Домашняя работа #3.

#1.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I}-\text{II}\cdot 2 \\ \text{III}-3\cdot\text{II} \\ \text{IV}-\text{II} \\ \text{II}\leftrightarrow\text{I} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{II}-\text{III} \\ \text{III}-\text{IV} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{II}-2\cdot\text{III} \\ \text{IV}-6\cdot\text{III} \\ \text{III}\leftrightarrow\text{II} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -68 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I}+2\cdot\text{II} \\ \text{IV}-2\cdot\text{III} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 19 \\ x_3 = 13 \\ x_5 = -34 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{19}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$; $x_3 = 13$; $x_5 = -34$.

#2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

0+7+4+1+0+1+0+0+0 = 13 инверсий

Ответ: 13.

#3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

#4.

$AXB = C$; $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

#5.

Произведение $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$ входит в определитель матрицы 5-го порядка со знаком минус, т.к.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$1+0+2+0+0=3$

$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^3 = -1$

#6.

$$\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = (n+1)(n-1) - n \cdot n = n^2 - 1 - n^2 = -1$$

Ответ: -1.

#7.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Ответ: 1.

#8.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = (2 \cdot 3 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 5 \cdot 4) - (1 \cdot 3 \cdot 3) - (4 \cdot 2 \cdot 2) - (3 \cdot 5 \cdot 1) =$$

$$= 18 + 2 + 60 - 9 - 16 - 15 = 80 - 40 = 40$$

Ответ: 40.