Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Санкт-Петербургский национальный исследовательский**

**университет информационных технологий, механики и оптики»**

**факультет ПИиКТ**

**Дисциплина: Дискретная математика**

**Домашняя работа №4  
(2 семестр)**

**«Планаризация графа»**

**Выполнила**:

Караулова Анастасия Павловна

группа Р3113

**Преподаватель:**

Поляков Владимир Иванович

г. Санкт-Петербург  
2022

Вариант № 107

Добавим к исходному графу ребра между e2 – e9 и e5 – e9

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | e1 | e2 | e3 | e4 | e5 | e6 | e7 | e8 | e9 | e10 | e11 | e12 |
| e1 | **0** | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  |
| e2 | 1 | **0** |  | 1 | 1 |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| e3 |  |  | **0** |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 |
| e4 | 1 | 1 |  | **0** | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 |
| e5 | 1 | 1 | 1 | 1 | **0** | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |
| e6 |  |  | 1 | 1 | 1 | **0** | 1 |  |  | 1 |  |  |
| e7 | 1 |  |  | 1 |  | 1 | **0** | 1 |  | 1 | 1 |  |
| e8 | 1 |  | 1 | 1 |  |  | 1 | **0** |  | 1 | 1 |  |
| e9 |  | 1 |  |  | 1 |  |  |  | **0** | 1 |  |  |
| e10 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **0** |  | 1 |
| e11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  |  | **0** | 1 |
| e12 |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  | 1 | 1 | **0** |

1. **Найдем гамильтонов цикл**

Включаем в S вершину e. S = {e1}   
Последовательно будем включать *возможные* вершины в S  
e2: S = {e1, e2}   
e4: S = {e1, e2, e4}   
e5: S = {e1, e2, e4, e5}   
e3: S = {e1, e2, e4, e5, e3}   
e6: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6}   
e7: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7}   
e8: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8}   
e10: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e10}   
e9: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e10, e9}   
  
У e9 больше нет возможных вершин, удалим ее.   
Вернемся к e10. S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e10}   
e12: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e10, e12}   
e11: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e10, e12, e11}   
  
У e11 больше нет возможных вершин, удалим ее.   
Вернемся к e12. S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e10, e12}   
  
У e12 больше нет возможных вершин, удалим ее.   
Вернемся к e10. S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e10}   
  
У e10 больше нет возможных вершин, удалим ее.   
Вернемся к e8: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8}   
  
e11: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e11}   
e12: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e11, e12}   
e10: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e11, e12, e10}   
e9: S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e11, e12, e10, e9}   
  
Ребра (e9, e1) нет, найдена гамильтонова цепь.  
Удалим из S вершину e9, перейдем к e10. S = {e1, e2, e4, e5, e3, e6, e7, e8, e11, e12, e10}   
У e10 больше нет возможных вершин, удалим ее.   
  
Продолжая подобным образом (не привожу все рассуждения, поскольку они абсолютно однотипны), находим гамильтонов цикл:  
S = {e1, e2, e4, e5, e9, e10, e6, e3, e12, e11, e7, e8}

**2. Матрица смежности с перенумерованными вершинами**

Перенумеруем вершины согласно полученному гамильтонову циклу (чтобы ребра были внешними)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | e1 | e2 | e3 | e4 | e5 | e6 | e7 | e8 | e9 | e10 | e11 | e12 |
| e1 | **0** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| e2 | 1 | **0** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| e3 | 1 | 1 | **0** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| e4 | 1 | 1 | 1 | **0** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| e5 | 0 | 1 | 0 | 1 | **0** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| e6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | **0** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| e7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **0** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| e8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | **0** | 1 | 1 | 0 | 1 |
| e9 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | **0** | 1 | 0 | 0 |
| e10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **0** | 1 | 1 |
| e11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | **0** | 1 |
| e12 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | **0** |

До перенумерации вершин: e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12После перенумерации вершин: e1, e2, e4, e5, e9, e10, e6, e3, e12, e11, e7, e8

