Дискретная математика. HSE-SE-DM-HW3.

Ахундов Алексей Назимович

Ноябрь 2020

Содержание

Задача 1

Пункт a

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{A\},\ C = \{A, \{A\}\}$$

Пункт b

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{A\},\ C = \{\{A\}\}$$

Задача 2

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid (2 \mid x) \vee (\forall y \in \mathbb{N} : y \mid x \implies \sin(y) < \frac{9}{10})\}$$

Задача 3

Возьмем синглетон: S - по определению S оно содержит этот синглетон, но по аксиоме основания оно не может его содержать. Получаем противоречие.

Задача 4

Пункт a

Докажем напрямую, преобразовав выражение:

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup B &= (A \cap \overline{B}) \cup B \\ &= B \cup (A \cap \overline{B}) = (B \cup A) \cap (B \cup \overline{B}) \\ &= B \cup A\end{aligned}$$

Предположим, что $B \not\subseteq A$, но сразу же получим противоречие, поскольку тогда это множесто будет содержать как минимум один элемент, который не содержится в A.

В другую сторону:

Так как B содержится в A, $B \cup A$ - объединение вложенных множеств, то есть верхнее (куда вкладывается) из них, то есть A.

Пункт b

Докажем напрямую от противного:

Тогда A не содержится либо в A, либо в B, при этом содержится в их пересечении, которое содержится и в A, и в B.
Получаем противоречие.

В другую сторону (тоже от противного):

Пусть A не содержится в $B \cup C$.
Тогда он не вложен ни в одно из них, получаем противоречие.

Пункт с

В обратную сторону:

$$A \cap \overline{B} \subseteq C \overset{\text{Заменим } A \cap \overline{B} \equiv A \backslash B}{=} A \setminus B \subseteq C$$
$$\overset{\text{Объеденим обе стороны вложенности с B}}{=} B \cup (A \setminus B) \subseteq B \cup C$$
$$\overset{\text{Поскольку } B \cup (A \backslash B) \equiv A}{=} A \subseteq B \cup C$$

Для того, чтобы доказать напрямую, нужно проделать вышеописанные преобразования в обратном порядке.

Задача 5

Закрепим за каждым элементом множеств A, B, C, D некоторые индексы такие, что для разных элементов внутри одого множества они разные: условно выделим $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \dots$ для удобства.

Так $A \times D$ - множество пар (a_i, d_j) для произвольных индексов i, j.
Аналогично $C \times B$ - множество пар вида (c_k, b_l)

Поскольку $A \subseteq C$, каждому a_i можно сопоставить $c_{i'}$ такой, что $a_i = c_{i'}$, аналогично для $b_j = d_{j'}$

Итак, мы имеем в правой части множество X - пересечение множеств пар:
$X = \{(c_{1'}, d_1), \dots (c_{i'}, d_j)\} \cap \{(c_1, d_{1'}), \dots, (c_i, d_{j'})\}$

В X войдут только пары, которые встречаются и в левой и в правой частях, то есть для таких индексов k, l, m, n, что $(c_{k'}, d_l) = (c_m, d_{n'})$

Тогда имеем следующее по определению введенных индексов:

$$c_{k'} = c_m = a_k$$

$$d_l = d_{n'} = b_n$$

То есть в X войдут *всевозможные* пары элементов из множеств A, B, поскольку в обоих частях объединения у нас есть множества (C, D), которые полностью в себя A и B, таким образом, получив всевозможные комбинации для C и D, получим в итоге их же для A и B.

Ч.Т.Д.

