

Actividad 1

Fecha de entrega: Jueves 26 de agosto, 23:59

Profesor: Pablo Estévez V.
Auxiliar: Ignacio Reyes J.
Semestre: Primavera 2021

Instrucciones generales

- Esta tarea tiene el objetivo de evaluar los contenidos necesarios para cursar el EL4106.
- La tarea es de carácter **individual**. No está permitido compartir desarrollos matemáticos ni líneas de código. Sí se puede conversar con otros estudiantes respecto a cómo resolver los problemas.
- La entrega final debe corresponder a un solo PDF. Además de éste, debe entregar los códigos de Python respectivos para ser testeados por el equipo docente.
- Para el desarrollo de esta tarea y para el resto del curso se recomienda tener instalado [Anaconda Python](#) con algunos paquetes como:
 - (I) Numpy
 - (II) Matplotlib
 - (III) Pandas
 - (IV) scipy
 - (V) Scikit Learn
 - (VI) Tensorflow

Para familiarizarse con Anaconda, podría ser útil el siguiente [enlace](#).

[Instrucciones de instalación](#).

- El equipo docente utiliza en su mayoría sistemas operativos Linux. Les recomendamos instalar Linux en sus computadores (por ejemplo Ubuntu) o en una máquina virtual, ya que nos será más difícil poder ayudar a aquellos estudiantes que trabajen con otros sistemas operativos en caso de existir problemas de software.

1. Álgebra lineal

Considere la matriz \mathbf{X} y los vectores \mathbf{y} e \mathbf{z} definidos a continuación:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Calcule el producto interno $\mathbf{y}^T \mathbf{z}$.
- Calcule el producto $\mathbf{X} \mathbf{y}$.
- ¿Es posible encontrar una inversa para \mathbf{X} ? Explique. Si lo es, calcúlela.
- ¿Cuál es el rango de \mathbf{X} ?

2. Probabilidades y estadística

- Considere un muestreo de datos S , resultante de lanzar 5 veces una moneda no cargada. Sea $X_i, i \in 1, \dots, 5$ definida por :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si el lanzamiento } i \text{ es cara} \\ 1 & \text{si el lanzamiento } i \text{ es sello} \end{cases}$$

Asumiendo independencia entre los lanzamientos, si $S = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, 1, 0, 1, 0)$

- Calcule la media muestral para S .
 - Calcule la varianza muestral, y su version insesgada.
 - Calcule la probabilidad de observar S .
 - Note que la probabilidad de observar S varía se se utiliza una moneda cargada. Calcule el valor de $P(X_i)$ que maximiza $P(S)$.
- Dada la distribución conjunta $P(X, Y)$ definida a continuación, calcule $P(X = T | Y = b)$

$P(X, Y)$		Y		
		a	b	c
X	T	0,2	0,1	0,2
	F	0,05	0,15	0,3

- Demuestre que si X e Y son variables aleatorias independientes con valores en \mathbb{R} , $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
- Si lanza un dado no cargado 60000 veces, la cantidad de veces que sale 2 debería ser cercana a 10000. Considerando el rango $[10000 - a, 10000 + a]$, ¿Qué valor debe tener a para que el intervalo contenga el número de ocurrencias del “2” con una probabilidad del 90%? Utilice el teorema central del límite.

3. Programación

Implemente los códigos pedidos a continuación utilizando el lenguaje Python 3.

(a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \cos(x) \cos(y) \exp(-x^2/5)$

I) (**A mano**) Calcule ∇f

II) (**Programa**) Dibuje $\vec{F} = \nabla f$ en la región $(0, \pi) \times (0, \pi)$

(b) Escriba un programa que reproduzca el juego del “siete” mostrando los 100 primeros números. El juego consiste en recitar los números desde el 1 en adelante pero saltando aquellos que contienen el dígito 7 o son múltiplos de 7. Los números saltados se reemplazan por un aplauso. Su código debe imprimir en pantalla la secuencia:

1, 2, 3, 4, 5, 6, clap, 8, 9, ... , 13, clap, 15, 16, clap, 18, ...

(c) Implemente los métodos de la clase “ComplexNumber” contenida en el archivo “complex_number.py”, la cual representa un número complejo y sus operaciones. El comportamiento esperado de “ComplexNumber” puede observarse en “test_complex_number.py”. No está permitido importar ningún módulo ni librería. Para más información respecto a los métodos a implementar puede visitar en [este link](#).