Task: 1. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

1. Рассмотрим ф.п. $\{f_n(x)\}$ такую, что $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)}$

$\forall k \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} : 0 \le \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)} \le \frac{1}{k(k+1)}$

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится $\implies$ функциональный ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

2. По определению равномерной сходимости функциональный ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)}$

равномерно сходится на $\mathbb{R}$ $\iff$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)}$

т.е. ф.п. $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к $f(x)$ (1).

3. $\forall k \in \mathbb{N} : \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)}$ - непрерывная функция на $\mathbb{R}$ $\implies$ $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)}$ - непрерывная функция на $\mathbb{R}$ как конечная сумма непрерывных функций на $\mathbb{R}$ (2).

4. (1) $\land$ (2) $\implies$ $f(x)$ - непрерывная функция по теореме с лекции (12.3.1 в конспекте)

$$\forall k \in \mathbb{N} : \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)}dx = \frac{1}{k(k+1)} \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)dx = \frac{1}{k^2(k+1)} \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)d(kx) =$$

$$= \frac{1}{k^2(k+1)} \int_0^{2\pi k} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{k^2(k+1)} \left(\pi k + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi k} \cos(2t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{k^2(k+1)} \left(\pi k + \frac{1}{4}\left(\sin(4\pi k) - \sin(0)\right)\right) = \frac{\pi}{k(k+1)} \implies$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(kx)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{k(k+1)} = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \implies \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \in R[0;2\pi] \land \int_0^{2\pi} f_n(x) = \pi\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (3)$$

5. (1) $\land$ (3) $\implies \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x) = \int_0^{2\pi} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ по теореме с лекции (12.3.2 в конспекте)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x) = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \implies \lim_{n\to+\infty} \pi\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \int_0^{2\pi} f(x) \implies \int_0^{2\pi} f(x) = \pi$$

Ответ: π

Task: 2. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{2(n+1)}-x^{2n}\right)$$

сходится неравномерно на отрезке $[-1;1]$, но его можно почленно интегрировать на этом отрезке.

1. $\forall n\in\mathbb{N}:\sum_{k=1}^{n}\left(x^{2(k+1)}-x^{2k}\right)=x^{2(n+1)}-x^{2}\implies S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x^{2(k+1)}-x^{2k}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\begin{cases}-x^2,|x|<1\\0,|x|=1\end{cases}$

2. $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{2(n+1)}-x^{2n}\right)=\begin{cases}-x^2,|x|<1\\0,|x|=1\end{cases}$

Покажем, что сходимость неравномерная:

$\exists\varepsilon=\frac{1}{4}>0\,\forall N\in\mathbb{N}\,\exists n=N\,\exists x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\in(-1;1)\subset[-1;1]:\left|f_n(x)-f(x)\right|=$

$=\left|x^{2(n+1)}-x^2+x^2\right|=\left|x^{2(n+1)}\right|=\left|\frac{1}{4}\right|=\varepsilon\geq\varepsilon$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{1}\left(x^{2(k+1)}-x^{2k}\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{2k+3}}{2k+3}-\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1^{2k+3}}{2k+3}-\frac{1^{2k+1}}{2k+1}-\frac{(-1)^{2k+3}}{2k+3}+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+3}-\frac{2}{2k+1}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{2n+3}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

4. Функция $S(x)$ ограничена на $[-1;1]$ (1) и её множество точек разрыва конечно $\implies$

$\implies$ мера Лебега множества точек разрыва функции $S(x)$ равна нулю (2)

$(1)\wedge(2)\implies S(x)\in R[-1;1]$

$\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}-x^2dx=-\frac{2}{3}$

5. Таким образом, $\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-1}^{1}\left(x^{2(k+1)}-x^{2k}\right)dx=\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(x^{2(k+1)}-x^{2k}\right)dx$

Task: 3. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, сходится на отрезке $[0;1]$, но

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

1. Если $x = 0$, то $f_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Иначе, если $x \in (0;1]$, то $\forall n \in \mathbb{N} : nx^2 > 0 \implies$

$\implies f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \forall x \in [0;1] : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) = 0$

Тогда $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_0^1 0dx = 0$

2. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-nx^2}d(-nx^2) = -\frac{1}{2}\,e^{-nx^2}\Big|_0^1 =$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^n} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$

Тогда $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$

3. Следовательно $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$

Task: 4. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(x^n)$, сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

при $x = 1$

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan(x^n)$ - ограниченная ч.п. $\wedge \dfrac{1}{n}$ - б.м. ч.п. $\implies$

$\implies \dfrac{1}{n}\arctan(x^n)$ - б.м. ч.п. $\implies f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f(x)$

2. Покажем, что выполняется определение равномерной сходимости:

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\pi}{2\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall x \in \mathbb{R} : \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\dfrac{1}{n}\arctan(x^n)\right| = \dfrac{1}{n}\left|\arctan(x^n)\right| <$

$< \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2} \leq \dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{\pi}{2} \leq \varepsilon$

Таким образом $f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} f(x) = 0$

3. $\displaystyle\left(f_n(x)\right)' = \frac{1}{n}\frac{n\cdot x^{n-1}}{1+x^{2n}} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \implies \lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)\right)'\Big|_{x=1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1^{n-1}}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2}$

4. $\displaystyle\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'\Big|_{x=1} = (0)'\Big|_{x=1} = 0$

5. Следовательно $\displaystyle\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'\Big|_{x=1} \neq \lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)\right)'\Big|_{x=1}$

Task: 5. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанной промежутке

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2(nx)}{\sqrt{n^3+x^4}}, x \in [-3;-1]$$

Proof:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in [-3;-1] : \left|\frac{(x+2)^n \cos^2(nx)}{\sqrt{n^3+x^4}}\right| = \frac{|x+2|^n \cos^2(nx)}{\sqrt{n^3+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ сходится $\implies$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2(nx)}{\sqrt{n^3+x^4}}$ сходится равномерно на $[-3;-1]$ по признаку Вейерштрасса.

■

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4}, x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$$

Proof:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right] : \left|\frac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4}\right| = \frac{(n+2)^3(4x^2)^n}{x^2+3n+4} \leq \frac{(n+2)^3}{x^2+3n+4}\frac{1}{4^n} \leq \frac{(n+2)^3}{3n+4}\frac{1}{4^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(n+2)^3}{3n+4}\frac{1}{4^n}\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4} \cdot \sqrt[n]{\frac{(n+2)^3}{3n+4}} = \frac{1}{4} < 1 \implies$

$\implies$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^3}{3n+4}\frac{1}{4^n}$ сходится по признаку Коши $\implies$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4}$ сходится равномерно на $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ по признаку Вейерштрасса.

■

Task: 6. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости

$$a)\, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}x^{2n+1}$$

1. $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}x^{2n+1} = x \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}(x^2)^n = x \cdot S_1(x^2),$

where $S_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}x^n \implies$ радиус сходимости R ряда $S(x)$ равен $\sqrt{R_1}$, где R_1 - радиус сходимости ряда $S_1(x)$.

2. Обозначим $c_n = \frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n2(n+1)+3}{3(n+1)^2+4}}{\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n2(n+1)+3}{(-1)^{n-1}2n+3}\right| \cdot \frac{3n^2+4}{3(n+1)^2+4} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n2n+(-1)^n\cdot 2+3}{(-1)^{n-1}2n+3}\right| = 1 \implies \text{радиус сходимости ряда } S_1(x) \text{ равен } \frac{1}{1} = 1 \implies$$

$\implies$ радиус сходимости ряда $S(x)$ равен 1.

Интервал сходимости ряда $S_1(x)$ равен $(-R_1; R_1) = (-1; 1) \implies$

$\implies$ интервал сходимости ряда $S(x)$ равен $(-1; 1)$

3. Пусть $x = R = 1$, тогда:

$$S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2n}{3n^2+4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{3n^2+4} = S_2 + 3 \cdot S_3(x), \text{ где}$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n}{3n^2+4}$$

$$S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n^2+4}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2x}{3x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{2\cdot(3x^2+4) - 2x\cdot(6x)}{(3x^2+4)^2} = \frac{8-6x^2}{(3x^2+4)^2} \implies \forall x \in [2; +\infty) : f'(x) < 0 \implies$$

$\implies \left\{\frac{2n}{3n^2+4}\right\}$ монотонно убывает, начиная с $n = 2$ (1)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n^2+4} = 0$ (2)

$(1) \land (2) \implies$ числовой ряд S_2 сходится по признаку Лейбница (3)

$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{3n^2+4} \leq \frac{1}{n^2} \implies$ числовой ряд S_3 сходится по признаку сравнения (4)

$(3) \land (4) \implies$ числовой ряд $S(R)$ сходится.

Покажем, что $S(R)$ не сходится абсолютно:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}\right|}{\frac{2n}{3n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{2n}\right|\cdot\frac{3n^2}{3n^2+4}=1\implies\left|\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}\right|\sim\frac{2n}{3n^2}=\frac{2}{3n}\text{ при }n\to+\infty$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3n}$ расходится $\implies$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}\right|$ расходится $\implies$

$\implies$ числовой ряд $S(R)$ не сходится абсолютно (следовательно, сходится условно).

4. Пусть $x=-R=-1$, тогда:

$$S(x)=S(-R)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}(-1)^{2n+1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4}=-S(R)\implies$$

$\implies$ числовой ряд $S(-R)$ сходится условно.

