Лекция 9, 08.11.23

Теорема: рассмотрим ОСЛАУ $Ax=0$, у неё $\exists$ $n-r$ л.н.з. решений, где n - число неизвестных, $r = Rg A$.

$\square$ $A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & \vdots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ r уравнений (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + x_n \cdot a_{1n} = 0 \\ \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + x_n \cdot a_{rn} = 0 \end{cases}$

$x_1, \ldots, x_r$ - главные переменные (соотв. БМ M) - их число $r = Rg A$

$x_{r+1}, \ldots, x_n$ - свободные (их $n-r$)

Выразим главные через свободные в (*)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (**)$$

Присвоим свободным переменным след. набор значений:

1й набор	2й набор	…	$k=(n-r)$й набор
$x_{r+1}=1$	$x_{r+1}=0$	⋮	$x_{r+1}=0$
$x_{r+2}=0$	$x_{r+2}=1$	⋮	$x_{r+2}=0$
⋮	⋮	⋮	⋮
$x_n=0$	$x_n=0$	⋮	$x_n=0$

Для каждого набора решим СЛАУ (**) относительно $x_1 \ldots x_r$.

Она всегда имеет решение, т.к. это СЛАУ с кв. невыр. м-цей (её $\det = M^{БМ} \neq 0$). (т.е. например, реш. можно найти по ф. Крамера).

Получим след. решения: для

1го набора $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{1r} \end{pmatrix}$ 2го набора $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{2r} \end{pmatrix}$ … k-го $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \vdots \\ \varphi_{kr} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ столбцы

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{знач. гл. пер-х} \\ \\ \text{своб. пер.} \end{matrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \Phi_k = \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \vdots \\ \varphi_{kr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

явл. решениями СЛАУ(**) $\Leftrightarrow$ СЛАУ(*) $\Leftrightarrow$ исх. СЛАУ $Ax=0$

Здесь $k = n-r = n - Rg A$.

Покажем, что $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ – л.н.з.

Рассмотрим равенство: $\alpha_1 \Phi_1 + \dots + \alpha_k \Phi_k = 0 \iff$

$$\iff \alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \vdots \\ \varphi_{kr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}}^{\text{что-то}} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow$ по опр. $\Phi_1 \dots \Phi_k$ – л.н.з. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по опр. это и есть ФСР ■

Замечание 1: Построенная в ходе док-ва ФСР наз. нормальной. (в каждом столбце 1 св. переменная равна 1, остальные $=0$).

Замечание 2: Можно на свободных переменных задать любые значения так, чтобы на них получался БМ в матрице из $n-r$ решений $\Rightarrow$ получим другую ФСР $\Rightarrow$ различных ФСР бесконечно много, если $k = n - r \geq 1$.

Пример 1: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{ступ. вид}} \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & +1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{канон. вид}}$$

$(**) \begin{cases} x_1 = -9x_3 - 7x_4 \\ x_2 = 3x_3 + 4x_4 \end{cases}$ (x_1, x_2 – главные, x_3, x_4 – свободные)

$Rg A = r = 2 \Rightarrow n - r = 4 - 2 = 2$ столбца ФСР

	Φ_1	Φ_2
x_1	-9	-7
x_2	3	4
x_3	1	0
x_4	0	1

Подстав. знач. своб. перем-ых в $(**)$ $\Rightarrow$ находим соотв. знач. главных.

Φ_1 и Φ_2 – ФСР ОСЛУ

Следствие (критерий $\exists$ а ненул. реш. однор. кв. СЛАУ):

Пусть A — кв. матрица, тогда ОСЛАУ $Ax=0$ имеет ненул. решение $\Leftrightarrow \det A = 0$.

□ Необх. ($\Rightarrow$) Дано: $Ax=0$, д-ть: $\det A = 0$

$\boxed{\text{П}}$: предположим, что $\det A \neq 0 \Rightarrow$ по ф. Крамера СЛАУ имеет ед. решение, но всегда есть нул. реш. $\Rightarrow$ других (ненул.) нет $\Rightarrow$ противоречие.

Достаточность ($\Leftarrow$) Дано: $\det A = 0$, д-ть: $\exists$ реш. $x \neq 0$.

Пусть $\det A = 0 \Rightarrow RgA < n$

Пусть $RgA = r$. По теор (о $\exists$ реш. ФСР) $\exists$ $n-r>0$ л.н.з. решений. Это и есть ненул. реш. (т.к. нул. вектор л.з.). ■

Теорема (о структуре общего решения однор. СЛАУ):

Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ — ФСР ОСЛАУ $Ax=0$ ($k = n-r$, где $RgA = r$, n — число неизв.). Тогда $\forall$ реш. этой ОСЛАУ можно представить в виде: $X = c_1\Phi_1 + \dots + c_k\Phi_k$, где $c_1, \dots, c_k$ — нек. числа ($\in \mathbb{R}$).

□ Пусть $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ — произв. решение ОСЛАУ $Ax=0$. Покажем, что оно л/в. через ФСР.

