Лекция 27, 10.04.24

Утв: Любую кв. форму можно привести к каноническому и нормальному виду.

Методы приведения:

1) метод Лагранжа
2) метод Якоби
3) симметричный Гаус
4) приведение к главным осям (только к канон. виду)

Метод Лагранжа

Метод состоит в том, что последовательно выделяем полный квадрат. При этом на каждом шаге под квадрат уходит полностью одна переменная $\Rightarrow$ $\leq$ за n шагов алгоритм даст канонический вид.

Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида $c \cdot x_i \cdot x_j$ $(i \neq j)$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} \overset{\text{старые}}{x_i} = x_i' - \overset{\text{новые}}{x_j'} \\ x_j = x_i' + x_j' \end{cases} \Rightarrow c x_i x_j = c\left((x_i')^2 - (x_j')^2\right),$$

(остальные пер. не мен.)

а дальше (по необходимости) опять выделяем полный квадрат.

$$\alpha_i x_i^2 + 2x_i(\underbrace{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n}_{\text{нет } x_i}) = \alpha_i \underbrace{\left[x_i^2 + 2x_i \frac{(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n)}{\alpha_i} + \frac{(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}\right]}_{\text{полный квадрат}} -$$

$$- \frac{(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i} = \alpha_i \Big(\underbrace{x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n}{\alpha_i}}_{\text{новая пер.}}\Big)^2 - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{нет } x_i} + \ldots$$

т.е. x_i полностью ушла под квадрат.

Теорема (Закон инерции кв. ф.):

Для любых двух канонических видов одной кв. ф.

$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_k x_k^2, \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = \overline{1,k}$

где $x, y \in V$

$q(y) = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \ldots + \mu_m x_m^2, \quad \mu_j \neq 0, \quad j = \overline{1,m}$

(т.е. это запись одной и той же кв. ф. в разных базис)

1) $k = m = Rg\,A$ ← равно рангу кв. ф.
(при этом $k = m$ может быть $< \dim U = n$)

2) Кол-во положит. λ_i = кол-ву положит. μ_j
(наз. положительный индекс инерции кв. ф.

Обознач: i_+

3) Кол-во отрицат. λ_i = кол-ву отриц. μ_j
(наз. отрицательный индекс инерции)

Обознач: i_-

Опр: Сигнатурой кв. ф. называют два числа (i_+, i_-)

Замечание: Если у двух кв. ф. совпадают сигнатуры, то $\exists$ет невырожд. лин. преобраз. (= замена координат = замена базиса), которое одну кв. форму переводит в другую.

(сначала обе в нормальный вид, он совпадает, т.к. одинак. кол-во $+1$ и -1, и для одной преобр. в обрат. сторону).

Замечание: Если у двух кв. ф. разных сигнатур (i_+, i_-), то одну нельзя перевести в другую невыр. лин. преобр. (т.е кв. ф. разные)

Замечание: $\operatorname{Rg} A = i_+ + i_-$

Иногда вводят величину $s = i_+ + i_-$

Знание $\operatorname{Rg} A$ и s эквивалентно знанию i_+ и i_-, и поэтому число s иногда наз. сигнатурой.

Линейные отображения и линейные операторы

Пусть V_1 и V_2 – два лин. пространства над полем F.

Опр: Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ наз. линейным, если

1) $\forall x, y \in V_1 \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

2) $\forall x \in V_1 \quad \forall \alpha \in F \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

$\Leftrightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение – это просто гомоморфизм лин. пространств, и есть обозн. $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$.

Опр: Если $V_1 = V_2 = V$ (пр.-ва совпадают), то лин. отобр. φ наз. линейным оператором (л.о.)

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в V_1, $\dim V_1 = n$.

$f_1, \dots, f_m$ – базис в V_2, $\dim V_2 = m$.

Рассм. векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V_2$ (образы базисных векторов 1-го пространства под действием φ), и разложим их по базису $f_1, \dots, f_m$

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \dots + a_{mn} f_m \end{cases}$$

Опр: Матрица лин. отображения в паре базисов $(e_1, \dots, e_n)$ и $(f_1, \dots, f_m)$ — это матрица:

$$[\varphi]_{ef} = A_{ef} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\dim V_1}\right\} \dim V_2 \quad m \times n$$

координаты $\varphi(e_1)$ ... коорд. $\varphi(e_n)$

(по столбцам стоят коор-ты образов векторов 1го базиса при разлож. по 2му базису).

Опр: Пусть $\varphi : V \to V$ — лин. оператор
$e_1, \dots, e_n$ — базис

Пусть $\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11} e_1 + \dots + e_n \cdot a_{n1} \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n} e_1 + \dots + a_{nn} e_n \end{cases}$ (т.е. образы базисных векторов под действием φ разложим по тому же базису)

Тогда $A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$ — матрица лин. оператора в базисе e

коорд. $\varphi(e_1)$ ... коорд. $\varphi(e_n)$

Пример: $\varphi(x) = \text{Пр}_L x$, где $L = \mathcal{L}(\bar{i})$ в V_3

ось абсцисс; лин. оболочка

Рассм. стандартный базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ в V_3

$\varphi(i) = i = 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$

$\varphi(j) = \varphi(k) = 0$

$$\Rightarrow A_{\{i,j,k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие л.о. полностью опред. его матрицей)

Пусть φ — лин. оператор в пространстве V, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V, $x \in V$ — вектор

$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец координат вектора x в базисе e, т.е. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Пусть A_e — матрица л.о. φ в базисе e.

Тогда $\big(\underbrace{\varphi(x)}_{\text{образ } x \text{ под действ } \varphi}\big)^e = A_e \cdot x^e$

матричное произв.

$\square$ $\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) \underset{\text{линейность}}{=} x_1 \cdot \varphi(e_1) + \ldots + x_n \cdot \varphi(e_n) = [\text{по опр. м-цы л.о.}] =$

$= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + \ldots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) =$

$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)e_1 + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)e_n$ -

получили разложение $\varphi(x)$ по базису e. $\Rightarrow$

$(\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$ Но это результат умнож. $\underset{\text{матрица л.о в базисе } e}{A_e}$ на $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^e$, т.е.

$(\varphi(x))^e = A_e X^e$ $\blacksquare$

Замечание: Для лин. отображения аналогично $\underset{m\times 1}{(\varphi(x))^f} = \underset{m\times n}{A_{ef}} \cdot \underset{n\times 1}{X^e}$

Замечание: При фикс. базисе есть биекция между лин. операторами (лин. отображениями) и матрицами $n\times n$ ($m\times n$).