Homework - 4b.

#3.

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$$\mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus C} = \mathbb{1}_{(A\cup B)\cap \bar{C}} = \mathbb{1}_{A\cup B} \cdot \mathbb{1}_{\bar{C}} = \mathbb{1}_{A\cup B} \cdot (1 - \mathbb{1}_C) =$$

$$= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_C) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

$$\mathbb{1}_{(A\setminus C)\cup(B\setminus C)} = \mathbb{1}_{A\cap\bar{C}} + \mathbb{1}_{B\cap\bar{C}} - \mathbb{1}_{A\cap\bar{C}}\mathbb{1}_{B\cap\bar{C}} =$$

$$= \mathbb{1}_A \cdot (1 - \mathbb{1}_C) + \mathbb{1}_B \cdot (1 - \mathbb{1}_C) - \mathbb{1}_A \cdot (1 - \mathbb{1}_C)\, \mathbb{1}_B (1 - \mathbb{1}_C) =$$

$$= (1 - \mathbb{1}_C)(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus C} = \mathbb{1}_{(A\setminus C)\cup(B\setminus C)}$$ ч.т.д.

b) $(A \setminus B) \cup B \overset{(*)}{=} A \iff B \subseteq A$

$$\mathbb{1}_{(A\setminus B)\cup B} = \mathbb{1}_{A\setminus B} + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\setminus B} \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} \cdot \mathbb{1}_B$$

$$= \mathbb{1}_A \cdot (1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot (1 - \mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B =$$

$$= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B =$$

$$= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B} \overset{(*)}{=} \mathbb{1}_A$$

$$\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0$$

$$\mathbb{1}_B(1 - \mathbb{1}_A) = 0$$

$$\mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}} = 0$$

$$\mathbb{1}_{\bar{A}\cap B} = 0$$

$\nexists x : x \in B \wedge x \notin A \iff B \subseteq A$ ч.т.д.

#1.

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$

$\Downarrow$

$|A \cap B| = |A| + |C|$

$C^{A \cap B} = \{f : A \cap B \to C\}$

$C^A \times C^B = \{(g : A \to C) \times (h : B \to C)\}$

$f = \{(a_1, c_1), \ldots, (a_n, c_n), (b_1, c_1'), \ldots, (b_n, c_n') \mid \forall 1 \leq i \leq n \ a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C\}$

$g = \{(a_1, c_1), \ldots, (a_n, c_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n \ a_i \in A, \ c_i \in C\}$

$h = \{(b_1, c_1), \ldots, (b_n, c_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n \ b_i \in A, \ c_i \in C\}$

Тогда существует биекция $f \to g \times h \Rightarrow C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$

#2.

$\forall A \quad P_1(A) \sim A$

Хотим : $f : A \to P_1(A)$ – биекция

$f : x \mapsto \{x\}$

(*) $\forall x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) = \{x_1\} \neq \{x_2\} = f(x_2) \Rightarrow f$ – инъективна

Рассмотрим $g : P_1(A) \to A$, тогда $g^{-1} = f$
$\{x\} \mapsto x$

Т.к. выполнено (*), то $\forall \{x_1\} \neq \{x_2\} \quad x_1 \neq x_2$, тогда g – инъективна

$\Rightarrow$ получили биекцию между A и $P_1(A) \Rightarrow P_1(A) \sim A$.

#4.

a) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{R}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\sim\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{l}\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{R}\\ \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\sim\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$$

(По теореме КШБ)

b) $\underline{5}^{\mathbb{N}}\sim\underline{3}^{\mathbb{N}}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\underline{5}^{\mathbb{N}}\lesssim\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\\ \underline{5}^{\mathbb{N}}\gtrsim\underline{2}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbb{R}\lesssim\underline{5}^{\mathbb{N}}\lesssim\mathbb{R}\Rightarrow\underline{5}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\\ \hspace{22em}\wr\\ \left.\begin{array}{l}\underline{3}^{\mathbb{N}}\gtrsim\underline{2}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\\ \underline{3}^{\mathbb{N}}\lesssim\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbb{R}\lesssim\underline{3}^{\mathbb{N}}\lesssim\mathbb{R}\Rightarrow\underline{3}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\end{array}\right|\Rightarrow\underline{5}^{\mathbb{N}}\sim\underline{3}^{\mathbb{N}}$$

