Неопределенный интеграл

Назаров Равшанжон

ДЗ должны быть решены и загружены в течении 6 дней.
Для получения 5 баллов по первому модулю необходимо решить все ДЗ, которые будут выданы после занятий. Каждая работа будет оцениваться по x =100 балльной шкале, и окончательная оценка по модулю будет определяться по формуле $\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ и будет конвертирована в 5 балльную шкалу, а именно:

1. **При $\langle x \rangle \epsilon [96, 100]$ будет выставлена оценка 5;**
2. **При $\langle x \rangle \epsilon [88, 95]$ будет выставлена оценка 4;**
3. **При $\langle x \rangle \epsilon [70, 87]$ будет выставлена оценка 3;**
4. **При $\langle x \rangle \epsilon [60, 69]$ будет выставлена оценка 2;**
5. **Ниже 60 баллов не будет оцениваться.**

Критерии оценивания работы:

1. Если решены все задания, аккуратно оформлены, то x =100;
2. Если решены 90% из общего количество, аккуратно оформлены, то x =95 ;
3. Если решено 80% из общего количество, аккуратно оформлены, то x =85;
4. Если решено 70% из общего количество, аккуратно оформлены, то x =75;

Если работа оформлена неаккуратно, то студент теряет 2 балла.
После каждой работы в отчете напишите что вам сложнее всего давалось, чтобы в начале пары разобрали.
При необходимости ответы можно проверить в соответствующих задачниках (ссылки указаны перед каждым заданием)

Практика 3

План:

1. Вопросы по домашнему заданию;

2. Рациональная дробь, разложение на простейшие дроби;

3. Интегрирование дробно-рациональных функций:

3.1) знаменатель имеет только действительные различные корни;

3.2) знаменатель имеет только действительные кратные корни;

3.3) знаменатель имеет комплексные различные корни;

3.4) знаменатель имеет комплексные кратные корни..

Немного теории

1. **Утверждение.** Пусть Q — многочлен из предыдущего утверждения, P — многочлен, степень которого ниже степени многочлена Q. Тогда рациональную функцию $\frac{P}{Q}$ можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{s1}}{x-a_s} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)^{k_s}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{x^2 + p_tx + q_t} + \ldots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{(x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}}.$$

Отметим, что в каждом слагаемом степень многочлена в числителе на 1 меньше степени *неприводимого многочлена в знаменателе*, а знаменатели — это неприводимые многочлены в степенях, не превышающих их степень в исходной рациональной функции.

1) Н.С. Пискунов /Дифференциальное и интегральное исчисления
2) Heaviside’s cover-up method

Немного теории

2

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C \tag{1}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \tag{2}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} \cdot \ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \tag{3}$$

Для $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ делается замена $t = x + \frac{p}{2}$, после полученный интерал разбивается на два. Первый будет вычисляться с помощью внесения под знак дифференциала, а второй будет иметь вид $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Этот интеграл берётся с помощью рекуррентного соотношения

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n,\ n \in N \tag{4}$$

Задания 3.1

Метод неопределенных коэффициентов

Демидович

1868. $\int \frac{x^{10}dx}{x^2 + x - 2}$.

1869. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$.

1870. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

1871. $\int \frac{x\,dx}{x^3 - 3x + 2}$.

1878. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$.

1879. $\int \frac{x\,dx}{(x - 1)^2 (x^2 + 2x + 2)}$.

Задания 3

Метод неопределенных коэффициентов

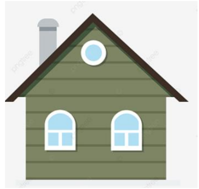
Демидович

1889. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}.$

1890. При каком условии интеграл

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

представляет собой рациональную функцию?



А теперь по порядку:

- Знаменатель имеет только действительные различные корни:

2018. $\displaystyle\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)\left(4x^2-16x+15\right)}$.

2019. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$.

2020. $\displaystyle\int \frac{\left(2x^2-5\right)dx}{x^4-5x^2+6}$.

2021. $\displaystyle\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

- Знаменатель имеет только действительные кратные корни:

2028. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

2029. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx$.

2030. $\displaystyle\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$.

2031. $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}$.

Практика 4

План:

(продолжение)

3.3) знаменатель имеет комплексные различные корни;

3.4) знаменатель имеет комплексные кратные корни;

4. Метод Остроградского.

Задания 4

- Знаменатель имеет комплексные различные корни:

2044. $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3\,(x^2+1)}$.

2045. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

2046. $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$.

2047*. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

- Знаменатель имеет комплексные кратные корни:

2048. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

2049. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

2050. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$.

2051. $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

Задание 4

Демидович

- Метод Остроградского:

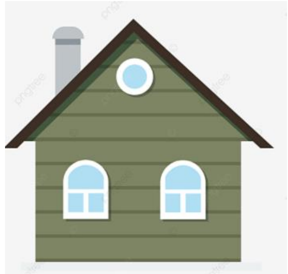
1891. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$. **1892.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

1893. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. **1894.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

1895. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

1896. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$.

1897. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.



И еще..

Выделить алгебраическую часть следующих интегралов:

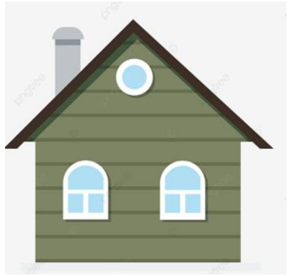
1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx.$

1899. $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx.$

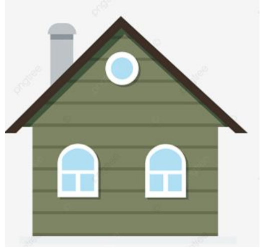
1902. При каком условии интеграл

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$$



представляет собой рациональную функцию?

Применяя различные приемы, найти следующие интегралы:



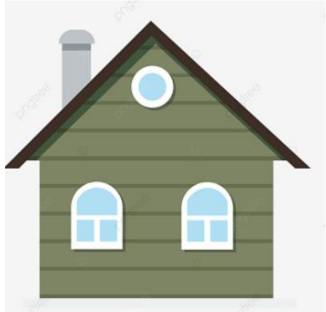
1903. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx.$ **1904.** $\int \frac{x\,dx}{x^8-1}.$

1905. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+3}.$ **1906.** $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx.$

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx.$ **1908.** $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}.$

1921. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0).$$



Пользуясь этой формулой, вычислить

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

Указание. Использовать тождество

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2).$$