Homework 7b.

#1.

Граф $B_{n,r}$ - двоичные слова длины n

Две вершины различаются в r разрядах.

$B_{1000,400}$ $\Rightarrow$ 2 вершины различаются в 400 разрядах $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти вершины одной чётности. Но тогда чётные и

нечётные никак не связаны $\Rightarrow$ $\boxed{\text{граф несвязаный}}$.

P.S. чётность по количеству единиц.

#2.

Дерево на $2n$ вершинах есть n попарно несмеж. вершин.

Любое дерево является двудольным графом, в котором есть

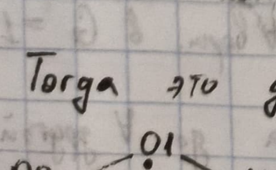
доля с $\geq \frac{2n}{2} = n$ несмежными вершинами. $\boxed{\text{ч.т.д.}}$

#3.

Булев куб B_n - двудольный куб?

Разделим куб на два множества: 1) чётная вершина связана с нечётной; 2) нечётная - с чётной (Чётность вершины - кол-во единиц) при этом множества не пересекаются.

Тогда это двудольный граф. Пример при $n=2$:



Ответ: $\boxed{\text{да.}}$

#4.

26 прямых, 43 точки, каждая прямая содержит 7 точек,
каждая точка лежит на 4 прямых

Из прямых и точек можно составить двудольный граф, т.к. прямая не содержит прямую, а точка - точку.

Тогда между прямой и точкой $26 \cdot 7 = 182$ связей,
а между точкой и прямой $43 \cdot 4 = 172$ связей

$182 \neq 172$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{нельзя}}$

#5.

В „А" и „Б" 26 учеников. 169 драк

Пусть в „А" - x человек, в „Б" - y.

Тогда, т.к. граф двудольный, максимум связей - xy.

$169 = 13 \cdot 13 \Rightarrow x = y = 13$.

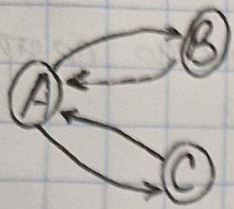
Если $x < 13$, то $xy < 169$. С учётом $x + y = 26$.

Ответ: $\boxed{13 \text{ в „А" и } 13 \text{ в „Б"}}$

#6.

Из $\forall$ вершины орграфа G порядка ≥ 2 в другую вершину ведёт 1 простой путь. Тогда полустепень $\forall$ верш. в $G = 1$?

Пусть у вершины A полустепень 2. Но тогда до $\forall$ другой вершины есть 1 простой путь. остаётся ещё одна связь, которая не будет влиять на простые пути этой вершины. Пример:



Полустепени:	2	1	1
Вершины:	A	B	C

Пути: $A \to B$, $A \to C$, $B \to A$, $C \to A$, $B \to A \to C$, $C \to A \to B$.

Ответ: нет, не обязательно.

#7.

В $\forall$ турнире есть простой (ориент.) путь, включ. все вершины.

По мат. индукции: при $n \leq 3$ - очев.

Пусть верно для n вершин.

Добавим ещё одну вершину и рассмотрим случаи:

1) Прикрепим новую вершину с началом графа $\Rightarrow$ получим автоматически связь со всеми остальными вершинами.

2) Прикрепим новую вершину в конец графа $\Rightarrow$ также получим связь со всеми вершинами.

3) Можно закрепить между двумя вершинами $\Rightarrow$ также получим простые пути во все вершины. ч.т.д.

#8.

Женщине нравится k мужчин, мужчине - k женщин.

Возьмём n женщин.

Пусть $k < n$, тогда не ко всем женщинам можно построить связь с мужчинами

Пусть $k > n$, но тогда не всем мужчинам можно построить связь.

Пусть $k = n$, тогда каждому мужчине можно сопоставить женщину и разделить на пары.

$\boxed{\text{ч.т.д.}}$