

Список вопросов с доказательством для подготовки к экзамену по курсу «Алгебра»,  
4-й модуль 2023/2024-го учебного года.

1. Докажите, что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.
2. Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям.
3. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? Ответ обоснуйте.
4. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.
5. Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.
6. Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратно? Ответ обоснуйте.
7. Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.
8. Сформулируйте и докажите теорему о спектральном разложении симметрической матрицы.
9. Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении.
10. Сформулируйте и докажите утверждение о полярном разложении.
11. Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.