Семинар 16, 18.01.24

⑥ Кто из них группа?

1) $(A, +)$, где $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\mathbb{N}$ – нет 0 или нет x^{-1}

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – группы

2) $(A, \cdot)$, где $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

нет, т.к. нет x^{-1} (при $x=0$)

3) $(A_0, \cdot)$, где $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\quad (A_0 = A \setminus \{0\}$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ – нет x^{-1}

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – да

4) $(n\mathbb{Z}, +)$, $n \in \mathbb{N}$

Группа $\quad = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$

5) Мн-во степеней данного вещ. числа $a \neq 0$ с цел. показателем по умножению.

$(\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot) \cong \mathbb{Z}$ – группа

6) Мн-во компл. корней фикс. степени n из 1 относит. умножения

$\sqrt[n]{1} \cong \mathbb{Z}_n$ – группа

7) Мн-во всех непрерывных отображений $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ |

$\varphi(0) = 0$, $\varphi(1)$ и $(x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y))$ по комп.

Обозначим это множество X. Тогда $\varphi \in X \Rightarrow \varphi^{-1} \in X$.

Это группа.

8 Кто из них группа?

1. мн-во (косо)симметрических матриц относ. сложения

$\{A^T = A\} = X$, $Y = \{A^T = -A\}$

$0 \in X \cap Y$

$A, B \in X \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A+B \in X$

$A, B \in Y \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = -(A+B) \Rightarrow A+B \in Y$

$A \in X \Rightarrow (-A)^T = -A^T = -A \Rightarrow -A \in X$

$A \in Y \Rightarrow (-A)^T = -A^T = -(-A) \Rightarrow -A \in Y$

Это группа.

3. Мн-во всех диагональных матриц по сложению.

Это группа. P.S. она изоморфна $\mathbb{R}^n$

4. Мн-во всех верхних нильтреугольных матриц по умножению

$\left\{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\} = X$, если в X есть свой нейтр. элемент e, то

$eE_{ij} = E_{ij} \quad \forall i < j$

HSE

⑨ $f: X \to Y$ инъективно $\Leftrightarrow \exists g: Y \to X \mid g \circ f = 1_X$

„$\Rightarrow$"

$$g(y) = \begin{cases} \overset{=x}{f^{-1}(y)}, & \text{если } y = f(x) \\ x_0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где } x_0 \in X \text{ - фикс.}$$

„$\Leftarrow$" Если $f(x_1) = f(x_2)$, то $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

$$g \circ f(x_1) = 1_X(x_1) = x_1, \quad g \circ f(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$$

Гомоморфизм

Пусть X, Y - группоиды (моноиды, группы)

Отображение $f: X \to Y$ наз. гомоморфизмом, если

- $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$
- $\cdot\,\cdot$ $f(1_X) = 1_Y$
- $\cdot\,\cdot\,\cdot$ $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Утв: Если X, Y - группы, то f - гомом-зм $\Leftrightarrow f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

Гомоморфизм $f: X \to Y$ наз. изоморфизмом, если

$\exists$ гом-зм $g: Y \to X \mid f \circ g = 1_Y$, $g \circ f = 1_X$.

Утв: Если f - биекция, то f - изоморфизм.

$\square$ $f^{-1}(xy) = f^{-1}(f(a) \cdot f(b)) = f^{-1}(f(ab)) = ab = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$ $\blacksquare$

① Какие из отобр. групп $f: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times$ явл. гомоморфизмом?

1) $f(z) = |z|$

$\square$ $f(zw) = |zw| = |z| \cdot |w| = f(z) \cdot f(w) \Rightarrow$ да $\blacksquare$

2) $f(z) = 2|z|$

□ $f(zw) = 2|zw| = 2\cdot|z|\cdot|w| \neq 4\cdot|z|\cdot|w| = f(z)\cdot f(w) \Rightarrow$ нет ■

3) $f(z) = |z|^2$

Утв: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ – гом-зм $\Rightarrow g\circ f$ – гом-зм

□ $g\circ f(x_1 x_2) = g(f(x_1 x_2)) = g(f(x_1) f(x_2)) = g(f(x_1))\cdot g(f(x_2)) =$

$$= [g\circ f(x_1)][g\circ f(x_2)]$$ ■

□ $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}^\times \xrightarrow{|\cdot|^2} \mathbb{R} \Rightarrow$ да ■

$(xy)^2 = x^2\cdot y^2$

4) $f(z) = 1$

□ $f(zw) = 1 = 1\cdot 1 = f(z)\cdot f(w) \Rightarrow$ да ■

Мн-во всех гом-змов $X \to Y$ обознач. $\boxed{Hom(X, Y)}$.

