



ДЗ должны быть решены и загружены в течении 6 дней.

Для получения 5 баллов по первому модулю необходимо решить все Д3, которые будут выданы после занятий. Каждая работа будет оцениваться по x=100 балльной шкале, и окончательная оценка по модулю будет определяться по формуле  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$  и будет конвертирована в 5 балльную шкалу, а именно:

- **1.** При  $\langle x \rangle \epsilon$  [96, 100] будет выставлена оценка 5;
- **2.** При  $\langle x \rangle \epsilon$  [88, 95] будет выставлена оценка 4;
- 3. При  $\langle x \rangle \epsilon$  [70, 87] будет выставлена оценка 3;
- **4.** При  $\langle x \rangle \epsilon$  [60, 69] будет выставлена оценка 2;
- 5. Ниже 60 баллов не будет оцениваться.

#### Критерии оценивания работы:

- 1. Если решены все задания, аккуратно оформлены, то x = 100;
- 2. Если решены 90% из общего количество, аккуратно оформлены, то x = 95;
- 3. Если решено 80% из общего количество, аккуратно оформлены, то x = 85;
- 4. Если решено 70% из общего количество, аккуратно оформлены, то x = 75;

#### Если работа оформлена неаккуратно, то студент теряет 2 балла.

После каждой работы в отчете напишите что вам сложнее всего давалось, чтобы в начале пары разобрали. При необходимости ответы можно проверить в соответствующих задачниках (ссылки указаны перед каждым заданием)

# Практика 5

#### Вопросы по ДЗ;

Интегрирование иррациональных функций:

- 1. Базовые методы интегрирования,
- 2. Подстановки Эйлера,
- 3. Интеграл от дифференциального бинома,
- 4. Специальные подстановки

## Базовые методы интегрирования

Справка: Полезно посмотреть

$$R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^{k}$$

$$\int \frac{P_{n}(x)dx}{\sqrt{ax^{2}+bx+c}} \longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}} = \ln\left|x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}\right| + C.$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^{2}-x^{2}}\right)dx \longrightarrow x = a \cos t$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^{2}-a^{2}}\right)dx \longrightarrow x = a \operatorname{tg} t.$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^{2}-a^{2}}\right)dx \longrightarrow x = \frac{a}{\cos t}$$

### Задания 5

### Демидович

⇒1928. 
$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$$
 1932. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} (x-1)^4} . +$$

1932. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} \cdot +$$

$$1935. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$$

$$y$$
 казание. Положить  $x = \left(\frac{u^2 - 1}{2u}\right)^2$ .



# Еще задачки..

$$\rightarrow 1937. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

1941. 
$$\int \frac{x \, dx}{(1+x) \, \sqrt{1-x-x^2}} \, . +$$

$$\rightarrow 1938. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

⇒1937. 
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$
 1941. 
$$\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} + 1938. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \cdot 1942. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx \cdot + 1942.$$



$$940. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$$

1940. 
$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x} dx.$$
 1939. 
$$\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

1778. 
$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

1778. 
$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \cdot 1779. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} \cdot + \frac{1779}{\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac$$

# Подстановки Эйлера

### Полезно ознакомиться!

### Применяя подстановки Эйлера

1) 
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} + z$$
, если  $a > 0$ ;

2) 
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$$
, если  $c > 0$ ;

3) 
$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$$
,

# Интеграл от дифференциального бинома

### Полезно посмотреть

$$x^m(a+bx^n)^p$$
,

Случай 1. p — целое. Подстановка  $x=t^k$  , где k — наименьший общий знаменатель дробей m и n .

Случай 2.  $\frac{m+1}{n}$  — целое. Подстановка  $a+bx^n=t^s$ , где s — знаменатель дро-

би p .

Случай 3. 
$$\frac{m+1}{n} + p$$
 — целое. Подстановка  $a + bx^n = x^n t^s$ , где  $s$  — знамена-

тель дроби p.

