Семинар 31, 23.05.24

Зафикс. евкл. пр-во V со скалярным пр-ем $(\cdot,\cdot)$.

Для $u \in V$ величина $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ наз. <u>длиной</u> (<u>нормой</u>) вектора u.

Если $u, v \in V \setminus \{0\}$, то <u>угол φ между векторами</u> u и v определяется

из соотношения $\cos\varphi = \dfrac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|}$ $\quad (|(u,v)| \leq \|u\|\cdot\|v\|)$

Примеры:

1) Стандартное скалярное пр-е на $\mathbb{R}^n$: $(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

2) Скалярное пр-е на $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$: $(f,g) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$, где $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ - нек. отрезок.

Пусть $u_1, \ldots, u_k \in V$ - нек. набор векторов. Их <u>матрицей Грама</u> наз.

матрица $G(u_1, \ldots, u_k) = G((u_i, u_j))_{i,j=1}^{k} \in M_k(\mathbb{R})$

Свойства:

1. $G^T = G$

2. $|G| \geq 0$ и $|G| = 0 \iff u_1, \ldots, u_k$ - л.з.

Пусть $v_1, \ldots, v_l \in V$ - ещё один набор векторов, G' - его матрица Грама.

Пусть векторы v_i выражаются через векторы u_j с помощью матрицы

$C \in Mat_{k \times l}(\mathbb{R})$, т.е. $(v_1, \ldots, v_l) = (u_1, \ldots, u_k)\cdot C$

$\Rightarrow G' = C^T \cdot G \cdot C$

Примеры:

1) $e_1, \dots, e_n$ – станд. базис $\mathbb{R}^n \Rightarrow G(e_1, \dots, e_n) = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

2) В $\mathbb{R}^2$: $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (-2, 3)$

$\Rightarrow G(u_1, u_2) = G = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$

Матрица перехода от станд. базиса к (u_1, u_2): $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Поэтому $G = C^T \cdot E \cdot C = C^T \cdot C$.

Рассмотрим 2 вектора $u, v \in V$. Говорят, что u и v ортогональны (перпендикулярны), если $(u, v) = 0$. Обознач.: $u \perp v$.

Вектор u наз. нормированным, если $|u| = 1$.

Рассмотрим набор $u_1, \dots, u_k \in V$ и матрицу Грама G этого набора.

Набор $u_1, \dots, u_k$ наз. ортогональным, если G диагональна (т.е. $(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$)

Набор $u_1, \dots, u_k$ наз. ортонормированным, если G единичная (т.е. ортогон. + $(u_i, u_j) = 1$ $\forall i = \overline{1, k}$).

Заданный ненулевой вектор $u \in V$ легко нормировать: $u \to \frac{u}{|u|}$.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.

Задан набор $u_1, \dots, u_k \in V$. Построим ортогон. набор $v_1, \dots, v_k \in V$ т.ч. $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. $\forall i = \overline{1, k}$:

1) $v_1 := u_1$

2) Рекуррентно для $i = \overline{2, k}$

$$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(u_i, v_j)}{(v_j, v_j)} v_j$$

Замечание: если на очередном шаге получилось $v_i = 0$, то это означает, что $u_i \in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle \Rightarrow u_i$ можно выбросить из нач. набора.

Замечание: Если $u_1, \dots, u_k$ – ортогон. ненул. и $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$, то $\lambda_i = \frac{(v, u_i)}{(u_i, u_i)}$.

1. $u_1 = (1, 1, -1, -2)$
$u_2 = (5, 8, -2, -3)$
$u_3 = (3, 9, 3, 8)$

$v_1 = (1, 1, -1, -2)$

$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = (5, 8, -2, -3) - \frac{21}{7}(1, 1, -1, -2) = (2, 5, 1, 3)$

$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = (3, 9, 3, 8) - \frac{-7}{7}(1, 1, -1, -2) - \frac{78}{39}(2, 5, 1, 3) =$
$= (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ ортог. базис $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$: $v_2 = (2, 5, 1, 3)$
$v_2 = (1, 1, -1, -2)$

Ортонорм. базис $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$: $\frac{1}{\sqrt{7}} v_1$, $\frac{1}{\sqrt{39}} v_2$.

