ДЗ к семинару 7

Научимся разлагать произвольную матрицу A размера $m \times n$ в произведение нижнетреугольной матрицы L размера $m \times m$ и верхнетреугольной матрицы U размера $m \times n$: $A = LU$. Это называется *LU-разложением.*

С помощью элементарных преобразований только третьего типа и только сверху вниз, приводим матрицу A к ступенчатому виду. Так можно сделать не всегда: не для всех матриц существует LU-разложение $\left(\text{нельзя, например, разложить } 2 \times 2 \text{ матрицу } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Получаем равенство

$$T_k \dots T_1 A = U,$$

где $T_1, \dots, T_k$ – нижнетреугольные матрицы преобразований третьего типа, а U – верхнетреугольная матрица. Домножаем обе части равенства на

$$(T_k \dots T_1)^{-1} = T_1^{-1} \dots T_k^{-1} = L$$

и получаем $A = LU$.

На самом деле L вычислять легко: нужно записывать в соответствующие ячейки нижнетреугольной матрицы с единицами на диагонали коэффициенты, противоположные тем, с которыми производились элементарные преобразования. Точнее, если в какой-то момент мы, приводя A к ступенчатому виду, к i-ой строке прибавили j-ую строку, умноженную на λ, то на месте (i, j) в матрице L будет стоять $-\lambda$.

Для примера вычислим LU-разложение матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{-4}{\overset{(2,1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{5}{\overset{(3,1)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \underset{\frac{6}{5}}{\overset{(3,2)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}.$$

Научимся разлагать произвольную матрицу A размера $m \times n$ ранга r в произведение матриц B и C размера $m \times r$ и $r \times n$ соответственно. Это называется *скелетным разложением* или *ранговой факторизацией*. В отличие от LU-разложения, скелетное разложение существует всегда.

Обычным методом Гаусса (любыми преобразованиями строк) приведём матрицу A к улучшенному ступенчатому виду A'. Тогда в качестве матрицы C можно взять ненулевые строки матрицы A', а в качестве матрицы B можно взять матрицу, составленную из столбцов исходной матрицы A, номера которых совпадают с номерами столбцов лидеров строк в A'.

Этот алгоритм работает примерно по тем же причинам, что и алгоритм LU-разложения. Мы тоже получаем равенство вида $TA = A'$, а затем $A = T^{-1}A'$. Затем мы замечаем, что нулевые строки A' не дают никакого вклада в умножение, поэтому мы их удаляем. Для того, чтобы размерности сошлись, мы также удаляем столбцы T^{-1}, в таком же количестве. Получаем $A = BC$, и теперь B можно найти из этого уравнения (так как мы знаем матрицы A и C), рассматривая столбцы с лидерами строк в C.

Для примера вычислим скелетное разложение матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 13/7 & -6/7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & 13/7 & -6/7 \end{pmatrix}.$$

Номера столбцов с лидерами строк равны 1 и 2, поэтому

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & 13/7 & -6/7 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных значениях λ?

Задача 2. Вычислить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

при помощи элементарных преобразований.

Задача 3. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & (3,\ 2,\ 5), \\ a_2 & = & (2,\ 4,\ 7), \\ a_3 & = & (5,\ 6,\ \lambda), \\ b & = & (1,\ 3,\ 5). \end{array}$$

Задача 4. Найти такое общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases},$$

что каждое неизвестное представлено однородным линейным выражением от свободных неизвестных с целыми коэффициентами.

Задача 5. Вычислить LU-разложение матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Вычислить скелетное разложение матрицы

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$