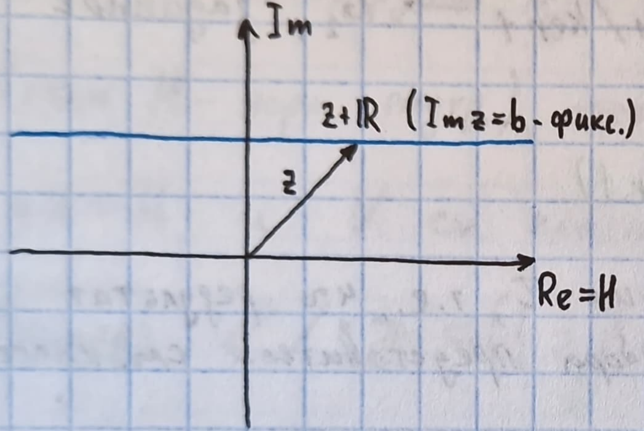
Лекция 19, 07.02.24.

Теорема о гомоморфизме

Пример:

мн.-во всех прямых, паралл. вещ. оси (состоящих из всех к.ч. с одинак. мнимой частью)

1) $\overline{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$



$f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \mathrm{Im}\, z$ – гомоморфизм

$\mathrm{Ker}\, f = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = 0 \} = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ применима теор. о гом-зме.

2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ ← вычеты по mod n | мн-во классов чисел, имеющих одинак. остаток от деления на n

целые числа; целые числа $⋮ n$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f(k) = \overline{k}$ – гом-зм

т.к. $\overline{(k+l)} = \overline{k} + \overline{l}$

сл. цел. ч. ; сложение вычетов по mod n

$\operatorname{Ker} f = n\mathbb{Z}$, т.е. мн-во чисел с ост. 0 от дел. на n

$\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}_n$

3) $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^* = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

невыр. матрицы n×n с умн. ; мат-цы n×n det = 1

$f = \det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ – гом-зм, т.к. $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$

$\operatorname{Ker} f = SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^*$

Опр: Отображение, сопоставляющее эл-ту группы G его смежный класс по некоторой нормальной подгруппе H по правилу $\varepsilon : g \mapsto gH$ называется <u>естественным</u> <u>гомоморфизмом</u>.

Замечание: $\varepsilon : G \to G/H$. Заметим, что в силу определения умножение в G/H это действительно гомоморфизм (если H – нормальная) (т.е. $\varepsilon(g_1 \cdot g_2) = (g_1 \cdot g_2)H = g_1 H \cdot g_2 H = \varepsilon(g_1) \cdot \varepsilon(g_2)$).

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{G_1} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \boxed{G_2} \\
& \boxed{G_1/\operatorname{Ker} f} \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}
$$

гом-зм

естеств. гом-зм

гом-зм между $G_1/\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Im} f$

$$\boxed{f = \tau \circ \varepsilon}$$

Говорят, что гом-зм f „пропускается" через естественный гом-зм

Критерий нормальности

Опр: Эл-ты x_1 и x_2 группы G наз-ся сопряжёнными, если $\exists y \in G : y x_1 y^{-1} = x_2$.

Утв 1: (Критерий нормальности подгруппы исп. сопряжение)

Пусть $H \leq G$ - подгруппа в группе G.

Тогда 3 условия эквивалентны:

1) H - нормальна $(H \trianglelefteq G)$

2) $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H \quad (\Longleftrightarrow \forall g \in G \ \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H)$

Т.е. вместе с каждым своим эл-том H содержит все сопряжённые к нему в G

3) $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$

□ Схема док-ва: $① \Rightarrow ② \Rightarrow ③ \Rightarrow ①$

$① \Rightarrow ②$ H - нормальна в $G \Rightarrow$ по опр. $\forall g \in G \quad gH = Hg$, т.е.

$\forall h \in H \quad \exists h' \in H : gh = h'g \quad | \cdot g^{-1}$ справа

$$ghg^{-1} = h'gg^{-1} \Rightarrow ghg^{-1} = h' \in H$$

Т.е. $\forall g \in G \ \forall h \in H$ эл-т ghg^{-1} принадлежит подгруппе H, т.е.