Пусть $v_1, \dots, v_k \in V \setminus \{0\}$ – ортог. система (они всегда л.н.з.). Чтобы дополнить её до ортогонального базиса всего V, нужно сначала дополнить до (обычного) базиса векторами $u_1, \dots, u_{n-k}$, а затем применим процесс Грама-Шмидта к системе $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k}$. При этом первые k шагов ничего не изменят.

2. $v_1 = (1, 1, 1, 2)$ $v_2 = (1, 2, 3, -3)$ $v_1 \perp v_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_1 = (0, 0, 1, 0)$
$u_2 = (0, 0, 0, 1)$

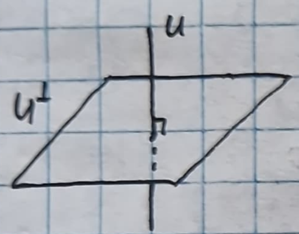
$$v_3 = u_1 - \frac{(u_1, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_1, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 =$$

$$= (0, 0, 1, 0) - \frac{1}{7}(1, 1, 1, 2) - \frac{3}{23}(1, 2, 3, -3) = \left(-\frac{44}{161}, -\frac{65}{161}, \frac{75}{161}, \frac{17}{161}\right) \sim$$

$$\sim (44, 65, -75, -17).$$

$$v_4 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_2, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 - \frac{(u_2, v_3)}{(v_3, v_3)} = \dots$$

Пусть $U \leq V$. Ортогональное дополнение к U: $U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0 \ \forall u \in U\}$



$U^\perp \leq V$ — подпространство

Если $u_1, \dots, u_k$ — базис U, то $U^\perp$ задаётся ОСЛАУ

$(u_1, x) = \dots = (u_k, x) = 0.$

Свойства:

1) $(U^\perp)^\perp = U$

2) $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

3) подпространство U и $U^\perp$ образуют прямую сумму и $V = U \oplus U^\perp$.

Если $v_1, \dots, v_k \in V \setminus \{0\}$ — ортогон. система, то чтобы дополнить её до ортогон. базиса V, достаточно добавить ортогон. базис $\langle v_1, \dots, v_k \rangle^\perp$ (выбрать какой-то и ортогонализовать).

3. $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$

Базис $\langle v_1, v_2 \rangle^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$u_1=(-1,1,0,0)$

$u_2=(0,0,-1,1)$

Ортогонализуем u_1, u_2.

$u_1 \perp u_2$ изначально $\Rightarrow v_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $v_4=\left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

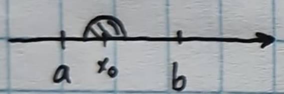
④ Форма $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ явл. скал. пр-ем на пр-ве всех непр. функций $[a;b]\to\mathbb{R}$

· Симметричность и билинейность очев.

· Положит. определённость: $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$ и $(f,f)\geq 0$.

$(f,f)=\int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$

Пусть $(f,f)=0$, т.е. $\int_a^b f^2(x)\,dx=0$

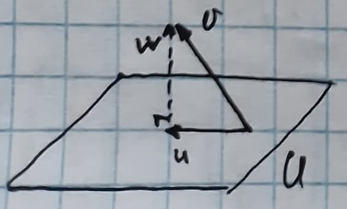


Если $f(x_0)\neq 0$ для нек. x_0, то $\int_a^b f^2(x)\,dx>0$

Пусть $U\leq V$. Мы знаем, что $V=U\oplus U^{\perp}$, т.е. $\forall v\in V$

$\exists!\ u\in U$ и $w\in U^{\perp}$ т.ч. $v=u+w$.

Вектор u наз. ортогональной проекцией вектора v на подпр-во U, $u=pr_U v$, вектор w наз. ортогональной составляющей вектора v относительно U, $w=ort_U v$.



Замечание: $pr_{U^\perp} v = ort_U v$; $ort_{U^\perp} v = pr_{U^\perp} v$.

Если U задано ОСЛАУ $Ax = 0$, то можно эффективно найти базис $U^\perp$.

$$Ax = 0 : \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{=\,(a_i,\, x)} = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$$

(a_i, x), где $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

Т.о. U является ортогональным дополнением к строкам матрицы $A \Rightarrow$

$\Rightarrow U^\perp = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$.