

SET 6. A2

[Algorithms SET 6](#)

Question 1.

Предположим, что "длина" пути рассчитывается не как общая сумма весов ребер, а как их произведение. Модифицируйте алгоритм Дейкстры для поиска кратчайших путей по указанному правилу. Для каких графов модифицированный алгоритм $DijkstraMULT(G, start)$ будет обеспечивать корректный поиск таких кратчайших путей? Почему?

Answer:

Модификация:

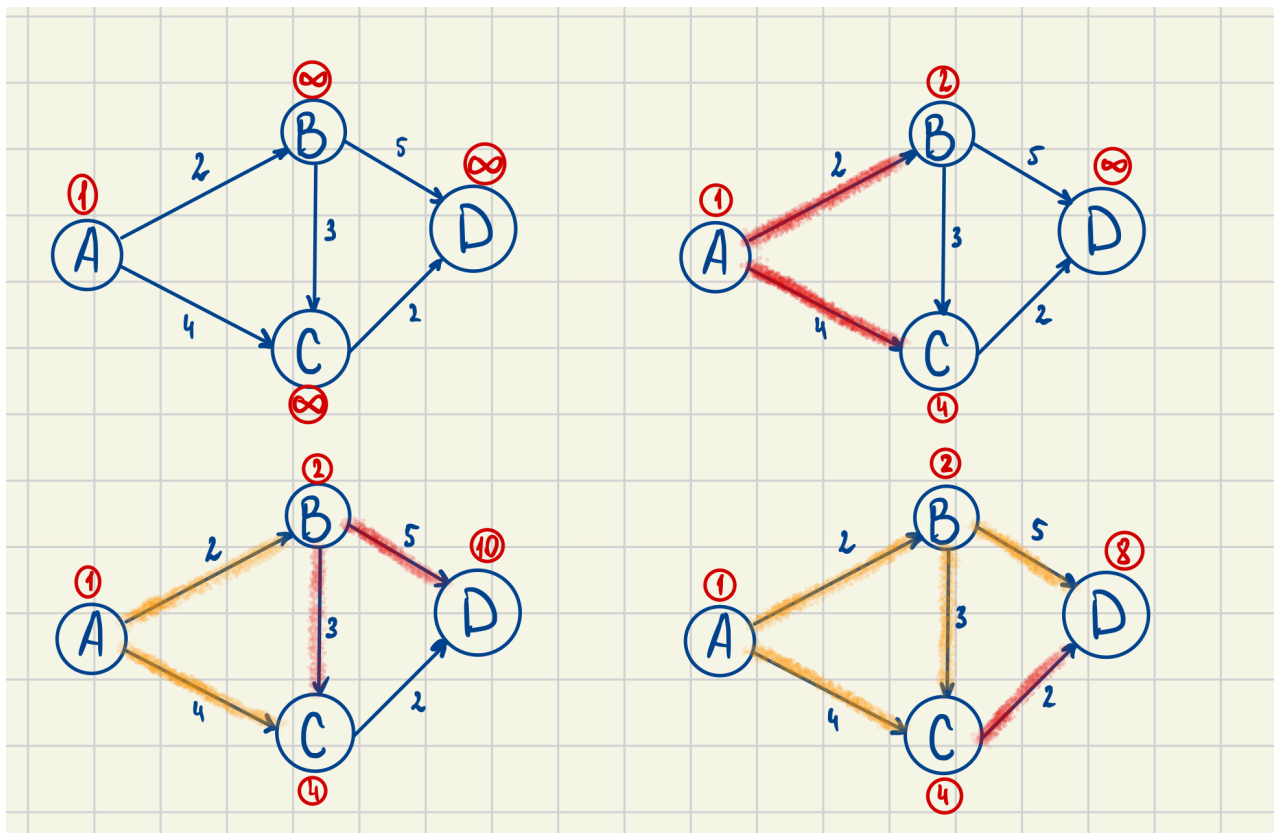
1. Инициализируем все вершинами бесконечностью, кроме первой, в которую ставим 1.
2. На каждом шаге будем выбирать вершину с наименьшим значения и обновлять расстояние до соседних вершин через умножение значения в вершине на вес пути.
3. Цель - минимизировать произведение.

