Лекция 33, 05.06.24

**Теорема** (2й критерий ортогональности л. оператора):

Пусть л.о. $\mathcal{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, тогда $\mathcal{A}$ - ортог. л.о. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ переводит $\forall$ ОНБ $e_1, \dots, e_n$ в ОНБ $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$.

□ $(\Rightarrow)$ $(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} = \delta_i^j$

$(\Leftarrow)$ Дано: $e_1, \dots, e_n$ - ОНБ $\qquad$ Док-ть: $\mathcal{A}$ - ортог. л.о.

$\mathcal{A}e_1, \dots, e_n$ - ОНБ

$x \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)^T}_{x_e}$ в базисе $\mathbb{e}$, т.е. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \mathcal{A}e_1 + \dots + x_n \mathcal{A}e_n$, т.е.

$\mathcal{A}x \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)^T}_{=(\mathcal{A}x)_{\mathcal{A}e}}$ в базисе $\mathcal{A}\mathbb{e}$

$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \underset{x_e}{\underset{\parallel}{(\mathcal{A}x)^T_{\mathcal{A}e}}} \cdot \underset{E}{\underset{\parallel}{\Gamma_{\mathcal{A}e}}} \cdot \underset{y_e}{\underset{\parallel}{(\mathcal{A}y)_{\mathcal{A}e}}} = x_e^T y_e = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

т.к. $\mathcal{A}e$ по усл. ОНБ

$(x, y) = x_e^T \underset{\text{м-ца Грама в ОНБ}}{E} y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \qquad \forall x, y \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ - ортог. л.о. по опр-ю. ■

**Утв**: М-ца перехода от одного ОНБ к другому ОНБ всегда ортогональна.

□ Пусть $U$ - м-ца перехода от ОНБ $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ к ОНБ $\mathbb{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

Тогда $\underset{E}{\underset{\parallel}{\Gamma_b}} = U^T \cdot \underset{E}{\underset{\parallel}{\Gamma_e}} \cdot U \Leftrightarrow U^T \cdot U = E \Rightarrow U$ - ортог. м-ца по опр. ■

т.к. в ОНБ

# 5 разложений матриц

## 1 разложение

**Теорема** (о канонич. виде ортог. оператора): (б/д)

Для $\forall$ ортог. л.о. $\exists$ет ОНБ, в котором его м-ца имеет блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\varphi_1}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boxed{A_{\varphi_k}} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

где $A_{\varphi_i}$ – м-ца (блок) $2\times 2$ вида $A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$.

То есть $\exists$ет ОНБ, в котором ортогон. л.о. является либо набором вращений, либо вращений и отражений.

**Следствие** (т. Эйлера):

$\forall$ ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^3$ обладает ОНБ, в котором его м-ца имеет вид: $A = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array}\right)_{3\times 3}$

То есть $\forall$ ортог. преобразование в $\mathbb{R}^3$ является или поворотом на нек. угол $\varphi$ (вокруг заданной оси – прямой, проход. через $O$), или композицией такого поворота и отражения (относ. зад. плоскости).

## 2 разложение

**Теорема (О „спектральном разложении")**

Для $\forall$ симметрической м-цы $A$ $\exists$ет такая ортогональная м-ца перехода $U$, что $A = U \cdot \Lambda \cdot U^T$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная с с.з. $\lambda_i$ оп-ра с матрицей $A$, повторяющимися соотв. их кратности.

Т.е. $\forall$ симметричная кв. м-ца ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду.

$\square$ Рассм. м-цу $A$ как м-цу самосопр. л.о. в нек. ОНБ $\mathbb{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Для самосопр. л.о. всегда $\exists$ет ОНБ (из собств. векторов) $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_n)$, в которой его м-ца диагональна: $\Lambda = C_{e\to f}^{-1} \cdot A_e \cdot C_{e \to f}$.

Здесь $C_{e\to f}$ – м-ца перехода от ОНБ $\mathbb{e}$ к ОНБ $\mathbb{f}$ $\Rightarrow$ по утв. она ортогональна, т.е. $C_{e\to f}^{-1} = C_{e\to f}^T$. Возьмём $U = C_{e\to f}$, тогда

$\Lambda = U^T A U \Rightarrow A = U \Lambda \cdot U^T$ $\blacksquare$

## 3 разложение

**Теорема (о сингулярном разложении или SVD – singular value decomposition)**

Для $\forall$ прямоуг. м-цы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ имеет место разлож.: $A = V \cdot \Sigma \cdot U^T$, где $U \in O_n(\mathbb{R})$, $V = O_m(\mathbb{R})$ (т.е. это ортог. м-цы $n\times n$ и $m \times m$ соотв.) и $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $\Sigma$ – диаг. м-ца с неотр. числами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m,n)} = 0$ на диаг. (они наз. сингулярными числами и располож. по невозрастанию).

Т.е. $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \ddots & & 0 \\ & \sigma_r & \\ 0 & & 0 \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ - сингулярная м-ца.

$\square$ Рассм. $A^T A$. Это м-ца л.о. $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ в нек. ОНБ, он самосопряжён, т.к. м-ца $A^T \cdot A$ - симметрическая: $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A$.

