$\boxed{2.1.1}$ pf: (a) 若G中最长路 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 中一端点（不妨设为$x_0$）不为1度点

即 $d_G(x_0)\geq 2$. 则 $\exists x\in V(G)$, $x\notin\{x_1,\cdots,x_n\}$（否则形成圈）

s.t. $xx_0\in G$

则最长路不为P，矛盾

(b) 假设有两条最长路 $P_1,P_2$ 不含公共顶点

由于G是连通的，则至少存在一边（或多边的路）将$P_1,P_2$连接起来.

无论如何连接都能创造出一条更长路，矛盾

(c) G中有长为$2k-3$的路，则在该路上至少有 $2k-3-k+1$ 即 $k-2$ 条 长$\geq k$的路

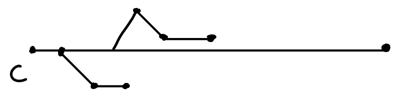
设该路为C. 则 $V(G\backslash C)$ 有 $v-2k+2$ 个元素.

其中每个点都与C中的一个点有路相连，且路的点与C中的点相异（除交点外）

这条路可在C上延长成长度$\geq k$的路（至少有一条）

$\because k-2+v-(2k-2)=v-k$.

$\therefore$ G中至少含 $v-k$ 条长度$\geq k$的路




$\boxed{2.1.2}$ pf: (a) $2v-2=2\varepsilon \geq v_1+2(v-v_1-1)+\Delta(G)$ （顶点度为1的点个数+顶点度最大点连的边数+顶点度$\geq 2$的点连的边数之和）

i.e. $2v-2 \geq 2v-2-v_1+\Delta(G)$

$\therefore v_1\geq \Delta(G)$

(b) 由(a)知：$2\geq\Delta(G)$

则 $v_2=v-v_1=v-2$.

则G中有Euler迹，又G中无圈且连通

$\therefore$ 该Euler迹为Hamilton路

$\therefore$ G为一条路

**2.1.4** 证明：若一棵树恰好有两个顶点的度为1，则它是一条路。

证：设$G$是恰有两个1度顶点的树，则$\varepsilon=\nu-1$，$\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon=2(\nu-1)$，$G$连通且除两个1度点外，其它顶点的度$\geqslant 2$。若其它顶点中有度大于2的顶点，则$\sum_{v\in V}d(v)>2+2(\nu-2)=2(\nu-1)$，矛盾！故其它顶点度均为2。于是$G$是路。

(c) $\begin{cases}2\varepsilon=2v-2=\sum_{i=1}^{\Delta} iv_i \\ \sum_{i=1}^{\Delta}v_i=v\end{cases}$

若$\exists i$，满足 $3\leq i\leq\Delta$, s.t. $v_i\geq v_1$ 则 $2v_1+v_2\leq v$ $(*)$

则 $2v-2\geq v_1+2v_2+3(v-v_1-v_2)$

$=3v-2v_1-v_2$

即 $2v_1+v_2-2\geq v$. 与$(*)$矛盾

$\therefore v_1>v_i \quad (3\leq i\leq\Delta)$

至于$v_2$，要么 $v_2>v_1$，要么 $v_2\leq v_1$ 即可得证原命题

(d) $\because \sum_{i=1}^{\Delta} iv_i=2v-2=2\left(\sum_{i=1}^{\Delta}v_i\right)-2$

$\therefore \sum_{i=1}^{\Delta}(i-2)v_i=-2$ $\quad\therefore v_1=2+\sum_{i=3}^{\Delta}(i-2)v_i=2+\sum_{x\in V}(d_G(x)-2)$

$\boxed{2.1.10}$ (参考例2.1.2)

Pf: 若 $A,B\subset X$, $A\neq B$ 且 $A\cup\{i\}=B\cup\{i\}$. 则 $A\triangle B=\{i\}$

用反证法: 设对 $\forall i\in X$, $\exists\, k=k(i)$, $l=l(i)$ $(1\le k<l\le n)$.

s.t. $A_k\cup\{i\}=A_l\cup\{i\}$. $\because A_k\neq A_l$, 则 $A_k\triangle A_l=\{i\}$

构造简单无向图 $G$:

$V(G)=X$, $k(i)l(i)\in E(G) \iff A_k\triangle A_l=\{i\}$, $1\le i\le n$

则 $\varepsilon(G)\ge n=\nu(G) \Rightarrow G$中含圈. 设 $(i_1,i_2,\cdots,i_s,i_1)$ 为 $G$ 中的圈.