Алгоритм будет корректен для графов, в которых:

1. Все веса больше 0, так как иначе произведение обнулится либо получится отрицательное значение.
2. Нет циклов с весами от 0 до 1, так как тогда будет бесконечное улучшение произведения.

Example:

1. Инициализируем вершину A единицей, а все остальные - бесконечностью.
2. Смотрим пути из вершины A :
 1. $A \rightarrow B = 2$, тогда $B = \min(\text{inf}, 1 * 2) = 2$
 2. $A \rightarrow C = 4$, тогда $C = \min(\text{inf}, 1 * 4) = 4$
3. Берём вершину B, так как у неё значение меньше, чем у C :
 1. $D \rightarrow C = 3$, тогда $C = \min(4, 2 * 3) = 4$
 2. $B \rightarrow D = 5$, тогда $D = \min(\text{inf}, 2 * 5) = 10$
4. Берём вершину C, так как у неё значение меньше, чем у D :
 1. $C \rightarrow D = 2$, тогда $D = \min(10, 4 * 2) = 8$.



Question 2.

Разработайте алгоритм `RestoreGraph(dist[][])`, который по заданной матрице кратчайших путей `dist` между всеми парами вершин графа $G = (V, E)$ восстанавливает его представление.

Например, на выходе этого алгоритма может быть получен список смежности графа G . Вы можете выбрать любое представление для восстанавливаемого графа, за исключением списка ребер. Есть ли случаи, в которых восстановление графа по матрице `dist` невозможно? Почему?

Answer:

Алгоритм:

1. Инициализируем пустой список смежности.
2. Запускаем цикл по всем различным парам вершин, где $i \neq j$.
3. Перебираем вершины k , не равные i и j .
4. Если в заданной матрице `dist` нет такой вершины k , чтобы выполнялось $dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j]$, значит, между вершинами i и j есть ребро длиной $dist[i][j]$. И тогда добавляем эти вершины в список смежности.
5. Возвращаем список смежности.

Восстановить граф полностью не получится, если какие-то рёбра имели большой вес и не участвовали ни в одном кратчайшем пути. Тогда они не были отображены в матрице `dist`. Также не совсем корректным может быть восстановление, если есть наборы рёбер, которые дают одинаковый кратчайший путь, потому что будет несколько вариантов восстановления графа.

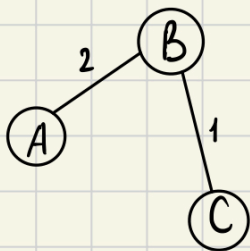
Example:

	A	B	C
A	0	2	3
B	2	0	1
C	3	1	0

$dist[A][B] \neq dist[A][x] + dist[x][B] \Rightarrow$ добавляем ребро AB

$dist[B][C] \neq dist[B][x] + dist[x][C] \Rightarrow$ добавляем ребро BC

$dist[A][C] = dist[A][B] + dist[B][C] \Rightarrow$ НЕ добавляем ребро AC



Здесь также можно заметить проблему восстановления. Теоретически между A и C могло быть ребро длиной 3.

Question 3.

В ядре реализации алгоритма Флойда-Уоршелла (для поиска кратчайших путей между всеми парами вершин в графе), представленного ниже допущена ошибка. Приведите пример графа, для которого кратчайшие пути будут определяться неверно, а также соответствующую трассировку алгоритма.

