

Содержание

1	Задача 5	2
1.1	Пункт a	2
1.2	Пункт b	2
1.3	Пункт c	2
1.4	Пункт d	3
2	Задача 6	3
3	Задача 7	3
3.1	Ссылки на определения	3
3.2	Решение	3
4	Задача 8	4
4.1	Пункт a	4
4.2	Пункт b	4
4.3	Пункт c	4
5	Задача 9	5

Дискретная математика. HSE-SE-DM-HW1.

Ахундов Алексей Назимович

Сентябрь 2020

1 Задача 5

1.1 Пункт а

Обозначим множество всех птиц B , всех зверей C .
Введем предикат $F(x)$, определяющий, есть ли у x перья.

$$(\neg(\exists x : x \notin B \implies F(x)) \wedge (\forall x : x \in C \implies x \notin B)) \implies (\forall x : x \in C \implies \neg F(x))$$

Пусть это неверно. Тогда посылка верная, а следствие - нет, а значит, некоторые звери обладают перьями, но это противоречит первому выражению посылки.

Высказывание верно.

1.2 Пункт б

Обозначим множество математиков - M , объект 'Павел' - P .
Введем предикат $S(x)$ - может ли x решить эту задачу.

$$(\forall x : x \in M \implies ((\exists y : S(y)) \implies S(x))) \wedge (P \in M) \wedge \neg S(P) \implies \neg(\exists x : S(x))$$

Пусть это неверно. Тогда задачу кто-то может решить, но тогда посылка неверна, поскольку Павел математик и решить задачу не смог, хотя если он математик и задача решаемая (что мы и предположили), он должен её решать. Противоречие.

Высказывание верно.

1.3 Пункт с

Воспользуемся обозначениями предыдущего пункта.

$$(\forall x : S(x) \implies x \in M) \wedge \neg S(P) \implies P \notin M$$

Пусть это неверно. Тогда справедливо $P \in M$, следовательно, Павел может и решить эту задачу, и не решить её. Противоречие.

Высказывание верно.

1.4 Пункт d

Воспользуемся обозначениями пункта b.

$$(\forall x : S(x) \implies x \in M) \wedge \neg(\exists x : x \in M \implies S(x)) \implies \neg(\exists x : S(x))$$

Пусть это неверно, тогда задача решаемая. Возьмем произвольный объект, который может решить эту задачу y . Тогда $y \in M$ по первому высказыванию посылки, для него справедливо $y \in M \implies S(y)$, что противоречит второму высказыванию посылки.

Высказывание верно.

2 Задача 6

Сначала докажем, что ответ c никогда не верный ответ. Пусть ответ c верный, тогда кол-во правильных ответов как минимум 1, что составляет $25\% \neq 0\% \implies \perp$.

Теперь рассмотрим ответ b . Если он верный, то больше никакой ответ среди данных не может быть верным, поэтому этот ответ является верным.

Теперь рассмотрим ответ a не умаляя общности (точно так же можно рассмотреть ответы d и a). Он верный, если к нему взять ответ d и больше никакой другой, поэтому ответы a и d являются верными.

Таким образом, ответы $[b]$ и $[a, d]$ являются верными по отдельности, но не вместе, поэтому ответ не определён: либо 25%, либо 50%

3 Задача 7

3.1 Ссылки на определения

$$\mathbf{I1} : \forall S : (S \neq []) \implies \text{init}(x : s) = x : \text{init}(s)$$

$$\mathbf{I2} : \forall x : \text{init}(x : []) = []$$

$$\mathbf{A1} : \forall x, s, t : \text{app}(x : s, t) = x : \text{app}(s, t)$$

$$\mathbf{A2} : \forall t : \text{app}([], t) = t$$

$$\mathbf{R1} : \forall x, s : \text{rev}(x : s) = \text{app}(\text{rev}(s), x)$$

$$\mathbf{R2} : \text{rev}([]) = []$$

$$\mathbf{E1} : \forall x, s, y, t : x : s = y : t \equiv (x = y) \wedge (s = t)$$

$$\mathbf{E2} : \forall s \neq [] : s = [] \equiv [] = s \equiv \text{False}$$

$$\mathbf{E3} : [] = [] \equiv \text{True}$$

3.2 Решение

Упрости выражение, вычислив $\text{init}(\text{студент})$ по определению.

