5.1.1

Pf: 为不失一般性，设 G 为连通的.

显然，$\alpha'(G)\le\frac{v}{2}$，则 $\alpha'(G)\le\lfloor\frac{v}{2}\rfloor$

$\varepsilon=1$时，$\alpha'(G)=1$，$v=2$，$\Delta(G)=1$，则 $\frac{v}{1+\Delta}=1$，结论成立.

假设 $\varepsilon\le k$时，结论成立.

$\varepsilon=k+1$时，若 G 含圈 C，则从 C 中任取一边 e，

由归纳假设：$\alpha'(G)\ge\alpha'(G-e)\ge\frac{v}{1+\Delta(G-e)}\ge\frac{v}{1+\Delta(G)}$

$\therefore \alpha'(G)\ge\lceil\frac{v}{1+\Delta}\rceil$

若 G 不含圈，则 G 是树.

若 G 是星，则结论显然成立

若 G 不是星，则 $\exists e\in E(G)$，设 G_1, G_2 为 $G-e$ 的两个连通部分

有 $\alpha'(G)\ge\alpha'(G_1)+\alpha'(G_2)\ge\frac{v_1}{\Delta(G_1)}+\frac{v_2}{\Delta(G_2)}\ge\frac{v_1+v_2}{1+\Delta(G)}$

$=\frac{v}{1+\Delta}$

5.1.2.

Pf: (a) $\because Q_n$ 为 n 正则二部图

$\therefore$ 由 Corollary 5.1.12 知，Q_n 必有完备匹配

(b) 对 K_{2n} 中任一点 x，$d_G(x)=2n-1$

则 K_{2n} 中不同完备匹配数 $=(2n-1)\times$(K_{2n-2}中不同完备匹配数)

依此类推，K_{2n}中不同完备匹配数 $=(2n-1)!!$

(c) 若 k 为偶数，则 K_{k+1} 为 k 正则简单图，但 $v=k+1$ 为奇数，故无完备匹配

若 k 为奇数，构造 k 正则简单图 G 如下

$v=2k-3$，设点为 $\{x_1,\cdots,x_{k-1}, y_1,\cdots,y_{k-2}\}$

其中 $x_1,\cdots,x_{k-1}$ 构成圈，$y_iy_{i+1}\in E(G)$，$i=1,\cdots,k-3$.

$x_iy_j\in E(G)$，$i=1,\cdots,k-1$，

$j=1,\cdots,k-2$.

$v=2k-3$ 为奇数，故无完备匹配（事实上此时无需考虑 k 的奇偶）

5.2.1

Pf: (a). "$\Longrightarrow$" $G=(X\cup Y,E)$ 为二部图.

若 $H\subseteq X$(或 Y)，则 $\alpha(H)=v(H)\ge\frac{1}{2}v(H)$.

若 $H=(X_1\cup Y_1,E)$，其中 $X_1\subseteq X$，$Y_1\subseteq Y$.

不妨设 $v(X_1)\ge v(Y_1)$，$\because X_1$ 为 H 的分离集，

$\therefore \alpha(H)\ge v(X_1)\ge\frac{1}{2}v(H)$.

"$\Longleftarrow$" 设 X 为 G 的最大独立集.

则由已知条件：$v(G)=\alpha(G)\ge\frac{1}{2}v(G)$

从 X 中任取 $v(G)-v(X)-1$ 个点，设子图 H_1 为 $G\backslash X$ 与该 $v(G)-v(X)-1$ 个点在 G 中导出的子图的并.

等价关系：$x\sim y\Leftrightarrow xy\in E(H_1)$ 将 H_1 分成等价类.

而其中有一等价类即为该 $v(G)-v(X)-1$ 个点在 G 中导出的子图

又 $\alpha(H_1) \geq \frac{1}{2}\nu(H_1) = \frac{1}{2}(\nu(G)-\nu(X)-1+\nu(G)-\nu(X))$

$\therefore \alpha(H_1) \geq \nu(G)-\nu(X)$　即有 $G\backslash X$ 为 H_1 中最大独立集．故 G 为二部图

(b) "$\Longrightarrow$" 由 Thm 5.2.3 知

"$\Longleftarrow$" 显然有 $\beta'(H) \geq \frac{1}{2}\nu(H)$.

从而由 (a) 知结论成立

$\boxed{5.2.3}$

Pf: $\because$ G 中的匹配的边与 $L(G)$ 中独立集的点一一对应

$\therefore$ G 的最大匹配中的边数 $=$ $L(G)$ 中最大独立集中点个数

i.e. $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$