Теория вероятностей

ИДЗ 2. Вариант 5

Васюков Александр Владимирович, БПИ235

Задача 3

Плотность распределения СВ ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c(x+0.5), & \text{if } x \in (0,1) \\ 0, & \text{if } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Найти:

a) константу c

b) функцию распределения СВ ξ

c) построить график функции плотности распределения СВ и график функции распределения СВ

d) $\mathbb{D}(2-3\xi)(4+5\xi)$

e) $\mathbb{D}(4-2\xi)$

f) $\mathbb{P}(\xi < 0.5)$

a)

$$1 \overset{\text{по опр.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} c(x+0.5)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x =$$
$$= 0 + \int_{0}^{1} c(x+0.5)\,\mathrm{d}x + 0 =$$
$$= c\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)|_0^1 =$$
$$= c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{0}{2} - \frac{0}{2}\right) =$$
$$= c$$

Следовательно, $c = 1$.

Подставим $c = 1$ в функцию плотности распределения:

$f_\xi(x) = \begin{cases} x+0.5, & \text{if } x \in (0,1) \\ 0, & \text{if } x \notin (0,1) \end{cases}$

b) Так как плотность в $x \notin (0,1)$ равна 0, то:

$F_\xi(x) = 0$ при $x \leq 0$,

$F_\xi(x) = 1$ при $x \geq 1$.

В $x \in (0,1)$ считаем интеграл:

$$F_\xi(x) = \int_0^x (t + 0.5)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right) |_0^x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

Тогда функция распредления СВ ξ: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(x^2+x), & \text{if } x \in (0,1) \\ 1, & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

c)

