Теорема о зажатой последовательности. Теорема Вейерштрасса.

1. Найти пределы последовательностей, используя теорему о зажатой последовательности

$$(a)\ a_n = \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n. \qquad (b)\ a_n = \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$$

2. Привести пример расходящейся последовательности, имеющей только один частичный предел.

3. Для последовательности
$$a_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3}$$
найти множество частичных пределов, а так же
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad \sup\{a_n\}, \quad \inf\{a_n\}$$

4. Доказать, что последовательность имеет предел и найти его, если
$$x_1 = 13, \quad x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}.$$

Домашнее задание

1. Найти пределы последовательностей, используя теорему о зажатой последовательности

$$(a)\ a_n = \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n, \qquad (b) = \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$$

$$(c)\ a_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}, \qquad (d)\ a_n = \sqrt[n]{3n-2}$$

2. Для последовательности

$$a_n = \left(\cos(\frac{\pi n}{2})\right)^{n+1}$$

найти множество частичных пределов, а так же

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad \sup\{a_n\}, \quad \inf\{a_n\}$$

3. Доказать, что последовательность имеет предел и найти его, если

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{5x_n}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти пределы последовательностей, используя теорему о зажатой последовательности

$$(a)\ a_n = \sqrt[n]{\frac{2n+5}{n-0,5}}, \quad (b)\ \sqrt[n]{n^3+3n}$$

$$(c)\ a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}, \quad (d)\ a_n = \sqrt[n]{3^n + n\cdot 2^n}$$

$$(e)\ a_n = \sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}$$

2. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{3k}\}$ сходятся. Доказать, что сходится и сама последовательность.

3. Для последовательностей

$$a_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n}+2}, \qquad a_n = \frac{(1-(-1)^n)\cdot 2^n+1}{2^n+3}$$

найти множество частичных пределов, а так же

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad \sup\{a_n\}, \quad \inf\{a_n\}$$

4. Доказать, что последовательность имеет предел и найти его, если $x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2$ для трех случаев

$$(a)\ x_1 = \frac{1}{6}, \qquad (b)\ x_1 = \frac{1}{2}, \qquad (c)\ x_1 = \frac{7}{6};$$