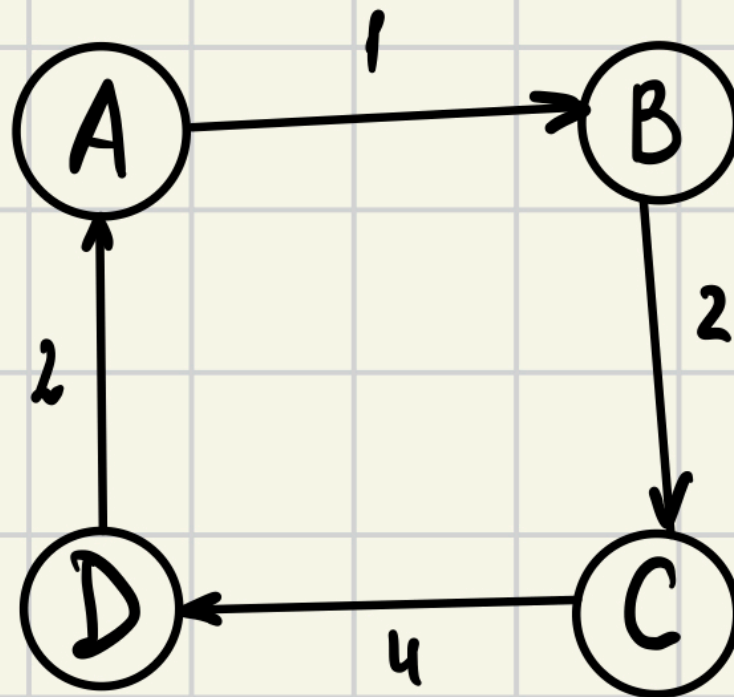
```
for i = 1 to n
  for j = 1 to n
    for k = 1 to n
      dist[i][j] = min(dist[i][j], dist[i][k] + dist[k][j])
```

Answer:

Ошибка связана с неправильной итерацией по рёбрам. Необходимо, чтобы внутренние циклы были по i и k , а внешним циклом была промежуточная вершина.

Пример неверного применения алгоритма и его трассировка.

Граф состоящий из 4 вершин:



64 трассировки сделаны на Python (task02.py):

```
dist[0][0] = min(dist[0][0], dist[0][0] + dist[0][0]) = inf
```

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

```
dist[0][0] = min(dist[0][0], dist[0][1] + dist[1][0]) = inf
```

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

```
dist[0][0] = min(dist[0][0], dist[0][2] + dist[2][0]) = inf
```

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf

B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][0] = \min(\text{dist}[0][0], \text{dist}[0][3] + \text{dist}[3][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][1] = \min(\text{dist}[0][1], \text{dist}[0][0] + \text{dist}[0][1]) = 1$

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][1] = \min(\text{dist}[0][1], \text{dist}[0][1] + \text{dist}[1][1]) = 1$

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][1] = \min(\text{dist}[0][1], \text{dist}[0][2] + \text{dist}[2][1]) = 1$

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][1] = \min(\text{dist}[0][1], \text{dist}[0][3] + \text{dist}[3][1]) = 1$

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][2] = \min(\text{dist}[0][2], \text{dist}[0][0] + \text{dist}[0][2]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	inf	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][2] = \min(\text{dist}[0][2], \text{dist}[0][1] + \text{dist}[1][2]) = 6$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][2] = \min(\text{dist}[0][2], \text{dist}[0][2] + \text{dist}[2][2]) = 6$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][2] = \min(\text{dist}[0][2], \text{dist}[0][3] + \text{dist}[3][2]) = 6$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][3] = \min(\text{dist}[0][3], \text{dist}[0][0] + \text{dist}[0][3]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][3] = \min(\text{dist}[0][3], \text{dist}[0][1] + \text{dist}[1][3]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	inf
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][3] = \min(\text{dist}[0][3], \text{dist}[0][2] + \text{dist}[2][3]) = 10$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[0][3] = \min(\text{dist}[0][3], \text{dist}[0][3] + \text{dist}[3][3]) = 10$

