习题 1.2

1.2.4

设 $|X|=m$，则 $|Y|=\nu-m$

若 ν 是偶数，

此时 $\varepsilon(G)\le m(\nu-m)\le\frac{\nu^2}{4}$

当且仅当 $m=\frac{\nu}{2}$ 时取等

若 ν 是奇数，

此时 $\varepsilon(G)\le m(\nu-m)\le\frac{\nu^2-1}{4}$

当且仅当 $m=\frac{\nu-1}{2}$ 或 $\frac{\nu+1}{2}$ 时取等

特别地，$\varepsilon(K_{m,n})=mn$

（$|X|=m,|Y|=n$，对于 X 的每个点，都有 n 种选择）

1.2.6

Pf：(a) $D\cong D^c$，则 $\varepsilon(D)=\varepsilon(D^c)$

又 $\varepsilon(D)+\varepsilon(D^c)=\nu(\nu-1)$ （D为有向图）

$\Rightarrow\ \varepsilon=\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$

(b)

$D\cong D^c$，则 $\varepsilon(D)=\varepsilon(D^c)$

又 $\varepsilon(D)+\varepsilon(D^c)=\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ （D为无向图）

$\Rightarrow\ \varepsilon=\frac{1}{4}\nu(\nu-1)$

显然 $\varepsilon\in\mathbb{Z}$，则 $\nu\equiv0,1\pmod 4$

习题 1.3.

1.3.2

Pf：设 G 为无向图，设 $\nu(G)=n$，

则 $\forall x\in G$，$d_G(x)\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}=A$

假设不存在顶点度相同的两点

则 n 个点的顶点度恰为 A 中 n 个数．

则 $\exists x,y\in G$，$d_G(x)=0$，$d_G(y)=n-1$．矛盾．

故假设不成立．

1.3.5

Pf：(a) 若 $E(G)=\phi$，即 $\varepsilon=0$，结论成立．

下设 $E(G)\ne\phi$．任取 $xy\in E(G)$

由于 G 是简单图且不含三角形，所以

$$(d_G(x)-1)+(d_G(y)-1)\le\nu-2$$

即 $\quad \nu\ge d_G(x)+d_G(y)\quad,\forall xy\in E(G)\qquad(*)$

上式两边对 G 中所有边求和，并由 Cauchy 不等式和定理 1.3.2 知

$$\nu\varepsilon\ge\sum_{x\in V}d_G^2(x)\ge\frac{1}{\nu}\Big(\sum_{x\in V}d_G(x)\Big)^2=\frac{4}{\nu}\varepsilon^2\qquad(**)$$

即有 $\varepsilon\le\frac{\nu^2}{4}$ 又 $\varepsilon\in\mathbb{Z}$

$\therefore\ \varepsilon\le\lfloor\frac{\nu^2}{4}\rfloor$

（注：不等式的证法可照搬例 1.3-1）

取"="仍有待解决

所求 G 为 (a) 中的补图．

(b) 若 $\nu=2k$，则 $\varepsilon(G^c)\le k^2$．

$\therefore\ \varepsilon(G)\ge\frac{\nu(\nu-1)}{2}-k^2=k^2-k$

同理：$\nu=2k+1$ 时，$\varepsilon(G)\ge k^2$

1.3.8 令H是G中边数最大的k部支撑子图

H的k部划分为 $\{X_i\}$, $i=1,2,\cdots,k$

任取 $x\in V(G)$, 不妨设 $x\in X_1$, 令 $d=d_G(x)-d_H(x)$.

若 $d>\frac{1}{k-1}d_H(x)$. 则 $d_G(x)>\frac{k}{k-1}d_H(x)$.

令 $X_1'=X_1\setminus\{x\}$, $X_2'=X_2\cup\{x\}$.

(注: $\frac{1}{k-1}d_H(x)$ 为 x 向 $k-1$ 个部分的度的均值, 则必有一部分使得 x 到该部的度小于 $\frac{1}{k-1}d_H(x)$. 不妨设该部为 X_2)

则得到 $\{X_1', X_2', X_3, \cdots, X_k\}$ 为k部划分的k部子图 H'.

并且 $\varepsilon(H')=\varepsilon(H)+d-d_H(x)>\varepsilon(H)$.

与 $\varepsilon(H)$ 最大性矛盾 于是 $d\le\frac{1}{k-1}d_H(x)$ 即 $d_G(x)=d+\frac{1}{k-1}d_H(x)\le\frac{k}{k-1}d_H(x)$ $(*)$

即 $(1-1/k)\,d_G(x)\le d_H(x)$

对 $(*)$ 式两边求和, ~~再~~由定理1.3.2知 $\varepsilon(G)\le\frac{k}{k-1}\varepsilon(H)$

即 $(1-1/k)\,\varepsilon(G)\le\varepsilon(H)$

1.3.12

Second proof (Erdös 1970). This proof makes use of the structure of the Turán graphs. Let $m\in V$ with $d_m=\max_{1\le j\le n}d_j$. We denote by S the neighbors of m, $|S|=d_m$, and set $T=V\setminus S$. As G contains no k-clique, and m is adjacent to all of S, we note that S contains no $(k-1)$-clique. We now construct the following graph H on V (see Figure 4). H corresponds to G on S and contains all edges between S and T, but no edges within T.

