# Дискретная математика. HSE-SE-DM-HW8.

Ахундов Алексей Назимович

Март-апрель 2021

## Содержание

# Задача 1

## Пункт a)

Построим таблицу значений для данной Булевой функции:

| x | y | z | f(x, y, z) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Упрощением импликаций и отрицаний, приведем выражение к ДНФ:

$$\begin{aligned}
(x \implies y) \implies ((y \vee z) \wedge \neg(z \implies x)) &\equiv (\neg x \vee y) \implies ((y \vee z) \wedge \neg(\neg z \vee x)) \\
&\equiv \neg(\neg x \vee y) \vee ((y \vee z) \wedge \neg(\neg z \vee x)) \\
&\equiv x \wedge \neg y \vee ((y \vee z) \wedge (z \wedge \neg x)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z \wedge \neg x) \vee (z \wedge z \wedge \neg x) \\
&\equiv (\mathbf{x} \wedge \neg \mathbf{y}) \vee (\mathbf{z} \wedge \neg \mathbf{x}) \vee (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \wedge \neg \mathbf{x}) \\
&\equiv (\neg \mathbf{x} \wedge \mathbf{z}) \vee (\mathbf{x} \wedge \neg \mathbf{y})
\end{aligned}$$

Далее преобразуем выражение для получения КНФ:

$$\begin{aligned}
(x \wedge \neg y) \vee (z \wedge \neg x) \vee (y \wedge z \wedge \neg x) &\equiv (\neg x \wedge z) \vee (x \wedge \neg y) \\
&\equiv (x \vee (\neg x \wedge z)) \wedge (\neg y \vee (\neg x \wedge z)) \\
&\equiv ((x \vee \neg x) \wedge (x \vee z)) \wedge ((\neg y \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee z)) \\
&\equiv (\mathbf{x} \vee \mathbf{z}) \wedge (\neg \mathbf{y} \vee \neg \mathbf{x}) \wedge (\neg \mathbf{y} \vee \mathbf{z}) \\
&\equiv [(x \vee z) \wedge (\neg y \vee z)] \wedge (\neg y \vee \neg x) \\
&\equiv ((x \wedge \neg y) \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg x) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee (z \wedge \neg x) \vee (z \wedge \neg y) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee (z \wedge \neg x) \vee (z \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg x) \\
&\equiv [x \wedge (\neg y \vee \neg x)] \vee [z \wedge (\neg y \vee \neg x)] \\
&\equiv (\neg \mathbf{x} \vee \neg \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} \vee \mathbf{z})
\end{aligned}$$

Теперь найдем многочлен Жегалкина, преобразовав ДНФ: $\begin{cases} A \vee B = A \oplus B \oplus AB \\ \neg A = A \oplus 1 \\ (A \oplus B) \wedge C = A \wedge C \oplus B \wedge C \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(\neg x \wedge z) \vee (x \wedge \neg y) &\equiv (\neg x \wedge z) \oplus (x \wedge \neg y) \oplus 0 \\
&\equiv (\neg x \wedge z) \oplus (x \wedge \neg y) \\
&\equiv ((x \oplus 1) \wedge z) \oplus (x \wedge (y \oplus 1)) \\
&\equiv ((x \wedge z) \oplus z) \oplus ((x \wedge y) \oplus x) \\
&\equiv \mathbf{x} \oplus \mathbf{z} \oplus (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \wedge \mathbf{z})
\end{aligned}$$

## Пункт b)

Аналогично пункту a)

| x | y | z | f(x, y, z) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

$$
\begin{aligned}
\text{ДНФ: } \neg((x \vee \neg y) \implies z) \implies (y \wedge (\neg x \implies z)) &\equiv ((x \vee \neg y) \implies z) \vee (y \wedge (\neg x \implies z)) \\
&\equiv (\neg(x \vee \neg y) \vee z) \vee (y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv ((\neg x \wedge y) \vee z) \vee (y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv y \vee z \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
&\equiv y \wedge (1 \vee \neg x) \vee z \wedge (1 \vee x) \\
&\equiv \mathbf{y} \vee \mathbf{z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{КНФ: } \neg((x \vee \neg y) \implies z) \implies (y \wedge (\neg x \implies z)) &\equiv ((x \vee \neg y) \implies z) \vee (y \wedge (\neg x \implies z)) \\
&\equiv (\neg(x \vee \neg y) \vee z) \vee (y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv ((\neg x \wedge y) \vee z) \vee (y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv [(z \vee \neg x) \wedge (z \vee y)] \vee (y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv ((z \vee \neg x) \vee y \wedge (x \vee z)) \wedge ((z \vee y) \vee y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv ((\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee x \vee z) \vee z) \wedge ((z \vee y) \vee y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv (\neg x \vee y \vee z) \wedge ((z \vee y) \vee y \wedge (x \vee z)) \\
&\equiv (\neg x \vee y \vee z) \wedge (z \vee (y \vee y) \wedge (x \vee y \vee z)) \\
&\equiv (\neg x \vee y \vee z) \wedge (z \vee y \wedge (x \vee y \vee z)) \\
&\equiv (\neg x \vee y \vee z) \wedge (z \wedge y) \wedge (x \vee y \vee z)
\end{aligned}
$$

