



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет ПИиКТ

Расчетно-графическая работа

Вариант 6

Выполнил:

Должин Гантулга, Чжоу Хунсян, Ватан Хатиб

группа Р3113

Преподаватель:

Милюшин Александр Сергеевич

г. Санкт-Петербург

2021 год

Задание 1: Исследование и построение кривых второго порядка заданных в полярных координатах

Дано общее уравнение кривой второго порядка в полярных координатах

$$r = 2a(1 - \cos \varphi)$$

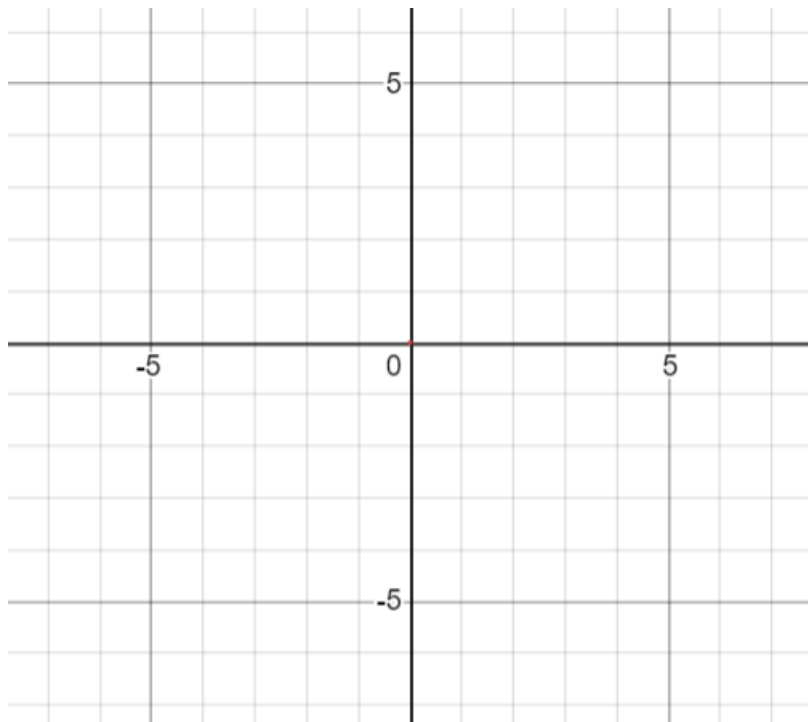
$$r = 2a(1 + \cos \varphi)$$

1. Изменяя значение параметров a и b , исследовать поведение графика в зависимости от изменения этих параметров. Провести исследования отдельно для случаев с одинаковыми параметрами, отрицательными параметрами, параметрами разными по знаку, обнуления параметров. Построить соответствующие полярные уравнения. Представить результаты в отчете.

