Лекция 21, 27.02.24

$f(x)$ непрерывна на $[a;b]$

/* $F(x)=\int_a^b f(x)dx$ */ Формула Ньютона-Лейбница:

$\Phi(x)$ первообр. $f(x)$ на $(a;b)$, тогда $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$

Теорема (Формула интегр. по частям):

$f(x)$ и $g(x)$ непр. на $[a;b]$ и дифф.

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

Док-во: $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

$$\int_a^b \underbrace{(f(x)g(x))'}_{\text{первообр.: } f(x)g(x)}dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Теорема (Формула замены переменной): $u(t)$ – непр. дифф на $[p;q]$

$\forall t\in[p;q]$ $u(t)\in[\alpha;\beta]$ $f(x)$ – непр. на $[\alpha;\beta]$

$u(p)=a$ $u(q)=b$ $[a;b]\subset[\alpha;\beta]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_p^q u'(t)\cdot f(u(t))dt$$

$F(x)$ – первообр. $f(x)$ на $(\alpha;\beta)$

$F(u(t))$ – первообр. $u'(t)\cdot f(u(t))$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_p^q f(u(t))\cdot u'(t)\,dt = F(u(q)) - F(u(p)) = F(b) - F(a)$$

Теорема (Формула Тейлора с остат. членом в интегр. форме):

$f(x)$ на $[\alpha;\beta]$ $\quad f^{(n+1)}(x)$ непр. на $(\alpha;\beta)$ $\quad a, x \in (\alpha;\beta)$

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Док-во: $\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) - \int_a^x f'(t)\,d(x-t) =$$

$$= f(a) - f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x (x-t)\cdot f''(t)\,dt =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_\alpha^x f''(t)\,d(x-t)^2 =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\left(f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x - \int_a^x (x-t)^2\cdot f'''(t)\,dt\right) =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots$$

ч.т.д.

Несобственные интегралы

$\forall p \in [a;b)$ $\quad b \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad f(x)$ интегр. на $[a;p]$

Если $\exists \lim\limits_{p\to b^-} \int_a^p f(x)\,dx$, то этот $\lim$ наз. <u>несобственным интегралом</u> $f(x)$ на $[a;b]$ и обознач. $\int_a^b f(x)\,dx$

Пример: $(0;+\infty)$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{p\to 0^+} \int_p^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\begin{array}{ll} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_p^1, & \alpha\neq 1 \\ \left.\ln x\right|_p^1, & \alpha = 1\end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\cdot p^{-\alpha+1} \xrightarrow[p\to 0^+]{} \exists \text{ если } -\alpha+1>0 \\ -\ln p \xrightarrow[p\to 0^+]{} +\infty \end{array}\right.$$

сходится $\alpha<1$.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{p\to+\infty} \left[\begin{array}{l} \frac{p^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \\ \ln p \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \exists \text{ при } -\alpha+1<0, \text{ т.е. } \alpha>1 \text{ сходится} \\ \text{расх.} \end{array}\right.$$

Свойства несобств. интеграла.

1) Линейность

2) Формула Н.-Л.

$f(x)$ на $[a;b)$ непр., то $\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a)$

$$F(b^-) = \lim_{p\to b^-} F(p)$$

3) Формула замены переменной.

Пример: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \left[\begin{array}{l} x=\operatorname{tg} t \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt\end{array}\right] = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \sin t\Big|_0^{\pi/2} = 1$

4) По частям

5) Аддитивность

Признаки сходимости несобственного интеграла

1) Сходимость интегралов от неотрицательных функций

$[a;b)$ $\quad f(x), g(x) \geqslant 0$ на $[a;b)$

1.1. Признак сравнения.

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_1 \qquad \int_a^b g(x)\,dx = I_2$$

$+$ $f(x) \leq g(x)$ на $[a;b)$

I_2 сходится $\Rightarrow I_1$ сходится

I_2 расходится $\Rightarrow I_1$ расходится

Док-во: $F(p) = \int_a^p f(x)\,dx \nearrow$

$G(p) = \int_a^p g(x)\,dx \nearrow$

1.2. Признак сравнения в предельной форме

Опр: Функции $f(x)$ и $g(x)$ наз. эквивалентными при $x \to b^-$, если $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

$\sin x \sim x$ при $x \to 0$

$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$

! Можно использовать ТОЛЬКО в произведении и частном !

Теорема: Если $f(x), g(x) > 0$ на $[a;b)$ и интегр. на $[\alpha;\beta]$

и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b^-$

$\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)$ сход или расход. одновременно.

Док-во: $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists \delta_0 : \forall x \in (b-\delta_0 ; b)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$$

$$\int_a^b \cdot \, dx = \underbrace{\int_a^{b-\delta_0} \cdot \, dx}_{\text{опр. инт.}} + \int_{b-\delta_0}^b \cdot \, dx$$

Если $\int_{b-\delta_0}^b f(x)dx$ расход, то $\int_{b-\delta_0}^b \frac{3}{2} g(x) dx$ расход.

Если $\int_{b-\delta_0}^b f(x)dx$ сходится, то $\int_{b-\delta_0}^b \frac{1}{2} g(x)dx$ сходится

ч.т.д.

Пример: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} dx$

$x \to 0^+$

$$\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2} \Rightarrow \int_0^1 x^{-1/2} dx \text{ сход.}$$

2) Знакопеременные функции

Опр: Если $\int_a^b |f(x)|dx$ сход., то $\int_a^b f(x)dx$ наз. сходящимся абсолютно.

Теорема: Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Док-во: $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

$$0 \leq f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$0 \leq f^{-}(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \\ 0, & \text{если } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x)$$

① $f^{+}(x) \leq |f(x)|$

$f^{-}(x) \leq |f(x)|$