Типовые задачи для подготовки к экзаменационной работе по курсу “Алгебра”, 2-ой модуль 2023/2024-го учебного года.

Задачи по теории систем линейных уравнений

1. Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}.$$

2. Можно ли заданную матрицу A представит в виде $A = LU$, где L — нижнетреугольная (то есть над диагональю нули) матрица с единицами на главной диагонали, а U — верхнетреугольная (то есть под диагональю нули) матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Номера по задачнику “Сборник задач по линейной алгебре” под редакцией И. В. Проскурякова:

708. Пользуясь методом исключения неизвестных (то есть методом Гаусса), исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25 \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40 \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65 \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95 \end{cases}.$$

742. Определить, какие из строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 25 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 40 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 65 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 95 \end{cases}.$$

Задачи по комплексным числам

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} (-2+4i)x + 3yi = -10 + 21i \\ (1+5i)x + (1-2i)y = 14 + 19i \end{cases}$.

2. Решить уравнение $z^2 - (7+i)z + (18+i) = 0$.

3. Вычислите и запишите комплексное выражение в алгебраической форме:

$$\frac{(-2+2i)^6(\sqrt{6} - \sqrt{2}i)^8}{(-4-4i)^{10}}.$$

4. Пусть $z = -\sqrt{3} - i$. Вычислить значение $\sqrt[7]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$ имеет аргумент $\frac{9\pi}{28}$. Найди модуль этого числа.

5. Найти комплексные корни многочлена $f(x)$ и разложить его на множители над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$:

а) $f(x) = x^6 - 8$ б) $f(x) = x^6 + 27$ в) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 16$.

6. Найдите комплексные корни уравнения $z^6 + \frac{\sqrt{2}(i-1)}{\sqrt{3}+i} = 0$, для которых $0 < arg z < \frac{\pi}{2}$.

Номера по задачнику “Сборник задач по алгебре” под редакцией А. И. Кострикина, издание 2009-го года:

20.4 г) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{cases}$.

22.7 Вычислить:

$$\text{к)}\ \sqrt[8]{16} \qquad \text{м)}\ \sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}.$$

Задачи по аналитической геометрии

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1,4,1\}$, $b\{2,1,3\}$, $c\{-2,0,3\}$. Найти вектор y такой, что $y \perp a$, $(y,c) = 2$, $(y,b) = 9$.

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q$, $b = p - 2q$, если $|p| = 2$, $|q| = 3$, $\widehat{(p,q)} = \frac{\pi}{3}$.

3. Даны вершины треугольника $A(-5,3)$, $B(7,8)$, $C(-2,-1)$. Составить уравнения следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. Система координат прямоугольная декартова.

4. Даны точки $E(2,1,0)$, $F(0,2,1)$, $G(1,2,0)$, $H(1,0,-2)$. Найти:
(а) объем пирамиды $EFGH$;
(б) длину высоты, проведенной из вершины H.

5. Проверить, что прямые $a: 2x = y + 1 = z + 2$, $\quad b: x - 1 = 1 - y = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости.

6. Найти точку M', симметричную точке $M(-1,2,0)$ относительно прямой $\frac{x+1/2}{1} = \frac{y+7/2}{-1/3} = \frac{z-2}{2}$.

7. Найти точку M', симметричную точке $M(3,3,3)$ относительно плоскости $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.

8. Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $x = 6t + 9$, $y = -2t$, $z = -t + 2$.

Следующие номера по задачнику Г. Д. Ким и Л. В. Крицков “Алгебра и аналитическая геометрия, том I”:

25.62 а) Доказать тождество

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

25.65. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ имело решение. Найти общее решение этого уравнения.

25.67. Рассматривается система уравнений

$$[\mathbf{a_1}, \mathbf{x}] = \mathbf{b_1}, \quad [\mathbf{a_2}, \mathbf{x}] = \mathbf{b_2},$$

в которой $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$ – заданные векторы, причём $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ не коллинеарны.

Показать, что условия

$$(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}) = 0, \quad (\mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}) = 0, \quad (\mathbf{a_1}, \mathbf{b_2}) + (\mathbf{a_2}, \mathbf{b_1}) = 0$$

необходимы для разрешимости этой системы.

При выполнении указанных условий и условия $(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_2}) \neq 0$ найти общее решение системы.

27.33. Две плоскости заданы своими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1 u + a_2 v \\ y = y_1 + b_1 u + b_2 v \\ z = z_1 + c_1 u + c_2 v \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + a_3 u + a_4 v \\ y = y_2 + b_3 u + b_4 v \\ z = z_2 + c_3 u + c_4 v \end{cases}.$$

С помощью рангов матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

27.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Oy и Oz ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

31.8. Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости Oyz, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 3.

33.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r_1})$ и перпендикулярной прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{a}t$.

33.8. Найти точку пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{a}t$ с плоскостью $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \mathbf{b}u + \mathbf{c}v$.

33.15. Найти точку, симметричную точке $M_0(\mathbf{r_0})$ относительно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \mathbf{a}t$.