Сходимость функциональных последовательностей

1. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E

$$a)\ f_n(x) = \frac{nx^2}{x+3n+2},\ E = [0;+\infty), \qquad b)\ f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n},\ E = [0;2]$$

$$c)\ f_n(x) = n(x^{1/n}-1),\ E = [1;3].$$

2. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве E

$$a)\ f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}},\ E = [0;+\infty), \qquad b)\ f_n(x) = n\sin\frac{1}{nx},\ E = [1;+\infty).$$

3. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится НЕравномерно на множестве E

$$a)\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ E = [0;1],$$

$$b)\ f_n(x) = \ln\left(3+\frac{n^2e^x}{n^4+e^{2x}}\right),\ E = [0;+\infty).$$

Домашнее задание

1. Доказать, что если последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ равномерно сходятся на множестве E соответственно к $f(x)$ и $g(x)$, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ последовательность $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}$ равномерно сходится к $\alpha f(x) + \beta g(x)$ на E.

2. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходятся на множестве E к $f(x)$ и $g(x)$ - ограниченная на E функция, то последовательность $\{f_n(x) \cdot g(x)\}$ равномерно сходится к $f(x) \cdot g(x)$ на E.

3. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E

$$a)\ f_n(x) = (x-1)\operatorname{arctg} x^n,\ E = (0; +\infty),$$

$$b)\ f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + (x^2/2)^n},\ E = [0; +\infty).$$

4. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах $E,\ E_1,\ E_2$.

$$a)\ f_n(x) = \frac{4n\sqrt{nx}}{3 + 4n^2 x}, \qquad E = [\delta, +\infty),\ \delta > 0,$$

$$b)\ f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{n}{x}, \qquad E_1 = (0; a], a > 0, \quad E_2 = (0; +\infty).$$

Задачи для самостоятельного решения

Том 2, гл.5, §17

1. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах $E,\ E_1,\ E_2$.

$$a)\ f_n(x) = \frac{nx^2}{1+2n+x} \qquad E_1 = [0;1], \quad E_2 = [1;+\infty), \qquad №8(2)$$

$$b)\ f_n(x) = n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \qquad E_1 = [0;1], \quad E_2 = (1;+\infty), \qquad №8(5)$$

$$c)\ f_n(x) = \frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-nx} \qquad E_1 = [0;2), \quad E_2 = (2;+\infty), \qquad №8(6)$$

$$d)\ f_n(x) = \sqrt[n]{x^2+nx+1} \qquad E_1 = (0;1), \quad E_2 = (1;+\infty), \qquad №9(1)$$

$$e)\ f_n(x) = e^{-x^2-nx} \qquad E_1 = (0;1), \quad E_2 = (1;+\infty), \qquad №9(2)$$

$$f)\ f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n} \qquad E_1 = (0;2), \quad E_2 = (0;+\infty), \qquad №9(4)$$

$$g)\ f_n(x) = \frac{1}{x^3}\cos\frac{x}{n} \qquad E_1 = (0;1), \quad E_2 = (1;+\infty), \qquad №9(6)$$