ЛЕКЦИЯ 1
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

1.1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1.1 ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятие множества является одним из первичных**,** неопределяемых понятий в математике. Говоря о ***множестве***, мы интуитивно понимаем, что говорим о некоторой совокупности вполне определённых, различных между собой объектов, но объединённых в одно целое - множество. Так, например, существует множество студентов, прочитавших это предложение... А в это время в нашей Галактике существует множество звёзд...Но, в данной лекции, нас будут интересовать не реальные, а идеальные объекты - это ***числа***, которые будут образовывать различные ***числовые множества***.

Давайте перечислим известные из школьного курса алгебры числовые множества:

$\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ - множество натуральных чисел,

$\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}\bigcup 0$ - множество натуральных чисел с "нулём",

$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1\}\bigcup 0\bigcup\{1,2,3,...\}$ - множество целых чисел,

$\mathbb{Q}=\left\{\pm\dfrac{m}{n},\right\}\bigcup 0$, $m,n\in N$ - множество рациональных чисел,

$\mathbb{I}=\left\{...,\sqrt{2},...,\pi,....\right\}$ - множество иррациональных чисел,

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$ - множество вещественных (действительных чисел).

Но, когда мы сталкиваемся с довольно простой по формулировке задачей "Решить квадратное уравнение $x^2+1=0$" - это уравнение имеет вещественные коэффициенты, но решений в R не имеет. Тогда на помощь приходит новое числовое множество - ***множество комплексных чисел*** $C: C\supset R$. Схематически все известные множества представлены на РИС.1.

1.1.2. МНОЖЕСТВО C КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Комплексным числом*** $z\in C$ *называется упорядоченная пара вещественных чисел*

$$z=(x,y): x,y\in R,$$

для которых определены три действия (операции):

Если $z_1,z_2\in C: z_1=(x_1,y_1), z_2=(x_2,y_2)$, то

1. *Равенство* $z_1=z_2$*:*

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

2. *Сложение* $z_1 + z_2$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

3. *Умножение* $z_1 \cdot z_2$:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \left(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1\right)$$

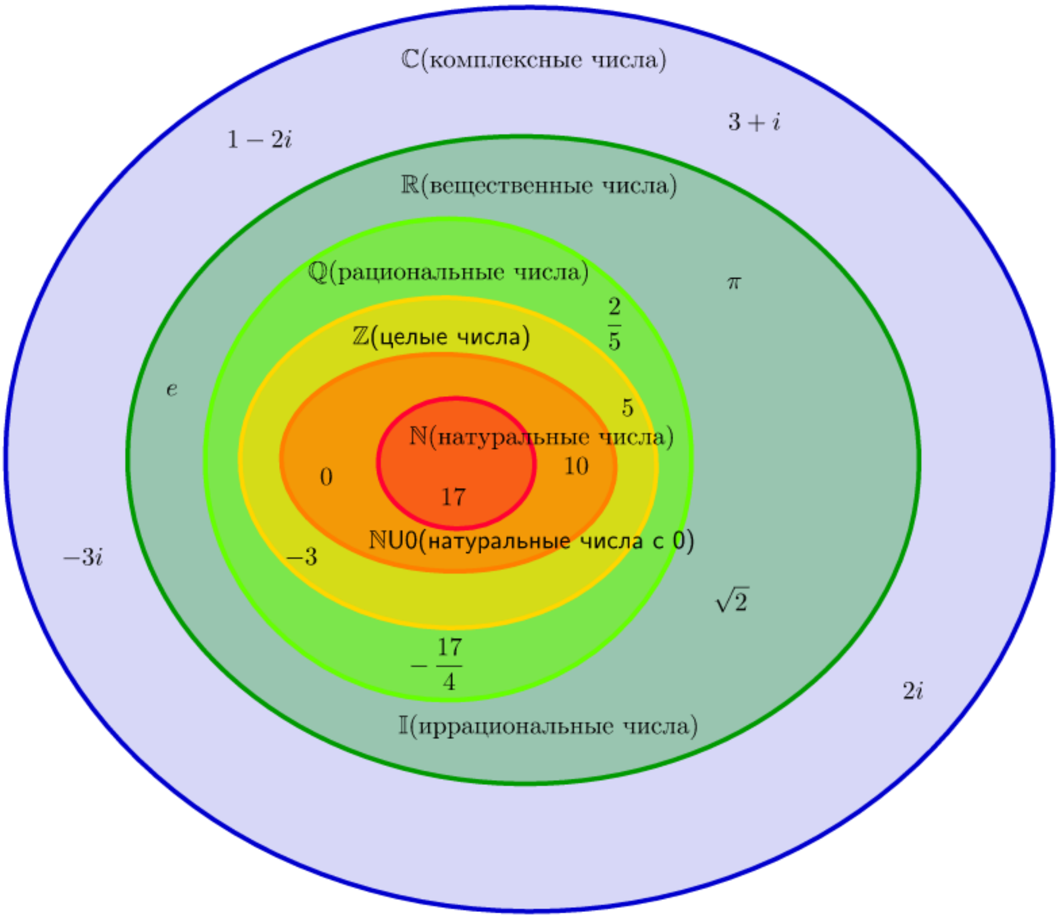


РИС.1. Числовые множества

ПРИМЕР 1.

Найти сумму $z_1 + z_2$, если $z_1 = (2,3), z_2 = (3,-1)$.

Решение:

$$z_1 + z_2 = (2,3) + (3,-1) = (2+3,\ 3-1) = (5,2)$$

ПРИМЕР 2.

Найти произведение $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = (5,-2), z_2 = (7,-1)$.

