Решение рубежа 3 «Расследование Эркюля»

В имении Стайлз случилось отравление, и талантливый сыщик Эркюль берется найти уличающее доказательство. Эркюль уверен, что преступник оставил следы в спальне, на кухне и в гостиной. Он может с равной вероятностью осмотреть любую из этих комнат, но считает, что в спальне он найдет уличающее доказательство с вероятностью 0.9, на кухне – с вероятностью 0.8, а в гостиной – с вероятностью 0.6.

a) Найти вероятность, что Эркюль найдёт уличающее доказательство;

Пусть событие Д – найдено уличающее доказательство, событие С – Эркюль осматривает спальню, событие К – Эркюль осматривает кухню, событие Γ – Эркюль осматривает гостиную. Тогда при помощи формулы полной вероятности:

$$P(\text{Д}) = P(\text{Д}|\text{С}) * P(\text{С}) + P(\text{Д}|\text{К}) * P(\text{К}) + P(\text{Д}|\Gamma) * P(\Gamma) = 0.9 * \frac{1}{3} + 0.8 * \frac{1}{3} + 0.6 * \frac{1}{3} = (0.9 + 0.8 + 0.6) * \frac{1}{3} = \frac{23}{10} * \frac{1}{3} = \frac{23}{30}.$$

b) Известно, что уличающее доказательство было найдено. Найти апостериорную вероятность того, что это доказательство из гостиной;

Чтобы найти апостериорную вероятность, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(\Gamma|\text{Д}) = \frac{P(\text{Д}|\Gamma) * P(\Gamma)}{P(\text{Д})} = \frac{0.6 * \frac{1}{3}}{\frac{23}{30}} = \frac{\frac{6}{30}}{\frac{23}{30}} = \frac{6}{23}.$$

Стало известно, что местный инспектор недоволен действиями сыщика и мешает ему обследовать комнаты. Если Эркюль встречает инспектора, то не может продолжать поиски улик. Эркюль может встретить инспектора в спальне с вероятностью 0.6, на кухне с вероятностью 0.3 и в гостиной с вероятностью 0.1. Эта информация распространяется на все следующие пункты:

c) Найти вероятность, что Эркюль найдёт уличающее доказательство;

Добавим событие И – Эркюль встречает инспектора, $\bar{\text{И}}$ – Эркюль избегает встречи с инспектором. Тогда при помощи формулы полной вероятности:

$$P(\text{Д}) = P(\text{Д}|\bar{\text{И}} * \text{С}) * P(\bar{\text{И}}|\text{С}) * P(\text{С}) + P(\text{Д}|\bar{\text{И}} * \text{К}) * P(\bar{\text{И}}|\text{К}) * P(\text{К}) + P(\text{Д}|\bar{\text{И}} * \Gamma) * P(\bar{\text{И}}|\Gamma) * P(\Gamma) = 0.9 * (1 - 0.6) * \frac{1}{3} + 0.8 * (1 - 0.3) * \frac{1}{3} + 0.6 * (1 - 0.1) * \frac{1}{3} = (0.9 * 0.4 + 0.8 * 0.7 + 0.6 * 0.9) * \frac{1}{3} = \frac{0.36 + 0.56 + 0.54}{3} = \frac{1.46}{3} = \frac{146}{300} = \frac{73}{150}.$$

d) Известно, что уличающее доказательство было найдено. Найти апостериорную вероятность того, что это доказательство из гостиной;

Чтобы найти апостериорную вероятность, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(\text{Г}|\text{Д}) = \frac{P(\text{Д}|\overline{\text{И}}*\text{Г})*P(\overline{\text{И}}|\text{Г})*P(\text{Г})}{P(\text{Д})} = \frac{0.6*0.9*\frac{1}{3}}{\frac{146}{300}} = \frac{\frac{54}{300}}{\frac{146}{300}} = \frac{54}{146} = \frac{27}{73}.$$

e) Найти вероятность, что Эркюль не найдёт уличающее доказательство;

Так как есть только 2 исхода, что либо сыщик находит доказательство, либо не находит, то событие $\overline{\text{Д}}$ – Эркюль не нашел уличающего доказательства:

$$P(\overline{\text{Д}}) = 1 - P(\text{Д}) = 1 - \frac{146}{300} = \frac{154}{300} = \frac{77}{150}.$$

f) Найти вероятность, что Эркюль обыскивал гостиную, при условии, что доказательства найдено не было.

Можно воспользоваться формулой Байеса и расписать вероятность как:

$$P(\text{Г}|\overline{\text{Д}}) = \frac{P(\overline{\text{Д}}|\text{Г})*P(\text{Г})}{P(\overline{\text{Д}})},$$

но теперь следует учесть, что мы знаем только $P(\overline{\text{Д}}) = \frac{154}{300} = \frac{77}{150}$ из пункта e) и $P(\text{Г}) = \frac{1}{3}$. Но $P(\overline{\text{Д}}|\text{Г})$ еще предстоит расписать, так как это вероятность того, что доказательство не было найдено при условии, что Эркюль осматривал гостиную. На самом деле важно не упустить, что **есть 2 причины, почему оно могло быть не найдено**: 1) по вине самого Эркюля и 2) из-за вмешательства инспектора. То есть:

$$P(\overline{\text{Д}}|\text{Г}) = P(\overline{\text{Д}}|\overline{\text{И}} * \text{Г}) * P(\overline{\text{И}}|\text{Г}) + P(\overline{\text{Д}}|\text{И} * \text{Г}) * P(\text{И}|\text{Г}) = (1 - 0.6) * (1 - 0.1) + 1 * 0.1 = 0.4 * 0.9 + 0.1 = 0.46.$$

$$P(\text{Г}|\overline{\text{Д}}) = \frac{P(\overline{\text{Д}}|\text{Г})*P(\text{Г})}{P(\overline{\text{Д}})} = \frac{0.46*\frac{1}{3}}{\frac{154}{300}} = \frac{\frac{46}{300}}{\frac{154}{300}} = \frac{46}{154} = \frac{23}{77}.$$

Либо, ссылаясь на пункт d) и в общем, можно сделать замечание, что $P(\overline{\text{Д}}|\text{Г}) = 1 - P(\text{Д}|\overline{\text{И}} * \text{Г}) * P(\overline{\text{И}}|\text{Г}) = 1 - 0.6 * 0.9 = 1 - 0.54 = 0.46$. И дальше также найти $P(\text{Г}|\overline{\text{Д}})$ с применением формулы Байеса.