Билеты по матану

...

26 декабря 2020 г.

Содержание

1. Интеграл Лебега

1.1. Билет 40: Теорема об интеграле от функции распределения. Следствия.

Мы можем менять порядок интегрирования, только если есть суммируемость

Пример.

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad g(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx = -\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{1+y^2}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+y^2}\,dy = \frac{2}{1+y^2}\Big|_{-1}^{1} = \pi$$

Если интегрировать в другом пордяке, то мы получим $-\pi$

$$\int_{-1}^{1} g(x,y)\,dx = -\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x,y)\,dx\,dy = 0 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x,y)\,dy\,dx$$

при этом g не суммируема. Для проверки этого можно проинтегрировать модуль от неё:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left|\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right| dxdy = 4\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dxdy =$$

$$4\int_{0}^{1} -\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = 4\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy = +\infty$$

Теорема 1.1.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с σ-конечной мерой.

$f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ измерима

Тогда $\int\limits_X |f|\;d\mu = \int\limits_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geqslant t\}\,d\lambda_1(t)$

Доказательство.

$\int\limits_X |f|\;d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} \quad m = \mu\times\lambda_1 \quad \mathcal{P}_{|f|}$– подграфик $|f|$

$m\mathcal{P}_{|f|} = \int\limits_{X\times[0,+\infty)} \mathbf{1}_{\mathcal{P}}\,dm = \int\limits_{[0,+\infty)}\int\limits_X \mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x,t)\,d\mu(x)\,d\lambda_1(t) =$

Когда $\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x,t) = 1$ при фиксированном t? $\Leftrightarrow (x,t)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow |f(x)| \geqslant t$

$= \int\limits_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geqslant t\}\,d\lambda_1(t)$

$\square$

Следствие. $\int\limits_X |f|\;d\mu = \int\limits_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\}\,d\lambda_1(t)$

Доказательство.

$g(t) = \mu X\{|f| \geqslant t\}$ монотонно убывает $\Rightarrow$ у нее нбчс мн-во точек разрыва. Простое объяснение: каждый разрыв прыгнет через рациональную точку, функция убывает, так что через каждую точку не более раза. А рациональных не более чем счётно. Объяснение Храброва: Почему: каждый разрыв монотонной функции выглядит как скачок (в каждой точке монотонной функции есть предел слева и справа, и это как скачок на разницу между пределами), притом сумма всех скачков на отрезке не превосходит разницу граничных значений функции на отезке. Тогда скачков на 1 конечно (должны все вместе быть не больше конечной разницы между границами), на 1/2 конечно итп, всего в вместе счётно. Бьём прямую (ну или како там у нас множество) на счётное число отрезков и получаем счётное число разрывов вместе.

$X\{|f| > t\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geqslant t + 1/n\}$

$\mu X\{|f| > t\} = \lim X\{|f| \geqslant t + 1/n\} = \lim g(t + 1/n) = \lim \lim\limits_{s \to t^+} g(s) = g(t)$ при почти всех t. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ интегралы совпадают.

$\square$

Следствие. $\int\limits_X |f|^p \, d\mu = \int\limits_0^{+\infty} pt^{p-1} \mu X\{|f| \geqslant t\} \, d\lambda_1(t)$ при $p > 0$

Доказательство.

$$\int\limits_X |f|^p \, d\mu = \int\limits_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geqslant t\} \, d\lambda_1(t) = \int\limits_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geqslant t^{1/p}\} \, d\lambda_1(t) = \int\limits_0^{+\infty} ps^{p-1} \mu X\{|f| \geqslant s\} \, d\lambda_1(s)$$

$\square$

Замечание. $\mu X\{|f| \leqslant t\}$ – функция распределения f.

1.2. Билет 41: Диффеоморфизм. Лемма о «расщеплении» диффеоморфизма. Теорема Линделёфа.

***Определение* 1.1.**

Ω_1 и Ω_2 – открытые подмножества в $\mathbb{R}^m$

$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ – диффеоморфизм, если Φ – биекция, $\Phi \in C^1(\Omega_1)$ и $\Phi^{-1} \in C^1\Omega_2$

Теорема 1.2 (Линделефа)**.**

Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^m$

Из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать нбсч подпокрытие

Доказательство.

$a \in \Omega$ она покрыта каким-то открытым $U \Rightarrow \exists r_a > 0$, т.ч. $B_{r_a}(a) \in U$. Подправим этот шарик так, что его центр будет с рац. координатами и его радиус будет рац. Назовем его B_a, $B_a \subset U$ Различных шариков нбчс.

$\square$

Лемма.

$\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм $\quad \Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$

$a \in \Omega$, тогда существует окрестность U_a точки a, тч

$\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2$, где $\Phi_2 : U_a \to \Phi_2(U_a)$ и $\Phi_1 : \Phi_2(U_a) \to \Phi(U_a)$ – диффеоморфизмы

причем Φ_1 оставляет на месте $0 < m < n$ координат, а Φ_2 оставляет на месте $n - m$ координат

Доказательство.

$x, u \in \mathbb{R}^m, y, v \in R^{n-m} \quad \Phi(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$

$\Phi_1(u, v) = (u, f(u, v))$ и $\Phi_2(u, v) = (g(u, v), v)$

$\Phi_1 \circ \Phi_2(x, y) = \Phi_1(g(x, y), y) = (g(x, y), f(g(x, y), y)) = \Phi(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(x, y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x, y) = \varphi(x, y)$ и $f(\varphi(x, y), y) = \psi(x, y) \Rightarrow f(u, v) = \psi(\Phi_2^{-1}(u, v)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нужна локальная обратимость Φ_2. Она будет, если $\det \Phi_2'(a) \neq 0$

$\det \Phi_2' = \begin{pmatrix} g_u' & g_v' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det g_u' = \det \varphi_u'$

Т.е. нам нужен ненулевой минор $m \times m$ матрицы Φ', который $\neq 0$.

Но если все миноры $= 0$, то $\det \Phi' = 0$, но это не так.

Мы сейчас могли переставить как-то столбцы и строчки, пока искали ненулевой минор.

□

Следствие.

В условии леммы найдется такая U_a, что

$\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \ldots \circ \Phi_n$, где Φ_k – диффеоморфизмы и они оставляют на месте все координаты, кроме одной.

Доказательство. Индукция □

1.3. Билет 42: Теорема о замене переменной в интеграле Лебега. Частные случаи. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Теорема 1.3 (ф-ла замены переменной в интеграле по мере Лебега)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм,

$f : \tilde{\Omega} \to \bar{\mathbb{R}} \quad f \geqslant 0$ измерима

Тогда $\int\limits_{\tilde{\Omega}} f\,d\lambda_m = \int\limits_{\Omega} f(\Phi(x))\,|J_\Phi(x)|\;d\lambda_m(x)$

Аналогичное равенство есть для ф-и f, суммируемой на $\tilde{\Omega}$

J_Φ – якобиан отображения Φ – определитель матрицы Якоби

$$J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Возможно, нужно сказать замечание из следующего билета (что если есть изменение меры, то есть и замена переменной).

Замечание Важные частные случаи.

1. Φ – сдвиг на вектор a

   $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f\,d\lambda_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x + a)\,d\lambda_m$

2. Линейна замена $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – обратимое линейное отображение

   $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f\,d\lambda_m = |\det L| \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(L(x))\,d\lambda_m$

матрица Якоби и матрица линейного отображения совпадают

3. Гомотетия $c \neq 0$ $c \in \mathbb{R}$ $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f\, d\lambda_m = |c^m| \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(cx)\, d\lambda_m$

Пример. Полярные координаты

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

${\mathbb{R}^2}_x$ – образ $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$

Можем рассматривать множества $\mathbb{R}^2$ и $[0, +\infty) \times [0, 2\pi]$, тк мы добавили множество нулевой меры.

$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det\Phi' = r$

$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d\lambda_2(x, y) = \int\limits_{[0,\infty)} \int\limits_{[0,2\pi]} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\lambda_2(\varphi, r)$

Подставим $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x, y) = \int\limits_{[0,\infty)} \int\limits_{[0,2\pi]} re^{-r^2}\, d\lambda_2(\varphi, r) = 2\pi \int\limits_0^\infty re^{-r^2}\, dr = \pi \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \pi$

$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \right)^2 \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

1.4. Билет 43: Теорема об изменении меры множества при диффеоморфизме.

Теорема 1.4.

$\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ диффеоморфизм, $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримо

Тогда $\lambda\Phi(A) = \int\limits_{\Phi(A)} \mathbf{1}\, d\lambda_n = \int\limits_A |J_\Phi|\, d\lambda_n$

Замечание.

Если для конкретного Φ д-на эта теорема, то для этого же Φ есть формула замены переменной.

$\mu A := \int\limits_A |J_\Phi|\, d\lambda_n$ – мера с плотностью $|J_\Phi|$ относительно меры Лебега

$\int\limits_\Omega f \circ \Phi\, d\mu = \int\limits_\Omega f \circ \Phi\, |J_\Phi|\, d\lambda_m$ но $\mu A = \lambda\Phi(A)$

$\int\limits_{\tilde{\Omega}} f\, d\lambda = \int\limits_\Omega f \circ \Phi\, d\mu$ верно на $\mathbf{1}_\mathcal{B}$ $\lambda\mathcal{B} = \int\limits_\Omega \mathbf{1}_\mathcal{B} \circ \Phi\, d\mu = \mu\Phi^{-1}(\mathcal{B}) = \lambda\mathcal{B}$

Для индикаторов верно $\Rightarrow$ для линейных верно $\Rightarrow$ по т. Беппо Леви верно всегда.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\Omega = \bigcup U_\alpha$ U_α – открытые и для каждого U_α теория д-на. Тогда она доказана для Ω. Выберем счетное подпокрытие $\bigcup U_\alpha$

$A = \bigsqcup A_n \quad A_n = A \cap (U_n / \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} U_k) \quad A_n \subset U_n \Rightarrow$ для A_n теория верна.

$\lambda\Phi(A) = \sum \lambda\Phi(A_n) = \sum \int\limits_{A_n} |J_\Phi|\, d\lambda_n = \int\limits_A |J_\Phi|\, d\lambda_n$

Шаг 2. Если теория д-на для диффеоморфизмов Φ и Ψ, то она доказана для $\Phi \circ \Psi$

$$\lambda(\Phi(\Psi(A))) = \int\limits_{\Psi(A)} |J_\Phi| \, d\lambda = \int\limits_A |J_\Phi \circ \Psi| \, |J_\Psi| \, d\lambda = \int\limits_A |J_{\Phi\circ\Psi}| \, d\lambda$$

$$\det(\Phi' \circ \Psi) \det \Psi' = \det(\Phi' \circ \Psi \cdot \Psi') = \det(\Phi \circ \Psi)' = J_{\Phi\circ\Psi}$$

Шаг 3. $n = 1$ Надо д-ть, что $\int\limits_{\varphi(A)} 1 \, d\lambda_1 = \int\limits_A |\varphi'| \, d\lambda_1 \quad \varphi$:интервал$\to \mathbb{R}$

Знаем эту формулу для $A = [a, b]$. Это ф-ла замены переменной в одномерном $\int$.

$$\int\limits_{\varphi[a,b)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\varphi[a,b-1/n]} 1 \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b-1/n]} |\varphi'| \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b)} |\varphi'| \, d\lambda$$

К пределу можем перейти, тк у нас возрастающее множество.

По единственности продолжения есть совпадение на всех измеримых множествах

$$\mu A := \int\limits_A |\varphi'| \, d\lambda_1 \quad \nu A = \int\limits_{\varphi(A)} 1 \, d\lambda$$

Шаг 4. Φ оставляет на месте $n-1$ координату.

$$x = (y, t) \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R} \qquad \Phi(y, t) = (y, \varphi(y, t)) \quad (\Phi(A))_y = \varphi(y, A_y)$$

$$\lambda_n \Phi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda_1(\Phi(A)_y) \, d\lambda_{n-1}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda_1(\varphi(y, A_y)) \, d\lambda_{n-1}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{A_y} |\varphi'_t(y,t)| \, d\lambda_1(t) \, d\lambda_{n-1}(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{A_y} |\varphi'_t(y,t)| \, d\lambda_1(t) \, d\lambda_{n-1}(y) = \int\limits_A |J_\Phi| \, d\lambda_n$$

первый переход это принцип Кавальери, третий это мы находим меру множества $\varphi(y, A_y)$. А последний переход это теорема Тонелли

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi'_t \end{pmatrix} \Rightarrow J_\Phi = \varphi'_t(y, t)$$

Шаг 5. Берем Φ расщепляем $\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \ldots \circ \Phi_n$

Для каждого Φ_k теорема верна по шагу 4 $\Rightarrow$по Шагу 2 верна для $\Phi|_{U_a} \Rightarrow$ по шагу 1 верна для Φ

□

2. Интегралы с параметром

2.1. Билет 44: Переход к пределу под знаком интеграла при наличии локального условия Лебега. Сохранение непрерывности.

