ДЗ к семинару 2

Задача 1. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти решение системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса

$$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

Задача 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $1 \le i \ne j \le n$. Определим квадратную матрицу порядка n

$$T_{ij} = E_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj},$$

то есть T_{ij} является единичной матрицей, в которой поменяли местами i-ую и j-ую строки.

Рассмотрим матрицы A и B размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. Вычислить матрицы $T_{ij}A$ и BT_{ij}. Каким элементарным преобразованиям строк и столбцов отвечает домножение на матрицу T_{ij}?

Задача 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Определим квадратную матрицу порядка n

$$D_i(\lambda) = E_n + (\lambda - 1)E_{ii},$$

то есть $D_i(\lambda)$ является единичной матрицей, в которой i-ую строку домножили на λ.

Рассмотрим матрицы A и B размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. Вычислить матрицы $D_i(\lambda)A$ и $BD_i(\lambda)$. Каким элементарным преобразованиям строк и столбцов отвечает домножение на матрицу $D_i(\lambda)$?

Задача 5. Пусть A – матрица, записанная в улучшенном ступенчатом виде. Доказать, что с помощью элементарных преобразований столбцов матрицы A можно получить матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать также, что при этом достаточно преобразований столбцов второго и третьего типов.

Задача 6. Используя результаты предыдущих задач и задач с семинара, доказать, что для любой матрицы A размера $m \times n$ существуют такие матрицы B и C размера $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, что

$$BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы B и C являются произведением нескольких матриц вида $L_{ij}(\lambda)$ и $D_i(\lambda)$.

Задача 7. Квадратная матрица $C = (c_{ij})$ порядка n называется *диагональной*, если $c_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Рассмотрим матрицы A и B размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. Вычислить матрицы CA и BC. Описать умножение на диагональную матрицу в терминах элементарных преобразований строк и столбцов.

Задача 8. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$. Доказать, что произведение двух верхнетреугольных матриц является верхнетреугольной матрицей.

Задача 9. * Вспомним задачу про числа Фибоначчи из прошлого ДЗ (её утверждение здесь можно использовать без доказательства). Показать, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Вывести отсюда формулу Бине:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad \forall n \geq 0.$$