Лекция 20, 16.02.24 (online) Привет читающим лекцию)

Опр: Мн-во $E \subseteq \mathbb{R}$ наз. <u>множеством нулевой меры Лебега</u>, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счётный набор интервалов $\{(a_i; b_i)\}_{i=1}^{\infty}$:

1) он покрывает E $\quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i; b_i)$

2) $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$

Пример: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ нулевой меры Лебека

$\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad (a_i; b_i) = U_{\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}}(r_i)$

$$Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i;b_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=\sum_{i=1}^{n}2\cdot\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}=\varepsilon$$

Свойства:

1) Если $A \subseteq \mathbb{R}$ нулевой меры Лебега, $B \subseteq A$, то B – нулевой меры Лебега.

□ B, $\varepsilon>0$ $\to$ построим $\{(a_i;b_i)\}_{i=1}^{n}$, которые покрывают $A \Rightarrow B$ ■

2) Если X, Y – нулевой меры Лебега, то $X \cup Y$ – нулевой меры Лебега.

□ X, Y, $\varepsilon>0$

Для $\frac{\varepsilon}{2}$ построим X и Y $\{(a_i;b_i)\}$ $\{(c_i;d_i)\}$

$X \cup Y$ $\{(e_i;f_i)\}_{i=1}^{n}$

$$e_i=\begin{cases}a_j, & if \quad i=2j\\ c_j, & if \quad i=2j+1\end{cases} \qquad f_i=\begin{cases}b_j, & if \quad i=2j\\ d_j, & if \quad i=2j+1\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i-e_i|=\sum_{j=1}^{\infty}|b_j-a_j|+\sum_{j=1}^{\infty}|d_j-c_j|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(e_i;d_i)\supseteq X\cup Y$$ ■

Свойства определённого интеграла:

$\boxed{1}$ **Линейность**

Если $f, g \in R\,[a;b]$, то $\alpha f+\beta g \in R\,[a;b]$ $\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)\,dx=\alpha\int_a^b f\,dx+\beta\int_a^b g\,dx$$

□ f, g – огр. $\oplus$ X_f – мн-во точек разрыва X_g $\quad \mu(X_f)=\mu(X_g)=0$

Рассмотрим $\underbrace{X_{\alpha f + \beta g}}_{\text{огр.}} \subseteq X_f \cup X_g$

$\mu(X_{\alpha f+\beta g}) = 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathbb{R}[a;b]$

$\forall \tau \quad \forall\{\xi_i\} \quad \sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \alpha \underbrace{\sigma_\tau(f)} + \beta \underbrace{\sigma_\tau(g)}$

$$\sigma_\tau(\alpha f+\beta g) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \underbrace{\int_a^b f dx} + \beta \underbrace{\int_a^b g dx}$$

$\boxed{2}$ Если $f, g \in \mathbb{R}[a;b]$, то

$f \cdot g \in \mathbb{R}[a;b]$ и $|f| \in \mathbb{R}[a;b]$

$\boxed{3}$ Аддитивность

$f \in \mathbb{R}[a;c] \qquad$ т. $b \in (a;c)$

$f \in \mathbb{R}[a;b] \cup \mathbb{R}[b;c]$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x)dx$$

$\square$ По Гейне: $\forall \tau_n$ разб. $[a;c]$: $d(\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\forall\{\xi_i^n\} \quad \sigma_{\tau_n}(f) = \sum_i f(\xi_i^n) \cdot \Delta x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$

Рассмотрим последовательность τ_n такую, что b является точкой этого разбиения: $\tau_n^0 = \underbrace{\tau_n^1}_{\text{разб. }[a;b]} \cup \underbrace{\tau_n^2}_{\text{разб. }[b;c]}$

$$\sigma_{\tau_n^0}(f) = \sigma_{\tau_n^1}(f) + \sigma_{\tau_n^2}(f)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^c f dx \qquad \int_a^b f(x) dx \qquad \int_b^c f(x)dx$$

$\boxed{4}$ Интегрирование неравенств

$f, g \in \mathbb{R}[a;b]$ и $f(x) \leq g(x)$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

□ $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0 \in \mathbb{R}[a;b]$

$$\sigma_\tau(h) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b h(x)dx \geq 0$$

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \quad \blacksquare$$

$\boxed{5}$ Теорема о среднем

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\exists \xi \in [a;b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$(b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x)dx$$

□ $m \leq f(x) \leq M$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

$E_f = [m; M] \quad \exists \xi \in [a;b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \blacksquare$

$\boxed{6}$ Оценка интеграла

$f(x) \in \mathbb{R}[a;b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

□ $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \blacksquare$

Обобщённое понятие интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Замечание: $\forall c_1, c_2, c_3 \in [a;b]$

1) $\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx$

2) $\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|\,dx \right|$

Интеграл с переменным верхним пределом

$f(x)$ на $[\alpha;\beta]$ $\qquad a, x \in [\alpha, \beta]$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad F(a) = 0$

Теорема 1: $F(x)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$

$\square$ $|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$

$= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\,dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} M\,dt \right| \leq M \cdot |\Delta x| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$ $\blacksquare$

Теорема 2: Если $f(x)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то $F(x)$ дифф. на $(\alpha;\beta)$ и $F'(x) = f(x)$

$\square$ $\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \underset{\uparrow \text{ т.о среднем}}{=} f(\xi) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$, где $\xi \in [x; x+\Delta x]$

Теорема (Формула Ньютона – Лейбница):

Если $F(x)$ – первообразная $f(x)$ на $(\alpha;\beta)$, $f(x)$ непр. на $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$\square$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) \;=$

$F(x)$ – первообр. $f(x)$ на $(\alpha; \beta)$

$F(x) = \Phi(x) + C$ на $(\alpha; \beta)$

$F(a) = \Phi(a) + C \Rightarrow C = F(a) - \Phi(a)$

$= \Phi(b) + C = \Phi(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$ $\blacksquare$