Домашнее задание
Функции многих переменных. Непрерывность и дифференцируемость.

1. Найти предел функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{ye^{-1/x^2}}{y^2+e^{-2/x^2}}, & \text{если } x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

в точке $(0;0)$ по кривой

$$x=\alpha t^m,\qquad y=\beta t^n,\qquad \alpha^2+\beta^2\neq 0,\qquad m,n\in\mathbb{N},\qquad t>0;$$

доказать, что предел функции $f(x;y)$ в точке $(0;0)$ не существует.

2. Вычислить пределы

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y),\qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y),\qquad \lim_{x\to 0,y\to 0}f(x,y)$$

для функций

$$a)\ f(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2},\quad b)\ f(x,y)=\frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{x+y}.$$

3. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $(0;0)$: сначала проверить достаточное условие дифференцируемости, и если оно не выполнено проверять по определению «руками»

$$a)\ f(x,y)=(\sin x+\sqrt[3]{xy})^2,\quad b)\ f(x,y)=2y+x\cos\sqrt[3]{xy},$$

$$c)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad d)\ f(x,y)=\ln(3+\sqrt[3]{x^2y}).$$

4. Для функции $f = f(u; v)$ известны f'_u, f'_v. Выразить через них f'_x и f'_y, если
$$u = x^2 - y^2, \qquad v = e^{xy}.$$

5. Найти производную функции $f(x; y; z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в направлении вектора $\vec{l} = (-1/3; 2/3; 2/3)$ в точке $M(1; 2; 1)$.

6. Найти градиент функции $f(x; y; z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(1; 2; 3)$.

7. Найти частные производные неявно заданной функции $u(x; y)$
$$x^3 + 2y^3 + u^3 - 3xyu + 2y - 3 = 0$$
в точках $M(1; 1; 1)$ и $N(1; 1; -2)$.