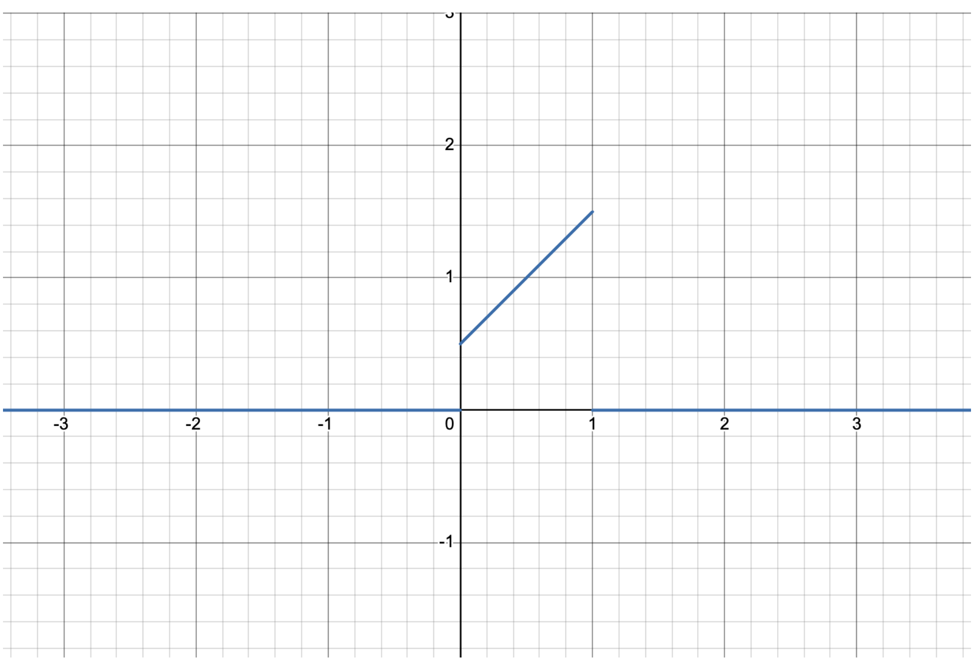

Figure 1: График функции плотности распределения СВ ξ

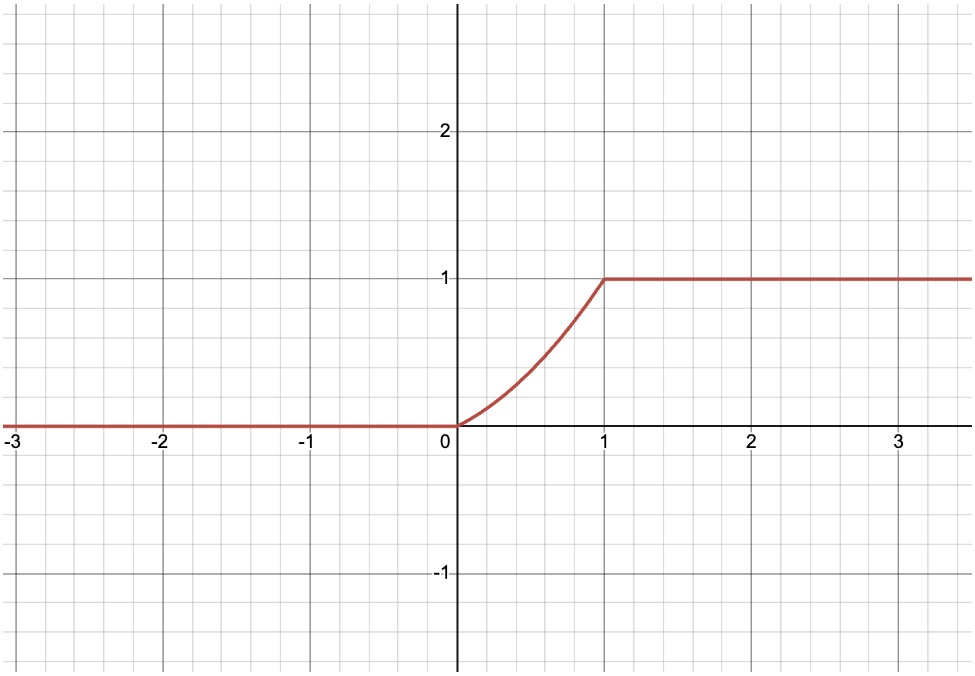

Figure 2: График функции распределения СВ ξ

d) Сначала найдём $\mathbb{E}(\xi)$ и $\mathbb{E}(\xi^2)$.

$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^1 x \cdot f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot (x + 0.5)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right) |_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot (x + 0.5)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right) |_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

$\mathbb{E}(2 - 3\xi)(4 + 5\xi) = \mathbb{E}(8 - 2\xi - 15\xi^2) = -15\mathbb{E}(\xi^2) - 2\mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(8) = -15 \cdot \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{7}{12} + 8 = \frac{7}{12}$.

e) Сначала найдём $\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{60-49}{144} = \frac{11}{144}$.

$\mathbb{D}(4 - 2\xi) = \mathbb{D}(4) + (-2)^2\mathbb{D}(\xi) = 0 + 4\mathbb{D}(\xi) = 4\mathbb{D}(\xi) = 4 \cdot \frac{11}{144} = \frac{11}{36}$.

f) $\mathbb{P}(\xi < 0.5) = F_\xi(0.5) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

Ответ:

a) $c = 1$

b) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \le 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + x), & \text{if } x \in (0, 1) \\ 1, & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$

c) см. картинки выше

d) $\mathbb{E}(2 - 3\xi)(4 + 5\xi) = \frac{7}{12}$

e) $\mathbb{D}(4 - 2\xi) = \frac{11}{36}$

f) $\mathbb{P}(\xi < 0.5) = \frac{3}{8}$

Задача 4

Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $[0, 1]$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону: $f(y) = \lambda \exp(-\lambda \exp), y \geq 0$?

Дана СВ $X \sim R(0, 1)$, тогда её функция плотности равна

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \notin (0,1) \\ 1, & \text{if } x \in (0,1) \end{cases}$$

Функция распределения: $F_X(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$.

СВ $Y \sim E(\lambda)$, тогда её функция плотности равна

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda e}, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

Функция распределения: $F_Y(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = 1 - e^{-ey}$, $y \geq 0$.

X равномерно распределена на (0, 1), тогда можно выразить Y через обратную функцию распределения $Y = \varphi(X) = F_Y^{-1}(X)$.

Функции распредления должны быть равны: $F_Y(y) = F_X(x)$:

$1 - e^{-ey} = x$

$e^{-ey} = 1 - x$

$-ey = \ln(1 - x)$

$y = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda}$

$Y = \frac{-\ln(1-X)}{\lambda}$

Тогда $\varphi(X) = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda}$.

Ответ. $\varphi(X) = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda}$.