GIẢI BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

GIẢI BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

NGUYỄN ĐỨC NGHĨA

PHẦN I – LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Chapter I – Nhập Môn Toán Rời Rạc (Introduce)

Bài 1: Cho biết trong các hệ thức dưới đây, hệ thức nào là đúng hệ thức nào là sai

a) $A \subseteq A \cap B$

b) $C \subseteq (A \cap B) \cup C$

c) $A \cup B \subseteq A \cap B$

d) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$

e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

Giải

a) Sai
- Xét tập $A = \{1, 2\}$ và tập $B = \{2, 3\}$.
  - Ta có $A \cap B = \{2\}$
  - Do $1 \notin (A \cap B)$ nên ta có $A \not\subset (A \cap B)$
- Từ đó, Kết luận mệnh đề sai.

b) Đúng
- Nếu $(A \cap B) = \varnothing \Rightarrow (A \cap B) \cup C = C \supseteq C$
- Nếu $(A \cap B) = W \Rightarrow (A \cap B) \cup C = W \cup C \supseteq C$
- Từ đó, Kết luận mệnh đề đúng.

c) Sai
- Xét tập $A = \{1, 2\}$ và tập $B = \{2, 3\}$.
  - Ta có $A \cap B = \{2\}$ và $A \cup B = \{1, 2, 3\}$
  - Do $\{1, 3\} \notin (A \cap B)$ nên ta có $(A \cup B) \not\subset (A \cap B)$.
- Từ đó, Kết luận mệnh đề sai.

d) Sai
- Ta sử dụng mệnh đề $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Ta có $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$
- Ta có mệnh đề $A \subseteq (A \cap B)$ là sai (Câu a).
- Từ đó, Kết luận mệnh đề sai.

e) Sai
- Xét tập $A = \{1, 2\}$ và tập $B = \{2, 3\}$.
  - Ta có $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ và $A \cap B = \{2\}$.
  - Ta có $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 3\}$ và $A \setminus B = \{1\}$.
  - Ta thấy $\{1, 3\} \neq \{1\}$.
- Từ đó, Kết luận mệnh đề sai.

Bài 2: Ký hiệu $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên. Xét hai tập con của $\mathbb{Z}$:

$A = \{x \in \mathbb{Z} : x = 4p - 1$ với một $p \in \mathbb{Z}$ nào đó$\}$.

$B = \{y \in \mathbb{Z} : y = 4q - 5$ với một $q \in \mathbb{Z}$ nào đó$\}$.

Chứng minh rằng $A = B$.

Giải

Xét $x \in A \Rightarrow x = 4p - 1 \quad \forall p \in \mathbb{Z}$

Xét $y \in B \Rightarrow y = 4q - 5 \quad \forall q \in \mathbb{Z}$

Ta có $x = 4p - 1 = 4(p+1) - 5$.

Với mỗi một giá trị của x luôn tồn tại một giá trị $q = p + 1 \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = 4q - 5$.

Từ đó ta có $A = B$.

Bài 3: Xét hai tập:

$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} : \text{n} < 0\}$ và $A_2 = \{n \in \mathbb{Z} : \text{n} > 0\}$.

Hỏi hai tập A_1 và A_2 có tạo thành phân hoạch của $\mathbb{Z}$ hay không ? Nếu đúng hãy giải thích câu trả lời, nếu sai, hãy đưa ra phân hoạch đúng của $\mathbb{Z}$.

Giải

- Ta có $A_1 + A_2 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
  - Từ đó ta có A_1 và A_2 không phủ kín tập $\mathbb{Z}$ nên chúng không tạo thành một phân hoạch của tập $\mathbb{Z}$.
- Ta có phân hoạch đúng của tập $\mathbb{Z}$ như sau:
  - Xét tập $A_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ - Tập các số nguyên âm.
  - Xét tập $A_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ - Tập các số nguyên không âm.
  - Từ đó ta thấy A_1 và A_2 phủ kín tập $\mathbb{Z}$ nên chúng tạo thành một phân hoạch của tập $\mathbb{Z}$.

Bài 4: Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và xác định quan hệ $\mathbb{R}$ trên A bởi:

$R = \{(0,0); (2,1); (0,3); (1,1); (3,0); (1,4); (4,1); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4); (1,2); (4,2)\}$.

Chỉ ra rằng quan hệ $\mathbb{R}$ là quan hệ tương đương hay không ? Nếu câu trả lời là khẳng định hãy đưa ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương theo quan hệ $\mathbb{R}$ đã cho.

Bài 5: Xét các tập với các phần tử là các số nguyên:

$A_0 = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, ...\}$;

$A_1 = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, 26, ...\}$;

$A_2 = \{..., -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, ...\}$;

$A_3 = \{..., -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, 28, ...\}$;

$A_4 = \{..., -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, 29, ...\}$;

a) Chỉ ra rằng các tập $A_0, \mathrm{A}_1, A_2, A_3$ và A_4 tạo thành phân hoạch của một tập số nguyên $\mathbb{Z}$.

b) Chỉ ra quan hệ s tương ứng với phân hoạch này.

Chapter II – Bài Toán Đếm Tổ Hợp (Counting Problem)

I. NGUYÊN LÝ CỘNG VÀ NGUYÊN LÝ NHÂN

Bài 1: Cho 5 ký tự A, B, C, D, E.

a) Có bao nhiêu xâu ký tự có độ dài 4 có thể lập được từ các ký tự đã cho (Nếu không cho phép lặp lại ký tự).

Giải

Ví dụ:

A	D	E	B

Cách 1:

- Chọn 4 phần tử từ tập 5 phần tử $\{A, B, C, D, E\}$ với các ký tự không lặp lại chính là một chỉnh hợp. Theo đề bài số cách chọn là $A_5^4 = 120$.

Cách 2:

- Gọi xâu ký tự là $a_1a_2a_3a_4$.Với $a_i \in X = \{A, B, C, D, E\}$.
  - Số cách chọn phần tử thứ nhất a_1 của xâu là: 5
  - Số cách chọn phần tử thứ hai a_2 của xâu từ tập $X \setminus a_1$ là 4.
  - Số cách chọn phần tử thứ ba a_3 của xâu từ tập $X \setminus \{a_1, a_2\}$ là 3.
  - Số cách chọn phần tử thứ tư a_4 của xâu từ tập $X \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ là 2.
- Theo nguyên lý nhân thì số các xâu ký tự có thể có (Thỏa mãn yêu cầu) là: $5.4.3.2 = \mathbf{120}$.

b) Có bao nhiêu xâu ký tự trong (a) bắt đầu từ B ?

Giải

Ví dụ:

B	D	E	A

Cách 1:

- Cố định vị trí đầu tiên của xâu là ký tự B.
- Chọn 3 phần tử từ tập 4 phần tử còn lại $\{A, C, D, E\}$ với các ký tự không lặp lại chính là một chỉnh hợp. Theo yêu cầu bài toán số cách chọn là $1.A_4^3 = 24$.

Cách 2:

- Gọi xâu ký tự là $Ba_1a_2a_3$.Với $a_i \in X = \{A, C, D, E\}$.
  - Số cách chọn phần tử thứ nhất a_1 của xâu là: 4.
  - Số cách chọn phần tử thứ hai a_2 của xâu từ tập $X \setminus a_1$ là 3.

- Số cách chọn phần tử thứ ba a_3 của xâu từ tập $X \setminus \{a_1, a_2\}$ là 2.

- Theo nguyên lý nhân thì số các xâu ký tự có thể có (Thỏa mãn yêu cầu) là: $4x3x2 = \mathbf{24}$.

c) Có bao nhiêu xâu ký tự trong (a) không bắt đầu từ B ?

- Số xâu ký tự mà không bắt đầu từ B là $120 - 24 = \mathbf{98}$ (Cách).

Bài 2: Cho X là tập n phần tử. Có bao nhiêu bộ có thứ tự (A, B) thỏa mãn $A \subseteq B \subseteq X$?

Bài 3: Đoàn chủ tịch của một cuộc họp gồm có 6 người: A, B, C, D, E, F cần bầu ra "Ban lãnh đạo" gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư ký.

a) Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau ?

Giải

Ví dụ:

A	D	E

- Số cách chọn ra 3 người phân biệt từ tập 6 người là $A_6^3 = 120$.

b) Có bao nhiêu cách mà trong đó một trong hai người A, B là chủ tịch ?

Giải

- Nếu A là chủ tịch, thì Cần chọn 2 người (1 phó chủ tịch và 1 thư ký) từ 5 người còn lại $\{B, C, D, E, F\}$. Số cách chọn là A_5^2.
- Do vai trò của A và B là như nhau nên số cách chọn khi A là chủ tịch hay B là chủ tịch là như nhau. Do đó, Số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2.A_5^2 = 40$.

c) Có bao nhiêu cách chọn mà trong đó E là một thành viên của ban lãnh đạo ?

Giải

Ví dụ:

E	D	A

- Chọn vị trí trong ban lãnh đạo cho E có 3 vị trí (chủ tịch hoặc phó chủ tịch hoặc thư ký).
- Chọn 2 người vào 2 vị trí còn lại từ tập 5 người còn lại $\{A, B, C, D, E\}$ có số cách là A_5^2.
- Theo nguyên lý nhân số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $3.A_5^2 = 60$.

d) Có bao nhiêu cách mà trong đó D và F là thành viên của ban lãnh đạo ?

Giải

Ví dụ:

D	**F**	A

- Chọn 2 vị trí trong ban lãnh đạo cho D và F. Số cách là C_3^2.
  - Do vai trò của D và F là như nhau nên chúng có thể hoán vị các chức danh cho nhau. Số cách là 2!.

- Chọn Vị trí còn lại trong ban lãnh đạo từ tập 4 người con lại $\{A, B, C, E\}$. Số cách là A_4^1.
- Theo nguyên lý nhân, Số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\left(2!.C_3^2\right).A_4^1 = 24$.

Bài 4: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10 *bít* bắt đầu bởi hoặc là 101 hoặc là 111 ?

Giải

Ví dụ:

1	**0**	**1**	1	0	0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	1

- Xâu nhị phân (Chỉ gồm bít 0 và 1) bắt đầu bởi 101.
  - Ba vị trí đầu của xâu là 101 nên xâu 10 *bít* còn lại $10 - 3 = 7$ *bít*.
  - Do mỗi ô trong 7 ô đó đều có 2 cách chọn (chọn 0 hoặc chọn 1) nên theo nguyên lý nhân, Số cách chọn là 2^7.
- Xâu nhị phân (Chỉ gồm bít 0 và 1) bắt đầu bởi 111.
  - Ba vị trí đầu của xâu là 111 nên xâu 10 *bít* còn lại $10 - 3 = 7$ *bít*.
  - Do mỗi ô trong 6 ô đó đều có 2 cách chọn (chọn 0 hoặc chọn 1) nên theo nguyên lý nhân, Số cách chọn là 2^7.
- Theo nguyên lý cộng, Số xâu nhị phân thỏa yêu cầu là: $2^7 + 2^7 = 2^8 = 256$.

Bài 5: Có 10 *cuốn sách* khác nhau, trong đó có 5 *cuốn* sách thuộc lĩnh vực *Tin Học*, 3 *cuốn* sách thuộc lĩnh vực *Toán Học* và 2 *cuốn* sách về lĩnh vực *Nghệ Thuật*. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 *cuốn* sách có nội dung thuộc các lĩnh vưc khác nhau từ 10 *cuốn* sách nói trên ?

