Homework 6.

#1.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

#2.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

#3.

$$\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

По формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -30 - 48 - 60 + 48 + 36 + 50 = -4$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -18 - 12 - 40 + 12 + 24 + 30 = -4 \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 24 + 12 - 32 - 18 - 10 = -4 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -15 - 48 - 45 + 36 + 50 + 18 = -4 \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$$

<u>Ответ:</u> $(1; 1; 1)$

#4.

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0 \\ -\frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b} & \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

По формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b} & \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = -\frac{2}{abc} - \frac{3}{abc} = \frac{-5}{abc}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{b} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{b} & \frac{3}{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{4}{bc} + \frac{1}{bc} = \frac{5}{bc} \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{bc} \cdot \frac{abc}{(-5)} = -a$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{ac} - \frac{6}{ac} = \frac{-5}{ac} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{ac} : \frac{-5}{abc} = b$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & -2 \\ 0 & -\frac{2}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{ab} - \frac{4}{ab} = \frac{-5}{ab} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-5}{ab} \cdot \frac{abc}{(-5)} = c$$

<u>Ответ:</u> $(-a; b; c)$.

#7.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-12+10} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$ – <u>Ответ.</u>

#8.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -3 & 15 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 152 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

#6.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \dots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a & 0 & 0 & \dots & -a & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & a & 0 & \dots & -a & 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & a & \dots & -a & 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & & & & & \dots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \to$$

-1; $\times\left(-\frac{1}{a}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a & 0 & 0 & \dots & -a & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & a & 0 & \dots & -a & 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & a & \dots & -a & 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+n & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \dots & 1+\frac{1}{a}(n-1) \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{a} \\ \cdot\frac{1}{a} \\ \cdot\frac{1}{a} \\ \cdot\frac{1}{a} \\ \cdot\frac{1}{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|ccc} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\frac{1}{a+n} & & \frac{-1}{a+n} \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & & 1-\frac{1}{a+n} & \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & & & 1-\frac{1}{a+n} \\ \dots & & & & & \frac{-1}{a+n} & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & & & 1-\frac{1}{a+n} \end{array}\right)$$

$\times\frac{a}{a+n}$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a+n-1}{a(a+n)} & & \frac{-1}{a(a+n)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ \dots & & & & & \frac{-1}{a(a+n)} & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & & & \frac{a+n-1}{a(a+n)} \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{a+n-1}{a(a+n)} & & \frac{-1}{a(a+n)} \\ & \ddots & \\ \frac{-1}{a(a+n)} & & \frac{a+n-1}{a(a+n)} \end{pmatrix}$

#5

① $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r} \\ i \to \\ \\ j \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & & & & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \cdots & 1 & & & \ddots & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & & & & 1 & 0 & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & & 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \cdots & 0 & \\ 0 & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

T_{ij}^{-1} ↓

$T_{ij}^{-1} = T_{ij}$ Обратная матрица меняет местами i и j строку (столбец)

② $D_i(\lambda)$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{\lambda}\; i \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & 0 & 1 & & 0 \\ & 1 & & & & 1 & \\ & & \lambda & & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & 0 & 1 & & & 0 \\ & 1 & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & \frac{1}{\lambda} & \\ 0 & & 1 & 0 & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array}$$

$D_i^{-1}(\lambda)$ ↓

Обратная матрица к $D_i(\lambda)$ не умножает строку (столбец) на λ (как $D_i(\lambda)$), а делит на λ (умножает на обратное к $\lambda = \frac{1}{\lambda}$). $D_i^{-1}(\lambda) = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

③ $L_{ij}(\lambda)$

$$\begin{array}{r} \\ i \to \\ \cdot(-\lambda)\; j \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & 1 & & 0 \\ & 1 & \cdots & \lambda & & 1 & \\ 0 & & 1 & \vdots & 0 & \ddots & \\ & & & 1 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & 0 & 1 & & & \\ & 1 & & & 1 & \cdots & -\lambda \\ 0 & & \ddots & 0 & & 1 & \vdots \\ & & 1 & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

Обратная матрица к $L_{ij}(\lambda)$ прибавляет к i-й строке (стб.) j-ю строчку (стб), умноженную на $-\lambda$. $L_{ij}^{-1}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda)$.

#9.

① $i \leftrightarrow j$ строки $\Leftrightarrow$ $T_{ij} \cdot A$

$(T_{ij} \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot T_{ij}^{-1} \underset{\text{по \#5}}{=} A^{-1} \cdot T_{ij}$ $\Rightarrow$ поменяются местами i-й и j-й стб.

② $i \cdot \lambda$ $(\lambda \neq 0)$ $\Leftrightarrow$ $D_i(\lambda) \cdot A$

$(D_i(\lambda) \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot D_i^{-1}(\lambda) \underset{\text{по \#5}}{=} A^{-1} \cdot D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $\Rightarrow$ i столбец умножится на $\frac{1}{\lambda}$.

③ $i + \lambda \cdot j$ $\Leftrightarrow$ $L_{ij}(\lambda) \cdot A$

$(L_{ij}(\lambda) \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot L_{ij}^{-1}(\lambda) \underset{\text{по \#5}}{=} A^{-1} \cdot L_{ij}(-\lambda)$ $\Rightarrow$ к i-му столбцу добавится j-й, умноженный на $-\lambda$.