In other words, T is an independent set in H, and we conclude that H has again no k-cliques. Let d_j' be the degree of j in H. If $j\in S$, then we certainly have $d_j'\ge d_j$ by the construction of H, and for $j\in T$, we see $d_j'=|S|=d_m\ge d_j$ by the choice of m. We infer $|E(H)|\ge|E|$, and conclude that among all graphs with a maximal number of edges, there must be one of the form of H. Applying induction on S, we thus infer that among the graphs with a maximal number of edges there is a graph $K_{n_1,\dots,n_{k-1}}$, which implies $|E|\le\sum_{i\ne j}n_in_j$ and therefore (1). □

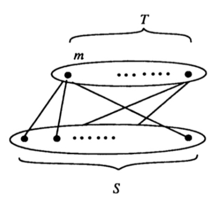


Figure 4.

We note that this proof yields the full statement $|E|\le|E(H)|$, $H=$ Turán graph.

1.3.13

Pf: 取点 $m\in V$, $d_G(m)=\Delta(G)$

S为m的邻点集. $T=V(G)\setminus S$

$\because$ G无 K_{k+1} 子图, S为m邻集

$\therefore$ S无 K_k 子图

构造图H: S on G, T与S之间的所有边, T中无边

易判断: H中无 K_k 子图

由H构造知: if $j\in S$, 则 $d_H(j)\ge d_G(j)$

if $j\in T$, 则 $d_H(j)=|S|=d_G(m)=\Delta(G)\ge d_G(j)$

$\therefore$ $E(H)\ge E(G)$ i.e. $\varepsilon(H)\ge\varepsilon(G)$

即所有图中, 只要有极大顶点度的, 都可构造出这样的H.

习题1.4

1.4.2. Pf: "$\Rightarrow$" D是强连通的

$\therefore \forall x,y\in D$, $\exists$有向路(x,y).

设$x=x_1$, $y=x_v$. 其余点为$x_2,\cdots,x_v$.

则 x_i与x_{i+1}之间$\exists$有向路(x_i,x_{i+1}) $(i=1,\cdots,v)$

将这些有向路拼接起来即为所求(x,y)链.

"$\Leftarrow$" 对$\forall x,y\in D$, $\exists$有向链(x,y)通过所有顶点.

1.6.1 证明：如果 G 中有一条(u,v)-途径，则 G 中也存在一条(u,v)-路。

证：事实上，我们由 u 出发沿(u,v)-途径走，若遇到相同点，则把相同点间的那段途径去掉，然后继续沿(u,v)-途径往下走，一直走到终点 v 为止。按作法知，最后我们所得的(u,v)-途径，它是 G 中一条(u,v)-路。

由上述引理知，$\exists$有向路(x,y).

则 D是强连通的

1.3.5 (a) 取G中顶点度最小点u,则$d_G(u)=\delta(G)$. 记$G'=G\backslash u$. $v=v(G')$

若 $d(u)>\frac{v}{2}$.

① v为偶数，则 $d(u)\geq\frac{v}{2}+1$. 设u的邻集为$\{v_1,\cdots,v_s\}$ $s\geq\frac{v}{2}+1$.

则 v_i,v_j不相邻 (否则生成三角形).

则 $v-s\leq\frac{v}{2}-1$, 记除$u,v_1,\cdots,v_s$外剩下点为$u_1,\cdots,u_t$, 其中$t\leq\frac{v}{2}-1$.

$\therefore v_i$与$u_1,\cdots,u_t$相邻(因为$d_G(v_i)\geq d_G(u)\geq\frac{v}{2}+1>\frac{v}{2}-1\geq t$)

同样地，u_i,u_j之间不相邻.(否则生成三角形).

则 G为二部图

② v是奇数，则 $d(u)\geq\frac{v+1}{2}$. 同样可得G为二部图.

$\therefore$由二部图 $\frac{|V(G)|^2}{4}\geq E(G)$. 结论成立

(注: $E(G)\leq s(v-s)\leq(\frac{v}{2})^2$, 若$v$为偶，则取"="时$G\cong K_{\frac{v}{2},\frac{v}{2}}$, 若$v$为奇,则取"="时$G\cong K_{\lfloor\frac{v}{2}\rfloor,\lceil\frac{v}{2}\rceil}$)

若 $d(u)\leq\frac{v}{2}$. 根据归纳法，对$V(G)$归纳.

