Сходимость функциональных рядов. Степенные ряды.

1. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E

$$a)\ u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(n^2x)\cdot\cos(\pi n x)}{n\sqrt{n}},\ E=\mathbb{R},$$

$$b)\ u_n(x) = e^{-n(x^2+\sin x)},\ E=[1;+\infty).$$

2. Найти радиус сходимости R степенного ряда

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}5^n x^{3n}.$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n,\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{n\ln^2(n+1)},\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}.$$

4. Найти сумму ряда почленным интегрирование или дифференцированием известных рядов

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

5. Используя результаты предыдущей задачи доказать равенства

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Домашнее задание

1. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^{2(n+1)} - x^{2n})$ сходится неравномерно на отрезке $[-1;1]$, но его можно почленно интегрировать на этом отрезке.

3. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, сходится на отрезке $[0;1]$, но

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

4. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n$, сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но

$$\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)' \neq \lim_{n\to\infty}f_n'(x)\quad \text{при } x=1.$$

5. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанной промежутке

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n\cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}},\quad x\in[-3;-1],\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4},\quad x\in[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}].$$

6. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}x^{2n+1},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}(x+2)^n.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанной промежутке (Гл.5, §18)

$$a)\ (8.4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}},\quad x\in\mathbb{R},\qquad b)\ (8.5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt[3]{n}},\quad x\in\mathbb{R},$$

$$c)\ (9.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n},\quad x\in[-1;3],$$

$$d)\ (10.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx\cdot\sin(1/(nx))}{4+\ln^2 nx},\quad x\in[2;+\infty).$$

2. Найти радиус сходимости R степенного ряда (Гл.5, §20)

$$a)\ (6.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2}{2^n}\cdot(x-3)^n,\qquad b)\ (6.6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{nx}{e}\right)^n.$$

3. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости (Гл.5, §20)

$$a)\ (7.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n(x+2)^n\qquad b)\ (7.5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n,$$

$$c)\ (8.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}\ln\frac{3n-2}{3n+2}\qquad d)\ (8.5)\ \sum_{n=1}^{\infty}3^n(n^3+2)(x-1)^{2n}.$$