Решение рубежа 1 «Коробка игрушек Женевьевы»

В коробке Женевьевы лежат деревянные игрушки: 30 кубиков □, 15 пирамидок △ и 5 шариков ○. Других игрушек в коробке нет. Известно, что 15 кубиков ■, 5 пирамидок ▲ и 1 шарик ● зеленого цвета. Женевьева извлекает вслепую одну игрушку. Найти вероятность того, что:

a) Это шарик:

$$P(\text{шарик}) = \frac{N_{\text{шарики}}}{N_{\text{игрушки}}} = \frac{N_{\text{шарики}}}{N_{\text{кубики}}+N_{\text{пирамидки}}+N_{\text{шарики}}} = \frac{5}{30+15+5} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10};$$

(*Классическое определение вероятности. Отношение всех благоприятных элементарных исходов к числу всех исходов.*)

b) Это не зеленая игрушка:

$$P(\text{не зеленая}) = \frac{N_{\text{не зеленые игрушки}}}{N_{\text{игрушки}}} = \frac{N_{\text{игрушки}}-N_{\text{зеленые игрушки}}}{N_{\text{игрушки}}} = \frac{50-(15+5+1)}{50} = \frac{29}{50};$$

(*Чтобы найти все не зеленые игрушки, достаточно из общего числа игрушек вычесть количество зеленых.*)

c) Это шарик или не зеленая игрушка:

$$P(\text{шарик} + \text{не зеленая}) = P(\text{шарик}) + P(\text{не зеленая}) - P(\text{шарик} \cap \text{не зеленая}) =$$

$$\frac{5}{50} + \frac{29}{50} - \frac{(5-1)}{50} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5};$$

(*Чтобы найти вероятность объединения двух событий, нужно воспользоваться формулой сложения вероятностей – Горяинова, Кибзун, с.31. Для двух событий обязательно нужно не забыть вычесть пересечение, если эти события совместны. Например,* $P(\text{шарик} \cap \text{не зеленая}) = P(\text{достали не зеленый шарик}) = \frac{N_{\text{шарики}}-N_{\text{зеленые шарики}}}{N_{\text{игрушки}}} = \frac{4}{50} \neq 0$)

d) Событие «кубик» и событие «зеленая игрушка» зависимы? Доказать:

1-ый способ

$$P(A) = P(\text{кубик}) = \frac{N_{\text{кубики}}}{N_{\text{игрушки}}} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5};$$

$$P(B) = P(\text{зеленая игрушка}) = 1 - P(\text{не зеленая}) = 1 - \frac{29}{50} = \frac{21}{50};$$

$$P(A \cap B) = P(\text{кубик} \cap \text{зеленая игрушка}) = P(\text{зеленый кубик}) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}.$$

Проверим, действительно ли $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$?

$$P(A) * P(B) = \frac{3}{5} * \frac{21}{50} = \frac{63}{250} \neq \frac{3}{10} \to\to\to \text{События А и } B \text{ зависимы, ч. т. д.}$$

(*Определение 3.1 на странице 30 Горяинова, Кибзун.*)

2-ой способ

$$P(A) = P(\text{кубик}) = \frac{N_{\text{кубики}}}{N_{\text{игрушки}}} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5};$$

$$P(A|B) = P(\text{кубик}|\text{зеленая игрушка}) = \frac{N_{\text{зеленые кубики}}}{N_{\text{зеленые игрушки}}} = \frac{15}{(15+5+1)} = \frac{5}{7};$$

Проверим, действительно ли $P(A|B) = P(A)$?

$$\frac{5}{7} \neq \frac{3}{5} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \text{События А и } B \text{ зависимы, ч. т. д.}$$

3-ий способ

$$P(B) = P(\text{зеленая игрушка}) = 1 - P(\text{не зеленая}) = 1 - \frac{29}{50} = \frac{21}{50};$$

$$P(B|A) = P(\text{зеленая игрушка}|\text{кубик}) = \frac{N_{\text{зеленые кубики}}}{N_{\text{кубики}}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2};$$

Проверим, действительно ли $P(B|A) = P(B)$?

$$\frac{1}{2} \neq \frac{21}{50} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \text{События А и } B \text{ зависимы, ч. т. д.}$$

(*В способах 2 и 3 мы полагаемся на следствие из определения условной вероятности. Известно, что* $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ *и* $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$. *Если события будут независимы, то* $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$. *Тогда должно выполняться* $P(A|B) = P(A)$ *и* $P(B|A) = P(B)$.)

e) Это кубик, если известно, что извлекли зеленую игрушку:

$$P(\text{кубик}|\text{зеленая игрушка}) = \frac{N_{\text{зеленые кубики}}}{N_{\text{зеленые игрушки}}} = \frac{15}{(15+5+1)} = \frac{5}{7};$$

f) Это зеленая игрушка, если известно, что извлекли кубик:

$$P(\text{зеленая игрушка}|\text{кубик}) = \frac{N_{\text{зеленые кубики}}}{N_{\text{кубики}}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2};$$

(*Обратите внимание на связь пунктов e) и f) с пунктом d). Нужно воспользоваться определением условной вероятности и, зная, что события зависимы, посчитать новые вероятности с учетом условий. Для этого* $P(\text{кубик} \cap \text{зеленая игрушка}) = \frac{3}{10}$ *делим в e) на вероятность* $P(\text{зеленая игрушка}) = \frac{21}{50}$ *и делим в f) на вероятность* $P(\text{кубик}) = \frac{3}{5}$)