***Определение* 2.1.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, T - метрическое пр-во

$E_t \in \mathcal{A} \quad f(\cdot, t)$ измерима при всех $t \in T$

$F(t) := \int\limits_{E_t} f(x,t)\, d\mu(x)$ – интеграл зависящий от параметра

Теорема 2.1.

Пусть t_0 – предельная точка T, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой

При всех t ф-я $f(x,t)$ суммируема и $\lim\limits_{t \to t_0} f(x,t) = g(x)$

Если существует окр-ть U_{t_0} и суммируемая ф-я Φ, т.ч. $\forall t \in U_{t_0} \quad |f(x,t)| \leqslant \Phi(x)$

то $\int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x) \to \int\limits_X g(x)\, d\mu$

Доказательство.

Докажем по Гейне

Проверяем на последовательности $t_n \to t_0 \quad f_n(x) := f(x, t_n)$

По условию $|f_n(x)| = |f(x,t_n)| \leqslant \Phi(x)$ при достаточно больших n.

Тогда по теореме Лебега $\int\limits_X f(x,t_n)\, d\mu(x) = \int\limits_X f_n(x)\, d\mu(x) \to \int\limits_X g(x)\, d\mu$

□

Следствие.

Если f непрерывна в точке t_0 при п.в. $x \in X$

$|f(x,t)| \leqslant \Phi(x) \quad \forall f \in U_{t_0}, \forall x \in X \quad \Phi$ – суммируема

Тогда $F(t) := \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)$ непрерывна в точке t_0

Доказательство.

Если t_0 – предельная точка, то теорема, если нет, то $F(x)$ непрерывна в точке t_0

□

***Определение* 2.2.**

"Если существует окр-ть U_{t_0} и суммируемая ф-я Φ, т.ч. $\forall t \in U_{t_0} \quad |f(x,t)| \leqslant \Phi(x)$" – локальное условие Лебега в точке t_0.

2.2. Билет 45: Произведение компактов. Непрерывность собственных интегралов с параметром (на компакте и на открытом множестве).

Лемма. Декартово произведение компактов – компакт.

Замечание. Метрика на декартовом произведении

$(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические про-ва $(X \times Y, \rho)$ $\quad \rho((x,y),(\bar{x},\bar{y})) = \rho_X(x,\bar{x}) + \rho_Y(y,\bar{y})$ – метрика в $X \times Y$

Доказательство.

$A \subset X$ – компакт $\Rightarrow$ возьмём $\varepsilon > 0$ $\quad A_\varepsilon$ – конечная ε-сеть для A

Аналогично для $B \subset Y$ B_ε – конечная ε-сеть для B

$A_\varepsilon \times B_\varepsilon$ – 2ε-сеть для $A \times B \Rightarrow A \times B$ – компакт

Но для последнего следствия нужна еще и полнота $A \times B$, ну а это верно, тк A и B полные.

□

Теорема 2.2.

$\mu X < +\infty$, X и T – компакты, $f \in C(X \times T)$

Тогда $F(t) = \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x) \in C(T)$

Доказательство.

$|f(x,t)| \leqslant M \quad \forall x \in X \ \ \forall t \in T \quad \Phi(x) := M$ – суммируемая мажоранта $\Rightarrow$ можем подставить в теорему 2.1

□

Следствие.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $\mu X < +\infty$, X – компакт

$f \in C(X \times \Omega)$, тогда $F \in C(\Omega)$

Доказательство.

Проверим непрерывность F в точке $t_0 \in \Omega$

Тогда $\bar{B}_r(t_0) \subset \Omega$ для некоторого $r > 0$

$f \in C(X \times \bar{B}_r(t_0)) \Rightarrow F \in C(\bar{B}_r(t_0)) \Rightarrow F \in C(B_r(t_0)) \Rightarrow F$ непрерывна в точке t_0.

□

2.3. Билет 46: Дифференцируемость собственных интегралов с параметром. Формула Лейбница.

Теорема 2.3.

Если $T \subset \mathbb{R}$ промежуток, существует $f'_t(x,t)$ при всех $x \in X$, $t \in T$ и $f'_t(x,t)$ удовлетворяет локальному условию Лебега в точке t_0, $f(x,t)$ – суммируема $\forall t \in T$

Тогда $F(t) = \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)$ дифференцируема в точке t_0 и $F'(t_0) = \int\limits_X f'(x,t)\, d\mu(x)$

Доказательство.

$$\frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} = \int\limits_X \frac{f(x,t_0+h) - f(x,t_0)}{h}\, d\mu(x) =: \int\limits_X g(x,h)\, d\mu(x)$$

$\lim\limits_{h \to 0} \int\limits_X g(x,h)\, d\mu(x) = \int\limits_X \lim\limits_{h \to 0} g(x,h)\, d\mu(x)$ хотим доказать

А для этого достаточно доказать локальное условие Лебега в точке $h = 0$ (теорема из 44 билета)

$g(x,h) = f'_t(x, t_0 + \theta_x h) \quad 0 \leqslant \theta_x \leqslant 1$ по условию для $f'_t(x,t)$ есть локальное условие Лебега $\Rightarrow \exists U_{t_0}$, т.ч. $|f'_t(x,t)| \leqslant \Phi(x)$ – суммируема.

Если h, т.ч. $t_0 + h \in U_{t_0} \Rightarrow t_0 + \theta_x h \in U_{t_0} \Rightarrow |g(x,h)| \leqslant \Phi(x)$

Значит для $g(x,h)$ есть суммируемая мажоранта.

□

Следствие.

$f \in C(X \times T)$, X – компакт, $\mu X < +\infty$, $T \subset \mathbb{R}$ промежуток

$f'_t \in C(X \times T)$. Тогда $F \in C^1(T)$ и $F'(t) = \int\limits_X f'_t(x,t)\,d\mu(x)$

Доказательство.

$t_0 \in T$ берем $t_0 \in [a,b] \subset T \Rightarrow X \times [a,b]$ – компакт

f'_t непрерывна на компакте $\Rightarrow$ ограниченна $|f'_t(x,t)| \leqslant M =: \Phi(x)$ – суммируема

□

Теорема 2.4 (формула Лейбница)**.**

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

$f, f'_t \in C([a,b] \times [c,d]) \quad \varphi, \psi : [c,d] \to [a,b]$ непрерывна дифференцируема

Тогда $F(t) = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx \in C^1[c,d]$ и

$$F'(t) = f(\psi(t),t)\psi'(t) - f(\varphi(t),t)\varphi'(t) + \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x,t)\,dx$$

Доказательство.

$\Phi(\alpha,\beta,t) := \int\limits_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$

У данной функции мы знаем частные производные

$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int\limits_\alpha^\beta f'_t(x,t)\,dx$

$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = -f(\alpha,t)$

$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = f(\beta,t)$

Это все непрерывные функции, а т.к. все частные производные непрерывные, то и сама функция непрерывная.

$$F'(t) = \Phi'(\varphi(t),\psi(t),t) = \begin{pmatrix} -f(\varphi(t),t) \\ f(\psi(t),t) \\ \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x,t)\,dx \end{pmatrix} \cdot (\varphi'(t), \psi'(t), 1)$$

□

2.4. Билет 47: Вычисление интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(tx)\,dx$. Равномерный переход к пределу под знаком интеграла.

Пример.

$F(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(tx)\,dx$

$F'(t) = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-x^2}\cos(tx)\right)_t\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin(tx)\,dx = \dfrac{e^{-x^2}}{2}\sin(xt)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2}t\cos(tx)\,dx == 0 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2}t\cos(tx)\,dx = -\frac{t}{2}F(t)$

$F'(t) + \frac{t}{2}F(t) = 0 \Rightarrow \left(e^{t^2/4}F(t)\right)' = e^{t^2/4}\frac{t}{2}F(t) + e^{t^2/4}F'(t) = 0$ нулевая производная, значит это константа

$F(t) = Ce^{-t^2/4}$

$F(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

***Определение* 2.3.**

$f(x,t) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} g(x)$ равномерно на X, если

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \forall t \in T\ \ \rho_T(t,t_0) < \delta\ \ \forall x \in X \Rightarrow |f(x,t) - g(x)| < \varepsilon$

Замечание.

$f(x,t) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} g(x)$ равномерно на $X \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f(x,t) - g(x)| \underset{t\to t_0}{\to} 0$

Теорема 2.5.

$f(x,t)$ суммируема при всех $t \in T$, $\mu X < +\infty$, $f(x,t) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} g(x)$ на X

Тогда g суммируема и $\int\limits_X f(x,t)\,d\mu(x) \to \int\limits_X g(x)\,d\mu$

Доказательство.

$\left|\int\limits_X f(x,t)\,d\mu(x) - \int\limits_X g(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x,t) - g(x)|\ d\mu \leqslant \mu X \cdot \sup\limits_{x\in X}|f(x,t) - g(x)| \to 0$

□

Замечание.

Условие про $\mu X < +\infty$ существенно

$f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}(x) \quad f_n \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} 0 \quad \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 \not\to \int\limits_0^{+\infty} 0\,dx$

2.5. Билет 48: Равномерная сходимость несобственных интегралов с параметром. Критерий Коши. Следствие. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся интегралов.

***Определение* 2.4.** Равномерная сходимость интеграла

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists B > a\ \ \forall b > B\ \ \forall t \in T \qquad \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$

Замечание.

$F_b(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$

$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ – равномерно сх-ся $\Leftrightarrow F_b(t) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} F(t)$ равномерно по $t \in T$

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists B\ \ \forall b > b\ \ \forall t \in T \quad |F_b(t) - F(t)| < \varepsilon$

Доказательство.

$|F_b(t) - F(t)| = \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx\right|$ ну значит получили определение

□

Пример.

$\int\limits_b^{+\infty} e^{-tx}\,dx \leqslant \int\limits_b^{+\infty} e^{-t_0x}\,dx = \frac{e^{-t_0x}}{-t_0}\Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-t_0b}}{t_0}$

Но при $t > 0$ уже нет равномерной сходимости $\int\limits_b^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{e^{-tb}}{t} = \frac{b}{e}$ при $t = \frac{1}{b}$ мы для любого b можем сделать интеграл большим $\Rightarrow$ сходится неравномерно.

Теорема 2.6 (Критерий Коши равномерной сходимости интегралов)**.**

$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ – равномерно сх-ся $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists B > a\ \ \forall b, c > b\ \ \forall t \in T \quad \left|\int\limits_b^c f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$

Доказательство.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ – равномерно сх-ся $\Leftrightarrow F_b(t) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} F(t)$ равномерно по $t \in T$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \left.\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \ \exists b > a\ \ \forall b > B\ \ \forall t \in T \quad |F_b - F| < \varepsilon \\ \forall c > B\ \ \forall t \in T \quad |F_c - F| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow |F_c - F_b| = \left|\int\limits_b^c f(x,t)\,dx\right| < 2\varepsilon$$

"$\Leftarrow$" По критерию Коши для фиксированного $t \in T \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists b > a\ \ \forall b, c > B\ \ \forall t \in T \quad \left|\int\limits_b^c f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$

$\left|\int\limits_b^c f(x,t)\,dx\right| \underset{c\to\infty}{\to} \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$

Но это определение равномерной сходимости

□

Следствие.

$f : [a, +\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится на (c,d)

Тогда он равномерно сходится на $[c,d]$

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists b > a\ \ \forall b, b' > B\ \ \forall t \in (c,d) \quad \left|\int\limits_b^{b'} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$

f непрерывна на $[b,b'] \times [c,d] \Rightarrow \left|\int\limits_b^{b'} f(x,t)\,dx\right| \to \left|\int\limits_b^{b'} f(x,c)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$

Аналогично с d $\left|\int\limits_b^{b'} f(x,t)\,dx\right| \to \left|\int\limits_b^{b'} f(x,d)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$

$\Rightarrow \forall t \in [c,d] \quad \left|\int\limits_b^{b'} f(x,t)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \left|\int\limits_a^{\infty} f(x,t)\,dx\right|$ равномерно сходится на $[c,d]$ по критерию Коши

□

Следствие.