Зависимость от a

- 1) Если $a = 0$

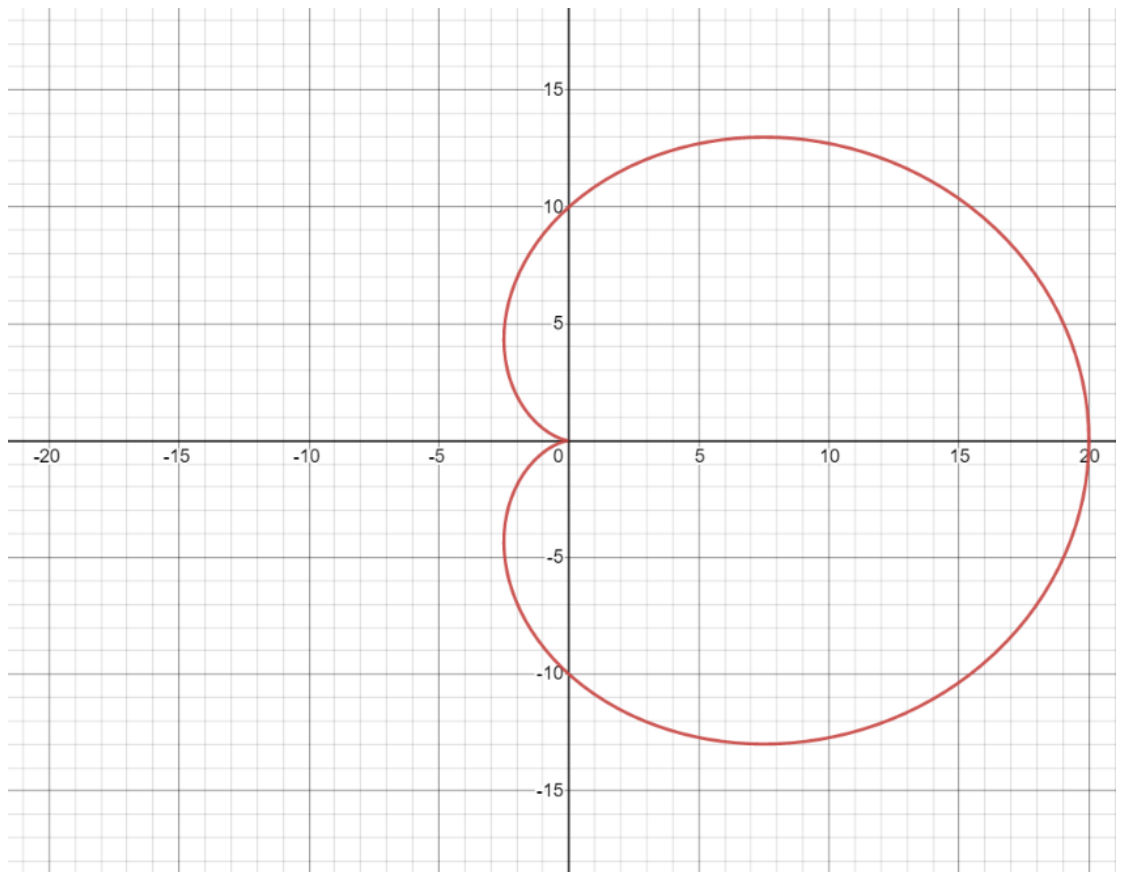
Тогда формула будет: $r = 0$



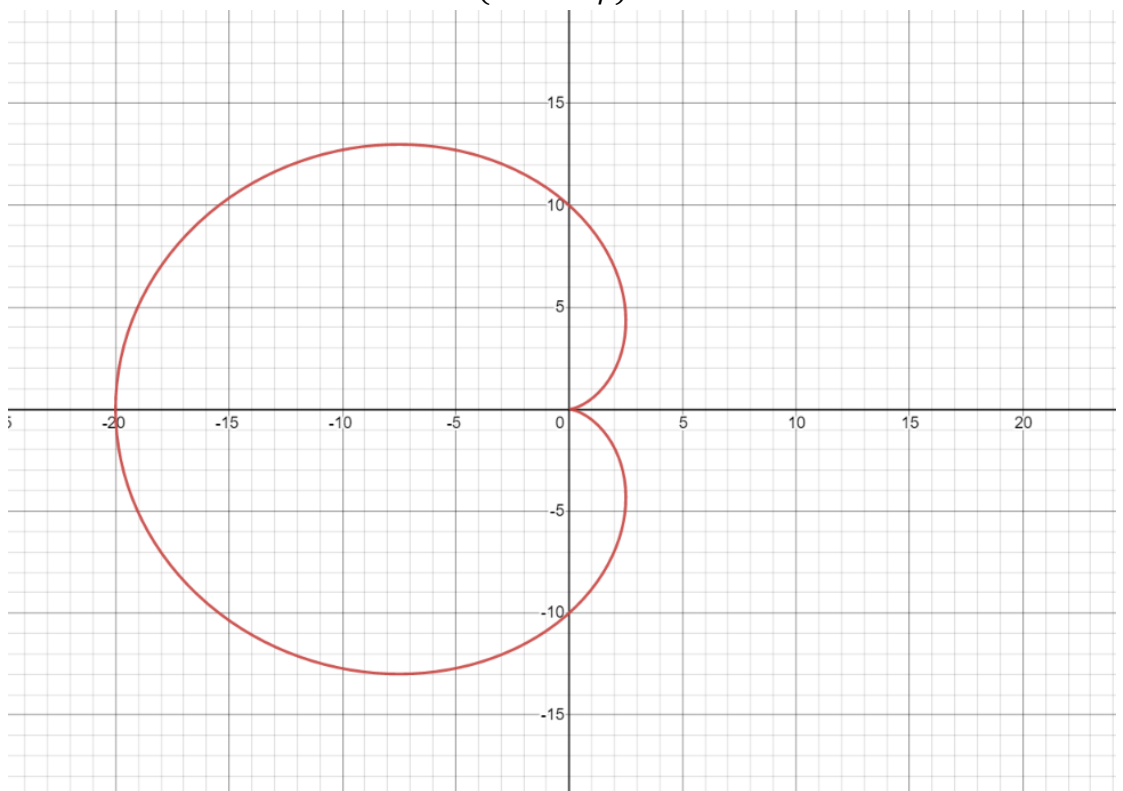
- 2) Если $a \neq 0$, изменить a

Тогда формула будет: $r = 2a(1 \pm \cos \varphi)$