Многочлен Жегалкина (из ДНФ):

$$y \oplus z \oplus (y \wedge z)$$

# Задача 2

$$\begin{aligned}
f(x_1,\ \ldots,\ x_{2n+1}) &= \bigwedge_{1\ \leqslant\ i_1\ <\ i_2\ <\ \ldots\ <\ i_{n+1}\ \leqslant\ 2n+1} (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_{n+1}}) \wedge (\neg x_{i_1} \vee \neg x_{i_2} \vee \ldots \vee \neg x_{i_{n+1}}) \\
&= \bigwedge_{1\ \leqslant\ i_1\ <\ i_2\ <\ \ldots\ <\ i_{n+1}\ \leqslant\ 2n+1} (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_{n+1}}) \wedge \overline{(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_{n+1}})} \\
&= \bigwedge_{1\ \leqslant\ i_1\ <\ i_2\ <\ \ldots\ <\ i_{n+1}\ \leqslant\ 2n+1} \overline{(\neg x_{i_1} \wedge \neg x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \neg x_{i_{n+1}})} \wedge \overline{(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_{n+1}})} \\
&= \bigwedge_{1\ \leqslant\ i_1\ <\ i_2\ <\ \ldots\ <\ i_{n+1}\ \leqslant\ 2n+1} \overline{(\neg x_{i_1} \wedge \neg x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \neg x_{i_{n+1}}) \vee (x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_{n+1}})} \\
&= \bigwedge_{1\ \leqslant\ i_1\ <\ i_2\ <\ \ldots\ <\ i_{n+1}\ \leqslant\ 2n+1} \overline{x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_{n+1}}}
\end{aligned}$$

Это всегда ложь, поскольку кол-во переменных нечетно, либо нулей, либо единиц будет больше половины, и обязательно найдется набор из $n+1$ равных значений. Рассматриваем тождественно ложную формулу, тогда для неё не существует ДНФ.

# Задача 3

## Пункт а)

Воспользуемся ФВИ (формулой включений-исключений), для сохранения 0 или 1 нужно зафиксировать всего одну строку таблицы истинности, для сохранения обоих - две строки:

$$|P_0 \cup P_1| = |P_0| + |P_1| - |P_0 \cap P_1| = 2^{2^n-1} + 2^{2^n-1} - 2^{2^n-2} = 2^{2^n} - 2^{2^n-2} = 3 \cdot 2^{2^n-2}$$

## Пункт б)

Рассмотрим сначала множество линейных функций имеющих вид:

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$$

Теперь посмотрим, что необходимо для сохранения единицы:

$$f(1, 1, ..., 1) = a_0 \oplus a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 1$$

Для этого нужно, чтобы количетсво единичных коэффициентов $a_i$ было нечетным. Теперь рассмотрим самодвойственность:

$$\begin{aligned}
f(\neg x_1, ..., \neg x_n) &= a_0 \oplus a_1\neg x_1 \oplus a_2\neg x_2 \oplus \ldots \oplus a_n\neg x_n \\
&= a_0 \oplus a_1(x_1 \oplus 1) \oplus a_2(x_2 \oplus 1) \ldots \oplus a_n(x_n \oplus 1) \\
&= a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus a_1 \oplus (a_2 \wedge x_2) \oplus a_2 \ldots \oplus (a_n \wedge x_n) \oplus a_n \\
&= a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus (a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n) \\
\overline{f(x_1, ..., x_n)} &= \overline{a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n} \\
&= a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus 1
\end{aligned}$$

То есть нужно чтобы $a_1 \oplus a_2 ... \oplus a_n = 1$ - это выполняется тогда же, когда и сохранение единицы.

Тогда выберем поочереди единичные коэффициенты так, чтобы их количество было нечетным. То есть выберем 1 коэффициент равный единице, потом 3 коэффициента, потом 5 и так далее - получим кол-во способов:

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad \text{(Аналогично задаче 7б из ДЗ 5)}$$

В сумме получим ответ: $\mathbf{2^{n-1}}$

## Задача 4

Рассмотрим контрпример для $P = P_1$, его дополнение - все функции, которые не сохраняют единицу, то есть $f(1, 1, ..., 1) = 0$, рассмотрим Штрих Шеффера, который входит туда.

Получаем, что множество $\{| \ (NAND)\}$ полное, то есть $[\{|\}] = P_2$, при этом $\{(|)\} \subseteq [\overline{P_1}]$, а тогда $[\overline{P_1}] = P_2 \neq \overline{P_1}$, т.е. дополнение незамкнуто.

