

ДЗ к семинару 29

Задача 1. Пусть оператор \mathcal{A} на \mathbb{R}^2 в базисе $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Оператор \mathcal{B} в базисе $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора \mathcal{AB} в стандартном базисе.

Задача 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора над \mathbb{R} , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы оператора над \mathbb{R} , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найти собственные значения и собственные векторы оператора над \mathbb{R} , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ – некоторые числа и $a \neq 1$. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ линейный оператор \mathcal{A} , заданный правилом

$$f(x) \mapsto f(ax + b),$$

имеет множество собственных значений $1, a, \dots, a^n$.

Указание. Подберите такой многочлен вида $f(x) = x + s$, $s \in \mathbb{R}$, что $f(ax + b) = af(x)$.

Задача 6. Найти все инвариантные подпространства для оператора дифференцирования \mathcal{A} в пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

Указание. В инвариантном подпространстве U рассмотрите многочлен наибольшей степени и примените к нему \mathcal{A} .