	A	B	C	D
--	---	---	---	---

A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][0] = \min(\text{dist}[1][0], \text{dist}[1][0] + \text{dist}[0][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][0] = \min(\text{dist}[1][0], \text{dist}[1][1] + \text{dist}[1][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][0] = \min(\text{dist}[1][0], \text{dist}[1][2] + \text{dist}[2][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][0] = \min(\text{dist}[1][0], \text{dist}[1][3] + \text{dist}[3][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][1] = \min(\text{dist}[1][1], \text{dist}[1][0] + \text{dist}[0][1]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][1] = \min(\text{dist}[1][1], \text{dist}[1][1] + \text{dist}[1][1]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4

D 4 inf inf inf

$\text{dist}[1][1] = \min(\text{dist}[1][1], \text{dist}[1][2] + \text{dist}[2][1]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][1] = \min(\text{dist}[1][1], \text{dist}[1][3] + \text{dist}[3][1]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][2] = \min(\text{dist}[1][2], \text{dist}[1][0] + \text{dist}[0][2]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][2] = \min(\text{dist}[1][2], \text{dist}[1][1] + \text{dist}[1][2]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][2] = \min(\text{dist}[1][2], \text{dist}[1][2] + \text{dist}[2][2]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][2] = \min(\text{dist}[1][2], \text{dist}[1][3] + \text{dist}[3][2]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][3] = \min(\text{dist}[1][3], \text{dist}[1][0] + \text{dist}[0][3]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][3] = \min(\text{dist}[1][3], \text{dist}[1][1] + \text{dist}[1][3]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	inf
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][3] = \min(\text{dist}[1][3], \text{dist}[1][2] + \text{dist}[2][3]) = 9$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[1][3] = \min(\text{dist}[1][3], \text{dist}[1][3] + \text{dist}[3][3]) = 9$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][0] = \min(\text{dist}[2][0], \text{dist}[2][0] + \text{dist}[0][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][0] = \min(\text{dist}[2][0], \text{dist}[2][1] + \text{dist}[1][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	inf	inf	inf	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][0] = \min(\text{dist}[2][0], \text{dist}[2][2] + \text{dist}[2][0]) = \text{inf}$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9

```

C   inf inf inf 4
D   4   inf inf inf

```

$\text{dist}[2][0] = \min(\text{dist}[2][0], \text{dist}[2][3] + \text{dist}[3][0]) = 8$

```

      A   B   C   D
A   inf 1   6   10
B   inf inf 5   9
C   8   inf inf 4
D   4   inf inf inf

```

$\text{dist}[2][1] = \min(\text{dist}[2][1], \text{dist}[2][0] + \text{dist}[0][1]) = 9$

```

      A   B   C   D
A   inf 1   6   10
B   inf inf 5   9
C   8   9   inf 4
D   4   inf inf inf

```

$\text{dist}[2][1] = \min(\text{dist}[2][1], \text{dist}[2][1] + \text{dist}[1][1]) = 9$

```

      A   B   C   D
A   inf 1   6   10
B   inf inf 5   9
C   8   9   inf 4
D   4   inf inf inf

```

$\text{dist}[2][1] = \min(\text{dist}[2][1], \text{dist}[2][2] + \text{dist}[2][1]) = 9$

```

      A   B   C   D
A   inf 1   6   10
B   inf inf 5   9
C   8   9   inf 4
D   4   inf inf inf

```

$\text{dist}[2][1] = \min(\text{dist}[2][1], \text{dist}[2][3] + \text{dist}[3][1]) = 9$

```

      A   B   C   D
A   inf 1   6   10
B   inf inf 5   9
C   8   9   inf 4
D   4   inf inf inf

```

$\text{dist}[2][2] = \min(\text{dist}[2][2], \text{dist}[2][0] + \text{dist}[0][2]) = 14$

```

      A   B   C   D
A   inf 1   6   10
B   inf inf 5   9
C   8   9   14  4
D   4   inf inf inf