**3. Построение графа пересечений G′**

Определим p210, для чего в матрице R выделим подматрицу R210. Ребро (e2e10) пересекается с (e1e3),(e1e4),(e1e6)   
  
Определим p29, для чего в матрице R выделим подматрицу R29.   
Ребро (e2e9) пересекается с (e1e3),(e1e4),(e1e6)   
  
Определим p26, для чего в матрице R выделим подматрицу R26.   
Ребро (e2e6) пересекается с (e1e3),(e1e4)   
  
Определим p25, для чего в матрице R выделим подматрицу R25.   
Ребро (e2e5) пересекается с (e1e3),(e1e4)   
  
Определим p24, для чего в матрице R выделим подматрицу R24.   
Ребро (e2e4) пересекается с (e1e3)

Определим p312, для чего в матрице R выделим подматрицу R312. Ребро (e3e12) пересекается с (e1e4), (e1e6), (e1e10), (e1e11), (e2e4), (e2e5), (e2e6), (e2e9), (e2e10)

Определим p311, для чего в матрице R выделим подматрицу R311. Ребро (e3e11) пересекается с (e1e4), (e1e6), (e1e10), (e2e4), (e2e5), (e2e6), (e2e9), (e2e10)

Определим p310, для чего в матрице R выделим подматрицу R310. Ребро (e3e10) пересекается с (e1e4), (e1e6), (e2e4), (e2e5), (e2e6), (e2e9)

Определим p39, для чего в матрице R выделим подматрицу R39.   
Ребро (e3e9) пересекается с (e1e4), (e1e6), (e2e4), (e2e5), (e2e6)

Определим p37, для чего в матрице R выделим подматрицу R37.   
Ребро (e3e7) пересекается с (e1e4), (e1e6), (e2e4), (e2e5), (e2e6)   
  
15 пересечений графа найдено. Окончание поиска.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **p1 3** | **p2 10** | **p1 4** | **p1 6** | **p2 9** | **p2 6** | **p2 5** | **p2 4** | **p3 12** | **p1 10** | **p1 11** | **p3 11** | **p3 10** | **p3 9** | **p3 7** |
| **p1 3** | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **p2 10** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **p1 4** | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **p1 6** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **p2 9** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **p2 6** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **p2 5** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **p2 4** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **p3 12** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **p1 10** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **p1 11** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **p3 11** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **p3 10** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **p3 9** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **p3 7** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**4. Построение семейства ψG**

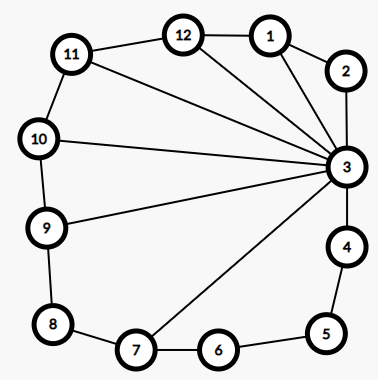
В 1 строке матрицы найдем первый нулевой элемент.   
Записываем дизъюнкцию M1 3  = r1 ∨ r3 = 110011110000000 ∨ 011011101001111 = 111011111001111   
В строке M1 3 находим номера нулевых элементов, J′ = {4, 10, 11}.   
Записываем дизъюнкцию M1 3 4  = M1 3 ∨ r4  = 111011111001111 ∨ 010110001001111 = 111111111001111   
В строке M1 3 4 находим номера нулевых элементов, J′ = {10, 11}.   
Записываем дизъюнкцию M1 3 4 10  = M1 3 4 ∨ r10  = 111111111001111 ∨ 000000001101000 = 111111111101111   
В строке M1 3 4 10 находим номера нулевых элементов, J′ = {11}.   
Записываем дизъюнкцию M1 3 4 10 11  = M1 3 4 10 ∨ r11 = 111111111101111 ∨ 000000001010000 = 111111111111111   
В строке M1 3 4 10 11 все 1. Построено ψ1 = {u1 3, u1 4, u1 6, u1 10, u1 11}  
   