Заметим, что $Hom(X, X)$ – моноид.

② Для каких групп G отображение $f: G \to G$ |
1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x) = x^{-1}$
явл. гомом-змом / изоморфизмом ?

1) $f(xy) = (xy)^2 = xy\cdot xy$

$\quad\;\; \|$

$f(x)\cdot f(y) = x^2\cdot y^2$

$x^{-1}* \Downarrow *y^{-1}$

$yx = xy \Rightarrow G$ коммутативна

f изоморфизм $\Leftrightarrow \forall y \in G\ \exists x : y = x^2$ & $Ker\, f = \{1\}$,

т.е. $x^2 \neq 1\ \forall x \neq 1$, т.е. $ord(x) \neq 2\ \forall x \neq 1$.

HSE

(если $G = \mathbb{Z}$, то $f(x) = 2x$ – инъект., но не сюръект.)

2) $f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ $\quad ((xy)\, y^{-1} \cdot x^{-1} = x y y^{-1} x^{-1} = 1)$

$\overset{\shortparallel}{f(x) \cdot f(y)} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

Возьмём обратный от обеих частей равенства, получим

$(y^{-1} x^{-1})^{-1} = (x^{-1} y^{-1})^{-1}$

$\overset{\shortparallel}{(x^{-1})^{-1} (y^{-1})^{-1}} = (y^{-1})^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}$

$\underset{xy}{\shortparallel} \qquad \underset{yx}{\shortparallel}$ $\Rightarrow$ G абелева, f – изоморфизм всегда

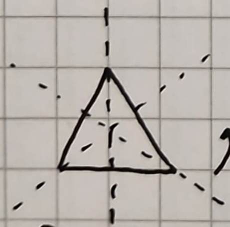
$\forall$ группы G отображение $L: G \to G$ биекция $g \mapsto g^{-1}$

$\square$ $g = (g^{-1})^{-1}$, если x, y обратны к g, то $e = xg = yg \overset{\cdot x}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \underbrace{e \cdot x}_{x} = \underbrace{y \cdot g \cdot x}_{e} \Rightarrow x = y$ $\blacksquare$

Группа изометрий правильного n-угольника наз. группой Диэдра D_n.

Изометрия $\equiv$ симметрия $\equiv$ движение



$\circlearrowright \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$|D_3| = 6$

$D_3 \cong S_3$

прав. треугольник

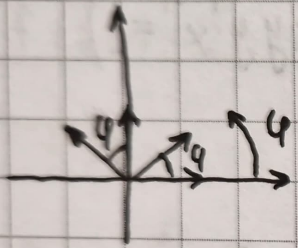
$\boxed{|D_n| = 2n}$ – n поворотов на $\frac{2\pi}{n}k$ и n отражений

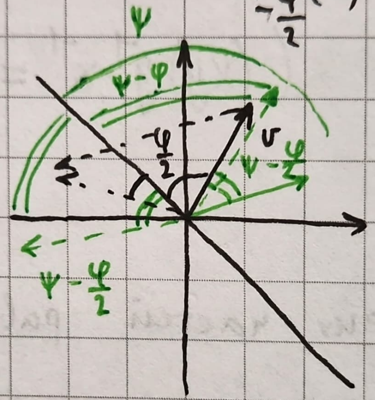
Обозначим через $\boxed{R_\varphi}$ поворот плоскости на угол φ и