Giải

- Chọn 2 cuốn sách (1 cuốn *Tin Học* và 1 cuốn *Toán Học*)
  - Chọn 1 cuốn *Tin Học* từ tập 5 cuốn sách *Tin Học*, có số cách là C_3^1.
  - Chọn 1 cuốn *Toán Học* từ tập 3 cuốn sách *Toán Học*, có số cách là C_3^1.
  - Theo nguyên lý nhân, Số cách chọn là $C_5^1.C_3^1 = 15$.
- Chọn 2 cuốn sách (1 cuốn *Toán Học* và 1 cuốn *Nghệ Thuật*)
  - Chọn 1 cuốn *Toán Học* từ tập 3 cuốn sách *Toán Học*, có số cách là C_3^1.
  - Chọn 1 cuốn *Nghệ Thuật* từ tập 2 cuốn sách *Nghệ Thuật*, có số cách là C_2^1.
  - Theo nguyên lý nhân, Số cách chọn là $C_3^1.C_2^1 = 6$.
- Chọn 2 cuốn sách (1 cuốn Nghệ Thuật và 1 cuốn *Tin Học*)
  - Chọn 1 cuốn *Nghệ Thuật* từ tập 2 cuốn sách *Nghệ Thuật*, có số cách là C_2^1.
  - Chọn 1 cuốn *Tin Học* từ tập 5 cuốn sách *Tin Học*, có số cách là C_5^1.
  - Theo nguyên lý nhân, Số cách chọn là $C_2^1.C_5^1 = 10$.
- Theo nguyên lý cộng, Số cách chọn thỏa yêu cầu là: $15 + 6 + 10 = \mathbf{31}$.

Bài 6: Có 10 $cuốn\ sách$ khác nhau, trong đó có 5 $cuốn$ sách thuộc lĩnh vực: $Tin\ Học$, 3 $cuốn$ sách thuộc lĩnh vực $Toán\ Học$ và 2 $cuốn$ sách về lĩnh vực $Nghệ\ Thuật$.

a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 $cuốn$ sách này lên giá

Giải

- Khi xếp lên giá thì 10 $cuốn$ sách là như nhau, nên chúng có thể đổi chỗ cho nhau được.
- Số cách chính là số hoán vị của 10 $phần\ tử$ hay **10!**.

b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 $cuốn$ sách này lên 1 giá sách sao cho tất cả các cuốn sách $Tin\ Học$ được xếp ở phía trái giá sách còn 2 cuốn sách về $Nghệ\ Thuật$ được xếp bên phải ?

Giải

Ví dụ:

Tin	**Tin**	**Tin**	**Tin**	**Tin**	Toán	Toán	Toán	**Nghệ Thuật**	**Nghệ Thuật**

- Do vai trò của 5 $cuốn$ sách $Tin\ Học$ là như nhau nên chúng có thể hoán vị cho nhau. Số cách xếp 5 $cuốn$ sách $Tin\ Học$ ở bên trái là 5!.
- Do vai trò của 2 $cuón$ sách $Nghệ\ Thuật$ là như nhau nên chúng có thể hoán vị cho nhau. Số cách xếp 2 $cuón$ sách $Nghệ\ Thuật$ ở bên phải là 2!.
- Do chỉ có 10 vị trí, nhưng xếp bên trái 5 vị trí cho $Toán\ Học$, bên phải 2 vị trí cho $Nghệ\ Thuật$ nên còn lại 3 $cuốn$ sách $Toán\ Học$ sẽ tự đặt vào giữa giá sách.
  - Số cách xếp 3 $cuốn$ sách $Toán\ Học$ là: 3!.
- Theo nguyên lý nhân, Số cách phân chia công viêc thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $5!.3!.2! = \mathbf{1440}$.

c) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 $cuốn$ sách này lên 1 giá sách sao cho tất cả các cuốn sách thuộc cùng lĩnh vực được xếp cạnh nhau ?

Giải

Ví dụ:

Tin	**Tin**	**Tin**	**Tin**	**Tin**	Toán	Toán	Toán	Nghệ Thuật	Nghệ **Thuật**

- Coi 5 $cuốn$ sách $Tin\ Học$ là phần tử X.
  - Số cách xếp 5 $cuốn$ sách $Tin\ Học$ trong X là 5!.
- Coi 3 $cuốn$ sách $Toán\ Học$ là phần tử Y.
  - Số cách xếp 3 $cuốn$ sách $Toán\ Học$ trong Y là 3!.
- Coi 2 $cuốn$ sách $Nghệ\ Thuật$ là phần tử Z.
  - Số cách xếp 2 $cuốn$ sách $Nghệ\ Thuật$ trong Z là 2!.
- Số cách xếp X, Y, Z vào 3 vị trí là 3!.
- Theo nguyên lý nhân, Số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(5!.3!.2!).3! = \mathbf{8640}$.

d) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 $cuốn$ sách này lên 1 giá sách sao cho 2 $cuốn$ sách $Nghệ\ Thuật$ không được xếp cạnh nhau.

Giải

Ví dụ:

Tin	Toán	Tin	Toán	Tin	Tin	Toán	Tin	Nghệ Thuật	Nghệ **Thuật**

- Ta xếp 10 *cuốn* sách lên giá sao cho 2 *cuốn* sách *Nghệ Thuật* luôn được xếp cạnh nhau.
    - Coi 2 *cuốn* sách *Nghệ Thuật* là phần tử X.
        - Số cách xếp 2 *cuốn* sách *Nghệ Thuật* trong X là 2!.
    - Xếp 8 *cuốn* sách còn lại (5 *cuốn* sách *Tin Học* và 3 *cuốn* sách *Toán Học*) cùng với X vào 9 *vị trí*.
        - Số cách xếp chúng là 9!.
    - Theo nguyên lý nhân, Số cách xếp thỏa mãn là $2!.9!$
- Ta có số cách xếp 10 *cuốn* sách vào 1 giá là 10!.
- Theo nguyên lý bù trừ, Số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $10! - 2!.9! =$ **2903040**.

Bài 7: Có bao nhiêu số có 4 *chữ số* có thể tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 thỏa mãn

a) Không có chữ số nào được lặp lại.

Giải

Ví dụ

1	0	2	3

Cách 1:

- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_i \neq a_j$ và $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in X = \{0,1,2,3,4,5\}$
    - Do $a_1 \neq 0$ nên $a_1 \in \{1,2,3,4,5\}$. Số cách chọn a_1 là 5.
    - Do không có chữ số nào được lặp lại nên ta cần lấy ra 3 *chữ số* cho a_2, a_3, a_4 từ tập gồm 5 chữ số $X \setminus \{a_1\}$. Số cách chọn là A_5^3.
- Theo nguyên lý nhân, Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $5.A_5^3 = 300$.

Cách 2:

- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_i \neq a_j$ và $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in X = \{0,1,2,3,4,5\}$.
- Số các số có 4 *chữ số* tạo thành từ 6 *chữ số* của tập $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ là A_6^4.
- Số các số có 4 *chữ số* mà bắt đầu bằng chữ số 0.
    - Ví dụ

0	1	2	3

- Do số tạo thành không có chữ số nào được lặp lại nên ta cần lấy ra 3 *chữ số* cho a_2, a_3, a_4 từ tập gồm 5 chữ số $X \setminus \{0\}$. Số cách chọn là A_5^3.

- Do các số mà bắt đầu bằng chữ số 0 là các số vô nghĩa.Nên Theo nguyên lý bù trừ, Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $A_6^4 - A_5^3 = 300$.

b) Các chữ số được lặp lại.

<u>Giải</u>

- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in X = \{0,1,2,3,4,5\}$.
  - Do $a_1 \neq 0$ nên $a_1 \in \{1,2,3,4,5\}$. Số cách chọn a_1 là 5.
  - Do các chữ số có thể được lặp lại, nên mỗi chữ số a_2, a_3, a_4 đều có 6 cách chọn từ tập X.Do đó, số cách chọn bộ (a_2, a_3, a_4) là 6^3.
- Theo nguyên lý nhân, số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $5.6^3 = 1080$.

c) Các số chẵn trong (b).

<u>Giải</u>

- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in X = \{0,1,2,3,4,5\}$.
- Do số cần tìm là chẵn nên $a_4 \in \{0,2,4\}$. Số cách chọn a_4 là 3.
  - Do $a_1 \neq 0$ nên $a_1 \in \{1,2,3,4,5\}$. Số cách chọn a_1 là 5.
  - Do các chữ số có thể được lặp lại, nên mỗi chữ số a_2, a_3 đều có 6 cách chọn từ tập X. Do đó, số cách chọn bộ (a_2, a_3) là 6^2.
- Theo nguyên lý nhân, Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $5.6^2.3 = 540$.

d) Các số chẵn mà các chữ số của nó không được lặp lại.

<u>Giải</u>

- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_i \neq a_j$ và $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in X = \{0,1,2,3,4,5\}$.
- Do số cần tìm là chẵn nên $a_4 \in \{0,2,4\}$.
- Nếu $a_4 = 0$
  - Do số tạo thành không có chữ số nào được lặp lại nên ta cần lấy ra 3 *chữ số* cho a_1, a_2, a_3 từ tập gồm 5 chữ số $X \setminus \{0\}$. Số cách chọn là A_5^3.
  - Theo nguyên lý nhân, Số các số trong trường hợp này là: $1.A_5^3$.
- Nếu $a_4 \in \{2,4\}$
  - Số cách chọn a_4 là 2.
  - Do $a_1 \neq 0$ nên $a_1 \in X \setminus \{0, a_4\}$. Số cách chọn a_1 là 4.

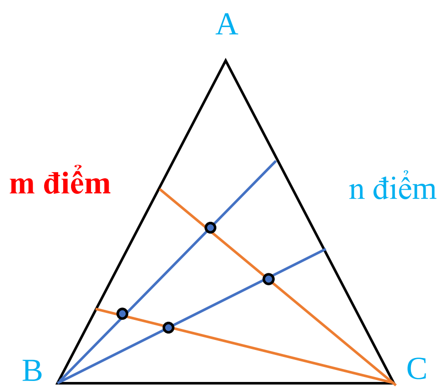
- Do không có chữ số nào được lặp lại nên ta cần lấy ra 2 *chữ số* cho a_2, a_3 từ tập gồm 4 chữ số $X \setminus \{a_1, a_4\}$. Số cách chọn là A_4^2.
- Theo nguyên lý nhân, Số các số trong trường hợp này là: $4.A_4^2.2 = 96$

- Theo nguyên lý cộng, Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $A_5^3 + 96 = 156$.

Bài 8: Trên cạnh bên của một tam giác ta lấy n điểm, trên cạnh bên thứ hai lấy m điểm. Mỗi một trong hai đỉnh của cạnh đáy được nối với các điểm được chọn trên cạnh bên đối diện bởi các đường thẳng. Hỏi

a) Có bao nhiêu giao điểm của các đường thẳng nằm trong đa giác

Giải



- Giả sử các đỉnh ở đáy là B và C. Trên cạnh AB lấy m điểm. Trên cạnh AC lấy n điểm.
- Nối điểm B với n điểm trên cạnh AC ta được n đường thẳng.
- Nối điểm C vưới m điểm trên cạnh AB ta được m đường thẳng.
  - Mỗi đường đi qua C không song song với bất kỳ đường nào trong n đường kia sẽ cắt n đường kia tại n giao điểm nằm trong tam giác.
  - Do có tất cả m đường đi qua C, nên số giao điểm nằm trong tam giác là $\boldsymbol{n.m}$

b) Các đường thẳng chia tam giác ra làm bao nhiêu phần

Giải

- Kẻ m đường thẳng qua điểm C sẽ chia ΔABC ra thành $m+1$ phần.
- Ta thấy n đường thẳng qua B chia một phần (Trong $m+1$ phần) ra thành $n+1$ phần nhỏ.
- Do có tất cả $m+1$ phần nên tam giác sẽ được chia ra làm: $\boldsymbol{(m+1).(n+1)}$ phần.

