#1.

$$(P \vee Q) \to R \overset{?}{=} (P \to R) \vee (Q \to R)$$

① $(P \vee Q) \to R = \overline{(P \vee Q)} \vee R = \bar{P} \wedge \bar{Q} \vee R$

② $(\bar{P} \vee R) \vee (\bar{Q} \vee R) = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee R$

=> утверждения не эквиваленты

#2.

(a) $\forall x \, \forall y \, \exists z : xy^2 < z$

$\exists x \, \exists y \, \forall z : xy^2 \geq z$

(b) $\forall x \, \forall z \, \exists y : xy^2 \leq z$

$\exists x \, \exists z \, \forall y : xy^2 > z$

(c) $\exists z \, \forall x \, \exists y : xy^2 = z$

$\forall z \, \exists x \, \forall y : xy^2 \neq z$

(d) $\forall z \, \exists x \, \forall y : xy^2 \leq z$

$\exists z \, \forall x \, \exists y : xy^2 > z$

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| < 1 \to |x| < 4$

$\exists x \in \mathbb{R} : (|x-3| < 1) \wedge (|x| \geq 4)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| > 1 \to |x| > 4$

$\exists x \in \mathbb{R} : (|x-3| > 1) \wedge (|x| \leq 4)$

(c) $\forall \varepsilon \, \forall x : |x-3| < \min(\varepsilon; 1) \to |x^2 - 9| < 10\varepsilon$

$\exists \varepsilon \, \exists x : (|x-3| < \min(\varepsilon; 1)) \wedge (|x^2 - 9| \geq 10\varepsilon)$

(d) $\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x : (\delta > 0) \wedge (|x-3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \to |x^2 - 9| < \varepsilon$

$\exists \varepsilon \, \forall \delta \, \exists x : ((\delta > 0) \wedge (|x-3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0)) \wedge (|x^2 - 9| \geq \varepsilon)$

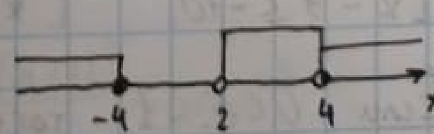
#3.

(a) $(\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| < 1 \Rightarrow |x| < 4) = 1$, т.к.

$|x-3| < 1$ $\qquad$ $|x| < 4$

$-1 < x-3 < 1$ $\qquad$ $-4 < x < 4$

$2 < x < 4$



Чтобы была ложь необходимо $\begin{cases} (2 < x < 4) = 1 \\ (-4 < x < 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

(в) $(\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| > 1 \Rightarrow |x| > 4) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x-3>1 \\ x-3<-1 \end{array}\right. \qquad |x|>4$$

$$\left[\begin{array}{l} -4 \quad x \\ x>4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<2 \end{array}\right.$$

Чтобы была ложь необходимо $\begin{cases} (|x-3|>1)=1 \\ (|x|>4)=0 \end{cases}$, т.е.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<2 \end{array}\right. \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x < 2 \text{ - выполнено}$$

(с) $(\forall \varepsilon \forall x : |x-3| < \min(\varepsilon; 1) \Rightarrow |x^2-9| < 10\varepsilon) = 1$

Чтобы была ложь необходимо $\begin{cases} (|x-3| < \min(\varepsilon; 1)) = 1 \\ (|x^2-9| < 10\varepsilon) = 0 \end{cases}$

$|x^2-9| \geqslant 10\varepsilon$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-9 \geqslant 10\varepsilon \\ -10\varepsilon \geqslant x^2-9 \end{array}\right.$$

Пусть $\varepsilon \leq 0$, тогда $(|x-3| < \min(\varepsilon; 1)) = 0 \Rightarrow$ выражение истинно

Если $\varepsilon \geqslant 1$, тогда $|x-3| < 1$; $2 < x < 4$

$|x^2-9| \geqslant 10\varepsilon \geqslant 10$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-9 \geqslant 10 \\ x^2-9 \leq -10 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 \geqslant 19 \\ x^2 \leq -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -\sqrt{19}] \cup [\sqrt{19}; +\infty), \text{ но } 2<x<4 \\ \varnothing \end{array}\right. \Downarrow \varnothing$$

Если $0 < \varepsilon < 1$, тогда $|x-3| < \varepsilon$

$$\begin{cases} |x-3| < \varepsilon & (1) \\ |x-3||x+3| \geqslant 10\varepsilon & (2) \end{cases}$$

(1) $|x-3| < \varepsilon < 1$

$|x-3| < 1$

$2 < x < 4$

(2) $|x-3| < \varepsilon \quad \Big| \cdot |x+3| > 0$

$10\varepsilon \leq |x-3| \cdot |x+3| < \varepsilon |x+3|$

$10\varepsilon < \varepsilon |x+3| \quad \Big| : \varepsilon \neq 0$

$10 < |x+3|$

$\left[\begin{array}{l} x+3 > 10, \\ x+3 < -10, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x > 7, \\ x < -13, \end{array}\right.$ но т.к. $2<x<4$, то $\varnothing$

$\Rightarrow$ при $\forall \varepsilon$ выражение истинно

(d) $(\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x : (\delta > 0) \wedge (|x-3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon) = 1$

Отрицание: $\exists \varepsilon \, \forall \delta \, \exists x : (\delta > 0) \wedge (|x-3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \wedge (|x^2-9| \geqslant \varepsilon)$

Т.к. $\forall \delta$, то $(\delta > 0)$ может быть ложным, тогда выражение-отриц. будет ложным $\Rightarrow$ выражение истинно

#4.

$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$

$\square\ a_n = 2^{n-1} + 1$

$a_1 = 2^{1-1} + 1 = 1 + 1 = 2$

Пусть $a_n = 2^{n-1} + 1$

$n \to n+1:\quad a_{n+1} = 3\cdot(2^{n-1}+1) - 2(2^{n-2}+1) = 3\cdot 2^{n-1} + 3 - 2^{n-1} - 2 =$

$= 2\cdot 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1 \quad \blacksquare$

#5.

$\square\ \forall n \in \mathbb{N}\quad 4^n + 15n - 1 \ \vdots\ 9$

$n=1:\quad 4 + 15 - 1 = 18 \ \vdots\ 9$

Пусть $4^n + 15n - 1 \ \vdots\ 9$

$n \to n+1:\quad 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4\cdot 4^n + 15n + 14 =$

$= 4\underbrace{(4^n + 15n - 1)}_{\vdots 9} \underbrace{- 45n}_{\vdots 9} + \underbrace{18}_{\vdots 9} \ \vdots\ 9 \quad \blacksquare$

#6.

$\square\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 \overset{?}{=} \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$n=1:\quad 1 = \dfrac{1\cdot 2^2}{4} = 1$

Пусть $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$n \to n+1:\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$

$= \dfrac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \blacksquare$