

Параметрически заданные функции

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны на интервале (α, β) и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на (α, β) . Тогда, система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

определяет единственную функцию

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

на интервале $(a; b)$, где $a = \lim_{t \rightarrow \alpha+} \varphi(t)$ и $b = \lim_{t \rightarrow \beta-} \psi(t)$

Асимптоты

Прямую $x = x_0$ называют вертикальной асимптотой кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow a} y(t) = \infty,$$

или

$$\lim_{t \rightarrow a+0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow a+0} y(t) = \infty,$$

или

$$\lim_{t \rightarrow a-0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow a-0} y(t) = \infty.$$

Прямую $y = b$ называют горизонтальной асимптотой кривой $x = x(t), y = y(t)$ при $x \rightarrow +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow a} y(t) = b,$$

или

$$\lim_{t \rightarrow a-0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow a-0} y(t) = b,$$

или

$$\lim_{t \rightarrow a+0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow a+0} y(t) = b.$$

Прямую $y = kx + b, k \neq 0$, называют наклонной асимптотой кривой $x = x(t), y = y(t)$ при $x \rightarrow +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow a} y(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = k,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} (y(t) - kx(t)) = b,$$

Или рассматриваются пределы при $t \rightarrow a-$ или $t \rightarrow a+$

Аналогично даются определения асимптот при $x \rightarrow -\infty$.

Claim Вычисление производных

Пусть дана система уравнений, определяющих единственную функцию $y(x)$

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t) \end{cases}$$

Тогда:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$$

Эквивалентные обозначения:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Exercise 1. (номер 1.b из домашней работы)

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \frac{1}{4}(t-4)e^t \\ y = \psi(t) = \sqrt{t} \cdot e^t \end{cases}$$

1. Функция $y(t)$ определена, непрерывна и строго монотонна на интервале $(0; +\infty)$
функция $x(t)$ также определена и непрерывна на $(0; +\infty)$
2. Таким образом, данная система уравнений определяет единственную непрерывную функцию $x(y) = \varphi(\psi^{-1}(y))$ на интервале $(a; b)$, где $a = \lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t)$ и $b = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)$
3. $a = \lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \sqrt{t} \cdot e^t = 0$
 $b = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} \cdot e^t = +\infty$
Следовательно, $(a; b) = (0; +\infty)$
Ответ: система определяет единственную функцию $x(y) = \varphi(\psi^{-1}(y))$ на интервале $(0; +\infty)$

Exercise Найдите промежутки монотонности функции $y(x)$, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$$

1. $y'_t = \frac{1}{t}$
2. $x'_t = 3t^2$
3. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{3t^3}$

Exercise Найдите производные и асимптоты кривой, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^3} \\ y = \frac{t^3}{1+t^3} \end{cases}$$

$$1. \quad y'_t = \left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right)'_t = (-1) \cdot (-1) \cdot (1+t^3)^{-2} \cdot 3t^2 = \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$y''_{tt} = (y'_t)'_t = \left(\frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\right)'_t = \frac{6t(1+t^3)^2 - 3t^2 \cdot 2(1+t^3) \cdot 3t^2}{(1+t^3)^4} = \frac{6t - 12t^4}{(1+t^3)^3}$$

$$2. \quad x'_t = \left(\frac{t^2}{1+t^3}\right)'_t = \frac{2t(1+t^3) - t^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{2t - t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\begin{aligned} x''_{tt} &= (x'_t)'_t = \left(\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\right)'_t = \frac{((2-t^3) + t(-3t^2))(1+t^3)^2 - t(2-t^3) \cdot 2(1+t^3) \cdot 3t^2}{(1+t^3)^4} = \\ &= \frac{(2-4t^3)(1+t^3) - t(2-t^3) \cdot 2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^3} = \frac{(2-4t^3+2t^3-4t^6) - (12t^3-6t^6)}{(1+t^3)^3} = \\ &= \frac{2-2t^3-4t^6-12t^3+6t^6}{(1+t^3)^3} = \frac{2-14t^3+2t^6}{(1+t^3)^3} \end{aligned}$$

$$3. \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t}{2-t^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3} = \frac{-6(t^3+1)^3}{t(t^3-2)^3} \text{ (магия)}$$

Асимптоты:

$$\lim_{t \rightarrow -1+} x(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -1-} x(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -1-} y(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 1$$

Нет горизонтальных и вертикальных асимптот

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1 = k$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} y(t) - kx(t) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2(1+t)}{1+t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2}{1-t+t^2} = \frac{1}{3} = b$$

