

Асимптотическая сложность алгоритма Штрассена.

$$T(N) = 7 \cdot T\left(\frac{N}{2}\right) + \Theta(N^2)$$

$a=7$, $b=2$, $c=2$. Применим мастер-теорему: $\log_b a = \log_2 7 > 2 = c$.

Тогда $T(N) = \Theta(N^{\log_2 7})$.

Асимптотическая сложность алгоритма MULT.

$$T(N) = a \cdot T\left(\frac{N}{4}\right) + \Theta(N^2)$$

Применим мастер-теорему: $\log_4 a < 2 = c$. Ограничение: $a \geq 1$.

1) Если $a > 16$, то $T(N) = \Theta(N^{\log_4 a})$.

Чтобы этот алгоритм был эффективнее, необходимо $\log_4 a < \log_2 7$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_2 a &< \log_2 7 & (a \geq 1) \\ \log_2 a^{\frac{1}{2}} &< \log_2 7 \\ a^{\frac{1}{2}} &< 7 \\ a &< 49 \end{aligned}$$

2) Если $a = 16$, то $T(N) = \Theta(N^2 \log_2 N)$

$$N^2 \log_2 N < N^{\log_2 7}$$

$$\log_2 N < N^{\log_2 7 - 2} = N^{\log_2 7 - \log_2 4} = N^{\log_2 \frac{7}{4}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{\log_2 N}$$

$$\log_2 N = x, \quad x < \left(\frac{7}{4}\right)^x. \quad \text{Но } \left(\frac{7}{4}\right)^x > x \quad \forall x \in \mathbb{N}, \text{ тогда } N^2 \log_2 N < N^{\log_2 7}$$

3) Если $a < 16$, то $T(N) = \Theta(N^2)$. $N^2 = N^{\log_2 4} < N^{\log_2 7} \Rightarrow$ подходит.

Тогда подходят натуральные $a \geq 1$ и $a < 49$.

Ответ: $1 \leq a < 49$.