Bài 9: Một cán bộ tin học do đãng trí đã quên mật khẩu của phần mềm máy tính của mình. May mắn là anh ta còn nhớ mật khẩu có dạng $NNN - XX$ trong đó NNN là các chữ số, còn XX là các chữ cái lấy trong bảng chữ cái có 26 *chữ*. Hỏi trong trường hợp xấu nhất cần phải thử bao nhiêu mật khẩu để có thể tìm lại mật khẩu đã đặt ?

Giải

Ví dụ

0	**1**	**0**	**A**	**A**

- Ta có tập các chữ số có 10 *phần tử* là $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- Ta có tập các chữ cái có 26 *phần tử*.
- Mật khẩu có chứa 3 *chữ số NNN* (có thể lặp lại)
  - Mỗi chữ số N trong mật khẩu có 10 cách chọn từ tập $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
  - Theo nguyên lý nhân, Số cách chọn cho NNN là 10^3.
- Mật khẩu có chứa 2 *chữ cái XX* (có thể lặp lại)
  - Mỗi chữ cái X trong mật khẩu có 26 cách chọn.
  - Theo nguyên lý nhân, Số cách chọn cho XX là 26^2.
- Số trường hợp xấu nhất cần phải thử cũng chính là số lượng mật khẩu có thể có. Số mật khẩu có thể có đó là $10^3.26^2$.

Bài 10: Hỏi có bao nhiêu bộ có thứ tự gồm 3 tập X_1, X_2, X_3 thỏa mãn

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \text{ và } X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing$$

Ví dụ hai bộ: $X_1 = \{1,2,3\}, X_2 = \{1,4,8\}, X_3 = \{2,5,6,7\}$ và $X_1 = \{1,4,8\}, X_2 = \{1,2,3\}, X_3 = \{2,5,6,7\}$ được coi là khác nhau.

Giải

- Do $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing$ nên một phần tử a_i chỉ thuộc **tối đa** là 1 tập hợp
- Xét một phần tử $a_i \in X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ bất kỳ
  - Nếu a_i chỉ thuộc 1 tập thì nó có 3 cách chọn (Hoặc là X_1, hoặc là X_2, hoặc là X_3)
  - Nếu a_i thuộc 2 tập hợp thì có C_3^2 cách chọn vị trí cho a_i.
  - Nếu $a_i \notin X_j$ với $j = 1,2,3$ thì vô lý. Do $a_j \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$.
  - Theo nguyên lý cộng, Số cách xếp chỗ cho a_j là $3 + C_3^2 = 6$.
- Do a_j có thể là một trong 8 số $\{1,2,...,7,8\}$ nên số bộ có thứ tự (X_1, X_2, X_3) là $6^8 = 1679616$.

II. CHỈNH HỢP, HOÁN VỊ, TỔ HỢP

Bài 11: Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái trong xâu $ABCDEF$ mà trong đó có chứa xâu con DEF ?

Giải

- Coi xâu con DEF là phần tử X.
- Xếp $ABCX$ vào 4 vị trí, số các hoán vị có thể có là 4!.
- Số các hoán vị chứa xâu con DEF chính là số các hoán vị của xâu $ABCX$. Số các hoán vị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $4! = \mathbf{24}$.

Bài 12: Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái trong xâu $ABCDEF$ mà trong đó có chứa ba chữ cái D, E, F đứng cạnh nhau ?

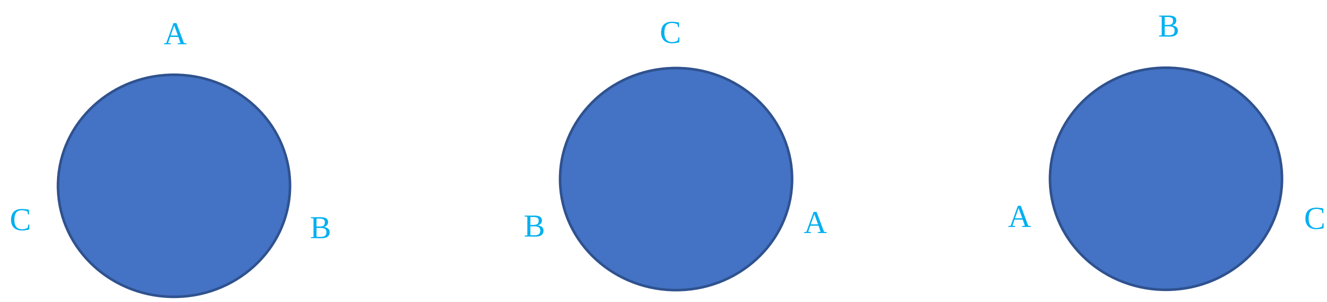
Giải

- Coi ba chữ cái D, E, F đứng cạnh nhau là phần tử X.
    - Do vai trò của D, E, F như nhau nên số các cách xếp có thể có của X là 3!.
- Xếp A, B, C, X vào 4 vị trí, số các hoán vị có thể có là 4!.
- Theo nguyên lý nhân, Số các hoán vị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $3!.4! = \mathbf{144}$.

Bài 13: Có bao nhiêu cách xếp 6 $người$ vào ngồi quanh cái bàn tròn (hai cách xếp không coi là khác nhau nếu chúng có thể thu được từ nhau bởi phép quay bàn tròn) ?

Giải

Ví dụ: Xét cách xếp 3 người A, B, C quanh một bàn tròn như sau được coi là một.



Cách 1:

- Xếp 6 $người$ ngồi quanh một cái bàn thì số cách xếp là 6!.
- Xếp quanh một bàn tròn
    - Khi ta quay bàn tròn thì với một cách xếp có thứ tự của 6 người sẽ được tính 6 lần.
- Từ đó, số cách xếp 6 $người$ ngồi quanh một bàn tròn là $\frac{6!}{6} = 5! = 120$.

Cách 2:

- Cố định một vị trí ở trên bàn.

- Do có 6 $người$ mà có một người ngồi cố định nên số cách sắp xếp người ngồi quanh bàn tròn là một bộ hoán vị của 5 $người$ còn lại.
- Từ đó, Số cách xếp 6 $người$ ngồi quanh một bàn tròn là $5! =$ **120.**

<u>Tổng Quát</u>:

- Số cách xếp n người ngồi thành một hang ngang là $\boldsymbol{n}!$.
- Số cách xếp n người ngồi quanh một bàn tròn là $(\boldsymbol{n-1})!$.

Bài 14: Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh nam và 5 học sinh $nữ$ ra thành một hàng ngang sao cho không có 2 nữ sinh nào đứng cạnh nhau ?

<u>Giải</u>

- Ký hiệu Nam là B, còn $Nữ$ là G.
- Ví dụ

B	**G**	**B**	**G**	**B**	**G**	**B**	**G**	**B**	**B**	**B**	**G**

- Xếp chỗ cho 7 bạn Nam
  - Do các bạn Nam có thể hoán vị cho nhau nên số cách xếp Nam là $7!$.
- Do có 7 bạn Nam nên giữa chúng hình thành lên $6\ khe + 2\ bên = 8\ vị\ trí$. Ta có thể xếp 5 bạn $Nữ$ vào 8 vị trí trên sao cho không có $ít\ nhất$ 2 bạn $Nữ$ ở cùng một vị trí thì sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
  - Số cách xếp 5 bạn $Nữ$ vào 8 $vị\ trí$ mà không có $ít\ nhất$ 2 bạn $Nữ$ ở cùng một vị trí chính là một chỉnh hợp chập 8 của 5. Số cách xếp là A_8^5.
- Theo nguyên lý nhân, Số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $7!.A_8^5 = 33868800$.

Bài 15: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 32 bit mà trong đó có đúng 6 $số$ 1 ?

<u>Giải</u>

Ví dụ

1	**…**	**1**	**1**	**…**	**1**	**…**	**1**	**…**	**1**

- Xâu nhị phân chỉ gồm 2 số là 0 hoặc 1.
- Xâu nhị phân có độ dài 32 $bít$ có đúng 6 $số$ 1 chính là số cách chọn ra 6 $vị\ trí$ từ 32 $vị\ trí$ để xếp số 1 vào
  - Số cách chọn đó là $C_{32}^6 = 906192$.

Bài 16: Có bao nhiêu xâu ký tự có thể tạo được từ các chữ cái $\boldsymbol{MISSISSIPPI}$?

<u>Giải</u>

Ví dụ:

M	**I**	**S**	**S**	**I**	**S**	**S**	**I**	**P**	**P**	**I**

<u>Cách 1</u>:

- Xâu ký tự trên gồm 11 chữ cái có số lượng các chữ cái là
  - Có 1 chữ M.
  - Có 4 chữ I.
  - Có 4 chữ S.
  - Có 2 chữ P.
- Xếp 11 ký tự thành một hàng ta được số xâu là 11!.
- Do có 4 chữ I, có 4 chữ S, có 2 chữ P được lặp lại.
  - Từ đó, Số xâu ký tự có thể tạo thành từ các ký tự trên là: $\frac{11!}{4!.4!.2!} = 34650$.

Cách 2:

- Chọn 4 vị trí từ 11 vị trí để xếp 4 chữ I. Số cách chọn là C_{11}^4.
  - Sau khi chọn xong 4 vị trí cho chữ I, còn lại $11 - 4 = 7$ vị trí.
- Chọn 4 vị trí từ 7 vị trí còn lại để xếp 4 chữ S. Số cách chọn là C_7^4.
  - Sau khi chọn xong 4 vị trí cho chữ S, còn lại $7 - 4 = 3$ vị trí.
- Chọn 2 vị trí từ 3 vị trí còn lại để xếp 2 chữ P. Số cách chọn là C_3^2.
  - Sau khi chọn xong 2 vị trí cho chữ P, còn lại $3 - 2 = 1$ vị trí.
- Ví trí còn lại sẽ dành cho chữ M.
- Theo nguyên lý nhân, Số các xâu ký tự thỏa mãn là: $C_{11}^4.C_7^4.C_3^2.1 = 34650$.

Tổng Quát:

- Xếp n đồ vật lại thành một hàng ngang.
- Trong n đồ vật đó có n_1 đồ vật loại I, …, có n_k đồ vật loại k.
- Số cách xếp đồ thỏa mãn là: $\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$.

Bài 17: Có 8 cuốn sách khác nhau. Hỏi có bao nhiêu các phân các cuốn sách này cho 3 học sinh: $Mơ, Mai, Mận$ sao cho $Mơ$ nhận được 4 cuốn sách, còn $Mai, Mận$ mỗi người nhận được 2 cuốn sách ?

Giải

- $Mơ$ có 4 cuốn sách từ 8 cuốn sách. Số cách lấy sách cho $Mơ$ là C_8^4.
- Mai có 2 cuốn sách từ 4 cuốn sách còn lại. Số cách lấy sách cho Mai là C_4^2.
- $Mận$ có 2 cuốn sách từ 2 cuốn sách còn lại. Số cách lấy sách cho $Mận$ là 1.
- Theo nguyên lý nhân, Số cách lấy sách thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_8^4.C_4^2 = 420$.

