Лекция 10, 15.11.23

Комплексные числа

Опр: Множество упорядоченных пар вещественных чисел (x, y) $(x, y \in \mathbb{R})$ с двумя операциями:

1) Сложение $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2) Умножение $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

называется комплексными числами.

Обознач: $\mathbb{C}$ (\mathbb C)

Запись: $z = (x, y)$

Замеч. 1: $\forall$ компл. число можно представить в виде:

$$\boxed{(x, y) = (x, 0)(1, 0) + (y, 0)(0, 1)}$$

Отождествим числа вида $(r, 0)$ с вещ. числом r.

$$(x, y) = x \cdot 1 + y(0, 1) = x + iy$$

Обозначим число $(0, 1)$ как i (мнимая единица)

Опр: $z = x + iy$ – алгебраическая форма записи к.ч.
Здесь $i = (0, 1)$

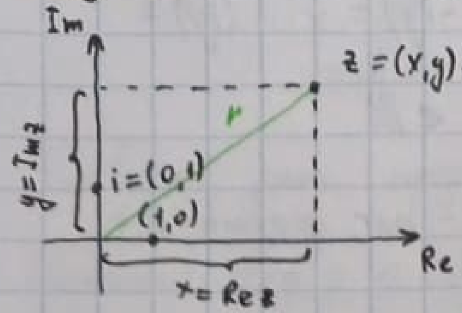
Замеч: $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Умножение в алг. форме: $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Опр: В алг. ф. записи к.ч. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, x наз. вещественной частью, y – мнимой частью.

Обознач: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$



$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

модуль к.ч. (расстояние от (x,y) до $(0,0)$)

Свойства сложения и умножения в $\mathbb{C}$

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ← коммут. $\oplus$

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ← ассоц-ть $\oplus$

3) $\exists\, 0 = (0,0) \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \quad 0 + z = z + 0 = z$ ← $\exists$ нейтр. эл. по $\oplus$

4) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = 0$ ← $\exists$ обр. эл. по $\oplus$ (противоположный)

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ ← коммут. $\odot$

6) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ ← ассоц-ть $\odot$

7) $\exists e \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \quad e \cdot z = z \cdot e = z$ ← $\exists$ нейтр. эл. по $\odot$ $(e = (1,0) = 1)$

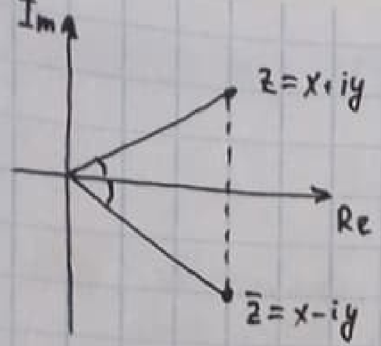
8) $\forall z \neq 0 \quad \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ ← $\exists$ обр. эл. по $\odot$

9) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ ← дистрибутивность

Замеч: Эти 9 свойств (аксиомы числового поля) позволяют назвать компл. числа числами (числовым полем)

Опр: Компл. сопряжением наз-ся смена знака у мнимой части компл. числа.

Обознач: $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$



Замеч: $z \cdot \bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - (iy)^2 =$

$= x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\underbrace{z\cdot\bar{z}}_{\in \mathbb{R}}} = \frac{\bar{z}}{\underbrace{|z|^2}_{\in \mathbb{R}}}}$ – алг. форма к.ч.

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ (z_2 \neq 0)$ $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}}$

Свойства сопр. числа

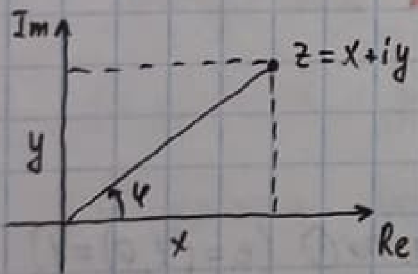
1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = z$

4) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Тригонометрическая ф. к.ч.



Перейдём к полярным координатам

$z: (x,y) \mapsto (r, \varphi)$ $\boxed{\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{cases}}$

$z = x + iy = r\cdot\cos\varphi + i\cdot r\cdot\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма записи компл. числа.

$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ – модуль к.ч.