Например



$$r = 10(1 + \cos \varphi)$$



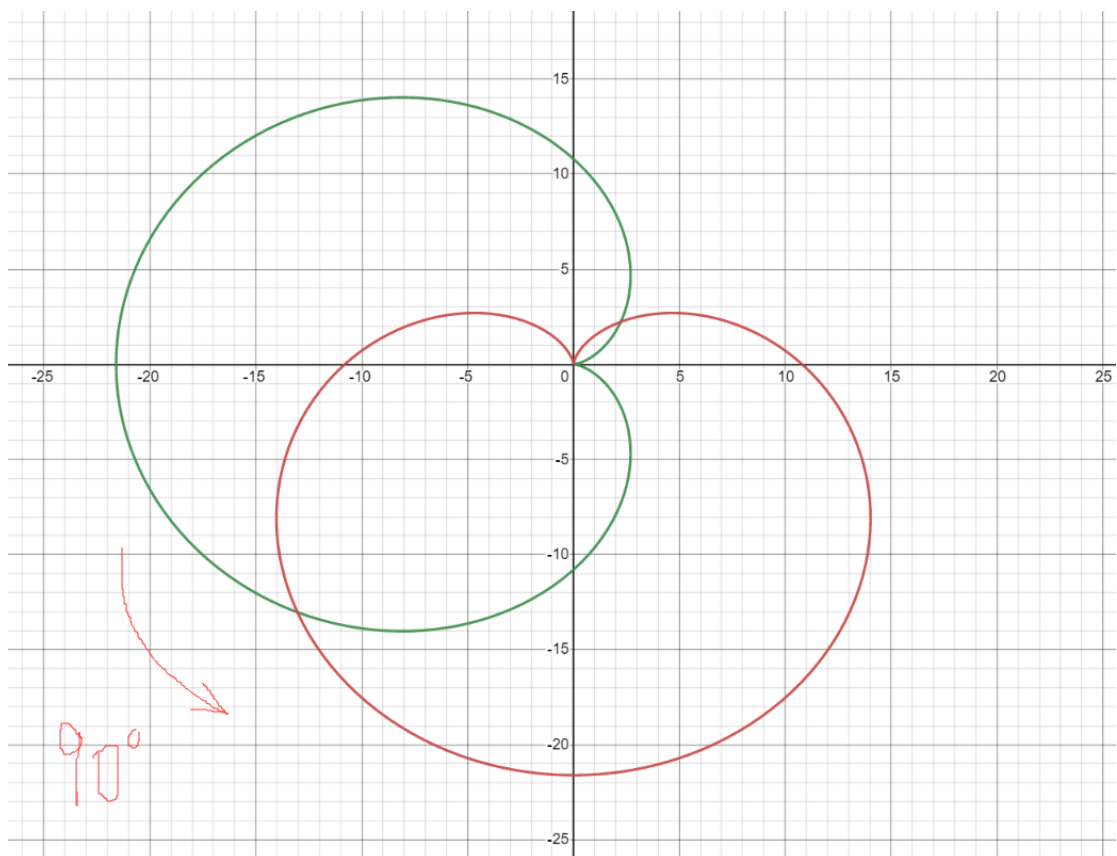
$$r = -10(1 - \cos \varphi)$$

- Значение параметра a определяет размер изображения.
Чем больше модуль значения a , тем больше размер изображения.