$\therefore$有 $|E(G')|\leq\frac{|V(G)-1|^2}{4}=\frac{|V(G)|^2-2|V(G)|+1}{4}$

$\therefore |E(G)|=|E(G')|+d(u)\leq\frac{v}{2}+\frac{|V(G)|^2-2|V(G)|+1}{4}\leq\frac{|V(G)|^2}{4}$ (考虑$v(G)$奇偶可得).

We claim:
v为偶时，
$G'\cong K_{\frac{v}{2},\frac{v}{2}}$, 则 $G\cong K_{\frac{v}{2}+1,\frac{v}{2}}=K_{\lfloor\frac{v+1}{2}\rfloor,\lceil\frac{v+1}{2}\rceil}$
v为奇时，

$G' \cong K_{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor, \lceil \frac{v}{2} \rceil}$，则 $G \cong K_{\frac{v+1}{2}, \frac{v+1}{2}}$.

proof: 若 $V(G) = 2k+1$，则 $|E(G')| \le k^2$，$|E(G)| \le k^2 + k$.

若 $V(G) = 2k$，则 $|E(G')| \le k(k-1)$，$|E(G)| \le k^2$

再加上不生成三角形这一条件即可证得 claim

1.5.3

Pf: (a) 设 x 为 T 的一个最大出度顶点

若 x 不是王，则 $\exists y\in V(T)$, s.t. $d_T(x,y)\geq 3$

则 $(y,x)\in E(T)$，且任取 $z\in N_T^+(x)$，有 $(y,z)\in E(T)$.

$\therefore d_T^+(y)\geq d_T^+(x)+1$，这与 x 的最大性矛盾

故 x 是 T 的王

(b) 假设 T 中恰有两个王 x,y.

显然 $|V(T)|\geq 3$

不妨令 $(x,y)\in E(T)$ $\qquad\because y$ 是 T 的王

$\therefore \exists z\in V(T)$, s.t. $(y,z),(z,x)\in E(T)$

令 $V_1=\{a\mid a\in V(T),\ d(z,a)=1\}$，$V_2=\{a\mid a\in V(T),\ d(z,a)=2\}$，$V_3=\{a\mid a\in V(T),\ d(z,a)\geq 3\}$

则有 $x\in V_1$，$y\in V_2$，$\Rightarrow V_1\neq\emptyset$，$V_2\neq\emptyset$.

又 z 不为 T 的王 $\Rightarrow V_3\neq\emptyset$

考虑导出子图 $T[V_3]$，由(a)知 $T[V_3]$ 中必有一个王，记为 m.

$\because m\in V_3$ $\quad\therefore (m,z)\in E(T)$. 任取 $a\in V_1$，有 $(m,a)\in E(T)$

进而 $\forall b\in V_2$，有 $d(m,b)\leq 2$ $\quad$ ($(m,b)\in E(T)$ 或 $m\to a\to b$)

$\therefore m$ 为 T 的王，与 T 恰有两王矛盾

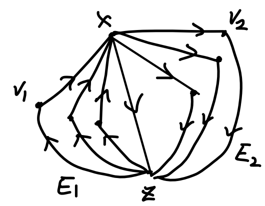
(c) v 为奇数时，取 T 为平衡图，则 T 的每个点出度皆为 $\frac{v-1}{2}$，即为最大出度，则每点都是王.

v 为偶数时，则 $v\geq 6$，记 $v=2k$ $(k\geq 3)$

取 $v-1$ 阶平衡竞赛图 T'，任取 $x\in T'$

令 $V_1=N_{T'}^-(x)$，$\quad V_2=N_{T'}^+(x)$

然后我们通过 T' 来构造 T.



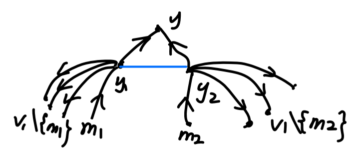
① 若 $\forall y\in V_2$，$N_{T'}^+(y)\neq V_1$

令 $V(T)=V(T')+\{z\}$，$z\notin V(T')$

$E_1=\{(z,y)\mid y\in V_1\}$，$E_2=\{(z,y)\mid y\in V_2\}$，$E_3=\{(x,z)\}$

$E(T)=E(T')\cup E_1\cup E_2\cup E_3$

则显然 x 为 T 的王，V_1,V_2 中点也为 T 的王（根据定义）



$\because \forall y\in V_2$，$N_{T'}^+(y)\neq V_1$

$\therefore \exists y'\in V_1$, s.t. $(y',y)\in E(T)$ $\quad\therefore d_T(z,y)=2$，$y\in V_2$

$\therefore z$ 也为 T 的王

此时 T 中所有点都是王

② 若 $\exists y\in V_2$, s.t. $N_{T'}^+(y)=V_1$ 则这样的点至多一个（若有两个 y_1,y_2，则无论边 y_1y_2 还是 y_2y_1，都与平衡点矛盾）

取 $m\in V_1$，则 $(y,m)\in E(T')$ 且对 $\forall y'\in V_2\backslash\{y\}$，有 $N_{T'}^+(y')\neq V_1\backslash\{m\}$.