$gHg^{-1} \subseteq H$

$② \Rightarrow ③$ Осталось док-ть $H \subseteq gHg^{-1}$

Пусть $h \in H$, представим $h = \underbrace{(g \cdot g^{-1})}_{e} \cdot h \cdot \underbrace{(g \cdot g^{-1})}_{e} \underset{\text{ассоц.}}{=} g(g^{-1}hg)g^{-1}$

Заметим, что $g^{-1} \cdot h \cdot g$ при выполнении ② явл. элементом из H, т.к. в св-ве ② можно взять $g' = g^{-1} \Rightarrow g^{-1}hg = \tilde{h} \in H$.

Т.е. $\forall g \in G \quad \forall h \in H$

$h = g \cdot \tilde{h} g^{-1}$, где $\tilde{h} = g^{-1} h g \in H$.

$\Rightarrow H \subseteq gHg^{-1} \Rightarrow$ с учётом ② $\Rightarrow H = gHg^{-1}$

③ $\Rightarrow$ ① Если $\forall g \in G \quad H = gHg^{-1} \mid \cdot g$ справа

$Hg = gH \Rightarrow$ опр. нормальности

(на языке эл-тов $H = gHg^{-1}$ означает, что

$\exists h_1, h_2 \in H : \quad h_1 = g h_2 g^{-1} \mid \cdot g$ справа

$h_1 g = g h_2 \Rightarrow Hg = gH$ по опр.) ■

Утв. 2: (Критерий нормальности с исп. понятия ядра)

H - нормальная подгруппа в $G \Leftrightarrow H = \operatorname{Ker} f$, где

f - какой-то гом-зм из G куда-то.

(Т.е. H - ядро некот. гом-зма из G)

□ <u>Необходимость</u> Дано: H - нормальна ($H \triangleleft G$)

Док-ть: $\exists$ гом-зм : $\operatorname{Ker} f = H$.

Этим гом-змом может быть естеств. гом-зм $\varepsilon : g \mapsto gH$,

т.к. H - норм. подгр., след. факторгруппа G/H задана корректно

и ε - действ. гом-зм.

$\operatorname{Ker} \varepsilon = \{ g \in G \mid \varepsilon(g) = gH = H \}$

Заметим, что $gH = H$ означает, что $g \in H$, т.к. $\exists h_1, h_2 \in H$:

$gh_1 = h_2 g \iff g h_2 h_1^{-1} \in H. \implies \operatorname{Ker} \varepsilon = H.$

<u>Достаточность</u>: Дано: f - гом-зм и $H = \operatorname{Ker} f$

Док-ть: H - норм. подгр.

Пусть $h \in \operatorname{Ker} f = H$

Докажем, что $\forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H \; (\iff g \operatorname{Ker} f \, g^{-1} \subseteq \operatorname{Ker} f)$.

Тогда по 1му критерию (Утв. 1) $H = \operatorname{Ker} f$ будет норм.

подгр. в G, $f(ghg^{-1}) \underset{\text{опр. гом-зма}}{=} f(g) \cdot \underset{e_2}{f(h)} \cdot f(g^{-1}) = f(g) \cdot f(g^{-1}) \underset{\text{опр. гом.}}{=} f(g \cdot g^{-1}) \underset{\text{св-во гом.}}{=} f(e_1) = e_2$

$\implies ghg^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ по опр. ядра

$\implies H = \operatorname{Ker} f$ - норм подгр. по Утв. 1. ■

Следствие: Ядро гом-зма $f: G_1 \to G_2$ всегда явл. норм. подгр. в G_1.

Примеры группы

Группа кватернионов

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с опер. умножения, зад. условиями:

$(-1)^2 = 1, \quad i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$

Замечание: Кватернионы - это числа вида $a + bi + cj + dk$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (гиперкомплексные числа).

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Замечание: Q_8 – не абелева, но все подгруппы в ней нормальные (св-во гамильтоновости).

Замечание: Всего $\exists$ 5 неизоморфных групп из 8 элементов (порядка 8)

$$Q_8, \underbrace{\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4}_{\text{абелевы}}, D_4$$

гр. кватерн. цикл гр. диэдра