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = (5,-2) \cdot (7,1) = \left(5 \cdot 7 - (-2) \cdot 1,\ 5 \cdot 1 + 7 \cdot (-2)\right) =$$

$$= (35 + 2,\ 5 - 14) = (37,-9)$$

Свойства операции сложения и умножения комплексных чисел

1. *Коммутативность:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. *Ассоциативность:* $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. *Дистрибутивность:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $y = 0$, то $z = (x,0) = x \in R$ - т.е. комплексные числа вида $z = (x,0)$ являются вещественными числами.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОЖЕСТВА C

Множество всех чисел $z \in C$: $z = (x, y) : x, y \in R$ есть множество всех точек декартовой плоскости Oxy с координатами x и y - см. РИС.2.

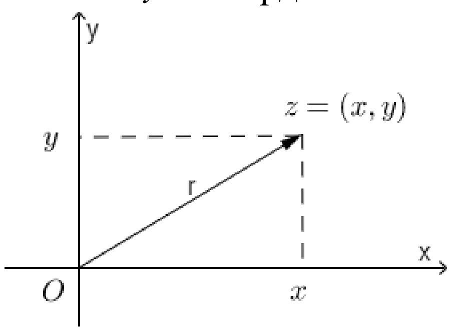


РИС.2. $z = (x, y)$ -точка координатной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Комплексное число* $z = (0,1)$ *называется* ***мнимой единицей*** *и обозначается буквой* i (от лат. imaginarius - "воображаемый, кажущийся").

Вычислим i^2:

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1,0) = -1,$$

$$i^2 = -1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теперь мы можем дополнить приведённоё выше определение мнимой единицы:

мнимая единица *- это комплексное число* $i = (0,1) : i^2 = -1$.

Найдём произведение комплексного числа $i = (0,1)$ и комплексного числа $y = (y,0)$:

$$i \cdot (y,0) = (0,1) \cdot (y,0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0,\ 1 \cdot y + 0 \cdot 0) = (0, y),$$

$$(0, y) = i \cdot y.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Комплексные числа вида $(0, y) = i \cdot y = iy$ называются ***чисто мнимыми***. Геометрически им соответствует ось Oy декартовой плоскости. Поэтому ось Ox называют ***вещественной осью,*** а ось Oy - ***мнимой осью***.
Геометрически чисто мнимые и вещественные числа изображены на РИС.3:

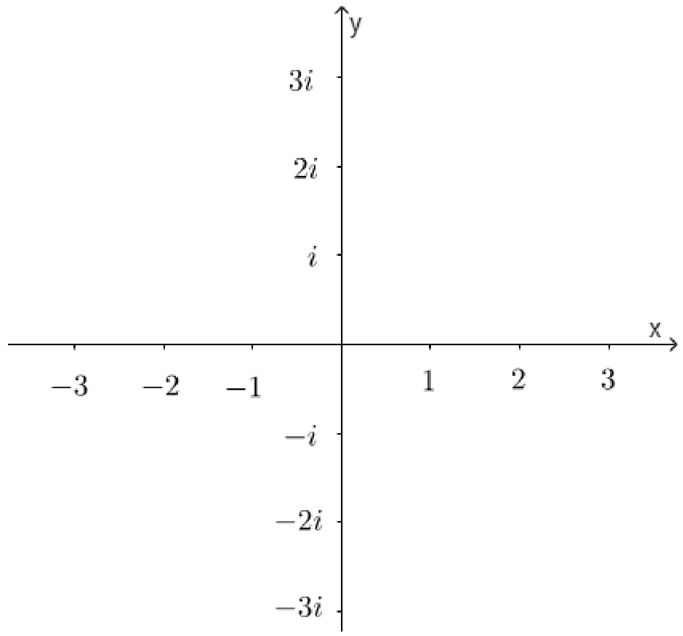


РИС.3. Вещественная и мнимая ось на комплексной плоскости.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Найдём сумму $(x,0)$ и $(0, y)$:

$$(x,0) + (0, y) = (x, y),$$

но, так как

$$(x,0) = x,\ (0, y) = iy,$$

то получим, что каждое комплексное число $z = (x, y) : x, y \in R$ можно представить в виде:

$$(x, y) = x = iy.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Запись комплексного числа* $z = (x, y) : x, y \in R$ *в виде*

$$z = x + iy$$

называется ***алгебраической формой записи*** *(или просто* ***алгебраической формой)*** *комплексного числа. Число* x *называется* ***действительной*** *или* ***вещественной*** *частью комплексного числа* $z = x + iy$ *и обозначается:*

$$x = \operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re} z.$$

Число y называется ***мнимой*** *частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается:*

$$y = \mathrm{Im}(x + iy) = \mathrm{Im}\, z.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначения Re и Im являются сокращениями от Reel (фр."вещественный") и Imaginaire (фр. "мнимый"). Число $0 = (0,0)$ является единственным числом, одновременно вещественным и чисто мнимым.

ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Предварительно отметим, что действия над биномами $x + iy$ осуществляются согласно правилам действия с вещественными числами, считая число i константой и учитывая, что степень числа i: $i^0 = 1$, $i^1 = i$ $i^2 = -1$, $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = 1$ и т.д.[1]

Если $z_1, z_2 \in C : z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, то

1. *Равенство* $z_1 = z_2$*:*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \\ \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2 \end{cases}.$$

2. *Сложение* $z_1 + z_2$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

3. *Вычитание* (операция обратная *сложению)*:

Пусть $z_1, z_2 \in C$, тогда существует и при том единственное число $z \in C : z + z_2 = z_1$.

Это число называется ***разностью*** чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 - z_2$:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

ПРИМЕР 3. Найти разность $z_1 - z_2$, если $z_1 = 1 - 3i, z_2 = 4 + i$.

Решение:

$$z_1 - z_2 = (1 - 3i) - (4 + i) = (1 - 4) + i(-3 - 1) = -3 - 4i$$

4.*Умножение* $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

ПРИМЕР 4. Найти произведение $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 7 + i$.

Решение:

Произведение этих комплексных чисел мы нашли ранее-см. **ПРИМЕР 2**.

