Семинар 13, 07.12.23

① $[[a,b],[c,d]] = c([a,b],d) - d([a,b],c)$

$[a,[b,c]] = b(a,c) - c(a,b)$

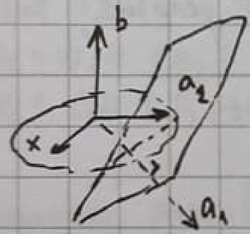
⓪ Решить систему

$(a_1, x) = \alpha \qquad [a_2, x] = b \quad (*) \qquad a_1, a_2, x, b \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x - ?$

1) Доказать, что условие $(a_2, b) = 0$ необходимо для того, чтобы $(*)$ имела решение

$b \perp a_2, x \Rightarrow (a_2, b) = 0$

2) Найти решение, если $(a_1, a_2) \neq 0$



$x = x_1 a_2 + x_2 [a_1, b]$

неколл-ны, т.к. $a_1 \perp a_2$

$\alpha = (a_1, x) = (a_1, x_1 a_2 + x_2 [a_1, b]) = x_1 (a_1, a_2) + x_2 \underbrace{(a_1, [a_1, b])}_{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{\alpha}{(a_1, a_2)}$

$b = [a_2, x_1 a_2 + x_2 [a_1, b]] = x_1 \underbrace{[a_2, a_2]}_{0} + x_2 [a_2, [a_1, b]] =$

$= x_2 (\underbrace{a_2 (a_2, b)}_{0} - b(a_2, a_1)) = -x_2 (a_2, a_1) b \Rightarrow$

$\Rightarrow -x_2 (a_2, a_1) = 1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{-1}{(a_2, a_1)}$

Итого, $x = \dfrac{1}{(a_1, a_2)} (\alpha a_2 - [a_1, b])$

3) Пусть $a_1, a_2 \neq 0$ и $(a_1, a_2) = 0$. Найти решение

a_2, $[a_1, b]$ уже не базис плоскости $\{y \mid (b, y) = 0\}$, т.к.

$[a_2, b] = t a_2$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$

Новый базис: $a_2, [a_2, b]$

$x = x_1 a_2 + x_2 [a_2, b]$

$\alpha = (a_1, x) = x_2 (a_1, [a_2, b]) = -x_2 (a_1, [b, a_2]) = -x_2 (\underbrace{[a_1, b]}_{t a_2}, a_2) =$

$= -x_2 t (a_2, a_2) \Rightarrow x_2 = \frac{-\alpha}{t(a_2, a_2)}$

$b = [a_2, x] = x_2 [a_2, [a_2, b]] = x_2 (a_2 \underbrace{(a_2, b)}_{0} - b(a_2, a_2)) =$

$= -x_2 (a_2, a_2) b \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{(a_2, a_2)}$

В частности, $\frac{1}{(a_2, a_2)} = \frac{\alpha}{t(a_2, a_2)} \Rightarrow \alpha = t$ - доп. условие, которое нужно потребовать, чтобы (*) имела решение.

Итого, $x = x_1 a_2 - \frac{1}{(a_2, a_2)} [a_2, b] \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$

① Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(2, 6, -3)$ параллельно плоскостям координат.

плоскость	нормаль	$Ax + By + Cz + D = 0$
Oxy	$(0, 0, 1)$	$z + 3 = 0$
Oxz	$(0, 1, 0)$	$y - 6 = 0$
Oyz	$(1, 0, 0)$	$x - 2 = 0$

② Взаимное расположение плоскостей

$3x - 2y - 3z + 5 = 0, \quad 9x - 6y - 9z - 5 = 0$

$(3, -2, -3) = \frac{1}{3}(9, -6, -9) \Rightarrow$ параллельны.

③ Найти условия, эквивалентные тому, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$

1) пересекала ось Oz

$\Leftrightarrow$ уравнение $Cz+D=0$ имеет $\exists!$ решение $\Leftrightarrow C\neq 0$

2) параллельна оси Oz:

$\Leftrightarrow (0,0,1)$ лежит в плоскости $\Leftrightarrow C=0$

3) содержала ось Oz:

$\Leftrightarrow C=0$ and $D=0$

④ Даны 2 плоскости

$$\begin{cases} x=x_1+a_1u+a_2v \\ y=y_1+b_1u+b_2v \\ z=z_1+c_1u+c_2v \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x_2+a_3u+a_4v \\ y=y_2+b_3u+b_4v \\ z=z_2+c_3u+c_4v \end{cases}$$

С помощью рангов матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}A, \mathrm{rk}B \leq 3$
$\mathrm{rk}A \geq 2$
$\mathrm{rk}A \leq \mathrm{rk}B \leq 3$

Выразить условия, чтобы эти плоскости

1) пересекались
$\mathrm{rk}A=3 \Rightarrow \mathrm{rk}B=3$

2) параллельны:
$\mathrm{rk}A=2$ and $\mathrm{rk}B=3$

3) совпадают:
$\mathrm{rk}A=2$ and $\mathrm{rk}B=2$

⑤ Даны 3 плоскости $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1, 2, 3$

матрицы:

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

В терминах G, F выразить условия

1) плоскости имеют $\exists!$ точку пересечения

$\mathrm{rk}\, G = 3$, $\mathrm{rk}\, F = \mathrm{rk}\, G = 3$

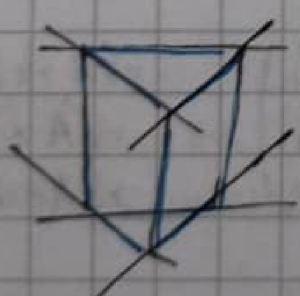
2) плоскости попарно различные и имеют общую прямую

$\mathrm{rk}\, G' = 2$ $\forall$ подматрицы

G' в G размера 2×3

$\mathrm{rk}\, G = 2$, $\mathrm{rk}\, F = \mathrm{rk}\, G = 2$

3) образовывали призму



$\mathrm{rk}\, G' = 2$ $\forall$ подматрицы

G' в G размера 2×3

$\mathrm{rk}\, G = 2$, $\mathrm{rk}\, F = 3$