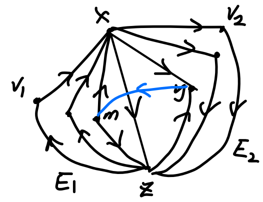
（这样的 m 必然能取到，不妨只考虑存在两个 $y_1,y_2\in V_2$，$N_{T'}^+(y_1)=V_1\backslash\{m_1\}$，$N_{T'}^+(y_2)=V_1\backslash\{m_2\}$，此时不论 y_1y_2 还是 y_2y_1，都与平衡点矛盾）

令 $V(T)=V(T')\cup\{z\}$，$z\notin T'$，$E_1=\{(z,n)\mid n\in V_1\backslash\{m\}\}$

$E_2=\{(n,z)\mid n\in V_2\setminus\{y\}\}$

$E_3=\{(x,z),(m,z),(z,y)\}.$

$E=E(T')\cup E_1\cup E_2\cup E_3$



由上述条件知 T 中所有点均为王、

$\boxed{1.5.4}$

1.6.7 证明：若 G 不连通，则 G^c 是连通的。

(a) **证**：对 G^c 的任二点 u，v，若 u，v 在 G 中不相邻，则在 G^c 中相邻。若 u，v 在 G 中相邻，则 u，v 是 G 的一个分支中，且必有 G 的另一分支的点 w 与 u，v 都不相邻，于是 w 与 u，v 在 G^c 中相邻，u-w-v 即为 G^c 中的一条 (u, v)-通路。故 G^c 连通。

Pf: $\forall x\in G$，设 G 的包含 x 的连通分支为 T.

则 $\forall y\in V(G)\setminus V(T)$，$d_{G^c}(x,y)=1$

取 $V(G)\setminus V(T)$ 中点 z，对 $\forall m\in V(T)$，有 $d_{G^c}(z,m)=1$.

则有 $d_{G^c}(x,m)=d_{G^c}(x,z)+d_{G^c}(z,m)=2$

$\therefore$ $d(G^c)\le 2$ 且 G^c 连通.

(b) Pf:

"$\Longrightarrow$" 若 G 含支撑子图 $K_{m,n}$，则 G^c 至少有 2 个连通分支，与 G^c 连通矛盾

$\therefore$ G 不含支撑子图 $K_{m,n}$

同理 G^c 也不含支撑子图 $K_{m,n}$

"$\Longleftarrow$" 若 G 非连通，则 G 有连通分支 $T_1,\cdots,T_n$ $(n\ge 2)$

则 G^c 有完全 n 部图作为支撑子图.

故 G^c 含支撑子图 $K_{m,n}$. 矛盾.

$\therefore$ G 连通

同理 G^c 也连通

(c) Pf:

1.6.12 图 G 的**直径**是 G 中两顶点之间的最大距离。证明：若 G 有大于 3 的直径，则 G^c 的直径小于 3。

证：对任意一对 u，$v\in V(G)$。若边 $uv\notin E(G)$，则 $uv\in E(G^c)$ 故 $d_{G^c}(u, v)=1$。若 $uv\in E(G)$，则 $uv\notin E(G^c)$，这时分两种情况讨论。(1)若 $V(G)$ 中任意顶点至少和 u，v 中一顶点相邻。此时任意的 x，$y\in V(G)$ 有 $d_G(x, y)\leqslant 3$，这和假设矛盾，故(1)不可能。(2) $V(G)$ 中存在一顶点 w 使 uw，$wv\notin E(G)$，则 vw，$wv\in E(G^c)$。此时 $d_{G^c}(u, v)=2$。综合上述情况，G^c 的直径小于 3。

$\forall x,y\in V(G)$.

若 $(x,y)\notin E(G)$，则 $d_{G^c}(x,y)=1$

若 $(x,y)\in E(G)$.

if 对 $\forall m\in V(G)$，均有 $(m,x)\in E(G)$ or $(m,y)\in E(G)$.

则 $d(G)\le 3$. 矛盾

if $\exists m\in V(G)$，均有 $(m,x)\notin E(G)$ 且 $(m,y)\notin E(G)$.

则 $d_{G^c}(x,y)=2$.

综上: $d(G^c)\le 2<3$

(d) Pf: 设 $x\in V(G)$ 且 $d(x)=v-2$，则 x 与 $a_1,a_2,\cdots,a_{v-2}$ 相邻，不与 y 相邻

由 $d(G)=2$. 不妨设 y 与 a_1 相邻.

