Homework 9.

#1.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \le 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1)^3 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (ax+b) = b$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1$$

Чтобы функция была непрерывна, должно выполняться система:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 = b \\ a+b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ответ: $f(x)$ непрерывна при $a = 2$, $b = -1$.

#3.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^3, & x<0 \\ (x-1)^3, & 0\le x\le 2 \\ 4-x, & x>2 \end{cases}$$

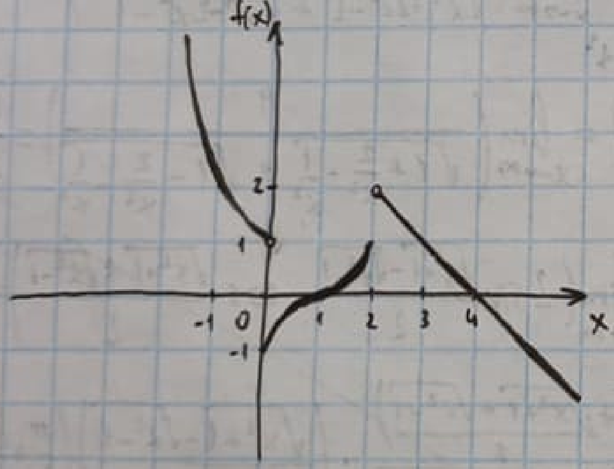
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x^3)=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)^3=-1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)^3=1 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(4-x)=2$$

Точки разрыва: $x=0$ и $x=2$. (точки разрыва 1 рода)

Множество точек, в которых функция непрерывна:

$x\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$ (или $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$).



#4.

$$y=\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3-x^2} \qquad x^3-x^2\neq 0;\ \begin{matrix} x\neq 0 \\ x\neq 1\end{matrix}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3-x^2}=\frac{1}{0}=\infty \implies$$ $x=0$ – точка разрыва 2 рода

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2(x-1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}}_{\text{з.п.}\to 1}\cdot\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cancel{(x-1)}}{x^2\cancel{(x-1)}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$ – точка разрыва 1 рода

Доопределяет функцию:

$$y = \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3-x^2}, & x \neq 1 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

#5.

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}} \Big| :x^6 = \lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x^{12}}}{\sqrt{1+\frac{5}{x^7}-\frac{1}{x^{12}}}} = 5$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right) \Big| \cdot\text{сопр.} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+2x^2-1-x^4+2x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2-1}+\sqrt{x^4-2x^2-1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2}{\sqrt{x^4+2x^2-1}+\sqrt{x^4-2x^2-1}}\right) \Big| :x^2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}\right) = \frac{4}{2} = 2$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}) - \lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2-1}) =$

$$= \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to\infty}\Big) - \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\sin\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to\infty}\Big) = \infty-\infty = 0$$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}) = \lim\limits_{y\to+\infty}(\sqrt{y^2-8y+3}-\sqrt{y^2-4y+3}) =$

замена $x=-y$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y^2-8y+3-y^2+4y-3}{\sqrt{y^2-8y+3}+\sqrt{y^2-4y+3}}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-4y}{\sqrt{y^2-8y+3}+\sqrt{y^2-4y+3}}\right) =$$

$1:y$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-4}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{8}{y}+\frac{3}{y^2}}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{4}{y}+\frac{3}{y^2}}}_{\to 1}}\right) = \frac{-4}{2} = -2$$

#2.

Пусть точка разрыва 2 рода: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ (Допустим → слева) ⊕ функция ↑

$\forall M \quad \exists L=L(M) \quad \forall x$, т.ч. $x<L \Rightarrow f(x)>M$

Чтобы функция была монотонной (пусть мон. неубывает), должно выполнятся

$\forall x_1<x_2<x_3 \quad f(x_1)\le f(x_2)\le f(x_3)$

Но $\forall x_i \quad x_0>x_i \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ точки разрыва не могут быть 2 рода.

Пусть точка разрыва y 1 рода, тогда $\lim\limits_{x\to y^-}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to y^+}f(x)=B$, причём $A\le B$ (для случая, когда $f(x)$ мон.неуб), тогда $A\le f(y)\le B$ и $\forall x_a$ т.ч. $x_a\le y \Rightarrow f(x_a)\le A$, $\forall x_b$ т.ч. $x_b\ge y$ $f(x_b)\ge B$, тогда

$f(x_a)\le A\le f(y)\le B\le f(x_b)$

$\Downarrow$

$f(x_a)\le f(y)\le f(x_b) \Rightarrow f(x)$ - монотонно неуб.

ч.т.д.

Аналогично для мон. не возраст.