Подсчет предела последовательности

1. Найти пределы последовательностей.
   (a) $a_n = q^n, \quad q \in \mathbb{R}$; (d) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, + обощить результат;
   (b) $a_n = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$; (e) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, + обобщить результат;
   (c) $a_n = \sqrt[n]{n}$; (f) $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, + обощить результат.
2. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:
   (a) Сумма бесконечно большой и ограниченной - бесконечно большая.
   (b) Частное бесконечно малой и бесконечно большой - бесконечно малая.
   (c) Произведение бесконечно малой и отделимой от нуля - бесконечно малая.
3. Верно ли утверждение?
   (a) Если последовательность не является бесконечно большой, то она ограничена.
   (b) Если последовательность не является ограниченной, то она бесконечно большая.
   (c) Если последовательность сходится не к нулю и не обращается в ноль, то она отделима от нуля.
4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $y_n \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
   Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.
5. Вычислить пределы последовательностей, используя арифметку предела, свойства б.б. и б.м. и результаты задачи 1.
   (a)
   $$a_n = \frac{4n - n^2 + 1}{3n^2 - 7n + 3}$$
   (b)
   $$a_n = \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2};$$

(c)

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1};$$

(d)

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1};$$

(e)

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1} - n - 1};$$

(f)

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n^3} + \sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{3n}};$$

(g)

$$a_n = \frac{n^3+3n}{n+3^{n+1}};$$

(h)

$$a_n = \frac{4^n + n^2 \cdot 2^n - 1}{n^4 + (n!)^2}.$$

Домашнее задание

1. Найти предел последовательности

$$(a)\ n = \frac{3n^2+2n-1}{3-n-4n^2}, \qquad (b)\ a_n = n - \frac{3}{\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

$$(c)\ a_n = \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}, \qquad (d)\ a_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1},$$

$$(e)\ a_n = \frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!} \qquad (f)\ a_n = \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$$

2. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \qquad \exists C\ \exists n_0\ \forall n > n_0\, (y_n \leqslant C)\,.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -\infty$.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a это $+\infty$ или $-\infty$. Про y_n :

$$\exists C\ \exists n_0\ \forall n > n_0\, (y_n \geqslant C > 0)\,.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для всех сочетаний $A \circ B \circ C$, где A, C - бесконечно малая, бесконечно большая, ограниченная, отделимая от нуля, B - арифметическое действие, сформулируйте и докажите или опровергните соответствующее свойство данных величин.

2. Найти предел последовательности

$$(a)\ a_n = \frac{(n^2+3n+4)^3-(n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3-(n^2+5n-6)^3} \quad (b)\ a_n = \frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1}$$

$$(c)\ a_n = \sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}, \qquad (d)\ \sqrt[3]{n^3+n^2+2002}-n,$$

$$(e)\ a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-1)}, \qquad (f)\ a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}},$$

$$(g)\ a_n = \frac{n\cdot 3^n+1}{n!+1}, \qquad (h)\ a_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)},$$