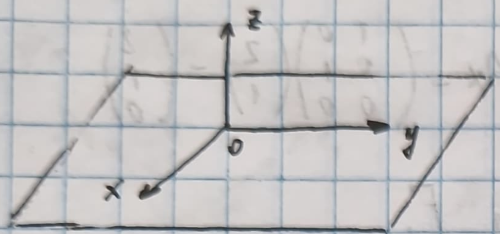
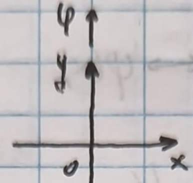
Семинар 28, 18.04.24

Зафиксируем векторные пространства U, V над полем F.

Отображение $\varphi: U \to V$ наз. **линейным**, если $\varphi(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda\varphi(u_1) + \mu\varphi(u_2)$

Пример 1. Вложение плоскости в 3-мерное пространство





Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ - базисы U и V соотв.

Матрицей лин. отображения φ в паре базисов (e, f) наз. такая матрица $A \in Mat_{m\times n}(F)$, что $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = f \cdot A$, т.е. по столбцам A записаны координаты векторов $\varphi(e_i)$ в базисе f.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора $u \in U$ в базисе e, а y - столбец координат вектора $\varphi(u) \in V$ в базисе f. Тогда $y = Ax$.

$\forall A \in Mat_{m\times n}(F)$ $\exists!$ лин. отображение $\varphi: U \to V$, которое в паре базисов (e, f) имеет матрицу A.

Если (e', f') - ещё одна пара базисов U и V, а C и D - это матрицы перехода от e к e' и от f к f' соотв., то в паре базисов (e', f') отображение φ имеет матрицу $A' = D^{-1} \cdot A \cdot C$.

Лин. отображение однозначно задаётся образами базисных векторов: $\forall$ набора векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ $\exists!$ лин. отображение $\varphi: U \to V$, для которого $\varphi(e_i) = v_i$ $\forall i = \overline{1, n}$.

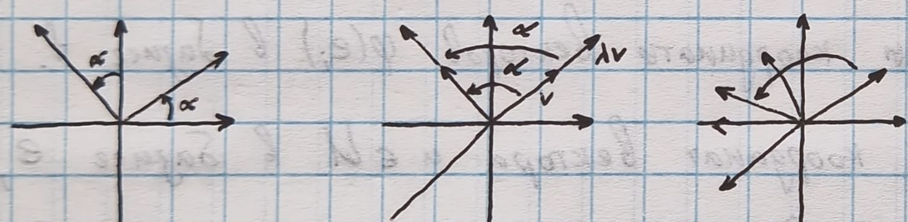
Пример 2. Для φ из примера 1 в паре базисов $(O_x, O_y), (O_x, O_y, O_z)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y \longleftrightarrow \varphi(x) \qquad y = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Зафикс. векторное пространство V над полем F.

Отображение $\mathcal{A}: V \to V$ наз линейным оператором на V, если $\mathcal{A}$ линейно.

Пример. Поворот плоскости на угол α.



$$\mathcal{A}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}(v_1) + \mathcal{A}(v_2)$$

$$\mathcal{A}(\lambda v_1) = \lambda \cdot \mathcal{A}(v_1)$$

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V.

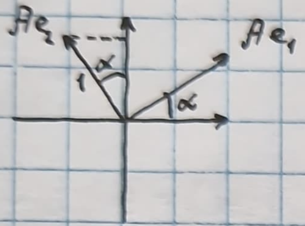
Матрицей лин. оператора $\mathcal{A}$ в базисе e наз. матрица лин. отображения $\mathcal{A}$ в паре базисов (e, e).

$(\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_n)) = e \cdot A$, где $A \in Mat_n(F)$

В координатах оператор $\mathcal{A}$ с матрицей A действует как $\overset{\text{коорд. } \varphi(v) \text{ в базисе } e}{y} = A \underset{\text{коорд. } v \text{ в базисе } e}{x}$

Если $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — это ещё один базис V, а C — это матрица перехода $e \to e'$, то в базисе e' оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A' = C^{-1}AC$.

① Найти матрицу оператора поворота плоскости на угол α в о/н. базисе



$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

② Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задано в координатах (здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$):

1) $\varphi(x) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$

2) $\varphi(x) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_3^2)$

Какие из них явл. лин. операторами и в этом случае найти матрицу.

1) $\varphi(x)$ действует как Ax, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\varphi((0,0,1) + (0,0,1)) = \varphi(0,0,2) = (0,2,4)$

$\varphi(0,0,1) + \varphi(0,0,1) = 2\varphi(0,0,1) = (0,2,2)$ $\Rightarrow$ не линейно.

$(0,2,4) \neq (0,2,2)$

③ Доказать, что $\exists!$ лин. оператор на $\mathbb{R}^3$, переводящий векторы

$a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (0,1,2)$, $a_3 = (1,0,0)$. соотв. в векторы

$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (1,1,-1)$, $b_3 = (2,1,2)$ и найти его матрицу в стандартном базисе.

Достаточно доказать, что a_1, a_2, a_3 - базис в $\mathbb{R}^3$. Увидим ".

Предположим, что мы задали $\mathcal{A}$. Мы знаем $\mathcal{A}(a_i) = b_i$.

Хотим найти $\mathcal{A}(e_i)$, где e_1, e_2, e_3 - станд. базис.

Если A - это матрица $\mathcal{A}$ в станд. базисе и A' - это матрица $\mathcal{A}$ в базисе a_1, a_2, a_3, то $A' = C^{-1}AC$, где C - матрица перехода $(e_1, e_2, e_3) \to (a_1, a_2, a_3)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём A', тогда $A = CA'C^{-1}$. Т.е. нужно найти коорд-ты векторов b_i в базисе a_j. Пусть b_i имеет коор-ты $x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{pmatrix}$ в базисе a_j.

Тогда $Cx_i = b_i$, т.е.

$\angle x_{1i} a_1 + x_{2i} a_2 + x_{3i} a_3$

$x_i = C^{-1} b_i$. Тогда в A' по столбцам записаны x_1, x_2, x_3.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{в частн.} \Rightarrow a_j \text{ - базис})$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = C^{-1} b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = CA'C^{-1} = \ldots$$

$$x_2 = C^{-1} b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = C^{-1} b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ Пусть лин. оператор переводит л/н векторы $a_1, \dots, a_n$ в векторы $b_1, \dots, b_n$ соотв. $(n = \dim V)$. Док-ть, что матрица A оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ удовлетворяет равенству $A = DC^{-1}$, где столбцы C и D состоят из координат векторов $a_1, \dots, a_n$ и соотв. $b_1, \dots, b_n$ в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Пусть A' - матрица $\mathcal{A}$ в базисе $(a_1, \dots, a_n) = a$

$A' = C^{-1}AC \Rightarrow A = CA'C^{-1}$.

Пусть $x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ - коорд-ты векторов b_i в базисе a.

В частности, $A' = (\underbrace{x_1 \dots x_n}_{\text{столбцы}})$.

Тогда $Cx_i = y_i$, где y_i - координаты векторов b_i в базисе e.

Т.е. $CX = Y$, где $X = (x_1 \dots x_n)$, $Y = (y_1 \dots y_n)$

Заметим, что $X = A'$ и $Y = D$. Итого, $CA' = D \Rightarrow A' = C^{-1}D$

$\Rightarrow A = C \cdot C^{-1} D \cdot C^{-1} = D \cdot C^{-1}$.