不妨设 $i_j=j$. 则 $\exists\, k,l$. s.t. $i_j=k(j)$, $i_{j+1}=l(j)$, $1\le j\le s$.

则 $\{s\}=A_1\triangle A_s=(A_1\triangle A_2)\triangle(A_2\triangle A_3)\triangle\cdots\triangle(A_{s-1}\triangle A_s)$

$\subset\bigcup_{j=1}^{s-1}(A_j\triangle A_{j+1})=\{1,\cdots,s-1\}$ 矛盾.

$\boxed{2.1.12}$ Pf: (a)

**2.2.9 证明 $G$ 的任一非空边割集是 $G$ 的两两不相交的键的并集。**

证：设$[S,\bar{S}]$是 $G$ 的非空边割集。分两种情况证明如下：

(1) 当 $G$ 是连通的。

考虑$G[\bar{S}]$的各连通分支。设各分支的顶点集是 $H_i$，又 $G-H_i$ 的各连通分支为 $G_{ij}$。由于 $G$ 连通，$H_i$ 与各分支 $G_{ij}$ 有边相连，故 $G[\overline{V(G_{ij})}]$连通。依练习2.2.8知$[V(G_{ij}),\overline{V(G_{ij})}]$是个键。显然，这些键互不相交。又：$\bigcup_{i,j}[V(G_{ij}),\overline{V(G_{ij})}]=\bigcup_{i,j}[V(G_{ij}),H_i]$ $=\bigcup_i[\bar{H}_i,H_i]=\bigcup_i[S,H_i]=[S,\bar{S}]$。得证。

(2) 当 $G$ 不连通。

设 $G^{(k)}$ 是 $G$ 的一个连通分支，$S_k=V(G^{(k)})\cap S$，$\bar{S}_k^{(k)}=V(G^{(k)})\setminus S_k$，$\bar{S}_k=V(G)\setminus S_k$。显然有：

$$[S,\bar{S}]=\bigcup_k[S_k,\bar{S}_k^{(k)}]=\bigcup_k[S_k,\bar{S}_k], \qquad (*)$$

若$[S_k,\bar{S}_k^{(k)}]$是 $G^{(k)}$ 中的键。则有：

$$\omega(G^{(k)}[S_k])+\omega(G^{(k)}[\bar{S}_k^{(k)}])=\omega(G^{(k)}-[S_k,\bar{S}_k^{(k)}])$$
$$=\omega(G^{(k)})+1=2.$$
$$\omega(G-[S_k,\bar{S}_k])=\omega(G[S_k])+\omega(G[\bar{S}_k])$$
$$=\omega(G^{(k)}[S_k])+\omega(G^{k}[\bar{S}_k^{(k)}])+\omega(G-V(G^{(k)}))$$
$$=2+\omega(G)-1=\omega(G)+1$$

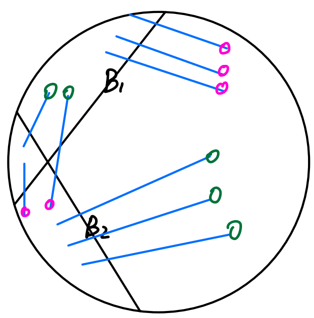
故$[S_k,\bar{S}_k]$也是 $G$ 中的键。若$[S_k,\bar{S}_k^{(k)}]$不是 $G^{(k)}$中的键，由(1)知，边割集$[S_k,\bar{S}_k]$可分解为 $G^{(k)}$中，从而也是 $G$ 中两两不相交的键的并集。故由$(*)$知，结论也成立。

(b) 设 $B_1=[S_1,\bar{S}_1]$

$B_2=[S_2,\bar{S}_2]$.

则 $B_1\triangle B_2=[\,S_1\triangle S_2,\ (S_1\cap S_2)\cup(V(G)\setminus(S_1\cup S_2))\,]$

$=[\,S_1\triangle S_2,\ \overline{S_1\triangle S_2}\,]$ 为割




(c) 由 Collary 2.1.6. 与 Collary 2.1.7 知.

而其易证