---

[1] Любознательным читателям предлагаем вычислить $i^N = 1$, где N - текущий год. Например, эта лекция была написана в 2016 году, $i^{2016} = 1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (5-2i)\cdot(7+i) = (35+2) + i(5-14) = 37-9i\,.$$

Аналогичный результат мы получим и по правилу умножения комплексных чисел, записанных в алгебраической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = (5-2i)\cdot(7+i) = \big(5\cdot 7 - (-2)\cdot 1\big) + i\big(5\cdot 1 + 7\cdot(-2)\big) =$$
$$= (35+2) + i(5-14) = 37-9i$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Докажите формулу умножения самостоятельно, используя правила умножения биномов с вещественными коэффициентами и учитывая, что $i^2 = -1$.

Далее, мы определим ещё одну операцию - *деление*, для записи которой в алгебраической форме нам понадобится ещё одно понятие - ***сопряжённое комплексное число***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Комплексное число* $x - iy$ *называется* ***сопряжённым комплексному числу*** $z = x + iy$ *и обозначается* $\bar{z} = x - iy = (x, -y)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СОПРЯЖЁННОГО КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Число $\bar{z} = x - iy = (x, -y)$ является точкой, симметричной точке $z = x + iy = (x, y)$ относительно оси Ox - см. РИС.4.

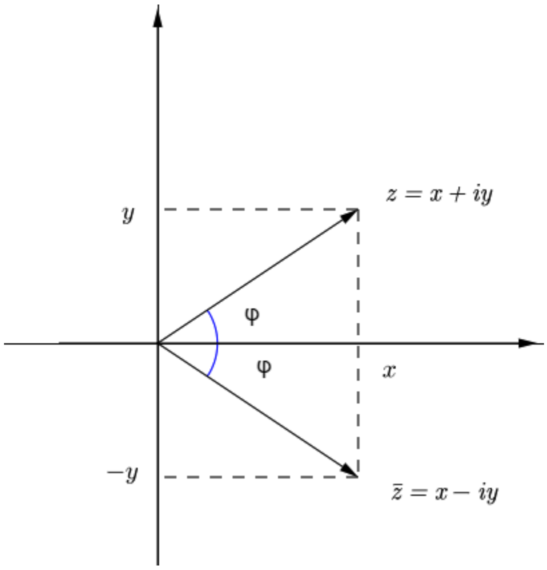


РИС.4. Сопряжённое комплексное число на плоскости

Вычислим $z \cdot \bar{z}$:

$$z\cdot\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = (x\cdot x - iy\cdot iy) + i\big(x\cdot(-y) + x\cdot y\big) = x^2 - i^2\cdot y = x^2 + y^2,$$
$$z\cdot\bar{z} = x^2 + y^2\,.$$

Результат умножения комплексного числа z на сопряжённое ему комплексное число $\bar{z}$ - это действительное число, квадратный корень из которого является одной из характеристик комплексного числа - это ***модуль комплексного числа.***

ПРИМЕР 5. Рассмотрим число $z = -3 + i$, сопряжённым к нему является число $\bar{z} = -3 - i$ - их графическое изображение представлено на РИС. 5:

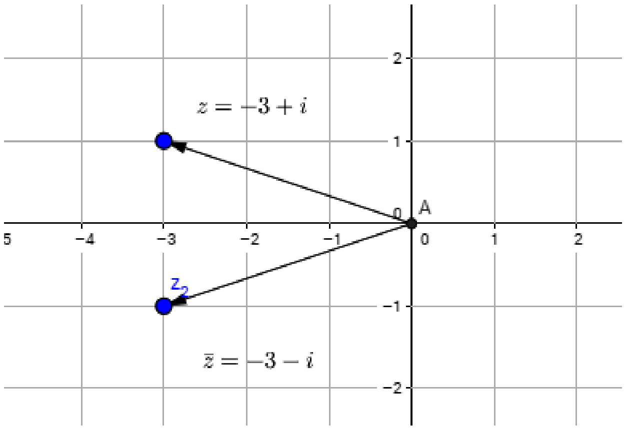


РИС.5. Изображение комплексно-сопряжённых чисел $z = -3 + i$ и $\bar{z} = -3 - i$.

Найдём $z \cdot \bar{z}$:

$$z \cdot \bar{z} = \left(-3 + i\right) \cdot \left(-3 - i\right) = (-3)^2 + (1)^2 = 10$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $\sqrt{x^2 + y^2}$ *называется* ***модулем комплексного числа*** $z = x + iy$ *и обозначается* $|z| = |x + iy| = r$:

$$|z| = |x + iy| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДУЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Модуль комплексного числа $z = x + iy$ равен длине вектора $\overrightarrow{OM} : O(0,0),\ M(x, y)$ - см. РИС.6

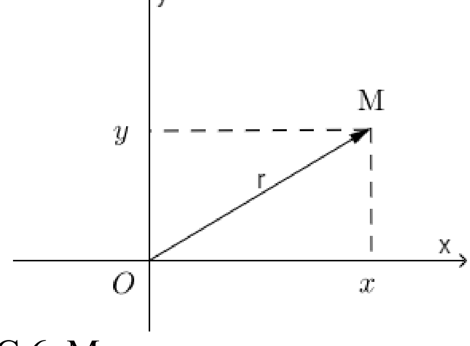


РИС.6. Модуль комплексного числа.

Учитывая полученное ранее свойство $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, имеем:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 .$$

Теперь мы можем ввести операцию <u>деления в алгебраической форме:</u>

5. *Деление* (эта операция обратная умножению) $\dfrac{z_1}{z_2}$:

Пусть $z_1, z_2 \in C,\ z_2 \neq 0$, тогда их частное $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = z \cdot z_2$ и

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 \cdot x_2 - i^2 y_1 \cdot y_2) + i(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, для того, чтобы поделить комплексное число z_1 на z_2 нужно умножить и поделить z_1 на сопряжённое к z_2 - число $\bar{z}_2$.