```

$\text{dist}[2][2] = \min(\text{dist}[2][2], \text{dist}[2][1] + \text{dist}[1][2]) = 14$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][2] = \min(\text{dist}[2][2], \text{dist}[2][2] + \text{dist}[2][2]) = 14$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][2] = \min(\text{dist}[2][2], \text{dist}[2][3] + \text{dist}[3][2]) = 14$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][3] = \min(\text{dist}[2][3], \text{dist}[2][0] + \text{dist}[0][3]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][3] = \min(\text{dist}[2][3], \text{dist}[2][1] + \text{dist}[1][3]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][3] = \min(\text{dist}[2][3], \text{dist}[2][2] + \text{dist}[2][3]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[2][3] = \min(\text{dist}[2][3], \text{dist}[2][3] + \text{dist}[3][3]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10

B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[3][0] = \min(\text{dist}[3][0], \text{dist}[3][0] + \text{dist}[0][0]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[3][0] = \min(\text{dist}[3][0], \text{dist}[3][1] + \text{dist}[1][0]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[3][0] = \min(\text{dist}[3][0], \text{dist}[3][2] + \text{dist}[2][0]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[3][0] = \min(\text{dist}[3][0], \text{dist}[3][3] + \text{dist}[3][0]) = 4$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	inf	inf	inf

$\text{dist}[3][1] = \min(\text{dist}[3][1], \text{dist}[3][0] + \text{dist}[0][1]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	inf	inf

$\text{dist}[3][1] = \min(\text{dist}[3][1], \text{dist}[3][1] + \text{dist}[1][1]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	inf	inf

$\text{dist}[3][1] = \min(\text{dist}[3][1], \text{dist}[3][2] + \text{dist}[2][1]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	inf	inf

$\text{dist}[3][1] = \min(\text{dist}[3][1], \text{dist}[3][3] + \text{dist}[3][1]) = 5$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	inf	inf

$\text{dist}[3][2] = \min(\text{dist}[3][2], \text{dist}[3][0] + \text{dist}[0][2]) = 10$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	inf

$\text{dist}[3][2] = \min(\text{dist}[3][2], \text{dist}[3][1] + \text{dist}[1][2]) = 10$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	inf

$\text{dist}[3][2] = \min(\text{dist}[3][2], \text{dist}[3][2] + \text{dist}[2][2]) = 10$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	inf

$\text{dist}[3][2] = \min(\text{dist}[3][2], \text{dist}[3][3] + \text{dist}[3][2]) = 10$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	inf

$\text{dist}[3][3] = \min(\text{dist}[3][3], \text{dist}[3][0] + \text{dist}[0][3]) = 14$

	A	B	C	D
--	---	---	---	---

A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	14

$\text{dist}[3][3] = \min(\text{dist}[3][3], \text{dist}[3][1] + \text{dist}[1][3]) = 14$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	14

$\text{dist}[3][3] = \min(\text{dist}[3][3], \text{dist}[3][2] + \text{dist}[2][3]) = 14$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	14

$\text{dist}[3][3] = \min(\text{dist}[3][3], \text{dist}[3][3] + \text{dist}[3][3]) = 14$

	A	B	C	D
A	inf	1	6	10
B	inf	inf	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	14

А это итоговый результат применения правильного алгоритма Флойда-Уоршелла:

