Алгебра

Михайлец Екатерина Викторовна

emihaylets@hse.ru

Формула оценки : КР1 + экз + ИДЗ1 + ИДЗ2 + семинары

Лекция 1. (06.09.23)

Матрицы. Операции над ними

Опр.: Матрица размера m на n ($m \times n$) – упорядоченная прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов.

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \right\} m \text{ строк}}_{n \text{ столбцов}}$$

a_{ij} – элемент матрицы (i – номер строки, j – номер ст-бца)

$[A]_{ij} = a_{ij}$ – эквивалентная запись

Числа $n \times m$ наз. размерами матриц (тип, порядок)

Мн-во всех вещественных м-ц размера $m \times n$ обознач. $M_{mn}(\mathbb{R})$

Частные случаи:

1) Если $m = n$, то м-ца наз. квадратной порядка n ($\in M_n(\mathbb{R})$)

2) Если $n = 1$ (т.е. м-ца размера $m \times 1$) – m-мерный столбец (вектор-ст-ц)

3) Если $m = 1$ (т.е. м-ца размера $1 \times n$) – n-мерная вектор-строка

4) Если все $a_{ij} = 0$ $\forall \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix}$ – нулевая матрица

$\forall$ - квантор всеобщности („для любого")

5) Квадратная м-ца порядка n наз. единичной, если

$$a_{ij} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, \text{ если } i=j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}_n$$

δ^i_j - символ Кронекера

Операции

Опр.: Две м-цы A и B назыв. равными, если

1) они одинакового размера
2) их соответствующие эл-ты равны

т.е. $[A]_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = [B]_{ij}$ $\quad \forall i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$

Опр.: М-ца C наз. суммой м-у A и B, если м-цы A, B и C одинаковых размеров и $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad \forall i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$

пример: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Св-ва сложения:

1) Коммутативность сложения: $A + B = B + A$

$\square$ $[A+B]_{ij} \underset{\text{по опр. сумми м-у}}{=} [A]_{ij} + [B]_{ij} \underset{\text{числа}}{=} [B]_{ij} + [A]_{ij} = [B+A]_{ij}$ $\quad \forall i = \overline{1,m}, \ \forall j = \overline{1,n}$ $\blacksquare$

начало док-ва

конец док-ва

2) Ассоциативность сложения: $(A+B)+C = A+(B+C)$

Д-во аналогично. $\exists$ - квантор существования

3) $\exists$ нейтральный э-нт по сложению матриц: т.е.

$\exists$ м-ца $\Theta \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$: $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполняется

$A+\Theta = \Theta + A = A$

$\square$ это нулевая матрица $[\Theta]_{ij}=0 \quad \forall \begin{matrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n} \end{matrix}$ $\blacksquare$

4) $\forall$ матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ $\exists!$ $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$: $A+B=\Theta$-нулевая

Обозн: $B=-A$ (обратная по сложению, противоположная м-ца)

$\square$ $[B]_{ij} = -[A]_{ij}$ $\blacksquare$

: - „такая что“

$\exists!$ - единственность

Опр: <u>Разностью м-ц</u> A и B наз. сумма A и $-B$

Обозн: $A-B = A+(-B)$

Умножение м-цы на число

Опр: Матр. C наз. <u>произведением</u> числа $\lambda \in \mathbb{R}$ на м-цу A, если матр. C и A одинак. размеров и $[C]_{ij} = \lambda \cdot [A]_{ij} \quad \forall \begin{matrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n} \end{matrix}$

Пример: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Св-ва умножения м-цы на число:

1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ - умножение м-цы на число $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ – дистрибутивность умножения на число относ: сложения чисел.

3) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ – дистриб. отн. слож. матриц

4) $1 \cdot A = A$ – унитарность

Умножение матриц

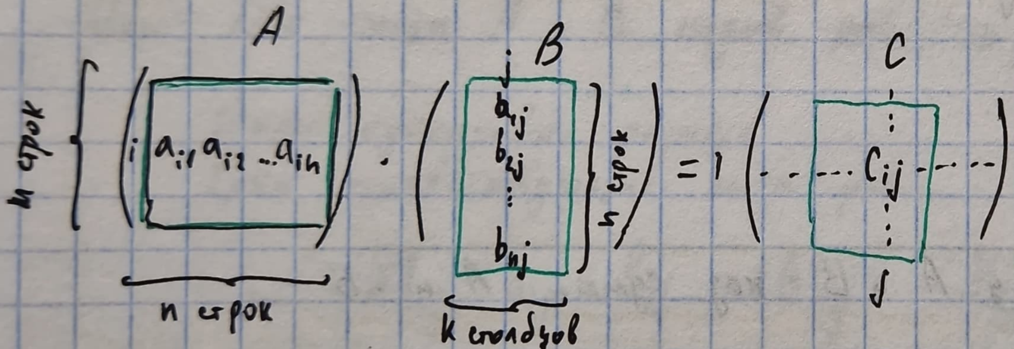
Рассмотрим м-цу A типа $m \times n$ и м-цу B типа $n \times k$

число столбцов ... число строк

Опр: произведением м-ц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$ называется матрица C размера $m \times k$, где

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} \cdot b_{qj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{12} \cdot b_{2j} + \ldots + b_{nj} \cdot a_{in} \quad \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}$$



Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) \\ 3\cdot 1 + 4\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 - 1\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Св-ва умножения м-ц:

1) Ассоциативность

① опред. умн.
② числа, раскр. скоб.

$\forall A_{m\times n}, B_{n\times k}, C_{k\times l} \quad (A\cdot B)\cdot C) = (A\cdot(B\cdot C)$

$\square\ [(A\cdot B)\cdot C]_{ij} \underset{①}{=} \sum_{r=1}^{k} [A\cdot B]_{ir} \cdot [C]_{rj} \underset{①}{=} \sum_{r=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{n} [A]_{is} \cdot [B]_{sr} \right) [C]_{rj} \underset{②}{=}$

$$= \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{n} [A]_{is}\cdot[B]_{sr}\cdot[C]_{rj} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}[A]_{is}\cdot[B]_{sr}\cdot[C]_{rj} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} [A]_{is}\left(\sum_{r=1}^{k} [B]_{sr}\cdot[C]_{rj}\right) = \sum_{s=1}^{n} [A]_{is}\cdot[B\cdot C]_{sj} = [A\cdot(B\cdot C)]_{ij} \quad \forall \begin{matrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,l} \end{matrix} \quad \blacksquare$$

2) Для квадратных матриц $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\exists$ нейтр. эл-т по умнож.,

т.е. $E = M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad A\cdot E = E\cdot A = A$

$\square$ Предъявим эту м-цу E

$$[E]_{ij} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A\cdot E]_{ij} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{ir}\cdot[E]_{rj} = 0 + 0 + [A]_{ij}\cdot[E]_{ij} + 0 = [A]_{ij}\cdot[E]_{ij} \quad \blacksquare$$