Задача 6

Диаграмма R

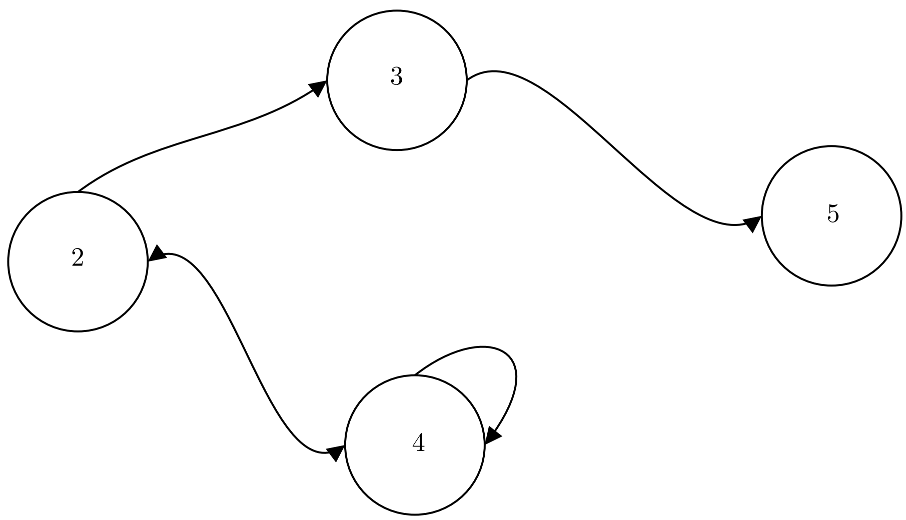


Диаграмма R^{-1}

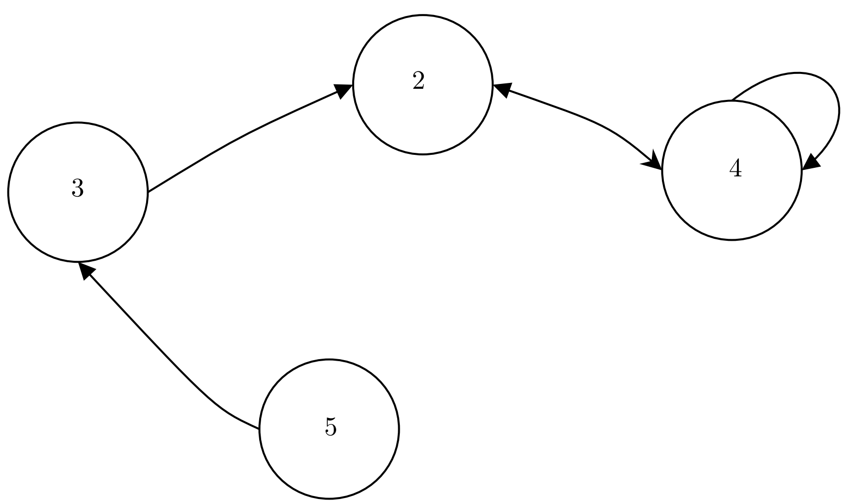
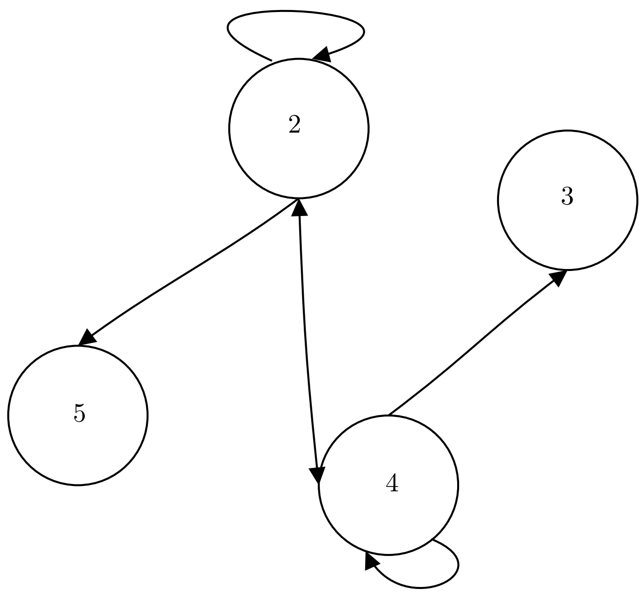


Диаграмма $R \circ R$



Элементы множеств $\mathrm{dom}(R \circ R \circ R), \mathrm{rng}(R \circ R \circ R)$

Явно представим множество R:

$$R = \{(2,3),(3,5),(2,4),(4,4),(4,2)\}$$

Обозначим $R \circ R$:

$$P = R \circ R = \{(2,5),(2,4),(2,2),(4,4),(4,2),(4,3)\}$$

Тогда $R \circ P = R \circ R \circ R$

$$R \circ R \circ R = \{(2,4),(2,2),(4,4),(4,2),(2,3),(4,3),(4,5)\}$$

Тогда легко найдем:

$$\mathrm{dom}(R \circ R \circ R) = \{2,4\}$$

$$\mathrm{rng}(R \circ R \circ R) = \{2,3,4,5\}$$

Задача 7

Явно определим отношение $\subseteq$ на множестве $\mathcal{P}(A)$ и обозначим его R:

$$R = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{P}(A) \;\;\&\;\; (\exists y : x \subseteq y)\}$$

