Guide de Survie pour le CC en Maths

Théorie de la Mesure

> Tribu

Définition $\mathcal{F}$ famille de parties d'un ensemble Ω

$\mathcal{F}$ tribu sur $\Omega \iff$ (i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

(iii) $\forall i \in \mathbb{N}\ A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$

Tribu engendrée $\sigma(C)$ C famille de parties de Ω

$\exists\, \sigma(C)$ sur Ω : (i) $C \subset \sigma(C)$

(ii) $\forall$ tribu $\mathcal{C}$, $(C \subset \mathcal{C}) \Rightarrow (\sigma(C) \subset \mathcal{C})$

$\rightarrow$ Permet d'établir une égalité entre deux tribus

> Mesure

Mesure positive $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mesure positive ssi

(i) $0 \leq \nu(A) \leq \infty$ avec $A \in \mathcal{F}$

(ii) $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$ disjoints $\rightarrow \nu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \nu(A_i)$

À retenir $\int \mathbb{1}_A(\omega)\, d\nu(\omega) = \nu(A)$

Propositions $(f,g) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ et $\{f_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}^+)$

(i) $f \leq g \Rightarrow \int f\, d\nu \leq \int g\, d\nu$

(ii) $(f_n)_n$ croissante $\rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\nu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\nu$

CONVERGENCE MONOTONE

(iii) $\int \sum_k f_k\, d\nu = \sum_k \int f_k\, d\nu$

(iv) $\underline{\lim}_n \int f_n\, d\nu \geq \int (\underline{\lim}_n f_n)\, d\nu$

Maths 3

Pour montrer qu'une fonction est holomorphe, on peut toujours utiliser les conditions de Cauchy :

Proposition $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$

f holomorphe en $a = a_1 + i a_2 \in \Omega$ ssi

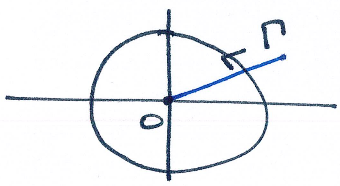
(i) P et Q différentiables en (a_1, a_2)

(ii) $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = - \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ au point $(x,y) = (a_1, a_2)$

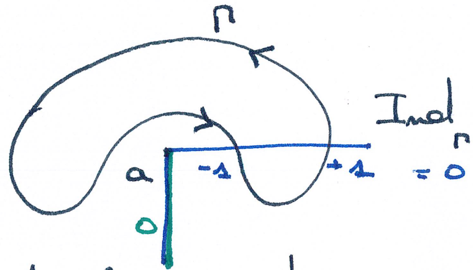
> Théorème des Résidus

Indice (justification à faire avec un dessin)

→ Nombre de fois que la demi-droite partant du point a coupe la courbe Γ orienté



$\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = 1$



$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$

Le signe dépend de l'orientation de la courbe

Résidu → Nécessite le calcul de l'ordre des pôles

Ordre d'un pôle = ordre de la racine

↳ $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(z_0) \neq 0 \\ Q(z_0) = 0 \end{array} \right.$ alors z_0 est un pôle

↳ $z \longmapsto \dfrac{1}{z \sin z}$ 0 ordre pour $\dfrac{z}{\sin z}$) 0 ordre 2

⇒ Calcul du résidu

↳ z_0 pôle d'ordre p de f : $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(p-1)!} \dfrac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left((z-z_0) f(z)\right)\Big|_{z \to z_0}$

↳ $p = 1$ $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

Maths 2

Théorème de LEBESGUE ou CONVERGENCE DOMINÉE

$(f_n), f, g$ fonctions réelles mesurables
I intervalle non trivial

1. $\forall n \geq 1, \; |f_n| \leq g$ $\quad \nu$-p.p sur I
2. $\int_I |g| \, d\nu < \infty$
3. $\lim_n f_n = f$ $\quad \nu$-pp

alors

$$\lim_{n \infty} \int_I f_n \, d\nu = \int_I \lim_{n \infty} f_n \, d\nu = \int_I f \, d\nu$$

Fonctions des variables complexes

$$\int f(x) \, \nu(dx) \triangleq \int g(x) \, \nu(dx) + i \int h(x) \, \nu(dx)$$

> Fonction holomorphe

Définition f holomorphe en a $\iff$ f est $\mathbb{C}$-dérivable en a

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe}$$

Remarque
- fonctions polynômes holomorphes sur $\mathbb{C}$
- fonction $z \longmapsto 1/z$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$
- la composée de deux fonctions holomorphes reste holomorphe
- la composée d'une fonction holomorphe et d'une fonction dérivable est dérivable

Maths 4

On arrive au théorème des résidus (qui tombe tout le temps)

Théorème des résidus $\mathscr{C}$ un lacet (= arc qui se renferme sur lui-même)

(i) $\mathbb{C}$ simplement connexe

(ii) f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots a_p\}$

points particuliers annulant Ω

alors $$\int_{\mathscr{C}} f(z)\,dz = 2i\pi \left[\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Ind}_{\mathscr{C}}(a_i) \times \mathrm{Res}(f, a_i) \right]$$

Remarque. Il vaut mieux commencer par calculer les résidus