Seminar 20, 15.02.24.

① Найти все гомоморфизмы $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$

□ Гомоморфизм $\varphi: \mathbb{Z}_n \to G$ однозначно определяется образом $\bar{1}$: $\varphi(\bar{k}) = \varphi(\bar{1})^k$

В частности, обязательно $\varphi(\bar{n}) = n \cdot \varphi(\bar{1}) = 0$.

Пусть $\varphi(\bar{1}) = \bar{r} \Rightarrow n \cdot r = m \cdot l$

Обозначим $d = (n, m)$:

$$\frac{n}{d} r = \frac{m}{d} l \Rightarrow \frac{m}{d} \mid r$$

вз. просты

Значит, если $\varphi: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ - гомоморфизм, то

$\varphi(\bar{1}) \in \{\bar{0}, \overline{\frac{m}{d}}, 2 \cdot \overline{\frac{m}{d}}, \ldots, (d-1)\overline{\frac{m}{d}}\} \Rightarrow$ не больше d гом-мов.

На самом деле, каждое такое φ определяет гомоморфизм.

Если $\varphi(\bar{1}) = t\left(\overline{\frac{m}{d}}\right)$, то $\operatorname{Im}\varphi \cong \mathbb{Z}_s$, где $s \mid d \mid \Rightarrow$

$\Rightarrow$ достаточно доказать, что $\begin{matrix} \mathbb{Z}_{ks} \to \mathbb{Z}_s \\ \bar{1} \mapsto \bar{1} \end{matrix}$ - гом-зм, $k \cdot s = n$

Но этот гом-зм работает так: $\begin{matrix} \mathbb{Z}_{ks} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_{ks} \\ \bar{1} \mapsto \bar{k} \end{matrix}$; $\operatorname{Im}\psi \cong \mathbb{Z}_s$ ■

Пусть X - группоид. Тогда определены отображения: $\forall x \in X$

$$l_x: \begin{matrix} X \to X \\ y \mapsto x \cdot y \end{matrix} \qquad r_x: \begin{matrix} X \to X \\ y \mapsto yx \end{matrix}$$

② X ассоц. $\iff l_x \circ r_z = r_z \circ l_x \quad \forall x, z \in X$.

$\square \; l_x \circ r_z(y) = l_x(yz) = x\cdot(y\cdot z)$

$r_z \circ l_x(y) = r_z(xy) = (x\cdot y)\cdot z \quad \blacksquare$

Пусть G − группа. Тогда l_g, r_g − биекции $\forall g \in G$ ($l_g^{-1} = l_{g^{-1}}, r_g^{-1} = r_{g^{-1}}$).

Для автоморфизма сопряжение $C_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$.

Обозначение: $H \subseteq G$ − подгруппа $\equiv H \leq G$.

$H \subseteq G$ ← нормальная подгруппа $\equiv H \trianglelefteq G$

Пусть $H \leq G$ наз. нормальной, если $gH = Hg \; \forall g \in G$ ($l_g(H) = r_g(H)$).

Эквивалентные условия:

1) $C_g(H) = H \quad \forall g \in G$

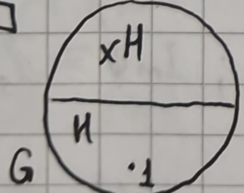
2) $C_g(H) \subseteq H \quad \forall g \in G$

3) Множества правых и левых смежных классов равны

4) операция $(g_1H)\cdot(g_2H) = (g_1\cdot g_2)H$ корректна.

③ $H \leq G \;\wedge\; [G:H] = 2 \Rightarrow H$ нормальна

$\square$



$x \notin H$

При $h \in H \quad hH = H = Hh$

При $g \notin H \quad 1 \notin gH = xH = Hg \not\ni 1 \quad \blacksquare$

Пусть G − группа и $g \in G$. Класс сопряжённости эл-та g − это $C_G(g) = \{C_x(g) \mid x \in G\}$. Условие нормальности $H \leq G$ можно записать как $h \in H \Rightarrow C_G(h) \subseteq H$.

$(g \sim h) \equiv C_g$ сопряжено с h – отношение эквивалентности

1) $g = C_1(g)$

2) $g = C_x(h) \Rightarrow h = C_{x^{-1}}(g)$

3) $g = C_x(h)$, $h = C_y(t) \Rightarrow g = C_{xy}(t)$

Классы сопряжённости в S_n:

если $\sigma, (k_1 \dots k_d) \in S_n$, то $\sigma(k_1 \dots k_d)\sigma^{-1} = (\sigma(k_1) \dots \sigma(k_d))$

$\Rightarrow$ для $\tau \in S_n$

$$C_{S_n}(\tau) = \left\{ \begin{matrix} \text{такие перестановки, у которых} \\ \text{циклическая структура как у } \tau \end{matrix} \right\}$$

Циклическая структура – неупорядоченное разбиение $n = d_1 + \dots + d_s$, где $d_1, \dots, d_s$ – длины независимых циклов.

4) Найти все собственные нормальные подгруппы в S_3.

id	(12) (13) (23)	(1 2 3) (1 3 2)

– классы сопряжённости в S_3

Собственные подгруппы $H \leq S_3$

$\|H\|$	H
2	$\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(2,3)\rangle$ – не норм.
3	$\langle(1 2 3)\rangle = A_3$ (индекс 2) – норм.

Для $H = (12)$

gH:

id	(12)
(1 2 3)	(13)
(23)	(132)

Hg:

id	(12)
(1 2 3)	(13)
(2 3)	(132)

Теорема о гомоморфизме. $\varphi: G \to H$ - гом-зм $\Rightarrow G/_{\operatorname{Ker}\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi$

$g\operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(g)$

Если $H \trianglelefteq G$, то имеется естественная проекция

$\pi: G \to G/_H$ $\quad$ π - сюръекция

$\quad g \mapsto gH$ $\quad$ $\operatorname{Ker}\pi = H$

5 $\mathbb{R}^\times / \mathbb{R}^\times_{>0} \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \{\pm 1\}$

$x \longmapsto \operatorname{sgn}(x) = \dfrac{x}{|x|}$

6 В г-е $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ подгруппа порядка n.

Пусть $H \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $|H| = n$.

Если $\bar{q} = \overline{\frac{a}{b}} \in H \Rightarrow n \cdot \overline{\frac{a}{b}} = \bar{0}$.

вз. просты

Можно считать $(a,b)=1 \Rightarrow \dfrac{n\cdot a}{b} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n\cdot a = kb \Rightarrow b \mid n$,

т.е. $n = b\cdot l$. Но тогда $\bar{q} = \overline{\frac{al}{n}}$

Таким образом, $\bar{q} \in H \Rightarrow \bar{q} = \overline{\frac{x}{n}} \Rightarrow H \subseteq \{\bar{0}, \overline{\frac{1}{n}}, \overline{\frac{2}{n}}, \dots, \overline{\frac{n-1}{n}}\}$

$\Rightarrow H = \{k \cdot \overline{\frac{1}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$