Лекция 10, 17.11.23

Непрерывные функции

0) в точке

$f(x)$ – непрерывна в т. x_0, если

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x : U_{\delta(x_0)}$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Свойства: сумма, произв., частное непр. функции – непрер. ф.

Непрерывность сложной функции

$f(x)$ – непр. в т. x_0

$g(y)$ – непр. в т. $y_0 = f(x_0)$ | $g(f(x))$ – непр. в т. x_0

Th: ($\lim$ сложной ф.)

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} y_0$

$g(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} g(y_0)$ | $\Rightarrow g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(y_0)$

Правило замены переменной

$g(y)$ и $f(x)$ – непрер. там, где надо

$\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y) \qquad f(x) = y$

Непрерывные функции на отрезке

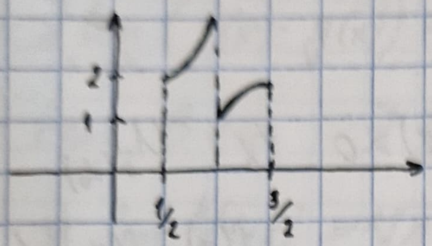
Опр: Функция наз. <u>непр. на отрезке</u> $[a; b]$, если она непр. в каждой точке $[a; b]$.

Теорема: Функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, огр. на нём и принимает наиб. и наим. значения

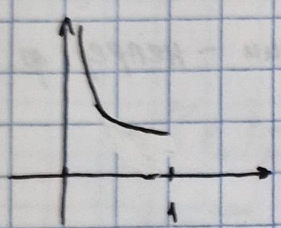
Пример: $\frac{1}{1-\{x\}}$ $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

$x > 1: \quad f(x) = \frac{1}{1-\{x\}} = \frac{1}{2-x}$

$x < 1: \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$



Пример: $f(x)$ $(0;1)$



Док-во: E_f – множество значений $f(x)$ на $[a;b]$

$$M = \sup E_f = \sup_{x\in[a;b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Рассмотрим $a_n \uparrow M$: a_n возр. и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$

$\forall n \ \exists x_n \in [a;b] : f(x_n) > a_n$

(Пусть не так, т.е. $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \leq a_n$

a_n – верхняя грань E_f ; $a_n < M$ (w))

$\underset{\searrow M}{a_n} \leq f(x_n) \leq \underset{M \swarrow}{M} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$

По т. Б.-В. $\exists x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$

Т.к. $f(x)$ непр. $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \Rightarrow M = f(x_0)$ ч.т.д.

$\Rightarrow M < \infty$

Теорема: Непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения.

$f(x)$ – непр. $[a;b]$ $\quad A = f(x_1) \quad x_1, x_2 \in [a;b]$

$\quad B = f(x_2) \quad x_1 < x_2 \;;\; A < B$

$\forall C \in (A;B) \quad \exists x_0 \in (x_1;x_2) : f(x_0) = C$

Док-во: $[x_1;x_2] = [a;b]$

$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$f(x_3) \longrightarrow$ 1) $f(x_3) = C$ ч.т.д.

2) $f(x_3) > C \quad [a_2;b_2] = [a_1 : x_3]$

3) $f(x_3) < C \quad [a_2;b_2] = [x_3;b_1]$

$\{[a_n;b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$

a_n неубывающий ; b_n невозраст. $\quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \;;\; b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

$b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (по т. В.)

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{>C} \geqslant C \\ f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{<C} \leq C \end{array}\right| \Rightarrow f(x_0) = C$$

ч.т.д.

Следствие 1: Если $f(x)$ – непр. на $[a;b]$, то

$E_f = [k;M]$

$M = \sup E_f$

$k = \inf E_f$

Следствие 2: Если $f(x)$ непр. на $[a;b]$ и $\begin{matrix} f(a)<0 \\ f(b)>0 \end{matrix}$, то

$$\exists x_0 \in (a;b): f(x_0)=0$$

$y=x^2 \quad E_f=[0;+\infty) \Rightarrow \exists x_0: \ x_0^2=2$ — Пример

Обратная функция

$f(x): X \to Y$

$D_f = X$

$E_f \subset Y$

$f^{-1}(y)$ — обратная $: E_f \to X$

Замечание: $f^{-1}(y)$ сущ., если f инъективная, т.е.

$$\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Пример: $f(x)=x^2$ Необратима $X=\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$ обратима $X=[0;+\infty)$

Теорема (Достаточность обратимости функции):

Если $f(x)$ (строго) монотонна на X, то она обратима

Док-во: Пусть $f(x)\uparrow$

Тогда $\forall x_1, x_2: x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Теорема: Если $f(x)$ непр. на $[a;b]$, то она обратима на $[a,b] \Leftrightarrow f(x)$ монотонна.

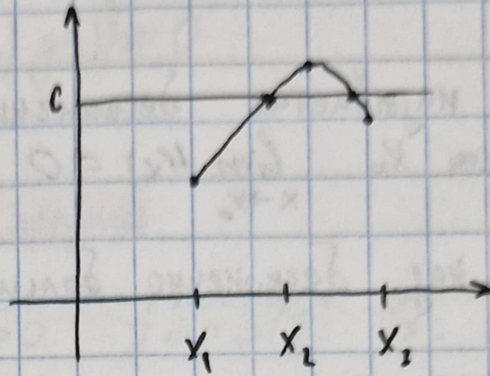
Док-во: $\Leftarrow$ уже док.

$\Rightarrow$ Пт не монотонна

$\exists x_1, x_2, x_3 \ (x_1 < x_2 < x_3) \ : \ f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$

Если „=" уже Ⓦ.

$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$



Возьмём $c : f(x_1) < c < f(x_2)$
$\qquad\qquad f(x_3) < c < f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{ll} \exists a \in (x_1; x_2) & f(a) = c \\ \exists b \in (x_2; x_3) & f(b) = c \end{array}\right| \Rightarrow Ⓦ$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непр. и монотонна на $[a; b]$, то

$f^{-1}(y)$ $\exists$, монотонна так же и непрерывна.

Пример:

$y = x^k$ непр. на $[0; +\infty)$ возр.

$y = \sqrt[k]{x}$ - возр. ⊕ непр.

$\sqrt[k]{a_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt[k]{a}$