Bài 18: Giả sử X là tập có t phần tử. Ta gọi *tổ hợp lặp* chập k từ t phần tử của X là một bộ không có thứ tự gồm k thành phần lấy từ các phần tử của X.

Ví dụ

- Xét tập $X = \{a, b, c\}$. Các tổ hợp lặp chập 2 từ các phần tử của X là
  - $(a, a); (a, b); (a, c); (b, b); (b, c); (c, c)$.

Chứng minh rằng số tổ hợp lặp chập k từ t là: $C_{k+t-1}^{t-1} = C_{k+t-1}^{k}$.

Giải

- Ta xếp t phần tử thành một hàng ngang.
  - Giữa 2 phần tử liên tiếp luôn tồn tại 1 vách ngăn.
  - Do có t phần tử nên sẽ có $t - 1$ vách ngăn.
  - Chúng sẽ tạo thành t ngăn được đánh số từ 1 tới t.
- Xét tổ hợp lặp chập k của t phần tử.
  - Coi k phần tử chính là k ngôi sao. Xếp k ngôi sao thành một hàng ngang.
  - Ngăn thứ $\boldsymbol{i}$ chứa *thêm một ngôi sao* mỗi lần khi **phần tử thứ $\boldsymbol{i}$** của tập *xuất hiện trong tổ hợp*.
- Ví dụ **tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$** được biểu thị bởi 6 $ngôi\ sao$ và 3 vách ngăn.
  - Biểu thị tổ hợp chứa đúng 2 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ hai, không có phần tử thứ ba, có 3 phần tử thứ tư của tập hợp. Hay (a, a, b, d, d, d)

$$* \quad * \;\Big|\; * \;\Big|\; \quad \Big|\; * \quad * \quad *$$

  - Biểu thị tổ hợp chứa đúng 1 phần tử thứ hai, 5 phần tử thứ tư của tập hợp. Hay (b, d, d, d, d, d)

$$\Big|\; * \;\Big|\; \quad\quad \Big|\; * \quad * \quad * \quad * \quad *$$

- Ta thấy một dãy chứa $(t - 1)$ vách ngăn và k ngôi sao ứng với một tổ hợp lặp chập k của t phần tử.
  - Chọn $t - 1$ vị trí từ $t - 1 + k$ vị trí để xếp chỗ cho $t - 1$ vách ngăn. Số cách xếp là: C_{t-1+k}^{t-1}.
  - Còn lại k vị trí trong dãy ứng với k ngôi sao.
- Vậy số các tổ hợp lặp chập k từ t phần tử là C_{t-1+k}^{t-1}.
- Theo tính chất của tổ hợp $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có $C_{t-1+k}^{t-1} = C_{t-1+k}^{k}$.

Bài 19: Có 3 rổ đựng các quả cầu $Xanh$, Đỏ, $Tím$. Mỗi giỏ chỉ chứa các quả cầu cùng màu và mỗi giỏ chứa *ít ra* là 8 quả cầu.

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quả cầu.

Giải

- Gọi số quả cầu lấy ra ở mỗi giỏ lần lượt là x_1, x_2, x_3.
- Số cách lấy ra 8 quả cầu từ ba giỏ chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình sau

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên chính là số tổ hợp lặp chập 8 của 3 phần tử. Số tổ hợp lặp đó là $C_{3+8-1}^{8} = C_{10}^{2} = 45$

b) Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quả cầu mà trong đó có **ít nhất** một quả cầu Đỏ, một quả cầu $Xanh$, một quả cầu $Tím$?

Giải

- Gọi số quả cầu lấy ra ở mỗi giỏ lần lượt là x_1, x_2, x_3.
- Số cách lấy ra 8 quả cầu từ ba giỏ chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình sau

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

- Đặt $t_1 = x_1 - 1, \quad t_2 = x_2 - 1, \quad t_3 = x_3 - 1$.
  - Do lấy ra ít nhất một quả cầu Đỏ, một quả cầu $Xanh$, một quả cầu $Tím$ nên $x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq 1$
  - Do vậy $t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0, \quad t_3 \geq 0$.
- Phương trình đầu bài trở thành $t_1 + t_2 + t_3 = 5$ (*).
- Số cách chọn ra 8 quả cầu mà trong đó có **ít nhất** một quả cầu Đỏ, một quả cầu $Xanh$, một quả cầu $Tím$ chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (*). Nó chính là số tổ hợp lặp chập 5 của 3 phần tử. Số tổ hợp đó là $C_{3+5-1}^{5} = C_7^2 = 21$

Bài 20: Xét phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$.

a) Hỏi phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

Giải

- Do $x_1, ..., x_4 \geq 1$ (Nguyên dương). Ta đặt $y_i = x_i - 1 \Rightarrow y_i \geq 0$ với $\forall i = \overline{1,4}$
- Phương trình đầu bài trở thành $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 25$ (*) có nghiệm nguyên không âm.
- Mỗi nghiệm của phương trình (*) tương ứng với việc chọn 25 phần tử từ bốn loại
  - Gồm y_1 giá trị loại I.
  - Gồm y_2 giá trị loại II.
  - Gồm y_3 giá trị loại III.
  - Gồm y_4 giá trị loại IV.
- Từ đó, Số nghiệm của phương trình (*) chính là số tổ hợp lặp chập 25 của 4 phần tử. Số tổ hợp lặp đó là $C_{4+25-1}^{25} = C_{28}^{3}$

b) Hỏi phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm ?

Giải

- Số nghiệm không âm của phương trình chính là số tổ hợp lặp chập 29 của 4 phần tử. Số tổ hợp lặp đó là $C_{4+29-1}^{29} = C_{32}^{3}$

III. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Bài 1: Hỏi trong đoạn từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số hoặc là số lẻ, hoặc là số chính phương ?

Giải

- Gọi A là tập hợp các số lẻ.
- Gọi B là tập hợp các số chính phương.
  - Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp các số chính phương lẻ.
  - Khi đó, $A \cup B$ là tập hợp các số lẻ hoặc là số chính phương.
- Tập hợp các số lẻ là các số không chia hết cho 2.
  - Tập hợp các số chẵn là các số chia hết cho 2.
  - Trong đoạn từ 1 đến 1000, Số các số chẵn là $\left[\frac{1000}{2}\right] = 500$.
  - Do trong đoạn từ 1 đến 1000 chỉ gồm các số là chẵn hoặc lẻ, nên Số các số lẻ trong đoạn này là $1000 - 500 = 500$. Từ đó có $|A| = 500$.
- Một số được gọi là Số chính phương nếu nó được viết dưới dạng k^2 trong đó $k \in \mathbb{Z}^+$.
  - Do đó, Số các số chính phương trong đoạn từ 1 đến 1000 chính là số các giá trị k nguyên dương có được thỏa mãn $1 \le k^2 \le 1000$.
  - Số giá trị k thỏa mãn là $\left[\sqrt{1000}\right] = 31$. Từ đó ta có $|B| = 31$.
- Ta sẽ tìm số các Số chính phương lẻ trong đoạn từ 1 đến 1000.
  - Số các số chính phương lẻ trong đoạn từ 1 đến 1000 chính là số các giá trị k nguyên dương có được thỏa mãn $1 \le (2k+1)^2 \le 1000 \Rightarrow 0 \le k \le 15$. Từ đó ta có $k \in \{0,1,...,15\}$.
  - Từ đó ta có $|A \cap B| = 15$.
- Theo nguyên lý bù trừ, Trong đoạn từ 1 đến 1000 có số các số hoặc là số lẻ, hoặc là số chính phương là $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 500 + 31 - 16 = 515$ số.

Bài 2: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8, không chứa 6 số 0 liên tiếp ?

Giải

- Xâu nhị phân là xâu chỉ gồm các số 0 và 1.
- Số các xâu nhị phân có độ dài 8 *bít* là $2^8 = 256$.
- Ta đếm số xâu nhị phân có độ dài 8 *bít*, gồm 6 số 0 liên tiếp.
  - Ta đếm số xâu nhị phân có **đúng 6 số 0 liên tiếp**.
    - Ta coi 6 số 0 liên tiếp là một số 0^*.
    - Nếu 0^* ở đầu, ta xét xâu bắt đầu bởi 0^*1 → Bít cuối cùng có thể là 0 hoặc 1. Số xâu là: $1.2^1 = 2$.
    - Nếu 0^* ở cuối, ta xét xâu kết thúc bởi 10^* → Bít đầu tiên có thể là 0 hoặc 1. Số xâu là: $1.2^1 = 2$.
    - Nếu 0^* ở giữa, ta xét xâu có chứa 10^*1 → Do xâu có độ dài là 8 nên Số xâu là: 1.
    - Vậy tổng số xâu nhị phân có được trong trường hợp này là $2 + 2 + 1 = \mathbf{5}$.

- Ta đếm số xâu nhị phân có **đúng 7 số 0 liên tiếp**.
  - Ta coi 7 số 0 liên tiếp là một số 0^*.
  - Nếu 0^* ở đầu, ta xét xâu bắt đầu bởi 0^*1. Do xâu có độ dài 8 $bít$ nên Số xâu là: 1.
  - Nếu 0^* ở cuối, ta xét xâu kết thúc bởi 10^*. Do xâu có độ dài 8 $bít$ nên Số xâu là: 1.
  - Vậy tổng số xâu nhị phân có được trong trường hợp này là $1 + 1 = \mathbf{2}$.
- Ta đếm số xâu nhị phân có **đúng 8 số 0 liên tiếp.**
  - Do xâu có độ dài là 8 $bít$ nên Số xâu nhị phân có đúng 8 số 0 liên tiếp là **1**.
- Vậy số xâu nhị phân có chứa 6 số 0 liên tiếp là: $5 + 2 + 1 = \mathbf{8}$.

- Theo nguyên lý bù trừ, Số xâu nhị phân độ dài 8 không chứa 6 số 0 liên tiếp là $2^8 - 8 = 248$.

Bài 3: Có bao nhiêu số có 10 chữ số với các chữ số $1, 2, 3$ mà trong đó mỗi chữ số $1, 2, 3$ **có mặt ít nhất 1 lần.**

Giải

- Gọi A_i là tập các số có 10 chữ số mà chữ số i không xuất hiện. Với $(i = 1, 2, 3)$.
  - Ta có $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ là tập các số có 10 chữ số mà chữ số 1 hoặc chữ số 2 hoặc chữ số 3 không xuất hiện.
- Số các số tự nhiên có 10 chữ số có thể có từ tập $1, 2, 3$ là 3^{10}.
- Số các số tự nhiên có 10 chữ số mà trong đó mỗi chữ số 1, 2, 3 xuất hiện ít nhất 1 lần
  - Theo nguyên lý bù trừ, ta có N= $3^{10} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.
- Ta có $N_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3|$
  - $|A_1|$ - Tập các số có 10 chữ số mà chữ số 1 không xuất hiện.
    - Các số có 10 chữ số trong trường hợp này chỉ từ các chữ số $2, 3$.
    - Số các số trong trường hợp này là 2^{10}.Do đó ta có $|A_1| = 2^{10}$.
  - Tương tự ta có $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^{10}$.
  - Do đó $N_1 = 3.2^{10}$.
- Ta có $N_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1|$.
  - $|A_1 \cap A_2|$ - Tập các số có 10 chữ số mà chữ số 1 và 2 không xuất hiện.
    - Các số có 10 chữ số trong trường hợp này chỉ từ các chữ số 1.
    - Số các số trong trường hợp này là 1. Do đó $|A_1 \cap A_2| = 1$.
  - Tương tự ta có $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_1| = 1$.
  - Do đó $N_2 = 3$.
- Ta có $N_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$
  - $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ - Tập các số có 10 chữ số mà chữ số $1, 2, 3$ không xuất hiện.
  - Do tập các chữ số có 10 chữ số được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3$ nên $N_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

- Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $N = 3^{10} - (N_1 - N_2 + N_3) = 3^{10} - (3.2^{10} - 3 + 0) = 55980$.

