Консультация, 15.03.25 Свойства оценок

Несмещ $\mathbb{E}[\hat\theta]=\theta$ $\lim \mathbb{E}[\theta] \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

Сост. $\hat\theta \xrightarrow{P} \theta$ т. Чебышёва $P\{|\hat\theta-\underset{\mathbb{E}[\hat\theta]}{\theta}|>\varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbb{D}[\hat\theta]}{\varepsilon^2}$

Эфф. $\mathbb{D}[\hat\theta^*] \leqslant \mathbb{D}[\hat\theta]$

1

1.1 (Ж1). Доказать, что частота случайного события A является R-эффективной оценкой вероятности P(A) этого события.

$\hat\theta = W_n = \frac{k}{n}$, где k – число хороших исходов

$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$ $\forall X_1 \sim Bi(1,p)$ $k \sim Bi(n,p)$

1. Докажем несмещённость

$$\mathbb{E}[\hat\theta] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = \frac{1}{n}\cdot n\cdot p = p = \theta$$

2. $L_1(X_1,\theta) = P\{X_1 = X_1\} = \theta^{X_1}(1-\theta)^{1-X_1}$

3. $\ln L_1(X_1,\theta) = \ln\left(\theta^{X_1}(1-\theta)^{1-X_1}\right) = X_1\cdot\ln\theta + (1-X_1)\ln(1-\theta)$

4. $\frac{\partial \ln L_1(X_1,\theta)}{\partial\theta} = \frac{X_1}{\theta} - \frac{1-X_1}{1-\theta}$

5. $I_1 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln L_1(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{(X_1-\theta)^2}{\theta^2(1-\theta)^2}\right] = \frac{\mathbb{D}[X_1]}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$

6. $I_n = n\cdot I_1 = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$

7. $\mathbb{D}[\hat\theta] = \mathbb{D}[\overline{X}] = \mathbb{D}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

Получилось: $\mathbb{D}[\hat\theta] = \frac{1}{I_n(\theta)}$ $\Rightarrow$ $\hat\theta$ – R-эффективна

2

1.2 (33). Выборка порождена случайной величиной ε с плотностью

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} e^{\alpha - x}, x \geq \alpha \\ 0, x < \alpha \end{cases}$$

Является ли экстремальная порядковая статистика $X_{(1)}$ состоятельной оценкой неизвестного параметра α?

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} e^{\alpha - x}, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases} \qquad \hat{\theta} = X_{(1)}, \quad \theta = \alpha$$

Состоятельность: $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$

$$P\{|\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}]| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{D}[\hat{\theta}]}{\varepsilon^2}$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = P\{X_{(1)} \leq x\} = 1 - P\{X_{(1)} > x\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > x\} =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P\{X_i \leq x\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F_X(x)\right) = 1 - \left(1 - F_X(x)\right)^n$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = F'_{X_{(1)}}(x) = -n\cdot\left(1 - F_X(x)\right)^{n-1}\cdot\left(-f_X(x)\right) = n\cdot\left(1 - F_X(x)\right)^{n-1}\cdot f_X(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{x} e^{\alpha - t}\,dt = -\int_{\alpha}^{x} e^{\alpha - t}\,d(\alpha - t) = -\left(e^{\alpha - t}\right)\Big|_{\alpha}^{x} = \begin{cases} -e^{\alpha - x} + 1, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\left(1 - 1 + e^{\alpha - x}\right)^{n-1}\cdot e^{\alpha - x} = \begin{cases} n\cdot\left(e^{\alpha - x}\right)^n, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}[X_{(1)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X_{(1)}}(x)\,dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x\cdot n\cdot e^{(\alpha - x)n}\,dx = \ldots = \alpha + \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ при $n \to \infty$ $\lim \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = \alpha \Rightarrow \hat{\theta}$ – асимпт. несмещ. оценка.

$$\mathbb{D}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}[\hat{\theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\theta}]^2 = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{1}{n} - \theta^2 - \frac{2\theta}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}^2] = \int_{\theta}^{+\infty} x^2\cdot n e^{n(\theta - x)}\,dx = \ldots = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{D}[\hat{\theta}] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\mathbb{D}[\hat{\theta}]}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \hat{\theta} \text{ – состоятельная}$$

3

1.3 (К5). Выборка порождена случайной величиной ξ, имеющей биномиальное распределение $Bi(20, p)$ с неизвестным параметром p. Для оценивания параметра $\theta = D\xi$, используется оценка $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}(20-\bar{X})}{20}$. Докажите, что данная оценка является асимптотически несмещенной оценкой $\theta = D\xi$.

