ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Критерий $\exists$ ненулевых решений однородной квадратной СЛАУ

Пусть A - квадратная матрица, тогда ОСЛАУ $Ax=0$ имеет ненул. реш. $\Longleftrightarrow \det A = 0$.

□ ($\Rightarrow$) Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ по ф. Крамера СЛАУ имеет единственное решение, но всегда $\exists$ нул. реш. $\Rightarrow$ других (ненулевых) решений нет $\Rightarrow$ противоречие

($\Leftarrow$) $\det A = 0 \Rightarrow Rg A < n$. Пусть $Rg A = r$

По теореме о $\exists$ решений ФСР, $\exists$ $n-r>0$ л.н.з. решений. Это и есть ненулевое решение (т.к. нулевой вектор л.з.). ■

2. Теорема о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Пусть $\tilde{x}$ - частное решение неодн. СЛАУ $Ax=b$.

Тогда $\forall$ решение этой СЛАУ может быть представлено в виде:

$$x = \tilde{x} + c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k,$$ где $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ - ФСР соотв. ОСЛАУ $Ax=0$,
$k = n-r$ (n- число переменных, $r = R_g A$)

□ Пусть x^0 произвольное решение НСЛАУ $Ax=b$. Тогда $(x^0 - \tilde{x})$ - реш. соотв. ОСЛАУ $Ax=0$ (по свойству реш. СЛАУ) $\Rightarrow$ по теореме о структуре ОСЛАУ $\exists c_1, \ldots, c_k$ - некоторые числа, т.ч.

$$x^0 - \tilde{x} = c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k \Rightarrow x^0 = \tilde{x} + c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k, \quad k = n - R_g A$$ ■

3. Формула Муавра

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi))$$

□ По мат. индукции:

База $n=1$: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Пусть верно для $n=k$.

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= r^{k+1}\cdot(\cos(k\varphi)\cdot\cos\varphi - \sin(k\varphi)\cdot\sin\varphi + i(\sin(k\varphi)\cdot\cos\varphi + \cos(k\varphi)\sin\varphi)) =$$
$$= r^{k+1}(\cos(k\varphi+\varphi) + i\sin(k\varphi+\varphi)) =$$
$$= r^{k+1}(\cos((k+1)\varphi) + i\sin((k+1)\varphi)) \Rightarrow \text{верно для } \forall n \in \mathbb{N}$$ ■

4. Скалярное произведение

Пусть $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$,
$\bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3$, тогда $(\bar{a}, \bar{b}) = (a_1\ a_2\ a_3)\cdot\Gamma\cdot(b_1\ b_2\ b_3)^T$, где $\Gamma = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1,\bar{e}_1) & (\bar{e}_1,\bar{e}_2) & (\bar{e}_1,\bar{e}_3) \\ (\bar{e}_2,\bar{e}_1) & (\bar{e}_2,\bar{e}_2) & (\bar{e}_2,\bar{e}_3) \\ (\bar{e}_3,\bar{e}_1) & (\bar{e}_3,\bar{e}_2) & (\bar{e}_3,\bar{e}_3) \end{pmatrix}$

□ Вывод: $(\bar{a},\bar{b}) = (a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3,\ b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) = (a_1\bar{e}_1,\ b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) + (a_2\bar{e}_2,\ b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) +$
$+ (a_3\bar{e}_3,\ b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) = (a_1\bar{e}_1, b_1\bar{e}_1) + (a_1\bar{e}_1, b_2\bar{e}_2) + (a_1\bar{e}_1, b_3\bar{e}_3) + (a_2\bar{e}_2, b_1\bar{e}_1) + (a_2\bar{e}_2, b_3\bar{e}_3) + (a_2\bar{e}_2, b_2\bar{e}_2) +$
$+ (a_3\bar{e}_3, b_1\bar{e}_1) + (a_3\bar{e}_3, b_2\bar{e}_2) + (a_3\bar{e}_3, b_3\bar{e}_3) = a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_1)b_1 + a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_2)b_2 + a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_3)b_3 + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_1)b_1 + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_3)b_3 +$
$+ a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_2)b_2 + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_1)b_1 + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_2)b_2 + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_3)b_3 = b_1(a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_1) + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_1) + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_1)) +$
$+ b_2(a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_2) + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_2) + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_2)) + b_3(a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_3) + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_3) + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_3)) =$

