Лекция 23, 22.03.24

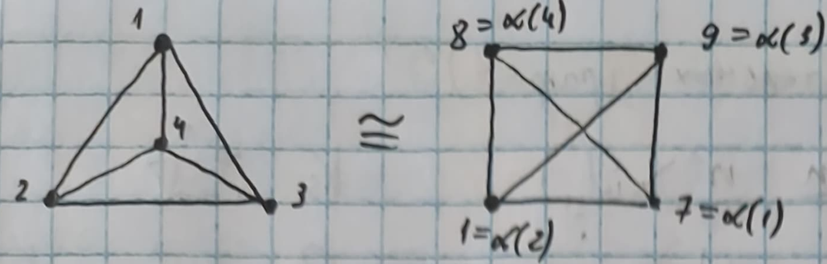
Опр: $G = (V_G, E_G)$ | $G \overset{\alpha}{\cong} H$

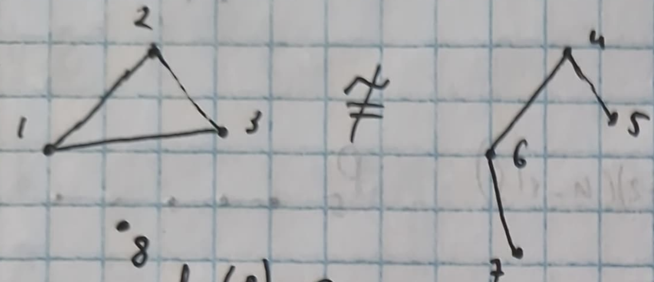
$H = (V_H, E_H)$

(1) $V_G \overset{\alpha}{\sim} V_H$

(2) $\forall x, y \in V_G \quad x E_G y \Leftrightarrow \alpha(x) E_H \alpha(y)$

$G \cong H \Leftrightarrow \exists \alpha \; G \overset{\alpha}{\cong} H$





$\forall x \; d_H(x) \neq 0$

$d_G(8) = 0$

Утв: $d_G(x) = d_H(\alpha(x))$

$d_G(x) = |N_G(x)|$

$\alpha[N_G(x)] = N_H(\alpha(x))$

$x E_G y \iff \alpha(x) E_H \alpha(y)$

Лемма 1: Если $G \cong H$, то у G и H совпадают:

(1) порядок

(2) размер

(3) степенная послед-ть.

$$\text{размер}_G = \frac{1}{2} \sum_{v \in V_G} d_G(v)$$

Лемма 2: (1) $G \overset{id_V}{\cong} G$

(2) $G \overset{\alpha}{\cong} H \Rightarrow H \overset{\alpha^{-1}}{\cong} G$

(3) $G \overset{\alpha}{\cong} H \wedge H \overset{\beta}{\cong} F \Rightarrow G \overset{\beta \circ \alpha}{\cong} F$

Опр: (несколько замечательных графов)

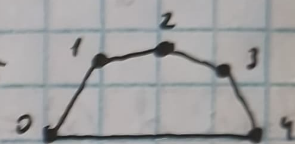
(1) <u>полный</u> $K_n \cong (\underline{n}, \underline{n}^2 \setminus id_{\underline{n}})$ K_5 

(2) <u>пустой</u> $O_n \cong (\underline{n}, \varnothing)$ O_5 

(3) <u>граф-путь</u>, „<u>цепь</u>"

$P_n \cong (\underline{n}, \{01, 12, 23, \dots, (n-2)(n-1)\})$ P_5 

(4) <u>граф-цикл</u>

$C_n \cong (\underline{n}, \{01, 12, \dots, (n-2)(n-1), (n-1)0\})$ C_5 

Опр: Граф G – это <u>подграф</u> графа H

$\iff$ (1) $V_G \subseteq V_H$ (2) $E_G \subseteq E_H$.

Пример: C_5 – подграф графа K_5

P_5 – подграф графа C_5

Опр: G – это <u>индуцированный подграф</u> графа H

$\iff$ (1) $V_G \subseteq V_H$ (2) $E_G = E_H \cap V_G^2$

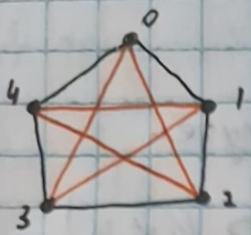
C_5 – не инд. подграф K_5

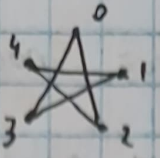
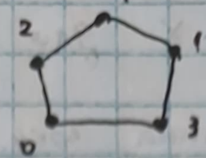
P_5 – не инд. подграф. C_5

P_4 – инд. подграф C_5

Опр: <u>дополнение графа</u>. Пусть есть граф $G = (V, E)$

$\overline{G} := (V, V^2 \setminus (id_V \cup E))$



$\overline{C_5} \cong$  $\cong$  $\cong C_5$

Утв: $\overline{\overline{G}} = G$.

$\overline{K_n} \cong O_n \qquad \overline{O_n} \cong K_n$

$\overline{C_4} \cong$  $\cong P_2 \sqcup P_2 \cong 2 \cdot P_2 \not\cong C_4$

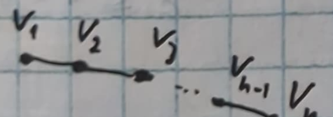
$\overline{K_1} \cong O_1 \cong K_1$

Лемма 3. Если G – это (n, m) – граф, то $\overline{G}$ – это $(n, C_n^2 - m)$-граф.

$$|V^2 \setminus (id_V \cup E)| = |V^2| - |id_V| - |E|$$
$$= n^2 - n - 2m = 2\left(\frac{n(n-1)}{2} - m\right) = 2\left(C_n^2 - m\right)$$

Опр: Пусть $G = (V, E)$ – граф

(1) если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$; $n \geq 1$ и $\forall i \; v_i E v_{i+1}$



– то послед-ть $p = v_1 v_2 \dots v_n$ наз. <u>путём</u> в графе G.

