Лекция 24, 22.03.24

Числовые ряды

Преобразования Абеля

$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ $\qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$

$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad b_k = B_k - B_{k-1}$

$S_n = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n$

$S_1 = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1})$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n$

$\sum\limits_{i=2}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) = (a_n B_n - a_1 B_1) - \sum\limits_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$

Лемма: (неравенство Абеля) a_i монотонна и $|B_n| \leq B \quad \forall n$

тогда $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$

Док-во: $| \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} |a_{i+1} - a_i| \cdot \underbrace{|B_i|}_{\leq B} + |a_n| \underbrace{|B_n|}_{\leq B} \leq B\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} |a_{i+1} - a_i| + |a_n|\right)$

$\nearrow \; a_n - a_1 + |a_n| \leq 2|a_n| + |a_1|$

$\searrow \; -a_n + a_1 + |a_n| \leq 2|a_n| + |a_1|$

ч.т.д.

Признак Дирихле: $a_n \searrow 0$, $|B_n| \leq B$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ сход.

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$

Док-во: $\boxed{\forall \varepsilon > 0} \quad \exists N \quad \forall n, k > N \quad |S_n - S_k| < \varepsilon$

$\forall n > N \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$\forall p \in \mathbb{N}$

$\boxed{\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| < \varepsilon}$

$\boxed{\exists n_0} \quad \forall n > n_0 \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$

$\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| \leq 2B \cdot (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B}\right) = \varepsilon$

$\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right| = |B_{n+p} - B_n| \leq |B_{n+p}| + |B_n| \leq 2B$

ч.т.д.

Признак Абеля:

a_n монотон. и огр. $\oplus$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сход.

$|a_n| < M$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ сход.

Док-во: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \cdot b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot \left(\underbrace{|a_{n+1}|}_{<M} + 2\underbrace{|a_{n+p}|}_{<M}\right) < \varepsilon$$

ч.т.д.

Задача: $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}}$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot x^{k-1}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} x^k}_{\frac{x}{1-x}}\Big)'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot(1-x)+x}{(1-x)^2}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2$$

1 Сходимость функцион. послед.

$\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad x \in E$

зависит от ε и x_0

Опр: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ на E, если

$\forall x_0 \in E \quad f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > N(\varepsilon)$ $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

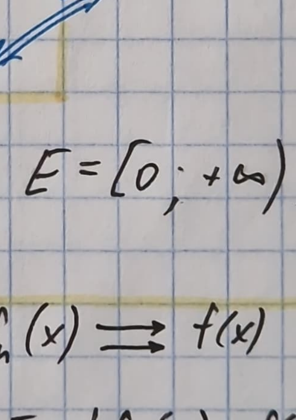
Пример: $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad E = [0; +\infty)$ $\forall x$

Опр: $f_n(x)$ сход. равн. к $f(x)$ ($f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E), если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Пример1: $\left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}\right| \le \frac{\pi/2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow n > \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2$

Пример2: $E = [0; 1) \quad f_n(x) = x^n$



$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n(x_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n = \frac{1}{n} \quad f_n(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — не угадали — грусть, печалька

$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad f_n(x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — угадали, жизнь прекрасна!

Пример 3: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $\quad E = [0; 2)$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n = \frac{1}{n}$

$f_n(x_n) = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$