Лекция 22, 01.03.24

Опр: Несобственный интеграл сходящийся, но не сходящийся абсолютно наз. сходящимся условно.

Признак Дирихле

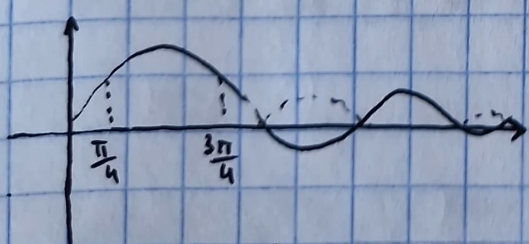
$f(x)$ и $g(x)$ на $[a;b)$

$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится, если

1. $f(x)$ непрерывна и имеет огр. первообр.
2. $g(x)$ непрерывна, монотонна, $\searrow 0$ при $x \to b^-$

Пример: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\quad f(x)=\sin x \quad g(x)=x$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{\pi}{4}+\pi k}^{\frac{3\pi}{4}+\pi k} \frac{1/2}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{3n} \int_{\frac{\pi}{4}+\pi k} \frac{1/2}{\frac{3\pi}{4}+\pi k}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(x+1)} \to +\infty$$

Признак Абеля: $f(x)$, $g(x)$ на $[a;b)$

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

1. $f(x)$ непр. и $\int_a^b f(x)\,dx$ сход.

2. $g(x)$ непр., монот. и огр.

Тогда $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ сход.

Теорема: (Частный случай признака Дирихле):

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx \qquad a>0$$

Если $f(x)$ имеет огр. первообр., то при $\alpha>0$ сход.

Док-во: $\int_a^p \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx = \int_a^p \frac{dF(x)}{x^\alpha} = \underbrace{F(x)\cdot x^{-\alpha}\Big|_a^p}_{\substack{\text{сход.} \\ \text{при } p\to+\infty}} + \alpha\int_a^p \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx$

$$\alpha\int_a^p \left|\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx \leq C\cdot\alpha\int_a^p \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx = C\cdot\frac{1}{x^\alpha}\Big|_a^p \xrightarrow[p\to\infty]{} \text{сход.} \qquad \text{ч.т.д.}$$

Числовые ряды

$S_n = \sum_{k=1}^n a_n$ $\qquad \{a_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность

$\uparrow$

частичные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Если $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$$a_n = b_n - b_{n-1};\ a_1 = b_1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_n = b_n - b_{n-1}$$

Пример: $|q|<1$

$a_k = q^k$

$$S_n = q\cdot\frac{1-\overset{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}{q^n}}{1-q}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{q}{1-q}$$

$$S_n = q+q^2+\ldots+q^n$$

Признаки сход. числ. рядов

1) $a_n \geqslant 0$

1.1. Признак сравнения

Если $a_n \leqslant c_n$ $(\forall n > N_0)$, то

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

1.2. Признак сравнения в предельной форме

$a_n \sim c_n$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=1\right)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится

1.3. Интегральный признак сходимости

$f(x) > 0$ на $[1;+\infty)$, монотонно сходится к 0.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сход. $\Leftrightarrow$ $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$

Вывод: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ сход $\alpha>1$, расход $\alpha\leqslant 1$

Док-во: $f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$

$$S_{n+1} - f(1) \leqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n$$ ч.т.д.

Теорема (Необх. усл. сходящ. ряда):

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ сход.} \Rightarrow a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Док-во: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$$a_n = \underset{\downarrow \atop b}{S_n} - \underset{\downarrow \atop b}{S_{n-1}} \to b - b = 0$$

2) Знакопеременные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k \quad , \quad a_k \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \qquad 0 < \alpha \leq 1 \text{ — сход. условно}$$