$f : [a,+\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx$ расходится при $t = c$ или $t = d$

Тогда $\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx$ не может равномерно сх-ся на (c,d)

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx \qquad \left.\begin{array}{l}\text{сх-ся при } t > 0\\ \text{расх-ся при } t = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{на } (0,+\infty) \text{ нет равномерной сх-ти}$$

При $t \geqslant t_0 > 0$ есть равномерная сх-ть

$$\int\limits_b^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx \leqslant \int\limits_b^{+\infty} e^{-t_0x^2}\,dx \leqslant \int\limits_b^{+\infty} e^{-t_0x}\,dx = \left.\frac{e^{-t_0x}}{-t_0}\right|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-t_0b}}{t_0} \underset{b\to\infty}{\to} 0$$

$b \geqslant 1$

2.6. Билет 49: Признак Вейерштрасса. Следствие. Пример.

Теорема 2.7 (Вейерштрасса)**.**

$f, g : [a,+\infty)\ timesT \to \mathbb{R}$ интегрируемы на $[a,b]$ $\forall t \in T$ и $\forall b > a$

$|f(x,t)| \leqslant g(x,t)\ \ \forall t \in T\ \ \forall x > a$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x,t)\,dx$ сх-ся равномерно

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сх-ся равномерно

Доказательство.

Критерий Коши

$\int\limits_a^{+\infty} g(x,t)\,dx$ равномерно сх-ся $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists B > a\ \ \forall b, c > b\ \ \forall t \in T \quad \left|\int\limits_b^{c} g(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$

$\left|\int\limits_b^{c} f(x,t)\,dx\right| \leqslant \int\limits_b^{c} |f(x,t)|\,dx \leqslant \left|\int\limits_b^{c} g(x,t)\,dx\right| < \varepsilon \Rightarrow$ по критерию Коши $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сх-ся

□

Следствие.

Если $|f(x,t)| \leqslant g(x)\ \ \forall t \in T\ \ \forall x > a$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сх-ся

Пример.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\,dx$ сх-ся равномерно

$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ – сх-ся $\left|\frac{\cos(xt)}{1+x^2}\right| \leqslant g(x)$

Замечание.

Если у $|f(x,t)|$ есть суммируемая мажоранта, то сх-ть $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерная.

2.7. Билет 50: Признак Дирихле. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p}\,dx$

Теорема 2.8 (Признак Дирихле)**.**

$f, g : [a, +\infty) \times T \to \mathbb{R}$ интегрируемы на $[a, b]$ $\forall b > a$

Если

1) $\forall b > a \ \ \forall t \in T \quad \left|\int\limits_a^b f(x,t)\,dx\right| \leqslant M$

2) $g(x,t) \underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ равномерно на T

3) $g(x,t)$ монотонна по x при любом фиксированном $t \in T$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,dx$ сх-ся равномерно

Доказательство. Только для дифференцируемых функций g

$F(u,t) := \int\limits_a^u f(x,t)\,dx$

Тогда $|F(u,t)| \leqslant M \ \ \forall u, t$

$\int\limits_a^c f(x,t)g(x,t)\,dx = F(x,t)g(x,t)\Big|_{x=a}^{x=c} - \int\limits_a^c F(x,t)g'_x(x,t)\,dx$

$|F(c,t)g(c,t)| \leqslant M\,|g(c,t)| \underset{c\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$

Давайте по Вейерштрассу проверим, что $\int\limits_a^{\infty} F(x,t)g'_x(x,t)\,dx$ равномерно сх-ся.

$|F(x,t)g'_x(x,t)| \leqslant M\,|g'_x(x,t)| \Rightarrow$ надо понять, что $\int\limits_a^c |g'_x(x,t)|\,dx$ равномерно сх-ся

$\int\limits_a^c |g'_x(x,t)|\,dx = \left|\int\limits_a^c g'_x(x,t)\right| = |g(c,t) - g(a,t)| \underset{c\to+\infty}{\rightrightarrows} |g(a,t)|$

Первый переход мы сделали, т.к. $g(x,t)$ монотонна $\Rightarrow$ ее производная не меняет знак.

□

Пример.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p}\,dx$ — сх-ся равномерно при $p \geqslant p_0 > 0$, но неравномерно на $p > 0$

Нет сходимости при $p = 0 \Rightarrow$ нет равномерной сх-ти при $p > 0$

Пусть $p \geqslant p_0 > 0 \qquad f(x,p) = \sin x, \;\; g(x,p) = \dfrac{1}{x^p}$

1. $\left|\int\limits_a^b f(x,t)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b \sin x\,dx\right| = |\cos a - \cos b| \leqslant 2$

2. $\dfrac{1}{x^p} \rightrightarrows 0 \qquad \dfrac{1}{x^p} \leqslant \dfrac{1}{x^{p_0}} \to 0$

3. $\dfrac{1}{x^p}$ монотонна при любом фиксированном p.

Значит есть равномерная сходимость по признаку Дирихле.

2.8. Билет 51: Признак Абеля.

Теорема 2.9 (Признак Абеля)**.**
$f, g : [a, +\infty) \times T \to \mathbb{R}$ интегрируемы на $[a, b]$ $\forall b > a$
Если

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сх-ся

2) $g(x,t) \leqslant M \;\; \forall x \in [a, +\infty) \;\; \forall t \in T$

3) $g(x,t)$ монотонна по x при любом фиксированном $t \in T$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,dx$ сх-ся равномерно

Доказательство. Только для дифференцируемых функций g

$F_b(u,t) := \int\limits_b^u f(x,t)\,dx$

$\int\limits_b^c f(x,t)g(x,t)\,dx = F_b(x,t)g(x,t)\Big|_{x=b}^{x=c} - \int\limits_b^c F(x,t)g'_x(x,t)\,dx$

Проверяем критерий Коши, т.е., что при достаточно больших b и c $\left|\int\limits_b^c\right| < \varepsilon$

Найдется $B > a$, т.ч. $|F_b(u,t)| < \varepsilon \;\; \forall b > B \;\; \forall t \in T$

$\left|F_b(x,t)g(x,t)\Big|_{x=b}^{x=c}\right| = |F_b(c,t)g(c,t)| < \varepsilon M$

$\left|\int\limits_b^c F(x,t)g'_x(x,t)\,dx\right| \leqslant \int\limits_b^c |F(x,t)|\,|g'_x(x,t)|\;dx < \varepsilon \int\limits_b^c |g'_x(x,t)|\;dx = \varepsilon \left|\int\limits_b^c g'_x(x,t)\,dx\right| = \varepsilon\,|g(c,t) - g(b,t)| \leqslant 2M\varepsilon$

□

2.9. Билет 52: Теорема о перестановке предела и интеграла. Существенность условий. Непрерывность равномерно сходящихся интегралов.

Теорема 2.10.

$f, g : [a, +\infty) \times T \to \mathbb{R} \qquad t_0$ – предельная точка T.

Если

1) $\forall b > a \quad f(x,t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ равномерно на $[a, b]$

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно на T

Тогда $\lim\limits_{t \to t_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

Доказательство.

Берем B из критерия Коши $\forall b, c > B \;\; \forall t \in T \quad \left|\int\limits_a^c f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$

$\left|\int\limits_a^c f(x,t)\,dx\right| \to \left|\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \Rightarrow$ выполняется критерий Коши для $\varphi \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сх-ся

$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b (f(x,t) - \varphi(x))\,dx\right| + \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| + \left|\int\limits_b^{+\infty} \varphi(x)\,dx\right|$

Возьмем B, т.ч. $\forall b > B \;\; \forall t \in T \quad \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$ (можно по пункту 2)

и $\forall b > B \;\; \forall t \in T \quad \left|\int\limits_b^{+\infty} \varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon$(можно, тк $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сх-ся)

$\left|\int\limits_a^b (f(x,t) - \varphi(x))\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,t) - \varphi(x)|\,dx \leqslant (b-a) \sup\limits_{x \in [a,b]} < (b-a)\dfrac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$ при t близком к t_0

□

Пример. Без равномерности теорема не выполняется

$$f(x,t) = \begin{cases} 1/t \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \text{ при } x > t \end{cases} \underset{t \to +\infty}{\rightrightarrows} 0 \text{ равномерно на } [0, +\infty)$$

$\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)\,dx = 1 \not\to 0$

Теорема 2.11.

$f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ и $F(t) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сх-ся

Тогда $F \in C[c, d]$

Доказательство.

$F_n(t) := \int\limits_a^n f(x,t)\,dx \rightrightarrows F(t)$ и F_n непрерывны на $[a, n] \times [c, d]$ (тк у нас интеграл по одной переменной на компакте) $\Rightarrow$, тк равномерный предел сохраняет свойство непрерывности, то $F \in C[c, d]$

□

Замечание Без равномерной сх-ти интеграла это неверно.

$f(x,t) = te^{-t^2x} \qquad \int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2x}\,dx = \dfrac{e^{-t^2x}}{-2t}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \dfrac{1}{2t}$ при $t \neq 0$

при $t = 0$ $\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2 x}\,dx = 0 \Rightarrow$ нет непрерывности, хотя $f(x,t)$ – непрерывная функция.

2.10. Билет 53: Интегральный аналог теоремы Абеля. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Вычисление интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$

Теорема 2.12 (аналог теоремы Абеля для рядов)**.**

$f \in C([a,+\infty))$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сх-ся

Тогда $F(t) := \int\limits_a^{+\infty} e^{-tx} f(x,t)\,dx$ непрерывна на $[0,+\infty]$

Доказательство.

Нужно д-ть, что $\int$ равномерно сх-ся

Она следует из признака Абеля $g(x,t) = e^{-tx}$ монотонна по x и равномерно ограниченна

□

Пример.

$F(t) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ непрерывна на $[0,+\infty)$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ – сходится

Теорема 2.13.

$f \in C([a,+\infty) \times [c,d])$, $f'_t \in C([a,+\infty) \times [c,d])$

1. $\Phi(t) := \int\limits_a^{+\infty} f'_t(x,t)\,dx$ равномерно сходится

2. $F(t) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится при $t = t_0 \in [c,d]$

Тогда $F(t)$ равномерно сх-ся, $F \in C^1[c,d]$, $F' = \Phi$

Доказательство.

$F_b(t) := \int\limits_a^{b} f(x,t)\,dx$ дифференцируема, тк $f(x,t)$ дифференцируема по t и у нас конечный отрезок

$F'_b(t) = \int\limits_a^{b} f'_t(x,t)\,dx \underset{b\to+\infty}{\rightrightarrows} \Phi(t)$

$F_b(t_0) \to F(t_0)$

$F_b(t) = F_b(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} F'_b(u)\,du \rightrightarrows F(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(u)\,du$, тк $F'_b(u) \rightrightarrows \Phi(u) \Rightarrow$ и интеграл тоже равномерно сходится.

Т.к. при стремлении $b \to \infty$ мы что-то получили, то это $F(t)$

$F(t) = F(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(u)\,du \Rightarrow F$ дифф. и $F' = \Phi$

$\square$

Пример.

$F(t) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \in C[0, +\infty)$

$\Phi(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\,dx$ равномерно сх-ся при $t \geqslant c > 0$

$\Rightarrow F'(t) = \Phi(t)$ при $t > 0$, но $\Phi(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$ (дважды по частям)

$\Rightarrow F(t) = \int \Phi(t)\,dt + C = C - \int \dfrac{dt}{1+t^2} = C - \operatorname{arctg} t$ при $t > 0$

Но $F(t)$ и $C - \operatorname{arctg} t$ при $t \geqslant 0$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = 0$

Чтобы внести предел в интеграл нам нужна суммируемая мажоранта

$\left|e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant e^{-tx} \leqslant e^{-x}$

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = C - \pi/2 \Rightarrow C = \pi/2$ и $F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t$

В частности $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx = \dfrac{\pi}{2}$

2.11. Билет 54: Г-функция Эйлера. Свойства.

***Определение* 2.5.**

$\Gamma := \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx \quad p > 0$

Свойства* Г*-функции.

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
2. $\Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
4. $\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$
5. $\Gamma(x)$ бесконечно дифф. и

   $\Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\ln^n x e^{-x}\,dx$
6. Г строго выпукла.

Доказательство.