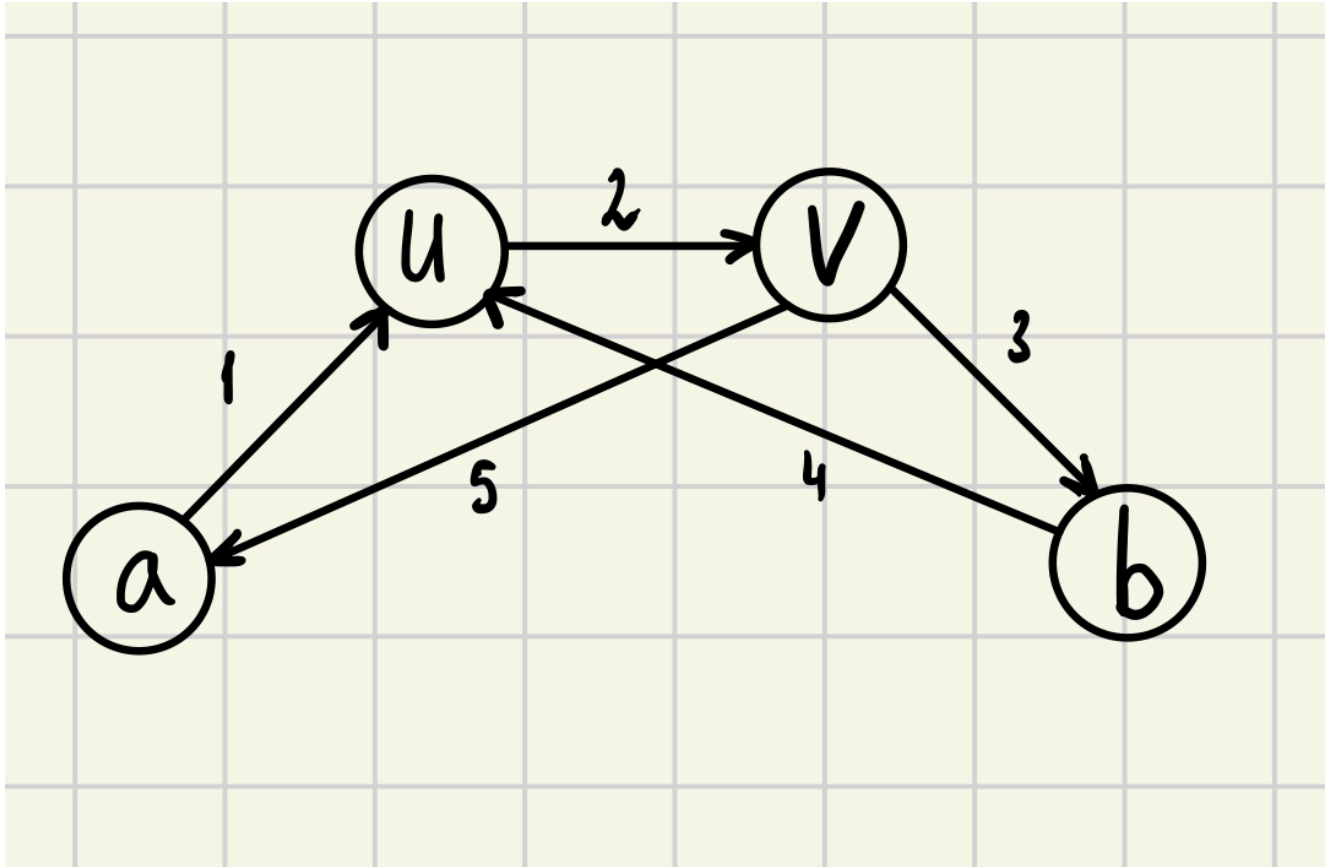
	A	B	C	D
A	14	1	6	10
B	13	14	5	9
C	8	9	14	4
D	4	5	10	14

Question 4.

Возможно ли определить такой ориентированный взвешенный граф $G = (V, E)$, в котором некоторое ребро (v_i, v_j) лежит как на кратчайшем пути из вершины $a \in V$ в вершину $b \in V$, так и на кратчайшем пути из вершины b в вершину a ? Охарактеризуйте данный граф и определите, возникнут ли ограничения применимости известных алгоритмов поиска кратчайших путей в G .

Answer:

Да, возможно. Например:



Кратчайший и единственный путь из a в b - $a \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow b$.

Кратчайший и единственный путь из b в a - $b \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow a$.

Такой граф должен быть сильно связанным, чтобы была возможность попасть из одной вершин в другую и наоборот. Но тогда в таком графе образуются циклы. И чтобы избежать бесконечного заикливания из-за улучшения пути не должно быть циклов с отрицательным весом. Так как нет циклов, сумма весов которых имеют отрицательное значение, то к такому графу применимы все известные алгоритмы кратчайшего пути.