Лекция 16, 19.01.24

Формулы Тейлора

Теорема: Если $f(x)$ n раз дифф. в x_0, то

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \bar{o}\left((x-x_0)^n\right),$$ ← остат. член в форме Пеано

где $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Теорема (ф. Т. с остат. членом в ф. Лагранжа):

Если $f(x)$ $(n+1)$ раз дифф. на $(a;b)$ $x, x_0 \in (a;b)$, то

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \qquad c \in (x;x_0) \cup (x_0;x)$$

Док-во: $\gamma(t) = f(x) - T_n(t,x) - \frac{(x-t)^{n+1}\cdot R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$, где

$$T_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(t)}{k!}(x-t)^k = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$\gamma(t)$ дифф. на $(a;b)$

$$\gamma(x_0) = f(x) - T_n(x_0;x) - \frac{\cancel{(x-x_0)^{n+1}}\cdot R_n(x)}{\cancel{(x-x_0)^{n+1}}} = 0$$

$$\gamma(x) = f(x) - \underbrace{T_n(x;x)}_{=f(x)} - \frac{(x-x)^{n+1} R_n(x)}{\cancel{(x-x_0)^{n+1}}} = 0$$

$\gamma(t)$ на $[x_0;x]$ удовлетворяет условию т. Ролля.

$$\gamma'(t) = 0 - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$(T_n(t,x))'_t = f'(t) - f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!} \cdot 2(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{(n+1)(x-c)^n R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ч.т.д.

Пример: $x_0 = 0$

$f(x) = e^x \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$

Док-во:

$|T_n(x) - e^x| = |R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ч.т.д.

Теорема: Если $f(x)$ и в x_0 n раз дифф.

$f^{(i)}(x_0) = 0 \qquad 1 \le i < n \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$

1) $n = 2k$ Если $f^{(2k)}(x_0) > 0$, то x_0 – т. min

$f^{(2k)}(x_0) < 0$, то x_0 – т. max

2) $n = 2k+1$ Если $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$, то x_0 – т. возрастания

$f^{(2k+1)}(x_0) < 0$, то x_0 – т. убывания

Опр: x_0 – т. возр., если $\exists \delta > 0$, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$

$x_0 > x \qquad f(x_0) > f(x)$

$x_0 < x \qquad f(x_0) < f(x)$

Док-во: $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \bar{o}((x-x_0)^n)$

$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1)\right)(x-x_0)^n \qquad x \to x_0$

1) $\exists \delta \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$:

$\underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1)\right)}_{>0}\underbrace{(x-x_0)^{2k}}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad f(x) - f(x_0) > 0$

$\Rightarrow x_0$ – т. min

2) $\underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1)\right)}_{>0 \text{ в } U_\delta(x_0)}(x-x_0)^{2k+1}$, $n = 2k+1$

$f(x) - f(x_0) > 0$ при $x > x_0$ на $\mathring{U}_\delta(x_0)$

$f(x) - f(x_0) < 0$ при $x < x_0$

ч.т.д.

Интегрирование функций

$f(x)$, опред. на $(a;b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Опр: Первообразная к $f(x)$ наз. такая $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$

Пример: Первообр. к $\frac{1}{1+x^2}$ будет $\operatorname{arctg} x + 1$.

Теорема: Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообр. к $f(x)$ на $(a;b)$, то

$F_1(x) - F_2(x) = const$

Док-во: $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

на $(a;b)$ $G'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ ч.т.д.

Пример: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

$x < 0 \quad (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

Верно ли, что первообр. $\frac{1}{x}$ на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ отлич. на const?

$F_1(x) = \ln(x)$

$$F_2(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ \ln(-x)+2, & x < 0 \end{cases}$$

$F_1(x) - F_2(x) \neq const \implies$ <u>Необходимо учитывать интервал!</u>

Опр: <u>Неопределённый интеграл</u> для $f(x)$ на $(a;b)$ наз множество первообразных $f(x)$.

Обознач: $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}_{C \in \mathbb{R}}$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\overbrace{A(x - x_0)}^{= df(x_0)}}_{A = f'(x_0)} + \bar{o}((x - x_0))$$

$[df(x_0)](\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$

$[df(x)](h) = f'(x) \cdot h \quad (*)$

$f(x) = x$ – возьмём конкретную функцию

$df(x)(h) = 1 \cdot h$

$dx(h) = 1 \cdot h$ – подставим в $(*)$

$[df(x)](h) = f'(x) \cdot dx(h)$

$df(x) = f'(x)\,dx$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Свойства неопр. интеграла

① $\int dF(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

② $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

③ Линейность

1) $\int f_1 + f_2 \, dx = \int f_1 dx + \int f_2 dx$

Доказательство: Пусть $F_1(x)$ - первообр. $f_1(x)$

$F_2(x)$ - первообр. $f_2(x)$

$$+\begin{cases} \int f_1(x) dx = F_1(x) + C_1 \\ \int f_2(x) dx = F_2(x) + C_2 \end{cases}$$

$F_1(x) + F_2(x) + C = \int f_1 + f_2 \, dx$ ч.т.д.