- Знак параметра a определяет направление изображения
2. В какую другую линию второго порядка переходит рассматриваемая в данном задании линия при определенных изменениях параметров a и b ? Привести примеры, отразить в отчете.
- **Если $a=0$: Полнос точка**
Тогда формула будет: $r = 0$
 - **Если $a \neq 0$: Кардиоида**
Тогда формула будет: $r = 2a(1 \pm \cos \varphi)$
3. Рассмотреть вариант с заменой функции косинуса на синус. Как изменится положение/форма графика, показать на рисунке, отразить в отчете.

$$r = 2a(1 + \sin \varphi) = 2a(1 + \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}))$$

$$r = 2a(1 - \sin \varphi) = 2a(1 - \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}))$$



Если вы замените \cos на \sin , изображение будет повернуто на 90 градусов против часовой стрелки.

Задание 2: Приведение общего уравнения кривых второго порядка к канонической форме

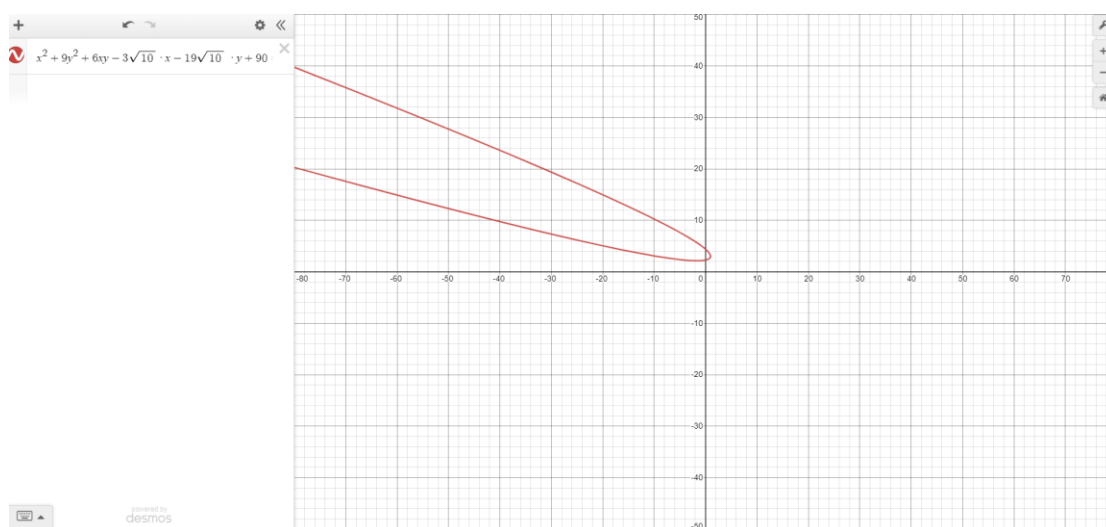
Дано общее уравнение кривой второго порядка:

$$x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0;$$

- 1) С помощью графического редактора нарисовать график кривой, заданной общим уравнением.
- 2) Применив формулы преобразования координат, выполнить поворот и параллельный перенос координатных осей, привести общее уравнение кривой 2-го порядка к канонической форме.

Результаты пунктов 1 и 2 представить в отчете.

