

$$X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_s} = (\underline{n} \setminus \{i_1, \ldots, i_s\})^{\underline{n}}$$

$$|X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_s}| = |n \setminus \{i_1, \ldots, i_s\}|^{m} = (n-s)^m$$

$$|X| = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} C_n^s (n-s)^m$$

$$sur(m,n) = n^m - |X| = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (n-s)^m = sur(m,n)$$

$$n^m = (-1)^0 C_n^0 (n-0)^m$$

Следствие 8. Если $m < n$, $\sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (n-s)^m = 0$

Утв. $sur(n,n) = inj(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

Следствие 9. $\sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (n-s)^n = n!$

Формула Эйлера: $\varphi(m) = \#$ чисел в $\underline{m}$ вз. простых с m.

Пример: для 12: 0, 1, $\cancel{2}$, $\cancel{3}$, $\cancel{4}$, 5, $\cancel{6}$, 7, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\cancel{10}$, 11

$\varphi(12) = 4$.

Теорема 10. Если $m = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{a_t}$, то

$$\boxed{\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_t}\right)}$$

Пример: $12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$

① Рассмотрим $\underline{m}$ и подсчитаем числа, не вз. простые с m

$X = \{k < m \mid НОД(k, m) \neq 1\}$

$\forall k \in \underline{m} \ (k \in X \iff \exists i \ p_i \mid k)$

$X_i = \{k \in \underline{m} \mid p_i \mid k\}$

$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_t$

$$|X| = \sum_{s=1}^{t} (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le t} |X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_t}|$$

$$k \in X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_s} \iff p_{i_1} \mid k \wedge \ldots \, p_{i_s} \mid k$$

$$\iff p_{i_1} \ldots p_{i_s} \mid k$$

$$\iff \exists l \ \ k = l \cdot p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_s}$$

$0 \le k < n$, тогда $l \in \left[0, \frac{m}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_s}}\right)$

$$|X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_s}| = \frac{m}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_s}}$$

$$\varphi(m) = m - \sum_{1 \le i_1 \le t} \frac{m}{p_{i_1}} + \sum_{1 < i_1 < i_2 \le t} \frac{m}{p_{i_1} \cdot p_{i_2}} - \ldots = m\left(1 - (p_1^{-1} + \ldots + p_t^{-1}) + (p_1^{-1} p_2^{-1} + \ldots) - \ldots\right) =$$

$$= m(1 - p_1^{-1})(1 - p_2^{-1}) \cdot \ldots \cdot (1 - p_t^{-1})$$