Наклонная асимптота:

$$y = -x + \frac{1}{3} \text{ при } t \rightarrow -1$$

Формула Тейлора

Exercise Вычислите предел, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{\frac{x^2}{3}}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2 \cos(x)} =$$

$$1. \sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^4 + \bar{o}(x^4) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \bar{o}(x^4) \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$2. e^{\frac{x^2}{3}} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{3} \right)^2 + \bar{o} \left(\left(\frac{x^2}{3} \right)^2 \right) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + \bar{o}(x^4) \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$3. \ln(1+3x^2) = 3x^2 - \frac{(3x^2)^2}{2} + \bar{o}((3x^2)^2) = 3x^2 - \frac{9x^4}{2} + \bar{o}(x^4) \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$4. 3x^2 \cos(x) = 3x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^3) \right) = 3x^2 - \frac{3x^4}{2} + \bar{o}(x^5) \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{\frac{x^2}{3}}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2 \cos(x)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \bar{o}(x^4) \right) - \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + \bar{o}(x^4) \right)}{\left(3x^2 - \frac{9x^4}{2} + \bar{o}(x^4) \right) - \left(3x^2 - \frac{3x^4}{2} + \bar{o}(x^5) \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{\frac{x^2}{3}}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2 \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^4 + \bar{o}(x^4)}{-3x^4 + \bar{o}(x^4)} = \frac{1}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{18}$$

Exercise Вычислите предел, используя формулу Тейлора

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{1+2x+x^3} - \frac{2x}{2x+3} \right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(\frac{1}{x^3} \cdot \ln \left(\sqrt[3]{1+2x+x^3} - \frac{2x}{2x+3} \right) \right)}$$

- $$\sqrt[3]{1+2x+x^3} = 1 + \frac{1}{3}(2x+x^3) + \frac{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\right)}{2}(2x+x^3)^2 + \frac{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\right)}{6}(2x+x^3)^3 + \bar{o}\left((2x+x^3)^3\right) = 1 + \frac{x^3+2x}{3} - \frac{1}{9}x^2(2+x^2)^2 + \frac{5}{81}x^3(2+x^2)^3 + \bar{o}(x^3) = 1 + \frac{x^3+2x}{3} - \frac{1}{9}x^2 \cdot 4 + \frac{5}{81}x^3 \cdot 8 + \bar{o}(x^3) = 1 + \frac{67x^3-36x^2+54x}{81} + \bar{o}(x^3) \text{ при } x \rightarrow 0$$
- $$\frac{2x}{2x+3} = \frac{2x}{3} \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{-1} = \frac{2x}{3} \left(1 - \frac{2x}{3} + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \bar{o}\left(\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right)\right) = \frac{18x-12x^2+8x^3}{27} + \bar{o}(x^3) \text{ при } x \rightarrow 0$$
- $$\sqrt[3]{1+2x+x^3} - \frac{2x}{2x+3} = 1 + \frac{67x^3-36x^2+54x}{81} + \bar{o}(x^3) - \frac{18x-12x^2+8x^3}{27} - \bar{o}(x^3) = 1 + \frac{67x^3-36x^2+54x}{81} + \bar{o}(x^3) - \frac{54x-36x^2+24x^3}{81} - \bar{o}(x^3) = 1 + \frac{43x^3}{81} + \bar{o}(x^3)$$
- $$\ln \left(\sqrt[3]{1+2x+x^3} - \frac{2x}{2x+3} \right) = \ln \left(1 + \frac{43x^3}{81} + \bar{o}(x^3) \right) = \frac{43x^3}{81} + \bar{o}(x^3) + \bar{o}\left(\frac{43x^3}{81} + \bar{o}(x^3)\right) = \frac{43x^3}{81} + \bar{o}(x^3) \text{ при } x \rightarrow 0$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \left(\sqrt[3]{1+2x+x^3} - \frac{2x}{2x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{43x^3}{81} + \bar{o}(x^3) \right) = \frac{43}{81}$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(\frac{1}{x^3} \cdot \ln \left(\sqrt[3]{1+2x+x^3} - \frac{2x}{2x+3} \right) \right)} = e^{\frac{43}{81}}$$

Ответ: $e^{\frac{43}{81}}$

Неопределённые интегралы

Exercise Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{x^8 - 2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| \right) + C = \frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C, C \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C, C \in \mathbb{R}$

Exercise Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 - 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x^2 - 1 + \sqrt{2}} \right| \right) + C = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x^2 - 1 + \sqrt{2}} \right| + C, C \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x^2 - 1 + \sqrt{2}} \right| + C, C \in \mathbb{R}$

Exercise Вычислите 2 неопределённых интеграла

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

1. Применяя правило интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a} \int \cos bx \, d(e^{ax}) = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \cos bx - \int e^{ax} d(\cos bx) \right) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a} \int \sin bx \, d(e^{ax}) = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \sin bx - \int e^{ax} d(\sin bx) \right) = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1 \end{aligned}$$

