$\boxed{3.1.12}$ Pf: (a)

$\boxed{3.1.15}$

Pf: (a) 将图D中顶点任意安排在曲线：$x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上的不同点，

当 v_1, v_2, v_3, v_4 是任意四个相异顶点时，对应的 t_1, t_2, t_3, t_4 也两两不等.

∴ Vandermonde 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{vmatrix} \neq 0$.

则 v_1, v_2, v_3, v_4 四点不共面. 即图D中任意两边 v_1v_2, v_3v_4 在 $\mathbb{R}^3$ 中不相交.

故任意图可嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中

(b) 同(a)中构造，任何简单无向图都可以直线段嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中.

$\boxed{3.1.17}$

(a) Pf: (i) $v \geq 3$ 时，设 $E(G) = E(G_1) \cup \cdots \cup E(G_t)$. 其中 $t = t(G)$, G_i 为~~平面图~~ 边不交的 $(1 \leq i \leq t)$

由 Collary 3.1.4.1 知：$\varepsilon_i = \varepsilon(G_i) \leq 3v-6$, i.e. $\frac{\varepsilon_i}{3v-6} \leq 1$

又 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t$ ∴ $\frac{\varepsilon}{3v-6} = \frac{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t}{3v-6} \leq t = t(G)$

∴ $t(G) \geq \left\lceil \frac{\varepsilon}{3v-6} \right\rceil$

(ii) $G = K_n$ 时，$\varepsilon = \frac{n(n-1)}{2}$, $v = n$.

∴ 由(i)知：$t(K_n) \geq \left\lceil \frac{n(n-1)}{2(3n-6)} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(n-1)}{6n-12} \right\rceil$

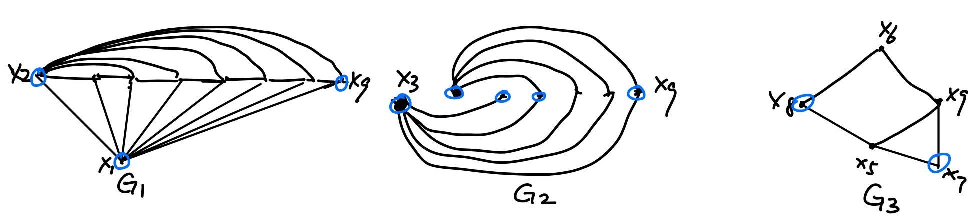
(iii) 对 $v \leq 5$，易验证

对 $v \geq 6$，由(ii)知：$t(K_n) \geq \left\lceil \frac{n(n-1)}{6n-12} \right\rceil$

∵ $\lceil x \rceil \geq [x+\delta]$, $\delta \in (0,1)$. 取 $\delta = 1 - \frac{1}{3n-6}$

则有 $t(K_n) \geq \left\lceil \frac{n(n-1)}{6(n-2)} + 1 - \frac{1}{3n-6} \right\rceil \geq \left[\frac{n+7}{6} \right]$

(b)



H_1 为 G_1 中 x_{10} 连接 x_1, x_2, x_9.　　H_2 为 G_2 中 x_{10} 连接 x_3, x_4, x_5, x_6, x_9.　　H_3 为 G_3 中 x_{10} 连接 x_7, x_8

(c) $n=3,4$时，$t(K_n)=1$，(ii)右式为 1，1

(iii)右式为 1，1.

$5\le n\le 8$时，$t(K_n)=2$，(ii)右式为 2.

(iii)右式为 2.

3.2.1 (d)

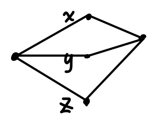
$\nu<5$ 即有 $\nu\le 4$，则图 G 不含 K_5 的细分图.

由 Kuratowski 定理：G 是平面图.

$\varepsilon<9$ 即有 $\varepsilon\le 8$，则图 G 不含 $K_{3,3}$ 的细分图.

由 Kuratowski 定理：G 是平面图.

3.2.3



pf：设 $V(G)=\{x,y,z,x_4,x_5,\cdots,x_\nu\}$

由 Kuratowski 定理，G 不含 $K_{3,3}$ 细分图.

则存在至多两点 x_i,x_j $(i\ne j)$，与 x,y,z 都相邻.

又集合 $\{x,y,z\}$ 与集合 $V\setminus\{x,y,z\}$ 之间的边数至多 $2\cdot 3+(n-5)\cdot 2=2n-4$.

$\therefore\ d_G(x)+d_G(y)+d_G(z)\le 6+(2n-4)=2n+2$.