$$= \left(a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_1) + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_1) + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_1) \quad a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_2) + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_2) + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_2) \quad a_1(\bar{e}_1,\bar{e}_3) + a_2(\bar{e}_2,\bar{e}_3) + a_3(\bar{e}_3,\bar{e}_3)\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} (\bar{e}_1,\bar{e}_1) & (\bar{e}_1,\bar{e}_2) & (\bar{e}_1,\bar{e}_3) \\ (\bar{e}_2,\bar{e}_1) & (\bar{e}_2,\bar{e}_2) & (\bar{e}_2,\bar{e}_3) \\ (\bar{e}_3,\bar{e}_1) & (\bar{e}_3,\bar{e}_2) & (\bar{e}_3,\bar{e}_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ ■

5. Векторное произведение

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\bar{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\bar{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\bar{k}(a_xb_y-a_yb_x)$$

□ $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – правый ОНБ, тогда

1) $\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$

2) $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$ $\quad \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$

3) $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$ $\quad \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}$

4) $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$ $\quad \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}$

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=$$

$$=a_xb_x\bar{i}^2+a_xb_y\bar{i}\bar{j}+a_xb_z\bar{i}\bar{k}+a_yb_x\bar{j}\bar{i}+a_yb_y\bar{j}^2+a_yb_z\bar{j}\bar{k}+a_zb_x\bar{k}\bar{i}+a_zb_y\bar{k}\bar{j}+a_zb_z\bar{j}^2=$$

$$=0+a_xb_y\bar{k}+(-\bar{j})a_xb_z-\bar{k}a_yb_x+0+a_yb_z\bar{i}+\bar{j}a_zb_x-\bar{i}a_zb_y+0=$$

$$=\bar{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\bar{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\bar{k}(a_xb_y-a_yb_x)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$ ■

6. Смешанное произведение и объём.

V – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

$$(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=\begin{cases}V, & \bar{a},\bar{b},\bar{c}\text{ – правая тройка}\\ -V, & \bar{a},\bar{b},\bar{c}\text{ – левая тройка}\end{cases}$$

□ $|\bar{a}\times\bar{b}|=S$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Обозначим за $\bar{l}$ единичный орт, сонаправленный с $\bar{a}\times\bar{b}$, т.е. $\bar{a}\times\bar{b}=S\cdot\bar{l}$

$(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=(S\cdot\bar{l},\bar{c})=S(\bar{l},\bar{c})=S\cdot|\bar{c}|\cdot|\bar{l}|\cdot\cos\varphi=S\cdot|\bar{c}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между $\bar{c}$ и $\bar{l}$

1) $\varphi\in[0;\pi)$, если $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – правая тройка

$\cos\varphi>0 \Rightarrow |\bar{c}|\cdot\cos\varphi=h$ – высота парал-пипед

2) $\varphi\in[\pi;2\pi)$, если $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – левая тройка

$\cos\varphi<0 \Rightarrow |\bar{c}|\cdot\cos\varphi=-h$

Тогда $(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=\begin{cases}Sh, & \bar{a},\bar{b},\bar{c}\text{ – правая тройка}\\ -Sh, & \bar{a},\bar{b},\bar{c}\text{ – левая тройка}\end{cases}$ ■

7.
1) Любая плоскость в пространстве определяется ур-ем $Ax+By+Cz+D=0$.

2) Любое ур-ние $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$ определяет в пространстве плоскость.

□ 1) Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$. Рассмотрим вектор $\bar{n}\perp\pi$. Пусть $\bar{n}=(A,B,C)$.

$M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow (\bar{n},\overline{M_0M})=0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, т.е.

$Ax+By+Cz+D=0$, где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Таким образом, координаты т. M удовлетв. ур-нию $Ax+By+Cz+D=0$.

2) Ур-ние $Ax+By+Cz+D=0$ имеет хотя бы 1 реш.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$. Пусть т. $M(x,y,z)$ удовлетв. ур. $Ax+By+Cz+D=0$. Вычтем из него $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow (\bar{n},\overline{M_0M})=0$, где $\bar{n}=(A,B,C) \Leftrightarrow \bar{n}\perp\overline{M_0M} \Leftrightarrow$ точка M лежит в плоскости, проходящей через M_0 и перпендик. вектору $\bar{n}$ $\Rightarrow$ ур-ние $Ax+By+Cz+D=0$ определяет плоскость ■