Лекция 23, 15.03.24

Числовые ряды

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S_n$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Замечание: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сход. $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ сход.

Признак Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

1) Если $\exists n_0 : \forall n$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, то сходится

2) Если $\exists n_0 : \forall n$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то расходится

Следствие: Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, сход ; > 1 расход.

Док-во: 1) $\forall n > n_0$, $a_n \le q \cdot a_{n-1} \le q^2 \cdot a_{n-2} \le \ldots \le q^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$

$$a_n \le q^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$$

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$ сход. при $|q|<1 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ сход.

2) $\forall n > n_0$ $a_n \ge a_{n_0} > 0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

Признак Коши: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

1) Если $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, то сход.

2) ——— // ——— $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то расход.

Док-во аналогично.

Следствие: Если $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то сход.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то расход.

Знакопеременные ряды

$\boxed{1}$ Знакочередующиеся

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n \qquad a_n > 0$$

Теорема Лейбница: Если a_n монотонно сход. к 0, то сход.

Док-во: $S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\ge 0} + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \nearrow$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \le a_1$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ $\qquad S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot a_k$

$S_{2n+1} \searrow$ $\qquad S_{2n+1} = \overset{\nearrow S}{S_{2n}} + \overset{\nearrow 0}{a_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} S.$

Опр: Знакопер. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ наз. абс. сход., если сход. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема: Если ряд абс. сход., то a_n сходится.

Опр: Знакопер. ряд сход., но не сход. абс. наз. сход. условно.

Опр: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ наз. перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

Эрлих обещал скинуть норм определение, но пока не скинул

Опр: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сход. абсолютно, то для $\forall$ его перестановки $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^k = S$ сход. абсолютно и туда же.

Док-во: 1) $\bar{S}_m^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k^*|$, $\tilde{S}_n = \sum_{m=1}^{n} |a_m| \le M$

$\forall m \ \exists n(m) \ \bar{S}_m^* \le \tilde{S}_n \le M \Rightarrow \bar{S}_m^*$ сход.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ |\tilde{S} - \tilde{S}_{n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |S - S_{n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\tilde{S} - \tilde{S}_{n_\varepsilon}| = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_k| \qquad |S - S_{n_\varepsilon}| = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} a_n$$

$\boxed{\exists m_\varepsilon}$ $S_{m_\varepsilon}^*$ содержит все слагаемые S_{n_ε}

$\boxed{\forall m > m_\varepsilon}$ $S_m^* - S_{n_\varepsilon}$ участвуют $a_n < n > n_\varepsilon$

$$|S_m^* - S_{n_\varepsilon}| \le \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\boxed{|S - S_m^*|} \le \underbrace{|S - S_{n_\varepsilon}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S_{n_\varepsilon} - S_m^*|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \boxed{< \varepsilon}$$

ч.т.д.

Теорема: Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход. условно и $A \in \bar{\mathbb{R}}$, то $\exists$ перестановка ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_m^* = A$.

Док-во: Лемма: $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}$ $\quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -a_n, & a_n < 0 \end{cases}$

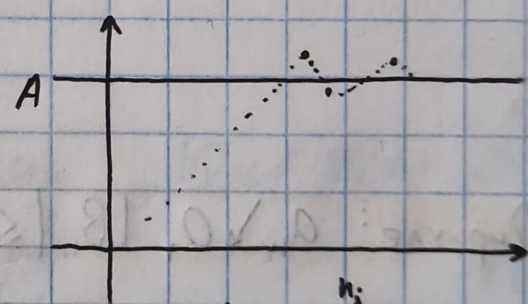
Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сход. условно, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\pm} = +\infty$

Док-во: ⊓⊓: т.е. кто-то (пусть +) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = S^+ < +\infty$

$$\begin{matrix} S_n & = & S_n^+ & - & S_n^- \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ S & & S^+ & & \end{matrix} \quad \Rightarrow \exists S_n^- \xrightarrow[n\to\infty]{} S^-$$

$\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = S_n^+ + S_n^- \xrightarrow[n\to\infty]{} S^+ + S^-$, то сход. абс. (!!).

Док-во: $A \in \mathbb{R}$



$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$

строю a_m^* из полож. a_n

$\exists n: a_1^* + \ldots + a_n^* > A$ впервые

строю a_m^* из неполож. a_n

$\exists n_2: a_1^* + \ldots + a_{n_1}^* + a_{n_1+1}^* + \ldots + a_{n_2}^* < A$

$|A - \sum\limits_{m=1}^{n_j} a_m| \leq |a_{n_j}^*| \to 0$