# Задания 5

$$+1981. \int \sqrt{x^3 + x^4} \, dx.$$

$$\rightarrow 1982. \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$\rightarrow 1985. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$\frac{1986.}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$1985. \int_{\sqrt[3]{1+x^3}}^{\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}}.$$

1985. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$
+ 1986. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

$$\frac{1989.}{1} \int_{1}^{3} \sqrt{3x-x^2} \, dx.$$

# Специальные подстановки

Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x) y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

где  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ,  $P_n(x)$  — многочлен степени n,  $Q_{n-1}(x)$  — многочлен степени n-1 и  $\lambda$  — число, найти следующие интегралы:

1943. 
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$
 1948. 
$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}$$

$$1948. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}$$

# ДЗ с 🜞 (Необязательно)

1936. Доказать, что интеграл

$$\int R[x, (x-a)^{p/n} (x-b)^{q/n}] dx$$

где R — рациональная функция и p, q, n — целые числа, является элементарной функцией, если

$$p+q=kn$$
,

rде k — целое число.

1951. При каком условии интеграл

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

представляет собой алгебраическую функцию?

# Практика 6

#### Интегрирование тригонометрических функций:

- 1. Базовые методы интегрирования,
- 2. Формула понижение степени,
- 3. Интегрирование гиперболических функций,
- 4. integration bee

## Базовые методы интегрирования

#### Полезно посмотреть

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \longrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$tg\frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ 

$$V$$
 еще ... 
$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

- **1.** Пусть n- целое, положительное и нечетное число. Тогда нужно сделать полстановку  $\sin x = t$ .
- **2.** Пусть m- целое, положительное и нечетное число. Тогда нужно сделать подстановку  $\cos x = t$ .
- **3.** Пусть m и n целые неотрицательные четные числа. Тогда при вычислении интеграла нужно использовать тригонометрические формулы понижения порядка синуса и косинуса:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
;  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .

**4.** Пусть m+n — четное отрицательное целое число. Тогда следует сделать подстановку  $\lg x = t$ .

# Задания 6

$$\rightarrow$$
 1993.  $\int \cos^6 x \, dx$ . 1994.  $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ .

$$+1995. \int \sin^4 x \cos^5 x dx$$
.  $1996. \int \sin^5 x \cos^5 x dx$ .

$$\rightarrow 1997. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx. \qquad 1998. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx. \implies$$

$$\frac{1999. \int \frac{dx}{\sin^3 x}}{2000. \int \frac{dx}{\cos^3 x}} \cdot \frac{1}{\sin^3 x}$$

→ 2013. 
$$\int \sin 5x \cos x \, dx$$
. 2014. 
$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$$
. 
$$+$$
2015. 
$$\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx$$
.

Следующие интегралы вычисляются путем применения тоже деств:

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin [(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

Ħ

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos [(x + \alpha) - (x + \beta)].$$

Найти интегралы:

2019. 
$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$
2020. 
$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$$

# Формула понижение степени

→ 2011. Вывести формулы понижения для интегралов:

a)  $I_n = \int \sin^n x \, dx$ ; 6)  $K_n = \int \cos^n x \, dx$  (n > 2)

и с- помощью их вычислить

$$\int \sin^6 x \, dx$$
 и  $\int \cos^8 x \, dx$ .

2012. Вывести формулы понижения для интегралов:

a) 
$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$$
; 6)  $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$  (n>2)

и о помощью их вычислить

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \, H \int \frac{dx}{\cos^7 x} \, .$$

## Интегрирование гиперболических функций







2132.  $\int \cosh x \, dx$ . 2133.  $\int \sinh x \, dx$ . 2134.  $\int \frac{dx}{\cosh^2 x}$ .

$$\longrightarrow$$
 2135,  $\int \frac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$ .

$$ightharpoonup$$
 2135.  $\int \frac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$ .  $ightharpoonup$  2136.  $\int \left( \operatorname{ch}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax \right) dx$ .

# integration bee:

2076. 
$$\int \sqrt{x} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^4 dx$$
2118. 
$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

2076. 
$$\int \sqrt{x} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^4 dx.$$
 2077. 
$$\int x^{-1} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx.$$
 2118. 
$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$
 2119. 
$$\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}.$$