2. Следовательно:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_2 \\ I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_2 \\ I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1 \right)$$

$$I_1 = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I_1$$

$$I_1 + \frac{b^2}{a^2} I_1 = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx$$

$$I_1 = \frac{ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2}$$

$$I_1 = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$I_2 = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

Т.к. I_1 и I_2 - неопределённые интегралы, необходимо добавить константы:

$$I_1 = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$I_2 = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$$

(такая странная ситуация возникла, т.к. мы оперировали множеством функций как функцией)

Ответ:

$$I_1 = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$I_2 = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$$

Определённые интегралы

Exercise Вычислите неопределённый интеграл

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln(x))}{\ln x} = \ln |\ln(x)| \Big|_e^{e^2} = \ln |\ln(e^2)| - \ln |\ln(e)| = \ln 2$$

Ответ: $\ln 2$

Сходимость интегралов

Exercise Установить сходимость или расходимость неопределённого интеграла

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(x)}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$1. \forall x \in (0; 1] : 0 < \cos^2(x) < 1 \implies \forall x \in (0; 1] : 0 < \frac{\cos^2(x)}{\sqrt[3]{x}} < 1$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \text{ сходится} \implies \int_0^1 \frac{\cos^2(x)}{\sqrt[3]{x}} dx \text{ сходится по признаку сравнения}$$

Ответ: сходится

Exercise Установить сходимость или расходимость неопределённого интеграла

$$I = \int_1^{+\infty} x^x e^{-x^n} dx, n \in \mathbb{N}$$

$$1. n = 1$$

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^x dx$$

$$\forall x \geq e : \left(\frac{x}{e}\right)^x \geq 1 \implies I \text{ расходится по признаку сравнения}$$

$$2. n \geq 2$$

$$x^x e^{-x^n} = e^{x \ln x} e^{-x^n} = \frac{1}{e^{x^n - x \ln x}}$$

$$\forall x \geq e : x \geq 1 + \ln x \implies \forall x \geq e : x^{n-1} \geq 1 + \ln x \implies \forall x \geq e : x^n - x \ln x \geq x$$

$$\implies \forall x \geq e : e^{x^n - x \ln x} \geq e^x \implies \forall x \geq e : \frac{1}{e^{x^n - x \ln x}} \geq \frac{1}{e^x}$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx \text{ сходится} \implies \int_e^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx \text{ сходится}$$

$$\implies \int_e^{+\infty} \frac{1}{e^{x^n - x \ln x}} dx \text{ сходится по признаку сравнения} \implies I \text{ сходится}$$

Ответ: сходится (абсолютно) $\iff n \geq 2$

Exercise Установить сходимость или расходимость неопределённого интеграла

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$$
$$\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx = \left| e^x = t, x = \ln(t), dx = \frac{dt}{t} \right| = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} \cos(t) dt$$

2. Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{\ln^2(t)}{t}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

Monotonicity of the $f(t)$:

$$\left(\frac{\ln^2(t)}{t} \right)' = \frac{2 \ln(t) - \ln^2(t)}{t^2}$$

$$\forall t \in (e^2; +\infty) f'(t) < 0$$

3. Рассмотрим функцию $g(t) = \cos(t)$

$G(t) = \sin(t) + C$ ограничена на $(0; +\infty)$

4. Функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют требованиям признака Дирихле на интервале $(e^2; +\infty)$

и, следовательно, интеграл $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} \cos(t) dt$ сходится по признаку Дирихле

5. Абсолютная сходимость:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} |\cos(t)| dt$$

$$\forall t \in \mathbb{R} : |\cos(t)| \geq \cos^2(t) \implies \forall t > 1 : \frac{\ln^2(t)}{t} |\cos(t)| \geq \frac{\ln^2(t)}{t} \cos^2(t)$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} \cos(2t) dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} \cos(2t) dt \text{ сходится (док-во такое же, как и для интеграла I)}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \ln^2(t) d(\ln(t)) = \frac{\ln^3(t)}{3} \Big|_1^{+\infty} = +\infty \implies \text{интеграл расходится} \implies$$

$$\implies I_2 \text{ расходится} \implies I_1 \text{ расходится по признаку сравнения} \implies I \text{ сходится условно}$$

Ответ: сходится условно

Exercise Установить сходимость или расходимость неопределённого интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{e^{\sin x^2} - 1} dx$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\ln(1+x)}{e^{\sin x^2} - 1} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{\frac{e^{\sin x^2} - 1}{\sin x^2}} \cdot \frac{1}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{e^{\sin x^2} - 1}{\sin x^2}} \cdot \frac{1}{\sin x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 1 \implies \frac{\ln(1+x)}{e^{\sin x^2} - 1} \sim \frac{1}{x} \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ расходится} \implies I \text{ расходится по признаку сравнения в предельной форме}$$

Ответ: расходится