## Задача 5

### Пункт а)

Упростим функцию «\»:

$$\neg(x \implies y) \equiv \neg(\neg x \vee y) \equiv x \wedge \neg y$$

Составим таблицу классов для наших функций (True = вложена в класс):

| Формула | $x \wedge \neg y$ | $eq$ |
|---|---|---|
| $T_0$ | True | False |
| $T_1$ | False | True |
| $S$ | False | True |
| $M$ | False | False |
| $L$ | False | False |

Исходя из критерия Поста, данная система функций полная

### Пункт б)

Заметим, что все данные в условиях функции линейны: $0 = 0$, $\neg x = x \oplus 1$, $x \iff y = x = x \oplus y \oplus 1$, $odd(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$, по критерию Поста такая система функций неполная.

## Задача 6

### Пункт а)

Случай $\mathbf{Q} = \mathbf{P_0}$

В силу несохранения нуля в дополнении нашего множества $Q$: $f \notin Q \implies f(0, ..., 0) = 1$. Известно (из существования многочлена Жегалкина для любой булевой функции), что замыкание множества: $[\{1, \wedge, \oplus\}] = \mathsf{T}$, а также $\{\wedge\} \subseteq Q, \{\oplus\} \subseteq Q, \{0\} \subseteq Q$, при этом получить его можно объединением с нашей функцией $f$ (поскольку композицией $f$ с $0$ можем получить 1).

### Пункт б)

Случай $\mathbf{Q} = \mathbf{P_1}$

В силу несохранения единицы в дополнении нашего множества $Q$: $f \notin Q \implies f(1, ..., 1) = 0$. Известно (из существования КНФ и ДНФ для любой булевой функции), что замыкание множества $[\{\neg, \wedge, \vee\}] = \mathsf{T}$, а также $\{\wedge\} \subseteq Q, \{\vee\} \subseteq Q, \{1\} \subseteq Q$, функцию $\neg$ мы получим композицией импликации и (композиции нашей функции с 1, то есть с 0), таким образом в объединении обязательно получатся: $[\{\neg, \wedge, \vee\}] = \mathsf{T}$.

### Пункт в)

Случай $\mathbf{Q} = \mathbf{L}$

Имеем нелинейность функции $f$, а также что в нашем множестве есть функция, не сохраняющая 0 ($1 \in Q$), не сохраняющая 1 ($0 \in Q$), немонотонная ($\neg \in Q$), несамодвойственная ($\oplus \in Q$), значит объединение с $f$ даст еще и нелинейную, тогда по критерию Поста такая система булевых функций полная.

## Задача 7

### Пункт а)

Из теории известно соотношение между дизъюнкцией и импликацией:

$$((x \implies y) \implies y \iff x \vee y$$

Таким образом дизъюнкцию можно реализовать как композицию импликаций, так что в замыкании, содержащем $\implies$ тожно будет лежать $\vee$.

## Задача 8

Поскольку $sum_3$ выражается через $\oplus$, $K$ не является базисом.
Составим таблицу классов и проверим полноту данной системы:

| Формула | $\wedge$ | $\oplus$ | $sum_3$ | $\implies$ |
|---|---|---|---|---|
| $T_0$ | True | True | True | False |
| $T_1$ | True | False | True | True |
| $S$ | False | True | True | False |
| $M$ | True | False | False | False |
| $L$ | False | True | True | False |

У нас есть по крайней мере одна функция, не вложенная в каждый класс, значит по критерию Поста данная система функций полная. Чтобы найти базисы-подмножества, будет выкидывать из рассмотрения функции и проверять, остается ли их система полной.

Мы должны взять $\oplus$, потому что только эта функция не сохраняет единицу, а также $\implies$, потому что не сохраняет ноль, их хватает для базиса, а если возьмем сверх этого, то можно будет выделить подмножество функций, которое будет полным. Итого искомое подмножество-базис: $\{\implies, \oplus\}$

# Задача 9

## Пункт a)

Рассмотрим всевозможные композиции данного тернарного оператора в виде дерева, вершина - условие на переменную, левая ветка - случай правды для условия, правая ветка - ложь.

Таким образом, продвигаясь вниз по дереву, мы каждый раз будем уточнять значение очередной перменной, в конце придя в лист, где будем знать набор значений всех переменных.

В листах наша задача вернуть переменную, равную по значению результату функции, которую мы пытаемся реализовать с помощью тернарного оператора.

Мы сможем это сделать в любом случае, кроме $f(0, ..., 0) = 1$ и $f(1, ..., 1) = 0$, поскольку среди значений переменных не сможем найти значение функции, но для $K'$ такого не бывает, поэтому любую функцию отсюда можно выразить таким образом.