Лекция 19, 09.02.24

Интеграл Римана

$$\int_a^b f(x)\,dx = I$$

Опр: <u>опр. инт.</u> $f(x)$ на $[a,b]$ наз. $I \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall$ разб. $\tau = \{[x_{i-1}; x_i]\}_{1 \le i \le n}$

$d(\tau) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i < \delta \qquad x_0 = a, \; x_n = b$

$\forall$ разм. $\{\xi_i\}_{i=1}^{n} : \xi_i \in [x_{i-1}; x_i] \quad |\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon \quad \left(\sigma_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i\right)$

Теорема (Необх. условие интегр.):

Если $f(x)$ интегр. на $[a;b]$, то $f(x)$ огр. на $[a;b]$.

Суммы Дарбу

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$
(верхняя)

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$
(нижняя)

Опр: τ' – измельчение τ, если все точки x_i из $\tau \in \tau'$ $\quad \tau' \prec \tau$

$$s_\tau \le s_{\tau'} \le S_{\tau'} \le S_\tau$$

$$s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$$

Опр: Верхний интеграл Дарбу $I^* = \inf_\tau S_\tau$

Нижний интеграл Дарбу $I_* = \sup_\tau s_\tau$

$$I_* \le I^*$$

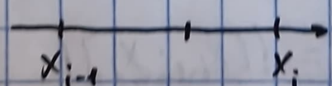
Теор: Огр. $f(x)$ интегрир. по Риману на $[a;b]$ $\Leftrightarrow$ $I^* = I_*$

Док-во: $\Rightarrow$ (было)

"$\Leftarrow$" 1) $\tau' \prec \tau$ количество дополн. точек $= p$ $\quad d(\tau) < \delta$

Утв: $S_\tau - S_{\tau'} \le (\underset{\sup_{[a;b]} f(x)}{M} - \underset{\inf_{[a;b]} f(x)}{m}) \cdot p \cdot \delta$

Док-во: $p = 1$



$$S_\tau - S_{\tau'} = M_i \underbrace{\Delta x_i}_{\Delta x_i' + \Delta x_{i+1}'} - (M_i' \Delta x_i' + M_{i+1}' \Delta x_{i+1}') =$$

$$= (M_i - M_i')\Delta x_i' + (M_i - M_{i+1}')\Delta x_{i+1}' \le$$

$\leq (M-m)\Delta x_i + (M-m)\Delta x'_{i+1} = (M-m)\Delta x_i < (M-m)\delta$

Для $p>1$ итерационно.

Лемма Дарбу

$I^* = \lim\limits_{d\to 0} S_\tau \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \tau \ d(\tau)<\delta \ |S_\tau - I^*| < \varepsilon$.

Док-во: 1) $M=m$, то очев.

2) $M>m$

$\exists S^*_{\tau^*} = S^*: \quad S^* - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$

Обозначим p – число точек разбиения τ^*

Возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)p}$

Возьмём $\forall S_\tau : d(\tau) < \delta$

Добавим в τ точки τ^*. Получим $\tau' \propto^{\tau}_{\tau^*}$; $S' = S_{\tau'}$

$S - S' \leq (M-m)p\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$I^* \leq S' \leq S^*$

$S' - I^* < \varepsilon/2 \quad \oplus \quad S - S' \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$S - I^* < \varepsilon$$

Док-во теоремы:

"$\Leftarrow$" Есть $I^* = I_* = I$

Нужно проверить: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \tau : d(\tau)<\delta \ \forall \{\xi_i\}$

$|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$

$$I-\varepsilon < \sigma_\tau(t) < I+\varepsilon$$

$$I-\varepsilon = I_* - \varepsilon \underset{d(\tau)<\delta_2}{\leq} S_\tau \leq \sigma_\tau(t) \leq S_\tau \underset{d(\tau)<\delta_1}{\leq} I^* + \varepsilon = I+\varepsilon$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

Теорема: Если $f(x)$ непрер. на $[a;b]$, то $f(x)$ интегр. на $[a;b]$

Опр: $y=f(x)$ наз. равномерно непрер. на E, если

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x_1, x_2 \in E: |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

Опр: $f(x)$ непрер. в т. x_0

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0: \forall x \in U_\delta(x_0) \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Пример: $f(x)=\frac{1}{x}$ на $E=(0;1]$.

$x_n = \frac{1}{n}$

$x_n - x_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f(x_n)-f(x_{n+1}) = n-(n+1) = -1$

Теорема: Если $f(x)$ непрер. на $[a;b]$, то $f(x)$ равн. непр. на $[a;b]$

Док-во: $\boxed{\neg}$ $\exists \varepsilon_0>0 \quad \forall \delta=\frac{1}{n}: \exists x_n' \text{ и } x_n'' \quad |f(x_n')-f(x_n'')| > \varepsilon_0$

$\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ $\qquad |x_n'-x_n''| < \frac{1}{n}$

т.к. x_n' огр. $\exists x_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in [a;b] \Rightarrow f(x)$ непр. в т. x

$\exists x_n'' \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

$f(x_{n_k}') \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$

$f(x_{n_k}'') \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$

Док-во: $0 \le I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{f(\xi_i) - f(\eta_i)}_{< \varepsilon}) \Delta x_i \le \varepsilon (b-a) \Rightarrow I^* = I_*$$

$|\xi_i - \eta_i| \le d$

Теорема: Если $f(x)$ определена на $[a;b]$ и монотонна, то она интегр. на $[a;b]$.

Док-во:

$$I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i$$

Возьмём равномерное разбиение $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$

$= (f(b) - f(a))(b-a) \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow I^* = I_*$

Теорема (Критерий Лебега интегр. по Риману):

$f(x)$ интегр. по Риману на $[a;b] \Leftrightarrow$ мера точек разрыва $= 0$.