Homework 6.

#9

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 1 \quad$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

б) -1 $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$\xrightarrow[\text{II}+\text{V}]{\text{I}-\text{V}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{V}-\text{II}]{\text{IV}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow[\text{II}+\text{III}]{\text{IV}+\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{V}-\text{IV}]{} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\begin{array}{l} \underline{V}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \underline{II}+(3)\underline{V} \\ \underline{I}+\underline{V} \\ \underline{III}-\underline{V} \\ \underline{IV}-3\underline{V} \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1/4 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \underline{II}\cdot\frac{1}{2} \\ \underline{III}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \rightsquigarrow \\ \underline{IV}\cdot\frac{1}{2} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & -3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/8 & -3/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = E_5$

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = E_5$$

#10.

а) из-за перестановки строк определитель поменяет знак, а в союзной матрице поменяются местами i-ый и j-ый столбец (из-за транспонирования в союзной), также в союзной матрице переставленные элементы поменяют знак по формуле алгебр. дополнения из-за смены позиции $(A=(-1)^{\boxed{k+l}}\cdot M_{kl})$, а оставшиеся на месте эл-ты поменяют знак из сменившего знак минора $(A=(-1)^{k+l}\cdot\boxed{M_{kl}}) \Rightarrow$ махинации знак не поменяют („–" на „–" равно „+") $\Rightarrow$ $\boxed{\text{поменяются местами } i\text{-ый и } j\text{-ый столбец.}}$

б) Из-за транспонирования в союзной матрице к i-му столбцу добавится j-й, умноженный на c, все остальные элементы и определитель не поменяются.

#11.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ -9 & 10 & -7 \end{pmatrix} \qquad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ -2 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = ei - fh \\ -3 = di - gf \\ -9 = dh - eg \\ 2 = bi - hc \\ -4 = ai - cg \\ -10 = ah - bg \\ 1 = bf - ce \\ -3 = af - cd \\ -7 = ae - db \end{cases} \qquad \begin{cases} ei - fh = bf - ce \\ di - gf = af - cd \end{cases} \qquad \begin{cases} e(i+c) = f(b+h) \\ d(i+c) = f(a+g) \end{cases}$$

ТРЭШ