Опр: $f(\bar{x})$ наз. непрерывной в т. $\vec{x}_0$, если $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x) = f(\bar{x}_0)$

Теор. 1: Функция $\underbrace{\text{непрер}}$ на $\underbrace{\text{компакте}}$:

1) огр. на нём
2) достиг. наиб. и наим. зн.
3) принимает все промеж. зн.

Опр.: Мн-во наз. компактом, если $\forall$ покрытия $\boxed{\text{открытыми}}$ мн-вами $\exists$ конечное подпокрытие.

$$K \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^{\text{открыт}}$$

$\exists$ конечный набор $A_{\alpha_1} \dots A_{\alpha_m}$: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}$

Опр: В $\mathbb{R}^n$ компактами явл.

$\boxed{\text{Огр.}}$ и $\boxed{\text{замкн.}}$ мн-ва.

Классич. метрика на $\mathbb{R}^n$:

$$\rho(\vec{x};\vec{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots(x_n-y_n)^2}$$

Опр: (Гейне) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=A$, если

$$\forall \vec{x}_k: \boxed{\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0} \quad \vec{x}_k\neq\vec{x}_0 \Rightarrow \underbrace{f(\vec{x}_k)}_{\text{числ. посл.}} \xrightarrow[k\to\infty]{} A$$

Опр.1: $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0$, если $\forall i: 1\le i\le n$ $\quad x_{i,k}\xrightarrow[k\to\infty]{} x_{i,0}$

Опр.2: $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0$, если $\rho(\vec{x}_k;\vec{x}_0)\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

4) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$ - замкн

$\parallel$

B

Возьмем $\forall \vec{x}_n \in B$ и $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$ $\quad \exists i$ и $\exists n_k$: $\vec{x}_{n_k} \in B_i \ \forall k$ $\quad \vec{x}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0$ $\Big|$ $\vec{x}_0 \in B_i \Rightarrow$ $\boxed{\vec{x}_0 \in B}$

Теор: Мн-во B замкнуто $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}_k \in B$: $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0 \in B$

Док: „$\Rightarrow$" ПП т.е. B замкн., но $\exists$ $\boxed{\vec{x}_k \in B}$: $\vec{x}_k \to \vec{x}_0$ $\wedge$ $\vec{x}_0 \notin B$

$\vec{x}_0 \in \overline{B}$

откр

$\exists \delta$: $U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}$

т.к. $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0 \Rightarrow \exists N = N(\delta)$: $\forall k > N$ $\boxed{\vec{x}_k \in U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}}$ Ю

$U_\delta(\vec{x}_0) = \{ \vec{x} : \rho(\vec{x}; \vec{x}_0) < \delta \}$

Опр: Мн-во $\underset{A}{\wedge}$ наз открытым, если $\forall \vec{x} \in A \ \exists \delta > 0 : U_\delta(\vec{x}) \subset A$

$\emptyset$ - открыто

Пример: $A \subseteq \mathbb{R}$ A открыто $\Leftrightarrow$ $A = \bigsqcup_{k=1}^{(n)+\infty} (a_k; b_k)$ $a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}$

Опр: Мн-во B наз замкнутым, если $\overline{B}$ - открыто

Теор: A_i - открыты
B_i - замкнуты

1) $\bigcup_i A_i$ - открыто

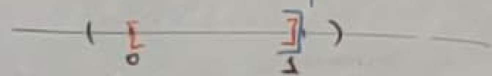
2) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ - открыто

3) $\bigcap_i B_i$ - замкнуто

4) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ - замкнуто

Пример: (2) $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left(0-\frac{1}{2^n}; 1+\frac{1}{2^n}\right) = [0;1]$

$\supseteq$



(4) $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}; 1-\frac{1}{n}\right] = (0;1)$

Теор: Мн-во B замкнуто $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}_k \in B: \vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0 \in B$

Док: „$\Rightarrow$" ПП т.е. B замкн., но $\exists \boxed{\vec{x}_k \in B}: \vec{x}_k \to \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_0 \notin B$

$\vec{x}_0 \in \overline{B}$

↑ откр

$\exists \delta: U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}$

т.к. $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0 \Rightarrow \exists N = N(\delta): \forall k > N$ $\boxed{\vec{x}_k \in U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}}$ К

$\Leftarrow$: B - замкнуто $\Leftrightarrow$ $\overline{B}$ - открыто $\boxed{\vec{y}_0 \in \overline{B}}$ $\exists \delta: U_\delta(\vec{y}_0) \subset \overline{B}$

ПП т.с. $\delta_n = \frac{1}{n}$, но $\exists \vec{y}_n$: $\boxed{\vec{y}_n \in U_{\delta_n}(\vec{y}_0)} \wedge \vec{y}_n \notin \overline{B} \Leftrightarrow \boxed{\vec{y}_n \in B}$

$\boxed{\vec{y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{y}_0}$ $\Rightarrow$ (предположение) $\boxed{\vec{y}_0 \in B}$

Док: 1) $\bigcup_i A_i = A$

$\vec{x} \in A \Rightarrow \exists i \ \vec{x} \in A_i \Rightarrow \exists \delta: U_\delta(\vec{x}) \subset A_i \Rightarrow U_\delta(\vec{x}) \subset A$

3) $\bigcap_i B_i = \overline{\underbrace{\bigcup_i \underbrace{\overline{B_i}}_{\text{откр.}}}_{\text{откр}}}$ - замкн.

Теор: Опр 1 $\Leftrightarrow$ Опр 2

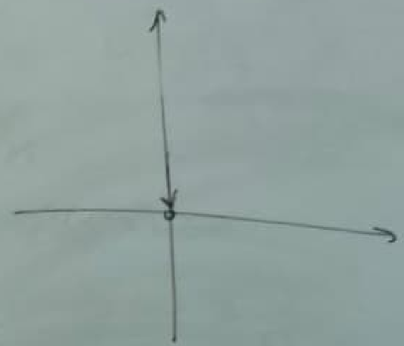
$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_{i,0})^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ по арифм. предел напр.

$\Leftarrow |x_{i,k} - x_{i,0}| \le \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Замечание 1: Наследуется все арифм. lim.

Замечание 2: „Тяжело" док. сходимость

$$f(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$



$$\overline{x}_k = \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k^2}\right) \qquad f(\vec{x}_k) = \frac{1/k^3}{1/k^2 + 1/k^4} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\overline{x}'_k = \left(\frac{1}{k}; \frac{p}{k}\right) \qquad f(\vec{x}'_k) = \frac{1/k^2}{1/k^2 + 1/k^2} \equiv \frac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+p^2}$$