Семинар 31

1 Повторение

Критерий невырожденности матрицы Грама (5-ое свойство). Выражение для объема параллелепипеда через определитель матрицы Грама.

Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая. Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство.

Определение линейного (алгебраического) многообразия. Замечание о том, как устроено линейное многообразие. Расстояние между вектором и линейным многообразием (определение). Расстояние от точки до линейного многообразия как длина ортогональной составляющей.

2 Задачи

Зафиксируем n-мерное векторное пространство V над $\mathbb{R}$. Пространство V называется *евклидовым*, если на V задана симметричная билинейная положительно определённая форма (*скалярное произведение*)

$$(\cdot, \cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}.$$

Свойства скалярного произведения:

- $(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(v, w)$;
- $(u, v) = (v, u)$;
- $(u, u) \geq 0$ и $(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Величина $|u| = \sqrt{(u, u)}$ называется *длиной вектора* u. Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(u, v)| \leq |u| \cdot |v|.$$

Если u, v – два ненулевых вектора, то *угол* ϕ *между векторами* u *и* v определяется из соотношения

$$\cos \phi = \frac{(u, v)}{|u||v|}.$$

Пример 1.

1. Стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$
$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

2. Скалярное произведение на $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$
$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$
где $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ – произвольный отрезок.

Пусть $u_1, \ldots, u_k \in V$ – некоторый набор векторов. *Матрицей Грама* набора векторов $u_1, \ldots, u_k$ называется матрица
$$G(u_1, \ldots, u_k) = G = ((u_i, u_j))_{i,j=1}^k \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R}).$$
Свойства матрицы Грама:

- $G^T = G$;
- $|G| \geq 0$ и $|G| = 0$ тогда и только тогда, когда $u_1, \ldots, u_k$ линейно зависимы.

Пусть $v_1, \ldots, v_l \in V$ – ещё один набор векторов. Обозначим через G' матрицу Грама этого набора. Предположим, что векторы v_i выражаются через векторы u_j с помощью матрицы $C \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(\mathbb{R})$, то есть
$$(v_1, \ldots, v_l) = (u_1, \ldots, u_k)C.$$
Тогда
$$G' = C^T G C.$$

Пример 2.

1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда
$$G(e_1, \ldots, e_n) = E_n.$$

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ два вектора $u_1 = (1, 2)$ и $u_2 = (-2, 3)$. Тогда
$$G = G(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}.$$
Матрица перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^2$ к базису (u_1, u_2) равна
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$
поэтому
$$G = C^T E C = C^T C.$$

Рассмотрим два вектора $u, v \in V$. Говорят, что *вектор* u *ортогонален* (*перпендикулярен*) *вектору* v, если $(u, v) = 0$. Обозначение: $u \perp v$. Вектор $u \in V$ называется *нормированным*, если $|u| = 1$.

Рассмотрим набор векторов $u_1, \dots, u_k \in V$ и матрицу Грама G этого набора. *Набор векторов* $u_1, \dots, u_k$ называется *ортогональным*, если матрица G диагональна. Другими словами, $(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$. *Набор векторов* $u_1, \dots, u_k$ называется *ортонормированным*, если матрица G является единичной матрицей. Другими словами, $(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(u_i, u_i) = 1$ для всех $i = 1, \dots, k$. Заданный ненулевой вектор $u \in V$ легко нормировать: достаточно заменить u на $\frac{u}{|u|}$. Для того, чтобы превратить заданный набор векторов в ортогональный набор, рассмотрим процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть задан набор векторов $u_1, \dots, u_k \in V$. Построим ортогональный набор векторов $v_1, \dots, v_k \in V$ такой, что

$$\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$$

для всех $i = 1, \dots, k$.

1. Положим $v_1 = u_1$.

2. Рекуррентно для каждого $i = 2, \dots, k$ определим

$$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(u_i, v_j)}{(v_j, v_j)} v_j.$$

Заметим, что если на очередном шаге получилось $v_i = 0$, то это означает, что вектор u_i лежит в линейной оболочке векторов $u_1, \dots, u_{i-1}$, а значит, вектор u_i можно выбросить из начального набора векторов.

Задача 1. Построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов

$$u_1 = (1, 1, -1, -2),\ u_2 = (5, 8, -2, -3),\ u_3 = (3, 9, 3, 8).$$

Используя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, можно получить алгоритм дополнения заданной ортогональной системы ненулевых векторов $v_1, \dots, v_k \in V$ (такая система всегда линейно независима!) до ортогонального базиса всего пространства V. Для этого нужно сначала дополнить набор $v_1, \dots, v_k$ до базиса всего пространства V некоторыми векторами $u_1, \dots, u_{n-k}$, а затем применить процесс ортогонализации к набору $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k}$. Заметим, что при этом первые k шагов процесса никак не изменят набор $v_1, \dots, v_k$.

Задача 2. Дополнить до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}^4$ набор векторов

$$v_1 = (1, 1, 1, 2),\ v_2 = (1, 2, 3, -3).$$

Пусть $U \leq V$ – подпространство. Определим *ортогональное дополнение к* U:

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid (v, u) = 0 \ \forall u \in U\}.$$

Множество $U^{\perp}$ является подпространством в V. Если $u_1, \ldots, u_k$ – это произвольный базис U, то $U^{\perp}$ задаётся ОСЛУ

$$(u_1, x) = \ldots = (u_k, x) = 0.$$

Свойства ортогонального дополнения:

- $(U^{\perp})^{\perp} = U$;
- $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$;
- подпространства U и $U^{\perp}$ образуют прямую сумму и $U \oplus U^{\perp} = V$.

Получаем ещё один алгоритм дополнения заданной ортогональной системы ненулевых векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$ до ортогонального базиса всего пространства V. Для этого достаточно найти какой-то базис $u_1, \ldots, u_{n-k}$ подпространства $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle^{\perp}$, а затем ортогонализовать его.

Задача 3. Дополнить до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^4$ набор векторов

$$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Задача 4. Проверить, что форма

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

на пространстве всех непрерывных функций $[a, b] \to \mathbb{R}$ задаёт скалярное произведение.