

Решение рубежа 2 «Коллекция Пенелопы»

Задача 1 (5 баллов)

В пунктах b)-с) для экономии времени достаточно записать формулу с C_k^n

Пенелопа коллекционирует миниатюрные картины и скульптуры. Её предпочтения независимы и постоянны во времени, причем вероятность купить картину выше. Сейчас в ее коллекции 9 предметов искусства. Гипотетически, если i – ым приобретенным предметом была картина, а $(i - 1)$ -ой Пенелопа приобрела скульптуру, то вероятность именно такой последовательности ее действий составляет 0.24.

- а) Найти вероятность того, что i – ый экспонат Пенелопы – это картина;

Пусть K – событие «Пенелопа i -ым экспонатом приобрела картину», является «успехом» с вероятностью p ; C – событие «Пенелопа i -ым экспонатом приобрела скульптуру», является «провалом» с вероятностью q . Тогда:

$$P((i - 1) - \text{ая скульптура}) * P(i - \text{ая картина}) = q * p = (1 - p) * p = 0.24.$$

Решим квадратное уравнение (дискриминант, теорема Виета... ваш вкус):

$$p^2 - p + 0.24 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 * 1 * 0.24 = 0.04; \sqrt{D} = 0.2$$

$$p_1 = \frac{-(-1) + 0.2}{2 * 1} = 0.6$$

$$p_2 = \frac{-(-1) - 0.2}{2 * 1} = 0.4$$

Если $p = 0.6$, то $q = 0.4$. Если $p = 0.4$, то $q = 0.6$. Известно, что вероятность купить картину выше, следовательно $p > q$. Тогда: $p = 0.6$.

- б) Найти вероятность того, что в коллекции Пенелопы 1 скульптура;

В коллекции Пенелопы 9 экспонатов, из них 8 должны быть картинами, чтобы была ровно 1 скульптура:

$$P_9(k = 8) = C_9^8 p^8 q^{9-8} = C_9^8 0.6^8 0.4^1.$$

- с) Найти вероятность того, что, если Пенелопа купит еще 1 предмет, у нее будет не менее 2 скульптур.

Теперь у Пенелопы 10 экспонатов. Из них не менее 2 должны быть скульптурами, то есть не более 8 должны быть картинами. Это также значит, что у нее не должно быть 9 или 10 картин:

$$P_{10}(k \leq 8) = 1 - P_{10}(k = 9) - P_{10}(k = 10) = 1 - C_{10}^9 0.6^9 0.4^1 - C_{10}^{10} 0.6^{10} 0.4^0.$$

$$\text{Или } P_{10}(k \leq 8) = \sum_{k=0}^8 C_{10}^k 0.6^k 0.4^{10-k}.$$

Задача 2 (5 баллов)

В пункте с) для экономии времени достаточно записать формулу с C_k^n

Пенелопа расширяет свою коллекцию и докупает 5 предметов искусства. Предпочтения девушки остаются независимыми, но претерпели изменения под влиянием моды: теперь вероятность купить скульптуру в 4 раза выше, чем вероятность покупки картины. Доподлинно

известно, что 1-ый докупленный экспонат в коллекции – картина Жан-Жака, а 5-ый – скульптура.

- а) Найти вероятность того, что i – ый докупаемый Пенелопой экспонат – это картина;

Пусть K – событие «Пенелопа i –ым экспонатом докупает картину», является «успехом» с вероятностью p ; C – событие «Пенелопа i –ым экспонатом докупает скульптуру», является «провалом» с вероятностью q . Тогда:

$$\begin{cases} p + q = 1 \\ 4p = q \end{cases}$$

Отсюда находим, что $5p = 1 \rightarrow p = 0.2$ и $q = 1 - 0.2 = 0.8$.

- б) Найти вероятность того, что среди докупленных Пенелопой предметов только 1 скульптура.

Казалось бы, задача 2 также похожа на обычную задачу, в которой можно применить схему Бернулли. Но нужно учитывать, что теперь нам даны вводные по другим событиям, которые уже случились, а именно:

Пусть D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 – докупленные экспонаты 1 – 5. Доподлинно известно, что D_1 – картина, D_5 – скульптура. На самом деле нам не столько важен их порядковый номер, сколько установленный факт: в коллекцию Пенелопы уже докуплена 1 скульптура. Тогда применим формулу Бернулли с учетом условий:

$$P_5(k = 4 | D_1 = K, D_5 = C) = P_3(k = 3) = C_3^3 0.2^3 0.8^0 = 0.2^3 = 0.008$$

Еще раз, решая задачу без условий, мы бы искали вероятность того, что среди 5 докупленных предметов будет 4 картины (успехи) и 1 скульптура (провал). Однако известно, что первый экспонат – картина, пятый экспонат – скульптура, то есть исходы этих опытов для нас зафиксированы. Остаются опыты D_2, D_3, D_4 , которые должны быть только успехами, чтобы условие выполнялось. Отсюда $P_3(k = 3)$.

- с) Найти вероятность того, что, если Пенелопа купит еще 1 предмет, среди шести докупленных вещей будет ровно 2 скульптуры.

Это значит, что у Пенелопы среди докупленных предметов будут 2 скульптуры и 4 картины.

Пусть $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ – докупленные экспонаты 1 – 6. Доподлинно известно, что D_1 – картина, D_5 – скульптура. На самом деле нам не столько важен их порядковый номер, сколько установленный факт: в коллекцию Пенелопы уже докуплена 1 скульптура. Тогда применим формулу Бернулли с учетом условий:

$$P_6(k = 4 | D_1 = K, D_5 = C) = P_4(k = 3) = C_4^3 0.2^3 0.8^1$$

Первый экспонат – картина, пятый экспонат – скульптура, то есть исходы этих опытов для нас зафиксированы. Остаются опыты D_2, D_3, D_4, D_6 , среди которых должно быть 3 успеха и 1 провал, чтобы условие выполнялось. Отсюда $P_4(k = 3)$.