Линейные операторы в евкл. пр-вах

<u>Опр</u>: Лин. оп-р $\mathcal{A}^*: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ наз-ся <u>сопряженным</u> к л.о $\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ если $\forall x, y \in \mathcal{E}$

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$$

<u>Опр</u>: Лин. оп-р $\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ наз-ся <u>самосопряжённым</u>, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$$

$$(\text{т.е. } \mathcal{A}^* = \mathcal{A}).$$

Лемма. Пусть $M, N \in M_n(\mathbb{R})$. Если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $x^T M y = x^T N y$, то $M = N$.

$\square$. x, y – любые $\Rightarrow$ возьмём эл-ты канонич. базиса: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i), $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (j)

$\Rightarrow e_i M e_j = [M]_{ij} = [N]_{ij} = e_i N e_j$. $\forall i, j = \overline{1, n} \Rightarrow M = N$ $\blacksquare$

Теор: (о $\exists$нии сопряж. оператора). Пусть $\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Тогда $\exists!$ сопряжённый лин. оп-р $\mathcal{A}^*: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, причем его м-ца в $\forall$ базисе e им. вид $\boxed{(\mathcal{A}^*)_e = \Gamma^{-1} (A_e)^T \Gamma}$

Зам: Если базис e - ОНБ, то $A_e^* = A_e^T$.

□. Запишем р-во $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$ (1). в базисе e.

Пусть x^e, y^e - столбцы коор-т в-ров x и y в б-се e.

$\Rightarrow (\mathcal{A}x)^e = A_e \cdot x^e$, $(x, y) = (x^e)^T \cdot \Gamma \cdot y^e$.

Тогда в матр. записи р-во (1) им. вид:

$$((\mathcal{A}x)^e)^T \cdot \Gamma y^e = (x^e)^T \Gamma (\mathcal{A}^* y)^e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^e)^T \underbrace{A_e^T \Gamma}_{M} y^e = (x^e)^T \underbrace{\Gamma A_e^*}_{N} y^e \Rightarrow$$ т.к. верно $\forall x, y \in \mathcal{E}$, то

по лемме $M = N$, т.е. $\Gamma \cdot A_e^* = A_e^T \cdot \Gamma \Rightarrow$ т.к. e базис, то по св-ву 5 м-цы Грама $\exists\, \Gamma^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{A_e^* = \Gamma^{-1} A_e^T \Gamma}$$

Т.е.

В $\forall$ базисе сопр. л.о. задается м-цей A_e^*

и действие л.о. полностью опр-тся его м-цей $\Rightarrow \exists!$ сопряж. л.о. ■

<u>Следствие</u>: (критерий самосопряж-ти).

л.о. $\mathcal{A}$ явл. самосопряж. $\Leftrightarrow$ м-ца л.о. $\mathcal{A}$ в ОНБ явл. симметрической.

□ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Leftrightarrow$ в ОНБ $\Leftrightarrow$

$A_e^* = A_e^T$ $\Leftrightarrow$ в ОНБ $A_e = A_e^T$.

и в $\forall$ базисе

$A_e^* = A_e$.

■

Теор: Все корни хар. мн-на самосопр. л.о. явл-ся веществ. числами

□ Пусть $\lambda_i \in \mathbb{C}$ – корень хар. ур-я $\chi_A(\lambda) = 0$, и A – самосопр. л.о.

$\Rightarrow$ в нек. ОНБ $\det(A - \lambda_i E) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ тогда СЛАУ $(A - \lambda_i E)x = 0$ (2). имеет ненул. решение (это коор-ты с.в., соотв-щего с.з. λ_i)

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ – решение. Вообще говоря $x_k \in \mathbb{C}$ $\forall k = \overline{1,n}$.

Рассм. $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$ ← компл. сопряж-е числа.

Умножим (2) слева на $(\overline{x})^T$: $(\overline{x})^T(A - \lambda_i E)x = 0 \Leftrightarrow$

$$\overline{x}^T \cdot A x - \lambda_i \underbrace{\overline{x}^T \cdot x} = 0 \text{, где}$$

$$\overline{x}^T \cdot x = \overline{x}_1 \cdot x_1 + \ldots + \overline{x}_n \cdot x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}_{\in \mathbb{R}} > 0$$

— полож. веществ. число

$$\Rightarrow \quad \lambda_i = \frac{\overline{x}^T A x}{\underbrace{\overline{x}^T \cdot x}_{\in \mathbb{R}}.}$$

— кв. форма с симметр. м-цей

— отношение Рэлея. (Rayleigh).

Покажем, что $w = \overline{x}^T A x$ — тоже веществ. число (т.е. $\overline{w} = w$ или $\operatorname{Im} w = 0$)

$$w \underset{\text{(т.к. это м-ца } 1\times 1)}{=} w^T = (\overline{x}^T A x)^T = x^T \cdot A^T (\overline{x}^T)^T =$$

$$= \underbrace{x^T \cdot A \cdot \overline{x}}. \quad (\text{т.к. } A = A^T \text{ в ОНБ})$$

Но $\overline{\omega} = \overline{(\overline{x}^T A x)} = (\overline{\overline{x}^T}) \cdot \overline{A} \cdot \overline{x} =$

веществ. м-ца

$= \underline{x^T \cdot A \cdot \overline{x}}$

$\Rightarrow \overline{\omega} = \omega$ и $\Rightarrow$ с.з. λ_i – тоже явл-ся веществ. $\blacksquare$

<u>Теор (б/д)</u>. Пусть λ_i – с.з. самосопр. л.о. A. Тогда алг. кр-ть λ_i всегда равна геометр. кр-ти λ_i $(m(\lambda_i) = s(\lambda_i))$

<u>Следствие</u>: Самосопр. л.о. всегда явл-ся диагонализируемым.

