#1.

(a) $a_n = \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n$

1) $\frac{n+10}{2n-1} > \frac{n+10}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{n+10}{2n-1} < \frac{n+\frac{n}{3}}{2n-\frac{n}{3}} = \frac{3n+n}{6n-n} = \frac{4n}{5n} = \frac{4}{5}$

при $n>30$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

(b) $a_n = \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$

1) $2+\frac{1}{n} > 2$

2) $2+\frac{1}{n} \leq 2+\frac{1}{1} = 3$

$$2 < 2+\frac{1}{n} \leqslant 3$$

$$\sqrt[n]{2} < \sqrt{2+\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{3}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

(c) $a_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$

1) $3^n+2^n < 3^n+3^n = 2\cdot 3^n$

2) $3^n+2^n > 3^n$

$$3^n < 3^n+2^n < 2\cdot 3^n$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{3^n} & < & \sqrt[n]{3^n+2^n} & < & \sqrt[n]{2\cdot 3^n} \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 3 & & 3 & & 3\sqrt[n]{2} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 3 & & & & 3 \end{array}$$

(d) $a_n = \sqrt[n]{3n-2}$

1) $3n-2 \geqslant 3\cdot 1 - 2 = 1$

2) $3n-2 < 3n$

$1 \leq 3n-2 < 3n$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{1} & \leq & \sqrt[n]{3n-2} & < & \sqrt[n]{3n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

#2.

$a_n = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)^{n+1}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
a_n	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	…

$\{0; -1; 1\}$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 1 \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = -1$

$\sup\{a_n\} = 1$, т.к. $|\cos\alpha| \leq 1 \Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)^{n+1} = 1$ при $\forall n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$

$\inf\{a_n\} = -1$, т.к. $|\cos\alpha| \leq 1$; $\cos\alpha \geqslant -1 \Rightarrow \left(\cos\frac{\pi n}{2}\right)^{n+1} = -1$
при $\forall n = 4k-2$, $k \in \mathbb{N}$

#3.

$x_1 = \sqrt{5}$, $x_{n+1} = \sqrt{5x_n}$

$x_{n+1} \overset{?}{>} x_n$

$\sqrt{5x_n} \overset{?}{>} x_n$

$5x_n \overset{?}{>} x_n^2$

$5 \overset{?}{>} x_n$

Утв: $x_n < 5$. по мат. индукции:

База: $n=1$: $x_1 = \sqrt{5} < 5$

Шаг: $x_n < 5$

Переход: $x_{n+1} = \sqrt{5x_n} < \sqrt{5 \cdot 5} = 5$ ч.т.д.

Следовательно x_n монотонно возрастает и $x_n < 5$, тогда по т. Вейерштрасса у x_n есть предел. Пусть он равен x:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{5x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} = x$

$\sqrt{5x} = x$

$5x = x^2$

$x = 5 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5.$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5.$