# Семинар 25

## 1 Повторение

Примеры подпространств. Линейная оболочка конечного набора векторов.

Ранг системы векторов. Утверждение о том, что ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из столбцов их координат в некотором базисе.

Пересечение подпространств. Сумма и прямая сумма подпространств. Утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств. Критерий того, что сумма подпространств является прямой.

Билинейная форма и её матрица. Формула для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса.

## 2 Задачи

Заметим, что множество решений СЛУ $Ax = b$ является подпространством тогда и только тогда, когда $b = 0$.

**Задача 1.** Является ли подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

1. все векторы $\mathbb{R}^n$, координаты которых – целые числа;

2. все векторы $\mathbb{R}^3$, не лежащие на данной прямой?

**Задача 2.** Перечислить все линейные подпространства пространства $\mathbb{R}^3$.

**Задача 3.** Пусть $F$ – поле. Доказать, что следующие системы векторов образуют подпространства в $F^n$ и найти их базис и размерность:

1. все векторы, у которых первая и последняя координаты равны между собой;

2. все векторы, у которых координаты с чётными номерами равны между собой.

Пусть $F$ – поле и $n \in \mathbb{N}$. Напомним, что матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$ называется *симметричной* (*кососимметричной*), если

$$A^T = A \ (A^T = -A \text{ соответственно}).$$

Если $\operatorname{char} F = 2$, то понятия симметричности и кососимметричности совпадают.

Обозначим через $V$ множество всех матриц порядка $n$, через $U$ – множество всех симметричных матриц порядка $n$ и $W$ – множество всех кососимметричных матриц порядка $n$. Тогда $U, W \subseteq V$ – подпространства. При этом

$$\dim V = n^2, \text{ базис: } E_{ij}, \ 1 \le i, j \le n;$$

$$\dim U = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ базис: } E_{ij} + E_{ji}, \ 1 \le i \le n, \ i < j \le n \text{ и } E_{ii}, \ 1 \le i \le n;$$

$$\dim W = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ базис: } E_{ij} - E_{ji}, \ 1 \le i \le n, \ i < j \le n \text{ при } \operatorname{char} F \ne 2.$$

Пусть $\operatorname{char} F \ne 2$. Тогда для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(F)$ верно разложение

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

в сумму симметричной и кососимметричной матриц.

Пусть $U, W \le V$ – векторные пространства над полем $F$. Определим *сумму подпространств*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, \ w \in W\}.$$

Множества $U + W$ и $U \cap W$ являются подпространствами в $V$, причём

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Поэтому, если среди чисел $\dim(U+W)$, $\dim(U \cap W)$, $\dim U$ и $\dim W$ известно три, то четвёртое легко находится по формуле.

Если $U$ и $W$ заданы с помощью ОСЛУ $Ax = 0$ и $Bx = 0$ соответственно, то $U \cap W$ задаётся объединённой ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0.$$

Наоборот, если $U$ и $W$ заданы линейными оболочками $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ и $\langle w_1, \ldots, w_l \rangle$ соответственно, то $U + W$ задаётся объединённой линейной оболочкой

$$\langle u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l \rangle.$$

Отсюда получаем и способ находить базисы $U \cap W$ и $U + W$: нужно просто перейти к нужному способу задания подпространств.

**Задача 4.** Найти размерность суммы и размерность пересечения подпространств

$$\langle(1,2,0,1),\ (1,1,1,0)\rangle$$

и

$$\langle(1,0,1,0),\ (1,3,0,1)\rangle.$$

Пусть $U, W \leq V$. Следующие условия эквивалентны:

1. для любого $v \in V$ существуют единственные $u \in U$ и $w \in W$ такие, что $v = u + w$;
2. $U + W = V$ и $U \cap W = \{0\}$;
3. $\dim(U + W) = \dim V$ и $\dim(U \cap W) = 0$.

Если пара подпространств $U, W \leq V$ удовлетворяет одному из этих условий, то говорят, что подпространство $V$ является *прямой суммой* подпространств $U$ и $W$. Обозначение: $V = U \oplus W$.

Пусть $V = U \oplus W$, $v \in V$ и $v = u + w$, где $u \in U$ и $w \in W$. Вектор $u$ называется *проекцией вектора $v$ на подпространство $U$ вдоль подпространства $W$*, а вектор $w$ называется *проекцией вектора $v$ на подпространство $W$ вдоль подпространства $U$*.