$$\text{init}(\text{студент}) \stackrel{I1}{=} c : \text{init}(\text{т:удент}) \stackrel{I1}{=} c : (\text{т} : \text{init}(\text{у:дент})) \stackrel{I1}{=} \dots : \text{init}(\text{т:[]}) \stackrel{I2}{=} \text{студент}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Теперь вычислим } rev(c:туден) \stackrel{R1}{=} app(rev(t:уден), [c]) \stackrel{R1}{=} \\
& = app(app(rev(y:ден), [t]), [c]) \stackrel{R1}{=} \dots \stackrel{R1}{=} \\
& = app(app(app(app(app(app(rev([], [н]), [е]), [д]), [у]), [т]), [с]) \stackrel{R2}{=} \\
& = app(app(app(app(app(app([], [н]), [е]), [д]), [у]), [т]), [с]) \stackrel{A2}{=} \\
& = app(app(app(app(app([], [н]), [е]), [д]), [у]), [т]), [с]) \stackrel{A1}{=} \dots = \text{недутс}
\end{aligned}$$

Далее вычислим

$$init(\text{недутс}) \stackrel{I1}{=} н : init(e:дутс) \stackrel{I1}{=} \dots : init(t:[]) \stackrel{I2}{=} н:(e:(д:(y:(t:[])))) = \text{недут}$$

Осталось понять, равны ли строки.

$$\begin{aligned}
н:едут &= н:едут \stackrel{E1}{=} (н = н) \wedge (e:дут = e:дут) \stackrel{E1}{=} (н = н) \wedge \dots \wedge ([=]) \stackrel{E3}{=} \\
& True. \text{ Ч.Т.Д.}
\end{aligned}$$

4 Задача 8

4.1 Пункт а

Докажем сначала $(lh(s) = 0) \implies (s = [])$. Пусть это неверно. Тогда

$$s \neq [] \implies s = x : t \implies lh(x : t) = 1 + lh(t) \geq 1. \perp$$

Обратное верно по определению $(s = []) \implies (lh(s) = 0)$

4.2 Пункт b

Докажем по индукции.

База индукции: $lh(app([], [])) = lh([]) = lh([]) + lh([]) = 0$

Шаг индукции:

$$lh(app(x : s, t)) = lh(x : app(s, t)) = 1 + lh(app(s, t)) \stackrel{\text{По ПИ}}{=} 1 + lh(s) + lh(t)$$

$$lh(x : s) + lh(t) = 1 + lh(s) + lh(t)$$

$$\text{Следовательно: } lh(app(x : s, t)) = lh(x : s) + lh(t)$$

4.3 Пункт с

Рассмотрим отдельно случай при $s = []$. $lh(rev([])) = lh([]) = 0$. Верно.

Во всех остальных случаях: $s = x : t$. $lh(rev(x : t)) = lh(app(t, [x]))$.

По пункту b имеем: $lh(app(t, [x])) = lh(t) + lh([x]) = lh(t) + 1$.

В то время как $lh(x : t) = 1 + lh(t)$.

Получаем $lh(rev(x : t)) = lh(app(t, [x])) = lh(x : t)$. Верно.

Ч.Т.Д.

5 Задача 9

Рассмотрим посылку как истину. Тогда перевернем строки-стороны равенства. Это делать можно, так как для равных строк справедливо равенство по крайней мере элементарных (rev, \dots) функций от них (лемма).

В силу леммы: $\forall A, (a, b \in S(A)) : rev(app(a, b)) = app(rev(a), rev(b))$

Справедливо $rev(app(t, s)) = rev(app(r, s)) \equiv app(rev(s), rev(t)) = app(rev(s), rev(r))$

В силу леммы: $\forall A, (a, b, c \in S(A)) : app(c, a) = app(c, b) \implies a = b$ упростим это выражение: $app(rev(s), rev(t)) = app(rev(s), rev(r)) \equiv rev(t) = rev(r)$.

Теперь осталось только использовать еще одну лемму: $\forall A, (a \in S(A)) : rev(rev(a)) = a$ и еще раз перевернуть строки-стороны уравнения: $rev(t) = rev(r) \equiv rev(rev(t)) = rev(rev(r)) \equiv t = r$.

Тогда следствие тоже истинно, значит все утверждение истинно. Ч.Т.Д.