- 3) Изобразить **без помощи графического редактора** график полученной кривой в исходной системе координат, отметив каноническую систему координат. В канонической системе координат отметить все значимые точки и линии (вершины, фокусы, директрисы, полуоси и т.д.) кривой.



$$2: x^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x + 9y^2 - 19\sqrt{10}y + 90 = 0$$

общее уравнение Кривой второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

$$a_{11} = 1$$

$$a_{12} = 3$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 0$$

$$a_{22} = 9$$

$\Delta = 0$, то кривая называется
кривой параболического типа и
может оказаться параболой

выполним поворот координатных осей, положив:

$$x = x_1 \cos(\alpha) - y_1 \sin(\alpha)$$

$$y = x_1 \sin(\alpha) + y_1 \cos(\alpha)$$

~~уравн~~ подставим эти выражения для
 x и y в исходное уравнение и выведем
коэффициенты при x_1, y_1 .

$$(x_1^2 \cos^2(\alpha) - 2x_1y_1 \cos(\alpha)\sin(\alpha) + y_1^2 \sin^2(\alpha)) + 6(x_1 \cos(\alpha)\sin(\alpha) + (x_1^2 \sin^2(\alpha) - y_1^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)) - 3\sqrt{10}(x_1 \cos(\alpha) - y_1 \sin(\alpha)) + 9(x_1^2 \sin^2(\alpha) + 2x_1y_1 \sin(\alpha)\cos(\alpha) + y_1^2 \cos^2(\alpha)) - 19\sqrt{10}(x_1 \sin(\alpha) + y_1 \cos(\alpha)) + 90 = 0$$

приведя к нулю коэффициенты при x_1, y_1 , получаем:

$$6 \cos^2(\alpha) + 16 \cos(\alpha) \sin(\alpha) - 6 \sin^2(\alpha) = 0$$

$$\frac{6}{\tan(\alpha)} + 16 - 6 \tan(\alpha) = 0$$

$$-6 \tan^2(\alpha) + 16 \tan(\alpha) + 6 = 0$$

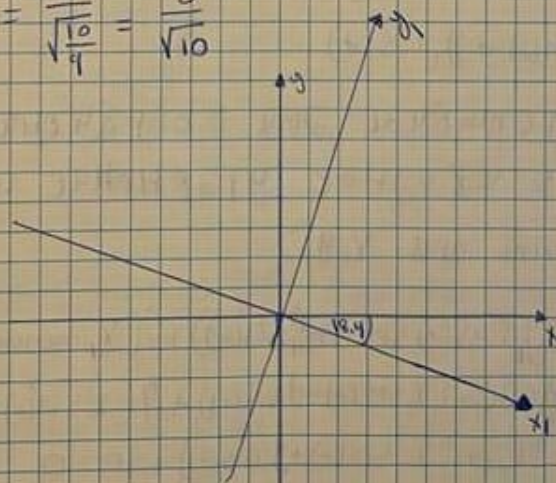
$$\tan(\alpha) = x$$

$$-6x^2 + 16x + 6 = 0 \Rightarrow \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 6}}{-6 \cdot 2} = \frac{-16 \pm 20}{-12} \begin{cases} \tan(\alpha) = 3 \\ \tan(\alpha) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = -18.43^\circ \rightarrow \text{yazıl } 8 \text{ IV } \text{ dereceye}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



$$\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$X = x_1 \cos(\alpha) - y_1 \sin(\alpha) = \frac{3x_1 + y_1}{\sqrt{10}} \quad \rightarrow \quad X = \frac{3x_1 + y_1}{\sqrt{10}}$$

$$y = x_1 \sin(\alpha) + y_1 \cos(\alpha) = \frac{3y_1 - x_1}{\sqrt{10}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3y_1 - x_1}{\sqrt{10}}$$

$$x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0$$

$$\frac{(3x_1 + y_1)^2 + 9(3y_1 - x_1)^2 + 6(3x_1 + y_1)(3y_1 - x_1) - 3\sqrt{10}(3x_1 + y_1)}{10}$$

$$- 19\sqrt{10}\left(\frac{3y_1 - x_1}{\sqrt{10}}\right) + 90 = 0$$

$$\frac{9x_1^2 + 6x_1y_1 + y_1^2 + 81y_1^2 - 54x_1y_1 + 9x_1^2 + 48x_1y_1 - 18x_1^2 + 18y_1^2}{10}$$