В таком духе находим оставшиеся 8 множеств  
Получаем:  
ψ1 = {u1 3, u1 4, u1 6, u1 10, u1 11}   
ψ2 = {u1 3, u3 12, u3 11, u3 10, u3 9, u3 7}   
ψ3 = {u1 3, u1 10, u1 11, u3 10, u3 9, u3 7}   
ψ4 = {u1 3, u1 11, u3 11, u3 10, u3 9, u3 7}   
ψ5 = {u2 10, u2 9, u2 6, u2 5, u2 4, u1 10, u1 11}   
ψ6 = {u2 10, u2 9, u1 10, u1 11, u3 9, u3 7}   
ψ7 = {u2 10, u1 10, u1 11, u3 10, u3 9, u3 7}   
ψ8 = {u1 4, u1 6, u2 4, u1 10, u1 11}   
ψ9 = {u1 6, u2 6, u2 5, u2 4, u1 10, u1 11}

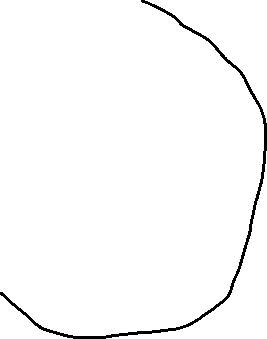
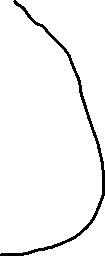
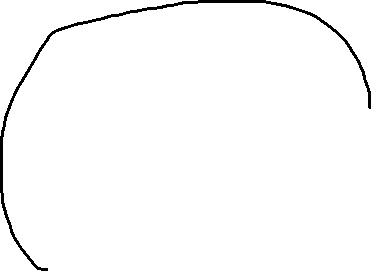
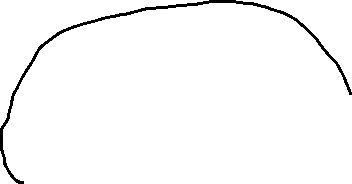
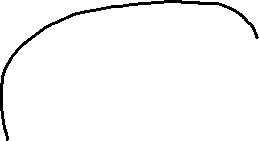
**5. Выделение из G′ максимального двудольного подграфа H′**

Для каждой пары множеств вычислим значение критерия   
α12 = |ψ1|+|ψ2|−|ψ1∩ψ2| = 10   
α13 = |ψ1|+|ψ3|−|ψ1∩ψ3| = 8 и тд  
Все результаты занесем в матрицу ниже:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **1** | **0** | 10 | 8 | 9 | 10 | 9 | 9 | 6 | 8 |
| **2** |  | **0** | 8 | 7 | 13 | 10 | 9 | 11 | 12 |
| **3** |  |  | **0** | 7 | 11 | 8 | 7 | 9 | 10 |
| **4** |  |  |  | **0** | 12 | 9 | 8 | 10 | 11 |
| **5** |  |  |  |  | **0** | 9 | 10 | 9 | 8 |
| **6** |  |  |  |  |  | **0** | 7 | 9 | 10 |
| **7** |  |  |  |  |  |  | **0** | 9 | 10 |
| **8** |  |  |  |  |  |  |  | **0** | 7 |
| **9** |  |  |  |  |  |  |  |  | **0** |

max αij = α25 = 13 дает лишь пара множеств ψ2 = {u1 3, u3 12, u3 11, u3 10, u3 9, u3 7} и ψ5 = {u2 10, u2 9, u2 6, u2 5, u2 4, u1 10, u1 11}

В суграфе H, содержащем максимальное число непересекающихся ребер, проведем ребра из ψ2 внутри, а из ψ5 снаружи.  
  
  
 



Удалим из ψG ребра, которые вошли в ψ2 и ψ5. Объединим одинаковые множества ψ1 и ψ8, ψ9 входит в ψ1Не реализованными остались два ребра. Проведем их. Итоговый граф:  
