Лекция 12, 24.11.23

Теорема: Функция, неприводимая на $[a;b]$, обратима $\Leftrightarrow$ монотонна.

Теорема: Если $f(x)$ на $[a;b]$

1) опред.
2) строго монотонна
3) непрерывна, тогда

$f^{-1}(x)$

1) опред. на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$
2) так же монотонна
3) непрерывна.

Док-во: 1) Уже док.

2) Пусть $f(x)\uparrow$

ПП $f^{-1}(y)$ не возр. на $[f(a);f(b)]$

$$f(a)\leq y_1<y_2\leq f(b): \quad f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)$$

$$a\leq x_1 \geq x_2\leq b$$

$\Downarrow$ т.к. $f(x)\uparrow$

$$f(x_1)\geq f(x_2)$$

$$y_1\geq y_2 \quad W$$

3) $y_0\in(f(a);f(b))$

$$f^{-1}(y_0)=x_0$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta=\delta(\varepsilon): \quad |y-y_0|<\delta \quad |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$$

Без ограничения общности будем считать $U_\varepsilon(x_0)\subset(a;b)$

$$f(x_0-\varepsilon)=y_1 \qquad f(x_0+\varepsilon)=y_2$$

$y_1 < y_0 < y_2$

Возьмём δ: $U_\delta(y_0) \subset (y_1; y_2)$

Пусть $y \in U_\delta(y_0)$

$y_1 < y_0 < y_2 \Rightarrow x - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon$

$f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(x_0)$

Следствие: $f(x)$ опр., монотонна и непрер. на $(a; b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, то $f^{-1}(y)$ определена на интервале с концами $f(a)$ и $f(b)$, монотонна так же и непрерывна.

Док-во: $\forall c, d \in (a; b)$ на $[c; d]$ выполн. $c_n \downarrow a$ $d_n \uparrow b$.

$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$

Опр: неприв. и монотонна $\mathbb{R}$ либо $[0; +\infty)$.

$\Rightarrow$ обратная функция $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ неприв. и возр.

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[5]{2x+7} = \sqrt[5]{7}$

Теорема: $y = a^x$, $a > 0$

1) опред. на $\mathbb{R}$
2) $a > 1$ возр.
   $0 < a < 1$ убыв.
3) непрер. на $\mathbb{R}$
4) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $x, y \in \mathbb{R}$
5) $(a^x)^y = a^{xy}$, $x, y \in \mathbb{R}$

Утв: $E_f = (0; +\infty)$

Док-во: $a > 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ ⊕ непр.

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ ⊕ возр.

Опр: Функция, обратная к $y = a^x$, наз. $y = \log_a x$.

Теорема: $y = \log_a x$

1) $D_f = (0; +\infty)$

$E_f = \mathbb{R}$

2) $a > 1$ $\nearrow$

$0 < a < 1$ $\searrow$

3) непр. на $(0; +\infty)$

4) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x y)$

$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$

1 Степенная функция

$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

$D_f = (0; +\infty)$

$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

$\ln x$ – возр. на $(0; +\infty)$
непр. на $(0; +\infty)$

$y = \alpha \cdot \ln x$ $\alpha > 0$ возр. ⊕ непр.
$\alpha < 0$ убыв.

$y = e^{\alpha \ln x}$ $\alpha > 0$ возр ⊕ непр.
$\alpha < 0$ убыв.

2 2-й замечательный предел

$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} e} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln e = 1$$

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{t}{\ln(t+1)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

$e^x - 1 = t$

$x \to 0$, то $t \to 0$

$e^x = t+1$

$x = \ln(t+1)$

Арифметика предела последовательности

5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

$$\left(1-\frac{1}{n^2-n+7}\right)^{2n^2+n-1} = \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{-(n^2-n+7)}\right)^{-(n^2-2n+7)}}_{\to e}\Bigg)^{\overbrace{\frac{2n^2+h-1}{-(n^2-2n+7)}}^{\to -2}} \to e^{-2}$$

Док-во: $a(x)$ – кусочн. лин. функция и $a(n) = a_n$

$D_{a(x)} = [1; +\infty)$ $\quad b(x)$ аналогично

$$\lim_{x\to+\infty} a(x)^{b(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\underbrace{b(x)}_{\to b}\cdot\underbrace{\ln(a(x))}_{\to \ln a}} = e^{b\cdot\ln a} = a^b$$

Производные

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

Примеры:

1) $\sin x$, $\quad \sin' x_0 = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\overbrace{\frac{x+x_0}{2}}^{\to x_0}}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos x_0$

2) a^x

$$(a^x)' = \lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} =$$

$$= a^{x_0} \cdot \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{e^{t\ln a} - 1}{t\ln a}}_{\to 1} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^{x_0}$$

3) $y = x^n$

$$(x_0^n)' = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^{n-1} + \overbrace{x^{n-2}\cdot x_0}^{\to x_0^{n-1}} + \ldots + \overbrace{x_0^{n-1}}^{\to x^{n-1}})}{\cancel{x - x_0}} = n \cdot x^{n-1}$$

Правила подсчёта производных

Если $\exists f'(x)$, $\exists g'(x)$

1) $(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x)$

2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$

Док-во: $\boxed{3}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) g(x_0) - g(x) f(x_0)}{(x - x_0)\, \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} \cdot f(x_0)}$$

$$\frac{(f(x) - f(x_0)) g(x_0) - (g(x) - g(x_0)) f(x)}{x - x_0}$$

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot g(x_0) - \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x)}_{\to g'(x_0)}$$

Теорема: Если $\exists f'(x)$, то $f(x)$ непр. в x_0

Док-во: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \bar{o}(1)$ $\quad x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\bar{o}(x - x_0)}_{\to 0}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$