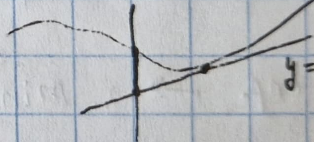
Лекция 31, 24.05.24

$f(x) - t(x) =$

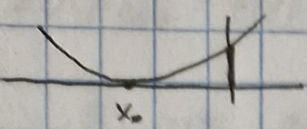
$\exists f''(x),\ x \in D_f$



$= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$

$= (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) = f''(\xi)(c - x_0)(x - x_0)$

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in D_f \setminus \{0\}.$



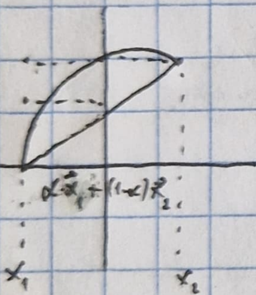
в т. x_0 $\quad L(x_0) = f(x_0)$

в т. $x = x_0$ $\quad f(x) > L(x) = const = f(x_0)$

Опр: Мн-во E, являющееся подмн-вом $\mathbb{R}^n$, $(E \subseteq \mathbb{R}^2)$ наз. выпуклым, если $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$, то $\forall \vec{x} = \alpha \vec{x}_1 + (1-\alpha)\vec{x}_2 \in E$. $\quad (\alpha \in (0;1))$.

Опр: Функция $y = f(\vec{x})$ наз. выпуклой вверх (вниз) на выпуклом мн-ве E, если $\forall \alpha \in (0;1)$ $\quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$

$$f(\vec{x}_1 \cdot \alpha + \vec{x}_2(1-\alpha)) \overset{<}{>} \alpha \cdot f(\vec{x}_1) + (1-\alpha) \cdot f(\vec{x}_2)$$



Теорема: Если $f(\vec{x})$ „хорошая", то матрица Гессе $\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j}$ симметрич.

Теорема: Если на открытом выпуклом мн-ве E матрица Гессе положит. (отриц.) определена, то $f(\vec{x})$ выпукла вниз (вверх) на E.

Пример: $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad$ матрица Гессе $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ положит. опред.

Теорема: Если в стационарной точке $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \ \forall i\right)$ матрица Гессе

1) положит. опр. $\to$ т. min

2) отриц. опред. $\to$ т. max

3) знакоперемен. и все не 0 $\to$ не экстремум.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}_0} \cdot (x_i - x_i^0)$$

$$\Delta f = \underbrace{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}_{>0} = \frac{1}{2} \vec{\Delta x}^T \cdot (\text{матрица Гессе}) \cdot \vec{\Delta x} + \bar{o}(\dots)$$

$\vec{x} \neq \vec{x}_0$

$U_\delta(\vec{x}_0)$ Для 2мерного: $(\Delta x \ \Delta y) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} =$

$$= (\Delta x \ \Delta y) \begin{pmatrix} f''_{xx} \Delta x + f''_{xy} \Delta y \\ f''_{yx} \Delta x + f''_{yy} \Delta y \end{pmatrix} = f''_{xx} \Delta x^2 + 2 f''_{xy} \Delta x \Delta y + f''_{yy} \Delta y^2.$$

$f(\vec{x})$ на K – компакт

1. Находим экстремум внутри K
2. Решим экстремальную задачу на границе K.

Экстремальная задача с ограничениями

$y = f_0(\vec{x}) \to max$ $\qquad$ $y = f(\vec{x}) \to max$

$f_1(\vec{x}_1) = 0$ $\qquad$ $f_1(\vec{x}) = 0 \leftarrow$ задаёт границу K.

$\vdots$

$f_m(\vec{x}) = 0$

Задача: Найти $\min(x^2 + y^2)$, если $3x + 2y = 1$

Решение: $y = \frac{1-3x}{2}$ $\quad x^2 + \left(\frac{1-3x}{2}\right)^2 \to$ парабола $\Rightarrow x_{min} = x_в$.

Функция Лагранжа:

$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\vec{x})$ $\quad$ $n+m$ аргументов

Теорема: Если $f_0, f_1, \dots, f_m$ „хорошие" и $\vec{x}_0$ – т. условного экстремума, то

$$\exists \vec{\lambda}_0 : \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0 \\ f_i(\vec{x}_0) = 0 \end{cases} \quad n+m$$

Если в точке $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ матрица Гессе для функции Лагранжа

полож. опр. $\longrightarrow$ $\vec{x}_0$ – т. лок. условного min

отриц. опр. $\longrightarrow$ $\vec{x}_0$ – т. лок. условного max

знакопер. $\longrightarrow$ не экстр.