3344. Найти производную функции $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решение:

Поскольку абсолютное значение x, y увеличивается, z уменьшается, и, следовательно, направление внутренней нормальной линии кривой является направление градиента

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} = \left|\operatorname{grad} z\right| \Big|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} = \left.\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{4\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{a^4}+\frac{4\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}{b^4}} = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}{ab},\ a>0;\ b>0$$