Лекция 18, 02.02.24

Лемма 0. $\underline{n+1} \not\lesssim \underline{n}$

Теорема 1 (принцип Дирихле): $\forall m, n \in \mathbb{N} \ (m > n \Rightarrow \underline{m} \not\lesssim \underline{n})$

Док-во: Доп. $m > n$, $\underline{m} \lesssim \underline{n}$ $\Big|$ $\to n+1 \leq m$

$\Rightarrow n+1 \overset{\lesssim}{\subseteq} \underline{m} \lesssim \underline{n}$

$\Rightarrow \underline{n+1} \lesssim n$

$\Rightarrow \bot$

Следствие 2. $\forall m, n \in \mathbb{N} \ (m \sim n \Rightarrow m = n)$

Док-во: доп. $m \neq n$.

Б.О.О., $n > m \overset{T1.}{\Rightarrow} \underline{n} \not\lesssim m \Rightarrow \underline{n} \nsim \underline{m}$

Опр: A конечно $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ \ A \sim \underline{n}$.

Следствие 3. $\forall$ конечное A $\exists!\, n$ $\quad \underline{n} \sim A$

Док-во: если $\underline{n} \sim A \sim \underline{m}$, то $\underline{n} \sim \underline{m} \Rightarrow n = m$ (сл.2).

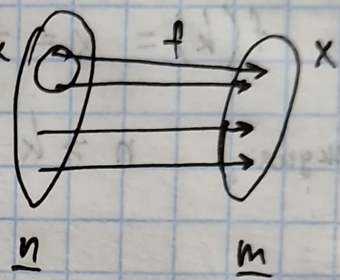
Опр: Такое (единств.) число n, что $A \sim \underline{n}$, наз. мощностью кон. множества A.

пишем $|A| = n$

Следствие 4. $\forall m, n$ (если $\exists f_{\text{сюр.}} : \underline{n} \to \underline{m}$, то $n \geq m$)

Док-во: $\exists f_{\text{сюр.}} : \underline{n} \to \underline{m}$

Рассм. $g : \underline{m} \to \underline{n}$



$g(x) =$ наим. k, т.ч. $f(k) = x$

g тот., т.к. f сюр.

$\forall x \in \underline{m} \quad f(g(x)) = x$

Ут-в: g инъект.

Док-во: $g(x) = g(y) \Rightarrow x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$

$\underline{m} \underset{g}{\leq} \underline{n} \overset{T1}{\Longrightarrow} m \leq n.$

Теорема 5. Пусть A и B конечные и $A \sim B$.
Тогда $\forall f : A \to B$ (f инъекция $\Leftrightarrow$ f сюръекция)

(!) для беск. не так:

пусть $A = B = \mathbb{N}$ и $f(n) = n+1$ $\quad f$ инъект, но не сюр.

$$g(n) = \begin{cases} n-1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

g сюр., но не инъект.: $g(0) = 0 = g(1)$

Опр: Мн-во A счётно, если $A \sim \mathbb{N}$.

Лемма 6. Если A счётно и $A \lesssim B$, то B беск.

Док-во: $\mathbb{N} \sim A \lesssim B$, но B конечно, т.е. $\exists m \in \mathbb{N}$ $B \sim \underline{m}$

тогда: $\underline{m+1} \subseteq \mathbb{N}$

$\underline{m+1} \lesssim \mathbb{N} \lesssim A \lesssim B \sim \underline{m} \Rightarrow \underline{m+1} \lesssim \underline{m} \overset{\text{л}0}{\Rightarrow} \bot$.

Лемма 7. Если $A \subseteq \mathbb{N}$, то A конечно или счётно.

Док-во (идея):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & & & \uparrow & \\ f: & 0 & 1 & & & 2 & & & 3 & \end{array}$$

путь к формализации:

$\alpha: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\alpha(0) = A$

$$\alpha(n+1) = \begin{cases} \alpha(n) \setminus \{\text{наим. эл-т в } \alpha(n)\}, & \text{если } \alpha(n) \neq \varnothing \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases}$$

I сл.: $\exists n \ \alpha(n) = \varnothing$

пусть n — наим. такое

Рассм. $f: \underline{n} \to A$

$f(k) =$ наим. эл.-т. в $\alpha(k)$

II сл.: $\forall n \ \alpha(n) \neq \varnothing$

$f: \mathbb{N} \to A$

$f(k) =$ наим. эл-т в $\alpha(k)$

Утв: $\underline{n} \overset{f}{\sim} A \ \vee \ \mathbb{N} \overset{f}{\sim} A$.

