NESTED_LOOPS.cpp

```cpp
int x = 100;
int y = 0;

for (size_t outer = 1; outer <= n; outer *= 2) {
    x = x + outer;
    for (size_t inner = 2; inner < n; ++inner) {
        if (x > y / inner) y = y + outer / inner;
        else --y;
    }
}
```

затраты	количество итераций
C_1	1
C_2	1
C_3	K
C_4	$K-1$
C_5	$(K-1)(n-1)$
$\left.\begin{matrix} C_6' \\ C_7' \end{matrix}\right\} C_6$	$(K-1)(n-2)$

$$K = \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2 n\rfloor + 1} 1}_{\text{outer} \leq n}\Big) + \underbrace{1}_{\text{outer} > n} = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2$$

количество элементарных операций: C_i при $i = \overline{1,6}$

в C_6' 3 операции ($/$, $+$, $=$) а также 2 операции в if ($/$, $>$).

в C_7' 2 операции ($-$, $=$)

1. $$T(n) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot K + C_4 (K-1) + C_5 \cdot (K-1)(n-1) + C_6 \cdot (K-1)(n-2) =$$
$$= C_1 + C_2 + C_3 K + C_4 (K-1) + (K-1)(C_5 n - C_5 + C_6 n - 2C_6 + 2C_5 - 2C_5) =$$
$$= C_1 + C_2 + C_3 K + C_4 (K-1) + C_5 (K-1) + (C_5 + C_6)(K-1)(n-2) =$$
$$= (C_1 + C_2 - C_4 - C_5) + (C_3 + C_4 + C_5) K + (C_5 + C_6)(K-1)(n-2) =$$
$$= (C_1 + C_2 - C_4 - C_5) + (C_3 + C_4 + C_5)(\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) + (C_5 + C_6)(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)(n-2) =$$
$$= (C_1 + C_2 + 2C_3 + C_4 - C_5 - 2C_6) + (C_3 + C_4 - C_5 - 2C_6) \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor + (C_5 + C_6) n + (C_5 + C_6) n \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor =$$

$$= \left[\begin{matrix} C_1 = C_1 + C_2 + 2C_3 + C_4 - C_5 - 2C_6 \\ C_2 = C_3 + C_4 - C_5 - 2C_6 \\ C_3 = C_5 + C_6 \quad \text{некоторые} \\ C_4 = C_5 + C_6 \quad \text{константы} \end{matrix}\right] = C_1 + C_2 \lfloor \log_2 n \rfloor + C_3 n + C_4 \cdot n \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor$$

2. $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$.

☐ Докажем, что $T(n) = O(n \log_2 n)$

$C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$, тогда $\exists C = \max(C_1, C_2, C_3, C_4) > 0$

$\exists n_0 = 4\ \forall n \geq n_0\quad T(n) = C_1 + C_2 \lfloor \log_2 n \rfloor + C_3 n + C_4 n \lfloor \log_2 n \rfloor \leq C\,(1 + \lfloor \log_2 n \rfloor + n + n \lfloor \log_2 n \rfloor) \leq$

$\leq C\,(n \log_2 n + n \log_2 n + n \log_2 n + n \log_2 n) = 4 C n \log_2 n$

Следовательно, $\exists n_0 = 4\ \forall n \geq n_0\ \exists M = 4 \cdot \max(C_1, C_2, C_3, C_4)\quad T(n) \leq M n \log_2 n$.

Теперь покажем, что $T(n) = \Omega(n\log_2 n)$.

$T(n) = C_1 + C_2 n + C_3 \lfloor \log_2 n \rfloor + C_4 n \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor \geqslant C_4 n \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor$

$\forall n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \quad \exists!\, k \in \mathbb{N} : \quad 2^k \leq n < 2^{k+1} \implies \lfloor \log_2 n \rfloor = k, \ \log_2 n < k+1$

$m = \frac{k}{k+1} > 0 \implies m \cdot \log_2 n < m(k+1) = k = \lfloor \log_2 n \rfloor$

Тогда $C_4 n \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor < C_4 m \cdot n \cdot \log_2 n$

Следовательно, $\exists n_0 = 2 \quad \forall n > n_0 \quad \exists M = C_4 m : \ T(n) > n \cdot \log_2 n \implies T(n) = \Omega(n \cdot \log_2 n)$.

Тогда, т.к. $T(n) = O(n \log_2 n)$ и $T(n) = \Omega(n \log_2 n)$, то $T(n) = \Theta(n \cdot \log_2 n)$ ■