**Решение рубежа 1 «Колода карт Мортимера»**

В колоде шулера Мортимера 60 карт: 52 обычные карты четырех мастей достоинством от «2» до «туза», 4 краплёных пиковых туза 【Т♠】 и 4 краплёных пиковых короля 【К♠】. Женевьева про метки не знает и, перемешав карты, вытягивает одну наугад. Найти вероятность того, что:

a) Это туз червей:

$$P(\text{Т}\heartsuit) = \frac{N_{\text{туз червей}}}{N_{\text{карт}}} = \frac{1}{52+4+4} = \frac{1}{60};$$

(*Классическое определение вероятности. Отношение всех благоприятных элементарных исходов к числу всех исходов.*)

b) Это туз червей или туз пик:

$$P(\text{Т}\heartsuit + \text{Т}\spadesuit) = P(\text{Т}\heartsuit) + P(\text{Т}\spadesuit) - P(\text{Т}\heartsuit * \text{Т}\spadesuit) = \frac{1}{60} + \frac{1+4}{60} - 0 = \frac{6}{60} = \frac{1}{10};$$

(*Чтобы найти вероятность объединения событий (случилось или то, или то, или оба сразу), нужно найти вероятность от суммы. По формуле сложения вероятностей, Горяинова, Кибзун, с.31, это есть сумма вероятностей событий по отдельности за вычетом вероятности пересечения событий. Так как события несовместны, то есть нельзя на одной карте увидеть и* $\text{Т}\heartsuit$, *и* $\text{Т}\spadesuit$, *то вероятность суммы может быть записана как сумма вероятностей отдельных событий*)

c) Это туз червей или туз пик или краплёная карта (КК):

$$P(\text{Т}\heartsuit + \text{Т}\spadesuit + \text{КК}) = P(\text{Т}\heartsuit) + P(\text{Т}\spadesuit) + P(\text{КК}) - P(\text{Т}\heartsuit\text{Т}\spadesuit) - P(\text{Т}\heartsuit\text{КК}) - P(\text{Т}\spadesuit\text{КК}) + P(\text{Т}\heartsuit\text{Т}\spadesuit\text{КК}) = \frac{1}{60} + \frac{5}{60} + \frac{4+4}{60} - 0 - 0 - \frac{4}{60} + 0 = \frac{10}{60} = \frac{1}{6};$$

Или с учетом прошлого пункта

$$P(\text{Т}\heartsuit + \text{Т}\spadesuit + \text{КК}) = P\big((\text{Т}\heartsuit + \text{Т}\spadesuit) \cup \text{КК}\big) = P(\text{Т}\heartsuit + \text{Т}\spadesuit) + P(\text{КК}) - \big((\text{Т}\heartsuit + \text{Т}\spadesuit) \cap \text{КК}\big) = \frac{6}{60} + \frac{4+4}{60} - \frac{4}{60} = \frac{1}{6};$$

(*Всё также используем формулу сложения вероятностей, но теперь для трёх событий. В таком случае находим вероятность каждого события по отдельности и складываем их, затем вычитаем попарные пересечения событий, из которых лишь пиковые краплёные карты представляют собой совместный исход, так как одновременно черви и пики быть не могут, черви и краплёные быть не могут. Также пересечение всех трёх событий тоже является невозможным. С учетом пункта b) можно разложить события на 2: вытянули туз пик или червей и вытянули краплёную карту. Пересечение этих событий также имеет вероятность* $\frac{4}{60}$)

d) Это король пик или король бубен, если известно, что извлекли карту (Кар) старше «10» («валет», «дама», «король», «туз»):

$$P(\text{К}\diamondsuit + \text{К}\spadesuit | \text{Кар} > "10") = \frac{P((\text{К}\diamondsuit+\text{К}\spadesuit)*(\text{Кар}>"10"))}{P(\text{Кар}>10)} = \frac{P(\text{К}\diamondsuit+\text{К}\spadesuit)}{P(\text{Кар}>10)} = \frac{\frac{1+(1+4)}{60}}{\frac{4+4+8+8}{60}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4};$$

Или буквально:

$$P(\text{К}\diamondsuit + \text{К}\spadesuit | \text{Кар} > "10") = \frac{N_{\text{К}\diamondsuit+\text{К}\spadesuit}}{N_{\text{В+Д+К+Т}}} = \frac{1+(1+4)}{4+4+8+8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4};$$

