Решение рубежа 2 «Картины Жан-Жака»

Задача 1 (6 баллов)

Жан-Жак целую неделю самозабвенно рисует картины: по одной картине в день. Известно, что художник изображает или пейзаж дикой природы, или городской, причем его предпочтения не меняются со временем. Известно, что Жан-Жак за два дня нарисует хотя бы один городской пейзаж с вероятностью 0.96. Перед тем, как ответить на вопросы в пунктах c)-d), укажите:

a) Какие теоретические положения теории вероятностей вы будете использовать? Какие условия (3) предполагаются соблюденными?

Для решения задачи воспользуемся схемой и формулой Бернулли. Её можно применить, так как 1) есть 2 исхода: либо пейзаж дикой природы, либо пейзаж городской; 2) предполагаем, что Жан-Жак выбирает, что рисовать, без оглядки на предыдущие картины, то есть рисование каждого нового пейзажа – независимое событие; 3) предпочтения не меняются со временем, то есть можем предположить, что художник с постоянной вероятностью выбирает в качестве тематики или дикую природу, или город.

b) Найти вероятность того, что в i-ый день Жан-Жак выберет рисовать городской пейзаж;

Пусть Г – событие «в день i нарисован городской пейзаж», является «успехом» с вероятностью p; П – событие «в день i нарисован пейзаж дикой природы», является «провалом» с вероятностью q. Тогда:

$$P(\Gamma > 0 \text{ за 2 дня}) = 1 - P(\Gamma = 0 \text{ за два дня}) = 0.96$$

Или вероятность того, что за 2 дня случится 0 успехов, является:

$$P(\Gamma = 0 \text{ за два дня}) = P_2(k = 0) = 1 - 0.96 = 0.04.$$

Тогда вероятность провала удовлетворяет равенству, что за 2 дня случилось 2 провала подряд:

$$q^2 = 0.04 \to q = 0.2.$$

Вероятность успеха, она же вероятность «в день i нарисован городской пейзаж», есть $p = 1 - q = 1 - 0.2 = 0.8$.

Также можно сразу воспользоваться следствием №2 формулы Бернулли:
$P_2(k \geq 1) = 1 - q^2 = 0.96 \to q = 0.2 \to p = 1 - q = 0.8$.

c) Найти вероятность того, что Жан-Жак нарисует 2 городских пейзажа за неделю;

$P_7(k = 2) = C_7^2 p^2 q^{7-2} = C_7^2 0.8^2 0.2^5$.

d) Найти вероятность того, что Жан-Жак нарисует не более 2 городских пейзажей за неделю.

То есть нужно найти вероятность, что случится 0, 1 или 2 успеха за неделю:
$P_7(k \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} C_n^k p^k q^{n-k} = C_7^2 0.8^2 0.2^5 + C_7^1 0.8^1 0.2^6 + C_7^0 0.8^0 0.2^7$.

Задача 2 (4 балла)

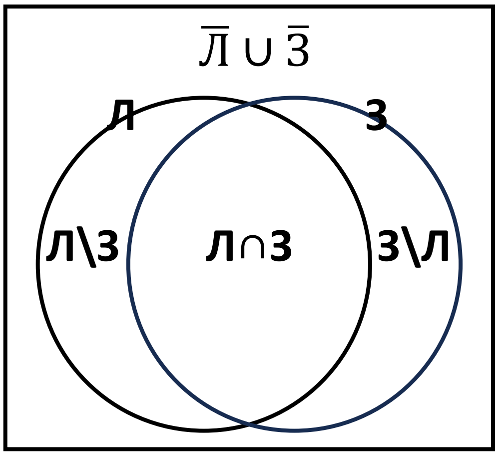
Жан-Жак нарисовал 7 картин и привез их на выставку. Известно, что на 4 картинах изображены люди; на 5 картинах – здания; на 1 картине нет ни людей, ни зданий. Пенелопа гуляет по выставке без определенной цели и останавливается рассмотреть случайную картину Жан-Жака:

a) Найти вероятность, что на картине есть люди или здания;

$P(\text{есть люди или здания}) = 1 - P(\text{нет ни людей, ни зданий}) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

b) Найти вероятность, что на картине изображено что-то одно: или люди, или здания.

Пусть Л – событие «на картине есть люди», З – событие «на картине есть здания». Тогда можем воспользоваться диаграммой Эйлера-Венна для наглядности:



Из условия мы понимаем, что: $\overline{Л} \cup \overline{З} = 1$, $Л = 4$, $З = 5$.

Мы также знаем из пункта а), что $P(Л \cup З) = 1 - P(\overline{Л} \cup \overline{З}) = \frac{6}{7}$.

Воспользуемся формулой сложения вероятностей двух событий:

$$P(Л \cup З) = P(Л) + P(З) - P(Л \cap З)$$

Откуда можем найти:

$P(Л \cap З) = P(Л) + P(З) - P(Л \cup З) = \frac{4}{7} + \frac{5}{7} - \frac{6}{7} = \frac{3}{7}$.

Тогда вероятность, что на картине изображено что-то одно: или люди, или здания:

$P(Л \backslash З \cup З \backslash Л) = P(Л) + P(З) - 2P(Л \cup З) = \frac{4}{7} + \frac{5}{7} - 2 * \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$.

Или для наглядности: количество картин с людьми, но без зданий, есть $Л \backslash З$ или $Л - Л \cap З = 4 - 3 = 1$; количество картин с зданиями, но без людей, есть $З \backslash Л$ или $З - Л \cap З = 5 - 3 = 2$; количество картин только с людьми или зданиями есть $Л \backslash З + З \backslash Л = 1 + 2 = 3$. Всего картин 7, вот и вероятность $\frac{3}{7}$.

(*Держать в голове операции с множествами всегда полезно, тем более, они дают более четкое представление, какую вероятность вы ищете*)