Homework 27.

#1.

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Матрица: $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}y_2x_3$$

#3.

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3 + 2x_1x_2$$

Матрица: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Угловые миноры: $\Delta_1 = 1;\ \Delta_2 = -3;\ \Delta_3 = 8$

Канонический вид: $x_1^2 - 3x_2^2 - \frac{8}{3}x_3^2$

Нормальный вид: $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

#4.

$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ $\quad g(y) = y_1y_2$

$f(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2$ Замена: $x_1 + x_2 = \tilde{x}_1$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g(y) = \tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2$ Замена: $y_1 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2;\ y_2 = \tilde{y}_1 - \tilde{y}_2$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C^{-1})^{-1} \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Ответ}$$

#2.

$$x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 -$$

$$-(x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - (3x_3)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} - \frac{5}{6}y_3 \\ x_2 = \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{6} \\ x_3 = \frac{y_3}{3} \end{cases}$$

Матрица перехода: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

#7.

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2$$
$$\Delta_2 = 4 - \lambda^2$$
$$\Delta_3 = -\lambda^2 + 6\lambda - 16$$

$$\begin{cases} 4 - \lambda^2 > 0 \\ -\lambda^2 + 6\lambda - 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)(2 + \lambda) > 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-2; 2) \\ \lambda \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Ответ: нет решений