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}(20-\bar{X})}{20}$$

Док-ть асимпт. несмещ.

$X_1, \dots, X_n \sim Bi(20, p)$

$\theta = \mathbb{D}[\xi] = 20p(1-p) \qquad \mathbb{E}[\xi] = 20p$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\bar{X}(20-\bar{X})}{20}\right] = \frac{1}{20} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(20 \cdot \mathbb{E}[\bar{X}] - \mathbb{E}[\bar{X}^2]\right) =$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(20 \cdot 20p - \frac{20p(1-p)}{n} - (20p)^2\right) \ominus$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot 20p = 20p$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}^2] = \mathbb{D}[\bar{X}] + \mathbb{E}[\bar{X}]^2 = \frac{20p(1-p)}{n} + (20p)^2$$

$$\ominus \lim_{n\to\infty}\left(20p - \frac{p(1-p)}{n} - 20p^2\right) = 20p - 20p^2 = 20p(1-p) = \theta$$

$\Rightarrow \hat{\theta}$ – асимпт. несмещ. оценка.

4

1.4 (К1). Выборка порождена дискретной случайной величиной ξ. Известно, что $P\{\xi = k\} = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, a > 0, k = 0,1,2, \ldots$. Используя критерий эффективности, построить эффективную оценку параметра a.

$$P\{X_i = k\} = \frac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}}, \quad \theta > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Критерий эффективности: $\hat{\theta} - \theta = a(\theta) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln L(X_i, \theta)}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial \ln L(X_i, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln\left(\frac{\theta^{X_i}}{(1+\theta)^{X_i+1}}\right)}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(X_i \cdot \ln\theta - (X_i+1)\ln(1+\theta)\right)}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{X_i}{\theta} - \frac{X_i+1}{1+\theta}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln L(X_i, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta} - \frac{X_i+1}{1+\theta}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (1+\theta) - \theta \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i+1)}{\theta(1+\theta)} =$$

$$= \frac{(1+\theta-\theta)\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\theta(1+\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\theta(1+\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta(1+\theta)} - \frac{n}{1+\theta}$$

не зависит от θ

$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta(1+\theta)} - \frac{n}{1+\theta}\right) = a(\theta)\frac{n}{\theta(1+\theta)}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \theta\right) =$$

$$= a(\theta) \cdot \frac{n}{\theta(1+\theta)}\left(\overline{X} - \theta\right)$$

должно равняться θ

Тогда $a(\theta) \cdot \frac{n}{\theta(1+\theta)} = 1 \Rightarrow a(\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{n} = \frac{1}{I_n(\theta)}$

ММП и ММ

5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\theta^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

2.1 (Ж2). Выборка соответствует распределению с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\theta^2}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия.

$$\mathcal{L}(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x_i}} e^{-\frac{x_i}{2\theta^2}}$$

$$\ln \mathcal{L}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x_i}}\right) - \frac{x_i}{2\theta^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln 1 - \ln\theta - \ln\sqrt{2\pi x_i} - \frac{x_i}{2\theta^2}\right)$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x,\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{x_i}{\theta^3}\right) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^3} = \frac{-n}{\theta} + \frac{n\overline{X}}{\theta^3}$$

$$\frac{-n}{\hat{\theta}_{ML}} + \frac{n\overline{X}}{\hat{\theta}_{ML}^3} = 0$$

$$\hat{\theta}_{ML}^2 = \overline{X}$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \sqrt{\overline{X}}$$

6

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\theta^4} x^3 e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

2.2 (З1). Выборка соответствует распределению с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\theta^4} x^3 e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия.

