Лекция 12, 01.12.23

Дифференцируемость функции

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n$, где α_n - б.м.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \bar{o}(1), \quad x \to x_0$

Опр: $f(x)$ наз. дифф. в точке x_0, если

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + A(x-x_0)}_{\in\mathbb{R}} + \bar{o}((x-x_0))$$

Теорема: Функция дифф. в точке $x_0 \iff \exists f'(x_0)$. Причём $A = f'(x_0)$

Док-во: $\exists f'(x_0)$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \bar{o}(1), \quad x\to x_0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) + \bar{o}((x-x_0))$$ ч.т.д.

Спойлер1: $\exists f^{(n)}(x_0)$

Формула Тейлора: $f(x) = P_n(x) + \bar{o}((x-x_0)^n)$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{x!}(x-x_0)^n$$

$z = f(x, y)$

Дифф. $(x_0; y_0)$

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + \bar{o}\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\ ; \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Теорема: Если $f(x)$ дифф. в точке x_0, то $f(x)$ непр. в т.ч. x_0

Док-во: очевидно. „смотри на опр. дифф."

Дифференциал функции

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{A\cdot(x-x_0)}_{\text{лин. отображ. наз дифф. функции}} + \bar{o}((x-x_0))$$

$$df = A\cdot\Delta x$$

$$f(x) = x$$

$$(df)(x;\Delta x) = A\cdot\Delta x$$

$$df(h) = dx(h) = 1\cdot h$$

$$(df)(x;h) = A\cdot h$$

$$dx(h) = h$$

$$(df)(x;h) = f'(x)\cdot h$$

$$(df)(x;h) = f'(x)\,dx(h)$$

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

Использование производной

Опр: Функция $f(x)$ наз. возрастающей на $E \subseteq \mathbb{R}$, если
неубывающей

$$\forall x_1, x_2 : \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
$\leq$

Опр: Точка x_0 наз. точкой строгого локального min $f(x)$, если

$$\exists \delta_0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) : \ f(x) \geq f(x_0)$$
$>$

Опр: точкой лок. экстремума наз. т. min (т. max).

Теорема (Необх. условие лок. экстр., т. Ферма):

Если x_0 – т. лок. экстр., то $f'(x_0)$ либо $\neg\exists$, либо $=0$.

Док-во: x_0 – т. min

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}$$ либо $\neg\exists$, либо ≥ 0

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}$$ либо $\neg\exists$, либо ≤ 0

$f'(x_0)$ — либо $\neg\exists$

— либо $\leq 0, \geq 0 \Rightarrow =0$.

Если $f(x)$ непр. на $[a;b]$, то $\exists x_0 : f(x_0) = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$

$\Rightarrow$ 1) $x_0 = a \vee b$

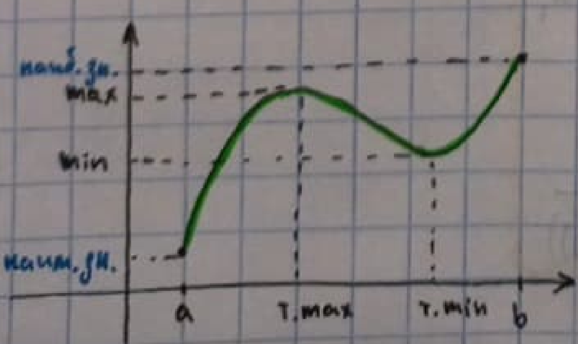
2) $x_0 \in (a;b) \Rightarrow x_0$ – т. лок. max

Алгоритм нахождения наибольшего значения непр. функции

Находим $x_1, \dots, x_n$, где $f'(x_i)=0 \vee \neg\exists f'(x_i)$

критические

Выбираем наиб. из: $f(a)$, $f(b)$ и $f(x_i)$.



Теорема (производная сложной функции):

$f(g(x))$

$g(x)$ дифф. в т. x_0

$f(y)$ дифф. в т. $y_0 = g(x_0)$,

тогда $f(g(x))$ дифф. в т. x_0 и

$$(f(g(x)))'\Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Док-во: $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \bar{o}(x-x_0)$ $\qquad \bar{o}(1) \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$

$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0) + \bar{o}(y-y_0)$ $\qquad y = g(x)$

$f(g(x)) = f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0) + \underbrace{\bar{o}(1)}_{\bar{o}(1)} \cdot (g(x) - g(x_0))$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} \bar{o}(1) = 0$

$\Downarrow$

$g(x) \to g(x_0)$

$\Updownarrow$

$y \to y_0$

$f(g(x)) = f(y_0) + f'(y_0)(g'(x_0)(x-x_0)) + \bar{o}(1)[g'(x_0)(x-x_0) + \bar{o}(x-x_0)]$

$\bar{o}(1) = h(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$

$\boxed{f(g(x))} = \boxed{f(g(x_0))} + \boxed{f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x-x_0)} + \bar{o}(x-x_0)$

$h(y(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

$f'(y_0) \cdot \bar{o}((x-x_0)) = f'(y_0) \cdot \bar{o}(1)(x-x_0) = \bar{o}(1)(x-x_0) = \bar{o}(x-x_0)$

ч.т.д.

/* $\bar{o}(x-x_0) + \bar{o}(x-x_0) = \bar{o}(x-x_0)$ */

Теорема (производная обратной функции):

Если $f(x)$ непр. на $[a;b]$ и обратима,

$x \in (a;b)$, $\exists f'(x_0) \neq 0$. Тогда

$$\exists (f^{-1}(y))'\Big|_{y=f(x_0)=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Пример: $f(x) = e^x$

$$f^{-1}(y) = \ln y$$

$$(\ln y)'\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0} \qquad \forall y_0 > 0$$

$$\ln' y = \frac{1}{y}$$

Док-во: $f^{-1}(f(x)) = x$

$$(f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) \cdot f'(x_0) = 1$$

$$(f^{-1}(y))'\Big|_{y=y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = [y = f(x)] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\overbrace{f^{-1}(f(x))}^{x} - \overbrace{f^{-1}(f(x_0))}^{x}}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Степенная функция $y = x^\alpha$: $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad D_f = (0; +\infty)$

$$= e^{\alpha \ln x} \longleftarrow \text{непр.}$$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$