ПРИМЕР 6. Найти частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 7 - 2i, z_2 = 2 + 7i$.

Решение:

$$z = \frac{7-2i}{2+7i} = \frac{(7-2i)\cdot(2-7i)}{(2+7i)\cdot(2-7i)} = \frac{(14-14) + i(-49-4)}{4+49} = -\frac{53}{53}i = -i$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СЛОЖЕНИЯ (ВЫЧИТАНИЯ) КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА

Изобразим на комплексной плоскости числа $z_1, z_2 \in C$ как вектора с началом в точке $O(0{,}0)$ и концами в точках z_1 и z_2 соответственно. Тогда, согласно формуле сложения комплексных чисел, число $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов (правилу "параллелограмма") - см. РИС.7.

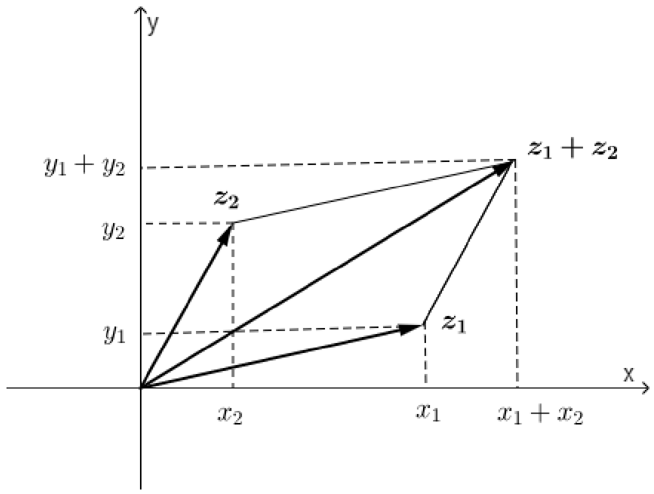


РИС.7. Сложение комплексных чисел (геометрическая интерпретация).

Аналогично строится разность комплексных чисел ($z_1 - z_2$) - см. РИС.8.

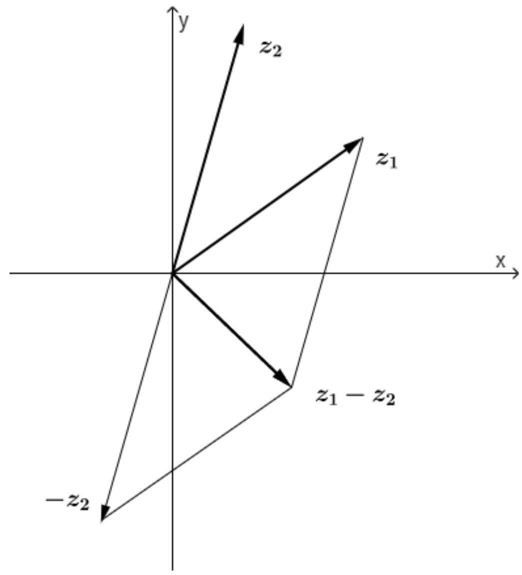


РИС.8**.** Вычитание комплексных чисел (геометрическая интерпретация).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из РИС. 8 видно, что расстояние между точками равно длине вектора $z_1 - z_2$, т.е. равно $|z_1 - z_2|$.

ПРИМЕР 7. Найти все точки плоскости, удалённые от $z_0 = 1 + i$ на 2 единицы.

Решение.

Рассмотрим произвольную точку комплексной плоскости $z = x + iy$, тогда множество всех точек плоскости, удалённых от данной точки z_0 на 2 единицы задаётся условием:

$$|z - z_0| = 2, \quad |(x - iy) - (1 + i)| = 2,$$

$$|(x-1) + i(y-1)| = 2,$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2,$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2 ,$$

а это есть уравнение окружности с центром в точке $z_0 = 1 + i = (1,1)$ и радиусом 2 - см. РИС.9.

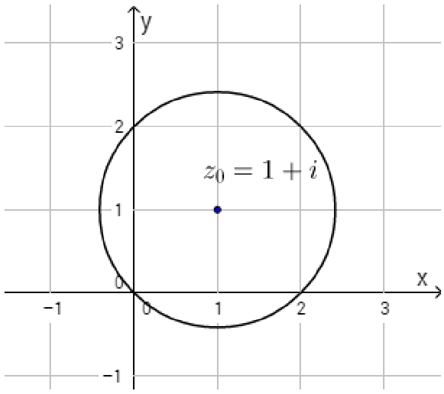


РИС.9. Множество точек плоскости, равноудалённых от $z_0 = 1 + i$ на 2 единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из рассуждений, приведённых в **ПРИМЕРЕ 7** следует, что *множество точек комплексной плоскости* $z = x + iy$*, равноудалённых от данной точки* $z_0 = x_0 + iy_0$ *на а единиц, есть окружность с центром в точке* (x_0, y_0) *и радиусом* $R = a$.

НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА. *Для любых чисел* $z_1, z_2 \in C$ *верны неравенства:*

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Доказательство:

Рассмотрим треугольник с вершинами в точках 0, z_1, $z_1 + z_2$ (см. РИС.7). Длины его сторон равны соответственно $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$. Значит неравенства

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

верны, так как являются известными из геометрии неравенствами для длин сторон треугольника.

1.1.3. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ.

