Дискретная математика. HSE-SE-DM-HW5.

Ахундов Алексей Назимович

Январь-февраль 2021

Содержание

Задача 1

Докажем сначала, что объединение счётного количества счетных множеств счетно:

Пусть в объединении участвуют множества $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Тогда построим таблицу по элементами $a_{ij} \in A_i$, их счетно для каждого A_i по условиям, из объединения множеств и пробежим по диагоналям:

$$\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Получаем обход: $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20} \ldots$. При этом если элемент уже встечался иы его игнорируем (и в таком обходе мы занумеровали объединения счетного количества счетных множеств натуральными числами, а значит оно счётно).

Теперь докажем, что объединение бесконечного A и конечного/счетного B равномощно A

Рассмотрим $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, при этом поскольку B конечно или счетно, то $B \setminus A \subseteq B$ конечно или счётно (его мощность меньше равна мощности B). В A, поскольку оно бесконечно, есть счетное подмножество, выберем его и обозначим B', справедливо следующее:

$$A \cup B = (A \setminus B') \cup B' \cup (B \setminus A)$$

По доказанному выше, $B' \cup (B \setminus A)$ счетно, тогда $B' \cup (B \setminus A) \overset{f}{\sim} B'$. Введем биекцию $: A \cup B \to (A \setminus B') \cup B' \cup (B \setminus A)$:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi(x) & x \in B' \cup (B \setminus A) \\ x & x \in A \setminus B' \end{cases}$$

Так мы покрыли все случаи (объединение), кроме того $dom\Psi = (A \setminus B') \cup B' = A$; поскольку f - биекция, Ψ инъективна и сюръективна, то есть Ψ - биекция

В нашей задаче возьмем, учитывая доказанное ($A \setminus B$ бесконечно, B - конечно/счётно):

$$(A \setminus B) \cup B \sim A \setminus B$$

При этом:

$$A \setminus B \cup B = A$$

$$A \sim A \setminus B$$

Q.E.D.

Задача 2

Будем считать, что дней в году 365. Тогда применим принцип Дирихле в том, что на множество дней в году нет инъекции из более мощного (например, при количестве человек равном 366) множества, в остальных случаях можно выбрать различные дни в году для различных людей (так можно сделать, например, брать последовательные дни в году) и привести тривиальную инъекцию, поэтому гарантию дает наименьшее $n = 366$

Задача 3

Рассмотрим 2022 различных чисел такого вида. Каждое такое число можно записать как $\frac{10^n-1}{9}$. Среди них по принципу Дирихле найдутся числа с одинаковыми остатками по модулю 2021. Тогда их разность делится на 2021, а также представима в виде $10^k \cdot \frac{10^l-1}{9}$, при этом поскольку 10 ни в какой степени не делится на 2021 (т.к. 10 и 2021 взаимнопросты), делится на 2021 обязано некоторое число вида $\frac{10^l-1}{9}$, а это и есть число данного вида

Задача 4

Представим данное число в каноническом виде:

$$1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$$

Тогда число натуральных делителей: $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 24$

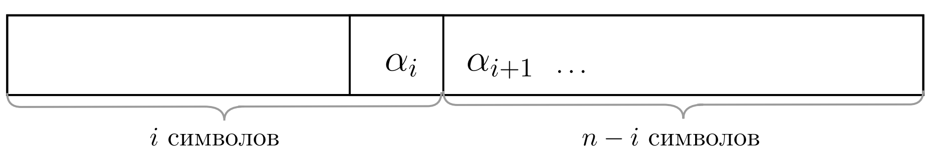
Задача 5

Рассмотрим монету - она может пойти в любой карман (3 варианта), точно так же для любой другой монеты. Получаем:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3}_{7 \text{ раз}} = 3^7 = 2187$$

Задача 6

Рассмотрим произвольную строку. Поймем, сколько слов стоит до нее. Для этого рассмотрим i-ый символ данной строки. Чтобы некоторая строка была выше в лексикографическом порядке, нужно, чтобы на i-ом месте был символ до α_i в алфавите (в случае пустого символа α_i ответ определим как ноль), то есть $ord(\alpha_i) - 1$ символов, а дальше на суффиксе количество слов определяется позицией пустого символа.



