Лекция 5, 06.10.23

1. Верхняя граница (грань) мн-ва $A \subseteq \mathbb{R}$
Нижняя
– такое число C : $\forall a \in A \quad a \le C$ ($\ge$)

2. Точная верхняя грань мн-ва $A \subseteq \mathbb{R}$ ($\sup A$)
нижняя ($\inf A$)
– наименьшая верхняя грань
наибольшая нижняя

$\sup(-1;5) = 5$

$\sup[-3;4] = 4$

? $\exists \sup A$

Теорема: У огр. сверху мн-ва A $\exists$ точная грань

Док-во: $S_A = \{c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \le c\}$

$A \ne \emptyset \qquad S_A \ne \emptyset \qquad \forall c \in S_A \quad \forall a \in A \qquad a \le c$

$\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad \forall c \in S_A \qquad a \le \xi \le c$

$\xi \in S_A$ $\xi = \min S_A$

$\xi = \sup A$

Теорема Вейерштрасса

У неубывающей и огр. сверху послед. есть предел.

Док-во: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n \uparrow$

$A \subset \mathbb{R}$ огр. сверху $\Rightarrow$ для A вып. условия т. о $\sup A$

$a := \sup A$

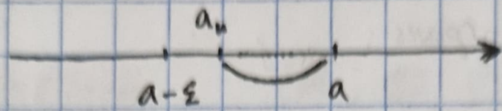
Докажем, что $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

$\forall \varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ \forall n>N(\varepsilon):\ |a_n-a|<\varepsilon$

$a-a_n<\varepsilon$

$a_n>a-\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$. Если $\exists n_0:\ a_{n_0}>a-\varepsilon$, то $\forall n>n_0\ \ a_n>a-\varepsilon$



Пп $\exists\varepsilon_0>0\ \ \forall n\ \ a_n\le a-\varepsilon_0 \Rightarrow a-\varepsilon_0$ — верхняя грань $\otimes$ с опр. sup

$a=\sup A=\min S_A$

$a-\varepsilon_0\in S_A$

Пример 1: $a_1>0$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$ $\qquad a_n\geq 1\ \ \forall n\geq 2$

Док-ть, что сход. $\qquad a_n\searrow\ \ \forall n\geq 2$

0) $a_n>0$

1) $a_{n+1}\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1\ \ \forall n$

2) $a_n\searrow$, если $a_{n+1}\leq a_n\ \ \forall n$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-a_n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-a_n^2}{a_n}\right)\leq 0\ \ \forall n\geq 2$

По т. Вейерштрасса $\exists a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$$\underset{\displaystyle a}{\underset{\downarrow}{c_n}}=a_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(\underset{a}{\underset{\downarrow}{a_n}}+\underset{\frac{1}{a}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{a_n}}}\Big)=\underset{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{\underset{\downarrow}{b_n}}$$

$c_n\equiv b_n$

$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$2a^2 = a^2 + 1$

$a^2 = 1$

$\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$ – не подходит по т. о пред. переходе в нер-ва $\left(\begin{array}{c} a_n \geq c \\ \downarrow \\ a \geq c \end{array}\right)$

Пример 2:

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ – неуб. ⊕ огр. сверху $\qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n^3} + C_n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

1) огр.

$$\boxed{a_n} \boxed{\leq} 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}} \ominus$$

$\boxed{n \geq 3}$

$$\ominus\; 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < \boxed{3}$$ огр. сверху

2) монотонность ↗

$a_{n+1} \vee a_n$

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{\left(1-\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots > a_n$$

Вывод: $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Частичные пределы

Опр: $b_k = a_{n_k}$, где $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ возр. послед. номеров наз. подпослед. послед. $\{a_n\}$.

Опр: Предел подпоследовательности $\{a_n\}$ наз. её частичным пределом.

Пример: $a_n = (-1)^n$

$$b_k = a_{2k} \equiv 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

$$c_k = a_{2k+1} \equiv -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$$

Теорема: У сход. послед. все частичные пределы совпадают с пределом последовательности.

Пример:

$$a_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} n, & n = 2k \\ \frac{1}{n}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

1 част. предел $= 0$