Как было показано выше (см. п.1.1.1, РИС.1), положение комплексного числа $z = x + iy$ на плоскости однозначно определяется соответствующими ему декартовыми координатами (x, y). Также мы знаем ещё одну числовую характеристику комплексного числа - его модуль (см. п.1.1.2):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $\sqrt{x^2+y^2}$ *называется* ***модулем комплексного числа*** $z = x+iy$ *и обозначается:*

$$|z| = |x+iy| = r = \sqrt{x^2+y^2} .$$

Вычислим модуль комплексных чисел $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$:
$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$, $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ - мы получили, что у двух различных комплексных чисел значения модулей равны. Поэтому, чтобы можно было геометрически однозначно изобразить соответствующее комплексное число, необходимо добавить ещё одну числовую характеристику - ***аргумент комплексного числа***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Аргументом комплексного числа*** $z = x+iy$ **(** $z \neq 0$ **)** *называется такое вещественное число* φ *:*

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ или } tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Обозначается

$$\varphi = \operatorname{Arg} z ,$$

имеет бесконечно много значений, содержащихся в формуле

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k = \varphi_0 + 2\pi k, k \in Z .$$

где $\varphi_0 = \arg z : 0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ *и называется* ***главным значением аргумента комплексного числа.***

ЗАМЕЧАНИЕ. Также можно понимать считать, что главное значение аргумента комплексного числа лежит в пределах:

$$-\pi < \varphi_0 \leq \pi ,$$

если угол откладывается по часовой стрелке - его величина считается отрицательной, если против - положительной. В таком случае, для правильного определения значения φ_0 полезна следующая формула:

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{если } x < 0, y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{если } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ АРГУМЕНТА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Аргумент комплексного числа откладывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки - см. РИС.10.

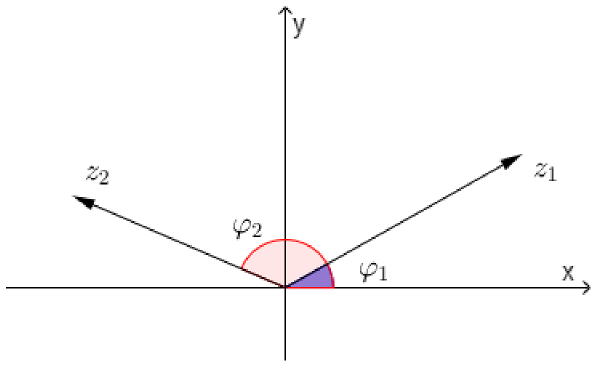


РИС.10. Изображение на плоскости комплексных чисел z_1 и z_2 с аргументами φ_1 и φ_2 соответственно.

ПРИМЕР 9. Найдём главное значение аргумента комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$.

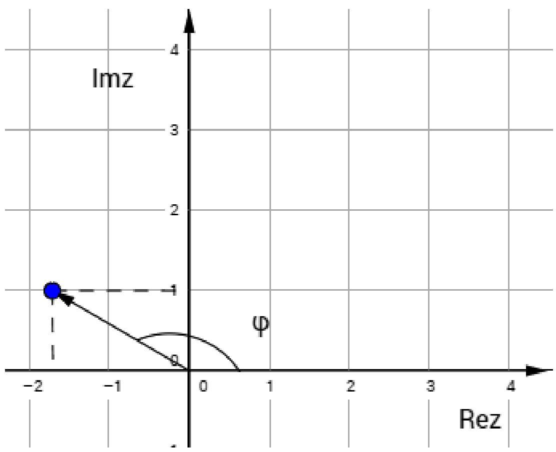
Решение:

По определению аргумент комплексного числа удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

где $x = \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z = y$, $\varphi = Argz = \varphi_0 + 2\pi k, k \in Z$. Точка на плоскости, соответствующая числу $z = -\sqrt{3} + i$ лежит во 2-й четверти - см. РИС.11., поэтому в качестве <u>главного значения</u> аргумента φ_0 надо указать угол, тангенс которого равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и который лежит во 2-й четверти, т.е.

$$\varphi_0 = \arg z = \pi + arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$



РСИ.11. Комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ на плоскости.

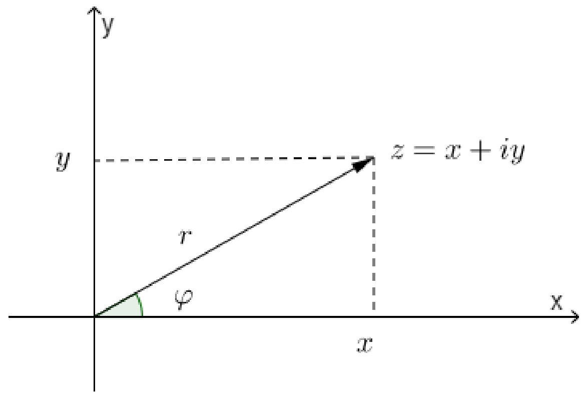


РИС.12. Комплексное число $z = x + iy$ на плоскости.

Из РИС.12. видно (также как и из определения аргумента комплексного числа), что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \varphi : 0 \le \varphi < 2\pi,$$

тогда любое комплексное число $z = x + iy$ ($z \ne 0$) мы можем представить в виде

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

- это новая форма записи комплексного числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Запись комплексного числа $z = x + iy$ ($z \ne 0$) в виде*

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

*называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.*

ПРИМЕР 10. Записать комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме.

Решение:

Для того, чтобы представить комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме нам необходимо вычислить его модуль r и аргумент φ (в тригонометрической форме аргумент понимается в смысле его главного значения и был найден ранее - см. **ПРИМЕР 9.**):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{6},$$

тогда

$$z = -\sqrt{3} + i = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если

$$z = x + iy \ (z \ne 0): \ |z| = 1, \arg z = \varphi,$$

то тригонометрическая форма записи такого числа имеет вид:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Такое комплексное число имеет специальное обозначение

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

и называется ***формулой Эйлера***.

Если в этой формуле заменить φ на $-\varphi$, то получим:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi .$$

Тогда

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi ,$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\sin\varphi ,$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}.$$

Таким образом мы получили важные формулы, выражающие тригонометрические функции через показательную функцию:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}.$$

- эти формулы также называются ***формулами Эйлера***.

Если применить формулу Эйлера к тригонометрической форме записи комплексного числа, то мы получим новую - ***показательную форму записи комплексного числа .***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Запись комплексного числа $z = x + iy$ ($z \neq 0$) в виде*

$$z = re^{i\varphi}$$

*называется **показательной формой записи комплексного числа**.*

ПРИМЕР 11. Записать комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ в показательной форме.