Допустим мы поставили пустой символ сразу после α_i, тогда такой вариант слова один - исходное (с измененным символом a_i), если на следующую позицию - 26 (поскольку есть 26 вариантов для α_{i+1}) и так далее и еще один вариант оставить строку без изменений:

$$\varphi(\alpha_i) = \begin{cases} (ord(\alpha_i) - 1) \cdot (1 + 26 + 26^2 + \cdots + 26^{n-i-1}) + 1 & \alpha_i \neq \varnothing \\ 0 & \alpha_i = \varnothing \end{cases}$$

Упрощая по формуле геометрической прогрессии, получаем:

$$\varphi(\alpha_i) = \begin{cases} (ord(\alpha_i) - 1) \cdot \dfrac{26^{n-i} - 1}{25} & \alpha_i \neq \varnothing \\ 0 & \alpha_i = \varnothing \end{cases}$$

При этом префикс для i-го символа не рассматривается, поскольку покрывается предыдущими символами. Тогда ответ для произвольной строки s длины k:

$$\left(\sum_{i=0}^{k}\varphi(\alpha_i)\right) - 1$$

Отнятие варианта обосновано тем, что φ дает результат с учетом равнства проще говоря определяет $\geq$, в то время как нам требуется $>$. В нашем случае $s = cbcad, k = 5$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{5}\varphi(\alpha_i) &= \sum_{i=0}^{5}(ord(\alpha_i) - 1)\cdot\frac{26^{n-i}-1}{25}\\ &= 2\cdot\frac{26^5-1}{25} + 1\cdot\frac{26^4-1}{25} + 2\cdot\frac{26^3-1}{25} + 0\cdot\frac{26^2-1}{25} + 3\cdot\frac{26-1}{25} + 5 - 1 = 970202\end{aligned}$$

Задача 7

Пункт а

Раскроем по биному Ньютона следующее выражение (разность в пределах одной строки треугольника паскаля):

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k}\cdot(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot(-1)^k$$

Отдельно рассмотрим $n = 0 : C_0^0 = 1$ (что соответствует строке треугольника Паскаля: 1)
То есть для всех $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ ответ 0, иначе для $n = 0$ ответ 1.

Пункт б

Рассмотрим:

$$(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = \underbrace{C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1}_{C_n^1} + \underbrace{C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3}_{C_n^3} + \dots$$

То есть мы получили, что сумма всех нечетных (по счету начиная с нуля) элементов n-ой строки треугольника паскаля равна 2^{n-1}. Сумма всех элементов этой строки 2^n, значит сумма четных:

$$2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$$

Пункт в

Рассмотрим преобразования:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)\cdot n}{(k+1)\cdot k!\ \cdot(n+1-k-1)!} = \frac{n+1}{k+1}\cdot C_n^k$$

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{(k+1)\cdot C_{n+1}^{k+1}}{(n+1)\cdot(k+1)} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

Тогда перепишем условие задачи:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

Поскольку n фиксировано, "вынесем" знаменатель из-под суммы:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Разберем $\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = 2^{n+1} - 1$.
Рассмотрим $n+1$ строку треугольника Паскаля, сумма всех элементов:

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} = 2^{n+1} = C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^{n+1}$$

В то же время наша сумма:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^{n+1}$$

То есть в нашей сумме не хватает одного элемента (C_{n+1}^0) до суммы всех элементов данной строки (2^{n+1}), поэтому в итоге $\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = 2^{n+1} - 1$

Задача 8

Рассмотрим произвольный путь из $(0,0)$ до (m,n), он состоит из перемещений, но перемещений по горизонтали в точности m, по вертикали n, значит весь путь состоит из $m+n$ перемещений, а вариативность появляется из-за порядка их исполнения, тогда нам достаточно выбрать все перемещения вверх или вправо из всего числа перемешений:

$$C_{m+n}^n$$

Задача 9

Раскроем следующий биномиальный коэффициент (мы знаем, что он точно целый):

$$C_{(a-1)+n}^n = \frac{((a-1)+n)!}{n! \ \cdot (((a-1)+n-(a-1))!} = \frac{(a-1+n)!}{(a-1)! \ n!} = \frac{((a-1)+1)\cdot ... \cdot ((a-1)+n)}{n!}$$
$$= \frac{a \cdot (a+1) \cdot ... \cdot (a+n-1)}{n!}$$

То есть числитель (равный данному в задаче произведению) делится на $n!$. Q.E.D.

Задача 10

Сначала рассмотрим все циферные последовательности длины 6, где поровну четных и нечетных.

Для этого достаточно выбрать места для, например, четных цифр (C_6^3), а затем с учетом этой расстановки понять, сколькими способами туда можно поместить четные (5^3) и нечетные (5^3) цифры, количество четных и нечетных цифр равно пяти, поэтому получаем

$$C_6^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3$$

Теперь нужно из этого количества исключить все варианты где ноль стоит в первой позиции, тогда на четные позиции остается выбрать 2 места: $C_5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^2$:

$$C_6^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 - C_5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 281250$$

Задача 11

Рассмотрим независимо распределения различных фруктов, используя метод перегородок:

Яблоки. У нас есть 6 объектов, между которыми нужно выбрать три перегородки. Возможностей для перегородок (поскольку пустые наборы могут присутствовать) $6+3$ (6 яблок и 3 перегородки):

$$C_9^3 = \frac{9!}{3! \ \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 84$$