$$\mathcal{L}(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{6\theta^4} x_i^3 e^{-\frac{x_i}{\theta}}$$

$$\ln \mathcal{L}(x,\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln 1 - \ln(6\theta^4) + \ln x_i^3 - \frac{x_i}{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x,\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-4\theta^3}{\theta^4} + \frac{x_i}{\theta^2}\right) = -\frac{4n}{\theta} + \frac{\overline{X}n}{\theta^2}$$

$$-\frac{4n}{\hat{\theta}_{ML}} + \frac{\overline{X}n}{\hat{\theta}_{ML}^2} = 0$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\overline{X}}{4}$$

7

2.3 (C4). Выборка порождена случайной величиной ξ с распределением $E(1/\theta)$. Постройте оценку неизвестного параметра методом моментов. Докажите, что оценка является эффективной по Рао-Крамеру.

$E\left(\frac{1}{\theta}\right) \qquad \lambda = \frac{1}{\theta}$

$\mathbb{E}[x] = \frac{1}{\lambda} = \theta$ – теор. нач. момент

$\mathbb{D}[x] = \frac{1}{\lambda^2} = \theta^2$

$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$ – выб. нач. момент

$\mathbb{E}[X] = \hat{\mu}_1$

$\hat{\theta}_{мм} = \overline{X}$

$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \overline{X^2}$

$\mathbb{E}[x^2] = \mathbb{D}[x] + \mathbb{E}[x]^2$

$2\theta^2 = \theta^2 + \theta^2$

$\Downarrow$

$2\theta^2 = \overline{X^2}$

$\theta^2 = \frac{1}{2}\overline{X^2}$

$\hat{\theta}_{мм} = \sqrt{\frac{\overline{X^2}}{2}}$

Проверка эффективности:

$L_1 = f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$

$\ln L_1 = \ln\left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_1}{\theta}}\right) = \ln 1 - \ln\theta - \frac{x_1}{\theta}$

$\frac{\partial \ln L(x_1,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial\left(\ln 1 - \ln\theta - \frac{x_1}{\theta}\right)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x_1}{\theta^2}$

$I_1(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{x_1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x_1^2}{\theta^4} - \frac{2x_1}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^4}\mathbb{E}[x_1^2] - \frac{2}{\theta^3}\mathbb{E}[x_1] + \frac{1}{\theta^2} =$

$= \frac{1}{\theta^4}\left(\theta^2 + \theta^2\right) - \frac{2}{\theta^3}\cdot\theta + \frac{1}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$

$I_n(\theta) = n\cdot I_1(\theta) = n\cdot\frac{1}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$

$\mathbb{D}[\hat{\theta}] = \mathbb{D}[\overline{X}] = \mathbb{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$

$\mathbb{D}[\hat{\theta}] = \frac{1}{I_n(\theta)} \Rightarrow$ эффективная оценка.

8

2.4 (C3). В игру встроены 3 дополнительных уровня, за прохождение которых игрок получает бонусные баллы. По правилам для прохождения уровня игрок может предпринять неограниченное число попыток. Каждый из уровней проходят только один раз. Вероятность пройти любой из этих уровней с очередной попытки есть некоторая (неизвестная) величина p, одинаковая для всех уровней. Найдите оценку максимального правдоподобия для параметра p, если известно, что первый уровень игрок прошел с 50й попытки, второй уровень – с 4-1 попытки, третий уровень – с 7-й попытки.

$G(p) \qquad P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}$

X_1 – 5-й $\Rightarrow P\{X_1=5\} = p(1-p)^4$

$P\{X_2=4\} = p(1-p)^3$

$P\{X_3=7\} = p(1-p)^6$

$L(x,p) = \prod_{i=1}^{3} P\{X_i = x_i\} = p^3(1-p)^{13}$

$\ln L(x,p) = \ln\left(p^3(1-p)^{13}\right) = 3\ln p + 13\ln(1-p)$

$$\frac{\partial \ln L(x,p)}{\partial p} = \frac{3}{p} - \frac{13}{1-p}$$

$$\frac{3}{p} - \frac{13}{1-p} = 0$$

$3 - 3p = 13p$

$\hat{p}_{мп} = \frac{3}{16}$

Доверительные интервалы

9

3.1 (Ж4). При определении прочности стержня на разрыв испытывались 5 образцов. В результате испытаний получены следующие значения усилия разрыва (в кг): 500, 540, 600, 560, 550. Построить доверительный интервал уровня надежности 0.9 для дисперсии прочности, если закон распределения прочности нормальный.