Утв: Собств. в-ры самосопряж. л.о., отвечающие различным с.з., ортогональны.

□. Пусть λ_1 – с.з., т.е. $\exists x_1 \neq 0$: $Ax_1 = \lambda_1 x_1$

$(\lambda_1 \neq \lambda_2)$. λ_2 – с.з., т.е. $\exists x_2 \neq 0$: $Ax_2 = \lambda_2 x_2$

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$$

$\parallel$ ← т.к. A - самосопряж. $\Rightarrow$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0 \text{ т.к. } \lambda_1 \neq \lambda_2}(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$, т.е. x_1 и x_2 ортогональны. ▨

Теор (б/д). Для $\forall$ самосопряж. л.о. A $\exists$ ет ОНБ, сост-щий из с.в. Его м-ца A_e в этом базисе диагональная, на диаг. стоят с. значения, повтор-щиеся столько раз, какова их кратность.

Теор: (частный случай). Если с.з. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ самосопряж. л.о. $A: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\dim \mathcal{E} = n$, попарно различны ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$), то в $\mathcal{E}$ $\exists$ ет ОНБ (из с. в-ров), в кот. м-ца л.о. A имеет диаг. вид.

□ Если с.з. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - попарно различны,

то, выбрав для кажд. λ_i соотв. ему

с.в. b_i, мы получим n ненул.-в-ров,

они будут л.н.з. по док-му ранее

и т.к. A - самосопр. л.о., то след.

$b_1, \dots, b_n$ будет ортогональна

$\Rightarrow$ ортогональный базис.

Нормируя, получим ОНБ из с.в.

$e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$, в нём

м-ца л.о. диагональна

■

Ортогональные м-цы и ортог. л. операторы.

Опр: Кв. м-цу $U = M_n(\mathbb{R})$ наз-ют ортогональной, если

$$U^T \cdot U = E \quad (3)$$

Пр.: $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ - матрица поворота

Св-ва ортогональных м-ц.

1). $|\det U| = 1$.

□ $\det(U^T \cdot U) = \det E = 1$.

$\det(U^T \cdot U) = (\det U)^2 = 1 \Rightarrow |\det U| = 1$ ■

Зам: Ортог. м-ца всегда невырождена.

2) $\boxed{U^{-1} = U^T}$

□ По замеч. U^{-1} всегда $\exists^{\text{ет}}$

Р-во (3) умножим справа на U^{-1}

$(U^T U) \cdot U^{-1} = E \cdot U^{-1}$

$U^T (U \cdot U^{-1}) = U^T \Rightarrow U^T = U^{-1}$ ■, $U \cdot U^{-1} = E$.

3) U^T - тоже ортог. м-ца.

$(U^T)^T \cdot U^T = U \cdot U^{-1} = E$ ■ (т.к. $U^T = U^{-1}$).

4). Произведение ортог. м-ц одинак. размера — снова ортог. м-ца.

□. $(U_1 U_2)^T (U_1 \cdot U_2) =$

$= U_2^T \underbrace{U_1^T U_1}_{=E} \cdot U_2 = U_2^T \cdot U_2 = E$ ■.

<u>Зам</u>: Все ортог. м-цы $n \times n$ над $\mathbb{R}$ с опер. умнож. м-ц образуют группу $\underline{O_n(\mathbb{R})}$.

Теор: (Критерий ортог-ти л.о. с помощью м-цы).

$\mathcal{A}$ - ортог. л.о. $\Leftrightarrow$ его м-ця в ОНБ ортогональна.

□ **Необх.** Дано: $\mathcal{A}$ - ортог. л.о.

Д-ть: A_e - ортог. м-ця в ОНБ e.

$\forall x, y \in E$

$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A_e x)^T \cdot (A_e y) = x^T \cdot E \cdot y \Leftrightarrow$

E - м-ця Грама в ОНБ

$$\Leftrightarrow x^T \cdot \underbrace{A_e^T \cdot A_e}_{M} \cdot y = x^T \underbrace{E}_{N} y \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$$

$\Rightarrow$ по лемме $A_e^T \cdot A_e = E$, т.е.

по опр. A_e - ортог. м-ця.

Дост-ть: Дано: A_e - ортог. м-ця в ОНБ

Д-ть: $\mathcal{A}$ - ортог. л.о.

$$A_e^T \cdot A_e = E \Rightarrow \forall x, y \in \mathcal{E}$$

$$x^T (A_e^T A_e) y = x^T E y.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A_e x)^T}_{E} (A_e y) = x^T E y.$$

А это матр. запись ск. пр-е в ОНБ.

т.е. $\forall x, y \in \mathcal{E}$ $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y) \Rightarrow \mathcal{A}$ - ортог. л. о.

<u>Теор</u>: (Критерий орт-ти л.о.)

Пусть л.о. $\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, тогда

$\mathcal{A}$ - ортог. л.о. $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ переводит $\forall$ ОНБ $e_1, \ldots, e_n$ в <u>ОНБ</u> $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$.