При этом, так как оно определено на этом множестве, справедливо следующее:

$$R \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$$

Теперь представим таким же образом композицию $R \circ R$:

$$R \circ R = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{P}(A) \;\;\&\;\; (\exists z \in \mathcal{P}(A) : xRz \;\;\&\;\; zRy)\}$$

$$R \circ R = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{P}(A) \;\;\&\;\; (\exists z \in \mathcal{P}(A) : x \subseteq z \;\;\&\;\; z \subseteq y)\}$$

Для упрощения перечисления докажем следующее (транзитивность вложения-равенства):

$$\exists z : x \subseteq z \;\;\&\;\; z \subseteq y \equiv x \subseteq y$$

Необходимость:

Пусть такой z действительно найдется, тогда:

$$x \subseteq z \;\;\&\;\; z \subseteq y$$

По определению вложения для любого элемента t:

$$(t \in x \implies t \in z) \;\;\&\;\; (t \in z \implies t \in y)$$

Из законов алгебры логики:

$$t \in x \implies t \in y$$

Обращая определение вложения:

$$x \subseteq y$$

Достаточность:

Если же выполнено второе, то для первого можно просто взять $z = x$

Получается, требуется найти все такие пары множеств из $\mathcal{P}(A)$, что первое вложено-равно второму.

(∅, ∅), (∅, {1}), (∅, {2}), (∅, {3}), (∅, {1, 2}), (∅, {1, 3}), (∅, {2, 3}), (∅, {1, 2, 3})

-

({1}, {1}), ({1}, {1, 2}), ({1}, {1, 3}), ({1}, {1, 2, 3})
({2}, {2}), ({2}, {1, 2}), ({2}, {2, 3}), ({2}, {1, 2, 3})
({3}, {3}), ({3}, {1, 3}), ({3}, {2, 3}), ({3}, {1, 2, 3})

-

({1, 2}, {1, 2}), ({1, 2}, {1, 2, 3})
({1, 3}, {1, 3}), ({1, 3}, {1, 2, 3})
({2, 3}, {2, 3}), ({2, 3}, {1, 2, 3})

-

({1, 2, 3}, {1, 2, 3})

Сюда так же нужно добавить любые пары вида: пустое множество и элемент из $\mathcal{P}(A)$, поскольку $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ и вложено в любое множество

Задача 8

Явно распишем определение R:

$$R = \{(x, y) : x \in Z \;\;\&\;\; (\exists y \in \mathbb{Z} : x \mid y)\}$$

Поскольку R определена на множестве целых чисел:

$$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Так же распишем R^{-1}:

$$R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in Z \;\;\&\;\; yRx\}$$

Пусть $A = \{12, 15, 42\}$, тогда по определению:

$$R^{-1}[A] = \left\{y \in \mathbb{Z} : \exists x \in A : xR^{-1}y\right\}$$

Расскрывая R^{-1}, получаем:

$$R^{-1}[A] = \{y \in \mathbb{Z} : \exists x \in A : (y \mid x)\}$$

Теперь просто перебрав элементы множества A, получим следующее:

Для $x = 12$ возможные значения:

$$y \in \mathbb{Z} : A' = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, -1, -2, -3, -4, -6, -12\}$$

Для $x = 15$ возможные значения:

$$y \in \mathbb{Z} : B' = \{1, 3, 5, 15, -1, -3, -5, -15\}$$

Для $x = 42$ возможные значения:

$$y \in \mathbb{Z} : C' = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, -1, -2, -3, -6, -7, -14, -21, -42\}$$

Объединив все эти множества, мы получим $R^{-1}[A]$:

$$R^{-1}[A] = A' \cup B' \cup C'$$

$R^{-1}[A] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14, 15, 21, 42, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -12, -14, -15, -21, -42\}$

Задача 9

Распишем левую часть равенства:

По определениям:

$$R \circ (P \cup Q) = \{(x, y) \mid \exists z : x(P \cup Q)z \ \ \& \ \ zRy\}$$

Разберемся с объединением отношений:

$$P \cup Q = \{(x, y) \mid xQy \lor xPy\}$$

Вернемся к левой части:

$$R \circ (P \cup Q) = \{(x, y) \mid \exists z : x(P \cup Q)z \ \ \& \ \ zRy\}$$

$$R \circ (P \cup Q) = \{(x, y) \mid \exists z : (xQz \lor xPz) \ \ \& \ \ zRy\}$$
$$R \circ (P \cup Q) = \{(x, y) \mid \exists z : zRy \ \ \& \ \ (xQz \lor xPz)\}$$

Теперь распишем правую часть равенства:

По определениям:

$$(R \circ P) \cup (R \circ Q) = \{(x, y) \mid x(R \circ Q)y \lor x(R \circ P)y\}$$

Распишем предикат для этого множества:

$$x(R \circ Q)y \lor x(R \circ P)y \equiv (\exists z : xQz \ \ \& \ \ zRy) \lor (\exists z : xPz \ \ \& \ \ zRy)$$

$$(R \circ P) \cup (R \circ Q) = \{(x, y) \mid (\exists z : xQz \ \ \& \ \ zRy) \lor (\exists z : xPz \ \ \& \ \ zRy)\}$$

Видно, что в любом случае, какое бы из высказываний между которыми стоит 'или' не было бы правдой, необходимо: $\exists z : zRy$. Перепишем по другому:

$$(R \circ P) \cup (R \circ Q) = \{(x, y) \mid \exists z : zRy \ \ \& \ \ (xQz \lor xPz)\}$$

Получаем:

$$R \circ (P \cup Q) = \{(x, y) \mid \exists z : zRy \ \ \& \ \ (xQz \lor xPz)\}$$
$$(R \circ P) \cup (R \circ Q) = \{(x, y) \mid \exists z : zRy \ \ \& \ \ (xQz \lor xPz)\}$$

Ч.Т.Д.

Задача 10

Приведем контрпример:

$$P = \{(1, 1)\}$$
$$Q = \{(1, 2)\}$$
$$R = \{(1, 3), (2, 3)\}$$

При таких отношениях имеем:

$$R \circ P = \{(1, 3)\}$$

$$R \circ Q = \{(1, 3)\}$$
$$P \cap Q = \varnothing; \quad R \circ \varnothing = \varnothing$$

Тогда:

$$\{(1, 3)\} \cap \{(1, 3)\} \subseteq \varnothing$$
$$\{(1, 3)\} \subseteq \varnothing$$

Получаем противоречие.

Задача 11

Приведем контрпример, рассмотрев отношение $\leq$ на множестве D:

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$R \subseteq D \times D \ \equiv \leq$$

Также рассмотрим следующие множества X, Y:

$$X = \{1, 3\}$$
$$Y = \{2, 4\}$$

В таком случае явно выпишем $R, R[X], R[Y]$:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

$$R[X] = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$R[Y] = \{2, 3, 4\}$$

Вычислим их пересечение:

$$R[X] \cap R[Y] = \{2, 3, 4\}$$

Видно, что $X \cap Y = \varnothing$, тогда получается, что непустое множество $R[X] \cap R[Y]$ вложено в пустое, получаем противоречие.

Задача 12

Распишем по определению левую часть:

$$\begin{aligned}(R \cup Q)[X] &= \{y \mid x(R \cup Q)y \ \ \& \ \ x \in X\} \\ &= \{y \mid (xRy \vee xQy) \ \ \& \ \ x \in X\}\end{aligned}$$

Распишем таким же образом правую часть:

$$\begin{aligned}R[X] \cup Q[X] &= \{y \mid xRy \ \ \& \ \ x \in X\} \cup \{y \mid xQy \ \ \& \ \ x \in X\} \\ &= \{y \mid (xRy \ \ \& \ \ x \in X) \vee (xQy \ \ \& \ \ x \in X)\} \\ &= \{y \mid x \in X \ \ \& \ \ (xRy \vee xQy)\}\end{aligned}$$

Получили следующее:

$$(R \cup Q)[X] = \{y \mid (xRy \vee xQy) \ \ \& \ \ x \in X\}$$
$$R[X] \cup Q[X] = \{y \mid x \in X \ \ \& \ \ (xRy \vee xQy)\}$$

Они эквивалентны, утверждение, данное в задаче всегда выполнено.