$$\frac{(\overline{X}-m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(\overline{X}-m_x)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\hat{D}[X]}} \sim t_{n-1}$$

$$\frac{n\hat{D}[X]}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$X = \{500, 540, 600, 560, 550\}$$

$$\overline{X} = \frac{500+540+600+560+550}{5} = 550$$

$$\alpha = 1-0.9 = 0.1$$

$$\frac{n\hat{D}[X]}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\hat{D}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 1040 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

$$P\{T_1 \leq \sigma_x^2 \leq T_2\} = \delta$$

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{n\hat{D}[X]}{\sigma_x^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right\} = \delta$$

$$P\left\{\frac{n\hat{D}[X]}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{n\hat{D}[X]}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}\right\} = \delta$$

$$P\{548 \leq \sigma_x^2 \leq 7324\} = 0.9$$

10

3.2 (32). В случайной выборке из 316 семей Западного Мидленда выборочное среднее еженедельных доходов составило 25,85 долл., а среднеквадратическое отклонение еженедельных доходов – 12,7 долл. Для 351-й семьи из Йоркшира выборочное среднее составило 23,14 долл, а среднеквадратическое отклонение – 13,4 долл. Постройте доверительный интервал уровня доверия 0,95 для разности средних еженедельных доходов семей Западного Мидленда и Йоркшира.

$n = 316$ $\quad m = 351$ $\quad \delta = 0.95$

$\bar{X} = 25.85$ $\quad \bar{Y} = 23.14$

$\sqrt{\hat{D}[X]} = 12.7$ $\quad \sqrt{\hat{D}[Y]} = 13.4$

$$T = \frac{(\bar{Y} - \bar{X}) - (m_y - m_x)}{S_{xy}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t_{n+m-2}$$

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{S_x^2(n-1) + S_y^2(m-1)}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{\hat{D}[X]\cdot n + \hat{D}[Y]\cdot m}{n+m-2}}$$

$$P\{T_1 \le m_y - m_x \le T_2\} = \delta$$

$$P\{t_{0.025} \le T \le t_{0.975}\} = \delta$$

$$P\{t_{0.025}\cdot S_{xy}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \le (\bar{Y} - \bar{X}) - (m_y - m_x) \le t_{0.975}\cdot S_{xy}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\} = \delta$$

$$P\{(\bar{Y} - \bar{X}) + t_{0.025}\cdot S_{xy}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \le m_y - m_x \le (\bar{Y} - \bar{X}) + t_{0.975}\cdot S_{xy}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\} = \delta$$

$$\bar{Y} - \bar{X} = 23.14 - 25.85 = -2.71$$

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{12.7\cdot 316 + 13.4\cdot 351}{316 + 351 - 2}} \approx 3.62$$

$$\sqrt{\frac{1}{316} + \frac{1}{351}} \approx 0.078$$

$$P\{-2.71 - 1.96\cdot 3.62\cdot 0.078 \le m_y - m_x \le -2.71 + 1.96\cdot 3.62\cdot 0.078\} = \delta$$

$$P\{-3.26 \le m_y - m_x \le -2.16\} = 0.95$$

$$P\{2.16 \le m_x - m_y \le 3.26\} = 0.95$$

11

$n = 9$

$\bar{X} = 3000$

$\sigma = 30$

$\delta = 0.9 \qquad \alpha = 0.1$

3.3 (C1). Выборочное среднее расстояния между двумя геодезическими пунктами, полученное по данным обработки 9 независимых измерений, составляет 3000 м. Значения ошибки дальномерного устройства подчинены нормального закону распределения и характеризуются среднеквадратическим отклонением 30 м. Построить доверительный интервал уровня доверия 0,9 для истинного расстояния между пунктами. Сколько измерений надо произвести, чтобы длина доверительного интервала составила 20м?