由 $d(a_2,y)\le 2$，a_2 必与 a_1 或 y 相邻

由 $d(a_3,y)\le 2$，a_3 必与 a_1,a_2,y 三个中之一相邻

由 $d(a_{v-2}, y) \le 2$，a_{v-2} 必与 $a_1, \cdots, a_{v-3}, y$ 中一个相邻

则 $\varepsilon \ge v-2+v-2 = 2v-4$

1.6.13 证明：若 G 是直径等于2的单图，且 $\Delta = \nu-2$，则 $\varepsilon \geqslant 2\nu-4$。

证：由 $\Delta=\nu-2$ 知，G 中有顶点 v 与 $\nu-2$ 个顶点相邻，从而有 $\nu-2$ 条边。剩下的另一顶点 u 与 v 必不相邻。为使 G 的直径为 2，u 到各顶点的距离不超过 2，至少要增加 $\nu-2$ 条边。故 $\varepsilon(G) \geqslant 2(\nu-2)=2\nu-4$。

1.5.6 pf：(仿例1.5.3).

① 完全图 (双向)　② $d_G(x,y)=k$，路P上共 $k+1$ 个点，共 $\binom{k+1}{2}$ 种边　③ $x \to y$ 路的 k 条边.

④ $\because |N_G(z) \cap V(P)| \le 3$

$\therefore$ 剩 $v-k-1$ 个点与路P上 $k+1-3$ 个点的连线要去

$$\varepsilon(D) \le \underbrace{v(v-1)}_{①} - \underbrace{\binom{k+1}{2}}_{②} + \underbrace{k}_{③} - \underbrace{(v-k-1)(k+1-3)}_{④}$$

$$= v(v-k+1) + \frac{1}{2}(k^2-k-4)$$

相当于从完全图中去掉一些边

1.5.7

(a) pf：由线图定义知：$v(L) = \varepsilon(D)$.

且 L在顶点 a 处有环 $\Leftrightarrow$ a 在 D 中顶点与终点重合 $\Leftrightarrow$ a 是 D 的环

(b) pf：$\forall a \in E(D)$，$a=(x,y)$ 在D中，a 的起点 x 是 $E_D^-(x)$ 中的终点

a 的终点 y 是 $E_D^+(y)$ 中的起点

$\therefore d_L^+(a) = d_D^+(y)$，$d_L^-(a) = d_D^-(x)$.

1.5.10

pf：

$V(P) = \{\{i,j\} \mid 1 \le i,j \le 5,\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \ne j\}$，$|V(P)| = C_5^2 = 10$

则 $E(P) = \{X,Y : X,Y \in V(P), X \cap Y = \phi\}$

$\therefore E(P^c) = \{X,Y : X,Y \in V(P), X \cap Y \ne \phi\}$

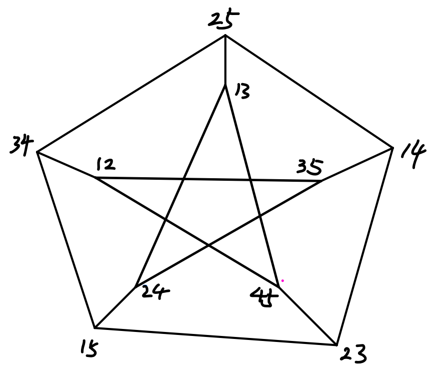
$V(K_5) = \{\{i\} \mid i=1,\cdots,5\}$.

$E(K_5) = \{\{i,j\} \mid$ 边 $\{i,j\}$ 即顶点为 $\{i\},\{j\}\}$.

$\therefore V(L(K_5)) = \{\{i,j\} \mid 1 \le i,j \le 5,\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \ne j\}$

$E(L(K_5)) = \{X,Y : X,Y \in V(L(K_5)), X \cap Y \ne \phi\}$

$\therefore P^c \cong L(K_5)$



Petersen图

1.6.2

(a) pf：设D为连通的1正则有向图，$P=(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 为D的最长路

$\because$ D 为 1-正则的，则 $d_D^+(x_0) = d_D^-(x_0) = 1$. 不妨设 $x_0x_1 \in D$. 则 $\exists y_1 \in V(D \setminus P)$，s.t. $y_1x_0 \in D$.

$\because x_0x_1 \in D$，$d_D^+(x_1) = d_D^-(x_1) = 1$，则 $x_1x_2 \in D$. 同理 $x_ix_{i+1} \in D$，$i=0,1,\cdots,k-1$.

$\exists y_2 \in V(D)$，s.t. $x_ky_2 \in D$.

若 $y_2 \notin V(P)$，则 $P'=(x_0, \cdots, x_k, y_2)$ 为最长路，与P为最长路矛盾

若 $y_2 \in V(P)$，则 $y_2 = x_0$满足。此时P为有向圈，$y_1 = x_k$。

（$y_2 = x_i$ ($i=1,\cdots,k-1$) 显然与D为k正则的矛盾）。

(b). pf: $\varepsilon > \frac{1}{2}v(v-1)$，则必然存在 $x,y \in V(D)$, s.t. $(x,y) \in E(D)$, $(y,x) \in E(D)$

则此可形成有向闭链。显然闭链中包含有向回。

(c) 设 $V(D)=\{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$, $E(D)=\{x_ix_j \mid i<j\}$.