Решение:

Для того, чтобы представить комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ в показательной форме нам необходимо вычислить его модуль r и аргумент φ - это было сделано ранее(см. **ПРИМЕР 10.**):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{6},$$

тогда

$$z = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} .$$

Таким образом, учитывая результаты **ПРИМЕРА 10, ПРИМЕРА 11**, мы можем сказать, что комплексное число $(-\sqrt{3},1)$ записать можно записать в 3-х формах:

$z=-\sqrt{3}+i$ - алгебраическая форма записи,

$z=2\left(cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ - тригонометрическая форма записи,

$z=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ - показательная форма записи.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции (число i считаем константой):

$$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i\varphi_1+i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i\varphi_1-i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}, n\in N.$$

Это позволяет записать умножение и деление комплексных чисел более компактно и удобно.

ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ

Если $z_1,z_2\in C: z_1=r_1e^{i\varphi_1}, z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, то:

1. Равенство:

$$z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=r_2\\ \varphi_1=\varphi_2+2\pi k, k\in Z.\end{cases}$$

2. Умножение:

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=(r_1\cdot r_2)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$

$$\arg(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2.$$

ПРИМЕР 12. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2$ в тригонометрической (показательной) форме, если **1)** $z_1=2\sqrt{3}-2i$, $z_2=3+3\sqrt{3}i$.

2) $z_1=-2\sqrt{3}+2i$, $z_2=-3+3\sqrt{3}i$

Решение:

1)Представим каждое из чисел $z_1=2\sqrt{3}-2i$ и $z_2=3+3\sqrt{3}i$ в тригонометрической (показательной) форме, для этого вычислим модули и аргументы этих чисел:

$$|z_1| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4,$$

$$\varphi_1 = \arg(z_1) = arctg\left(-\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

$$\text{тогда } z_1 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$|z_2| = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = 6,$$

$$\varphi_2 = \arg(z_2) = arctg\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = arctg\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{тогда } z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Теперь вычислим $z_1 \cdot z_2$

а)в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot 6 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 24\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 24\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 12\sqrt{3} + 12i$$

б) в показательной форме:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(4e^{-\frac{\pi}{6}i}\right) \cdot \left(6e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = 4 \cdot 6 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = 24e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2) $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Представим каждое из чисел $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ и $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$ в тригонометрической (показательной) форме, для этого вычислим модули и аргументы этих чисел:

$$|z_1| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{12+4} = 4,$$

$$\varphi_1 = \arg(z_1) = arctg\left(-\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{тогда } z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратите внимание, что не смотря на то, что аргументы чисел $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ (из 1-й части примера) и $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ равны $arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, но вычисляется этот аргумент по-разному (геометрически эти числа различны и лежат в разных четвертях - см. РИС.13):

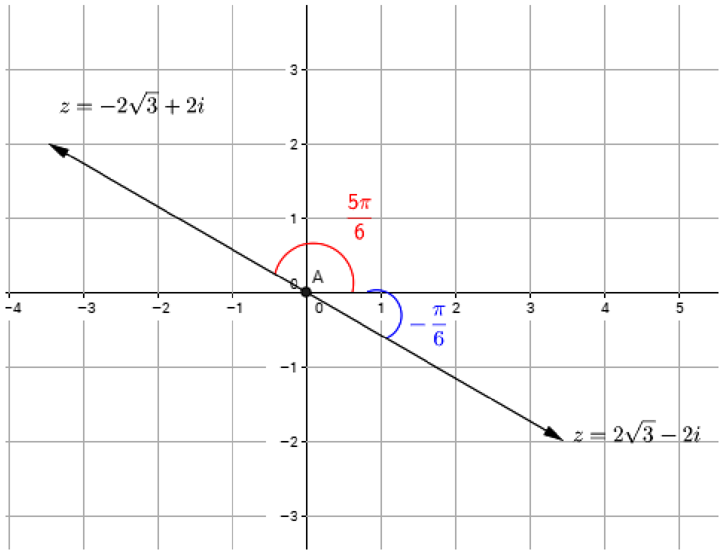


РИС.13. Изображение чисел $z \ = 2\sqrt{3} - 2i$ и $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ на плоскости.

Далее:

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2\,,$$

$$\varphi_2 = \arg(z_2) = arctg\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = arctg(-1) = \frac{3\pi}{4}\,,$$

$$\text{тогда } z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}\,.$$

Теперь вычислим $z_1 \cdot z_2$

а)в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 8\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right) = 8e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

б) в показательной форме:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(4e^{\frac{\bar{5\pi}}{6}i}\right) \cdot \left(2e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) = 8 \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 8e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

или (если считать, что $-\pi < \varphi \ \le \pi$) $z_1 \cdot z_2 = 8e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

3. Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\,,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2$$

ПРИМЕР 13. Найти частное чисел $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической (показательной) форме, если **1)** $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$.
2) $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$

Решение:

1) Представим каждое из чисел $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ и $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$ в тригонометрической (показательной) форме (см. **ПРИМЕР 12)**:

$$z_1 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Теперь вычислим $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{6e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{4}{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{2}{3}i$$

2) $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Представим каждое из чисел $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ и $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$ в тригонометрической (показательной) форме (см. **ПРИМЕР 12)**:

$$z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Теперь вычислим $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{2e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

1.1.4. ВОЗВЕДЕНИЕ $z \in C$ В СТЕПЕНЬ $n \in N$ (ФОРМУЛА МУАВРА): z^n. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ n-Й СТЕПЕНИ ИЗ $z \in C$: $\sqrt[n]{z}$

Если $z \in C : z = re^{i\varphi}$, то, применяя *n* раз правило умножения комплексных чисел в показательной форме, получаем:

$$z^n = \underbrace{re^{i\varphi} \cdot re^{i\varphi} \cdot \ldots \cdot re^{i\varphi}}_{n \ раз} = r^n e^{i(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)} = r^n e^{in\varphi},$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, n \in N.$$

- это ***формула Муавра.***

Из данной формулы следует простое ***правило возведения комплексного числа в n-ую степень:***

1. Для того, чтобы возвести $z \in C : z = re^{i\varphi}$ в *n*-ую степень, необходимо его модуль $z = r$ возвести *n*-ую степень, а аргумент φ умножить на *n.*
2. Если $z \in C : z = x + iy$, то сначала его необходимо перевести в тригонометрическую (показательную) форму, а потом применить формулу Муавра.

