Теория вероятностей

ИДЗ 3. Вариант 5

Васюков Александр Владимирович, БПИ235

Задача 5

Случайная величина (ξ, η) *распределена по нормальному закону с ожиданием* (μ_1, μ_2) *ковариационной матрицей:*

$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & cov(\xi;\eta) \\ cov(\eta;\xi) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$.

Найти: $P\{\xi - \eta > a\}$ $(\mu_1, \mu_2) = (0; 5)$; $\sum = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$; $a = -1$.

Решение:

Пусть $Z = \xi - \eta$.

Найдём математическое ожидание:

$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\xi - \eta) = \mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\eta) = 0 - 5 = -5.$

Найдём дисперсию:

$\mathbb{D}(Z) = \mathbb{D}(\xi - \eta) = \mathbb{D}(\xi) + \mathbb{D}(\eta) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot cov(\xi, \eta) = 16 + 16 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) = 36.$

Тогда $Z \sim N(-5, 36)$.

Перейдём к стандартному нормальному распределению, стандартизировав Z:

$P(Z > -1) = P\left(\frac{Z - \mathbb{E}(Z)}{\sqrt{\mathbb{D}(Z)}} > \frac{-1-\mathbb{E}(Z)}{\sqrt{\mathbb{D}(Z)}}\right) = \left[Z' = \frac{Z-\mathbb{E}(Z)}{\sqrt{\mathbb{D}(Z)}}\right] = P\left(Z' > \frac{-1+5}{\sqrt{36}}\right) = P\left(Z' > \frac{2}{3}\right) =$

$= 1 - P\left(Z' \leq \frac{2}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = \left[\Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx \Phi(0,6667) = 0.5 + 0.2453\right] = 1 - 0.7453 = 0.2547.$

Ответ: 0.2547.

Задача 6

В условиях предыдущей задачи найти условню вероятность: $P(\xi > -0.2 \mid \eta = 4)$.

Решение:

Посчитаем условное математическое ожидание:

$\mathbb{E}_{\xi \mid \eta} = \mathbb{E}(\xi) + \frac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}(\eta)} \cdot \left(x_\eta - \mathbb{E}(\eta)\right) = 0 + \frac{-2}{16} \cdot (4 - 5) = \frac{1}{8}.$

Посчитаем условную дисперсию:

$\mathbb{D}_{\xi \mid \eta} = \mathbb{D}_\xi - \frac{cov(\xi,\eta)^2}{\mathbb{D}(\eta)} = 16 - \frac{(-2)^2}{16} = 16 - \frac{1}{4} = \frac{63}{4}.$

Тогда стандартное отклонение:

$\sigma_{\xi \mid \eta} = \sqrt{\mathbb{D}_{\xi \mid \eta}} = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{\sqrt{63}}{2}.$

Стандартизируем границу:

$x = \frac{-0.2 - \mathbb{E}_{\xi \mid \eta}}{\sigma_{\xi \mid \eta}} = \frac{-0.2 - \frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{63}}{2}} = \frac{-\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{\sqrt{63}} = -\frac{13}{20\sqrt{63}}.$

Найдём условную вероятность:

$$P(\xi > -0.2 \mid \eta = 4) = P\Big(Z' > -\tfrac{13}{20\sqrt{63}}\Big) = 1 - P\Big(Z' \leq -\tfrac{13}{20\sqrt{63}}\Big) =$$

$$= 1 - \Big(1 - P\Big(Z' \leq \tfrac{13}{20\sqrt{63}}\Big)\Big) = P\Big(Z' \leq \tfrac{13}{20\sqrt{63}}\Big) = \Phi\Big(\tfrac{13}{20\sqrt{63}}\Big) \approx \Phi(0.0818) = 0.0318.$$

Ответ: 0.0318.