Предположим, что БМ м-цы A располож. в левом верхнем углу. Тогда исх. СЛАУ эквив. системе:

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_n = -a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим (1) относительно главных пер-х (методом Гаусса или Крамера)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \ldots \\ x_r = \alpha_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}, \quad \text{где } \alpha_{ij} \text{ - нек. числа}$$

Составим м-цу D:

$$D = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} x_1^0 & \varphi_1^1 & \ldots & \varphi_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_r^0 & \varphi_r^1 & \ldots & \varphi_r^k \\ x_{r+1}^0 & \varphi_{r+1}^1 & \ldots & \varphi_{r+1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & \varphi_n^1 & \ldots & \varphi_n^k \end{array}\right)_{n\times(k+1)} \begin{array}{l} D_1 \\ \\ \\ D_{r+1} \\ \\ D_n \end{array} \Big\} n-r \text{ строк} \\ X_0 \quad \underbrace{\Phi_1 \quad \ldots \quad \Phi_k}_{\text{ФСР}} \end{array}$$

Здесь φ_i^j - компоненты столбцов, образующих ФСР

Покажем, что $Rg\, D = k$.

1) $Rg\, D \geq k$, т.к. $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ - л.н.з. (по опр. ФСР), а $Rg\, D$ = макс. числу л.н.з. столбцов (по теор. о ранге м-цы).

2) Покажем, что $Rg\, D \leq k$

Столбцы м-цы D: $X^0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$ - решения СЛАУ $Ax = 0$

След. из (2) получим, что

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \alpha_{1\,r+1} x_{r+1}^0 + \ldots + \alpha_{1n} x_n^0 \\ \varphi_1^1 &= \alpha_{1\,r+1} \varphi_{r+1}^1 + \ldots + \alpha_{1n} \varphi_n^1 \\ &\ldots \\ \varphi_1^k &= \alpha_{1\,r+1} \varphi_{r+1}^k + \ldots + \alpha_{1n} \varphi_n^k \end{aligned}$$

$D_1 \qquad D_{r+1} \qquad D_n$

То есть 1я строка м-цы D (назовём её D_1) явл. л.к. строк $D_{r+1} \ldots D_n$

$D_1 = \alpha_{1r+1} D_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n} D_n$

Аналогично с остальными строками до r-й:

$D_r = \alpha_{r r+1} D_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn} D_n$

Сделаем элем. преобразования:

$D_1 \mapsto D_1 - \alpha_{1r+1} D_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n} D_n$

$\ldots$

$D_r \mapsto D_r - \alpha_{rr+1} D_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn} D_n$

Получим м-цу D'

$$D \sim D' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ x^0_{r+1} & \varphi^1_{r+1} \ldots & \varphi^k_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^0_n & \varphi^1_n \ldots & \varphi^k_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, r \\ \\ \}\, n-r \text{ строк} \\ \\ \\ \end{array}$$

При элем. пр-ях ранг не меняется $\Rightarrow Rg\, D = Rg\, D' \leq k$

$\Rightarrow Rg\, D = k \Rightarrow$ т.к. столбцы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ – базисные (т.к. они лнз)

$\Rightarrow$ по теор. о БМ X_0 – их л/к., т.е. $\exists$ числа $c_1, \ldots, c_k$ $(\in \mathbb{R})$, такие что $X_0 = c_1 \varphi_1 + \ldots + c_k \varphi_k$ ■

Пример (из предыдущего примера):

Общ. реш. $Ax = 0$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 = c_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Неоднор. $\quad$ Неоднородные СЛАУ ($Ax = b$, где $b \neq 0$)

Теорема (о структуре общего реш. неоднор. СЛАУ):

Пусть дано частное реш. $\tilde{X}$ неодн. СЛАУ $Ax = b$.

Тогда $\forall$ решение этой СЛАУ может быть представлено в виде:

$X = \tilde{X} + c_1 \varphi_1 + \ldots + c_k \varphi_k$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ – ФСР соотв. ОСЛАУ $Ax=0$, $k = n - r$ (n – число пер.-х, $r = Rg\,A$).

□ Пусть X^0 произв. реш. НСЛАУ $Ax = b$. Тогда $(X^0 - \tilde{X})$ – реш. соотв. ОСЛАУ $Ax = 0$ (по св-ву ③ реш. СЛАУ) $\Rightarrow$ по теор. о структуре ОСЛАУ $\exists c_1, \ldots, c_k$ – нек. числа, такие что

$$X^0 - \tilde{X} = c_1 \varphi_1 + \ldots + c_k \varphi_k \Rightarrow X^0 = \underset{\text{частн. реш.}}{\tilde{X}} + \underbrace{c_1 \varphi_1 + \ldots + c_k \varphi_k}_{\text{общ. реш. ОСЛАУ } Ax=0}, \; k = n - Rg\,A$$ ■

Замеч.: $X_{\text{общ. неодн.}} = X_{\text{частн. неодн.}} + X_{\text{общ. одн.}}$

Пример 3: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ СЛАУ совместная по т. К-К (т.к. $Rg\,A = Rg(A \mid b) = 2$)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 9 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x_1 = 13 - 9x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -7 + 3x_3 + 4x_4 \end{cases}$