

# ЛЕКЦИЯ 3

## ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

3.1. Определители. Определители 2-го, 3-го и $n$ -го порядков.....	2
3.2. Миноры и алгебраические дополнения.....	3
3.3. Вычисление определителей.....	7
3.4. Понятие обратной матрицы. Теорема о существовании и виде обратной матрицы (метод присоединенной матрицы).....	10

### 3.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО, 3-ГО И $n$ -ГО ПОРЯДКА

Понятие определителя - очень важное, оно упрощает решение многих задач линейной алгебры и позволяет **характеризовать любую квадратную матрицу** с набором из  $(n \cdot n)$  элементов по значению только **одного числа** (определителя этой матрицы).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Каждой квадратной матрице

$$A_{n \times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n$ -го порядка ставится в соответствие число, называемое **детерминантом** (от лат. determinare - ограничивать, определять) или **определителем  $n$ -го порядка** матрицы  $A_{n \times n}$  и обозначается :

$$\det A, |A|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Существует **общее правило**<sup>1</sup>, по которому для любой квадратной матрицы можно вычислить её детерминант. Оно является достаточно трудоёмким, поэтому на практике применяют специальные удобные правила<sup>2</sup> вычисления определителей 2-го и 3-го порядков (которые являются следствием общего правила вычисления определителя  $n$ -го порядка). Далее, применяя свойства<sup>3</sup> определителя, с помощью определителей 2-го и 3-го порядков можно вычислить и определитель  $n$ -го порядка (см. **п.3.3.ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**).

Среди всех значений определителя наиболее важным для решения задач является 0. Поэтому выделим ещё один вид матриц:

---

<sup>1</sup> Вычисление определителя с помощью перестановок

<sup>2</sup> Правила (треугольника, Саррюса) подробно рассматривают на практических занятиях.

<sup>3</sup> Свойства определителя и вычисление с их помощью определителя  $n$ -го порядка подробно рассматривают на практических занятиях

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Квадратные матрицы  $A_{n \times n} : \det A = 0$  называются **вырожденными** или **особенными** матрицами.

Далее нам необходимо рассмотреть ряд дополнительных понятий (таких как **минор** и **алгебраическое дополнение**), которые позволят сформулировать и доказать ряд важных теорем из теории определителей.

### 3.2. МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Рассмотрим матрицу размера  $m \times n$  и выберем в ней произвольным образом  $s$ -строк и  $s$ -столбцов ( $1 \leq s \leq \min(m, n)$ , где  $\min(m, n)$  - меньшее из чисел  $m$  и  $n$ ). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют матрицу порядка  $s$ , определитель которой называется **минором  $M$  порядка  $s$**  данной матрицы.

**ПРИМЕР 1.** Дана матрица размера  $3 \times 5$ :  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$ .

Выберем в ней произвольные 2 строки и 2 столбца, например 2-я и 3-я строка и 3-й и 4-й столбец :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} & a_{15} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} & \mathbf{a_{25}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \mathbf{a_{34}} & \mathbf{a_{35}} \end{pmatrix}$$

Тогда минор 2-го порядка для данной матрицы состоит из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Если рассматривать квадратную матрицу порядка  $n$  и её минор порядка  $s$ , тогда появляется ещё один вид минора:

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Определитель матрицы, оставшейся после вычёркивания тех  $s$ -строк и  $s$ -столбцов данной матрицы, которые входят в минор порядка  $s$  данной матрицы, называется **минором  $M'$ , дополнительным к минору  $M$** .

Очевидно, что дополнительным к минору  $M'$  будет минор  $M$ .

**ПРИМЕР 2.** Дана матрица 5-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Найдём минор 2-го порядка, выбрав, например, 2-ю и 3-ю строки и 3-й и 5-й столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

Тогда дополнительным минором  $M'$  к минору  $M$  будет:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{14} & \\ & & & & \\ a_{41} & a_{42} & & a_{44} & \\ a_{51} & a_{52} & & a_{54} & \end{pmatrix},$$

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Алгебраическим дополнением  $M^*$  минора  $M$  называется дополнительный к нему минор, умноженный на  $(-1)^\sigma$ , где  $\sigma$  - сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в рассматриваемый минор.

**ПРИМЕР 3.** Найдём алгебраическое дополнение минора  $M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}$  из предыдущего ПРИМЕРА 2.

Решение:

По определению  $M^* = (-1)^\sigma \cdot M' = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$ , где  $\sigma = 2 + 3 + 3 + 5 = 13$ .

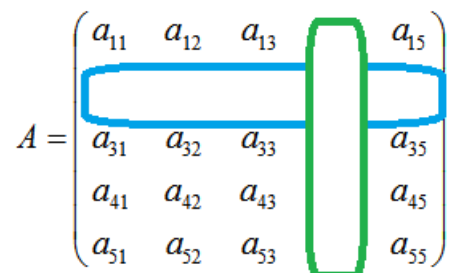
**ЗАМЕЧАНИЕ.** Каждый элемент  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка является *минором 1-го порядка*. Дополнительный минор является определителем порядка  $n - 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Дополнительный минор элемента  $a_{ij}$  будем называть *минором элемента  $a_{ij}$*  и обозначать  $M_{ij}$ . Он равен определителю, полученному из исходного вычёркиванием  $i$ -строки и  $j$ -столбца.

