Лекция 22, 15.03.24

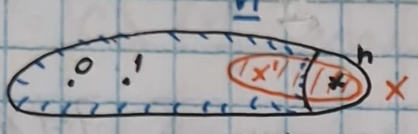
Следствие 0. $Eq(A) \overset{\pi}{\sim} \Pi(A)$ $\varepsilon^{-1} = \pi$

Опр: Число Белла $B_n := |\Pi(\underline{n})|$

$B_0 = 1$ $B_1 = 1$ $B_2 = 2$ $B_3 = 5$

Теорема 1: $B_0 = 1$ и $\forall n$ $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot B_k$

Док-во:



$\Sigma \in \Pi(n+1)$

$x :=$ эл-т Σ, содерж. n

$x' = x \cap \underline{n}$

$0 \leq |x'| \leq n$

$x' \in P(\underline{n})$

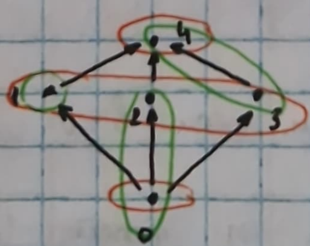
„классифицируем" Σ по $|x'|$

допустим $|x'| = k$ # таких разбиений $= \underset{\uparrow \text{ \# выборов } x'}{C_n^k} \cdot \underset{\uparrow \text{ \# разбиений мн-ва } \underline{n} \setminus x'}{B_{n-k}}$

$x' \in P_k(\underline{n})$

Тогда $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot B_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^{n-k} \cdot B_{n-k} \underset{k := n-k}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot B_k$ ч.т.д.

Рассмотрим ч.у.м.
разбиение на цепи:
разбиение на антицепи:



$\mathcal{A} = (A, <)$ ч.у.м.

Лемма 2: Если $\mathcal{D}$-антицепь в $\mathcal{A}$ и Σ-разбиение $\mathcal{A}$ на цепи, то $|\mathcal{D}| \leq |\Sigma|$.

Док-во: каждый эл-т $x \in \mathcal{D}$ попадёт в нек. (ед.) цепь $C_x \in \Sigma$

$x, y \in \mathcal{D}$ $\quad x \neq y \Rightarrow x$ и y несравними

$\Rightarrow y \notin C_x$

$\Rightarrow C_x \neq C_y$

$x \mapsto C_x$ – инъекция $\qquad \mathcal{D} \lesssim \Sigma \Rightarrow |\mathcal{D}| \leq |\Sigma|$

Пусть $\mathcal{A} = (A, <)$ кон. ч.у.м.

допустим $m :=$ наиб. размер антицепи в $\mathcal{A} = (A, <)$

? Всегда ли есть разбиение $\mathcal{A}$ на m цепей?

Всегда (т. Дилуорса): max дл. антицепи = min разм. разб. на цепи.

Лемма 2'. Если C – цепь в $\mathcal{A}$ и Σ – разб. $\mathcal{A}$ на антицепи, то $|C| \leq |\Sigma|$

допустим $n :=$ наиб. размер цепи в $\mathcal{A} = (A, <)$

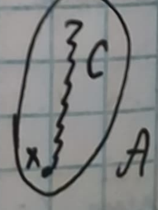
? Всегда ли есть разб. $\mathcal{A}$ на n антицепей?

Всегда (т. Мирского): max дл. цепи $\overset{\leq (Л2')}{=}$ min разм. разб. на антицепи

Док-во: (идея)

доп. $n :=$ max разм. цепи в $\mathcal{A}$

хочу разбить A на n цепей

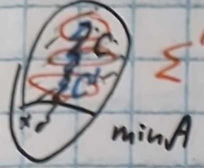


инд. по $|A|$; доп. C – цепь разм. n в $\mathcal{A}$

пусть $x :=$ наим. эл-т в C (он $\exists$)

Утв: $x \in \min A$

Пусть не так: $\exists y \in A \quad y < x$, тогда $C \cup \{y\}$ — цепь в A, длиннее C. $\bot$.



Рассм. $A' = A \setminus \min A$; $|A'| < |A|$

Утв: $C' = C \setminus \{x\}$ — самая длинная цепь в A'

$|C'| = n-1 \underset{\text{ПИ}}{\Longrightarrow}$ есть разб. Σ' в A'

A' на $n-1$ антицепь

Опр: Граф — это пара $G = (V, E)$,

где (1) кон $V \neq \emptyset$ мн-во вершин

(2) $E \subseteq V^2$ т.ч. E иррефл. ($\forall x \; \neg xEx$)

отнош. смежности

E симм. $(\forall x, y \; (xEy \to yEx))$

рёбра графа $G = \{\, \{x,y\} \in P_2(V) \mid xEy \,\} \subseteq P_2(V)$

$xy = yx = \{x,y\}$ $(\Leftrightarrow yEx)$

порядок графа $G = |V|$

размер графа $G = |\text{рёбра гр. } G| \overset{\text{Утв.}}{=} \frac{|E|}{2}$

Опр: (n,m)-граф — это граф с n вершинами и m рёбрами.

Лемма 4. $\forall n, m \in \mathbb{N} \; \left(\exists (n,m)\text{-граф } G \iff \left[\begin{array}{l} n > 0 \\ 0 \le m \le C_n^2 \end{array} \right. \right)$

Док-во: „$\Rightarrow$" доп. есть граф (n,m) $G = (V, E)$

$m = \#\text{рёбер} \le |P_2(V)| \overset{\text{ВТР}}{=} |P_2(\underline{n})| = C_n^2$.

"$\Leftarrow$" доп. $n>0$, m $\quad 0 \leq m \leq C_n^2$

Как построить (n, m)-граф?

$V_n := \underline{n} \qquad E_n = (\underline{n} \times \underline{n}) \setminus id_n \quad K_n = (\underline{n}, (\underline{n} \times \underline{n}) \setminus id_y)$

полный граф на n вершин

размер $(K_n) = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$, если $m < C_n^2$

Выберем из K_n $n-m$ рёбер

Опр: окрестность вершин $x \in V$ в гр. $G = (V, E)$:

$N_G(x) \overset{\text{опр.}}{=} \{ y \in V \mid x E y \}$

Утв: $\forall x \quad x \notin N_G(x)$

Степень x в G: $\quad d_G(x) = |N_G(x)|$

Утв: Если G - (n, m) граф., то $0 \leq d_G(x) \leq n-1$

Если $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $d_G(x_1) \geq d_G(x_2) \geq \dots \geq d_G(x_n)$,

то $(d_G(x_1), \dots, d_G(x_n))$ наз. степенной n-того гр. G