4.1.2

11.1.2 证明对 N 中任一流 f 及任一 $S\subseteq V$ 均有：

$$\sum_{v\in S}(f^+(v)-f^-(v))=f^+(S)-f^-(S)$$

（注意，一般情况 $\sum_{v\in S}f^+(v)\neq f^+(S)$，$\sum_{v\in S}f^-(v)\neq f^-(S)$。）

证：若 $v_1, v_2\in S$，$(v_1, v_2)\in A(D)$，则在 $f^+(v_1)$ 中含 $f((v_1, v_2))$，$f^-(v_2)$中也含 $f((v_1, v_2))$，故 f 对 (v_1, v_2)这种弧在 $\sum_{v\in S}(f^+(v)-f^-(v))$ 中不产生影响，故

$$\sum_{v\in S}(f^+(v)-f^-(v))=f(S,\bar{S})-f(\bar{S},S)=f^+(S)-f^-(S).$$

4.1.4

Pf: (a) 由定义知，$\forall u\in S$，有 $f^+(u)-f^-(u)=\begin{cases}\mathrm{val}f, & u=x\\ 0, & u\in S\setminus\{x\}.\end{cases}$

∴由习题4.1.2：$\mathrm{val}f=f^+(x)-f^-(x)=\sum_{u\in S}(f^+(u)-f^-(u))$

$=f^+(S)-f^-(S)$

(b) 由Thm 4.1.1 知：

$\mathrm{val}f\le \mathrm{val}f'=\mathrm{cap}B'\le \mathrm{cap}B.$ 其中B'为 D中最小割，f'为D的最大流.

(c) 由 Thm 4.1.1 及(b)知：

$\mathrm{Val}f=\mathrm{cap}B \Leftrightarrow f$为最大 (x,y) 流，B为最小 (x,y) 割

在Thm4.1.1 证明中，有 $\mathrm{Val}f=f^+(S)-f^-(S)\le f^+(S)\le c(S)=\mathrm{cap}B$

其中B为 D中最小割，f 为D的最大流.

则f为最大 (x,y) 流，B为最小 (x,y) 割 $\Leftrightarrow \mathrm{val}f=\mathrm{cap}B \Rightarrow \begin{cases}f^+(S)=c(S)\\ f^-(S)=0\end{cases}$ i.e. $f(a)=\begin{cases}c(a), & a\in(S,\bar{S})\\ 0, & a\in(\bar{S},S)\end{cases}$

而 $f(a)=\begin{cases}c(a), & a\in(S,\bar{S})\\ 0, & a\in(\bar{S},S)\end{cases}$ 时，由(a)：$\mathrm{Val}f=f^+(S)-f^-(S)=\sum_a c(a),\quad a\in(S,\bar{S})$

$=\mathrm{cap}B.$

4.2.1

Pf: (a) 考虑 G的对称有向图D.

则 G中 k条边不交的连接 x和y的路对应D中k条边的 (x,y) 路. 反之亦然

于是有 $\eta_G(x,y)=\eta_D(x,y)$.

另外，$E_G[S,\bar{S}]$ 是 G的 xy 割，$x\in S$, $y\in\bar{S} \Leftrightarrow E_D(S,\bar{S})$ 是D的 (x,y)割

而且 $|E_G[S,\bar{S}]|=|E_D(S,\bar{S})|$

注意到： $|E_D(S,\bar{S})|\ge\lambda_D(x,y)$, $|E_G[S,\bar{S}]|\ge\lambda_G(x,y)$.

于是，一方面，若 $E_G[S,\bar{S}]$ 是 G的最小 xy割，则由定理4.2.1有

$\lambda_G(x,y)=|E_G[S,\bar{S}]|\ge\lambda_D(x,y)=\eta_D(x,y)=\eta_G(x,y)$

另一方面，若 $E_D(S,\bar{S})$ 是 D的最小 (x,y)割，则由定理4.2.1有

$\eta_G(x,y)=\eta_D(x,y)=\lambda_D(x,y)=|E_D(S,\bar{S})|\ge\lambda_G(x,y)$

结论成立

(b) 考虑 G的对称有向图D.

D中内点不交的 (x,y) 路与G中内点不交的 xy 路一一对应.

则 $\zeta_D(x,y) = \zeta_G(x,y)$

对于D中分离集 $S \subseteq V(D)\setminus\{x,y\}$, $D-S$ 中不存在 (x,y) 路

则 $G-S$ 中也不存在 xy 路

对于G中分离集 $S \subseteq V(G)\setminus\{x,y\}$, $G-S$ 中不存在 xy 路

则 $D-S$ 中也不存在 (x,y) 路

则有 $\kappa_D(x,y) = \kappa_G(x,y)$

由点形式 Menger 定理: $\kappa_G(x,y) = \kappa_D(x,y) = \zeta_D(x,y) = \zeta_G(x,y)$

4.3.8

Pf: (b) 法一.

由 Whitney 不等式: $\kappa(D) \le \lambda(D) \le \delta(D)$

又 $\delta(Q_n) = n$ 显然成立, 则要证 $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$, 即证 $\kappa(Q_n) \ge n$.

由 Thm 4.3.2 (k连通判定准则),

$\kappa(Q_n) \ge n \iff \zeta_{Q_n}(x,y) \ge n, \ \forall x,y \in V(Q_n)$.

下面构造n条点不交的 xy 路

设 $x = (r_1, \cdots, r_t, x_1, \cdots, x_s)$

$y = (r_1, \cdots, r_t, y_1, \cdots, y_s)$ 其中 $r_i, x_i, y_i = 0$ 或 1. x_i 与 y_i 在同一位置但 $|x_i - y_i| = 1$.

则 x 到 y 的 n 条路为: $r_1, \cdots, r_t$ 保持不变, 按 $x_1, \cdots, x_s$

$x_2, \cdots, x_s, x_1$

$\vdots$

$x_s, x_1, \cdots, x_{s-1}$ 的顺序变 (共s条)

先改变 r_i, 再按 $x_1, \cdots, x_s$ 的顺序变, 再变回 r_i. (共t条)

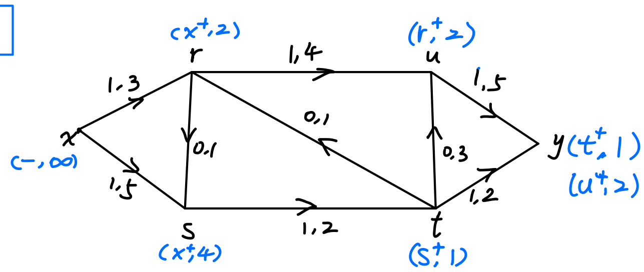
$\because s + t = n$ $\therefore$ 上述即为n条点不交的路 (未细证点不交)

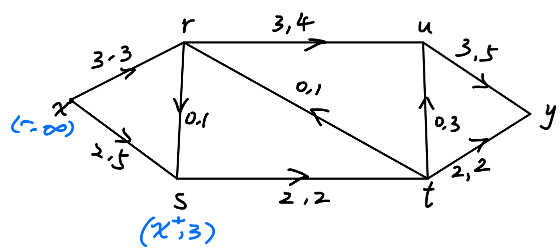
法二: (数归)

(a) (i) 上述已给出

(ii) 易构造, 仿上述构造即可

$\boxed{4.4.2}$





∴ 最大流 $\mathrm{val} f = 5$. 最小割 $B = (S, \bar{S})$. 其中 $S = \{x, s\}$.