**ПРИМЕР 4.** Рассмотрим квадратную матрицу 5-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Найдём  $M_{24}$ :



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  будем называть произведение минора элемента  $a_{ij}$  на  $(-1)^{i+j}$  и обозначать его  $A_{ij}$ :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

**ПРИМЕР 5.** Найти алгебраическое дополнение для элемента  $a_{24}$  из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Решение:

Минор  $M_{24}$  элемента  $a_{24}$  был найден в **ПРИМЕРЕ 4**, поэтому

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot M_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

В заключении этого пункта приведём одну важную теорему.

**ТЕОРЕМА 1 (АННУЛИРОВАНИЯ).** Сумма произведений элементов некоторой строки квадратной матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки этой матрицы равна нулю, т.е.

$$a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \dots + a_{in} \cdot A_{kn} = 0,$$

где

$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  - элементы некоторой строки  $i: 1 \leq i \leq n$ ,

$A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn}$  - алгебраические дополнения элементов строки  $k: 1 \leq k \leq n, i \neq k$ .

Аналогичное утверждение верно и для столбцов матрицы.

### 3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

В основе вычисления определителя  $n$ -го порядка лежит следующая теорема:

**ТЕОРЕМА 2 (О РАЗЛОЖЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ  $n$ -ГО ПОРЯДКА ПО  $i$ -ОЙ СТРОКЕ ( $j$ -МУ СТОЛБЦУ)).** *Определителем порядка  $n$ , соответствующим квадратной матрице порядка  $n$ , называется число, равное*

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

где  $A_{ij}$  - соответствующее алгебраическое элемента  $a_{ij}$ ,

$M_{ij}$  - соответствующий минор элемента  $a_{ij}$ ,  $i$ -любое фиксированное число:

$i = 1, \dots, n$  ( $j$ -любое фиксированное число:  $j = 1, \dots, n$ ).

Данная теорема даёт **правило вычисления определителя  $n$ -го порядка**:

Для того, чтобы вычислить определитель  $n$ -го порядка, нужно взять любую строку (или столбец) и сложить произведения соответствующих элементов строки (или столбца) и их алгебраических дополнений.

У определителя есть ряд свойств, которые на практике позволяют значительно упростить его вычисление.

#### СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы (или определитель не меняется при транспонировании):*

$$\det A = \det A^T$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это свойство иногда называют *свойством инвариантности определителя относительно транспонирования матрицы*.

2. При перестановке двух строк (или двух столбцов) определитель меняет свой знак на противоположный.

3. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Обратите внимание, что

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

4. Если все элементы некоторого  $j$ -го столбца определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы, кроме  $j$ -го такие же, но у первого определителя  $j$ -ый столбец состоит из первых слагаемых исходного  $j$ -го столбца, а второго -  $j$ -ый столбец состоит из вторых слагаемых исходного  $j$ -го столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a'_{n2} + a''_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a'_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a'_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a''_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a''_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аналогично:

Если все элементы некоторой  $i$ -го строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме  $i$ -го такие же, но у первого определителя  $i$ -ая строка состоит из первых слагаемых исходной  $i$ -ой строки, а второго -  $i$ -ая строка состоит из вторых слагаемых исходной  $i$ -го строки:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. Определитель равен 0, если:

- все элементы некоторой строки (или столбца) равны 0,
- есть хотя бы две одинаковые строки (или хотя бы два одинаковых столбца),
- есть хотя бы две строки (или хотя бы два столбца), элементы которых пропорциональны,
- есть хотя бы одна строка (или хотя бы один столбец), являющийся линейной комбинацией других строк (или столбцов).

6. Определитель не изменится, если к элементу какой-либо строки (или какого-либо столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или другого столбца), умноженные на число  $\lambda$  :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} + \lambda a_{2j} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Это свойство можно обобщить: определитель не изменится, если к элементу какой-либо строки (или какого-либо столбца) прибавить поэлементно линейную комбинацию других строк (или столбцов).

7. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

### 3.4. ПОНЯТИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ВИДЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ (МЕТОД ПРИСОЕДИНЁННОЙ МАТРИЦЫ)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $A$  - квадратная матрица порядка  $n$ . Квадратная матрица  $B$  того же порядка называется **обратной** к матрице  $A$ , если выполнено условие:

$$A \cdot B = B \cdot A = E,$$

где  $E$  - единичная матрица порядка  $n$ .