По т. Фишера: $T = \dfrac{\bar{X} - m_x}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$$P\left\{ Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - m_x}{\sigma}\sqrt{n} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = \delta$$

$$P\left\{ \bar{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq m_x \leq \bar{X} - \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \delta$$

$$P\left\{ \underbrace{\bar{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}}_{T_1} \leq m_x \leq \underbrace{\bar{X} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}}_{T_2} \right\} = \delta$$

$$l = T_2 - T_1 = \frac{2 Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = 20 \text{ (по условию)}$$

Дальше находим n.

$X_1, \dots, X_n \sim Bi(n, p)$ ДИ для p.

ЦПТ ($n \to \infty$): $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$\hat{p}$ – эфф. оценка для p

$\Rightarrow f(\hat{p}) \xrightarrow{P} f(p)$

$\sigma(\hat{p}) \longrightarrow \sigma(p)$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$(*) \quad \bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

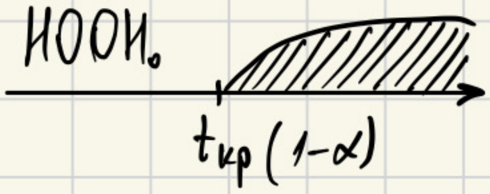
АДИ: $\hat{\theta} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} \; ; \; \hat{\theta} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}$

$\hat{\theta} = \bar{X}$ – эфф. оценка θ в распределении $Bi(n, \theta)$ $\Rightarrow (*)$

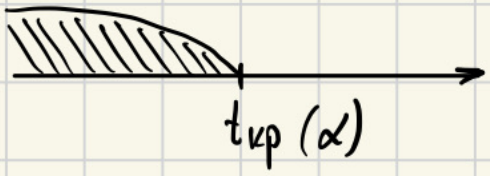
Проверка гипотез

$H_0: \ m_x = m_0$

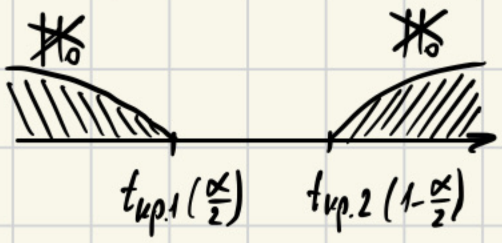
$H_A: \ m_x > m_0$



$H_A: \ m_x < m_0$



$H_A: \ m_x \neq m_0$

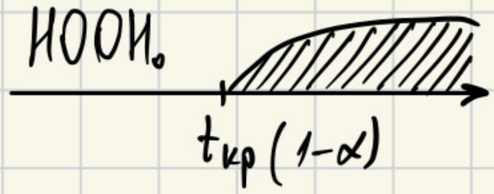


$$T = \frac{(\overline{X} - m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} \sim N(0, 1)$$

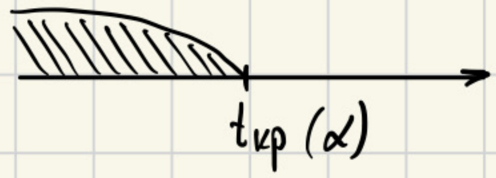
$$T = \frac{(\overline{X} - m_x)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\hat{D}[x]}} \sim t_{n-1}$$