При этом все с.з. $\lambda_i$ л.о. $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ неотрицательны, т.к. если $\mathcal{A}^* \mathcal{A} u = \lambda_i u$ (где $u$ - с.в.), то $\lambda_i \underbrace{(u, u)}_{\geq 0} = (u, \lambda_i u) = (u, \mathcal{A}^* \mathcal{A} u) =$

$= (\mathcal{A} u, \mathcal{A} u) = \|\mathcal{A} u\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_i \geq 0$.

След. эти с.з. $\lambda_i$ можно записать в виде $\sigma_i^2$, т.е. $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

сингул. число

с.з. для $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ с м-цей $A^T A$

Числа $\sigma_i$ принято сортировать по невозрастанию и называть сингулярными числами: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_{\min(m,n)} = 0$, где

$r = Rg A = Rg(A^T A) = Rg\,\Sigma$, т.к. $Rg(A^T A) = Rg(\Gamma(a_1, \ldots, a_n))$

столбцы м-цы $A$

($Rg\,\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = Rg A$, т.к. зафикс. в м-це $A$ базисный минор $\Rightarrow$ в этих же столбцах (и строках) будет БМ и в м-це Грама по свойству 5 м-цы Грама).

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ - ОНБ из собств. векторов $A^T A_{n \times n}$

$A^T \cdot A \cdot u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 \cdot u_i, & 1 \leq i \leq r \\ 0, \text{ при } & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$

Положим $\boxed{v_i = \frac{A \cdot u_i}{\sigma_i}}$, $1 \leq i \leq r$.

Тогда $(v_i, v_j) = \left(\frac{A u_i}{\sigma_i}\right)^T \cdot \frac{A u_j}{\sigma_j} = \frac{u_i^T \cdot (A^T \cdot A \cdot u_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j} = \frac{u_i^T \cdot \sigma_j^2 \cdot u_j}{\sigma_i \cdot \sigma_j} =$

$= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \underbrace{(u_i, u_j)}_{u_i^T \cdot u_j} = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ при } i \neq j \\ 1, \text{ при } i = j \end{array}\right. = \delta_i^j$

Здесь $1 \le i,j \le r$, где $r = \mathrm{Rg}\, A \le \min(m, n)$

Дополним систему $v_1, \dots, v_r$ векторами $v_{r+1}, \dots, v_m$ до ОНБ в $\mathbb{R}^m$ произв. образом.

Заметим, что при $j = \overline{r+1, n}$ $A^T \cdot A \cdot u_j = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\underset{(Au_j,\, Au_j) = \|Au_j\|^2}{\parallel}}{(A^* A u_j, u_j)} = (0, u_j) = 0 \Rightarrow Au_j = 0.$$

В итоге $A[u_1, \dots, u_n] = [\overbrace{\sigma_1 v_1, \dots, \sigma_r v_r}^{\text{т.к. } v_i = \frac{Au_i}{\sigma_i} \text{ при } i = \overline{1,r}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{\text{т.к. } Au_j = 0 \text{ при } j = \overline{r+1, n}}] =$

$$= \underset{\underset{V}{\parallel}}{[v_1, \dots, v_m]}_{m \times m} \cdot \underset{\underset{\Sigma}{\parallel}}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \sigma_r & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{m \times n}$$

(векторы $v_{r+1}, \dots, v_m$ не влияют на разложение, умножаясь на 0 на диагонали

А м-цы $U$ и $V$ являются ортогональными, т.к. $U$ – ОНБ из с.в. для $A^* A$

$V$ – ОНБ по построению.

По опр-ю $U$ и $V$ явл. м-цами перехода от ОНБ к ОНБ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ортогональны что утв.)

Таким образом: $AU = V \cdot \Sigma \mid \cdot U^T$ справа

$\Rightarrow A = V \Sigma U^T$ – сингулярное разложение. ∎

4 разложение.

Утв (о полярном разложении): $\forall$ л.о. в евкл. пр-ве представляется в виде композиции самосопряж. л.о. с м-цей с.з. и ортог. л.о.

Т.е. $\forall$ кв. м-цы $A$ $\exists$ ет разложение $A = SO$, где

$S$ – симметр. м-ца (неотриц. опред.)

$O$ – ортогональная м-ца (м-ца соотв. л.о. в нек. ОНБ).

Замечание: Это аналог формулы компл. числа

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = \underset{\uparrow \text{растяжение}}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

↖вращение

$\square$ Возьмём сингулярное разл. кв. м-цы $A$: $A = V\Sigma U^T$, где

$U$ и $V$ – ортог. м-цы (одинак. порядка, т.к. $A$-кв.), а

$\Sigma$ – диагональная кв. м-ца с неотр. числами на диаг.

$$A = V\Sigma \cdot U^T = \underbrace{(V\Sigma V^T)}_{S} \cdot \underbrace{(VU^T)}_{O} = S \cdot O, \text{ где}$$

$O = V \cdot U^T$ – ортогональная, как произведение ортогональных

$S = V\Sigma V^T$ явл. симметрической $(S^T = (V\Sigma V^T)^T = V\Sigma V^T)$ и у неё

неотриц. с.з. – сингулярные числа, т.к. $\Sigma$ – её диаг. вид в спектральном разложении. $\blacksquare$

Замечание: Можно и в обратном порядке представить – в виде композиции ортог. и самосопр. л.о.

$$A = V\Sigma U^T = \underbrace{VU^T}_{\hat{O}} \underbrace{U\Sigma U^T}_{\hat{S}} = \hat{O} \cdot \hat{S} \leftarrow \text{отличаются от } O \text{ и } S.$$