Семинар 18, 01.02.24

③ $G = \langle g \rangle_n$, $\operatorname{ord}(g^k) = \frac{n}{(n,k)}$ $\operatorname{ord}(g^k) = \underset{r\,:\,(k\cdot l)\,\vdots\, n}{\min \text{ число}}$

④ S_3 не порождается одним эл-том, т.к. $\neg\exists\, x \in S_3 : \operatorname{ord}(x) = |S_3| = 6$

$S_3 = \langle (1\,2\,3), (1\,2) \rangle$

⑤ $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{1, x, y, xy\}$

$x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1$

$x(xy) = y, \quad y(xy) = x$

$\Downarrow$

$\varphi: S_3 \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

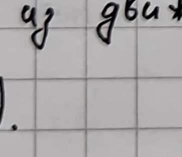
$\sigma \longmapsto$ перестановка σ на мн-ве $\{x, y, xy\}$

Если $X \subseteq V$ – нек. подмн-во евклидова пространства V, то под $\operatorname{Sym}(X)$ будем понимать такие биекции $X \to X$, которые получаются из движени. $g \in O(X)$ таких, что $g(X) = X$ (сохраняющие X).

Опр: Группа $\operatorname{Sym}(X)$ наз. группой движений X.

① Привести примеры плоских фигур, группы движ. которых изоморфны:

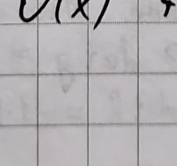
1) $\mathbb{Z}_2$:



отрезок

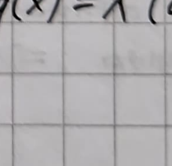
$\operatorname{Sym}(X) = \langle T_{Oy} \rangle = \{1, T_{Oy}, T_{Oy}^2\}$

2) S_3:



прав. Δ с центром в O.

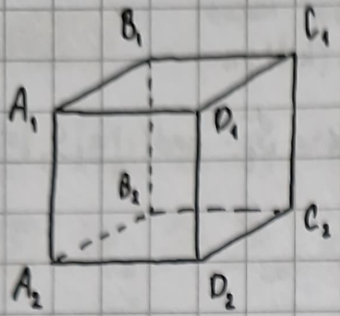
3) $\mathbb{Z}_3$

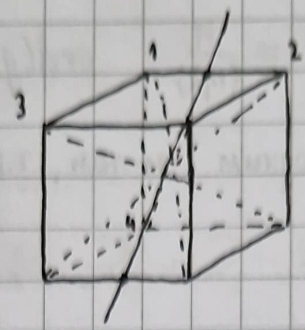


$\operatorname{Sym}(X) = \langle R_{\frac{2\pi}{3}} \rangle = \{1, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$

HSE

② Док-ть, что группа собственных движений куба изом-на S_4.





$\varphi: Sym(X) \to S_4$

$g \mapsto$ перестановка диагоналей

- φ – сюръекция. Т.к. S_4 порождается транспозициями, то достаточно док-ть, что любая транспозиция получается как $\varphi(g)$ для нек. g. Например, $(1,2)$: ось, проходящая через середины A_2D_2 и B_1C_1. (остальные симметричны)

- φ – инъекция. Пусть $g \in Ker\,\varphi \Rightarrow g$ оставляет все диагонали на месте, т.е. может поменять их концы. Если все концы остаются на месте, то $g = id$.

Пусть, например, g меняет местами концы 1-й диагонали. $\Rightarrow$ меняет концы у 2-й диагонали $\Rightarrow$ на самом деле у всех. Но тогда g – это поворот на π вокруг оси, проходящей через середины верхней и нижней граней, и отражение относительно плоскости, параллельной этим граням $\Rightarrow g = T \cdot R \Rightarrow \det g = -1$.

$(\det g = \det T \cdot \det R = -1 \cdot 1 = -1)$

$\Downarrow$

$Ker\,\varphi = \{1\} \Rightarrow \varphi$ инъект.

Итого, φ биективно

④ Пусть $\varphi: G \to H$ гомоморфизм групп и $g \in G$. Док-ть, что:

1) $ord(\varphi(g)) \,\vdots\, ord(g)$

$g^{ord(g)} = 1_{G_\varphi} \xRightarrow{\text{применяю}} \varphi(g^{ord(g)}) = \varphi(1_G)$

$\varphi(g^{ord(g)}) = 1_H$

$(\varphi(x^n) = \varphi(x)^n)$

$ord(g) \mid ord(\varphi(g))$

2) если φ – изоморфизм, то $ord(\varphi(g)) = ord(g)$

при $k < ord(g)$ $\quad g^k \neq 1_G \overset{\varphi}{\Rightarrow} \underset{\underset{\varphi(g)^k}{\parallel}}{\varphi(g^k)} \neq \underset{\underset{1_H}{\parallel}}{\varphi(1_G)} \Rightarrow ord(\varphi(g)) = ord(g)$

③ Док-ть, что любая группа G порядка 6 либо абелева, либо изоморфна S_3.

□ Пусть G не абелева.

- В G нет элементов порядка 6 (иначе циклическая)
- В G неединичные элементы имеют порядки 2 и 3 $(ord(x) \mid |G|)$
- $\exists x \in G : ord(x) = 3$

(дома док-ть, что из $(\forall z \in G \setminus \{1\} \ ord(z) = 2)$ след. (G абелева))

- Возьмём $y \notin \langle x \rangle$. Тогда $G = \langle x \rangle \sqcup y\langle x \rangle$.

$(|\langle x \rangle| = |y\langle x \rangle| = 3$ они не пересекаются $\Rightarrow$ больше нет ничего, т.к. $|G| = 6)$.

Т.е. $G = \{1, x, x^2, y, yx, yx^2\}$

Мы хотим $\varphi : G \to S_3$
$$x \mapsto (1\,2\,3)$$
$$y \mapsto (1\,2)$$

$ord(y) = 2$, т.к. y^2 – это один из элементов G, и если $ord(y) = 3$, то $y^2 \neq 1$ и

- $y^2 = x \Rightarrow y^3 = 1 = yx$ ↯ $\qquad$ • $y^2 = yx \Rightarrow y = x$ ↯
- $y^2 = x^2 \Rightarrow y^3 = 1 = yx^2$ ↯ $\qquad$ • $y^2 = yx^2 \Rightarrow y = x^2$ ↯
- $y^2 = y \Rightarrow y = 1$ ↯

Нам остаётся док-ть, что $xy = yx^2$:

$1 = id$
$x = (123)$
$x^2 = (132)$
$y = (12)$
$yx = (23)$
$yx^2 = (13)$
$xy = (13)$

- $xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1} = x^2$ $\overset{\circ}{\times}$
- $xy = x \Rightarrow y = 1$ $\overset{\circ}{\times}$
- $xy = x^2 \Rightarrow y = x$ $\overset{\circ}{\times}$
- $xy = yx \Rightarrow$ G абелева $\overset{\circ}{\times}$
- $xy = y \Rightarrow x = 1$ $\overset{\circ}{\times}$

Значит φ – гомоморфизм. Но φ – биекция $\Rightarrow$ изоморфизм. ■