Груши:

$$C_{3+3}^3 = 20$$

Сливы:

$$C_{2+3}^3 = 10$$

В итоге получаем (в силу независимости распределений):

$$84 \cdot 20 \cdot 10 = 16800$$

Задача 12

Начнем пошагово преобразовывать данное в задаче выражение, используя бином Ньютона:

$$\begin{aligned}(x^2+x^7+x^9)^{20} &= x^{40} \cdot (1+x^5+x^7)^{20} \\ &= x^{40} \cdot \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^5+x^7)^k \\ &= x^{40} \cdot \sum_{k=0}^{20} \left[C_{20}^k \cdot x^{5k} \cdot \sum_{t=0}^{k} C_k^t \cdot x^{2t} \right]\end{aligned}$$

Нам нужен коэффициент при x^{57}, а чтобы получить в нашем выражении слагаемые, содержащие его, нужно:

$$\begin{cases} 40+5k+2t=57 \quad (1) \\ 0 \le t \le k \le 20 \end{cases}$$

Решая линейное диофантовое уравнение (1), получаем:

$$\begin{cases} k = 2s + 1 \\ t = 6 - 5s \\ s \geq 1 \\ 0 \leq t \leq k \leq 20 \end{cases}$$

Видим, что если s как минимум 2, то t получается отрицательным, что невозможно, значит возможно единственное решение при $s = 1, k = 3, t = 1$. Ему соответствует коэффициент:

$$C_{20}^3 \cdot C_3^1 = 3420$$

Задача 13

Всего вариантов разложить монеты по карманам (задача 5): 3^7, среди них нас не устраивает случай хотя бы одного пустого кармана (два возможных кармана для каждый монеты и пустой выбирается независимо тремя способами):

$$3 \cdot 2^7$$

При этом мы могли сложить все монетки в один и тот же карман (например, если каждый раз выбирать один и тот же карман для каждой монеты), поэтому случаи только одного полного кармана (их 3 - по одному на карман) мы учли 2 раза при вычитании, прибавим их к ответу:

$$3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3 = 1806$$

Задача 14

Выберем 4 книги, которые буду стоять на своём месте:

$$C_{10}^4$$

Далее будем работать с остальными 6 книгами. Осталось понять, сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна не оставалась на своём месте - решить задачу о беспорядках для $n = 6$: Возьмем множества $A_1, A_2..A_i$ перестановок, где число i стоит на своём месте $i \in [1; n]$, тогда искомое множество - дополнене объединения A_i-ых до множества всех перестановок, тогда его мощность:

$$N = n! \ - |A_1 \cup A_2 ... \cup A_6|$$

Раскроем объединение по формуле включений-исключений:

$$N = n! \ - \sum_{i}^{n} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Рассмотрим $|A_i|$, здесь мы фиксируем один элемент, а все остальные могут располагаться в любом порядке, то есть получем $|A_i| = (n-1)!$, для пересечения произвольных $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, поскольку в пересечении требуется одновременная фиксация обоих элементов, для трех и далее аналогично.

Разберемся с коэффициентами, превносимыми суммами. Для того, чтобы выбрать из n элементов k индеков таких, что $i_1 < i_2 < ... < i_k$ останется всего лишь выбрать k элементов и расставить их порядке возрастаня (всего C_n^k), итого наша сумма:

$$N = n! \ - C_n^1 \cdot (n-1)! \ + C_n^2 \cdot (n-2)! + ... + (-1)^n \cdot (n-n)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}$$

Подставляя сюда $n = 6$, получаем: $!6 = 265$ Итого:

$$C_{10}^4 \cdot \, !6 = 210 \cdot 265 = 55650$$

Задача 15

Требуется узнать сколько есть не взимнопростых с заданным числом среди числе (натуральных) до него. Для решения задачи найдем функцию Эйлера от заданного числа, а затем вычтем из количества чисел до исходного числа результат, получим искомое:

$$\varphi(2020) = \varphi(4 \cdot 505) = \varphi(4) \cdot \varphi(505) = \varphi(4) \cdot \varphi(101) \cdot \varphi(5) \overset{101 \text{ простое}}{=} 2 \cdot 100 \cdot 4 = 800$$

В итоге получаем (чисел от 0 до 2019 ровно 2020):

$$2020 - 800 = 1220$$

Задача 16

Рассмотрим последовательность цифр: $\{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$. Выберем отсюда с повторениями 7 чисел (порядок неважен). Каждую такую выборку отсортируем по невозрастанию (так, как нужно в условии). Тогда нам подходят все такие, кроме случая, когда мы выбрали 7 нулей, поэтому получаем (используя сочетания с повторениями):

$$\overline{C_{10}^7} - 1 = C_{10+7-1}^7 - 1 = \frac{(10+7-1)!}{7! \ (10-1)!} - 1 = 11439$$