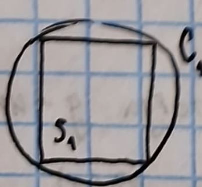
c) S – квадрат, C – круг

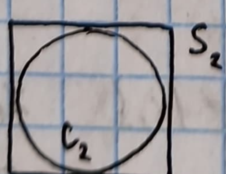
Все квадраты равномощны друг другу, т.к. есть биекция

центр $\mapsto$ центр, сторона $\mapsto$ сторона.

Все круги равномощны друг другу, т.к. есть биекция

центр $\mapsto$ центр, окружность $\mapsto$ окружность





$S_1\lesssim C_1$ $\qquad$ $C_2\lesssim S_2$

$$\left.\begin{array}{l}S_1\lesssim C_1\sim C_2\lesssim S_2\\ C_2\lesssim S_2\sim S_1\lesssim C_1\end{array}\right\}\ C_1\sim S_2\ \text{и}\ C_2\sim S_1\Rightarrow C\sim S$$

d) На плоскости треугольник задаётся 3 точками, которые задаются 2 вещественными координатами, тогда

$\Delta \sim \mathbb{R}^6 \sim \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \sim \mathbb{R}$

#5.

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim P(\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim (\underline{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}} \sim \underline{2}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \sim \underline{2}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \sim \underline{2}^{\mathbb{R}} \sim P(\mathbb{R})$ (по т. КШБ)

$\Rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim P(\mathbb{R})$.

#6.

Зададим восьмёрку через 2 точки – центры окружностей восьмёрки

Тогда $f: X \to \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ – биекция, т.к. каждая точка задаётся двумя рациональными координатами, и восьмёрки – не пересекаются, поэтому определяются однозначно. Тогда:

$|X| \lesssim \mathbb{Q}^2\times\mathbb{Q}^2 \sim \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \Rightarrow X \lesssim \mathbb{N}$

#7.

Построим множество $S' \subseteq P(\mathbb{R}^2)$. Пусть S' – множество горизонтальных прямых, тогда $S \in \{(x,y) \mid y = c \in \mathbb{R}\}$.

Тогда условие а) $S' \sim \mathbb{R}$ выполнено

б) Пусть $X = \{(x,y) \mid y = c_1\}$, $Y = \{(x,y) \mid y = c_2\}$, $c_1 \neq c_2$, тогда $X \cap Y = \varnothing$.

в) Пусть $X = \{(x,y) \mid y = c\}$, тогда $X \sim \mathbb{R}$

Рассмотрим $S \in \{x \mid [x] \overset{c}{\in} \mathbb{R}\}$. Тогда а) $S \sim \mathbb{R}$

б) Пусть $X = \{x \mid [x] = a\}$, $Y = \{x \mid [x] = b\}$, $a \neq b$, тогда

$X \cap Y = \varnothing$ (т.е. X и Y - множества, состоящие из одного числа)

в) $X = \{x \mid [x] = a\}$, тогда $X \sim \mathbb{R}$

Уточнение: X и Y - множества чисел, целая часть которых одинакова. S - множество подмножеств чисел с одинак. целой частью.

#8.

$C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f$ непрерывна$\}$. Хотим: $C \sim \mathbb{R}$

Надо построить биекцию между C и $\mathbb{R}$

Пусть $g: C \to \mathbb{R}$ такое, что $g \circ f = g(f) = f(0)$

1) Инъекция: Пусть $g(f_1) = g(f_2)$, тогда $f_1(0) = f_2(0)$

По условию f непрерывна, тогда $f_1(x) = f(x_2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1 = f_2 \Rightarrow$ инъекция выполнена.

2) Сюръекция: $\forall y \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = y$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Тогда $g(f) = f(0) = y$

Следовательно биекцию построили $\Rightarrow C \sim \mathbb{R}$.