3459. Вычислим для начала частные производные

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=1;\ \frac{\partial \xi}{\partial y}=0;\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial \eta}{\partial y}=2y$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot 0+2y\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}=2y\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)-2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$$

$$y\frac{\partial z}{\partial \xi}+2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}-2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$$

$$y\frac{\partial z}{\partial \xi}=0$$

$$y\neq 0;\ \frac{\partial z}{\partial \xi}=0$$

Откуда получаем $z=\varphi(\eta)=\varphi\left(x^2+y^2\right)$, где φ - любая произвольная дифференцируемая функция

Ответ: $z=\varphi\left(x^2+y^2\right)$**.**

3434. $x^2y''+xy'+y=0;\quad x=e^t$

Вычислим $y_t^{'};\ y^{''}_t$

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$y''=\left(y'\right)'=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Выполним замену $x=e^t$, тогда $\frac{dx}{dt}=e^t=x;\ \frac{d^2x}{dt^2}=e^t=x$. Получаем:

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{x}$$

$$y'' = \frac{x \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - x \cdot \frac{dy}{dt}}{x^3} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Подставляем всё в исходное уравнение:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(y'' - y' \right) + x \cdot \frac{y'}{x} + y = 0$$

$$y'' - y' + y' + y = 0$$

$$y'' + y = 0$$

Функция y зависит от t.

Ответ: $y''(t) + y(t) = 0$

3529. Подставим в наши функции $t_0 = \frac{\pi}{4}$, имеем:

$$x_0 = a \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}; \; y_0 = b \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{b}{2}; \; z_0 = c \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{c}{2}$$

Вычислим производные функции и найдём их значения в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$

$$x'_t = a \sin 2t \quad \Rightarrow \quad x'_t \left(\frac{\pi}{4} \right) = a$$

$$y'_t = \frac{b}{4} \cos 2t \quad \Rightarrow \quad y'_t \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$z'_t = -c \sin 2t \quad \Rightarrow \quad z'_t \left(\frac{\pi}{4} \right) = -c$$

Тангенское уравнение (уравнения касательных):

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

Уравнение нормали:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}\left(x-x_0\right)+\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}\left(y-y_0\right)+\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}\left(z-z_0\right)=0$$

$$a\cdot\left(x-\frac{a}{2}\right)+\left(-c\right)\left(z-\frac{c}{2}\right)=0$$

$$ax-cz=\frac{1}{2}\left(a^2-c^2\right)$$