1. $\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = -x^pe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p)$
2. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$

3. $\Gamma(1/2) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} 2e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$
4. $\Gamma(n+1/2) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$
5. Если $p \in (c,d)$, то $\int$ равномерно сходится
   $|x^{p-1}\ln^n x e^{-x}| \leqslant C_1 e^{-x/2}$ при $x \geqslant 1$
   $|x^{p-1}\ln^n x e^{-x}| \leqslant C_2 x^{c/2-1}$ при $x \in (0,1]$
   Это мажоритарная функция $\Rightarrow \int$ равномерно сходится по признак Вейерштрасса
6. $\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\ln^2 x e^{-x}\, dx > 0$

□

2.12. Билет 55: B-функция Эйлера. Свойства. Связь с Γ-функцией.

***Определение* 2.6.**
$B(p,q) := \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \ \ p,q>0$

Свойства B-функции.

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt$

Доказательство.

1. $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \int\limits_1^0 (1-y)^{p-1}y^{q-1}\, dy = B(q,p)$
   Замена $y = 1-x$
2. $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{q-1}\frac{dt}{((1+t)^2} = \int\limits_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt$
   Сделали замену $x = \dfrac{t}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{1+t} \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{(1+t)^2}$

□

Теорема 2.14. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Доказательство.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\int\limits_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-y}\, dy\, dx \underset{y=u-x}{=} \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\int\limits_x^{+\infty}(u-x)^{p-1}e^{-u+x}\, du\, dx =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_x^{+\infty} x^{p-1}(u-x)^{q-1}e^{-u}\, du\, dx = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{u} x^{p-1}(u-x)^{q-1}e^{-u}\, dx\, du \underset{x=uv}{=}$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{1} u^{p-1}v^{p-1}u^{q-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}u\, dv\, du = \int\limits_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}\int\limits_0^{1} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dv\, du = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$$

□

2.13. Билет 56: Формулы удвоения и дополнения для Γ-функции.

Следствие 1. Формула дополнения.

$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin \pi p}$ при $p \in (0,1)$

Доказательство.

$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p)\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}$

Последний переход можно и самим сделать, но это трудно, так что это факт.

□

Следствие 2. Формула удвоения.

$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \cdot \Gamma(2p)$

Доказательство.

$B(p,p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\, dx = 2\int\limits_0^{1/2} (x-x^2)^{p-1}\, dx \underset{x=\frac{1}{2}-t}{=} 2\int\limits_0^{1/2} \left(\frac{1}{4}-t^2\right)^{p-1}\, dt \underset{t=\frac{\sqrt{u}}{2}}{=} 2\int\limits_0^1 \frac{1}{4\sqrt{u}}\left(\frac{1}{4}-\frac{u}{4}\right)^{p-1}\, du =$

$= \frac{1}{2^{2p-1}}\int\limits_0^1 (1-u)^{p-1}u^{\frac{1}{2}-1}\, du = B\left(\frac{1}{2}, p\right) \cdot \frac{1}{2^{2p-1}}$

$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = B(p,p) = B\left(\frac{1}{2}, p\right) \cdot \frac{1}{2^{2p-1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2^{2p-1}}$

$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(2p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2^{2p-1}}$

□

2.14. Билет 57: Асимптотика $\Gamma(t+a)$. Формула Эйлера–Гаусса.

Теорема 2.15. $\Gamma(t+a) \sim t^a\Gamma(t)$ при $t \to +\infty$

Доказательство.

$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} = B(t+1, a) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^t\, dx \underset{x=\frac{u}{t}}{=} \int\limits_0^t \frac{u^{a-1}}{t^{a-1}\cdot t}\left(1-\frac{u}{t}\right)^t\, du = \frac{1}{t^a}\int\limits_0^t u^{a-1}\left(1-\frac{u}{t}\right)^t\, du$

$\int\limits_0^t u^{a-1}\left(1-\frac{u}{t}\right)^t\, du = \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(u)u^{a-1}\left(1-\frac{u}{t}\right)^t\, dt \underset{t\to+\infty}{\to} \int\limits_0^{+\infty} u^{a-1}e^{-u}\, du = \Gamma(a)$

Осталось понять, почему мы можем перейти к пределу. В качестве суммируемой мажоранты возьмем $g(u) = u^{a-1}e^{-u}$

$\dfrac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} \sim \dfrac{\Gamma(a)}{t^a} \Rightarrow \Gamma(t+a) \sim t^a\Gamma(t)$ при $t \to +\infty$

□

Теорема 2.16 (Формула Эйлера-Гаусса).

$\Gamma(p) = \lim\limits_{n\to\infty} n^p \dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$

Доказательство.

$n^p\dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} = \dfrac{n}{n+p} \cdot \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(n)}{\Gamma(n+p)} \cdot n^p \sim \Gamma(p) \cdot \dfrac{\Gamma(n)n^p}{\Gamma(n+p)} \sim \Gamma(p)$

□

Следствие.

1. При $p = \frac{1}{2}$ получается ф-ла Валлиса
2. $p(p+1)(p+2)\dots(p+n) \sim \dfrac{n^p}{\Gamma(p)} \cdot n!$

Пример. $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1) = 3^{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)\dots\left(\frac{1}{3}+n\right)}_{\sim\frac{n^{1/3}n!}{\Gamma(1/3)}} \sim \dfrac{n!n^{1/3}}{\Gamma(1/3)}3^{n+1}$

2.15. Билет 58: Примеры сведения интегралов к Γ-функции. Объем многомерного шара.

Пример.

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^p}\,dt = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right) \quad p > 0$

   $t^p = x \;\; x^{1/p} = t \;\; dt = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}\,dx$

   $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^p}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}\,dx = \frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1}e^{-x}\,dx = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$

   $x = \sin^2\varphi \quad \cos\varphi = \sqrt{1-x} \;\; dx = 2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$

   $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{\frac{p-2}{2}}(1-x)^{\frac{q-2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$

   $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{p-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$

3. Объем n-мерного шара

   $V_n(r)$ – объем n-мерного шара радиуса r

   $V_n(r) = c_n r^n \quad c_n = V_n(1)$

   $V_n(1) = \int\limits_{-1}^{1} V_{n-1}(\sqrt{1-z^2})\,dz = 2c_{n-1}\int\limits_0^1 (\sqrt{1-z^2})^{n-1}\,dz \underset{z=\sin\varphi}{=}$

   $= 2c_{n-1}\int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{n-1}\cos\varphi\,d\varphi = 2c_{n-1}\int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^n\,d\varphi = c_{n-1}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

   $c_n = c_{n-1}\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = c_{n-2}\dfrac{\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \ldots = c_1\pi^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} =$

   $= \pi^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

3. Криволинейные интегралы

3.1. Билет 59: Определение и свойства интеграла по длине дуги (равенства и неравенства).

***Определение* 3.1.**

Интеграл I рода (интеграл по длине дуги)

γ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$

$\int\limits_{\gamma} f\,ds := \int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\;dt$

$\gamma : [a,b] \to R^n$

Свойства.

1. Не зависит от параметризации

Доказательство.

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, где $\tau : [c,d] \to [a,b]$, строго возрастает, гладкое $\tau(c) = a,\;\; \tau(d) = b$

$\int\limits_{\tilde{\gamma}} f\,ds = \int\limits_c^d f(\gamma(\tau(t)))\,\|(\gamma\circ\tau)'(u)\|\;du = \int\limits_c^d f(\gamma(\tau(t)))\tau'(u)\,\|\gamma'(\tau(u))\|\;du \underset{t=\tau(u)}{=} \int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\;dt = \int\limits_{\gamma} f\,ds$

$(\gamma\circ\tau)'(u) = \gamma'(\tau(u))\cdot\tau'(u)$

□

2. Интеграл не зависит от направления

Доказательство.

$\tau(c) = b,\;\; \tau(d) = a$, тогда

$\int\limits_{\tilde{\gamma}} f\,ds = \int\limits_c^d f(\gamma(\tau(t)))\,\|(\gamma\circ\tau)'(u)\|\;du = \int\limits_c^d f(\gamma(\tau(t)))(-\tau'(u))\,\|\gamma'(\tau(u))\|\;du \underset{t=\tau(u)}{=} -\int\limits_b^a f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\;dt = -\int\limits_{\gamma} f\,ds$

□

3. Линейность интеграла $\int\limits_{\gamma}(\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha\int\limits_{\gamma} f\,ds + \beta\int\limits_{\gamma} g\,ds$

Доказательство.

$\int\limits_{\gamma}(\alpha f + \beta g)\,ds = \int\limits_a^b(\alpha f(\gamma(t)) + \beta g(\gamma(t)))\,\|\gamma'(t)\|\;dt = \alpha\int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\;dt + \beta\int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\;dt = \alpha\int\limits_{\gamma} f\,ds + \beta\int\limits_{\gamma} g\,ds$

□

4. Аддитивность по кривой $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2\quad \int\limits_{\gamma} f\,ds = \int\limits_{\gamma_1} f\,ds + \int\limits_{\gamma_2} f\,ds$

Доказательство.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad c \in [a,b] \quad \gamma_1 = \gamma\Big|_{[a,c]} \quad \gamma_2 = \gamma\Big|_{[c,b]}$

$\int\limits_\gamma f\,ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b = \int\limits_{\gamma_1} f\,ds + \int\limits_{\gamma_2} f\,ds$

$\square$

5. $\int\limits_\gamma ds = l(\gamma)$ – длина кривой

6. Если $f \leqslant g$ на γ, то $\int\limits_\gamma f\,ds \leqslant \int\limits_\gamma g\,ds$

Доказательство.

$\int\limits_\gamma f\,ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt \leqslant \int\limits_a^b g(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int\limits_\gamma g\,ds$

$\square$

7. $\left|\int\limits_\gamma f\,ds\right| \leqslant \int\limits_\gamma |f|\,ds \leqslant l(\gamma)\cdot\max|f|$

Доказательство.

$\left|\int\limits_\gamma f\,ds\right| = \left|\int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(\gamma(t))|\,\|\gamma'(t)\|\,dt \leqslant \max|f|\cdot\int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = l(\gamma)\cdot\max|f|$

$\square$

Замечание. Можно определить на кусочно-гладких кривых и все свойства сохраняются.

Упражнение.

$\int\limits_\gamma f\,ds = \lim\sum\limits_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))\cdot l(\gamma\Big|_{[t_{k-1},t_k]})$

3.2. Билет 60: Дифференциальная форма. Определение и простейшие свойства интеграла от формы по кривой. Связь с интегралом по длине дуги.

***Определение* 3.2.**

Дифференциальная форма 1-го порядка

$\omega = f_1dx_1 + f_2dx_2 + \ldots + f_ndx_n$

***Определение* 3.3.**

Криволинейный интеграл II рода (интеграл от дифф. формы)

γ – гладкая кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\int\limits_\gamma \omega := \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^n f_k(\gamma(t))\cdot\gamma_k'(t)\,dt$

Свойства.

1. Не зависит от параметризации

Доказательство.
$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, где $\tau : [c, d] \to [a, b]$, строго возрастает, гладкое $\tau(c) = a, \quad \tau(d) = b$

$\int\limits_{\tilde{\gamma}} \omega\, ds = \int\limits_c^d \sum\limits_{k=1}^n f_k(\tilde{\gamma}(u)) \cdot \tilde{\gamma_k}'(u)\, du = \int\limits_c^d \sum\limits_{k=1}^n f_k(\gamma(\tau(u)) \cdot \gamma_k'(\tau(u))\tau'(u)\, du \underset{t=\tau(u)}{=}$

$= \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \cdot \gamma_k'(t)\, dt = \int\limits_\gamma \omega$

$\tilde{\gamma_k}'(u) = (\gamma_k \circ \tau)'(u) = \gamma_k'(\tau(u)) \cdot \tau'(u)$

□

2. Смена направления меняет знак интеграла

   Доказательство.
   $\tau(c) = b, \quad \tau(d) = a$, тогда поменяются концы интегрирования местами и знак изменится

   □

3. Связь с интегралом по длине дуги
   $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ $\vec{\sigma}$ – единичный касательный вектор
   $\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_\gamma \left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle\, ds$

   Доказательство.
   $\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \cdot \gamma_k'(t)\, dt = \int\limits_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle\, dt = \int\limits_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \vec{\sigma}(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\| \right\rangle\, dt =$

   $= \int\limits_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \vec{\sigma}(\gamma(t)) \right\rangle \|\gamma'(t)\|\, dt = \int\limits_\gamma \left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle\, ds$

   $\vec{\sigma}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ (нам нужна касательная к кривой $\Rightarrow$ это производная, а затем надо его отнормировать) □

4. Линейность $\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$
   $\int\limits_\gamma \omega = \alpha \int\limits_\gamma \omega_1 + \beta \int\limits_\gamma \omega_2$

   Доказательство. Надо все покоординатно сложить, а умножение на константу это умножение каждой координаты на константу □

5. Аддитивность по кривой $\int\limits_\gamma \omega\, ds = \int\limits_{\gamma_1} \omega\, ds + \int\limits_{\gamma_2} \omega\, ds$, где $\gamma_1 = \gamma\Big|_{[a,c]} \quad \gamma_2 = \gamma\Big|_{[c,b]}$

6. $\left|\int\limits_\gamma \omega\, ds\right| \leqslant \int\limits_\gamma \left\|\vec{f}\right\|\, ds \leqslant l(\gamma) \cdot \max \left\|\vec{f}\right\|$

   Доказательство.
   $\left|\int\limits_\gamma \omega\, ds\right| = \left|\int\limits_\gamma \left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle\, ds\right| \leqslant \int\limits_\gamma \left|\left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle\right|\, ds$

   $\left|\left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle\right| \leqslant \|f\|\, \|\sigma\| \leqslant \max \|f\| \cdot 1$

   по КБШ. σ - единичный

   □

Упражнение.