$H_0: \ \sigma_x = \sigma_0$

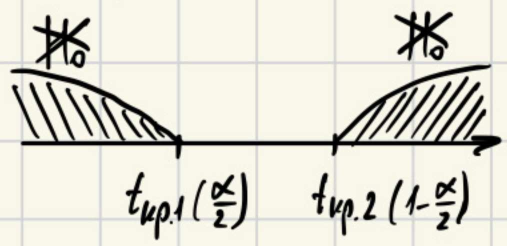
$H_A: \ \sigma_x > \sigma_0$



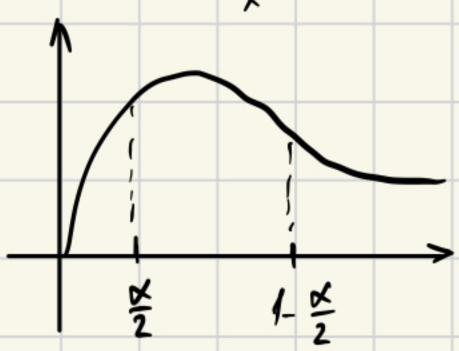
$H_A: \ \sigma_x < \sigma_0$



$H_A: \ \sigma_x \neq \sigma_0$



$$T = \frac{n \cdot \hat{D}[x]}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{n-1}$$



$H_0: \ m_y - m_x = 0$

$H_A: \ m_y - m_x > 0$

$$T = \frac{(\overline{Y} - \overline{X}) - (m_y - m_x)}{S_{xy}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{S_x^2(n-1) + S_y^2(m-1)}{n+m-2}}$$

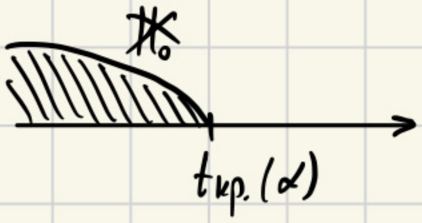
$$T = \frac{(\overline{Y} - \overline{X}) - (m_y - m_x)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1)$$

$$T = \frac{(\overline{Y} - \overline{X}) - (m_y - m_x)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

12) 1) $H_0: \; p = 0.81$

$H_A: \; p < 0.81$

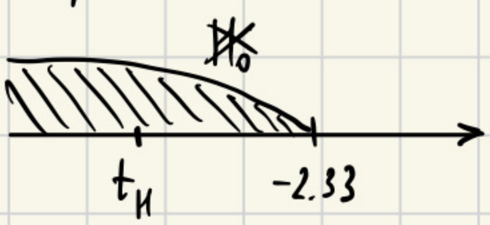
4.3 (З4). В случайно выборке, включающей 160 студентов, 117 человек сдали экзамен по теории вероятностей с первой попытки. По итогам предыдущего года доля таких студентов в этом вузе составляла 0.81. Можно ли считать (на уровне значимости 0.01), что успеваемость в этом году ниже?



2) $$\Phi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

3) $$t_н = \frac{117 - 160 \cdot 0.81}{\sqrt{160 \cdot 0.81 \cdot 0.19}} = -2.54$$

4) $$t_{кр.} = Z_\alpha = -Z_{0.99} = -2.33$$

5) 

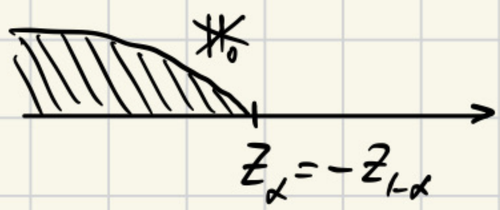
6) Вывод: да, можно.

13) $H_0: \; p_1 = p_2$ или $p_1 - p_2 = 0$

$H_A: \; p_1 - p_2 < 0$

4.2 (Ж5). Среди 200 случайным образом выбранных в Центральном ФО владельцев легковых автомобилей 106 имели иномарки. Среди 100 случайным образом выбранных автовладельцев Дальневосточного ФО оказалось 57 обладателей иномарок. Можно ли считать (на уровне значимости 0.05), что доля владельцев иномарок в Дальневосточном ФО выше, чем в Центральном ФО?

$$T = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\mathbb{D}[\hat{p}_1 - \hat{p}_2]}} \sim N(0,1)$$



$\mathbb{D}[\hat{p}_1 - \hat{p}_2] = pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$, если равные

$\mathbb{D}[\hat{p}_1 - \hat{p}_2] = \mathbb{D}[\hat{p}_1] + \mathbb{D}[\hat{p}_2] = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$, если разные

$\hat{p}_1 = \frac{106}{200}$, $\hat{p}_2 = \frac{57}{100}$

Евгения Витальевна лучшая!!!