$|p|$= длина пути p = # рёбер в p $= n-1$.

Ребро xy содержится в $p \Leftrightarrow \exists i \left((x = v_i \wedge y = v_{i+1}) \vee (x = v_{i+1} \wedge y = v_i) \right)$

если $q = u_1 \dots u_m$ и $x u_1 \dots u_m y$ – путь в гр. G, то пишем $x \xrightarrow{q} y$.

пишем $x \xrightarrow{q} x$ для пустой послед. q

„каждая вершина соед. сама с собой пустым путём"

Путь $p = v_1 v_2 \dots v_n$ <u>простой</u> $\Leftrightarrow \forall i,j \ (i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j)$

Лемма 4. Если $\forall x,y \in V$ сущ. путь $p = x u_1 \dots u_m y$ в G, то сущ. простой путь $p' = x v_1 \dots v_k y$.

Более того, любой путь $x - y$ кратчайшей длины будет простым.

Док-во: по ПНЧ, сущ. путь $p' = x - y$ наим. длины.

докажем, что p' - простой. Пусть не так.

$p' = x \xrightarrow{q'} z \xrightarrow{\cancel{q''}} z \xrightarrow{q'''} y \Rightarrow$ рассмотрим $p'' = x \xrightarrow{q'} z \xrightarrow{q'''} y$

$|z \xrightarrow{q''} z| > 0$

Тогда $|p''| < |p'|$, т.е. p' - не кратчайший среди путей из x в y $\bot$ ч.т.д.

Опр: Пусть $G = (V, E)$; $x, y \in V$

x и y „соединены путём в G" („связаны") $\Leftrightarrow \exists q \ x \xrightarrow{q} y$

$\Leftrightarrow x \sim_G y$

$\sim_G \subseteq V \times V$

Лемма 5. $\sim_G \in Eq(V)$

Док-во: (1) рефл.: $x \xrightarrow{\text{пустой}} x := x$ ← путь $\Rightarrow x \sim_G x$

(2) симм.: $x \sim_G y \Rightarrow \exists u_1 \dots u_m$ $x u_1 \dots u_m y$ - путь в G

$u_i E u_{i+1} \Rightarrow u_{i+1} E u_i$ $y u_m u_{m-1} \dots u_1 x$ - путь в G

(3) транз.: $x \sim_G y \wedge y \sim_G z$

$$\Downarrow$$

$\exists q, r \quad x \overset{q}{—} y \wedge y \overset{r}{—} z$

$\Rightarrow x \overset{q}{—} y \overset{r}{—} z$ – путь в G $\Rightarrow x \sim_G z$ ч.т.д.

Опр: <u>Компонента связанности верш.</u> x $[x]_{\sim_G} = \{y \in V \mid x \sim_G y\}$

$V/\sim_G = \{[x]_{\sim_G} \mid x \in V\}$

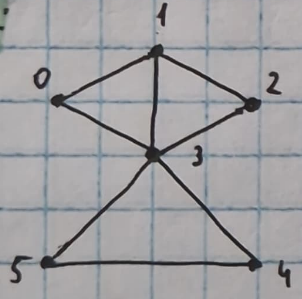
Граф G связан $\Leftrightarrow |V/\sim_G| = 1 \Leftrightarrow \forall x, y \in V \; x \sim_G y$.

Опр: Путь $v_1 v_2 \dots v_n v_{n+1}$ наз. циклом длины n в гр. G

$\Leftrightarrow \forall i, j \; (\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}) \quad v_{n+1} = v_1$

! нет повтора рёбер.

Пример:



131 $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ не цикл.

2312 – цикл

03453210 – цикл

Цикл. $\overbrace{v_1 \dots v_n} v_1$ простой $\Leftrightarrow$ путь $v_1 \dots v_n$ простой

Теорема 6. (об удалении ребра)

Пусть граф $G = (V, E)$ связан и $xy \in E$.

G' = результат удаления xy в G.

Тогда (1) если xy входит в какой-то цикл в G, то G' – связан.

(2) если xy не входит ни в один цикл в G, то у G' будет ровно 2 компоненты связанности: $[x]_{\sim_{G'}}$ и $[y]_{\sim_{G'}}$.

① пусть есть цикл в G:

$$\underbrace{z \xrightarrow{q_1} x}_{\text{нет } xy}\underbrace{y \xrightarrow{q_2} z}_{\text{нет } xy}$$

тут

Рассм. 2 верш. в G': u, v. Хотим $u \sim_{G'} v$

<u>I сл.</u> путь в G $u \xrightarrow{p} v$ не содержит xy

$\Rightarrow$ он остаётся путём в G'.

<u>II сл.</u> путь $u \xrightarrow{p} v$ содержит xy.

По Л4, можно считать путь $u \xrightarrow{p} v$ простым =

$$= \underbrace{u \xrightarrow{p_1} x}_{\text{нет } xy}\underbrace{y \xrightarrow{p_2} v}_{\text{нет } xy}$$

Тогда имеем путь в G': $u \xrightarrow{p_1} x \xrightarrow{q_1^{-1}} z \xrightarrow{q_2^{-1}} y \xrightarrow{p_2} v$

$\Rightarrow u \sim_{G'} v$