ПРИМЕР 14. Найти z^4, если **1)** $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, **2)** $z = -1 + i$ и **3)** z^3, если $z = -1 + i$.

Решение:

1) По формуле Муавра имеем:

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i4\cdot\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\pi} = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

2) Представим $z = -1 + i$ в показательной форме:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg(z) = arctg\left(-\frac{1}{1}\right) = arctg(-1) = \frac{3\pi}{4},$$

тогда

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Тогда, по формуле Муавра имеем:

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}} = 4e^{i3\pi} = 4(\cos 3\pi + i\sin\pi) = -4.$$

3) Представим $z = 1 + i$ в показательной форме:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg(z) = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

тогда по формуле Муавра имеем:

$$z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i.$$

Рассмотрим уравнение

$$z^n = a : a \in C, a \neq 0, n \in N.$$

Представим комплексные числа z и a в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}, a = \rho e^{i\theta},$$

тогда уравнение $z^n = a$ примет вид:

$$re^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$$

и, согласно правилам ***действия с комплексными числами в показательной форме*** - это равенство возможно при условии, что

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n}, k \in Z. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили, что решением уравнения $z^n = a$ являются числа $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}, k \in Z$. Покажем, что среди этих чисел z_k ровно n различных:

числа $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ различны, так как их аргументы различны и отличаются друг от друга на величину, меньше, чем 2π :

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \varphi_2 = \frac{\theta + 4\pi}{n}, ..., \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}.$$

Рассмотрим $z_k :| k |\geq n$:

$$z_n = z_0 \text{, так как } \begin{cases} | z_n |=| z_0 |= \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi_n = \varphi_0 + 2\pi \end{cases},$$

$$z_{-1} = z_{n-1} \text{, так как } \begin{cases} | z_{-1} |=| z_{n-1} |= \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi_{n-1} = \varphi_{-1} + 2\pi \end{cases},$$

и т.д.

Теперь мы можем дать определение ***корня n-й степени из комплексного числа:***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $z \in C$ *называется* ***корнем n-й степени*** *из числа* $a \in C$, *если оно является решением уравнения* $z^n = a$, *обозначается* $\sqrt[n]{z}$ *и имеет* <u>*ровно*</u> *n* <u>*различных*</u> *значений, которые вычисляются по формуле:*

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right)\right), k = 0,1,2,...,n-1.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОРНЯ n-Й СТЕПЕНИ ИЗ $z \in C$

На комплексной плоскости числа $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}\right)}, k = 0,1,2,...,n-1$ являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в т. $O(0,0)$ - см. РИС.14.

ПРИМЕР 15. Дано комплексное число $z = -1 + i$. Найти все значения $\sqrt[3]{z}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение:

Представим $z = -1 + i$ в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4},$$

тогда

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

значит все значения $\sqrt[3]{-1+i}$ выражаются формулой:

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right),$$

где $k = 0,1,2.$

Выпишем все значения $\sqrt[3]{-1+i}$:

$$k = 0: z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$k = 1: z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right),$$

$$k = 2: z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right).$$

Изображение всех значений $\sqrt[3]{-1+i}$ на комплексной плоскости представлены на РИС.15:

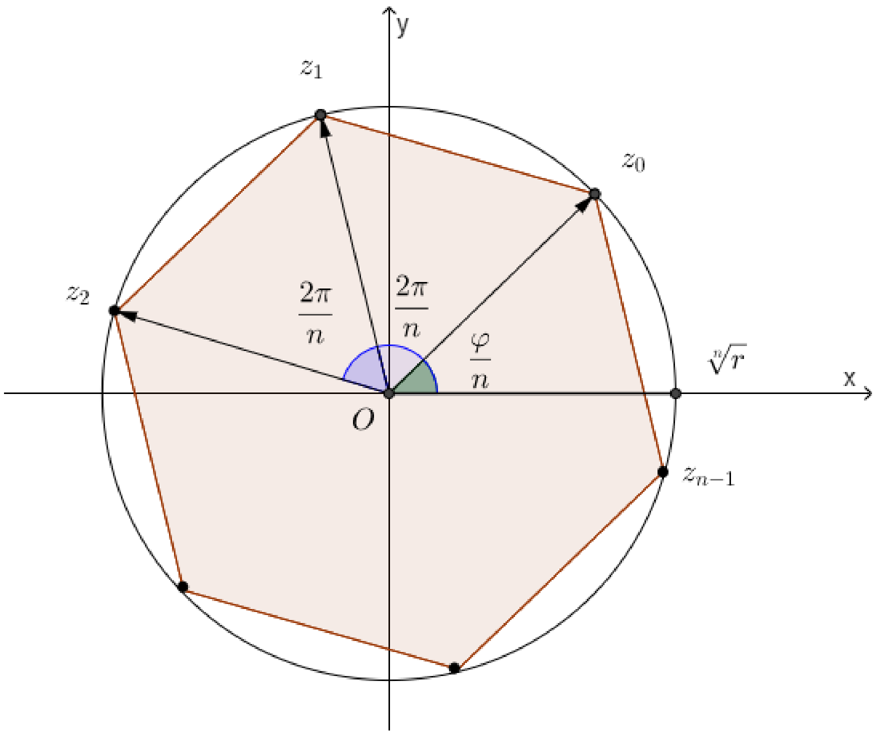


РИС.14. Изображение корня *n*-ой степени на плоскости.