Интегральная сумма $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$\int\limits_\gamma \omega\, ds = \lim \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(\gamma(\xi_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}))$

3.3. Билет 61: Первообразная формы. Аналог формулы Ньютона–Лейбница. Лемма о существовании ломаной, соединяющей точки области. Необходимые и достаточные условия существования первообразной.

***Определение* 3.4.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, если Ω – открытое и линейно связное (любые две точки можем соединить)

***Определение* 3.5.**

Первообразная дифф. формы ω в области Ω – функция $F : \Omega \to \mathbb{R}$, т.ч. $dF = \omega$

Напоминание: $dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot dx_n = \omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n$

Т.е. $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$

Теорема 3.1 (Аналог формулы Ньютона–Лейбница)**.**

F – перообразная ω в Ω, γ – кривая в Ω, соединяющая точки a и b. Тогда $\int\limits_\gamma \omega = F(b) - F(a)$

Доказательство.

$\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega \ \ \gamma(\alpha) = a, \ \gamma(\beta) = b$

$\int\limits_\gamma \omega := \int\limits_\alpha^\beta \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\gamma(t)) \cdot \gamma_k'(t)\, dt = \int\limits_\alpha^\beta \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma_k'(t)\, dt = \int\limits_\alpha^\beta (F \circ \gamma)'(t)\, dt =$

$= F \circ \gamma \Big|_\alpha^\beta = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a)$

□

Следствие.

1. Если у ω есть первообразная, то интеграл зависит только от концов пути

2. Первообразные отличаются друг от друга на константу

   Доказательство.

   F_1 и F_2 отличаются друг от друга на константу

   $\int\limits_\gamma \omega = F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a) \Rightarrow F_2(b) = F_1(b) + (F_2(a) - F_1(a))$

   □

Лемма. Ω – область. Между любыми двумя точками из Ω найдется ломаная из Ω со звеньями, параллельными осям координат

Доказательство.

$a, b \in \Omega$ возьмем путь, соединяющий эти точки

В каждой точке пути берем шарик, целиком содержащийся в Ω. Выберем конечное покрытие. (множество компактно (путь - непрерывный отрезка, отрезок компактен), шарики покрывают путь и они открыты)

Шарики мы можем упорядочить, тк у каждого шарика есть центр, расположенный на пути $\Rightarrow$ можем упорядочить. Теперь в каждом шарике строим ломанные от точки, входящей в пересечение с предыдущим шариком, до центра шарика и от центра, до точки из пересечения со следующим шариком. За конечное число шагов мы построим ломаную

$\square$

Теорема 3.2.

Ω – область, $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывны

Следущие условия равносильны

1. $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n$ имеет первообразную в Ω
2. $\int\limits_\gamma \omega = 0$ для любого замкнутого контура
3. $\int\limits_\gamma \omega = 0$ для любой замкнутой ломаной со звеньями, параллельными осям координат

Доказательство.

1)⇒2) F – первообразная, γ – замкнутая кривая, проходящая через точку a, то $\int\limits_\gamma \omega = F(a) - F(a) = 0$

2)⇒3) Это частный случай

3)⇒1) Зафиксируем точку $a \in \Omega$ и $F(x) := \int\limits_\gamma \omega$, где γ – ломанная со звеньями, параллельными осям координат, соединяющая точки a и x. Проверим корректность определения

Возьмем 2 ломанные от точки a до x γ_1 и γ_2. Если мы пройдем по γ_1, а затем вернемся по γ_2, то это будет замкнутая ломаная $\Rightarrow$ интеграл равен 0. $\Rightarrow$ также $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$. Значит значение не зависит от прямой, по которой мы двигаемся

Проверим, что F – перообразная. Докажем, что $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$

Чтобы найти производную по первой координате нам надо сдвинуться только по первой координате от x_1 до $x_1 + h$ и разделить на перемещение.

$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x_1+h, x_2, \ldots, x_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$

Проведем ломаную из a так, чтобы путь от a до $x_1 + h$ проходил через x_1 и между x_1и $x_1 + h$ был отрезок I. Тогда мы сможем посмотреть на интеграл по этому отрезку

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_I \omega = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_0^h f_1(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)\, dt =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} h \cdot f_1(x_1 + \theta \cdot t, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Пояснения к переходам:

В ω' все частные производные равны 0, кроме $\omega'_1 = 1$, так что в определении интеграла 2 рода получаем

$$\int_0^h dt \sum_{i=1}^n f_1(x_1+t, x_2, \dots, x_n)\cdot 1 + f_2(x_1+t, x_2, \dots, x_n)\cdot 0 + \ldots = \int_0^h dh\, f_1(x_1+t, x_2, \dots, x_n)$$

Предпоследний переход (от интеграла к θ): значение интеграла по отрезку - это значение функции в промежуточной точке, умноженное на длину

□

3.4. Билет 62: Формула Грина. Формулы для вычисления площади.

***Определение* 3.6.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ элементарная область, если

$\Omega = \{(x,y) : x \in (a,b)$ и $\varphi(x) < y < \psi(x)\} = \{(x,y) : y \in (c,d)$ и $\alpha(y) < x < \beta(y)\}$,

где $\alpha, \beta, \varphi, \psi$ – непрерывные функции

Теорема 3.3 (Формула Грина)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочко-гладких контуров, ориентированных положительно

$\omega = P\,dx + Q\,fy$, где $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\operatorname{Cl}\Omega$ (т.е. из можно доопределить на границе с сохранением непрерывности)

Тогда $\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy$

Замечание Лектописца.

$\partial\Omega$ – граница области Ω

Ориентированных положительно – ориентировать переход так, чтобы область была слева

Доказательство.

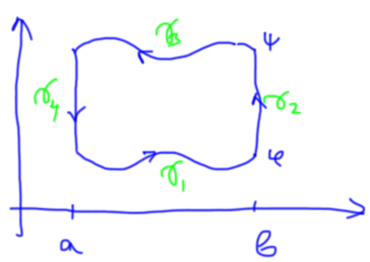
Надо доказать 2 формулы $\int\limits_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial\Omega} P\,dx$ и $\int\limits_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial\Omega} Q\,dy$

Заметим, что мы можем менять порядок интегрирования, тк все производные непрерывны на замыкании области. Ω – ограниченная $\Rightarrow$ мы интегрируем непрерывную функцию по компактному множеству $\Rightarrow$ по теореме Фубини можем менять порядок.

Проверим первую формулу

Шаг 1. Ω – элементарная область

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\,dx$$



$$\int\limits_{\gamma} P\,dx = \int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} + \int\limits_{\gamma_4}$$

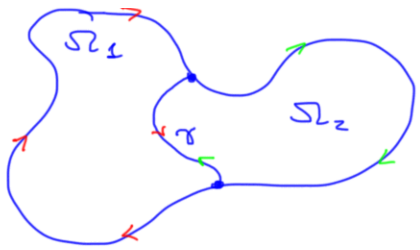
$$\int\limits_{\gamma_2} P\,dx = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} P(b,t)\cdot b'\,dt = 0 = \int\limits_{\gamma_4} P\,dx$$

$$\int\limits_{\gamma_1} P\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(t,\varphi(t))\cdot t'\,dt$$

$$\int\limits_{\gamma_3} P\,dx = \int\limits_{b}^{a} P(t,\psi(t))\cdot t'\,dt$$

$$\int\limits_{a}^{b} P(x,\psi(x))\,dx - \int\limits_{a}^{b} P(x,\varphi(x))\,dx = -\int_{\gamma_3} P\,dx - \int_{\gamma_1} P\,dx = -\int\limits_{\gamma} P\,dx$$

Шаг 2. Если ф-ла верна для двух областей, то она верна и для из определения.



$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \gamma$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy + \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial\Omega_1} P\,dx - \int\limits_{\partial\Omega_2} P\,dx = -\int\limits_{\partial\Omega} P\,dx - \int\limits_{\gamma} P\,dx - \int\limits_{-\gamma} P\,dx = -\int\limits_{\partial\Omega} P\,dx$$

Шаг 3. Формула верна для конечного объединения элем. областей

Шаг 4. Любая область из условия теоремы может быть разрезана на конечное число элементарных областей

(д-ть не будем)

□

Следствие.

$$\lambda_2\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} x\,dy = -\int\limits_{\partial\Omega} y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx$$

Доказательство.

$P = 0,\quad Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

Подставляем в формулу Грина

$$\int\limits_{\partial\Omega} x\,dy = \int\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\lambda_2 = \int\limits_{\Omega} 1\,d\lambda_2 = \lambda_2\Omega$$

И теперь в другую сторону

$P = -\frac{y}{2},\quad Q = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

□

Замечание.

$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\int\limits_\gamma x\,dy = \int\limits_a^b x(t)y'(t)\,dt$

$-\int\limits_\gamma y\,dx = -\int\limits_a^b y(t)x'(t)\,dt$

3.5. Билет 63: Точные, локально точные и замкнутые формы. Связь между локальной точностью и замкнутостью. Лемма Пуанкаре (доказательство для $\mathbb{R}^2$. Пример, показывающий, что из замкнутости не следует точность. Следствия.

***Определение* 3.7.**

Форма называется точной, если у нее есть перообразная

Форма локально точная, если у каждой точки найдется окр-ть, в которой есть своя первообразная

Форма $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n$ замкнутая, если $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \ \forall i, k$

Замечание.

1. Точность $\Rightarrow$ локальная точность
2. Интеграл от точной формы о замкнутому контуру $= 0$

Теорема 3.4.

Если коэфф. формы непрерывно дифференцируем, то из локальной точности следует замкнутость

Доказательство.

Возьмем точку x и ее окрестность U, в которой $\omega = dF$

$\Rightarrow f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \Rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Rightarrow \omega$ – замкнута

□

Лемма (Пуанкаре)**.**

Ω – выпуклая область и коэфф. ω непрерывно дифференцируемы. Тогда если ω замкнута, то ω точная

Доказательство.

Только для $\mathbb{R}^2$. Надо доказать, что из замкнутости следует существование первообразной. Для этого достаточно проверить, что $\int\limits_\gamma \omega = 0$ для любой замкнутой кривой γ

$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ по замкнутости

Если выпуклости не будет, то на области с дыркой будут проблемы (формула $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ не определена в дырке)

□

Пример.

$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$

$\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}$ Замкнутая, но она не является точной

$\int\limits_{\text{един.окр.}} \omega = \int\limits_0^{2\pi} \cos t\, d\sin t - \sin t\, d\cos t = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$

Проблема в точке $(0,0)$

Следствие.

1. Замкнутая форма с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами в любом открытом шаре имеет первообразную

2. Замкнутая форма с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами локально точна

3.6. Билет 64: Первообразная формы вдоль пути. Следствие

***Определение* 3.8.**

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ ω – локально точная форма в Ω

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – первообразная формы ω вдоль пути γ, если $\forall \tau \in [a,b]$ в некоторой окрестности точки $\gamma(\tau)$ существует первообразная F для ω, т.ч. $F(\gamma(t)) = f(t)$ при t близких к τ

Лемма. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ локально постоянна $\Rightarrow f$ – константа

Теорема 3.5.

Первообразная форма вдоль пути существует и единственна с точностью до константы

Доказательство. Единственность.

f_1 и f_2 – первообразные вдоль пути γ $f = f_1 - f_2$

f локальна постоянна. Берем τ, в ее окрестности $f(t) = f_1(t) - f_2(t) = F_1(\gamma(t)) - F_2(\gamma(t))$

Существование.

