Подсчет пределов функций. Производная.

1. Вычислить пределы, используя замечательные пределы и теорему о пределе сложной функции

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(1+3x^4\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}, \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}.$$

2. При каких значениях параметра α функция $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$, доопределенная в нуле нулем а) непрерывна, б) дифференцируема.

3. Вычислить производные обратных тригонометрических функций.

4. Вычислить производные

$$a)\ f(x) = \frac{\cos 3}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x+3), \qquad b)\ f(x) = \sqrt[13]{9+7\sqrt[5]{2x}}$$

$$c)\ f(x) = \log_2^3(2x+3)^2, \qquad d)\ f(x) = 3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)},$$

$$e)\ f(x) = \sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x, \qquad f)\ f(x) = x^{e^x}.$$

Домашнее задание

1. Найти естественную облать определения функции и асимптоты графика функции
$$a)\ f(x) = \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}, \qquad b)\ f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. (a) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^2)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$.
   (b) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x^2)$ при $x \to +\infty$.
   (c) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to +\infty$, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to 0$.

3. Пусть $f(x) = O(g(x))$. Верно ли, что $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$.

4. Пусть $f(y) = 1 + 3y - y^2 + o(y^2)$ при $y \to 0$. Представить $f(2x + 4x^2)$ в виде $P(x) + o(x^2)$ при $x \to 0$, где $P(x)$ - многочлен степени не выше второй. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

5. Вычислить пределы, используя замечательные пределы и теорему о пределе сложной функции
$$a)\ \lim_{x\to\pi/6} \frac{\cos(2\pi/3 - x)}{\sqrt{3} - 2\cos x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x};$$
$$c)\ \lim_{x\to 0} (\cos x)^{-1/x^2}, \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \left(\cos x + \operatorname{arctg}^2 x\right)^{1/\operatorname{arctg} x^2}.$$

6. Вычислить производные
$$a)\ f(x) = \ln\ln\left(\frac{x}{2}\right), \qquad b)\ f(x) = 2^{\sin x^2}$$
$$c)\ f(x) = (\sin x)^{\cos x}, \qquad d)\ f(x) = \arccos\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}\right),$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти естественную облать определения функции и асимптоты графика функции

$$a)\ f(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}, \qquad b)\ f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1},$$

$$c)\ f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+4}}, \qquad d)\ f(x) = x + \frac{\sin x}{2x}.$$

2. Какие из следующих утверждений верны при $x \to 0$?

   (a) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x) = o(g(x))$;

   (b) Если $f(x) = o(g(x))$, то $f(x) = O(g(x))$;

   (c) Если $f(x) = O(g(x))$, то $g(x) = O(f(x))$;

   (d) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x) \cdot h(x) = O(g(x) \cdot h(x))$;

   (e) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$;

   (f) Если $f_1(x) = O(1)$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x))$;

   (g) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$;

   (h) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x))$;

   (i) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = O(h(x))$;

   (j) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$;

   (k) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$;

   (l) Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$;

3. Вычислить пределы, используя замечательные пределы и теорему о пределе сложной функции

$$a)\ \lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{3}{x}\right), \qquad b)\ \lim_{x\to\pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1};$$

$$c)\ \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x\operatorname{tg} x\right), \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 + 2\sin 3x} - \sqrt{1 - 4\sin 5x}}{\sin 6x}.$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\pi - 4\,\mathrm{arctg}\,1/(1+x)}{x}, \qquad f)\ \lim_{x\to\infty}\ x\log_2\frac{10+x}{5+x};$$

$$g)\ \lim_{x\to 1/4} \frac{1-\mathrm{ctg}\,\pi x}{\ln \mathrm{tg}\,\pi x}, \qquad h)\ \lim_{x\to\infty}\ x^2\left(4^{1/x} - 4^{1/(x+1)}\right);$$

$$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}, \qquad j)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1};$$

$$k)\ \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} - x\right)^{1/x}, \qquad l)\ \lim_{x\to 0} \left(\ln(e+x)\right)^{\mathrm{ctg}\,x}.$$

4. Вычислить производные

$$a)\ f(x) = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}}, \qquad b)\ f(x) = \frac{1-\cos\left(8x-3\pi\right)}{\mathrm{tg}\,2x - \mathrm{ctg}\,2x}$$

$$c)\ f(x) = \cos\frac{1}{\log_2 x}, \qquad d)\ f(x) = \mathrm{arcctg}\,2^x,$$

$$e)\ f(x) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^4+1}\right), \qquad f)\ f(x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right).$$

$$g)\ f(x) = x^{x^x}, \qquad h)\ f(x) = \left(\arcsin \sin^2 x\right)^{\mathrm{arctg}\,x}.$$