Семинар 17, 25.01.24

Пусть X - моноид.

Обратимый

Эл-т $x \in X$ наз. <u>обратимым</u>, если $\exists y \in X: x \cdot y = y \cdot x = 1$.

При этом y наз. <u>обратным</u> к x. Обозн. через G мн-во обратимых элементов.

Свойства:

1) Обратный эл-т определён однозначно: если $y, y' \in X$ обратны к $x \in X$, то $y = y'$
$\Rightarrow$ определено отношение $\iota : G \xrightarrow{} G$ инверсии.
Обознач: $\iota(x) = x^{-1}$
$\square$ $y = 1 \cdot y = (y'x)y = y' \cdot \underbrace{(xy)}_{1} = y'$ $\blacksquare$

2) $\iota \circ \iota = 1_G$ $\quad ((g^{-1})^{-1} = g)$

3) $1 \in G$ и $1^{-1} = 1$

4) Пусть $x_1, \ldots, x_n \in X$.

$(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in G \Leftrightarrow x_i \in G$

$\forall i) \ \& \ (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = x_n^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1}$

$\square$ „$\Leftarrow$" Индукция по n. $n=1$ - очевидно

$$(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \underbrace{x_{n+1})(x_{n+1}^{-1}}_{1} \cdot x_n^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1}) = 1$$

$$(x_{n+1}^{-1} \cdot \ldots \cdot x_2^{-1} \underbrace{x_1^{-1})(x_1}_{1} \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}) = 1$$

„$\Rightarrow$" Индукция по n. $n=1$ - очевидно.

HSE

$n=2:\quad xy \in G \Rightarrow \exists z \in G: (xy)z = z(xy) = 1$

$x(yz) = 1 \Rightarrow yz = x^{-1}$, т.к. $(yz)x$ (недописано)

5) $G \subseteq X$ - подгруппа

Порядок

Пусть G - группа. Если $g \in G$, то $ord(g) = \min\{k \mid k \in \mathbb{N} : g^k = 1\}$

Свойства:

1) $ord(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ & $ord(g^{-1}) = ord(g)$

$\square\ \underbrace{(g^{-1})^k}_{g^{-k}} = 1 \overset{\times g^k}{\Longleftrightarrow} 1 = g^k \ \blacksquare$

2) $|G| < \infty \Rightarrow ord(g) < \infty \quad \forall g \in G$

$(ord(g) \mid |G|)$

3) $ord(g) < \infty$ & $g^n = 1$ для нек. $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow ord(g) \mid n$

$\square$ Обознач. $m = ord(g)$. Поделим n на m с остатком:

$n = q \cdot m + r$ для нек. $0 \le r < m$

$1 = g^n = g^{qm+r} = g^{qm} \cdot g^r = (g^m)^q \cdot g^r = 1 \cdot g^r \Rightarrow r = 0 \ \blacksquare$

4) $ord(g) < \infty \Rightarrow g^n = 1 \quad \forall n$ кратного $ord(g)$

5) $ord(g) < \infty \Rightarrow g^{-1} = g^{ord(g)-1}$

Замеч: В общем, для $g, h \in G$ ничего нельзя сказать про порядок g, h. Более того, $\forall n, m, k > 1$ $\exists$ группа G и $g, h \in G$: $ord(g) = n$, $ord(h) = m$, $ord(gh) = k$.

① Привести пример группы G и $g, h \in G$.

1) $\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h), \mathrm{ord}(gh) < \infty$

2) $\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h) < \infty$, но $\mathrm{ord}(gh) = \infty$

□ 1) Любая $G : |G| < \infty$ подойдёт.

2) $G = GL_2(\mathbb{R})$

$g = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(h) = 2,$

но $gh = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{ord}(gh) = \infty$ ■

② Найти порядок эл-та

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$

$\sigma = (1\,2\,3)(4\,5) \Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma) = \text{НОК}(3, 2) = \boxed{6}$

2) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \in \mathbb{C}^\times$

$z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad z^k = e^{ik\frac{5\pi}{6}} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{k \cdot 5}{6} \vdots 2$ Значит, $\mathrm{ord}(z) = \boxed{12}$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$

$A^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$\mathrm{ord}(A^2) = 4 \Rightarrow A^8 = E \Rightarrow \mathrm{ord}(A) \mid 8$

$\mathrm{ord}(A) \neq 1, 2, 4 \Rightarrow \mathrm{ord}(A) = \boxed{8}$

$(A^4 = (A^2)^2 = -E)$

HSE

Подгруппа

Пусть $S \subseteq G$ - нек. подмножество группы G.

<u>Подгруппа $\langle S \rangle$</u>, порождённая S - это мн-во слов в алфавите $\{s^{\pm 1} \mid s \in S\}$ (пустое слово $\equiv 1$)

$\langle S \rangle = \{ s_1^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\pm 1} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\&\; s_1, \ldots, s_n \in S \}$

Свойства:

1) $\langle S \rangle$ - это наим. подгруппа в G, содержащая S.

2) Если $g \in G$, то $\langle g \rangle$ - это циклическая группа порядка $\operatorname{ord}(g)$

□ $\langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ ■

3) Док-ть, что $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ порождается 2-мя элементами, но не порождается одним.

□ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ не порождается одним элементом, т.к. в $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ нет элементов порядка 4. ($\forall x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(0,0)\}\ \operatorname{ord} x = 2$).

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle (0,1), (1,0) \rangle$ (на самом деле $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle x, y \rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(0,0)\} : x \neq y$) ■

Пусть X - некоторое мн-во. Тогда <u>$Sym(X)$</u> в группе биекций $X \to X$, выделенная нек. „естественным свойством" наз. <u>группой симметрий</u> X.

Пример: 1) $X = \{1, \ldots, n\}$, св-ва нет $\Rightarrow Sym(X) = S_n$.

2) Пусть X - это группа, то естественно выделить гом-змы $X \to X$. Эта группа наз. <u>группой автоморфизмов</u> X <u>$Aut(X)$</u>. (изоморфизм в себя)

HSE

Пусть V – это трёхмерное (двумерное) с фикс. ПСК евклид. пространство. Если L – это плоскость (прямая), то обознач. $\boxed{T_L}$ – отражение относительно L. Обозначим также $\boxed{R_\varphi^\xi}$ – поворот на угол φ относительно оси ξ (в двумерном случае повороты вокруг точки O R_φ). Заметим, что $\boxed{T_L^{-1} = T_L}$, $\boxed{(R_\varphi^\xi)^{-1} = R_{-\varphi}^\xi}$.

Пусть $Sym(V)$ порождена всеми отображениями и поворотами. Эта группа наз. <u>группой движений</u> V и обознач. $O(V)$.

Имеется гомоморфизм $\det : O(V) \to \{\pm 1\}$, определённый на порождающих как $\det(T_L) = -1$, $\det(R_\varphi^\xi) = 1$.

Если $g \in O(V)$ и $\det(g) = 1$, то g наз. собственным.

4 1) Любой эл-т $O(V^2)$ является либо поворотом, либо отражением.

$T_L R_\varphi = T_{\dots}$, $R_\varphi T_L = T_{\dots}$, $T_{L_1} \cdot T_{L_2} = R_{\dots}$

2) это неверно в $O(V^3)$.