Bài 4: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10 hoặc là bắt đầu với 3 số 1, hoặc là kết thúc bởi 4 số 0 ?

Giải

- Xâu nhị phân là xâu chỉ gồm các chữ số 0 và các chữ số 1.
- Gọi A – Tập hợp các xâu nhị phân dài 10 *bít* mà bắt đầu bởi 3 số 1.
- Gọi B – Tập hợp các xâu nhị phân dài 10 *bít* mà kết thúc bởi 4 số 0.
- Ta có $A \cup B$ là tập các xâu nhị phân dài 10 *bít* bắt đầu bởi 3 số 1 hoặc là kết thúc bởi 4 số 0.
- Ta có $|A|$ - Số các xâu nhị phân dài 10 *bít* bắt đầu bởi 3 chữ số 1.
  - Ví dụ

1	**1**	**1**	0	1	0	0	1	1	0

  - Do 3 *bít* đầu luôn là 1 nên Số xâu nhị phân dài 10 *bít* bắt đầu bởi 3 chữ số 1 chính là số xâu nhị phân dài 7 *bít*. Hay $|A| = 2^7$.
- Ta có $|B|$ - Số các xâu nhị phân dài 10 *bít* kết thúc bởi 4 chữ số 0.
  - Ví dụ

1	0	1	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**

  - Do 4 *bít* cuối luôn là 0 nên Số xâu nhị phân dài 10 *bít* kết thúc bởi 4 chữ số 0 chính là số xâu nhị phân dài 6 *bít*. Hay $|B| = 2^6$.
- Ta có $|A \cap B|$ - Số các xâu nhị phân dài 10 *bít* bắt đầu bởi 3 chữ số 1 và kết thúc bởi 4 chữ số 0.
  - Ví dụ

1	**1**	**1**	0	1	0	**0**	**0**	**0**	**0**

  - Do 3 *bít* đầu luôn là 1, 4 bít cuối luôn là 0 nên Số xau nhị phân dài 10 *bít* thỏa mãn sẽ là số xâu nhị phân dài 3 *bít*. Hay $|A \cap B| = 2^3$
- Theo nguyên lý bù trừ, Số các xâu nhị phân thỏa mãn yêu cầu bài toán là $N = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

  Hay $N = 2^7 + 2^6 - 2^3 = 184.$

Bài 5: Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 5 và 2 ?

Giải

- Số các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 là $\left\lfloor \frac{10000}{7} \right\rfloor = 1428$.
- Gọi A_{i7} là tập các số nguyên dương nhỏ hơn 1000 chia hết cho 7 và chia hết cho i. Với $(i = 2, 5)$.
- Ta có $A_{27} \cup A_{57}$ là tập các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 và chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5.
- Ta có $|A_{27}|$ - Số các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 và chia hết cho 2.

   - Ta có (2,7) là cặp số nguyên tố cùng nhau nên Số chia hết cho 2 và chia hết cho 7 sẽ chia hết cho 2.7
   - Ta có $|A_{27}|=\left[\dfrac{10000}{2.7}\right]=714$.
- Ta có $|A_{57}|$ - Số các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 và chia hết cho 5.
   - Ta có $(5,7)$ là cặp số nguyên tố cùng nhau nên Số chia hết cho 5 và chia hết cho 7 sẽ chia hết cho 5.7
   - Ta có $|A_{57}|=\left[\dfrac{10000}{5.7}\right]=285$.
- Ta có $|A_{27}\cap A_{57}|$ - Số các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7, chia hết cho 2 và 5.
   - Ta có $(2,5,7)$ là các số nguyên tố cùng nhau nên Số chia hết cho 2, chia hết cho 5 và chia hết cho 7 sẽ là các số chia hết cho 2.5.7.
   - Ta có $|A_{27}\cap A_{57}|=\left[\dfrac{10000}{2.5.7}\right]=142$
- Theo nguyên lý bù trừ, Sô các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 2 và 5 là $N=1428-|A_{27}\cup A_{57}|=1428-\left(|A_{27}|+|A_{57}|-|A_{27}\cap A_{57}|\right)=1428-(714+285-142)=571$.

Bài 6: Có bao nhiêu hoán vị của các số tự nhiên $1, 2, \ldots, 10$ mà trong đó 3 số $1, 2, 3$ không đứng cạnh nhau theo thứ tự tăng dần ?

Giải

- Số các hoán vị của tập các số tự nhiên $\{1,2,\ldots,9,10\}$ là 10!.
   - Ví dụ

10	8	9	1	2	5	7	6	4	3

- Xét các hoán vị của tập các số tự nhiên $\{1,2,\ldots,9,10\}$ mà $1, 2, 3$ đứng theo thứ tự cạnh nhau.
   - Ví dụ

10	8	9	**1**	**2**	**3**	7	6	4	5

   - Coi bộ ba số $1, 2, 3$ có thứ tự đứng cạnh nhau là một phần tử X.
     - Do bộ ba số $1, 2, 3$ có thứ tự đứng cạnh nhau nên chỉ có một cách xếp duy nhất cho X.
   - Xếp X với 7 số còn lại từ tập $\{4,5,\ldots,9,10\}$ vào 8 vị trí. Số hoán vị của chúng là 8!.
   - Theo nguyên lý nhân, Số hoán vị có trong trường hợp này là 1.8! = 8!.
- Theo nguyên lý bù trừ, Số các hoán vị của tập các số tự nhiên $\{1,2,\ldots,9,10\}$ mà $1, 2, 3$ không đứng cạnh nhau theo thứ tự tăng dần là $N=10!-8!=3588480$.

Bài 7: Hỏi phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4=29$ (*) có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn

$$x_1\le 3, x_2\le 12, x_3\le 5, x_4\le 10$$

Giải

- Đặt $t_1 = 3 - x_1, \quad t_2 = 12 - x_2, \quad t_3 = 5 - x_3, \quad t_4 = 10 - x_4$
- Do $0 \le x_1 \le 3, \quad 0 \le x_2 \le 12, \quad 0 \le x_3 \le 5, \quad 0 \le x_4 \le 10 \Rightarrow 0 \le t_1 \le 3, \quad 0 \le t_2 \le 12, \quad 0 \le t_3 \le 5, \quad 0 \le t_4 \le 10$
- Mặt khác, từ phương trình (*) ta có $3 - t_1 + 12 - t_2 + 5 - t_3 + 10 - t_4 = 29 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1(**)$
- Từ (**) ta có $t_1 \le 1 \le 3, \quad t_2 \le 1 \le 12, \quad t_3 \le 1 \le 5, \quad t_4 \le 1 \le 10$.
- Do vậy Số nghiệm của bài toán chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (**). Hay chính là số tổ hợp lặp chập 1 của 4 phần tử. Số tổ hợp lặp đó là $C_{4+1-1}^1 = C_4^1 = 4$

Bài 8: Một lớp gồm có 50 học sinh làm bài kiểm tra gồm 3 câu hỏi. Biết rằng mỗi học sinh làm được ít nhất 1 câu và số học sinh làm được câu 1 là 40, câu 2 là 25, câu 3 là 30. Chứng minh rằng số học sinh làm được cả 3 câu không vượt quá 27.

Giải

- Gọi X_i là số học sinh làm được câu thứ i. Với $i = 1,2,3$.
- Theo giả thuyết ta có $|X_1| = 40, \quad |X_2| = 35, \quad |X_3| = 30$.
- Ta có Số học sinh làm được ít nhất một câu là $|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = 50$.
- Theo nguyên lý bù trừ, ta có
  $|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_2 \cap X_3| - |X_3 \cap X_1| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$
- Đặt $X_{12} = |X_1 \cap X_2|, \; X_{23} = |X_2 \cap X_3|, \; X_{31} = |X_3 \cap X_1|, \; X_{123} = |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$.
- Ta có $50 = 40 + 35 + 30 - X_{12} - X_{23} - X_{31} + X_{123}$
  - Ta có $50 = 105 - X_{12} - X_{23} - X_{31} + X_{123} \Rightarrow 55 = (X_{12} - X_{123}) + (X_{23} - X_{123}) + (X_{31} - X_{123}) + 2X_{123}$
  - Đặt $A = X_{12} - X_{123} \ge 0$, $B = X_{23} - X_{123} \ge 0$, $C = X_{31} - X_{123} \ge 0$.
  - Từ đó $55 - 2X_{123} = A + B + C \ge 0 \Rightarrow X_{123} \le \left[\dfrac{55}{2}\right] = 27$.
- Ta thấy X_{123} chính là số học sinh làm được cả 3 câu, Số học sinh đó không vượt quá 27.

IV. HỆ THỨC TRUY HỒI

Bài 1: Giải các hệ thức truy hồi sau

a) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} & \forall n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

Giải

- Phương trình đặc trưng: $t - 2 = 0 \rightarrow t = 2$.
- Công thức tổng quát $a_n = a.2^n$ với $n \geq 0$.
  - Ta có $a_0 = a.2^0 = 3 \Rightarrow a = 3$.
- Ta có $a_n = 3.2^n \quad \forall n \geq 0$.

b) $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 0 \end{cases}$

Giải

- Phương trình đặc trưng $t^2 - 5t + 6 = 0$.
  - Có nghiệm $\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3$.
- Công thức tổng quát: $a_n = a.2^n + b.3^n \quad \forall n \geq 0$
  - Ta có $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.2^0 + b.3^0 = 1 \\ a.2^1 + b.3^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$
- Ta có $a_n = 3.2^n - 2.3^n \quad \forall n \geq 0$

c) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 6, \quad a_1 = 8 \end{cases}$

Giải

- Phương trình đặc trưng: $t^2 - 4t + 4 = 0$
  - Có nghiệm kép $t = 2$.
- Công thức tổng quát $a_n = (a + b.n).2^n \quad \forall n \geq 0$
  - Ta có $\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 0.b).2^0 = 6 \\ (a + 1.b).2^1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \end{cases}$
- Ta có $a_n = (6 - 2n).2^n \quad \forall n \geq 0$

d) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-2} & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 4 \end{cases}$

Giải

- Phương trình đặc trưng: $t^2 - 4 = 0$.
  - Có 2 nghiệm phân biệt $\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 2$.
- Công thức tổng quát $a_n = a.2^n + b.(-2)^n \quad \forall n \ge 0$
  - Ta có $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.2^0 + b.(-2)^0 = 0 \\ a.2^1 + b.(-2)^1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$
- Ta có $a_n = 2^n - (-2)^n \quad \forall n \ge 0$. Hay $\begin{cases} a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = 2^{2n+2} \end{cases} \quad \forall n = 0, ...$

e) $\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-2}}{4} \quad \forall n \ge 2 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 0 \end{cases}$

Giải

- Phương trình đặc trưng: $t^2 - \dfrac{1}{4} = 0$.
  - Có 2 nghiệm phân biệt $\alpha_1 = -\dfrac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$
- Công thức tổng quát $a_n = a.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + b\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \ge 0$
  - Ta có $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^0 + b.\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1 \\ a.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^1 + b.\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$
- Công thức tổng quát $a_n = \left(1 + (-1)^n\right).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n \ge 0$. Hay $\begin{cases} a_{2n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} \quad \forall n = 0, 1, ... \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$

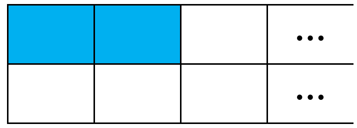
Bài 2: Lập công thức truy hồi cho S_n là số cách chia một hình chữ nhật kích thước 2 x n ra thành các hình chữ nhật con có cạnh song song với cạnh của hình chữ nhật đã cho và với kích thước là 1 x 2, 2 x 1, 2 x 2. Giải hệ thức thu được.

