Лекция 30, 15.05.24. (Скип 2)

Евклидовы пространства

В этом разделе поле $F = \mathbb{R}$ - вещ. числа

Опр: Евклидово пространство $\mathcal{E}$ - это пара $(V, g(x,y))$, где V - лин. пространство, $g(x,y)$ - скалярное произведение, т.е. симметрическая положительно определённая билинейная форма.

Т.е. для $g: V \times V \to \mathbb{R}$ выполняются св-ва (аксиомы скал. произв.):

1) $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad g(x,y) = g(y,x)$ - симметричность

2) $\forall x, y, z \in \mathcal{E}$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \cdot g(x,z) + \beta g(y,z)$ - линейность

3) $\forall x \in \mathcal{E}$ $g(x,x) \geq 0$ и $g(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$ (нул. в-р) – полож. опр-сть.

Пример: 1. $\mathcal{E} = (V_3,\ g(x,y) = |x|\cdot|y|\cdot\cos(\widehat{x,y}))$ – евкл. пр-во.

2. $V = C[a;b]$ – функции, непр. на отрезке $[a;b]$

$g(f_1(x),\ f_2(x)) = \int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx$ – ск. пр-е.

$\Rightarrow \mathcal{E} = (C[a;b],\ g(x,y))$ – евкл. пр-во.

Опр: Пусть $\mathcal{E}$ – евкл. пр-во. Тогда величина $\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$ наз-ся <u>нормой</u> (<u>длиной</u>) вектора v.

Опр: $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{E}$, $v_1, v_2 \neq 0$. <u>Угол между векторами</u> ($\varphi \in [0;\pi]$):

$$\cos\varphi = \frac{g(v_1,v_2)}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|} = \frac{g(v_1,v_2)}{\sqrt{g(v_1,v_1)}\cdot\sqrt{g(v_2,v_2)}},$$ где φ – угол между v_1 и v_2.

Опр: $\forall x,y \in \mathcal{E}$ $\rho(x,y) = \|x-y\|$ – <u>расстояние</u> между векторами x и y.

Неравенства Коши-Буняковского и треугольника

Утв: (Нер-во К-Б): $\forall x,y \in \mathcal{E}$ $|g(x,y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|$.

$\square$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \overset{\text{"+" опр.}}{\leq} g(\lambda x - y,\ \lambda x - y) \overset{\text{линейность}}{=} \lambda\cdot g(x, \lambda x - y) - g(y, \lambda x - y) =$$

$$= \lambda^2 \cdot g(x,x) - \lambda\cdot g(x,y) - \lambda\cdot g(y,x) + g(y,y) =$$

$$= \|x\|^2\cdot\lambda^2 - 2g(x,y)\cdot\lambda + \|y\|^2$$ – кв. ур-ние относит. λ, кот. ≥ 0 при $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow D \leq 0$, где $D = 4(g(x,y))^2 - 4\|x\|^2\cdot\|y\|^2 \leq 0$

$\Rightarrow (g(x,y))^2 \leq \|x\|^2\cdot\|y\|^2 \Rightarrow |g(x,y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ $\blacksquare$

Утв: (Нер-во треугольника): $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

□ $\|x+y\|^2 = g(x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2g(x,y) + \|y\|^2 \underset{\text{по нер. К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 =$
$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow$ т.к. норма вектора всегда ≥ 0, то $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ■

Опр: Два вектора x и y из $\mathcal{E}$ наз. ортогональными, если $g(x,y) = 0$.

Опр: Система векторов $a_1, \dots, a_k$ наз.

a) ортогональной, если $g(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$, $\forall i, j = \overline{1,k}$.

b) ортонормированной, ели она ортогональна и $g(a_i, a_i) = 1 \quad \forall i = \overline{1,k}$.

Лемма 1. Пусть $a_1, \dots, a_k$ – ортогональная система векторов, и $a_i \neq 0$, $i = \overline{1,k}$. Тогда эта система л.н.з.

□ Приравняем к нулю линейную комбинацию: $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ (1)

Домножим (1) скалярно на a_i для каждого $i = \overline{1,k}$

$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k, a_i) = (0, a_i) = 0.$

$$\alpha_1 \underbrace{(a_1, a_i)}_{=0} + \dots + \alpha_i \underbrace{(a_i, a_i)}_{\neq 0} + \dots + \alpha_k \underbrace{(a_k, a_i)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_i (a_i, a_i) = 0 \Rightarrow$ т.к. $a_i \neq 0$, то $\alpha_i = 0 \quad \forall i = \overline{1,k}$.

$\Rightarrow$ по опр. система $a_1, \dots, a_k$ л.н.з. ■

Замечание: Если $\dim \mathcal{E} = n$ и $k = n$, то ортогон. в-ры $a_1, \dots, a_n$ ($a_i \neq 0 \ \forall i$) образует ортогональный базис.

Если рассмотреть $e_i = \frac{a_i}{\|a_i\|}$, $i = \overline{1,n}$ (т.е. нормировать), то получим ОНБ (ортонормированный базис).

Лемма 2. Пусть $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, т.е. x_i – коэфф. вектора x в ОНБ $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $x_i = (x, e_i)$ $\forall i = \overline{1, n}$.

Если базис не ОНБ, но ортогонален, то $x_i = \dfrac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$, $i = \overline{1, n}$.

