Алгоритмы и структуры данных-1

Асимптотический анализ и рекуррентные соотношения. Часть 1

Практическое занятие №3 16.09 — 21.09.2024

2024–2025 учебный год

ПЛАН

Проверка асимптотических границ: применение определений

Рекуррентные соотношения: анализ сложности рекурсивных алгоритмов

Практический анализ функций временной сложности

Символы Ландау

recap и разминка

Асимптотический анализ функции

Манипуляции с асимптотикой

Упражнение 1 Свойства асимптотики

Верны ли следующие утверждения?

1. Сумма: $O\big(f(n) + g(n)\big) = O\big(f(n)\big) + O\big(g(n)\big)$.
2. Произведение: $O\big(f(n) \cdot g(n)\big) = O\big(f(n)\big) \cdot O\big(g(n)\big)$.
3. Если $g(n) = O\big(f(n)\big)$ и $h(n) = O\big(f(n)\big)$, то $g(n) = O\big(h(n)\big)$.
4. Если $f(n) = O\big(g(n)\big)$, то $\log_2 f(n) = O(\log_2 g(n))$ при $\log_2 g(n) \geq 1$ и $f(n) \geq 1$.

Упражнение 2 **Взаимные соотношения**

Сопоставить следующие функции временной сложности по их асимптотическому поведению.

$\boldsymbol{T_1(n)}$	$\boldsymbol{T_2(n)}$	$\boldsymbol{T_1(n) = O\big(T_2(n)\big)}$?	$\boldsymbol{T_1(n) = \Omega\big(T_2(n)\big)}$?	$\boldsymbol{T_1(n) = \Theta\big(T_2(n)\big)}$?
$25n\ln n + 5n$	$0.5n\log_2 n$			
$\sqrt{n}\log_2 n$	n			
$n\sqrt{n}$	$n^{1.4}$			

Упражнение 3 **Свойства асимптотики**

1. Показать, что для любых a и b, где $b > 0$, верно, что $(n + a)^b = O\left(n^b\right)$.
2. Оценить осмысленность следующего утверждения: «*Время выполнения некоторого алгоритма как минимум* $O(n^2)$».
3. Верно ли, что $2^{n+1} = O(2^n)$ и $2^{2n} = O(2^n)$?

Упражнение 4 Рекуррентное соотношение

Обосновать асимптотическую верхнюю границу временной сложности алгоритма, работа которого характеризуется следующим рекуррентным соотношением:

$$T(n) = \begin{cases} 2 \cdot T(n-1) - 1 & \text{при } n > 0 \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Практический анализ асимптотики

Упражнение 5.1 Сравнение алгоритмов

1. Время работы алгоритма **A** (в микросекундах) зависит от размера входных данных следующим образом:
   $\boldsymbol{T_A(n) = 0,1n^2 \log_{10} n}$.
2. Время работы алгоритма **B** (в микросекундах) зависит от размера входных данных следующим образом:
   $\boldsymbol{T_B(n) = 2,5n^2}$.

- Какой из этих алгоритмов более эффективен с точки зрения O? Начиная с какого размера входных данных?
- Если практический размер входных данных не превышает 10^9, какому алгоритму следует отдать предпочтение?

Упражнение 5.2 Сравнение алгоритмов

1. Время работы алгоритма **A** (в миллисекундах) зависит от размера входных данных следующим образом:
   $\boldsymbol{T_A(n) = c_A n \log_{10} n}$.
2. Время работы алгоритма **B** (в микросекундах) зависит от размера входных данных следующим образом:
   $\boldsymbol{T_B(n) = c_B n}$.

- Практические тесты показали, что обработка $\mathbf{10^4}$ объектов алгоритмом **A** занимает **100 миллисекунд**, а алгоритмом **B** – **500 миллисекунд**.
- При каких размерах входных данных алгоритм **B** более эффективен?
- Если практический размер входных данных не превышает 10^9, какому алгоритму следует отдать предпочтение?

Упражнение 6 $O(?)$ для функции

function.cpp

```cpp
void func(int n) {
    int i = 1, s = 1;
    while (s <= n) {
        ++i;
        s += i;
    }
}
```

Оценить и обосновать асимптотическую верхнюю границу сложности для этой функции.

РЕЗЮМЕ

Взаимосвязи асимптотических границ временной сложности алгоритма

Соотношение практических и теоретических оценок временной сложности алгоритмов

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

MAX_SUM.cpp

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
#include <climits>

int long_find_max_sum(const std::vector<int>& arr,
                      int k) {
    int n = arr.size();
    int max_sum = INT_MIN;

    for (int i = 0; i <= n - k; ++i) {
        int current_sum = 0;
        for (int j = i; j < i + k; ++j) {
            current_sum += arr[j];
        }

        max_sum = std::max(max_sum, current_sum);
    }

    return max_sum;
}

```

1. Оценить и обосновать асимптотическую верхнюю границу сложности для этой функции.
2. Как можно улучшить/оптимизировать этот алгоритм? Разработайте оптимизированный алгоритмов и обоснуйте его сложность.