Обозначение:  $A^{-1}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Обратная матрица позволяет определить целую отрицательную степень матрицы  $A$ :

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, n \in N.$$

Не каждая матрица имеет обратную - критерий существования обратной матрицы мы сформулируем ниже. Для его доказательства нам потребуется дополнительная теорема (см. ТЕОРЕМУ 3 ниже) и ещё один вид матриц:

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $A$  - квадратная матрица порядка  $n$ . Тогда матрица  $(A^V)^T$ :

$$(A^V)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $A_{ij}$  - алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ , называется **присоединённой матрицей** или **матрицей алгебраических дополнений**.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Обратим внимание, что  $A_{ij}$  (алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ ) расположены в транспонированном порядке относительно самих элементов  $a_{ij}$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $A$  - квадратная матрица порядка  $n$ , матрица  $(A^V)^T$  - соответствующая присоединённая матрица,  $E$  - единичная матрица порядка  $n$ .

Тогда верно равенство:

$$A \cdot (A^V)^T = (A^V)^T \cdot A = E \cdot \det A.$$

Доказательство:

Рассмотрим произведение матриц  $A \cdot (A^V)^T = D$ ,  $D_{n \times n} = [d_{ij}]$ .

Если

- $i \neq k$ , то по ТЕОРЕМЕ 1 (аннулирования):

$$d_{ik} = a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \dots + a_{in} \cdot A_{kn} = 0,$$

- если  $i = k$ , то по ТЕОРЕМЕ 2 (о разложении определителя  $n$ -го порядка по  $i$ -й строке ( $j$ -му столбцу)):

$$d_{ij} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \det A,$$

тогда получим, что

$$A \cdot (A^V)^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E \cdot \det A.$$

Аналогично можно доказать, что  $(A^V)^T \cdot A = E \cdot \det A$ .

Теорема доказана.

Далее перейдём к формулировке и доказательству основной теоремы об обратной матрице:

**ТЕОРЕМА 4 (О ВИДЕ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ).** Для невырожденной матрицы  $A$  порядка  $n$  существует и при том единственная обратная матрица  $A^{-1}$ , которая имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^V)^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $A_{ij}$  - алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ .

Доказательство:

1. Докажем существование обратной матрицы.

Так как матрица  $A$  - невырожденная ( $\det A \neq 0$ ), тогда по ТЕОРЕМЕ 3

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot (A^V)^T = \frac{1}{\det A} \cdot (A^V)^T \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot E \cdot \det A = E,$$

а это значит, что матрица  $\frac{1}{\det A} (A^V)^T$  является обратной к матрице  $A$ .

2. Докажем единственность обратной матрицы.

Предположим противное - существует две матрицы  $A_1^{-1}$  и  $A^{-1}$ , обратные к  $A$ :

$$A_1^{-1} \neq A^{-1}.$$

Тогда по определению обратных матриц верны равенства:

$$A_1^{-1} \cdot A = A \cdot A_1^{-1} = E,$$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Домножим равенства на  $A_1^{-1}$  слева

$$A_1^{-1} (A^{-1} \cdot A) = A_1^{-1} (A \cdot A^{-1}) = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1}$$

и применим свойство ассоциативности умножения:

$$A_1^{-1} (A^{-1} \cdot A) = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1},$$

$$(A_1^{-1} A) A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1},$$

$$A_1^{-1} = A^{-1} - \text{получили противоречие.}$$

Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** По построению обратной матрицы (см. ТЕОРЕМА 4) видно, что для нахождения матрицы, обратной к матрице  $A$ , необходимо:

1. Найти определитель матрицы  $A$  и проверить, что  $\det A \neq 0$ .

2. Найти  $(n \cdot n)$  алгебраических дополнений  $A_{ij}$ , соответствующих элементам  $a_{ij}$ .

3. Составить матрицу  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ , где элементы  $A_{ij}$

расположены в транспонированном порядке.

**ПРИМЕР 6.** Найти матрицу, обратную к матрице  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Решение:

1. Находим  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \neq 0$ .

2. Находим  $2 \cdot 2 = 4$  соответствующих алгебраических дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

3. Составляем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Очевидно, что в случае, когда матрица  $A$  имеет достаточно большой порядок (хотя бы 4 и выше), для нахождения обратной к ней матрицы необходимо вычислить 16 и более определителей 3-го порядка, что является достаточно трудоёмким делом. В таких случаях применяют другой способ нахождения обратной матрицы, о котором мы расскажем в **ЛЕКЦИИ 4**. Этот способ (метод) называется *нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований* или *метод Жордана*.

В заключение отметим некоторые важные свойства обратной матрицы:

### СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1. Если квадратная матрица  $A$  имеет обратную, то:

$$\det A^{-1} = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

2. Если квадратные матрицы  $A$  и  $B$  порядка  $n$  имеют обратные матрицы, то их произведение  $A \cdot B$  также имеет обратную матрицу:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

3. Если матрица  $A$  порядка  $n$  имеет обратную, то транспонированная матрица  $A^T$  также имеет обратную:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

4. Если квадратная матрица  $A$  имеет обратную, то:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$