**Задача 5.** Пусть $\operatorname{char} F$ не делит $n$. Доказать, что пространство $F^n$ является прямой суммой подпространств, заданных ОСЛУ

$$x_1 + \ldots + x_n = 0$$

и

$$x_1 = \ldots = x_n.$$

Найти обе проекции векторов $e_1, \ldots, e_n$ стандартного базиса.

Пусть $V = U \oplus W$, $v \in V$, $U = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ и $W = \langle w_1, \ldots, w_l\rangle$. Чтобы найти проекции $v$ на $U$ и $W$, достаточно решить СЛУ

$$x_1u_1 + \ldots + x_ku_k + y_1w_1 + \ldots + y_lw_l = v$$

относительно переменных $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$. Тогда проекции $v$ на $U$ и $W$ равны соответственно

$$x_1u_1 + \ldots + x_ku_k \text{ и } y_1w_1 + \ldots + y_lw_l.$$

Есть альтернативный способ нахождения базиса пересечения двух подпространств $U, W \leq F^n$, заданных линейными оболочками:

$$U = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle \text{ и } W = \langle w_1, \ldots, w_l\rangle.$$

Для любого вектора $v \in U \cap W$ найдутся скаляры $\lambda_i, \mu_j$, для которых

$$v = \lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_ku_k = \mu_1w_1 + \ldots + \mu_lw_l.$$

Это означает, что данные наборы скаляров представляют собой решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{l} \mu_j w_j,$$

то есть ОСЛУ.

Получаем следующий алгоритм нахождения базиса в $U \cap W$:

1. записываем векторы $u_1, \ldots, u_k$ в столбцы матрицы $A$, а векторы $w_1, \ldots, w_l$ – в столбцы матрицы $B$;

2. приводим матрицу $(A \mid B)$ к улучшенному ступенчатому виду;

3. по улучшенному ступенчатому виду выписываем ФСР для нашей ОСЛУ – первые $k$ коэффициентов отвечают скалярам $\lambda_i$, а последние $l$ – скалярам $-\mu_j$;

4. для каждого элемента найденной ФСР находим вектор $v$ по одной из формул

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \text{ или } v = \sum_{j=1}^{l} \mu_j w_j$$

   (здесь можно себя проверить);

5. для всех полученных векторов $v$ выбираем базис их линейной оболочки: это и будет базис в $U \cap W$.

Приятный бонус: чтобы найти базис в $U + W$, нужно всё ту же матрицу $(A \mid B)$ привести к ступенчатому виду. Таким образом, описанный альтернативный алгоритм даёт возможность найти базис в $U + W$ и $U \cap W$, используя одну и ту же матрицу $(A \mid B)$.

**Задача 6.** Найти базис суммы и пересечения подпространств

$$U = \langle (1,2,1),\ (1,1,-1),\ (1,3,3) \rangle$$

и

$$W = \langle (2,3,-1),\ (1,2,2),\ (1,1,-3) \rangle$$

в $\mathbb{R}^3$.

*Решение.* Составим матрицу $(A \mid B)$, записав наши векторы по столбцам, и приведём её к улучшенному ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда сразу получаем, что базисом суммы $U + W$ являются первый, второй и четвёртый векторы:

$$(1, 2, 1),\ (1, 1, -1),\ (2, 3, -1).$$

Далее, находим ФСР:

$$(-2, 1, 1, 0, 0, 0),\ (-2, -1, 0, 1, 1, 0),\ (2, 1, 0, -2, 0, 1).$$

Значит, пересечение $U \cap W$ порождено векторами

$$(0, 0, 0) = (-2) \cdot (1, 2, 1) + 1 \cdot (1, 1, -1) + 1 \cdot (1, 3, 3) =$$

$$= (-0) \cdot (2, 3, -1) + (-0) \cdot (1, 2, 2) + (-0) \cdot (1, 1, -3);$$

$$(-3, -5, -1) = (-2) \cdot (1, 2, 1) + (-1) \cdot (1, 1, -1) + 0 \cdot (1, 3, 3) =$$
$$= (-1) \cdot (2, 3, -1) + (-1) \cdot (1, 2, 2) + (-0) \cdot (1, 1, -3)$$

и

$$(3, 5, 1) = 2 \cdot (1, 2, 1) + 1 \cdot (1, 1, -1) + 0 \cdot (1, 3, 3) =$$
$$= 2 \cdot (2, 3, -1) + (-0) \cdot (1, 2, 2) + (-1) \cdot (1, 1, -3).$$

Выделяем из этой системы линейно независимую подсистему и получаем, что базисом $U \cap W$ является вектор

$$(3, 5, 1).$$

$\blacksquare$