Теория вероятностей

ИДЗ 4. Вариант 5

Васюков Александр Владимирович, БПИ235

Задача 7

Правильную игральную кость подбросили 200 раз. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота появления грани с номером шесть отклонится от вероятности ее появления не более, чем на 0, 05. Найденный ответ сравнить с результатом, полученным с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Решение:

Дано:
n = 200 – количество подбрасываний.
p = 1/6 – вероятность выпадания шести при одном побрасывании.
$\varepsilon = 0.05$ – погрешность.

Пусть СВ ξ – выпадения шести и $\overline{p}$ – вероятность выпадения шестерки при 200 побрасываниях.

Неравенство Чебышева

По неравенству Чебышева:

$P(|\overline{p} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}(\xi)}{\varepsilon^2}$

Тогда неоходимо найти:

$P(|\overline{p} - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(\xi)}{\varepsilon^2}$

$\xi \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, тогда $\mathbb{E}(\xi) = p = \frac{1}{6}$ и $\mathbb{D}(\xi) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{200} = \frac{1}{1440}$.

Подставим в формулу:

$P\left(|\overline{p} - \frac{1}{6}| \leq 0.05\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{1440}}{0.05^2} \approx 0.7222$

Ответ: 0.7222.

Теорема Муавра-Лапласа

$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}} \leq Z \leq \frac{b-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}}\right)$

$\Phi(x)$ – функция стандартного нормального рспределения, а X – количество выпавших шестерок.

Посчитаем границы:
$a = n(p - \varepsilon) = 200 \cdot \left(\frac{1}{6} - 0.05\right) = \frac{70}{3}$

$b = n(p + \varepsilon) = 200 \cdot \left(\frac{1}{6} + 0.05\right) = \frac{130}{3}$

$\mathbb{E}(X) = np = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$
$\mathbb{D}(X) = np(1 - p) = 200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{250}{9}$

Подставляем в формулу:
$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{\frac{130}{3} - \frac{100}{3}}{\sqrt{\frac{250}{9}}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{70}{3} - \frac{100}{3}}{\sqrt{\frac{250}{9}}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{10}}\right) = 2 \cdot \Phi(1.897) - 1 \approx 2 * (0.5 + 0.471) - 1 = 0.942$

Ответ: 0.942.

По теореме Муавра-Лапласа получилось более точное значение, потому что она использует форму распределения СВ, в отличие от неравенства Чебышева.