则 $\varepsilon(D)=\frac{1}{2}v(v-1)$ 且不含有向圈

1.6.4

Pf: (a) 假设 $\delta^- \neq 0$

取 $P=(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 为D的最长有向路，$x_0x_1 \in E(D)$.

∵ $d_D^-(x_0) \geq \delta^- > 0$ ∴ $\exists y \in V(D)$, s.t. $yx_0 \in E(D)$

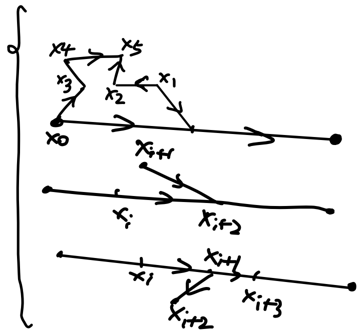
若 $y \notin V(P)$，则 $P'=(y, x_0, \cdots, x_k)$ 为最长路，矛盾

若 $y \in V(P)$，则 D中存在圈，矛盾。故假设不成立

(b). 设 $P=(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 为D的最长有向路。

由(a)知：$d_D^-(x_0)=0$。又P为最长有向路 ∴ $d_D^+(x_k)=0$

① D为连通图时，对于其余点情况讨论即可



② D不为连通图时，按分支排序即可。

1.6.5

Pf: ∵ G不为2部简单图

∴ G必有奇圈。

假设G含奇圈 W，满足 $\varepsilon(W) \geq 2k+1$.

设W为G的最小奇圈，$W=(x_1, \cdots, x_L, x_1)$ 其中 $L=v(W)$.

设 $X=(x_1, \cdots, x_L)$

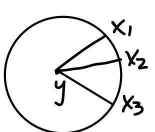
则导出子图 G[X] 即为 W。否则与W的最小性矛盾

$$\sum_{i=1}^{L} d_G(x_i) = \sum_{i=1}^{L} d_W(x_i) \geq L \cdot \delta > L \cdot \left\lfloor \frac{2v}{2k+1} \right\rfloor > L \cdot \left(\frac{2v}{L} - 1\right) = 2v - L$$

∴ $\sum_{i=1}^{L} d_G(x_i) - L > 2v - 2L$ （左边为G\X中与点与X点相连的边数，右边为G\X中点数的2倍）

由抽屉原理，必∃ $y \in V(G)$, $y \notin X$. s.t. y与X中三个不同的点相邻

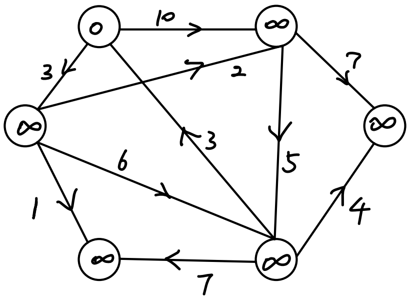
则y将W分成三个圈。我们考虑 y, x_1, x_3 三点将W分成的两个圈 W_1, W_2.（$\varepsilon(W_1) < \varepsilon(W_2)$）



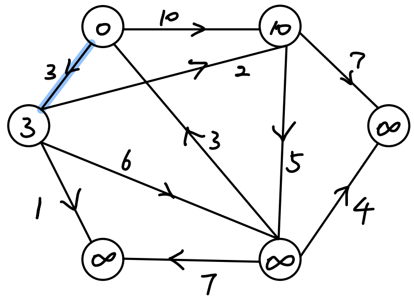
显然 W_1 与 W_2 圈数 $\leq L$ （∵ x_2在x_1x_3中间）

若 $\varepsilon(W_2)=L$，则 x_1, y, x_2 构成奇圈，与W最小性矛盾。

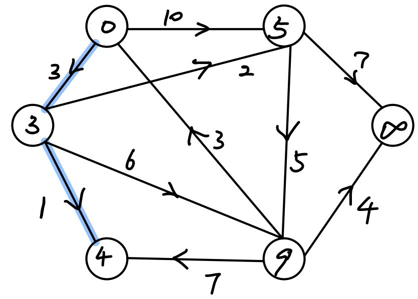
若 $\varepsilon(w_2)<L$，则由w的最小性知，w_1，w_2 皆为偶圈．$\Rightarrow \varepsilon(W)$为偶数，矛盾，
故假设不成立


0
∞
∞
∞
∞
∞
10
3
2
7
3
5
6
1
4
7

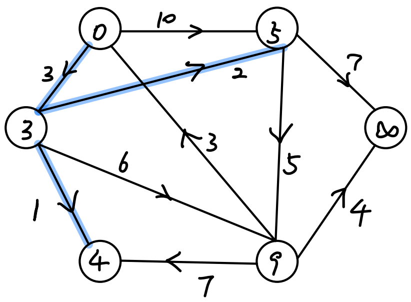
(a)


