① Оп-р дифференцирование $A = \frac{d}{dx}$ на пр-ве $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$

Найти его м-цу в б-се $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n$

$A(x^k) = k x^{k-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & n \\ x^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}$$

② Как изменится м-ца оператора, если поменять i-й и j-й б-сные в-ры между собой?

$$C = \begin{array}{c} \\ \\ i\to \\ \\ j\to \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$A' = C^{-1}AC = CAC$ — i-е и j-е столбцы и строки меняются местами

$i \curvearrowright j$ строки

$i \curvearrowright j$ столбцы

Лин. от-ия $\mathcal{U} \to V$ образуют вект. пр-во отн-но поточечного сложения и умножения на скаляр:

$$(\varphi+\psi)(u) := \varphi(u)+\psi(u),$$

$$(\lambda\varphi)(u) := \lambda\cdot\varphi(u)$$

$\varphi, \psi : \mathcal{U} \to V$, $u \in \mathcal{U}$, $\lambda \in F$.

Если A, B - м-цы φ, ψ в паре б-сов (e, f), то м-цы $\varphi+\psi, \lambda\varphi$ в паре б-сов (e, f) равны $A+B, \lambda A$.

Пусть $\varphi : \mathcal{U} \to V$, $\psi : V \to W$.

От-ие $\psi\circ\varphi : \mathcal{U} \to W$ - линейно

$\psi\circ\varphi(u) := \psi(\varphi(u))$. (обозн.: $\psi\circ\varphi = \psi\cdot\varphi$).

Если A - м-ца φ в паре (e, f), B - м-ца ψ в паре (f, g), то м-ца $\psi\varphi$ в паре (e, g) равна BA.

(3) Пусть оп-р $\mathcal{A}$ в б-се $a_1=(1,2)$, $a_2=(2,3)$ имеет м-цу $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ [illegible] & 3\end{pmatrix}$, оп-р $\mathcal{B}$ в б-се $b_1=(3,1)$, $b_2=(4,2)$ имеет м-цу $\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$.

Найти м-цу $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ в б-се b_1, b_2

Пусть A' - м-ца $\mathcal{A}$ в б-се b_1, b_2. Тогда

$A' = C^{-1}AC$, где $C = C_{(a_1,a_2)\to(b_1,b_2)}$

$$(a_1,a_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow (e_1,e_2)=(a_1,a_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}$$

$$(b_1,b_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$(b_1,b_2)=(a_1,a_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}}_{C}$$

$$C=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 8\\ -5 & -7\end{pmatrix}$$

Считаем A', потом $A'+B$.

$C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$

Считаем A^{-1}, потом

$A^{-1}+B$.

(4) М-ца оп-ра $A = \frac{d}{dt}$ в

пр-ве ф-ий с б-сом $(\cos t, \sin t)$.

$A(\cos t) = -\sin t$, $A(\sin t) = \cos t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассм. лин. от-ие $\varphi: U \to V$.

Определим ядро и образ:

$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \in U \mid \varphi(u) = 0\} = \varphi^{-1}(0)$

$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(U)$

$\operatorname{Ker}\varphi \leq U$, $\operatorname{Im}\varphi \leq V$.

(5) $U \leq V \Rightarrow \exists$ оп-р

$A: V \to V$ т.ч. $\operatorname{Ker} A = U$.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – б-с V,

причём $e_1, \dots, e_k$ – б-с U.

Определим $A(e_i) = \begin{cases} 0, & i \leq k \\ e_i, & i > k \end{cases}$

$0 = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A(e_i)$

$\Leftrightarrow x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, т.е

в-р $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in U$.

Пусть лин от-ие $\varphi: U \to V$ задано м-цей A в паре б-сов (e, f). В-р $u \in U$ с к-ми $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ лежит в $\operatorname{Ker}\varphi \iff Au = 0 \iff Ax = 0$, т.е. б-с $\operatorname{Ker}\varphi$ (в к-ах e) – это ФСР ОСЛУ с м-цей A.