φ – аргумент компл. ч. – угол между положит. направлением веществ. оси и числом $z = x+iy$ (отсчит. против час. стр.)

Обознач: $r = |z|$

$\varphi = Arg\, z = \{\underbrace{arg\, z}_{\text{главное знач. аргумента}} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Главное знач. аргумента $arg\, z$ выбирают на полуинтервале длины 2π.

Обычно: $arg\, z \in [0, 2\pi)$ или $arg\, z \in (-\pi, \pi]$

Свойства модуля и аргумента

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3) $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$

4) $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$

Пусть $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Умножение: $\square$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)) =$$

$$= r_1 \cdot r_2\, (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \blacksquare$$

Теорема (Формула Муавра): $\forall n \in \mathbb{N}\quad z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi))$

Док-во по мат. инд.:

□ База $n=1 \Rightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Пусть формула верна для $n=k$.

$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) \cdot r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$= r^{k+1}((\cos(k\varphi)\cdot\cos\varphi - \sin(k\varphi)\cdot\sin\varphi) + i(\cos(k\varphi)\cdot\sin\varphi + \sin(k\varphi)\cdot\cos\varphi)) =$

$= r^{k+1}(\cos((k+1)\varphi) + i\cdot\sin((k+1)\varphi)) \Rightarrow$ по ПИ верно для $\forall n \in \mathbb{N}$ ■

Извлеч. компл. корня

Теорема: $\forall n \in \mathbb{N}$ каждое к.ч. $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$ имеет ровно n различных корней n-й степени (т.е. таких к.ч. z, что $z^n = \omega$).

Как их найти?

1) Представим ω в триг. форме $\omega = \rho(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)$

2) Ищем корни z тоже в триг. форме $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

3) Исп. ф. Муавра для z:

$$z^n = r^n\cdot(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi))$$
$$\|$$
$$\omega = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

⇐ приравняем модули и аргументы в л. и пр. частях

$$\begin{cases} \rho = r^n & (\rho \text{ и } r \text{ - веществ. неотр. числа}) \\ \psi + 2\pi k = n\varphi + \cancel{2\pi l}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ ← обычный арифм. корень для неотр. вещ. числа

$\varphi = \dfrac{\psi + 2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$

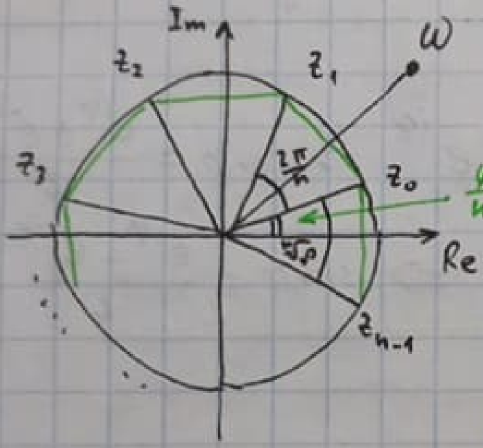
Заметим, что достаточно брать $k=\overline{0,n-1}$ (n различных углов, при $k \geq n$ углы начнут повторяться).

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{\omega} = \left\{ z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right)\right\}} \qquad k=\overline{0,n-1}$$

При $k=0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\psi}{n}$ - соотв. 1му корню z_0

$\frac{2\pi}{n} \leftarrow$ угол между соседними корнями

$\omega = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$



$\Rightarrow$ корни лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$. При этом 1й корень z_0 имеет аргумент $\frac{\psi}{n}$. А каждый след. получен поворотом на угол $\frac{2\pi}{n}$

Пример: $\sqrt[6]{1} = ?$ $\qquad \psi = 0$, $n=6$

$1 = 1\cdot(\cos(0) + i\sin(0)) \Rightarrow \rho = 1$

$\sqrt[6]{1} = \left\{ 1\left(\cos\frac{0+2\pi k}{6} + i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right)\right\} \quad k=\overline{0,5} =$

$= \left\{ \cos\frac{\pi k}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi k}{3}\right\} \quad k=\overline{0,5}$

$k=0: \ \varphi_0 = \frac{\psi}{6} = \frac{0}{6} = 0, \qquad \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ - угол поворота