0
10
3
∞
∞
∞
10
3
2
7
3
5
6
1
4
7

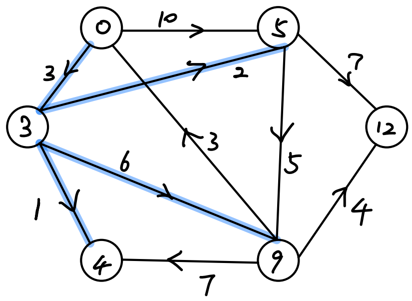
(b)


0
5
3
∞
4
9
10
3
2
7
3
5
6
1
4
7

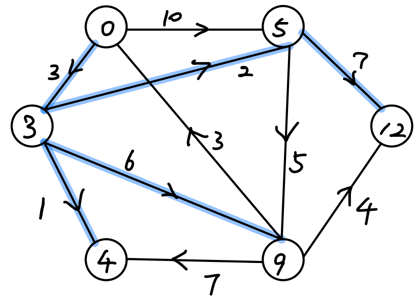
(c)


0
5
3
∞
4
9
10
3
2
7
3
5
6
1
4
7

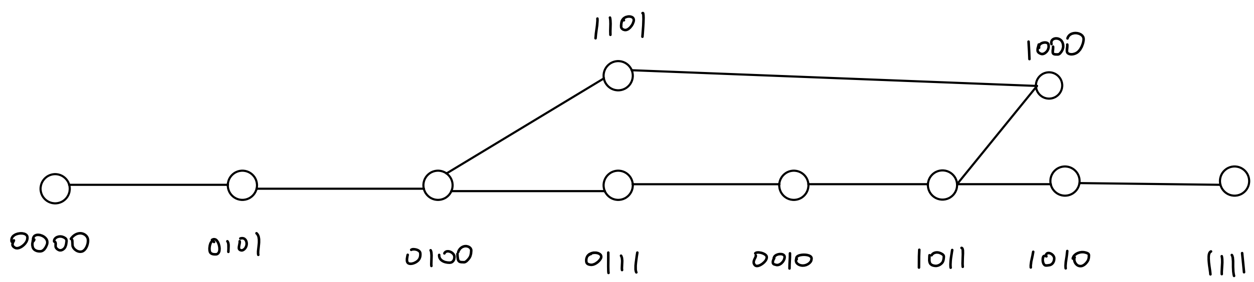
(d)

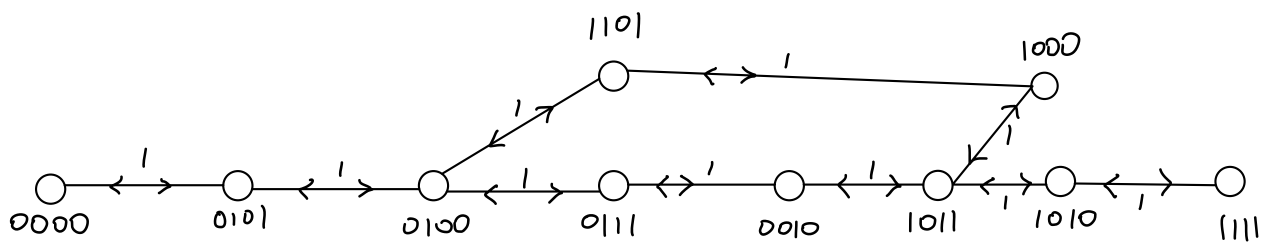

0
5
3
12
4
9
10
3
2
7
3
5
6
1
4
7

(e)


0
5
3
12
4
9
10
3
2
7
3
5
6
1
4
7

(f)


1101
1000
0000
0101
0100
0111
0010
1011
1010
1111


1101
1000
0000
0101
0100
0111
0010
1011
1010
1111
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1

$\boxed{1.7.1}$ Pf: "$\Longrightarrow$" G(或D)是Euler图，则显然G(或D)连通.

G为无向图，则必有 $\delta(G)\geq 2$ $\Rightarrow$ G含圈，设为 C_1

考虑子图 $G-E(C_1)$，设其中孤立点集为 V_1.

则 $\delta(G-E(C_1)-V_1)\geq 2$ 此图中含圈 C_2.

依次类推 可得 G能被分解成若干个边不交的圈的并

D为有向图，$k=\max\{\delta^+,\delta^-\}>0$，则D含有向圈．同理可证.

"$\Longleftarrow$" G(或D)连通且可分解成若干个边不交的圈的并

则 G是连通偶图 （或D为连通平衡图）

则 G(或D) 为Euler图.

$\boxed{1.7.5}$ (a) Pf: 若 $\exists\, x\in V(D)$，有 $|d_D^+(x)-d_D^-(x)|=1$.

