Лекция 26, 17.04.24

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (1)$$

1) либо сход $\forall x$

2) либо сход $x=0$

3) либо $\exists R>0$ сход на $(-R;R)$

расход на $(-\infty;-R)\cup(R;+\infty)$

Теорема: $\forall r: 0<r<R$ ряд (1) сходится равномерно на $[-r;r]$

Теорема (Абеля): R – радиус сход. и при $x=R$ сход. абсолютно ряд (1) $\Rightarrow$ (1) сход. равномерно на $[0;R]$

<u>Как находить R?</u>

Теорема: Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ $\left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $R_{сх} = \frac{1}{A}$.

Док-во: Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n x^n}{c_{n+1} x^{n+1}}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \ominus$$

1) $A=0$ $\ominus \to +\infty \Rightarrow$ ряд сходится $\forall x$

2) $A=+\infty$ $\ominus$ 0, т.к. <1, ряд расходится

3) $A \in \mathbb{R}^+$ $\ominus$ $\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|A|}$ сход >1

$|x| < \frac{1}{A}$

расх. $>1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{A} \Rightarrow R_{сх} = \frac{1}{A}$ ч.т.д.

Теорема (формула Коши-Адамара): $R_{сх} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot n \cdot x^n \quad (x \neq 0)$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^n$

Теорема: $R_1 = R_2 = R_3$

Док-во: 1) $R_2 \leq R_1 \leq R_3$

Возьмём x_0: сход (2)

т.е. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n n x^n|$ сход $\qquad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{c_n}{n+1}\right| |x|^n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |n| \cdot |x|^n$

2) $R_3 \leq R_2$. Пусть x_0 – т. сход. (3). Докажем, что x_0 – т. сход. ряда (2).

$x_0 \in (-R_3; R_2)$. $\exists x_1 : |x_0| < |x_1| < R_3$ $\quad \sum\limits_{n=0} \left|\frac{c_n \cdot x_1^n}{n+1}\right|$ сход.

$\Rightarrow \exists M : \forall n \ \left|\frac{c_n x_1^n}{n+1}\right| \leq M$

$$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot n \cdot |x_0|^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left|\frac{c_n \cdot x_1^n}{n+1}\right|}_{\leq M} \cdot n(n+1) \cdot \underbrace{\left|\left(\frac{x_0}{x_1}\right)\right|^n}_{q^n \quad 0<q<1} \leq M \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n+1) q^n \text{ – сход.}$$

ч.т.д.

Выводы: $R > 0$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot x^n = f(x) \qquad D_f = (-R; R)$

1) $f(x)$ дифф. по D_f и $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$

т.к. $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (c_n \cdot x^n)'$

2) $f(x)$ интегрируема и D_f и $\int\limits_0^x f(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$

3) $f(x)$ бесконечное число раз дифф.

Заметим, что $f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$

$\Rightarrow$ Если $f(x)$ представлена в виде степенного ряда, то

c_k опр. однозначно $\quad c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Утв: $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\Downarrow$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - 0}{x - 0} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{c_n}_{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \cdot x^n \equiv 0 \neq f(x)$$

Опр: $f(x)$, представимые в виде ряда Тейлора, наз. аналитическими.

Ряды Тейлора

Опр: Рядом Тейлора беск. дифф. в т. $x = a$ функции наз.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Утв: (Необход. условие разложения ф. в ряд Тейлора):

Если $f^{(n)}(x)$ огр. в совокупности на $(a-R;\ a+R)$, то $\forall x \in U_R(a)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Док-во: $\exists M \ \forall n \ \forall x \in U_R(a) \ |f^{(n)}(x)| \leq M \qquad a < \xi \leq x < R + a$

$$\Big|\underbrace{\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_k(x)} - f(x)\Big| = \frac{|f^{(k+1)}(\xi)|}{(k+1)!}|(x-a)^{k+1}| \leq \frac{M\cdot(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M\cdot R^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

ч.т.д.

Примеры:

1) $y = e^x, \quad a = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x$

$\forall R \quad \exists M \quad |f^{(k)}(x)| \leqslant e^R = M$

т.е. $\forall x \quad e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) $y = \sin x$

$$|f^{(k)}(x)| = \left[\begin{array}{l} |\sin x| \\ |\cos x| \end{array} \right. \leqslant 1$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x$$

3) $y = \cos x$

Аналогично, $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x$

4) $y = \ln(1+x) \qquad a = 0$

$$y' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n\, dt \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < 1$$