Ответ:
радиус сходимости $R=1$
интервал сходимости: $(-1;1)$
ряд сходится условно в точках $x=-1$ и $x=1$

$$b)\, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}(x+2)^n$$

1. Обозначим $c_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}}{\frac{(2n-1)!!}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}(2n+1)\cdot\frac{1}{n+1} = 2 \implies$$

$\implies$ радиус сходимости ряда $S(x)$ равен $R = \dfrac{1}{2}$.

$S(x)$ сходится, если $x+2 \in (-R;R) \implies$ интервал сходимости ряда $S(x)$ равен $(-2.5;-1.5)$

Исследуем сходимость в границах интервала сходимости:

2. Пусть $x = -1.5 = R-2$, тогда:

$$S(x) = S(R-2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}$$

Обозначим $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}$

$$\forall n \geq 2 : a_n = \frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n} = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)!!}{n\cdot 2\cdot(n-1)!\cdot 2^{n-1}} = \frac{(2n-1)}{2n}\cdot a_{n-1}$$

Докажем, что $\forall n \geq 4 : a_n \geq \dfrac{1}{n}$ методом математической индукции:

2.1. База индукции. Для $n = 4$:

$$a_n = \frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{24\cdot16} = \frac{35}{128} > \frac{1}{4} = \frac{1}{n}$$

2.2. Предположение индукции:

Пусть $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ для некоторого $n \geq 4$, тогда докажем, что условие верно и для $n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} = \frac{(2n+1)\cdot(2n-1)!!}{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n\cdot 2} = \frac{2n+1}{2n+2}a_n = \left(1-\frac{1}{2n+2}\right)a_n \geq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_n \geq$$

$$\geq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$$ т.е. условие выполняется для $n+1$.

2.3. Следовательно, утверждение верно $\forall n \geq 4$ по принципу математической индукции.

3. В пункте 2. мы доказали, что $\forall n \geq 4 : a_n \geq \dfrac{1}{n}$

Числовой ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ расходится $\implies$ числовой ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n = S(R-2)$ расходится

по признаку сравнения.

4. Пусть $x = -2.5 = -R - 2$, тогда:

$$S(x) = S(-R-2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n! \cdot 2^n}$$

Числовой ряд $S(-R-2)$ не сходится абсолютно, так как

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n! \cdot 2^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n! \cdot 2^n} = S(R-2)$ и ранее мы доказали, что числовой ряд $S(R-2)$ расходится.

Покажем, что числовой ряд $S(-R-2)$ сходится:

$$\forall n \geq 2 : a_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot a_{n-1} \implies \forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \{a_n\}$ монотонно убывает, начиная с $n = 1$ (1)

Докажем, что $\forall n \geq 11 : a_n \leq \frac{1}{\ln(n)}$ методом математической индукции.

4.1. База индукции. Для $n = 11$:

$$a_n = a_{11} = \frac{21!!}{22!!} = 0.1681880950927734375 < \frac{1}{3} = \frac{1}{\ln(e^3)} < \frac{1}{\ln(11)}$$

4.2. Предположение индукции:

Пусть $a_n \leq \frac{1}{\ln(n)}$ для некоторого $n \geq 11$, тогда докажем, что условие верно и для $n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot a_n \leq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\ln(n)}$$

Докажем, что $\forall n \geq 11 : \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$

$$11 \leq n \implies 5 + \sqrt{36} \leq n \implies 5 + \sqrt{35} \leq n \implies 35 \leq (n-5)^2 \implies 0 \leq n^2 - 10n - 10 \implies$$

$$\implies 10(n+1) \leq n^2 \implies 3^2(n+1) \leq n^2 \implies 3^2 \leq \frac{n^2}{(n+1)} \implies \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \leq \frac{n^2}{(n+1)} \implies$$

$$\implies \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \leq \frac{n^2}{(n+1)} \implies 2n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \ln\left(\frac{n^2}{n+1}\right) \implies$$

$$\implies 2n\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) \leq 2\ln(n) - \ln(n+1) \implies (2n+1)\ln(n+1) \leq (2n+2)\ln(n) \implies$$

$$\implies \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

Следовательно: $a_{n+1} \leq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \cdot \frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n+1)}$ т.е. условие выполняется для $n+1$.

4.3. Следовательно, утверждение верно $\forall n \geq 11$ по принципу математической индукции.

5. $\forall n \geq 11 : 0 \leq a_n \leq \frac{1}{\ln(n)} \implies a_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ по теореме о зажатой последовательности (2)

$(1) \wedge (2) \implies$ числовой ряд $S(-R-2)$ сходится по признаку Лейбница.

Ответ:
радиус сходимости $R = \frac{1}{2}$
интервал сходимости: $(-2.5; -1.5)$
ряд сходится условно в $x = -2.5$ и расходится в $x = -1.5$