(*Известно, что условная вероятность* $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. *Заметим, что на этот раз вероятность* $P((\text{К}\diamondsuit + \text{К}\spadesuit) \cap (\text{Кар} > "10")) = P(\text{К}\diamondsuit + \text{К}\spadesuit)$, *ведь короли всегда входят в множество карт старше «10»: то есть чтобы случилось и первое событие, и второе, достаточно гарантировать, что случится первое – вытянут бубновый или пиковый король.*)

e) Это карта (Кар) старше «10», если известно, что извлекли пики:

$$P(\text{Кар} > "10" | \spadesuit) = \frac{P((\text{Кар}>"10")*(\spadesuit))}{P(\spadesuit)} = \frac{N_{\text{В}\spadesuit+\text{Д}\spadesuit+\text{К}\spadesuit+\text{Т}\spadesuit}}{N_{\spadesuit}} = \frac{1+1+5+5}{\frac{52}{4}+4+4} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7};$$

(*Еще один пункт на условную вероятность. Пересечением событий являются все пиковые карты достоинством выше «10» с учетом краплёных карт. В знаменателе учитываются все пиковые карты в колоде: стандартные и краплёные.*)

f) Зависимы ли события извлечь «10» и карту младше дамы? Доказать:

1-ый способ

$$P(A) = P("10") = \frac{N_{"10"}}{N_{\text{карты}}} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15};$$

$$P(B) = P(\text{Кар} < \text{Д}) = \frac{N_{\text{карты}} - N_{\text{Д+К+Т}}}{N_{\text{карты}}} = \frac{60-(4+8+8)}{60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3};$$

$$P(A \cap B) = P("10" \cap \text{Кар} < \text{Д}) = P("10") = \frac{1}{15};$$

Проверим, действительно ли $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$?

$$P(A) * P(B) = \frac{1}{15} * \frac{2}{3} = \frac{2}{45} \neq \frac{1}{15} \to\to\to \text{События А и } B \text{ зависимы, ч. т. д.}$$

(*Определение 3.1 на странице 30 Горяинова, Кибзун.*)

2-ой способ

$$P(A) = P("10") = \frac{N_{"10"}}{N_{\text{карты}}} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15};$$

$$P(A|B) = P("10" | \text{Кар} < \text{Д}) = \frac{N_{"10"}}{N_{\text{Кар<Д}}} = \frac{4}{60-4-8-8} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10};$$

Проверим, действительно ли $P(A|B) = P(A)$?

$$\frac{1}{10} \neq \frac{1}{15} \to\to\to \text{События А и } B \text{ зависимы, ч. т. д.}$$

3-ий способ

$P(B) = P(\text{Кар} < \text{Д}) = 1 - P(\text{Кар} \geq \text{Д}) = 1 - \frac{4+8+8}{60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3};$

$P(B|A) = P(\text{Кар} < \text{Д}|"10") = \frac{N_{"10"}}{N_{"10"}} = 1;$

Проверим, действительно ли $P(B|A) = P(B)$?

$1 \neq \frac{2}{3} \to\to\to \text{События А и } B \text{ зависимы, ч. т. д.}$

(*В способах 2 и 3 мы полагаемся на следствие из определения условной вероятности. Известно, что $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ и $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$. Если события будут независимы, то $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$. Тогда должно выполняться $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$.*)

Женевьева решает раскрывать карты по одной. Вытянутые карты она **замешивает** назад в колоду. Найти вероятность того, что Женевьева:

g) Вытянет пиковый туз 2 раза подряд:

События А (вытянуть первым туз пик) и В (вытянуть вторым туз пик) независимы, так как карты возвращаются в колоду и условия для вытягивания остаются без изменений, не влияя на вероятность. Тогда:

$P(2\ \text{Т}\spadesuit\ \text{подряд}) = P(A * B) = P(A) * P(B) = P(A)^2 = \left(\frac{5}{60}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144};$

h) Вытянет короля 9 раз подряд:

Аналогично пункту g) события $A_1$, $A_2$, …, $A_9$ независимы, так как карты возвращаются в колоду и условия для вытягивания остаются без изменений, не влияя на вероятность. Тогда:

$P(9\ \text{К подряд}) = P(A_1 \cap\ A_2 \cap\ \ldots \cap A_9) = P(A_1) * P(A_2) * \ldots * P(A_9) = P(A_i)^9 =$

$\left(\frac{8}{60}\right)^9 = \left(\frac{2}{15}\right)^9;$

(*По факту в пунктах g)-h) можно применить формулу Бернулли, так как все три условия выполнены: есть 2 исхода – вытянули нужную/ненужную карты, каждое вытягивание независимо, вероятность остается постоянной.)*

Женевьева решает раскрывать несколько карт сразу. Вытянутые карты она назад в колоду **не замешивает**. Найти вероятность того, что Женевьева обнаружит одинаковые (по масти и достоинству) карты в колоде Мортимера, если она:

i) Раскроет 2 случайные карты:

1-ый способ

$P(2 \text{ одинаковые карты}|2 \text{ карты}) = P(2\ \text{Т}\spadesuit|2 \text{ карты}) + P(2\ \text{К}\spadesuit|2 \text{ карты});$

Так как из 2 карт обе должны быть идентичными, то это несовместные события и их пересечение имеет вероятность 0. Более того, события симметричные, так как количество пиковых королей и тузов в колоде одинаково, то есть:

$P(2\ \text{Т}\spadesuit|2 \text{ карты}) + P(2\ \text{К}\spadesuit|2 \text{ карты}) = 2 * P(2\ \text{Т}\spadesuit|2 \text{ карты}) = 2 * P(2\ \text{К}\spadesuit|2 \text{ карты});$

Найдем любую из двух условных вероятностей, где в числителе будут все возможные комбинации извлечь пару одинаковых карт из 5 одинаковых карт, а в знаменателе все возможности извлечь пару карт из 60 карт в колоде:

$P(2\ \text{Т}\spadesuit|2 \text{ карты}) = P(2\ \text{К}\spadesuit|2 \text{ карты}) = \frac{C_5^2}{C_{60}^2} = \frac{\frac{5!}{2!*3!}}{\frac{60!}{2!*58!}} = \frac{5*4}{60*59} = \frac{1}{3*59} = \frac{1}{177};$

А искомая вероятность есть:

$P(2 \text{ одинаковые карты}|2 \text{ карты}) = 2 * P(2\ \text{Т}\spadesuit|2 \text{ карты}) = 2 * \frac{C_5^2}{C_{60}^2} = \frac{2}{177};$

2-ой способ

$P(2 \text{ одинаковые карты}|2 \text{ карты}) = P(2\ \text{Т}\spadesuit|2 \text{ карты}) + P(2\ \text{К}\spadesuit|2 \text{ карты}) =$

$P(2\ \text{Т}\spadesuit|\text{Т}\spadesuit) * P(\text{Т}\spadesuit) + P(2\ \text{Т}\spadesuit|\overline{\text{Т}\spadesuit}) * P(\overline{\text{Т}\spadesuit}) + (2\ \text{К}\spadesuit|\text{К}\spadesuit) * P(\text{К}\spadesuit) + P(2\ \text{К}\spadesuit|\overline{\text{К}\spadesuit}) *$

$P(\overline{\text{К}\spadesuit});$

Так как из 2 карт обе должны быть идентичными, то это несовместные события и их пересечение имеет вероятность 0. Можно расписать события через формулу полной вероятности, как показано выше, где $P(2\ \text{Т}\spadesuit|\text{Т}\spadesuit)$ - вероятность вытащить два туза при условии, что первым вытащили туз, $P(\text{Т}\spadesuit)$ - вероятность первым вытащить туз, $P(2\ \text{Т}\spadesuit|\overline{\text{Т}\spadesuit})$ - вероятность вытащить два туза при условии, что первым вытащили не туз, $P(\overline{\text{Т}\spadesuit})$ - вероятность первым вытащить не туз (и аналогично для королей + все еще верно, что для королей все вычисления симметричны, поэтому можно просто умножить на 2).

$P(2\ \text{Т}\spadesuit|\text{Т}\spadesuit) * P(\text{Т}\spadesuit) + P(2\ \text{Т}\spadesuit|\overline{\text{Т}\spadesuit}) * P(\overline{\text{Т}\spadesuit}) + (2\ \text{К}\spadesuit|\text{К}\spadesuit) * P(\text{К}\spadesuit) + P(2\ \text{К}\spadesuit|\overline{\text{К}\spadesuit}) *$

$P(\overline{\text{К}\spadesuit}) = \frac{4}{59} * \frac{5}{60} + 0 * \frac{55}{60} + \frac{4}{59} * \frac{5}{60} + 0 * \frac{55}{60} = \frac{40}{3540} = \frac{2}{177};$

j) Раскроет 3 случайные карты:

1-ый способ

$P(3 \text{ одинаковые карты}|3 \text{ карты}) + P(2 \text{ одинаковые карты}|3 \text{ карты}) =$
$P(3\ \text{Т}\spadesuit|3 \text{ карты}) + P(3\ \text{К}\spadesuit|3 \text{ карты}) + P(2\ \text{Т}\spadesuit|3 \text{ карты}) + P(2\ \text{К}\spadesuit|3 \text{ карты});$

Так как из 3 карт две или три должны быть идентичными, то это несовместные события: не может быть ровно два и ровно три пиковых туза, ровно два и ровно три пиковых короля среди трех карт[1], следовательно, пересечение всех отдельных событий имеет вероятность 0. Более того, события 3Т и 3К, 2Т и 2К симметричные, так как количество пиковых королей и тузов в колоде одинаково, то есть:

$$P(3\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(3\ \text{К}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(2\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(2\ \text{К}\spadesuit|3\ \text{карты}) = 2*(P(3\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(2\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты})) = 2*(P(3\ \text{К}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(2\ \text{К}\spadesuit|3\ \text{карты}));$$