Giải

- Với $n = 1$. Ta có lưới ô vuông kích thước 2 x 1. Số cách phủ bằng hình chữ nhật kích thước 2 x 1 là $S_1 = 1$
- Với $n = 2$. Ta có lưới ô vuông kích thước 2 x 2.
  - Ta có thể phủ bằng hình chữ nhật kích thước 1 x 2. Số cách phủ là 1.
  - Ta có thể phủ bằng hình chữ nhật kích thước 2 x 1. Số cách phủ là 1.
  - Ta có thể phủ bằng hình chữ nhật kích thước 2 x 2. Số cách phủ là 1.
  - Do vậy, Số cách phủ trong trường hợp này là $S_2 = 3$

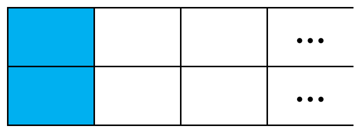
- Với $n > 2$. Phân tập các cách phủ cần đếm ra thành 3 tập:
  - Tập A – tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi hình chữ nhật kích thước 1 x 2.
    - Ví dụ

1 2 3 ...



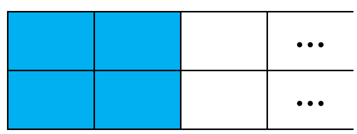
    - Còn lại $n-2$ ô cần phủ (Từ $3, 4, \ldots$). Ta được $|A| = S_{n-2}$.
  - Tập B – tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi hình chữ nhật kích thước 2 x 1.
    - Ví dụ

1 2 3 ...



    - Còn lại $n-1$ ô cần phủ (Từ $2, 3, \ldots$). Ta được $|B| = S_{n-1}$.
  - Tập C – tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi hình chữ nhật kích thước 2 x 2.
    - Ví dụ

1 2 3 ...



    - Còn lại $n-2$ ô cần phủ (Từ $3, 4, \ldots$). Ta được $|C| = S_{n-2}$.
  - Ta thấy ba tập A, B và C tạo thành phân hoạch của tập tất cả các cách phủ cần đếm.
- Theo nguyên lý cộng, ta có $S_n = |A| + |B| + |C| \quad \forall n \geq 3$. Hay $S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2} \quad \forall n \geq 3$.
  - Phương trình đặc trưng: $t^2 - t - 2 = 0$.
    - Có 2 nghiệm phân biệt $\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 2$.
  - Công thức tổng quát $S_n = a.(-1)^n + b.2^n \quad \forall n \geq 1$

    - Ta có $\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -a + 2b = 1 \\ S_2 = a + 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$
  - Công thức tổng quát $S_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3} \quad \forall n \geq 1$.

Bài 3: Lập công thức truy hồi để đếm F_n là số xâu nhị phân độ dài n không chứa ba số 0 liên tiếp. Từ đó tính F_n

Giải

- Với $n = 1$. Ta có 2 xâu nhị phân độ dài 1 không chứa 3 số 0 liền nhau là **0** và **1.** Do vậy $F_1 = 2$.
- Với $n = 2$. Ta có 4 xâu nhị phân độ dài 2 không chứa 3 số 0 liền nhau là **00, 01, 10, 11.** Do vậy $F_2 = 4$.
- Với $n = 3$. Ta có 7 xâu nhị phân độ dài 3 không chứa 3 số 0 liền nhau là: **001, 010, 011, 100, 101, 110 111.** Do vậy $F_3 = 7$
- Với $n > 3$. Phân tập các xâu nhị phân cần đếm ra thành 3 tập:
  - Tập A – Tập các xâu nhị phân cần đếm chứa 1 ở vị trí đầu tiên.
    - Ví dụ

1	…	…	…

    - Do mỗi xâu nhị phân trong A chứa 1 ở vị trí đầu tiên nên $n - 1$ phần tử còn lại sẽ tạo thành một xâu nhị phân cần đếm độ dài $n - 1$. Ta được $|A| = F_{n-1}$.
  - Tập B – Tập các xâu nhị phân cần đếm chứa 00 ở vị trí đầu tiên.
    - Ví dụ

0	**0**	**1**	…

    - Do mỗi chỉnh hợp trong B chứa 00 ở vị trí đầu tiên nên vị trí thứ ba của nó phải là số 1. Còn lại $n - 3$ phần tử sẽ tạo thành một xâu nhị phân cần đếm độ dài $n - 3$. Ta được $|B| = f_{n-3}$.
  - Tập C – Tập các xâu nhị phân cần đếm chứa 01 ở vị trí đầu tiên.
    - Ví dụ

0	**1**	…	…

    - Do mỗi xâu nhị phân trong C chứa 01 ở vị trí đầu tiên nên $n - 2$ phần tử sẽ tạo thành một xâu nhị phân cần đếm độ dài $n - 2$. Ta được $|C| = F_{n-2}$.
  - Ta thấy các tập A, B, C tạo thành phân hoạch của tập tất cả các xâu nhị phân cần đếm.
- Theo nguyên lý cộng, Ta có $F_n = |A| + |B| + |C| \quad \forall n \geq 4$. Hay $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} \quad \forall n \geq 4$.
  - Ta thấy

$$\begin{aligned}
F_{10} &= F_9 + F_8 + F_7 \\
&= F_8 + F_7 + F_6 + F_8 + F_7 = 2F_8 + 2F_7 + F_6 \\
&= 2(F_7 + F_6 + F_5) + 2F_7 + F_6 = 4F_7 + 3F_6 + 2F_5 \\
&= 4(F_6 + F_5 + F_4) + 3F_6 + 2F_5 = 7F_6 + 6F_5 + 4F_4 \\
&= 7(F_5 + F_4 + F_3) + 6F_5 + 4F_4 = 13F_5 + 11F_4 + 7F_3 \\
&= 13(F_4 + F_3 + F_2) + 11F_4 + 7F_3 = 24F_4 + 20F_3 + 13F_2 \\
&= 20(F_3 + F_2 + F_1) + 20F_3 + 13F_2 = 40F_3 + 33F_2 + 20F_1 \\
&= 40.7 + 33.4 + 20.2 \\
&= 452
\end{aligned}$$

Bài 4: Lập công thức truy hồi để đếm Q_n là số chỉnh hợp lặp chập n từ ba chữ số 0, 1, 2 không chứa hoặc là hai số 0 liên tiếp hoặc là hai số 1 liên tiếp. Từ đó tính Q_6. Giải hệ thức thu được.

Giải

- Gọi Q_n là số chỉnh hợp lặp chập n từ ba chữ số $0, 1, 2$ không chứa hoặc là xâu 00, hoặc là xâu 11.
- Với $n = 1$, Ta có các chỉnh hợp lặp chập 1 của 3 thỏa mãn là: $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$. Do vậy $Q_1 = 3$.
- Với $n = 2$. Ta có các chỉnh hợp lặp chập 2 của 3 thỏa mãn là: $\mathbf{01}, \mathbf{02}, \mathbf{10}, \mathbf{12}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{22}$. Do vậy $Q_2 = 7$
- Với $n > 2$. Phân tập các chỉnh hợp lặp cần đếm ra thành 3 tập
  - Tập A – Tập các chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 2.
    - Ví dụ

2	…	…	…

    - Do mỗi chỉnh hợp lặp trong A chứa 2 ở vị trí đầu tiên nên $n - 1$ phần tử còn lại sẽ tạo thành một chỉnh hợp lặp cần đếm độ dài $n - 1$. Ta được $|A| = Q_{n-1}$.
  - Tập B – Tập các chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 0.
    - Nếu vị trí thứ hai trong chỉnh hợp lặp là 2. Còn lại $n - 2$ phần tử sẽ tạo thành chỉnh hợp lặp cần đếm độ dài $n - 2$. Ta được Q_{n-2}.
      - Ví dụ

0	**2**	…	…

    - Nếu vị trí thứ hai trong chỉnh hợp lặp là 1 thì ta lại tiếp tục xét như vậy cho đến khi đạt chỉnh hợp lặp ngắn nhất có độ dài là 1.
      - Ví dụ

0	**1**	…	…

  - Tập C – Tập các chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 1.
    - Do vai trò của 0 và 1 là như nhau nên Số chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 0 sé bằng số chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 1.
  - Ta thấy các tập A, B, C tạo thành phân hoạch của tập tất cả các chỉnh hợp lặp cần đếm.
- Theo nguyên lý cộng, ta có $Q_n = |A| + |B| + |C| \quad \forall n \geq 3$.
  - Ta thấy $Q_n = Q_{n-1} + 2(Q_{n-2} + Q_{n-3} + Q_{n-4} + \ldots + 1) \quad \forall n \geq 3$
    - Ta thấy $Q_{n-1} = Q_{n-2} + 2(Q_{n-3} + Q_{n-4} + \ldots + 1)$
    - Trừ 2 vế cho nhau ta có $Q_n - Q_{n-1} = Q_{n-1} - Q_{n-2} + 2Q_{n-2} \Rightarrow Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$
  - Phương trình đặc trưng: $t^2 - 2t - 1 = 0$.
    - Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad \alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$
  - Công thức tổng quát $Q_n = a(1-\sqrt{2})^n + b(1+\sqrt{2})^n \quad \forall n \geq 1$
    - $\begin{cases} Q_1 = 3 \\ Q_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = a(1-\sqrt{2}) + b(1+\sqrt{2}) = 3 \\ Q_2 = a(1-\sqrt{2})^2 + b(1+\sqrt{2})^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1-\sqrt{2}) + b(1+\sqrt{2}) = 3 \\ a.(1-\sqrt{2})\left[(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})\right] = 3.(1+\sqrt{2}) - 7 \end{cases}$
    - Rút gọn $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \quad b = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

- Công thức tổng quát: $Q_n = \frac{1}{2}.\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}.\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} \quad \forall n \ge 1$

Bài 5: Xét ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh rằng $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$. Trong đó F_n là số hạng thứ n của dãy số Fibonaci.

Giải

- Dãy số Fibonaci: $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & \forall n \ge 2 \\ F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \end{cases}$
- Với $n = 1$. Ta có $A = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Giả sử công thức đúng với $n = k$ với mọi $k \ge 2$. Ta có $A^k = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}$
- Ta đi chứng minh công thức cũng đúng với $n = k + 1$
  - Ta có $A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & F_{k-1}+F_k \\ F_{k+1} & F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_{k+2} \end{pmatrix}$ luôn đúng.
  - Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

b) Tính $\det\left(A^n\right)$. Từ đó, suy ra công thức $F_{n-1}F_n - \left(F_n\right)^2 = (-1)^n$.