则经过 $E_D^-(x)$ 一边的有向圈数量之和 $=$ 经过 $E_D^+(x)$ 一边的有向圈数量之和 $=N$.

又 $\forall a\in E(D)$，a 均含在奇数个有向圈中.

而含 $E_D^-(x)$ 的边的有向圈数量为 $d_D^-(x)$ 个奇数的和 $=N_1$

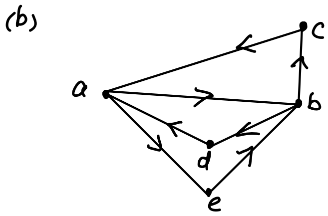
含 $E_D^+(x)$ 的边的有向圈数量为 $d_D^+(x)$ 个奇数的和 $=N_2$

又 $|d_D^+(x)-d_D^-(x)|=1$. 则 $N=N_1\neq N_2=N$，矛盾.

则 $\forall x\in V(D)$，有 $d_D^+(x)-d_D^-(x)=0$. 又D连通

$\therefore$ D为Euler图

(b)



边 ab 不含在奇数个有向圈中

Theorem II. The number of distinct circuits containing a given edge in a Euler graph is odd.

Proof: Let G be a Euler graph. Let e be an edge in G. Remove e from G and let $G'=G-\{e\}$. Then G' is an open edge train with terminal vertices v_i and v_j where v_i and v_j are the terminal vertices of e in G. Then from Theorem I the number of distinct paths between v_i and v_j in G' is odd. Each of those paths forms a circuit together with e in G. Hence the theorem. Also from Theorem I we can obtain the next theorem which gives another property of a Euler graph.

$\boxed{1.7.7}$ Pf: "$\Longrightarrow$" G为Euler图.

任取G的一边 ab，考虑子图 $G'=G\backslash ab$

G' 中a,b之间的不同路数量为奇.(by Thm I)，而这些路连上ab即为圈

"$\Longleftarrow$" 设 $v\in V(G)$，与v相连的边为 $e_1,\cdots,e_m$.

记过v的圈数为c，过 e_i 的圈数为 c_i

则 $c=\dfrac{c_1+\cdots+c_m}{2}$

$\therefore 2\mid c_1+\cdots+c_m$ $\because c_i$ 为奇数 $\therefore m$ 为偶数 $\Rightarrow$ G为连通偶图 $\Leftrightarrow$ G为Euler图

1.8.1

(a) pf: 由定义，图G中存在 Hamilton 圈

则 $\forall v \in V(G)$，子图 $G \setminus v$ 仍存在 Hamilton 路，则 $w(G \setminus v)=1 = w(G)$

∴ G中无割点

(或利用 Thm 1.8.1 来证)

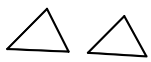
(b) pf: 由定义，图D中存在有向 Hamilton 圈，则 D为强连通的

(c) pf: 设 $G=(X \cup Y, E)$ 为 2部图.

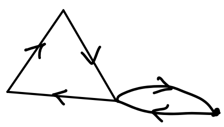
由 Thm 1.8.1 知 $w(G-X)=|Y| \le |X|$，$w(G-Y)=|X| \le |Y|$

∴ $|X|=|Y|$

(d) counterexample of (a):



counterexample of (b):



counterexample of (c):

1.8.4

(a) pf: 若 $\exists x,y \in V(G)$，$xy \notin E(G)$，

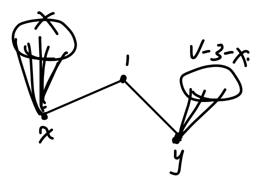
满足 $d_G(x)+d_G(y) \le v-1$.

则 $\varepsilon(G) \le \underline{v-1+\frac{1}{2}(v-2)}(v-3) = \frac{1}{2}(v-1)(v-2)+1$

与题设矛盾.

故对 $\forall x,y \in V(G)$，$xy \notin E(G)$，$d_G(x)+d_G(y) \ge v$.

则由 Thm 1.8.3，G为 Hamilton 图.



(此图旨在说明不等号中的"="可取)

x, y与 $G \setminus \{x,y\}$ 的边 & 完全图 K_{v-2}

推论 1.8.5.1

pf: 若D不为 Hamilton 图.

设 $C=(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_1)$ 为强连通简单图 D的最长有向圈，$k<v$.

则 $\exists x \in V(D) \setminus V(C)$，整数 $a \in [1,k]$，$b \in [1,k-1]$，s.t. x_{a+i}与 x 不相邻，$\forall i \in [1,b]$

$x_a x \in E(D)$，$d_D(x)+d_D(x_{a+b}) \le 2v-1-b$.

则 x_{a+b}与 x 不相邻，而 $d_D(x)+d_D(x_{a+b}) \le 2v-1-b$，与题设矛盾.

∴ D为Hamilton 图.