Женевьева продолжила вытягивать игрушки наугад. Вытянутые игрушки она назад в коробку **не возвращает**. Найти вероятность того, что если всего Женевьева:

g) Извлечет 3 игрушки, то достанет 3 зеленые игрушки подряд:

1-ый способ

Всего игрушек 50. Зеленых игрушек 15+5+1=21. Игрушки в коробку не возвращаются. Тогда:

$$P(3\text{ зеленых из трёх}) = \frac{N_{\text{способов достать три зеленые игрушки}}}{N_{\text{способов достать три игрушки}}} = \frac{C_{21}^{3}}{C_{50}^{3}} = \frac{\frac{21!}{3! * 18!}}{\frac{50!}{3! * 47!}}$$

$$= \frac{21 * 20 * 19}{50 * 49 * 48}$$

2-ой способ

A_1, A_2, A_3 – извлекли зеленую игрушку первой, второй и третьей соответственно. Причем мы знаем, что игрушки назад не возвращаются, а значит события эти влияют друг на друга: с каждой извлеченной зелёной игрушкой шанс вытащить еще одну снижается. Тогда мы ищем:

$$P(3\text{ зеленых из трёх}) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 * A_2), \text{где:}$$

$$P(A_1) = \frac{N_{\text{зеленые игрушки}}}{N_{\text{игрушки}}} = \frac{21}{50};$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{N_{\text{зеленые игрушки}} - 1}{N_{\text{игрушки}} - 1} = \frac{20}{49},$$

т. к. уже случилось событие A_1: 1 зеленую игрушку извлекли, что привело к сокращению и числителя, и знаменателя на 1;

$$P(A_3|A_1 * A_2) = \frac{N_{\text{зеленые игрушки}} - 2}{N_{\text{игрушки}} - 2} = \frac{19}{48},$$

т. к. уже случились события A_1 и A_2: 2 зеленых игрушки извлекли, что привело к сокращению и числителя, и знаменателя на 2;

$$P(3\text{ зеленых из трёх}) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 * A_2) = \frac{21}{50} * \frac{20}{49} * \frac{19}{48}.$$

(*Как можно заметить, на самом деле 2-ой способ может быть интуитивно и алгебраически понятнее, но на самом деле в более сложных задачах требуется быть очень внимательным с условными вероятностями.)*

h) Извлечет 6 игрушек, то у нее будет 3 кубика, 2 пирамидки и 1 шарик:

Всего игрушек 50. Кубиков 30, пирамидок 15, шариков 5. Игрушки в коробку не возвращаются. Тогда:

$$P(\text{3 кубика, 2 пирамидки, 1шарик}) = \frac{N_{\text{способов достать три кубика}} * N_{\text{способов достать две пирамидки}} * N_{\text{способов достать один шарик}}}{N_{\text{способов достать шесть игрушек}}}$$

$$= \frac{C_{30}^3 * C_{15}^2 * C_5^1}{C_{50}^6} = \frac{\frac{30!}{3!*27!} * \frac{15!}{2!*13!} * \frac{5!}{1!*4!}}{\frac{50!}{6!*44!}} = \frac{\frac{30*29*28}{6} * \frac{15*14}{2} * \frac{5}{1}}{\frac{50*49*48*47*46*45}{720}}$$

$$= \frac{30*29*28*15*14*5}{50*49*48*47*46*45} * 60$$

(*А вот и наглядный пример, когда решать с условными вероятностями становится очень непросто. Ведь чтобы получить тот же ответ «вторым способом», вам нужно сложить ВСЕ комбинации из шести последовательных событий, где каждая цепочка будет состоять из своего набора условных вероятностей.*)

i) Извлечет 8 игрушек, то у нее будет не менее 7 кубиков:

$$P(\text{кубиков} \geq 7 | \text{8 игрушек достали})$$
$$= P(\text{7 кубиков и 1 любая игрушка кроме кубика}) + P(\text{8 кубиков})$$
$$= \frac{C_{30}^7 * C_{20}^1}{C_{50}^8} + \frac{C_{30}^8}{C_{50}^8} = \frac{\frac{30!}{7!*23!} * \frac{20!}{1!*19!} + \frac{30!}{8!*22!}}{\frac{50!}{8!*42!}}$$

(*Даже оперируя C_n^k, не забываем о расчете вероятностей последовательных событий и их объединении с другими. В данном случае события «достать 7 кубиков и любую другую игрушку кроме кубика» и «достать 8 кубиков» - несовместные, поэтому сложив их вероятности не приходится думать о вероятности их пересечения.*)

j) Извлечет 40 игрушек и среди извлеченных будет ровно 20 кубиков, то она сможет извлечь еще не менее 1 зеленой пирамидки:

Порой всё, что нужно сделать, это взглянуть на множество элементарных исходов и осознать, а что вообще произошло и что может случиться? И, быть может, никакие формулы будут вам не нужны…

Женевьева извлекла 40 игрушек, то есть в коробке их осталось 10.
Женевьева извлекла 20 из 30 кубиков, которые были в коробке, то есть в коробке осталось 10 кубиков.
Ни зеленых пирамидок/шариков, ни не зеленых пирамидок/шариков: никаких комбинаций с ними Женевьева больше не сможет извлечь. P=0.