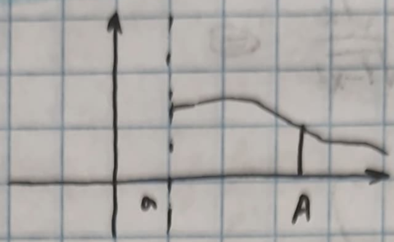
Семинар 20, 27.02.24

Несобственный интеграл

(1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$



$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=A} = \lim_{A\to+\infty}\Bigg(-\underbrace{\frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow{\alpha>1} 0}+\frac{1}{\alpha-1}\Bigg) =$$

$A^{\alpha-1}\xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$ (если $\alpha>1$) $= \frac{1}{\alpha-1}$

если $\alpha<1$, интеграл расходится.

(1a) $\int\limits_0^{+\infty}\cos 2x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\cos 2x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{x=0}^{x=A} = \lim\limits_{A\to+\infty}\frac{\sin 2A}{2}$ – не сущ.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^A\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}(\ln A - \ln 1) = +\infty$$

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)\,dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)\Bigg|_{x=\varepsilon}^{x=1} = -\frac{1}{\alpha-1}+0 = \frac{1}{1-\alpha}\quad(\alpha<1)$$

$(\alpha>0)$

(2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}\infty$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}}_{\text{при } \alpha < 1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}}_{\text{при } \alpha > 1}$$

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ominus$

Честно: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin x \Big|_{x=-1}^{x=0} \right)$

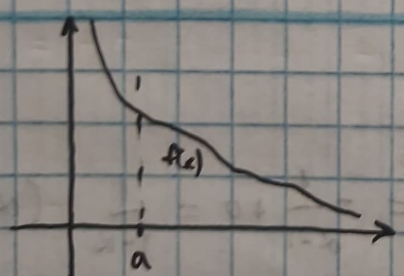
$\ominus \arcsin x \Big|_{x=-1}^{x=0} + \arcsin \Big|_{x=0}^{x=1} = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = 2 \arcsin 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

(c) $\int e^{-ax} \cdot \cos(xb) dx = \frac{e^{-ax}(b \sin(bx) - a \cdot \cos(bx))}{a^2 + b^2}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \underbrace{\frac{e^{-ax}(b \sin(bx) - a \cdot \cos(bx))}{a^2 + b^2}}_{= F(x)} \Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = 0 - \frac{1 \cdot (-a)}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$F(x) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \lim\limits_{A \to +\infty} F(A)) - F(0)$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3x - \sin(7x)}$



$f(x) \leq g(x)$

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ - сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ - сходится

$$\frac{1}{3x - \sin(7x)} \geq \frac{1}{3x - 1} \geq \frac{1}{3x + x} = \frac{1}{4x}$$

$\frac{1}{4}\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$ – расходится $\Rightarrow \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{3x-\sin^2 x}$ – расходится

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{1,1}}dx = \int\limits_1^{M}\frac{\ln x}{x^{1,1}}dx + \int\limits_M^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{1,1}}dx$ – сходится

② (a) $\frac{\ln x}{x^{1,1}} \le \frac{x^{0,01}}{x^{1,1}} = \frac{1}{x^{1,09}}$ $\int\limits_M^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{1,1}}dx \le \int\limits_M^{+\infty}\frac{dx}{x^{1,09}} < +\infty$

$\ln x \le x^{0,01}$ (при $x >> 0$)

при $x > M$

(c) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{1} + \int\limits_1^{+\infty}$

$e^{-x^2} \le e^{-x}$ $(x \geq 1)$

$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{x=1}^{x=+\infty} = 0 + e^{-1} = \frac{1}{e}$ – сходится

(d) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2-5x+1}{x^4+18x+90} \le \int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{x^2-5x+1}{x^4}\right)dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} - 5\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} + \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ – сходится

$\frac{x^2-5x+1}{x^4+18x+90} \le \frac{x^2-5x+1}{x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

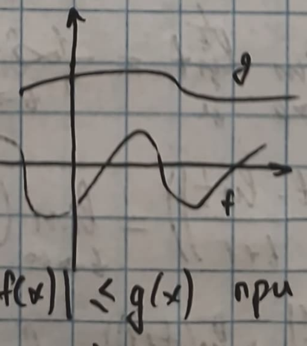
(b) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = -\int\limits_1^{+\infty}\frac{d(\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{x=1}^{x=+\infty} + \int\limits_1^{+\infty}\cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_{x=1}^{x=+\infty} - \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ – сходится

$\Uparrow$

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ – сходится



$|f(x)| \le g(x)$ при $x \geq a$ и $\int g(x)dx$ сход. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int f(x)dx$ сходится