Следствие 8. Если $A \lesssim B$ и B счётно, то A кон. или счётно.

Док-во: $A \lesssim B \sim \mathbb{N} \Rightarrow A \lesssim \mathbb{N} \Rightarrow \exists C \subseteq \mathbb{N} \quad A \sim C$

Следствие 9: Если $A \lesssim B$ и B конечно, то A конечно и $|A| \leq |B|$.

Док-во: $A \lesssim B \sim \underline{n}$; $n = |B|$

$A \lesssim \underline{n} \lesssim \mathbb{N} \underset{\text{сл. 8}}{\Rightarrow} A$ кон. или счётно

A конечно

пусть $|A| = m$

$\underline{m} \sim A \lesssim B \sim \underline{n}$

$\underline{m} \lesssim \underline{n}$

$\Rightarrow (T1) \quad m \leq n$

Следствие 10. Если A кон., то $\forall B$ $A \cap B$ и $A \setminus B$ конечны, причём $|A \cap B| \leq |A|$
$|A \setminus B|$

Док-во: $A \cap B \subseteq A$

$\lesssim$

$A \setminus B \subseteq A$

Теорема 11. (Правило суммы):

Если $A \sim \underline{n}$ и $B \sim \underline{m}$, то $A \cup B \sim \underline{n+m}$ и $A \cap B = \varnothing$

Док-во: Пусть $A \overset{f}{\sim} n$, $B \overset{g}{\sim} m$

Расст. $h : A \cup B \to \underline{n+m}$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ n + g(x), & x \in B \end{cases}$$

$0 \leq h(x) < m + n$ арифм.

h инъекция
$h(x) = h(y)$

I сл. $x, y \in A$

$f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$

$\downarrow$ инъект.

$x = y$

II сл. $x \in A$ и $y \in B$

$$n > f(x) = h(x) = h(y) = n + g(y) \geq n \quad ⚡$$

III сл. $x \in B$ и $y \in A$ ⚡

IV сл. $x, y \in B$

$$n + g(x) = h(x) = h(y) = n + g(y)$$

$$\Downarrow$$

g инъект арифм.

$$g(x) = g(y)$$

$$\Downarrow$$

$$x = y$$

h сюр.

Пусть $0 \leq k < n+m$

$0 \leq k < n$ $\vee$ $n \leq k < n+m$

f сюр. $\Rightarrow \exists x \in A$ $\quad 0 \leq k-n < m$

$k = f(x) = h(x)$ $\quad g$ сюр. $\Rightarrow \exists y \in B$

$g(y) = k - n$

$h(y) = n + g(y) = n + (k-n) = k$

Следствие 12. Если A и B конечны, то $A \cup B$ тоже конечно, причём $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Док-во: $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$; $A \setminus B$, B - кон.

По т.11. $|A \cup B| = |A \setminus B| + |B|$ $\quad (A \setminus B) \cap B = \emptyset$

$A = (A \setminus B) \cup \underset{\text{кон.}}{(A \cap B)}$; по т.11. $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$

$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Следствие 13. Если A и B кон., то $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

Пусть A, B, C кон.

$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| \overset{\text{сл. 12}}{=} |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$

$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) =$

$= |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

Следствие 14. (Принцип включений-исключений)

Пусть $n \geq 2$ и $A_1, \ldots, A_n$ - конечные.

Тогда $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| +$
$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$

Теорема 15. (правило произведения)

Пусть $A \sim \underline{n}$ и $B \sim \underline{m}$. Тогда $A \times B \sim \underline{n \cdot m}$

Док-во: $B = \varnothing \vee A = \varnothing$, тогда $A \times B = 0$
$(A \times B \sim 0 = m \cdot n)$

$A, B \neq \varnothing$, т.е. $m, n \neq 0$

$h: A \times B \to \mathbb{N}$

Пусть $A \overset{f}{\sim} \underline{n}$; $B \overset{g}{\sim} \underline{m}$; пусть $h(x, y) = m\, f(x) + g(x)$

$0 \leq h(x, y) < m \cdot f(x) + m \leq m(n-1) + m \leq n \cdot m$

$h: A \times B \to \underline{m \cdot n}$

h инъект: $h(x, y) = h(u, w)$

$\Downarrow$

$m f(x) + g(y) = m f(u) + g(w)$

поделим на m с ост.

$\begin{cases} mq + r \\ r \in \underline{M} \end{cases} \Rightarrow$ по т-о дел. с ост.: $\begin{cases} g(y) = r = g(w) \\ f(x) = q = f(u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = w \\ x = u \end{cases}$

$\Rightarrow h$ сюръект.