Решим через сочетания:

$$P(3\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) = \frac{C_5^3}{C_{60}^3} = \frac{\frac{5!}{3!*2!}}{\frac{60!}{3!*57!}} = \frac{5*4*3}{60*59*58} = \frac{1}{59*58} = \frac{1}{3422};$$

$$P(2\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) = \frac{C_5^2*C_{55}^1}{C_{60}^3} = \frac{\frac{5!}{2!*3!}*\frac{55!}{1!*54!}}{\frac{60!}{3!*57!}} = \frac{5*4*3*55}{60*59*58} = \frac{55}{59*58} = \frac{55}{3422};$$

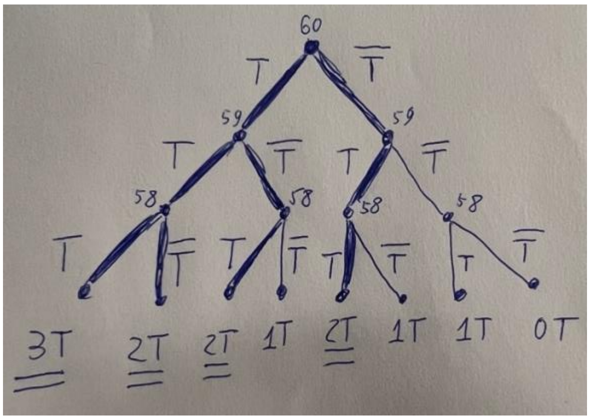
$$2*\left(P(3\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(2\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты})\right) = 2*\left(\frac{C_5^3}{C_{60}^3} + \frac{C_5^2*C_{55}^1}{C_{60}^3}\right) = 2*\left(\frac{1}{3422} + \frac{55}{3422}\right) = \frac{112}{3422} = \frac{56}{1711}.$$

Можно ли решить без сочетаний? Да, но тогда придется всё это аккуратно расписать. В этом пункте формула $C_n^k$ значительно упрощает жизнь.

2-ой способ

Например, вероятность вытащить два или три пиковых туза/короля из трёх карт может быть записана в этом случае так:

$$2*\left(P(3\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(2\ \text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты})\right) = 2*\Big(P(\text{Т}\spadesuit|\text{Т}\spadesuit\text{Т}\spadesuit)*P(\text{Т}\spadesuit|\text{Т}\spadesuit)*P(\text{Т}\spadesuit) + P(\text{Т}\spadesuit|\text{Т}\spadesuit\overline{\text{Т}\spadesuit})*P(\text{Т}\spadesuit|\overline{\text{Т}\spadesuit})*P(\overline{\text{Т}\spadesuit}) + P(\text{Т}\spadesuit|\overline{\text{Т}\spadesuit}\text{Т}\spadesuit)*P(\overline{\text{Т}\spadesuit}|\text{Т}\spadesuit)*P(\text{Т}\spadesuit) + P(\overline{\text{Т}\spadesuit}|\text{Т}\spadesuit\text{Т}\spadesuit)*P(\text{Т}\spadesuit|\text{Т}\spadesuit)*P(\text{Т}\spadesuit)\Big) = 2*\left(\frac{3}{58}*\frac{4}{59}*\frac{5}{60} + \frac{4}{58}*\frac{5}{59}*\frac{55}{60} + \frac{4}{58}*\frac{55}{59}*\frac{5}{60} + \frac{55}{58}*\frac{4}{59}*\frac{5}{60}\right) = 2*\frac{60+1100+1100+1100}{205320} = \frac{6720}{205320} = \frac{672}{20532} = \frac{168}{5133} = \frac{56}{1711}.$$




[1] Обратите внимание, что если бы речь шла просто, например, о хотя бы двух тузах из трех карт (без уточнения «**ровно**»), тогда события были бы совместны: P(хотя бы 2 туза из трёх карт)+P(3 туза)-P(2 туза из трех * 3 туза из 3)= P(хотя бы 2 туза из трёх карт), то есть второе и третье слагаемое взаимоисключаются. Тогда может быть запись: $P(3\ \text{одинаковые карты}|3\ \text{карты}) + P(2\ \text{одинаковые карты}|3\ \text{карты}) = P(\text{хотя бы}\ 2\text{Т}\spadesuit|3\ \text{карты}) + P(\text{хотя бы}\ 2\text{К}\spadesuit|3\ \text{карты})$.