Есть покрытие γ окрестности U_τ, в которых есть первообразная ω

Выберем конечное подпокрытие $U_{\tau_1}, U_{\tau_2}, \dots U_{\tau_l}$. По нему возьмем $r > 0$ из леммы Лебега (найдётся $r > 0$ что любое подмножество диаиметра r целиком содержится в каком-то элементе покрытия). Посмотрим на $\gamma[a,b]$ и нарежем ее на кусочки длины $< r$. Нарезка $a = t_0 < t_2 < \dots < t_m = b$

Перенумеруем U, т.ч. $\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$. Пусть F_i – первообразная в U_i.

Для f на $[t_0, t_1]$ возьмем $F_1(\gamma(t))$

Рассмотрим $U_1 \cap U_2 \ni \gamma(t_1)$ – непустое открытое множество, в нем есть первообразный F_1 и F_2

$\Rightarrow$ они отличаются на константу $\Rightarrow$ давайте исправим F_2 так, чтобы константа была равна 0.

f на $[t_1, t_2]$ равна $F_2(\gamma(t))$ и тд

□

Следствие.

γ – кусочно-гладкий путь, f – первообразная ω вдоль γ

Тогда $\int\limits_{\gamma}\omega = f(b) - f(a)$

Доказательство.

$f(t)$ на $[t_{i-1}, t_i]$ это $F_i(\gamma(t))$

$\int\limits_{\gamma}\omega = \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}}\omega = \sum\limits_{i=1}^{m}(F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))) = \sum\limits_{i=1}^{m}(F_i(\gamma(t_i)) - F_{i-1}(\gamma(t_{i-1}))) = F_m(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$

□

Замечание.

С помощью равенства $\int\limits_{\gamma}\omega = f(b) - f(a)$ можно определить интеграл от локально точной формы по негладкой кривой

3.7. Билет 65: Гомотопные пути. Односвязные области. Примеры. Существование первообразной относительно отображения.

***Определение* 3.9** (Гомотопные пути с неподвижными концами)**.**

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega \quad \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$

Если существует $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ непрерывное и

$\gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \gamma(t, 1) = \gamma_1(t), \;\; \gamma(a, u) = \gamma_0(a)$ и $\gamma(b, u) = \gamma_0(b)$

$\gamma_u(t) := \gamma(t, u)$ – путь, соединяющий точки $\gamma_0(a)$ и $\gamma_0(b)$

***Определение* 3.10** (Гомотопные замкнутые пути)**.**

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega \quad \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$

Если существует $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ непрерывна и

$\gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \gamma(t, 1) = \gamma_1(t), \;\; \gamma(a, u) = \gamma(b, u)$

Замечание Лектописца. Гомотопные замкнутые пути могут не пересекаться

Несложно понять, что гомотопия – отношение эквивалентности.

***Определение* 3.11.** Стягиваемый путь – замкнутый путь, гомотопный точке.

***Определение* 3.12.** Односвязная область – область, в которой любой замкнутый путь стягиваемый.

Пример.

1. Выпуклая область односвязна

   (Выпукла область – любой отрезок, соединяющий две точки множества, лежит в области целиком)

2. Звездная область односвязна

   (Звездная область, относительно точки O – любой отрезок, соединяющий O и точку множества, лежит в области целиком)

   Доказательство.

   Пусть выделенная точка – 0

$\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ – замкнутая кривая

$\gamma(t, u) = u\gamma_1(t) : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$

□

3. $\mathbb{R}^2$ $\{(0, 0)\}$ не является односвязной

Упражнение.

Ω – односвязна, $f : \mathbb{T} \to \Omega$ непрерывная

$\mathbb{T} = \{x^2 + y^2 = 1\}$

$\bar{\mathbb{D}} = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

Тогда f можно продолжить до $f : \bar{\mathbb{D}} \to \Omega$ с сохранением непрерывности

***Определение* 3.13.**

$\gamma : [a, b] \times [c, d] \to \Omega$ непрерывно, ω локально точная форма

$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ первообразная ω относительно γ, если f непрерывна и $\forall$ точки (τ, ρ) в окрестности $\gamma(\tau, \rho)$ существует такая первообразная F, что $f(t, u) = F(\gamma(t, u))$ при (t, u) близких к (τ, ρ)

Замечание.

При фиксированном $u = u_0$ $f(t, u_0)$ – перообразная вдоль пути $\gamma(t, u_0)$

Теорема 3.6.

Первообразная относительно отображения существует и единствена с точностью до константы

Доказательство.

Покроем $\gamma([a, b] \times [c, d])$такими шариками, что в каждом есть первообразная ω

Воьмум $r > 0$ из леммы Лебега (найдётся $r > 0$ что любое подмножество диаиметра r целиком содержится в каком-то элементе покрытия)

γ задана на компакте и непрерывна $\Rightarrow$ равномерно непрерывна на $[a, b] \times [c, d] \Rightarrow$ мы можем выбрать ε т.ч. растояние между образами точек $< r$

Нарежем прямоугольник на маленькие кусочки диаметра $< \varepsilon$

$\gamma([t_{i-1}, t_i] \times [u_{j-1}, u_j])$ целиком попадает в U_{ij}, где есть первообразная F_{ij}

f на $[t_0, t_1] \times [u_0, u_1]$ $f(t, u) = F_{1,1}(\gamma(t, u))$

f на $[t_1, t_2] \times [u_1, u_2]$ $f(t, u) = F_{1,1}(\gamma(t, u))$

$U_{11} \cap U_{21} \supset t_1 \times [u_0, u-1] \Rightarrow F_{11}$ и F_{21} первообразные в $U_{11} \cap U_{21} \Rightarrow$ они отличаются на константу и мы можем подправить $F_{21} \Rightarrow$ мы можем построить первообразную для всей строчки.

Аналогично построим f_j на $[a, b] \times [u_{j-1}, u_j]$

$f_j(t, u_j)$ и $f_{j+1}(t, u_j)$ – первообразная вдоль пути $\gamma(t, u_j) \Rightarrow$ отличаются на константу

Подправим f_{j+1} так, чтобы константа была равна $0 \Rightarrow$ мы соединили две строки, везде все хорошо, кроме места склейки.

Проверим в (t, u_j). В окрестности $\gamma(t, u_j)$ есть первообразная F, т.ч. $f_j(t, u) = F(\gamma(t, u))$ и первообразная $\tilde{F}$, т.ч. $f_{j+1}(t, u) = \tilde{F}(\gamma(t, u))$, но обе это первообразные равны, тк при $u = u_j$ левые части равны

□

3.8. Билет 66: Две теоремы об интегралах от локально точной формы по гомотопным путям. Точность форм в односвязных областях.

Теорема 3.7.

γ_0 и γ_1 гомотопные пути с неподвижными концами

ω – локально точная форма

Тогда $\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega$

Доказательство.

γ – гомотопия между γ_0 и γ_1 $\quad \gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$

f – первообразная ω относительно гомотопии γ

$\int\limits_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0) \qquad \int\limits_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1)$

Докажем, что $f(a, u)$ локально постоянна

Рассмотрим точку (a, u). Существует окрестность точки $\gamma(a, u)$ и первообразная F в ней, т.ч. $f(t, v) = F(\gamma(t, v))$ при (t, v) близки к $(a, u) \Rightarrow$

$f(a, v) = F(\gamma(a, v))$ при v близких к $u \Rightarrow f(a, v) = F(\gamma_0(a))$ при v близких к $u \Rightarrow$

$f(a, u)$ – константа, аналогично $f(b, u)$ – константа $\Rightarrow f(b, 0) - f(a, 0) = f(b, 1) - f(a, 1)$

□

Теорема 3.8.

γ_0 стягиваемый путь

ω – локально точная форма

Тогда $\int\limits_{\gamma_0} \omega = 0$

Доказательство.

γ – гомотопия между $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$

f – первообразная относительно γ

$\int\limits_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0) \quad 0 = \int\limits_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1)$

Докажем, что $f(b, u) - f(a, u)$ локально постоянна

Возьмем (a, u). В окрестности $\gamma(a, u) = \gamma(b, u)$ существует первообразная F, т.ч. $f(t, v) = F(\gamma(t, v))$ при (t, v) близки к $(a, u) \Rightarrow f(a, v) = F(\gamma(a, v))$ при v близких к u

Возьмем (b, u). В окрестности $\gamma(b, u) = \gamma(a, u)$ существует первообразная $\tilde{F}$, т.ч. $f(t, v) = \tilde{F}(\gamma(t, v))$ при (t, v) близки к $(b, u) \Rightarrow f(b, v) = \tilde{F}(\gamma(b, v))$ при v близких к u $(\gamma(b, v) = \gamma(a, v) \Rightarrow \tilde{F}(\gamma(b, v)) = \tilde{F}(\gamma a, v))$

Ну получили $f(a, v) = F(\gamma(a, v)), f(b, v) = \tilde{F}(\gamma(b, v)) = \tilde{F}(\gamma(a, v))$, а первообразные на константу отличаются

$\Rightarrow f(b, v) - f(a, v)$ постоянна при v близких к u

□

Теорема 3.9.

Ω – односвязная область, ω – локально точная форма $\Rightarrow$ ω – точная форма

Доказательство.

Был критерий, что есть первообразная, есть интеграл по любому замкнутому пути равен 0. Если область односвязная, то все пути стягиваемые (по определению), тогда по предыдущей теореме все интегралы по замкнутым путям равны 0. Значит, есть глобальная первообразная. □

4. Теория функций комплексного переменного

4.1. Билет 67: Голоморфные функции. Свойства. Связь f' с частными производными. Вещественная и комплексная линейность

***Определение* 4.1.**

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ голоморфна в точке $z_0 \in \Omega$, если существует конечный $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

Замечание.

f голоморфна в точке $z_0 \Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + \kappa(z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \to z_0$, где $\kappa \in \mathbb{C}$

Свойства.

1. Сумма, разность, линейная комбинация, произведение функций, голоморфных в точке z_0 – голоморфная в точке z_0
2. Если f голоморфна в точке z_0, g голоморфна в точке $f(z_0)$, то $g \circ f$ голоморфна в точке z_0
3. Если $g(z_0) \neq 0$, f и g голоморфны в точке z_0, то $\frac{f}{g}$ голоморфны в точке z_0

Замечание.

1. $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

   $$z = x + iy \qquad z_0 = x_0 + iy_0 \qquad f(z) = f(x, y)$$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = f'(z_0)$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{y - y_0} = if'(z_0)$$

   $\frac{\partial f}{\partial x} = f' = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

2. $f(z) = f(z_0) + \kappa(z - z_0) + o(z - z_0)$

   $$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = ax + by + i(cx + dy)$$

   $\kappa z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x)$

   В случае есть у нас есть голоморфность $\alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x) = ax + by + i(cx + dy)$

   $$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

   Заметим, что эта матрица обратима всегда, когда не 0, тк $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. $f(z) = f(z_0) + \kappa(z - z_0) + o(z - z_0)$

   $\kappa(z - z_0) = |\kappa| \cdot \frac{\kappa}{|\kappa|}(z - z_0) = re^{i\theta}(z - z_0)$

   Из алгебры мы помним, что r это растяжение в r раз, а $e^{i\theta}$ это поворот на угол θ.

4.2. Билет 68: Частные производные $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Условия Коши-Римана. Функции с постоянной вещественной частью.

***Обозначения* 4.1.** $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Замечание.

Если f голоморфизм в точке z_0, то $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Мотивация:

Мы дифференциал можем разложить в базис 2 способами.

$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot dy$

$d_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \cdot dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) \cdot d\bar{z}$

Тогда коэффициенты во втором разложении это те формулы, из обозначений.

Теорема 4.1 (условия Коши-Римана)**.**

$f : \Omega \to \mathbb{C} \;\; a \in \Omega \;\; f = g + ih$

f – дифференцируема в точке a, как функция $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Тогда следующие условия равносильны

1. f – голомофна в точке a
2. $d_a f$ – комплексо линейный
   $d_a = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$
3. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$
4. $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$ и $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$ (условие Коши-Римана)

Доказательство.

1⇔ 2 Это замечание 2;

2 ⇔ 4 Коэффициенты из матрицы A из замечания 1

3 ⇔ 4 $2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}$

□

Следствие.

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ голоморфна во всех точках и $\operatorname{Re} f = \text{const}$ Тогда $f = \text{const}$

Доказательство.

$f = g + ih \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$ и $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$

$g = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow h = \text{const} \Rightarrow f = \text{const}$ □

4.3. Билет 69: Два доказательства теоремы Коши о дифференциальной форме $f(z)\,dz$

***Обозначения* 4.2.** $f \in H(\Omega)$ означает, что $f : \Omega \to \mathbb{C}$ и голоморфна во всех точках

Теорема 4.2 (Коши)**.**
$f \in H(\Omega) \Rightarrow f(z)\,dz$ – локально точная функция

Доказательство.