$$-9x_1 - 3y_1 - 57y_1 + 19x_1 + 90 = 0$$

$$10y_1^2 + 10x_1 - 60y_1 + 90 \stackrel{110}{=} 0$$

$$y_1^2 + x_1 - 6y_1 + 9 = 0$$

преобразования координат при параллельном переносе координатных осей

$$y_1 = Y + b, \quad x_1 = X + a$$

$$(Y + b)^2 + X + a - 6Y - 6b + 9 = 0 \rightarrow Y^2 + 2bY + b^2 + X + a - 6Y - 6b + 9 = 0$$

$$-6b + Y^2 + (2b - 6)Y + b^2 + a - 9 = -X$$

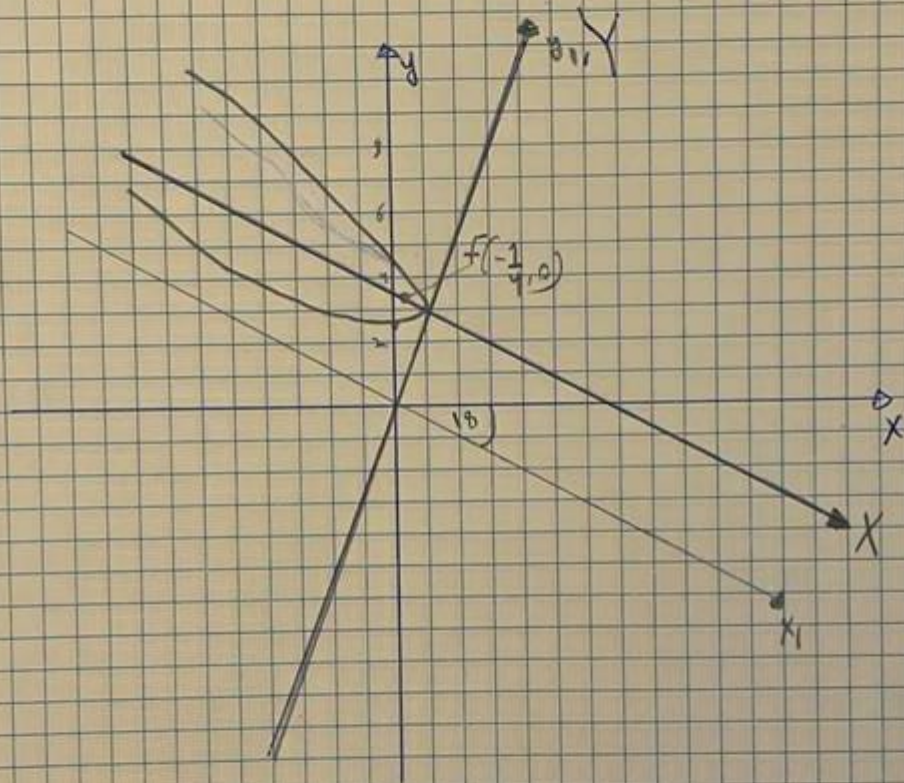
$$2b - 6 = 0 \rightarrow b = 3$$

$$b^2 - 6b + 9 + a = 0 \rightarrow 9 - 18 + 9 + a = 0 \rightarrow a = 0$$

$$y_1 = Y + 3 \rightarrow Y = y_1 - 3 \rightarrow Y^2 = X$$

$$\rightarrow O' (0, 3)$$

$$x_1 = X$$



$$x = 0 \rightarrow 9y^2 - 19\sqrt{10}y + 90 = 0 \rightarrow \frac{19\sqrt{10} \pm \sqrt{(19\sqrt{10})^2 - 4 \cdot 9 \cdot 90}}{9 \cdot 2} = \frac{60 \pm 19.2}{18} \begin{cases} y = 4.4 & (0, 4.4) \\ y = 2.26 & (0, 2.6) \end{cases}$$

$$Y^2 = 4aX \rightarrow -1 = 4a \rightarrow a = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{focus } (-\frac{1}{4}, 0)$$