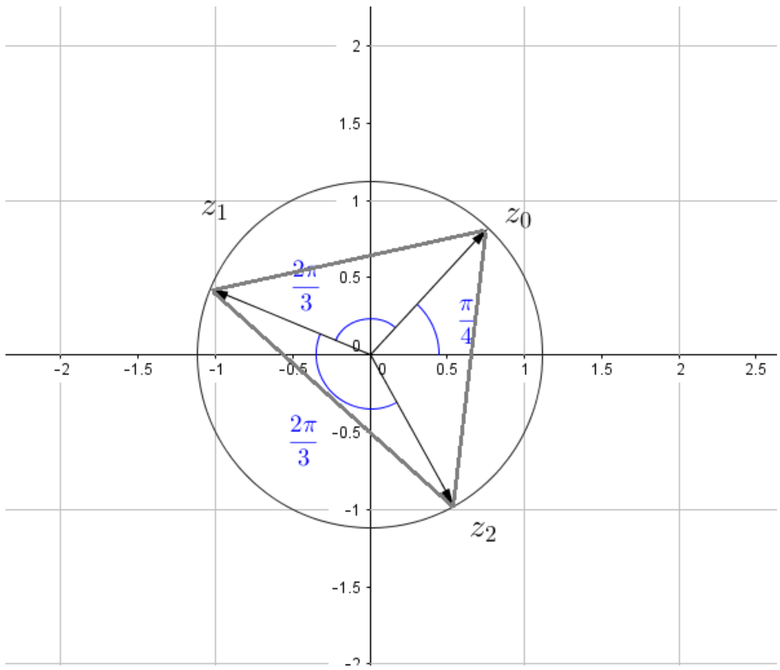


РИС.15. Изображение значений $\sqrt[3]{-1+i}$ на комплексной плоскости.

1.2. МНОГОЧЛЕНЫ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Рассмотрим выражение

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция*

$$P_n(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k} \ , \ p_i \in R, p_0 \neq 0 \ z \in C, \ n \in N ,$$

называется ***алгебраическим многочленом (с вещественными коэффициентами) степени*** $n \geq 1$ *или* ***многочленом с вещественными коэффициентами степени*** $n \geq 1$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $a \in C$ *называется* ***корнем алгебраического многочлена степени*** $n \geq 1$***,*** *если*

$$P_n(a) = 0 \text{, т.е. } p_0 a^n + p_1 a^{n-1} + \ldots + p_{n-1} a + p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k a^{n-k} = 0 .$$

В XVIII в. немецким математиком К.Гауссом была доказана так называемая "Основная теорема алгебры":

ТЕОРЕМА 1 (К.Гаусса). *Всякий алгебраический многочлен степени* $n \geq 1$ *имеет хотя бы один корень.*

Также в XVIII в. французским математиком Э. Безу была доказана теорема:

ТЕОРЕМА 2 (Э.Безу). *Для того, чтобы число* a *являлось корнем алгебраического многочлена* $P_n(z)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен* $T_{n-1}(z)$ *степени* $(n-1)$ *такой, что*

$$P_n(z) = (z-a) \cdot T_{n-1}(z) .$$

По теореме Гаусса, многочлен $T_{n-1}(z)$ также имеет хотя бы один корень, в частности, это также может быть число a. Тогда, применяя теорему Безу получим:

$$P_n(z) = (z-a) \cdot T_{n-1}(z) = (z-a)^2 S_{n-2}(z)$$

и т.д... Такие рассуждения приводят нас к ещё одной теореме:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть многочлен* $P_n(z)$ *степени* $n \geq 1$, $a \in C$ *- корень многочлена* $P_n(z)$. *Тогда существует* $k \in N : 1 \leq k \leq n$ *и многочлен* $T_{n-k}(z)$ *степени (n-k) такой, что* $T_{n-k}(a) \neq 0$ *и при всех* $z \in C$:

$$P_n(z) = (z-a)^k \cdot T_{n-k}(z)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Число k называют ***кратностью корня*** $a \in C$ **.** При этом очевидно, что $P_n(z)$ без остатка делится на $(z-a)^m$ при $m = 1, 2, \ldots, k$ и не делится на $(z-a)^m$ при $m > k$.

Для того, чтобы перейти к вопросу о разложении многочлена на множители, необходимо сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $a_1, a_2, ..., a_m$ *- попарно различные корни многочлена* $P_n(z)$, $k_1, k_2, ..., k_m$ *-соответствующие кратности этих корней.*
Тогда

$$P_n(z) = p_0(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (z-a_m)^{k_m},$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.

ПРИМЕР 16. Разложить многочлен $P_4(z) = z^4 - 1$ на множители: 1) в множестве комплексных чисел; 2) в множестве вещественных чисел.

Решение:

По Теореме Гаусса, многочлен $P_4(z) = z^4 - 1$ имеет 4-е корня, чтобы их найти необходимо решить уравнение:

$$z^4 - 1 = 0,$$

$$z = \sqrt[4]{1}.$$

Известно, что в области комплексных чисел корень 4-й степени из любого числа имеет ровно 4-е различных корня (см.п.1.1.4). Найдём их и, применив Теорему 4, получим соответствующие разложения.

$z = \sqrt[4]{1}$ в тригонометрической форме

$$1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i \sin 0),$$

по формуле ***извлечения корня n-й степени из комплексного числа*** находим:

$$\sqrt[4]{1} = 1\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right) = \cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}, k = 0,1,2,3.$$

Тогда

$$k = 0: z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$k = 1: z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2: z_1 = \cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = -1$$

$$k = 3: z_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Тогда разложение многочлена на множители выглядит так:

1) $z^4 - 1 = (z - 1)(z - i)(z + 1)(z + i)$ - в множестве комплексных чисел
2) $z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z - 1)(z + 1)$-в множестве вещественных чисел.