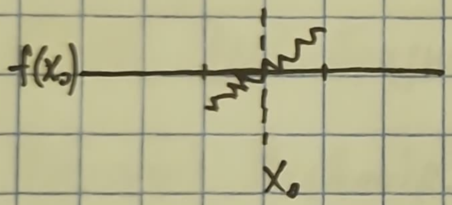
Лекция 17, 26.01.24

Опр: т. x_0 — точка роста $f(x)$, если $\delta > 0$:

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0): \quad \begin{matrix} x_0 < x & f(x_0) < f(x) \\ x < x_0 & f(x) < f(x_0) \end{matrix}$$



$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{o}((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1)\right)}_{\text{знак фикс.}}$$

Интегрирование функций

$$dF(x) = F'(x) \cdot dx$$

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Теорема: Если $F(x)$ – первообр. $f(x)$ на $(a;b)$ и $\varphi(t)$ дифф. на $(c;d)$ $\varphi((c;d)) \subset (a;b)$, то

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Док-во: Проверим, что $F(\varphi(t))$ – первообр. для $\varphi'(t) \cdot f(\varphi(t))$.

$$(F(\varphi(t)))'_t = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$ ч.т.д.

Формула подстановки

$$\boxed{\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \Big|_{x=\varphi(t)}}$$

$$f(x)\Big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

Док-во: $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \overset{(*)}{=} \int f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\,d\underbrace{\varphi(t)}_{x}$

(*) – занесение функции под знак дифф. ч.т.д.

Пример:

$$\int x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,d\frac{x^2}{2} \overset{t=\frac{x^2}{2}}{=} -\int e^{-t} \cdot (-1)\,dt =$$

$$= -\int e^{-t}\,d(-t) = -\int e^{y}\,dy = -e^{y} + c = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$[\,dx^2 = 2x\,dx, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad (-1)\,dx = -dx\,]$

Формула замены переменной

$$\boxed{\int f(x)\,dx \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ \varphi(t)\ \text{обратима}}}{=\!=} \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C}$$

Пример: $\int x(3x-1)^{20}\,dx \underset{3x-1=t}{=\!=} \int \frac{t+1}{3}\, t^{20}\, d\underbrace{\left(\frac{t+1}{3}\right)}_{\frac{1}{3}dt} = \frac{1}{9}\int (t+1)\,t^{20}\,dt =$

$$= \frac{1}{9}\int t^{21} + t^{20}\,dt = \frac{t^{22}}{22\cdot 9} + \frac{t^{21}}{21\cdot 9} + C =$$

$$= \frac{(3x+1)^{22}}{22\cdot 9} + \frac{(3x+1)^{21}}{21\cdot 9} + C$$

Формула интегрирования по частям

Теорема: Если $f(x)$ и $g(x)$ – дифф. на $(a;b)$ функции, то

$$\boxed{\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)}$$

/* $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$ */ – не юзать!

Док-во: $d(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)\,dx =$

$$= g(x)\,df(x) + f(x)\cdot d(g(x))$$

$$\underbrace{\int d(f\cdot g)}_{f\cdot g + C} = \int g\,df + \int f\,dg$$

ч.т.д.

Примеры:

1) $\int x\cdot \sin x\,dx = \int x\,d(-\cos x) = -x\cdot\cos x - \int(-\cos x)\,dx =$

$$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

2) $\int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,d\underbrace{x}_{g(x)} = \ln(x)\cdot x - \int x\,d\ln x = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$$= x\ln x - x + C$$

Определённый интеграл

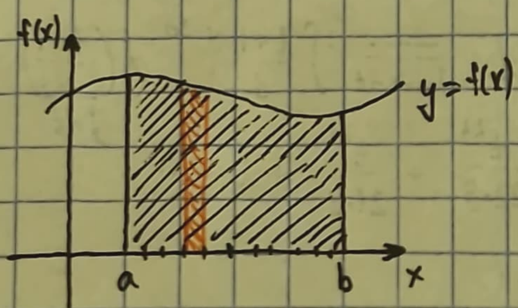
средняя скорость $\rightarrow$ мгновенная скорость

как по $V_{\text{мгнов.}}$ найти S?

Вопрос: как по скорости чего-то найти абсол. зн. „чего-то"?

$f(x)$ на $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$\boxed{1}$ Разбиение отрезка $\tau = \{[x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^{n}$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Диаметр разбиения $d(\tau) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ $= x_i - x_{i-1}$

Разметка разбиения $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$

Интегральная сумма (Римана):

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Опр: (Коши) Число I наз. опред. интегралом $f(x)$ на $[a;b]$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall$разб. τ : $d(\tau) < \delta$

$\forall$разметки $\{\xi_i\}$ верно

$$|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$$

Опр: (Гейне) Число I наз. опред. интегралом $f(x)$ на $[a;b]$, если $\forall$послед. τ_k : $d(\tau_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $\forall \{\xi_i^k\}$

$$\sigma_{\tau_k}(f) \xrightarrow[k\to\infty]{} I$$

Пример: функция Дирихле $[0;1]$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\sigma_\tau(D(x)) = \begin{cases} 1, & \xi_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \xi_i \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$