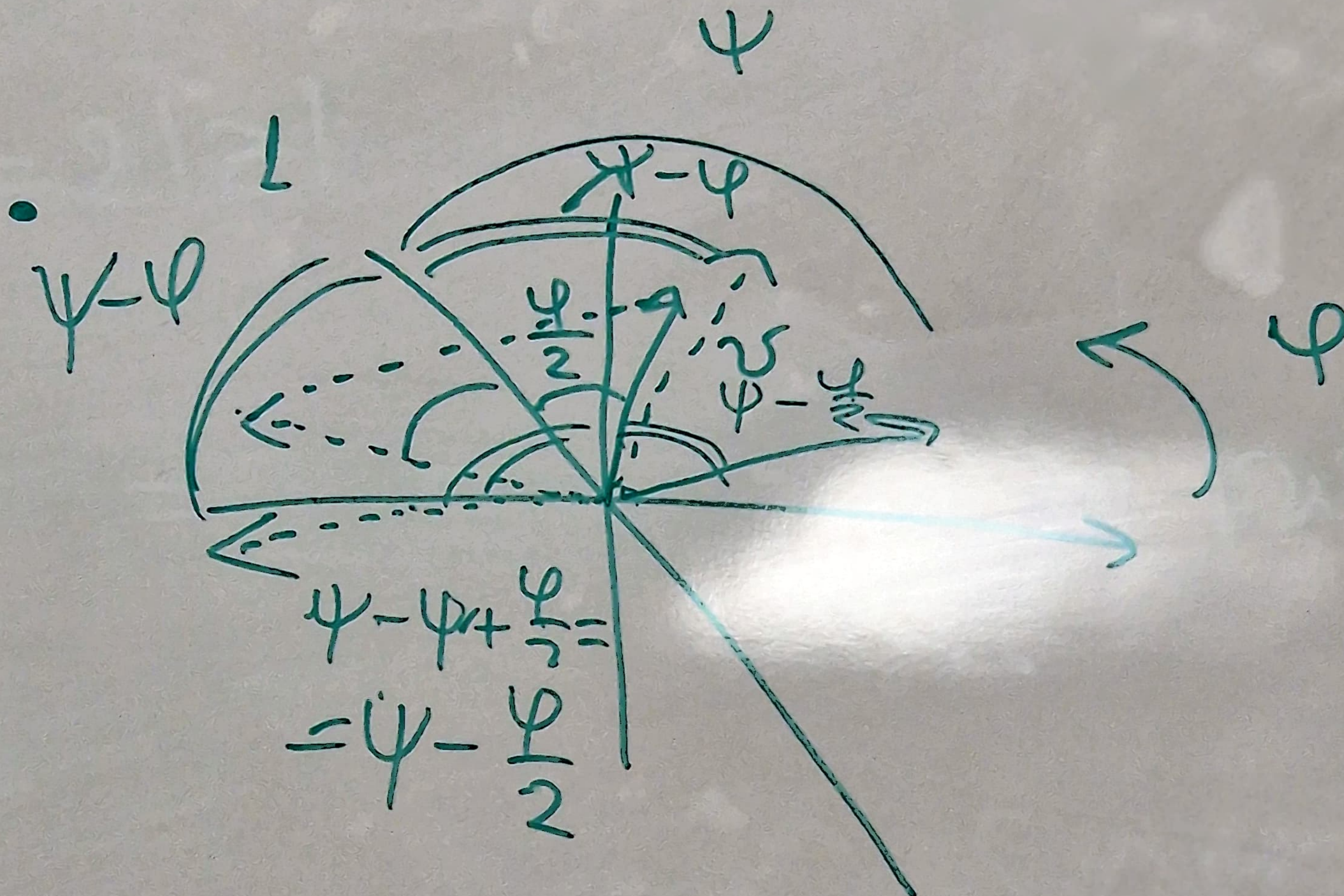
через $\boxed{T_L}$ – отражение плоскости относительно прямой L.

(это эл-ты группы движений плоскости).

③ Док-ть, что $T_L R_\varphi = T_{R_{-\frac{\varphi}{2}}(L)}$, $R_\varphi T_L = T_{R_{\frac{\varphi}{2}}(L)}$







$$\psi - \varphi + \frac{\varphi}{2} = \; = \psi - \frac{\varphi}{2}$$