Лекция 4, 27.09.23

Свойства определителя

① $|A^T| = |A|$

② Определитель линеен по столбцам (строкам)

а) Пусть $A_{n\times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ - набор столбцов

$$\det(A_1, \dots, A_i' + A_i'', \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_i', \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i'', \dots, A_n)$$

б) $$\det(A_1, \dots, \alpha A_i, \dots, A_n) = \underset{\alpha\cdot\det A}{\underset{\parallel}{\alpha\cdot\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)}}$$

Пример: а) $\begin{vmatrix} 1 & 3+5 \\ 2 & 4+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12$

③ При перестановке столбцов (строк) определитель меняет знак. (говорят, что det является <u>кососимметрической</u> функцией столбцов(строк))

□ Если произведение $a_{1\alpha_1} \ldots a_{i\alpha_i} \ldots a_{j\alpha_j} \ldots a_{n\alpha_n}$ участвует в 1-м определителе $\Rightarrow$ участвует и во 2м det:

$$\Delta_1 = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

Т.к. если эти эл-ты (сомножители) стояли в разных стр. и столбцах в Δ_1, то они обладают этим же свойством и в Δ_2.

Знак произведения

в Δ_1 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$

в Δ_2 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\operatorname{sgn}\sigma$ и $\operatorname{sgn}\tau$ противоположны, т.к. отличаются одной транспозицией

$\Rightarrow$ каждое слагаемое входит в Δ_2 с противополож. знаком

$\Rightarrow \det(A_1 \ldots A_i \ldots A_j \ldots A_n) = -\det(A_1 \ldots A_j \ldots A_i \ldots A_n)$

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

④ Достаточное условие равенства det нулю: $\det A = 0$, если а) В м-це A есть нулевая стр. (стб.)

б) В м-це A есть две одинаковые стр. (стб.)

□ а) По опред. все слаг. $= 0$.

б) При замене одной из одинак. строк на другую $\det$ поменяет знак по свойству ③ и не изменится $\Rightarrow \det = 0$. ■

Опр: Говорят, что j-я строка явл. <u>линейной комбинацией</u> остальных (л/к), если

$$\underset{j\text{-я строка}}{A_j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \alpha_k A_k = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{j-1} A_{j-1} + \alpha_{j+1} A_{j+1} + \ldots + \alpha_n A_n,$$

где α_k - некоторые числа, $\alpha_k \in \mathbb{R}$

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$, здесь $(3) = -4(1) + (2)$ строки

⑤ $\det A = 0$, если одна из его строк (столбцов) является л/к остальных.

□ $\det(A_1 \ldots A_j \ldots A_n) = \det(A_1 \ldots \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \alpha_k A_k \ldots A_n) = \{\text{по свойству ②}\} =$

$= \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \alpha_k \cdot \det(A_1 \ldots A_k \ldots A_n) = \{\text{по свойству ④}\} = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$

(т.к. есть одинак. стб. (стр.)) ■

⑥ Определитель не изменится, если к $\forall$ строке прибавить л/к остальных.

□ $\det(A_1 \ldots A_j + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \alpha_k A_k \ldots A_n) \overset{②}{=} \underbrace{\det(A_1 \ldots A_j \ldots A_n)}_{\det A} + \underbrace{\det(A_1 \ldots \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \alpha_k A_k \ldots A_n)}_{0 \overset{⑤}{=}} =$

$= \det A$ ■

⑦ $\det E_n = 1$ $(|E_n| = 1)$, где $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_n$ - единичная м-ца порядка n

Следствие:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix} \overset{(2)}{=} a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\cdot \overset{1}{\overset{\shortparallel}{|E_n|}} = a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

Утв 1: Условия (3) (кососимметричность) и (4б) (обнул. на перестановке совп. столбцов) эквивалентны

□ (3) $\Rightarrow$ (4б) (обосновано в (4б): $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$)

(4б) $\Rightarrow$ (3)

Пусть $f(u,v)$ − линейная ф-ция от столбцов u и v (остальные зафиксируем).
Докажем, что если $f(z,z)=0 \ \forall z \Rightarrow f$ − кососимметричная

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}\ (4б)}{f(u+v,u+v)} = f(u,u+v)+f(v,u+v) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}\ (4б)}{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}\ (4б)}{f(v,v)} =$$
$$= f(u,v)+f(v,u) = 0 \Rightarrow f(u,v) = -f(u,v)$$ ■

Утв 2: (Эквив. определение детерминанта).

$\forall$ функция от столбцов матрицы, удовл. св-вам (2), (3) и (7) явл. детерминантом.

Т.е. $\forall$ полилинейная (линейная по кажд. арг.) кососимметрической и равная 1 на ед. м-це функция от столбцов (строк) кв. м-цы является определителем

□ (док-во утв 2) для $n=2$

$$f\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}\end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22}\end{matrix}\end{pmatrix} = a_{11}\cdot f\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22}\end{matrix}} \\ 0 & \end{pmatrix} + a_{21}\cdot f\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22}\end{matrix}} \\ 1 & \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21}\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$

$$= a_{11}a_{12}\cdot \underset{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{утв.1}}{f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}} + a_{11}a_{22}\underset{\overset{\shortparallel}{f(E_2)}}{f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}} + a_{21}a_{12}\underset{\overset{\shortparallel}{-f(E_2)}\ \text{кососим.}}{f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}} + a_{21}\cdot a_{22}\underset{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{утв.1}}{f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{f(E_2)} =$$

$$= \det A$$ ■

(Но верно для $\forall n \in \mathbb{N}$)

Следствие: Доказано для $n=2$ даже более общ. утв.:

что $\forall$ полилинейной кососимм. ф-ции строк (стб.) $\Rightarrow f(B) = \det(B) \cdot f(E_n)$

Опр: В квадратной м-це A порядка n вычеркнем i-ю строку и j-й столбец.

Определитель, получившейся м-цы, наз. <u>дополняющим минором</u> эл-та a_{ij}

Обозн: M_{ij}

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{22} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -12$

Опр: <u>Алгебраическим дополнением</u> эл-та a_{ij} наз. число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

8 Разложение определителя по строке или столбцу (теорема Лапласа)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$ (разл. по j-му столбцу $\forall j = \overline{1,n}$)

разложение по i-й строке

Верно для $\forall i = \overline{1,n}$

Пример: $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -17 - 15 = -32$

P.S. а) $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$
б) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
$\Leftrightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot f(x) + \beta f(y)$