□ $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ ← умножим скалярно на e_i, $i = \overline{1, n}$

$$(x, e_i) = x_1 \underbrace{(e_1, e_i)}_{0} + \ldots + x_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{\neq 0,\ \text{т.к. } e_i \text{ – вектор базиса}} + \ldots + x_n \underbrace{(e_n, e_i)}_{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_i = \dfrac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$, и если e – ОНБ, то $(e_i, e_i) = 1 \Rightarrow x_i = (x, e_i)$ ■

Замечание: Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – базис в $\mathcal{E}$. Тогда $g(x, y) = \underset{1\times n}{X^T} \cdot \underset{n\times n}{\Gamma} \cdot \underset{n\times 1}{Y}$, где X, Y – столбцы координат векторов x и y в базисе $a_1, \ldots, a_n$, а Γ – матрица Грама (она же матрица билинейной формы).

Свойства Грама

1) Γ – симметрическая, т.е. $\Gamma^T = \Gamma$ (из симм-ти ск. пр-я).

Более того $\forall x \neq 0$ $\underbrace{x^T \cdot \Gamma \cdot x}_{g(x,x)} > 0$ (из полож. опред.)

2) Матрицы Грама двух базисов e и e' связаны соотношением:

$\Gamma' = U^T \cdot \Gamma \cdot U$, где U – м-ца перехода от e к e'
в новом базисе (т.к. это верно для $\forall$ бил. формы)

3) $\det \Gamma = Gr(a_1, \ldots, a_n) > 0$, если $a_1, \ldots, a_n$ – базис (грамиан)

□ По св-ву ② $\det \Gamma' = \det(U^T \cdot \Gamma \cdot U) = \det U^T \cdot \det \Gamma \cdot \det U =$
$= (\det U)^2 \cdot \det \Gamma$.

Перейдём к ОНБ. В ОНБ $\Gamma' = E$, $\det \Gamma' = \det E = 1 \Rightarrow 1 = \underbrace{(\det U)^2}_{>0} \cdot \det \Gamma$

$\Rightarrow \det \Gamma = \dfrac{1}{(\det U)^2} > 0$ ■

Утв: (Метод ортогонализации Грама-Шмидта)

Если $\mathcal{E}$ — евклидово пр-во, то в нём $\exists$ет ОНБ.

$\square$ Предъявим алгоритм, который по произвольному базису $a_1, \dots, a_n$ строит ортогональный $b_1, \dots, b_n$.

(из него можно получать ОНБ нормированием $e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$, $i = \overline{1, n}$)

1) Так как $a_1 \neq 0$ (вектор базиса), можно взять $b_1 = a_1$.

2) Будем искать b_2 в виде $b_2 = a_2 - \alpha \cdot b_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ищем α из условия $(b_1, b_2) = 0$.

$(a_2 - \alpha b_1, b_1) = 0 \Rightarrow (a_2, a_1) - \alpha(a_1, a_1) = 0$

$\Rightarrow$ т.к. $(a_1, a_1) \neq 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(a_2, a_1)}{(a_1, a_1)}$ — т.е. α — проекция в-ра a_2 на a_1.

$$\boxed{b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1}$$

Векторы b_1 и b_2 л/в. через a_1 и a_2 $\Rightarrow$ тоже принадлежат $\mathcal{E}$.

При этом a_1 и a_2 м.б. выражены через b_1 и b_2 $\Rightarrow b_1$ и b_2 — л.н.з.

3) Пусть $b_1, \dots, b_k$, $k \geq 2$, уже построены. Будем искать b_{k+1} в виде:

$$b_{k+1} = a_{k+1} - c_{k+1,1} \cdot b_1 - c_{k+1,2} \cdot b_2 - \dots - c_{k+1,k} \cdot b_k \quad (2)$$

Коэфф-т $c_{k+1,i}$, $i = \overline{1, k}$, найдём из условия ортогональности с b_i.

Домножим (2) скалярно на b_i:

$$0 = (b_{k+1}, b_i) = (a_{k+1}, b_i) - 0 - \dots - c_{k+1,i}(b_i, b_i) - \dots - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{k+1,i} = \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)}$$

$$\boxed{b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} \cdot b_i} \qquad (3)$$

Продолжаем так делать, пока не получим ортогональную л.н.з. систему $b_1, \dots, b_n$, где $n = \dim \mathcal{E}$ $\Rightarrow$ ортогональный базис. ■

Утв: (4е свойство м-цы Грама)

Определитель м-цы Грама (грамиан) не меняется в процессе ортогонализации Г-Ш. То есть

$$Gr(a_1, \dots, a_n) = \det \Gamma = \det \Gamma' = Gr(b_1, \dots, b_n) = \|b_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|b_n\|^2.$$

(т.к. Γ' - м-ца Грама ортогонального базиса $\Rightarrow$ диагональна)

□ Рассм. м-цу перехода от a к b

$$U_{a \to b} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix}$$

Верхнетреугольная

в формулах (3) коэфф. при a_{k+1} равен 1, и участвуют только векторы b_i с $i \leq k$, которые выраж. через a_j, где $j \leq i$.

$$\Rightarrow \det U_{a \to b} = 1 \Rightarrow Gr(b_1, \dots, b_n) = \det \Gamma' = (\det U)^2 \cdot \det \Gamma =$$

$$= 1 \cdot \det \Gamma = Gr(a_1, \dots, a_n)$$

■