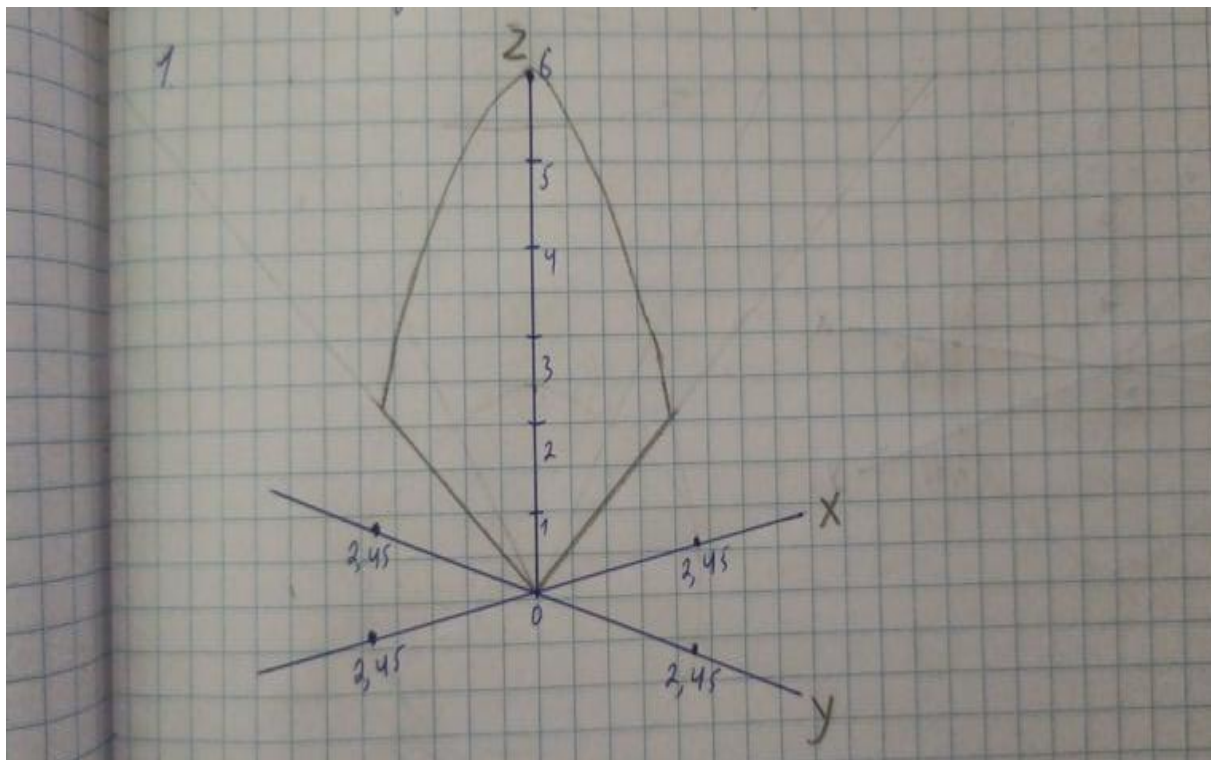
$$Y^2 = 2pX \rightarrow 2pX = -X \rightarrow p = -\frac{1}{2}$$

Задание 3: Криволинейный координаты

- Тело Т ограничено поверхностями:

➤ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6 - x^2 - y^2$

1) С помощью графического редактора, изобразить тело Т в декартовой прямоугольной системе координат. Добавить результат в отчет с пояснениями, как построено тело.



2) Получить уравнения поверхностей в криволинейной системе координат: цилиндрической или сферической (на выбор учащегося)

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = p \cdot \cos \phi$$

$$y = p \cdot \sin \phi$$

$$z = h$$

$$p \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\infty < h < +\infty$$

$$h = \sqrt{p^2 \cos^2 \phi + p^2 \sin^2 \phi}$$

$$h = \sqrt{p^2}$$

$$z = p$$

$$z = 6 - x^2 - y^2$$

$$z = 6 - p^2 \cos^2 \phi - p^2 \sin^2 \phi$$

$$z = 6 - p^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$$

$$z = 6 - p^2$$

$$z = p$$

$$z = 6 - p^2$$

3) С помощью графического редактора изобразить тело T в «распрямленной» криволинейной системе координат с прямоугольным расположением осей.

