

**Подготовка к КР4**

Контрольная работа будет разбита на 3 блока:

1. Задачи на вычисление на 40 баллов. Достаточно знать алгоритмы подсчета значений.
2. Задачи на проверку критериев и исследования на 40 баллов. Отличаются от предыдущих только тем, что требуют... воображения.
3. Задачи без четких алгоритмов решения на 40 баллов.

**Блок 1**

1. Подсчет частных производных, производных по направлению, градиента.
  - (a) Найти дифференциал функции  $f(x; y; z) = e^{xy \sin z}$ . (Гл.1, §3, 16(2))
  - (b) Найти производную функции  $f(x; y; z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$  в направлении вектора  $\vec{l} = (2/3; 2/3; 1/3)$  в точке  $M(3; 3; 1)$ . (Гл.1, §3, 39(3))
  - (c) Найти производную функции  $f(x; y; z) = xy^2z^3$  в направлении вектора  $\overrightarrow{M_0M}$ , если  $M_0(3; 2; 1)$  и  $M(7; 5; 1)$ . (Гл.1, §3, 43(2))
  - (d) Решить уравнение  $\text{grad } f = \vec{0}$  для функции  $f(x; y; z) = 2z^3 + x^2 + 2y^2 + xy + 3x - 2y - 6z + 1$ . (Гл.1, §3, 41(1))
  - (e) Найти единичный вектор  $\vec{l}$ , в направлении которого частная производная функции  $f(x; y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$  принимает в точке  $M(3; 1)$  наибольшее значение. (Гл.1, §3, 49(2))
2. Подсчет производных неявно заданных функций.
  - (a) Найти частные производные функции  $u(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $e^u - xyu - 2 = 0$  в точке  $M(1; 0)$ . (Гл.1, §3, 60(2))
  - (b) Найти в точке  $(1; 1)$  частные производные для дифференцируемых функций  $u(x; y)$  и  $v(x; y)$ , заданных неявно условиями (Гл.1, §3, 76)

$$x = \sqrt{2}e^{u/x} \cos \frac{v}{y}, \quad y = \sqrt{2}e^{u/x} \sin \frac{v}{y}, \quad u(1; 1) = 0, \quad v(1; 1) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Задачи на экстремум (требуется найти критические точки, в которых частные производные обнуляются, и проверить знакоопределенность матрицы Гессе в них)

(a) Исследовать функцию  $f(x; y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$  на экстремум. (Гл.1, §5, 5(1))

(b) Исследовать функцию  $f(x; y; z) = \frac{xy+xz^2+y^2z}{xyz} + x + 1$  на экстремум. (Гл.1, §5, 14(1))

(c) Исследовать на строгий экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию  $u(x; y)$ , заданную неявно уравнением (Гл.1, §5, 18(3))

$$x^3 - y^2 + u^2 - 3x + 4y + u - 8 = 0.$$

4. Задачи на вычисление интеграла переходом от кратного к повторному

(a) Вычислить интеграл (Гл.2, §8, 91(5))

$$\iint_G y \, dx dy, \quad G = \{0 \leq y \leq 6, x < 6, xy > 3, y - x - 2 < 0\}.$$

(b) Вычислить интеграл (Гл.2, §8, 139(2))

$$\iiint_G \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \, dx dy dz$$

$G$  ограничена плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ .

## Блок 2

1. Сходимость знакопостоянных рядов (признаки сравнения, Даламбера и Коши)

(a) Используя предельный признак сравнения исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  (Т.2, Гл.4, §14, 4(8), 5(3), 6(1,4))

$$a) a_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 5}{n\sqrt[5]{n^{16} + n^4 + 1}}, \quad b) a_n = e^{\frac{\sqrt[3]{n}+2}{n^2+3}} - 1,$$

$$c) a_n = \ln \frac{1}{\cos(2\pi/n)}, \quad d) a_n = n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1.$$

(b) Используя признак Даламбера исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  (Т.2, Гл.4, §14, 18(7), 19(10))

$$a) a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n+2)}, \quad b) a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!3^{2n}}.$$

(с) Используя признак Коши исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  (Т.2, Гл.4, §14, 21(4,14))

$$a) a_n = 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad b) a_n = \left( n \arcsin \frac{1}{n} \right)^{n^3}.$$

2. Области сходимости степенных рядов.

(a) Найти радиус сходимости  $R$  и интервал сходимости степенного ряда, исследовать на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \arcsin \frac{1}{3^n} \right) (x-3)^n, \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{n^2+3}{n^2\sqrt{3}+1} \right)^{-n} \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^n,$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}, \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n, \quad e) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$$

3. Ряд Тейлора.

4. Условных экстремум

5. Наибольшее и наименьшее значение функции.

6. Подсчет интеграла с помощью замены переменных.