# Лекция 2. (13.09.23)

## Св-ва умножения матриц

① Ассоциативность

$A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$, $C_{k\times l}$; $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

② $\exists$ нейтральный элемент по умножению матриц, т.е.

$\exists$ $E \in M_n(\mathbb{R})$ (квадратная) $\forall$ кв. матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ вып. $E\cdot A = A\cdot E = A$

E - единичная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

③ $\forall$ $A \in M_n(\mathbb{R})$ $A\cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}\cdot A = \mathbb{O}$ (нулевая матрица)

④ Дистрибутивность

$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ - дистрибутивность слева

$A\cdot(B+C) = A B + A\cdot C$ - дистрибутивность справа

⑤ (Замечание). Умножение матриц вообще говоря некоммутативно (т.е. может быть, что $A \cdot B \neq B \cdot A$, даже если оба произведения определены).

Пример:

$$A \cdot B = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad B \cdot A = \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Опр: Транспонированием матрицы называется операция, переводящая все строки в столбцы с сохранением порядка.

Обознач: $A^T$

Т.е. $[A^T]_{ij} = [A]_{ji} \quad \forall \, i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}$

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

## Св-ва транспонирования

① $(A^T)^T = A$

② $(A + B)^T = A^T + B^T$

③ $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

④ $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

□ Пусть м-цы $A$ типа $m \times n$, $B$ типа $n \times k$

$$[(A \cdot B)^T]_{ij} \overset{①\text{ по опр. трансп.}}{=} [A \cdot B]_{ji} \overset{②\text{ по опр. умнож.}}{=} \sum_{r=1}^{n} [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} \overset{\text{числа комм.}}{=} \sum_{r=1}^{n} [B]_{ri} \cdot [A]_{jr} =$$

$$\overset{①}{=} \sum_{r=1}^{n} [B^T]_{ir} \cdot [A^T]_{rj} \overset{②}{=} [B^T \cdot A^T]_{ij} \quad \forall \, i = \overline{1,m}, \; \forall \, j = \overline{1,k} \quad ■$$

# Элементарные преобразования (строк)

**Опр:** Элемент. преобр-ями строк называют след. три операции:

1) Перестановка двух строк местами в матрице

$\boxed{(i) \leftrightarrow (k)}$ ($i$-я и $k$-я строки)

2) Умножение $i$-й строки матрицы на число $\lambda$, $\lambda \neq 0$

$\boxed{(i) \to \lambda \cdot (i)}$

3) Прибавление к $i$-й строке $k$-й строки той же матрицы ($k \neq i$) с коэффициентом $\lambda$

$\boxed{(i) \to (i) + \lambda \cdot (k)}$

**Пример:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{II+(-2)\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \overset{II\cdot(-\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

**Замеч. 1:** Каждое элем. преобразование имеет обратное.

**Замеч. 2:** Каждое элем. преобразование можно трактовать, как умножение слева на матрицу специального вида.

Эта матрица получается из единичной применением того же самого элемент. преобразования.

**Пример:** $II + (-2)\cdot I \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

**Опр:** Матрица имеет:

1) Ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк (такие эл.-ты наз. ведущими) возрастают (кажд. след. правее предыд.), а нулевые строки ставят внизу мат-цы.

**Пример:**

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 10 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1й \\ 2й \\ \phantom{0} \end{array}$$

2) **Канонический (улучшенный ступенчатый) вид**, если м-ца имеет ступенчатый вид, в котором все ведущие эл-ты $= 1$, и в $\forall$ столбце с ведущим эл-м все остальные эл-ти $= 0$.

**Пример:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Теорема (о методе Гаусса)

Любую конечную матрицу можно привести элементарными преобразованиями строк к ступенчатому (к канонич.) виду.

Замеч. 3: Аналогично определ. эл-ам преобраз. для столбцов. (только соответствуют умнож. справа на м-цу спец. вида)

□ Предъявим алгоритм

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Берём м-цу $m \times n$ и движимся из левого верхнего угла

① Если текущий эл-нт $=0$, то переходим к Шагу ②
Если он $\neq 0$, то текущ. элемент объявляется ведущим. Теперь прибавляем текущ. строку к остальным так, чтобы все эл-ты ниже (и выше для канонич.) обратились в 0. Если ведущ. эл-нт это $[A]_{ij}$, то для $k$-й строки ($k \neq i$) берём число $\lambda = -\frac{[A]_{kj}}{[A]_{ij} \neq 0}$ и с этим коэф. прибавляем $i$-ю строку к $k$-й.

(Для канон. вида $i$-ю строку делим на $[A]_{ij}$, чтобы получить 1 на месте ведущ. эл-та). Выбираем новый тек. эл., смещаясь в м-це на

1 столбец вправо и 1 строку вниз.
Переходим к след. шагу, повторяя (1).
Если это невозможно, то STOP.

(2) Если тек. эл-т $=0$, то просматриваем все элементы под ним.
Если среди них нет $\neq 0$, то переходим к (3).
А если в k-й строке ненулевой эл-т нашёлся, то меняем i-ю и k-ю строки местами и переходим к (1).

(3) Если текущий и все эл-ты под ним $=0$, то меняем тек. столбец, смещаясь в м-це на 1 столбец вправо.
Если это возможно то $\to$ (1), иначе STOP.

Так как м-ца конечна, а за 1 шаг алгоритма полож. текущего эл-та смещается вправо минимум на 1 столбец $\Rightarrow$ процесс преоб. закончится не более чем за n шагов.