1. Для случая, когда $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны

   $f(z)dz$ – замкнутая форма

   $f(z)dz = (g(z) + ih(z))(dx + idy) = (g(z)dx - h(z)dy) + i(h(z)dx + g(z)dy)$

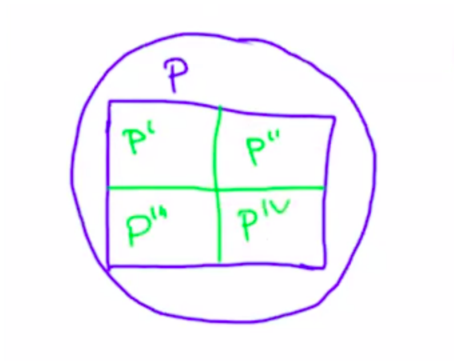
   $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial y} \Rightarrow hdx + gdy \text{ – замкнута} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = -\dfrac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow gdx - hdy \text{ – замкнута} \end{array}\right. \Rightarrow f \text{ замкнута} \Rightarrow fdz \text{ локально точна}$$

2. Для произвольного случая

   Рассмотрим какой-нибудь круг, содержащийся в Ω

   Нам надо проверить что в этом круге есть первообразная $\Rightarrow$ надо проверить, что $\int$ по любому прямоугольнику из этого круга равен нулю $\alpha(P) = \int\limits_P f(z)\,dz$

   Допустим, что это не 0

   $\alpha(P) = \alpha(P') + \alpha(P'') + \alpha(P''') + \alpha(P'''')$

   $|\alpha(P)| \leqslant |\alpha(P')| + |\alpha(P'')| + |\alpha(P''')| + |\alpha(P'''')|$

   Пусть P_1 – такой прямоугольник, что $|\alpha(P_1)| \geqslant \frac{1}{4}\,|\alpha(P)|$

   Пусть P_2 – такая четвертинка P_1, что $|\alpha(P_2)| \geqslant \frac{1}{4^2}\,|\alpha(P)|$ и т.д. $|\alpha(P_k)| \geqslant \frac{1}{4^k}\,|\alpha(P)|$

   $P \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ у них есть общая точка $z_0 \in \Omega$

   f голоморфна в точке $z_0 \Rightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0)|z - z_0|$

   $\int\limits_{P_n} f(z)\,dz = \int\limits_{P_n} f(z_0)\,dz + \int\limits_{P_n} f'(z_0)(z - z_0)\,dz + \int\limits_{P_n} \varepsilon(z - z_0)|z - z_0|\,dz$

   $\int\limits_{P_n} f(z_0)\,dz = 0 = \int\limits_{P_n} f'(z_0)(z - z_0)\,dz$

   Оценим оставшийся 3 интеграл

   $\left|\int\limits_{P_n} \varepsilon(z - z_0)|z - z_0|\,dz\right| \leqslant (\text{периметр} P_n)^2 \max|\varepsilon(z - z_0)| = \frac{1}{4^n}\,(\text{периметр} P)^2 \max|\varepsilon(z - z_0)| \Rightarrow$

   $0 < \frac{|\alpha(P)|}{(\text{периметр} P)^2} \leqslant \max|\varepsilon(z - z_0)|$

Противоречие, т.к. правая часть может быть сколь угодно маленькой, а левая часть константа

□

4.4. Билет 70: Следствие из теоремы Коши. Модификация теоремы Коши о дифференциальной форме $f(z)dz$

Следствие.

1. $f \in H(\Omega) \Rightarrow$ у любой точки есть окрестность, в которой существует F, т.ч. $F' = f$
2. $f \in H(\Omega)$ и γ стягиваемый путь $\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f\,dz = 0$

Доказательство.

1. $f \in H(\Omega) \Rightarrow fdz$ локально точна $\Rightarrow$ у любой точки есть окрестность, в которой $\exists F \ \ \frac{\partial F}{\partial x} = f \ \ \frac{\partial F}{\partial y} = if \Rightarrow F$ голоморфизм и $F' = f$

   $f(z)dz = fdx + ifdy$
2. $f \in H(\Omega) \Rightarrow fdz$ локально точна $\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f\,dz = 0$

□

Теорема 4.3.
$f \in C(\Omega)$ и $f \in H(\Omega \setminus \Delta)$, где Δ –прямая, параллельная вещественной оси

Тогда fdz локально точна

Доказательство.
Если наш круг, в котором мы считаем первообразную не касается Δ, то есть Коши $\Rightarrow \Delta$ проходит через центр круга

Мы хотим доказать, что интеграл по любому прямоугольнику, лежащему в круге, интеграл равен 0. Для прямоугольников не касающихся Δ опять все хорошо. А если прямоугольник пересекается Δ, то мы можем рассмотреть, его как сумму двух, у которых одна из сторон это отрезок на Δ. Осталось понять всё про последние прямоугольники

Рассматриваем прямоугольник P. От прямой Δ отступим на ε и получим два новых прямоугольника P_ε и $P - P_\varepsilon$.

`Замечание Лектописца.` У Храброва P_ε это прямоугольник, не касающийся Δ и по периметру схожий на P. У меня одна сторона P_ε лежит на прямой Δ

$$\int\limits_{P-P_\varepsilon} f\,dz = 0 \qquad \int\limits_{P} f\,dz - \int\limits_{P-P_\varepsilon} f\,dz = \int\limits_{P_\varepsilon} f\,dz$$

Рассмотрим отдельно интеграл по отрезкам, перпендикулярным Δ.

$f \in C(P) \Rightarrow f$ ограниченна $\Rightarrow |f| \leqslant M \Rightarrow \left|\int\limits_{\perp} f\,dz\right| \leqslant 2M\varepsilon$

Теперь с отрезками, параллельными Δ

2 параллельные прямые, но обход в противоположных направлениях + одна на εy выше, давайте будем интегрироваться, по одному отрезку, а функцию заменим на разность. (пусть длина отрезка C)

$$\left|\int\limits_{\parallel} f(z+\varepsilon iy)-f(x)\,dz\right| \leqslant \max|f(z+\varepsilon iy)-f(x)|\,C$$

$f \in C(P) \Rightarrow$ равномерно непрерывна $\Rightarrow \forall\delta > 0\ \ \exists\varepsilon > 0$ если $|z-w| < \varepsilon \Rightarrow |f(z)-f(w)| < \delta$

Значит мы оба интеграла можем сделать сколь угодно маленькими.

□

Следствие.

$f \in C(\Omega)$ и f голоморфна в Ω за исключением конечного множества точек (можно множества точек, не имеющие предельных)

Тогда fdz локально точна

Доказательство.

Если мы взяли точку, не из множества плохих, то можем найти окрестность, где их нет $\Rightarrow$ по Коши fdz локально точна

Если мы взяли точку из множества, то по прошлой теореме через эту вершину проведем Δ и опять все хорошо

□

4.5. Билет 71: Индекс кривой относительно точки. Интегральная формула Коши.

Определение* 4.2** (Индекс пути отностительно точки).***

γ – замкнутая кривая, не проходящая через 0

$r(t)$ и $\varphi(t)$ – ее задание в полярных координатах $r(t) > 0$

$r, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывны

$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) := \frac{\varphi(b)-\varphi(b)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

`Замечание.`

Это можно понимать немного по другому

Если у нас есть замкнутый путь, не проходящий через точку O, то если мы проведем из этой точки луч, то каждое пересечение по часовой стрелке дает -1, а против – 1

Теорема 4.4.

$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i\ \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$, если γ не проходит через 0

Доказательство.

$r(t)$ и $\varphi(t)$ параметризация γ в полярных координатах

$z = re^{i\varphi}\ \ dz = d(r(t)e^{i\varphi(t)}) = r'(t)e^{i\varphi(t)} + r(t)i\varphi'(t)e^{i\varphi(t)}$

$\frac{dz}{z} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)$

$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int\limits_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)\,dt = \ln r(t)\Big|_a^b + i\varphi(t)\Big|_a^b = i(\varphi(b)-\varphi(a)) = 2\pi i\ \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$

$r(a) = r(b)$, т.к. кривая замкнута

□

Следствие.

$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$

Теорема 4.5 (интегральная форсула Коши)**.**

$f \in H(\Omega) \;\; a \in \Omega$

γ – стягивающий путь, не проходящей через a.

Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a) \cdot \operatorname{Ind}(\gamma, a)$

Доказательство.

$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{при } z \neq a \\ f'(a), & \text{при } z = a \end{cases}$

Тогда $g \in C(\Omega)$ и $g \in H(\Omega/\{a\})$

$\Rightarrow$ $g(z)dz$ – локально точная форма $\Rightarrow$ $\int\limits_{\gamma} g(z)\, dz = 0 \Rightarrow \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz = 0 = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - f(a) \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - f(a) \operatorname{Ind}(\gamma, a)$ □

Пример.

У нас есть круг, с границей γ.

f голоморфна в окрестности круга

$\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \begin{cases} 0, & a \text{вне круга} \\ 2\pi i f(a), & \text{внутри круга} \end{cases}$

В частности $f(a) = \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$

4.6. Билет 72: Аналитичность голоморфной функции. Следствия

Теорема 4.6.

$f \in H(r(D)) \Rightarrow f$ аналитична в $r\mathbb{D}$

Доказательство.

$0 < r_1 < r_2 < r$

Запишем интегральную формулу Коши для круга радиуса r_2

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$

$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 - r/\xi} = \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{r}{\xi} + \frac{r^2}{\xi^2} + \dots\right)$ это равномерно сходящийся ряд, при $|z| \leqslant r_1$

$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_2} f(\xi) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\xi^{n+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{|\xi|=r_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

где $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ такое разложение есть для всех z и оно не зависит от r_2, тк k коэффициент это $\frac{f^{(k)}}{k!}$ $\Rightarrow$ от того, что мы поменяли r_2 не может ничего изменится.

□

Следствие.

1. Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $r\mathbb{D}$, то $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}$, где $0 < r_1 < r$

2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ f – голоморфна в $\Omega \Leftrightarrow f$ – аналитична в Ω

   Доказательство.

   "$\Rightarrow$" $z_0 + r\mathbb{D} \subset \Omega \Rightarrow f$ голоморфна в $z_0 + r\mathbb{D} \Rightarrow f$ раскладывается в ряд, сходящийся в $z_0 + r\mathbb{D}$, по степеням $z - z_0$

   "$\Leftarrow$" f – аналитична в точке $z_0 \Rightarrow f$ дифференцируема в точке z_0

   $\square$

3. $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$ бесконечно дифференцируема в Ω

4. $f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)$

5. $f \in H(\Omega) \Rightarrow \operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ – гармонические функции

   Замечание.
   $f : \Omega \to \mathbb{R}$ гармоническая, если
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \equiv 0$ во всех точках из Ω

   Доказательство.
   Условие Коши-Римана $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}$ и $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}$

   $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2}$

   $\square$

Замечание.

Если P – гармоническая функция в $\Omega \subset R^2$, то существует единственная функция с точностью до константы гармоническая функция

$Q : \Omega \to \mathbb{R}$, т.ч. $P + iQ \in H(\Omega)$

Упражнение. Доказать это

4.7. Билет 73: Теорема Мореры. Следствие. Вторая версия интегральной формулы Коши. Условия, равносильные голоморфности

Теорема 4.7 (Мореры)**.**

$f \in C(\omega)$ и $f(z)dz$ локально точная в Ω

Тогда $f \in H(\Omega)$

Доказательство.

Возьмем $a \in \Omega$

У нее несть окрестность, в которой $f(z)dz$ имеет первообразную, т.е. существует F, т.ч. существует F, т.ч. $F' = f$

Тогда F голоморфна в этой окрестности $\Rightarrow f = F'$ – голоморфна в этой окрестности $\Rightarrow f$ голоморфна в точке $a \Rightarrow f \in H(\Omega)$

$\square$

Следствие.

$f \in C(\Omega)$, Δ – прямая параллельная оси координнат

Если $f \in H(\Omega/\Delta)$, то $f \in H(\Omega)$

Доказательство.

По следствию теоремы Коши $f \in C(\Omega) \& f \in H(\Omega/\Delta) \Rightarrow f(z)dz$ локально точна в $\Omega \Rightarrow f \in H(\Omega)$ по теореме Морера

□

Теорема 4.8 (интегральная формула Коши)**.** $f \in H(\Omega)$, $K \subset \Omega$ K – компакт с кусочно-гладкой границей

Тогда $\int\limits_{\partial K} f(z)\,dz = 0$ и если $a \in \operatorname{Int} K$, то $\int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$

Доказательство.

