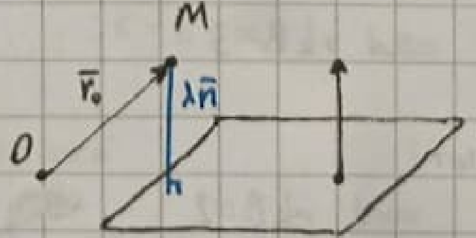
Семинар 14, 14.12.23

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \rho(M; \Pi)$$



$\rho(M, \Pi) = |\lambda \bar{n}| = |\lambda| \cdot |\bar{n}|$

Ур. плоск. в вект. виде: $(\bar{r}, \bar{n}) + D = 0$

И пусть $\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\bar{r}_0 + \lambda\bar{n} \in \Pi \Leftrightarrow (\bar{r}_0 + \lambda\bar{n}, \bar{n}) + D = 0$

$$\lambda = -\frac{(\bar{r}_0, \bar{n}) + D}{\underbrace{(\bar{n}, \bar{n})}_{=|\bar{n}|^2}} \Rightarrow \rho(M, \Pi) = \frac{|(\bar{r}_0, \bar{n}) + D|}{|\bar{n}|}$$

① Уравнение плоскости, проходящей через точку $P(5,2,0)$ и удалённой от точки $M_1(6,1,-1)$ на расстояние 1 и от т. $M_2(0,5,4)$ на р-е 3.

$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$

Можно считать, что $A^2 + B^2 + C^2 = 1$

Сдвинем всё на вектор $(-5,-2,0)$, тогда новое ур-ние с $D=0$

и $M_1'(1,-1,-1)$, $M_2'(-5,3,4)$

$$\begin{cases} A^2 + B^2 + C^2 = 1 \\ D = 0 \\ |A - B - C| = 1 \\ |-5A + 3B + 4C| = 3 \end{cases}$$

Домножим, если нужно, ур-ние плоскости на -1 $\Rightarrow$ м. сч. $A - B - C \geq 0$

• Пусть $-5A + 3B + 4C \leq 0$

$$\begin{cases} A - B - C = 1 \\ 5A - 3B - 4C = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 + B + C \\ 2B + C = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -(1+B) \\ C = -2(B+1) \end{cases}$$

$$(B+1)^2 + B^2 + 4(B+1)^2 = 1$$

$$6B^2 + 10B + 4 = 0$$

$$3B^2 + 5B + 2 = 0$$

$$3(B+1)\left(B + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} B = -1 \\ B = -\frac{2}{3} \end{array}\right. \qquad (A,B,C) = \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ (0, -1, 0) \end{array}\right.$$

•• $-\frac{1}{3} \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot 2 + D = 0$; $\quad D = 3$

•• $-2 + D = 0$; $\quad D = 2$

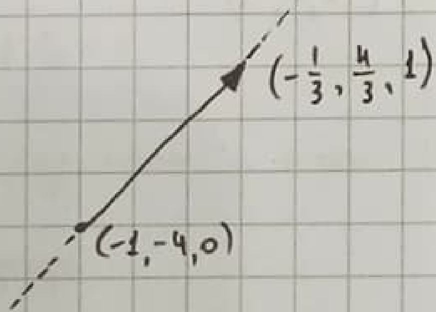
• Пусть $-5A+3B+4C \geq 0$, тогда решений не будет (надо поверить!)

② Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x+y-z+5=0 \\ 2x-y+2z-2=0 \end{cases}$$

$$\cdot(-2)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}-\mathrm{II}]{\mathrm{II}\cdot(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}z-1 \\ y=\frac{4}{3}z-4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}t-1 \\ y=\frac{4}{3}t-4 \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=t, \end{cases}$$

③ Ур-ние прямой, проходящей через т. $(3,5,1)$ паралл. прямой

$$\begin{cases} x=2+4t \\ y=-3t \\ z=-3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Парам. ур-ние: $\begin{cases} x=3+4t \\ y=5-3t \\ z=1 \end{cases}$

Ур-ние прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

В нашем случае: $M_1(3,5,1)$, $M_2(7,2,1)$

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-1}{0}$$

$$\begin{cases} -3x-4y+29=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

④ Взаимное расположение прямых.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6 + 3\cancel{t}s \\ y = -1 - 2\cancel{t}s \\ z = -2 + \cancel{t}s \end{cases}$$

Направляющие векторы: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

неколлинеарны $\Rightarrow$ либо пересекаются, либо скрещиваются.

$$\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -8 \\ 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -8 \\ 0 & -7 & 21 \\ 0 & -9 & 27 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = -2, \quad s = -3;$ пересекаются по точке $(-3, 5, -5)$.

⑤ Взаимное расположение прямой и плоскости:

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \quad \text{и} \quad 3x + 5y - z - 2 = 0$$

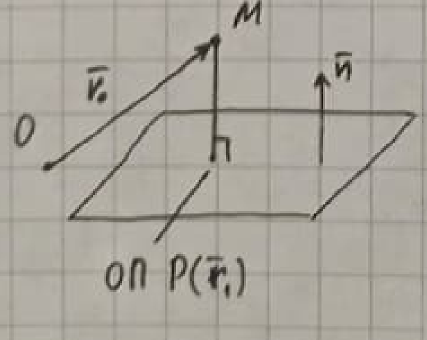
Направляющий вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ прямой;

нормаль $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ – не параллельны $\Rightarrow$ пересекаются

$$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0$$

$t = -3 \Rightarrow$ точка пересечения $(0, 0, -2)$

Ортогональная проекция точки $M(\bar{r}_0)$ на плоскость $\Pi: (\bar{r}, \bar{n}) + D = 0$



$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \lambda \bar{n}$$

$$\lambda = -\frac{(\bar{r}_0, \bar{n}) + D}{|\bar{n}|^2}$$

⑥ $M(1, 2, -3)$, $\Pi:\ 6x - y + 3z - 41 = 0$

$(\bar{r}_0, \bar{n}) = 6 - 2 - 9 = -5$, $\quad D = -41$

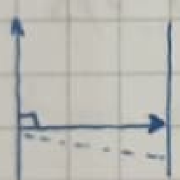
$|\bar{n}|^2 = 36 + 1 + 9 = 46 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{-5-41}{46} = 1$

$$\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⑦ Общий перпендикуляр к прямым

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1} \quad и \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$$

Если бы они были параллельны:



$$\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (6, -6, -24)$$ – напр. вектор перпендикуляра

$\Leftrightarrow (1, -1, -4) = \bar{n}$

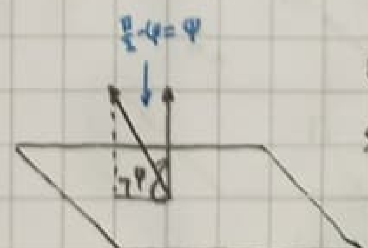
$\bar{a}_1 = (8, 4, 1)$, $\quad \bar{a}_2 = (2, -2, 1)$

$\bar{r}_1 = (1, 2, 3)$, $\quad \bar{r}_2 = (0, 0, 0)$

$\bar{r}_1 + t\bar{a}_1 + \lambda \bar{n} = \bar{r}_2 + s\bar{a}_2$

⑧ Угол между прямой и плоскостью

$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad и \quad 7x + 4y - 4z + 5 = 0$$



$\cos\varphi = \sin\psi$

$\sin\varphi = \cos\psi$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \cos\psi = \frac{28+4+4}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{81}} = \frac{36}{3\sqrt{2}\cdot 9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$