Giải

- Ta có $\det\left(A^n\right) = \begin{vmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} = F_{n-1}.F_{n+1} - \left(F_n\right)^2$
- Mặt khác $\det(AB) = \det(A).\det(B)$. Do vậy $\det\left(A^n\right) = \left(\det(A)\right)^n$
- Ta có $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Do vậy $\det\left(A^n\right) = (-1)^n$.
- Đồng nhất hệ số ta có điều phải chứng minh.

Bài 6: Tính số mất thứ tự D_n

Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi số cách để xảy ra không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu ? Số cách bỏ thư như trên được gọi là số mất thứ tự.

Giải

- Đánh số thư và phong bì từ 1 đến n (thư i gửi đúng địa chỉ nếu bỏ vào phong bì i). Một cách bỏ thư được đồng nhất với hoán vị $(a_1, ..., a_n)$ của tập $\{1, 2, ..., n\}$

- Một mất thứ tự được định nghĩa là một hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sao cho $a_i \neq i \quad \forall i$.
- Thành phần a_1 có thể nhận $n-1$ giá trị từ 2 đến n, ngoại trừ giá trị 1.
- Với mỗi giá trị k ($k \neq 1$) của a_1, ta xét hai trường hợp
  - Nếu $a_k = 1$, khi đó các thành phần còn lại được xác định như một mất thứ tự của $n-2$ phần tử.
    - Ví dụ:

$a_1 = k$	a_2	...	$a_k = 1$	...	a_n

    - Số các mất thứ tự thuộc loại này bằng D_{n-2}.
  - Nếu $a_k \neq 1$, khi đó các thành phần từ 2 đến n được xác định như một mất thứ tự của $n-1$ phần tử. (Coi giá trị 1 như là giá trị k).
    - Ví dụ:

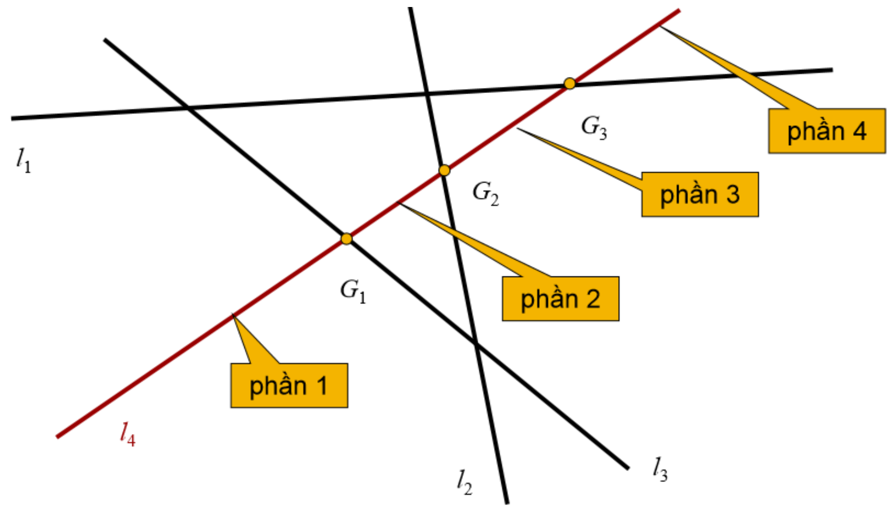
$a_1 = k$	a_2	...	$a_k \neq 1$	...	a_n

    - Số các mất thứ tự thuộc loại này bằng D_{n-1}.
- Do a_1 có thể nhận được $n-1$ giá trị nên Ta có công thức đệ quy: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad \forall n \geq 3$
  - Ta có $D_1 = 0$.
    - Có 1 thư và 1 phong bì nên luôn chuyển đúng thư cho phong bì tương ứng.
  - Ta có $D_2 = 1$.
    - Một bộ mất thứ tự thỏa mãn là $(2,1)$
  - Để công thức đệ quy đúng với $n = 2$, ta công nhận $D_0 = 1$
  - Ta thấy $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \Rightarrow D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$
    - Đặt $V_n = D_n - nD_{n-1}$.
    - Ta có $V_n = -V_{n-1} = ... = (-1)^{n-1} V_1 = (-1)^n$ (Do $V_1 = D_1 - 1.D_0 = 0 - 1.0 = -1$)
  - Ta có $V_n = D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$ hay $\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$
    - Ta có: $\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} + ... + \frac{D_1}{1!} - \frac{D_0}{0!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + ... + \frac{(-1)^1}{1!}$
    - Rút gọn được $\frac{D_n}{n!} = \frac{D_0}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!}$ hay $\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!}$
  - Công thức tổng quát $D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \quad \forall n \geq 0$

Bài 7: Trên mặt phẳng, kẻ n đường thẳng sao cho không có 2 đường chéo nào song song với 3 đường nào đồng quy. Hỏ mặt phẳng được chia thành mấy phần ?

Giải

- Ví dụ



- Gọi số phần mặt phẳng được chia bởi n đường thẳng là S_n.
  - Ta thấy $S_0 = 1$ (Một mặt phẳng thì có 1 phần duy nhất).
  - Ta thấy $S_1 = 2$ (Một đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 phần).
- Giả sử ta đã kẻ được $n-1$ đường thẳng, khi đó mặt phẳng được chia ra thành S_{n-1} phần.
- Kẻ đường thẳng thứ n.
  - Đường thẳng này cắt $n-1$ đường thẳng đã vẽ tại $n-1$ giao điểm.
  - Các giao điểm này chia đường thẳng thứ n ra làm n phần.
    - Mỗi phần như vậy chia một phần nào đó sinh bởi $n-1$ đường thẳng vẽ trước đó ra làm hai phần.
  - Sau khi vẽ đường thẳng thứ n, số phần tăng them là n.
- Công thức đệ quy $S_n = S_{n-1} + n \quad \forall n \geq 2$
  - Phương trình đặc trưng: $t - 1 = 0$
    - Có nghiệm $t = 1$.
  - Công thức tổng quát $S_n = a.1^n + bn^2 + cn + d \quad \forall n \geq 0$. Hay $S_n = pn^2 + qn + r \quad \forall n \geq 0$
    - Ta có $\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow S_2 = S_1 + 2 = 4$
    - Ta có $\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_1 = 2 \\ S_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p.0^2 + q.0 + r = 1 \\ p.1^2 + q.1 + r = 2 \\ p.2^2 + q.2 + r = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = q = \dfrac{1}{2} \\ r = 1 \end{cases}$
  - Công thức tổng quát: $S_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2} \quad \forall n \geq 0$

Bài 8: Tìm hệ số tổ hợp C_n^k

Giải

- Gọi số cách lấy ra k phần tử từ tập gồm n phần tử là C_n^k.

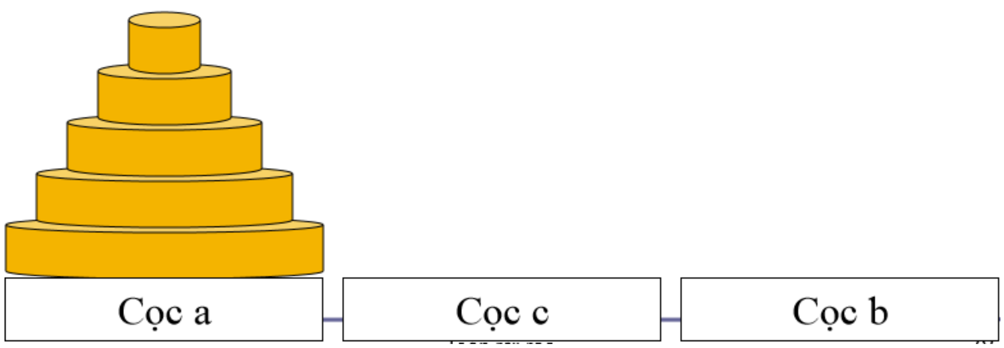
- Chọn một **phần tử cố định x** trong n phần tử đang xét.
- Xét số cách chọn tập con có k phần tử của tập n phần tử thành 2 lớp: có chứa x và không chứa x.
- Nếu tập con có chứa x.
  - Bổ sung thêm $k-1$ phần tử tập gồm $n-1$ phần tử còn lại.
  - Số cách chọn tập có chứa x là C_{n-1}^{k-1}
- Nếu tập con không chứa x.
  - Bổ sung thêm k phần tử từ tập gồm $n-1$ phần tử còn lại.
  - Số cách chọn tập không chứa x là C_{n-1}^{k}
- Theo nguyên lý cộng, Ta có công thức đệ quy $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$
  - Trong đó $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Bài 9: Bài toán Tháp Hà Nội – Hanoi Tower

Có 3 cái cọc a, b, c. Trên cọc a có một chồng gồm n cái đĩa đường kính giảm dần từ dưới lên trên. Cần phải di chuyển chồng đĩa từ cọc a sang cọc c tuân thủ quy tắc: "Mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa và chỉ được xếp đĩa có đường kính nhỏ hơn lên trên đĩa có đường kính lớn hơn. Trong quá trình chuyển được phép dung cọc b làm cọc trung gian" Tính số lần di chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện để di chuyển toàn bộ đĩa từ cọc a sang cọc c ?

<u>Giải</u>

- Ví dụ



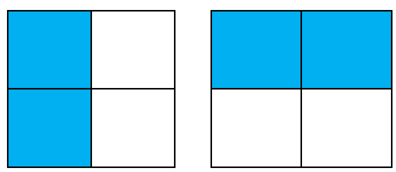
- Gọi h_n là số lần di chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện để giải xong bài toán Tháp Hà Nội. Với $n \geq 1$.
- Ta thấy $h_1 = 1$.
- Xét cách chuyển $n \geq 2$ đĩa
  - Chuyển $n-1$ đĩa phía trên từ cọc a sang cọc b sử dụng cọc c làm trung gian.
    - Theo giả thuyết quy nạp, bước này cần h_{n-1} lần.
  - Chuyển 1 đĩa lớn nhất từ cọc a sang cọc c.
    - Bước này cần 1 lần chuyển.
  - Chuyển $n-1$ đĩa từ cọc b sang cọc c. Sử dụng cọc a làm trung gian.
    - Theo giả thuyết quy nạp, bước này cần h_{n-1} lần.

- Theo nguyên lý cộng, ta có công thức đệ quy: $h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 2$.
  - Phương trình đặc trưng: $t - 2 = 0$
    - Có nghiệm $t = 2$.
  - Công thức tổng quát: $h_n = a.2^n + bn + c \quad \forall n \geq 1$.
    - Ta có $h_2 = 2h_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3$.
    - Ta có $h_3 = 2h_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7$.
    - Ta có $\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 3 \\ h_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.2^1 + b.1 + c = 1 \\ a.2^2 + b.2 + c = 3 \\ a.2^3 + b.3 + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$
  - Công thức tổng quát: $h_n = 2^n - 1 \quad \forall n \geq 1$

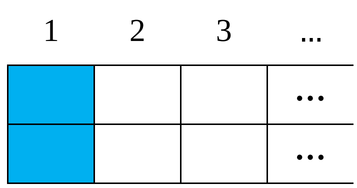
Bài 10: Xây dựng công thức đệ quy cho Q_n là số lượng cách phủ lưới ô vuông kích thước 2 x n bằng các quân bài Domino ?

<u>Giải</u>

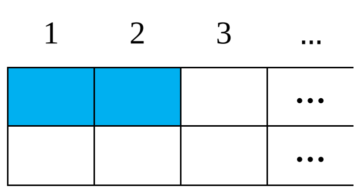
- Quân bài Domino: là quân bài có kích thước 2 x 1 khi đặt dọc, và kích thước 1 x 2 khi nằm ngang.