1. $\int\limits_{\partial K} f(z)\,dx + f(z)dy = \int\limits_{K} \left(\frac{\partial i f(z)}{\partial y} - \frac{\partial f(z)}{\partial x}\right)\,dx\,dy = 0$

   Первый переход это формула Грина, а второй верен, тк это условие Коши-Римана

2. Выберем кружочек вокруг точки a так, чтобы он с границей полностью лежал в $\operatorname{Int} K$

   $\tilde{K} = K \setminus (a + r\mathbb{D})$ – компакт

   $0 = \int\limits_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \int\limits_{\text{окр}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,d = \int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - 2\pi i f(a)$

   Во втором переходе у нас изменился знак перед вторым интегралом, тк мы изменили направление обхода, а последний переход это интегральная формула Коши.

□

Упражнение. $f \in C(\operatorname{Cl}\mathbb{D})$ и $f \in H(\mathbb{D})$, $a \in \mathbb{D}$

Доказать, что $\int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$

Теорема 4.9.

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

Следующие условия равносильны

1) $f \in H(\Omega)$

2) f аналитична в Ω

3) f локально имеет первообразную

4) $f(z)dz$ локально точная форма

5) $f(z)dz$ замкнутая форма с непрерывными частными производными

6) $f \in C(\Omega)$ и интеграл $\int f(z)\,dz$ по любому достаточно малому прямоугольнику, со сторонами, параллельными осям координат

Доказательство.

1)⇔2) Это следствие из теоремы 4.6

1)⇒4) Это теорема Коши

4)⇒1) Это теорема Морера

3)⇔4) Мне вообще кажется, что это тождественные определения

5)⇒4) Это общее свойство форм (следствие леммы Пуанкаре)

1)+4)⇒5) Теорема 3.4

6)⇒4) Это теорема 3.2

5)⇒6) Формула Грина

□

4.8. Билет 74: Неравенство Коши. Целые функции. Примеры. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.

Теорема 4.10 (Неравенство Коши).

$f \in H(R\mathbb{D})\ \ r < R\ \ f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Тогда $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$, где $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$

Доказательство.

$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max\limits_{|\xi|=r} \left| \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \right| = r \max\limits_{|\xi|=r} |f(\xi)| \cdot \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}$

□

***Определение* 4.3.** Целая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $f \in H(\mathbb{C})$

Пример.

1. e^z
2. Многочлены
3. $\sin z$ и $\cos z$, тк $\sin = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{zi}$; $\quad \cos = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{z}$
4. $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{z}$; $\quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{z}$

Теорема 4.11 (Лиувилля).

f – целая и ограниченная функция ⇒ f – константа

Доказательство.

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad |f(z)| \leqslant M$

По неравенству Коши $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant \frac{M}{r^n} \to 0 \Rightarrow a_n = 0$ при $n \neq 0 \Rightarrow f$ – постоянная

□

Теорема 4.12 (Основная теорема алгебра).

P – многочлен, $P \neq \text{const} \Rightarrow P$ имеет корень

Доказательство.

От противного. Пусть $P(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$

Тогда $f(z) = \frac{1}{P(z)} \in H(\mathbb{C})$

Докажем, что $|f(z)|$ – ограничен

$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0$

Пусть $|z| \geqslant R = 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|$

Оценим теперь многочлен

$|P(z)| \geqslant |z|^n - |a_{n-1}z^{n-1}| - |a_{n-2}z^{n-2}| - \ldots - |a_0| \geqslant$

$|z|^n - |a_{n-1}||z^{n-1}| - |a_{n-2}z^{n-1}| - \ldots - |a_0||z^{n-1}| =$

$|z|^n - |z^{n-1}|(R-1) = |z|^{n-1}(|z| - R + 1) \geqslant R^{n-1} \geqslant 1$

Вне круга $|z| \leqslant R \quad |P(z)| \geqslant 1$

В круге $|z| \geqslant R \quad |P(z)|$ непрерывно $\Rightarrow$ достигается минимум

$\Rightarrow |P(z)| \geqslant |P(z_0)| > 0 \Rightarrow |P(z)| \geqslant m = \min(1, |P(z_0)|)$

$\Rightarrow |f(z)| \leqslant 1/m \Rightarrow f = \text{const}$ по теорему Лиувилля $\Rightarrow P = \text{const}$

□

Следствие.

Если $\deg P = n$, то $P(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$

Доказательство. Индукция □

4.9. Билет 75: Теорема единственности голоморфной функции (с производными). Следствие

Лемма.

Ω – область в метрическом пространстве $E \subset \Omega \;\; E \neq \varnothing$

E открыто в Ω и E замкнуто в Ω

Тогда $E = \Omega$

Доказательство.

Пусть $\Omega \setminus E \neq \varnothing$

Возьмем $a \in E, b \in \Omega \setminus E$ и соединим из кривой $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega \quad \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$

Рассмотрим $\gamma^{-1}(E) \subset [\alpha, \beta]$ открытое множество (прообраз открытого)

$\gamma^{-1}(\Omega \setminus E) \subset [\alpha, \beta]$ открытое множество

$[\alpha, \beta] \setminus \gamma^{-1}(E) = \gamma^{-1}(\Omega \setminus E) \Rightarrow \gamma^{-1}(E)$ замкнуто в $[\alpha, \beta]$

Рассмотрим $s := \sup \gamma^{-1}(E) \quad s \in \gamma^{-1}(E)$ т.к. $\gamma^{-1}(E)$ – замкнуто

$\Rightarrow s < \beta \qquad$ но $\gamma^{-1}(E)$ открыто $\Rightarrow \exists \delta > 0$, т.ч. $(s - \delta, s + \delta) \subset \gamma^{-1}(E)$

Это противоречит тому, что $s = \sup$

□

Теорема 4.13 (единственности)**.**

$f \in H(\Omega) \;\; z_0 \in \Omega$

Следующие условия равносильны

1) $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \ \forall n >\geqslant 0$

2) $f \equiv 0$ в окрестности точки z_0

3) $f \equiv 0$ в Ω

Доказательство.

1)⇒2) $f \in H(\Omega) \ \ z_0 + r\mathbb{D} \subset \Omega \Rightarrow f$ раскладывается в ряд тейлора в круге $z_0 + r\mathbb{D} \Rightarrow$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = 0$ при $|z - z_0| < r$

2)⇒1) Очевидно

3)⇒1) Очевидно

2)⇒3) $E = \{z \in \Omega :$ существует окр-ть точки z, т.ч. $f \equiv 0$ в этой окр-ти$\}$

$z_0 \in E \Rightarrow e \neq \varnothing$

E – открытое

Пусть $z_n \in E$ и $z_n \to z_* \in \Omega$

Надо доказать, что $z_* \in E$

$f^{(k)}(z_n) = 0 \ \ \forall k, n \ \ f^{(k)}(z_n) =\rightarrow f^{(k)}(z_*) \Rightarrow$

$f^{(k)}(z_*) = 0 \Rightarrow z_* \in E$, тк 1)⇒2)

$\Rightarrow E$ – замкнуто.

Следовательно по лемме $E = \Omega \Rightarrow f \equiv 0$ в Ω

□

Следствие.

1. $f, g \in H(\Omega)$ и $f = g$ в окрестности точки $z_0 \Rightarrow f = g$ в Ω
2. $f, g \in H(\Omega)$ и $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \ \ \forall n \Rightarrow f = g$ в Ω

Доказательство. Подставим в теорему $f - g$ □

4.10. Билет 76: Теорема о среднем. Принцип максимума. Следствие.

Теорема 4.14 (о среднем)**.**

$f \in H(\Omega) \ \ a \in \Omega$

Тогда $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$, если $a + r\mathbb{D} \subset \Omega$

Доказательство.

По интегральной формуле Коши

$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} re^{it} i\,dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$

Выполнили замену переменной $z = a + re^{it}$, тогда $dz = rde^{it} = ee^{it} i\,dt$

□

Следствие.

$f \in H(\Omega)$ $a \in \Omega$ $a + r\mathbb{D} \subset \Omega$

Тогда $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{a+\mathbb{D}} f(z)\, dx\, dy$

Доказательство.

Запишем этот интеграл в полярных координатах

$\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{a+\mathbb{D}} f(z)\, dx\, dy = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) \rho\, dt\, d\rho = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_0^r 2\pi f(a) \rho\, d\rho = f(a)$

□

Теорема 4.15 (Принцип максимума)**.**

$f \in H(\Omega)$ $a \in \Omega$

Если $|f(a)| \geqslant |f(z)|$ для всех z из некоторой окрестности a, то $f = \mathrm{const}$

Доказательство.

$M := |f(a)|$ Домножим f на $e^{i\varphi}$ так, что $f(a) = M > 0$

$M = f(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt$ для достаточно малых r

$M = f(a) = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(a + re^{it})|\, dt \leqslant M$

Последнее неравенство верно, тк $|f(a + re^{it})| \leqslant |f(a)|$

Везде стоят знаки равно $\Rightarrow |f(a + re^{it})| = M$ при достаточно малых r

Допишем теперь везде вещественную часть

$M = f(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(a + re^{it})\, dt \leqslant M$

Опять равенство $\Rightarrow \operatorname{Re} f(a + re^{it}) = M \Rightarrow \operatorname{Im} f(a + re^{it}) = 0$

$\Rightarrow f(a + re^{it}) = M$ при достаточно малых $r \Rightarrow f(z) \equiv M$ в окрестности точки $a \Rightarrow$ по теореме о единственности $f(z) \equiv M$ в Ω

□

Следствие.

Пусть Ω – ограниченная область $f \in C(\operatorname{Cl}\Omega)$ и $f \in H(\Omega)$

Тогда $|f|$ достигается максимума на границе Ω

Доказательство.

$|f|$ непрерывна на $\operatorname{Cl}\Omega$ – компакт $\Rightarrow$ в какой-то точке $a \in \operatorname{Cl}\Omega$ достигается максимум $|f|$

Пусть $a \in \Omega \Rightarrow f \equiv \mathrm{const}$, по принципу максимума $\Rightarrow$ на границе будет то же значение.

□

4.11. Билет 77: Кратность нуля. Множество нулей голоморфной функции. Теорема единственности.

***Определение* 4.4.**

$f \in H(\Omega)$ $z_0 \in \Omega$, если $f(z_0) = 0$, то z_0 – ноль функции f

Теорема 4.16.

$f \in H(\Omega), \quad f \not\equiv 0, \quad z_0 \in \Omega, \quad f(z_0) = 0$

Тогда существует $m \in \mathbb{N}, \quad g \in H(\Omega)$, т.ч. $g(z_0) \neq 0$ и

$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$

В частности $f(z)$ не обращается в ноль в некоторой проколотой области z_0

Доказательство.

Разложим функцию в ряд

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z - z_0)^n$

$m := \min\{\kappa \in \mathbb{N} : f^{(\kappa)}(z_0) \neq 0\} \geqslant 1$

Если $z \neq z_0$ $g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ в окрестности точки z_0 $\quad g(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z - z_0)^n$

□

***Определение* 4.5.**

m из теоремы – кратность нуля

Следствие.

1. $f, g \in H(\Omega)$ и $fg \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ или $g \equiv 0$

   Доказательство.

   Пусть $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow f(z_0) = 0 \Rightarrow$ если $f \not\equiv 0$, то $f \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $z_0 \Rightarrow fg \neq 0$ в проколотой окрестности точки z_0 □

2. Множество нулей голоморфной функции состоит из изоморфных точек. Т.е. у каждого нуля есть такая окрестность, в которой нет других нулей

Теорема 4.17.

$f, g \in H(\Omega)$

Если множество $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ имеет предельную точку в Ω, то $f \equiv g$

Доказательство.

Пусть $z_n \to z_0 \in \Omega$ и $f(z_n) = g(z_n) \Rightarrow f(z_0) = g(z_0)$ по непрерывности и $h(z) = f(z) - g(z)$ имеет нули в точках z_0, z_n $\forall n \Rightarrow$ у точки z_0 нет окрестности, в которой нет других нулей $\Rightarrow h \equiv 0$ □

Следствие.

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Они совпадают на вещественной прямой $\Rightarrow$ они верны на $\mathbb{C}$

Аналогичное можно провернуть и для гаммы функции, которую можно продолжить до случая с $\operatorname{Re} p > 0$