доказывать и другого важного свойства гиперболы — гладкости во всех ее точках *). Доказательства обоих свойств требуют знания основ дифференциального исчисления.

Остановимся на наиболее замечательном свойстве гиперболы, определяющем ее форму: точка, бесконечно удаляющаяся по гиперболе в одну сторону будет неограниченно приближаться к одной оси координат, а точка, бесконечно удаляющаяся в другую сторону — неограниченно приближаться к другой оси координат **). Это свойство математически формулируют так: *оси координат OX и OY* являются ее асимптотами (от греческого *asimptotos* — несовпадающий).

Докажем это свойство гиперболы. Возьмем на ней точку M_1, лежащую правее вершины A $(x_1>\sqrt{k})$, расстояние y_1, которой до оси OX меньше ε (рис. 5). Это всегда можно сделать, взяв $x_1>\frac{k}{\varepsilon}$. Тогда $M_1N_1 = = y_1=\frac{k}{x_1}<\varepsilon$ и для всех точек $M(x, y)$ гиперболы, лежащих правее M_1, $x>x_1$ и $y=\frac{k}{x}<y_1<\varepsilon$, то есть ось OX является асимптотой гиперболы. Из симметрии кривой следует, что и ось OY является ее асимптотой.

Зная вершину гиперболы и ее асимптоты, можно довольно точно вычертить гиперболу от руки.

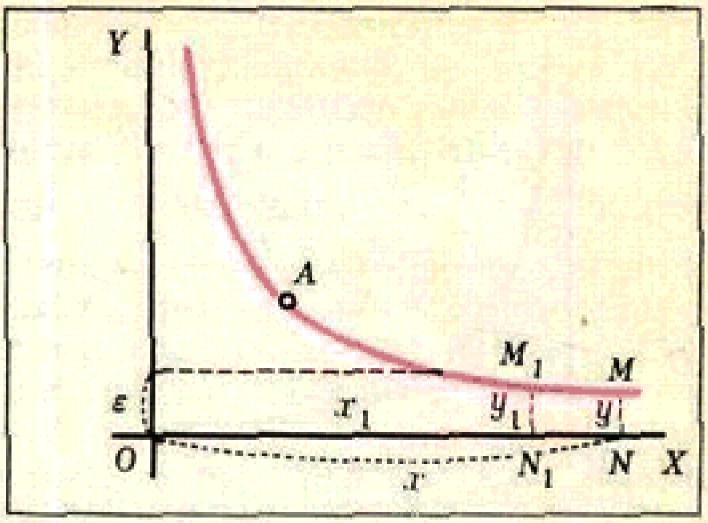

Рис. 5.

Определение равносторонней гиперболы. Сопряженные гиперболы

Изучая график обратной пропорциональности, мы считали x и y положительными. Это делалось лишь для удобства изложения. Функция, заданная равенством (1), определена не только для положительных, но и для отрицательных значений x; число k также может быть отрицательным. *График функции* (1) *мы и будем называть теперь гиперболой* (равносторонней). Он состоит из двух одинаковых частей (ветвей), расположенных при $k>0$, в I и III четвертях плоскости, а при $k<0$ — во II и IV четвертях.

На рисунке 6 изображены две равносторонние гиперболы — красная и синяя; их параметры имеют один и тот же модуль, но противоположные знаки. Такие равносторонние гиперболы называются *взаимно сопряженными*.

Перечислим некоторые свойства «полной» равносторонней гиперболы*) (они очевидны; читатель без труда проведет их доказательства). Гипербола имеет центр симметрии O (поэтому мы и назвали эту точку центром гиперболы), две симметричные ветви, две оси симметрии PR и ST (биссектрисы координатных углов), две вершины (A и A' для красной, B и B' — для синей гиперболы). Расстояние между вершинами гиперболы ($AA' = BB' = 2\sqrt{2k}$) называется *осью* гиперболы. Ее половину $\sqrt{2k}$ (*полу-*

*) Кривая называется *гладкой* или *плавной* в данной ее точке, если в этой точке существует касательная к кривой.

**) Слова «неограниченно приближаться» означают, что какое бы малое число $\varepsilon>0$ ни задать, можно указать на гиперболе такую точку, что ее расстояние до оси координат станет меньше ε и при дальнейшем удалении будет оставаться меньше ε.

*) Слово «полная» взято нами в кавычки, чтобы подчеркнуть, что прежнее определение гиперболы было неполным: оно относилось только к одной ветви гиперболы.