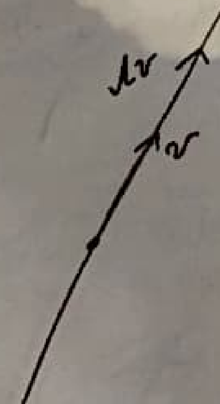
При этом $\operatorname{Im}\varphi$ (в к-ах f) порождён столбцами м-цы A.

В частн.,

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = m - \operatorname{rk}\varphi$

$\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\varphi$.

Рассм. оп-р A на n-мерном в-ом пр-ве V над полем F. <u>Ненулевой</u> в-р $v \in V$ наз. <u>собственным в-ром</u> для A, если $\exists\, \lambda \in F$, что $Av = \lambda v$. Скаляр λ при этом наз. <u>собственным значением</u>.



Заметим, что ($\mathcal{E}$ - тождественный оп-р): $\mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v - \lambda v = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = 0$.

Т.о., λ явл-ся с/з для $\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow$ оп-р $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ вырожден.

<u>Характеристическим многочленом</u>

оп-ра $\mathcal{A}$ наз. мн-н

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - A) = (-1)^n \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$$

$$\begin{vmatrix} t-a_{11} & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ji} & & t-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\chi_{\mathcal{A}}$ - приведённый мн-н

степени n, т.е.

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \ldots$

Итак, корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \equiv$

$\equiv$ с/з оп-ра $\mathcal{A}$.

Пусть $\lambda \in F$. Определим

<u>собственное подпространство</u>:

$V_\lambda(\mathcal{A}) = \{v \in V \mid \mathcal{A}v = \lambda v\} =$

$= \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) =$

$= \{$мн-во с/в с с/з $\lambda\} \cup \{0\}$

Пусть оп-р $\mathcal{A}$ задан своей м-цей

A в нек. б-се. Опишем алгоритм

поиска всех с/з и с/в оп-ра $\mathcal{A}$

1) Вычисляем $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и ищем

его корни - это и будут с/з.

2) Для каждого найденного

с/з λ находим б-с

подпр-ва $V_\lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$,

т.е. ФСР ОСЛУ с м-цей

$A - \lambda E$. Тогда мн-во с/в

с с/з λ равно $V_\lambda(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$.

Замеч. С/в и С/з зависят от поля, над к-ым рассматривается л.-оп.

Пр-р поворота пл-сти не оставляет

Пример

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ни одну прямую на месте (при $\alpha \neq 0, \pi$) ⇒ нет С/в ⇒ нет С/з.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & t-\cos\alpha \end{vmatrix} = t^2 - 2\cos\alpha\, t + 1$$

$$D = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha < 0 \Rightarrow$$

⇒ нет С/З. Над $\mathbb{C}$:

$$t_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm 2i\sin\alpha}{2} = e^{\pm i\alpha} \Rightarrow$$

⇒ С/З $\lambda_1 = e^{i\alpha}$, $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$

$\lambda = e^{i\alpha}$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \cos\alpha - e^{i\alpha} & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - e^{i\alpha} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow$ б-с $V_\lambda(A)$: $(i, 1)$

$\lambda = e^{-i\alpha}$:

$$A - \lambda E \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha - e^{-i\alpha} & -\sin\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i\sin\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow$

⇒ б-с $V_\lambda(A)$: $(-i, 1)$

Лайфхак: 1) A размера $2\times 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = t^2 - \operatorname{tr} A\, t + \det A$$

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = t^3 - \operatorname{tr} A\, t^2 + a t - \det A,$$

где $a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

⑥ С/З и С/В оп-ра с м-цей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = t^3 - 6t^2 + (4+8+0)t - 8 =$$

$$= t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\lambda = 2$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Б-с $V_2(\lambda)$: $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$

Все с/в с с/з 2 имеют вид

$x(1,2,0) + y(0,0,1)$, где

$(x,y) \neq (0,0)$.