1) $T(n) = 7 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^2$

$\log_3 7 \ \vee \ 2$

$\log_3 7 < \log_3 9 \Rightarrow \log_3 7 < 2$, тогда по мастер-теореме $T(n) = O(n^2)$.

2) $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + \log_2 n$

$\log_2 n < cn$ при $\forall c \geq 1$ $\forall n$, тогда $f(n) = \log_2 n = O(\log n) \Rightarrow \forall k > 0$ $f(n) = O(n^k)$

$\log_2 4 = 2 < 1 \Rightarrow$ по мастер-теореме $T(n) = O(n^2)$.

3) $T(n) = 0{,}5 \cdot T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{n}$

Т.к. $a = 0{,}5 < 1$, то мастер-теорему применить нельзя.

$$T(n) = \frac{1}{2}T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T(\frac{n}{4}) + \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}T(\frac{n}{4}) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}T(\frac{n}{8}) + \frac{4}{n}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{8}T(\frac{n}{8}) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \ldots = \frac{1}{n} \cdot \log_2 n$$

В итоге получится $\log_2 n$ слагаемых $\frac{1}{n}$, т.к. шаг рекурсии — $\frac{n}{2}$.
Следовательно, $T(n) = O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)$.

4) $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}$

$c = 1$

$\log_3 3 = 1 = c \Rightarrow$ по мастер-теореме $T(n) = O(n^1 \log_2 n) = O(n \log_2 n)$.

5) $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2 n$

Мастер-теорема не может быть применена, так как рекуррентное соотношение не соответствует формуле $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + O(f(n))$. Т.е. нарушен шаг рекурсии.

Найдём верхнюю асимптотическую границу.

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \log_2 n \leq 2 \cdot T(n-1) + n \cdot \log_2 n = T_1(n)$$

Для $T_1(n)$ применима мастер-теорема.

$a = 2 > 0$
$b = 1 > 0$
$k = 1 > 0$
$f(n) = \log_2 n$

$$a > 1 \implies T_1(n) = O(a^{\frac{n}{b}} \cdot f(n)) = O(2^n \cdot \log_2 n)$$

Т.к. $T(n) \le T_1(n) = O(2^n \cdot \log_2 n)$, то $T(n) = O(2^n \log_2 n)$.