- Với $n = 1$, Ta có lưới ô vuông kích thước 2 x 1. Số cách phủ là 1.Do vậy $Q_1 = 1$.
- Với $n = 2$. Ta có lưới ô vuông kích thước 2 x 2. Số cách phủ là 2. (Ví dụ). Do vậy $Q_2 = 2$.
- Xét $n > 2$. Phân tập các cách phủ cần đếm ra thành 2 tập:
  - Tập A – tập các cách phủ trong đó **ô ở góc trên trái** được phủ bởi **quân bài nằm đứng**.
    - Ví dụ



    - Còn lại $n - 1$ ô cần phủ (Từ 2, 3, ...). Ta được $|A| = Q_{n-1}$.
  - Tập B – tập các cách phủ trong đó **ô ở góc trên trái** được phủ bởi **quân bài nằm ngang**.
    - Ví dụ



    - Còn lại $n - 2$ ô cần phủ (Từ 3, 4, ...). Ta được $|B| = Q_{n-2}$.

- Ta thấy A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các cách phủ cần đếm.

- Theo nguyên lý cộng ta có $Q_n = |A| + |B|$. Hay $Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad \forall n \geq 3$
  - Phương trình đặc trưng: $t^2 - t - 1 = 0$.
    - Có hai nghiệm phân biệt $\alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
  - Công thức tổng quát: $Q_n = a\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1$
    - Có $\begin{cases} Q_1 = 1 \\ Q_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = a.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ Q_2 = a.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(1-\sqrt{5}\right) + b\left(1+\sqrt{5}\right) = 2 \\ a.\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 2 \end{cases}$
    - Rút gọn được $a = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$.
  - Công thức tổng quát: $Q_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n \geq 1$

Bài 11: Xây dựng công thức đệ quy cho f_n là số chỉnh hợp lặp chập n từ hai phần tử 0, 1 (cũng chính là xâu nhị phân độ dài n) không chứa hai số 0 liền nhau.

Giải

- Với $n = 1$.
  - Ta có hai xâu nhị phân độ dài 1 không chứa hai số 0 liền nhau là **0** và **1**. Do vậy $f_1 = 2$.
- Với $n = 2$
  - Ta có 3 xâu nhị phân độ dài 2 không chứa hai số 0 liền nhau là: **01, 10, 11**. Do vậy $f_2 = 3$.
- Với $n > 2$. Phân tập các chỉnh hợp cần đếm ra thành 2 tập:
  - Tập A – tập các chỉnh hợp cần đếm chứa **1 ở vị trí đầu tiên**.
    - Ví dụ

1	**…**	**…**	**…**

    - Do mỗi chỉnh hợp trong A chứa 1 ở vị trí đầu tiên nên $n-1$ phần tử còn lại sẽ tạo thành một chỉnh hợp cần đếm độ dài $n-1$. Ta được $|A| = f_{n-1}$.
  - Tập B – tập các chỉnh hợp cần đếm chứa **0 ở vị trí đầu tiên.**
    - Ví dụ

0	**1**	**…**	**…**

    - Do mỗi chỉnh hợp trong B chứa 0 ở vị trí đầu tiên nên vị trí thứ hai của nó phải là số 1. Còn lại $n-2$ phần tử sẽ tạo thành một chỉnh hợp cần đếm độ dài $n-2$. Ta được $|B| = f_{n-2}$.

- Ta thấy A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các chỉnh hợp cần đếm.

- Theo nguyên lý cộng, ta có $f_n = |A| + |B|$. Hay $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 3$
  - Phương trình đặc trưng: $t^2 - t - 1 = 0$
    - Có hai nghiệm phân biệt $\alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
  - Công thức tổng quát: $f_n = a\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1$
    - Có $\begin{cases} f_1 = 2 \\ f_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = a.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \\ f_2 = a.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(1-\sqrt{5}\right) + b\left(1+\sqrt{5}\right) = 4 \\ a.\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 + \sqrt{5} - 3 \end{cases}$
    - Rút gọn được $a = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}, \quad b = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}$.
  - Công thức tổng quát: $Q_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \quad \forall n \geq 1$

V. HÀM SINH

Một vài chuỗi hội tụ

a) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \forall |x|<1$

b) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad \forall |x|<1$

Bài 1: Viết công thức dưới dạng giải tích cho hàm sinh của các dãy số sau:

a) $a_n=3^n, \quad n=0,1,...$

Giải

- Hàm sinh là $f(x)=1+3x+3^2x^2+...=1+(3x)+(3x)^2+...=\frac{1}{1-3x}$

b) $\{a_0,a_1,a_2,a_3,...\}=\{0,1,0,1,...\}$

Giải

- Hàm sinh là $f(x)=x+x^3+x^5+...=x(1+x^2+x^4+...)=x\left(1+x^2+(x^2)^2+...\right)=x.\frac{1}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}$

Bài 2: Tìm công thức cho Số hạng tổng quát a_n của dãy số $\{a_n\}$ có hàm sinh là

a) $G(x)=\frac{1}{1-2x}$

Giải

- Ta có $\frac{1}{1-2x}=1+2x+(2x)^2+...=1+2x+4x^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$
- Từ đó có $a_n=2^n \quad \forall n=0,1,2,...$

b) $G(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

Giải

- Ta có $\frac{1}{(1-x)^2}=(1+x+x^2+...)^2=(1+x+x^2+...)(1+x+x^2+...)=1+2x+3x^2+4x^3+...$
- Từ thấy $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2-1}^{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$
- Từ đó có $a_n=n+1 \quad \forall n=0,1,2,...$

c) $G(x)=\dfrac{1}{1+x-2x^2}$

Giải

- Ta có $\dfrac{1}{1+x-2x^2}=\dfrac{1}{(1-x)(1+2x)}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-x}$
- Ta thấy $G(x)=\dfrac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n+\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=}^{\infty}\dfrac{(-1)^n.2^{n+1}+1}{3}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$
- Từ đó có $a_n=\dfrac{1+(-1)^n2^{n+1}}{3}\quad\forall n=0,1,2,\ldots$

Bài 3: Sử dụng hàm sinh để tìm công thức dưới dạng hiện cho dãy số cho bởi công thức đệ quy sau đây:

a) $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2 \\ a_0=-3 \end{cases}$

Giải

- Gọi $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ là hàm sinh của dãy số.
- Ta có $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\Rightarrow xf(x)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\ldots$
- Từ đó có $f(x)[1-x]=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\ldots=-3+2x+2x^2+\ldots.$
  - Thay $\begin{cases} a_0=-3 \\ a_n-a_{n-1}=2\quad\forall n\ge 1 \end{cases}$
- Ta có $(1-x)f(x)+5=2(1+x+x^2+\ldots)\Rightarrow(1-x)f(x)+5=\dfrac{2}{1-x}$
- Từ đó có $f(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}-\dfrac{5}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-5\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2-5)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n-3)x^n$
- Vậy $a_n=2n-3\quad\forall n\ge 0$

b) $\begin{cases} 2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\quad\forall n\ge 2 \\ a_0=0,\quad a_1=1 \end{cases}$

Giải

- Gọi $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ là hàm sinh của dãy số.
- Ta có $f(x)=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=x+\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^n=x+\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n+\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$

- Có $f(x) = x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = x + \frac{1}{2}x\sum_{n=}^{\infty} a_n x^n + \frac{1}{2}x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \frac{x}{2}\left(f(x) - a_0\right) + \frac{x^2}{2} f(x)$
- Từ đó được $f(x) = x + \frac{x(x+1)}{2} f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{-2x}{x^2 + x - 2} = -\frac{4}{3}\frac{1}{x+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}$
- Có $f(x) = -\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-x} = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=}^{\infty}\frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]x^n$
- Vậy $a_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad \forall n \geq 0$

c) $\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 2.3^n & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \end{cases}$

Giải

- Gọi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là hàm sinh của dãy số.
- Ta có $f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2.3^{n-2}\right)x^n$
  - Có $f(x) = 1 + 2x + 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + 2.\sum_{n=2}^{\infty} 3^{n-2}x^n$
  - Có $f(x) = 1 + 2x + 3x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} 3^{n-2}x^{n-2}$
  - Thay vào được $f(x) = 1 + 2x + 3x\left(f(x) - a_0\right) - 2x^2 f(x) + 2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$
  - Hay $f(x) = 1 + 2x - 3x + \left(3x - 2x^2\right) f(x) + \frac{2x^2}{1-3x}$
- Từ đó được $f(x) = \frac{5x^2 - 4x + 1}{(x-1)(2x-1)(1-3x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$
- Rút gọn được $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - 2^n + 3^n\right)x^n$
- Vậy $a_n = 3^n - 2^n + 1 \quad \forall n \geq 0$

Chapter III – Bài Toán Tồn Tại (Existence)

Bài 1: Trên mặt phẳng cho $n \geq 6$ điểm, khoảng cách giữa các cặp điểm là khác nhau từng đôi. Mỗi điểm được nối với điểm gần nó nhất. Chứng minh rằng mỗi điểm được nối với không quá 5 điểm.

Giải

-

Bài 2: Một trung tâm máy tính có 151 máy vi tính. Các máy của trung tâm được đặt tên bởi một số nguyên dương trong khoảng từ 1 đến 300 sao cho không có hai máy nào được đặt tên trùng nhau. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 máy có tên là các số nguyên liên tiếp.

Giải

-

Bài 3: Các học sinh của một lớp học gồm 45 nam và 35 $n\tilde{u}$ được xếp ra thành một hàng ngang. Chứng minh rằng, trong hàng đó luôn tìm được hai học sinh nam mà ở giữa họ có 8 người đứng xen vào.

Giải

-

Bài 4: Có 12 cầu thủ bóng rổ đeo áo với số từ 1 đến 12 đứng tập trung thành mọt vòng tròn giữa sân. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 người liên tiếp có tổng các số trên áo là lớn hơn hoặc bằng 20.

Giải

-

Bài 5: Chứng minh rằng trong số 10 người bất kỳ bào giờ cũng tìm được hoặc là hai người có tổng số tuổi là chia hết cho 16, hoặc là hai người mà hiệu số tuổi của họ là chia hết cho 16.

Giải

-

Bài 6: Cần có ít nhất bao nhiêu bộ có thứ tự gồm 2 số nguyên (a, b) sao cho chắc chắn tìm được trong số đó hai bộ (c, d) và (e, f) sao cho $c - e$ và $d - f$ là các số có chữ số tận cùng bằng 0 ?

Giải

-

Bài 7: 17 nhà bác học đôi một viết thư trao đổi cho nhau về 3 chủ đề, mỗi cặp chỉ trao đổi với nhau về 1 chủ đề. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 nhà bác học đôi một viết thư trao đổi cho nhau về cùng một chủ đề.

Giải

-

Bài 8: Trong không gian cho 9 điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng trong số 9 điểm đã cho luôn tìm được 2 điểm sao cho đoạn thẳng nối chúng đi qua điểm có tọa độ nguyên

<u>Giải</u>

-

Bài 9: Chứng minh rằng trong số 10 người bất kỳ luôn tìm được hoặc là 4 người đôi một quen nhau và 3 người đôi một không quen nhau hoặc là 4 người đôi một không quen nhau và 4 người đôi một quen nhau.

<u>Giải</u>

-

Chapter IV – Bài Toán Liệt Kê Tổ Hợp (Enumeration)

Chapter V – Bài Toán Tối Ưu Tổ Hợp