



Partie I - Les taux d'intérêts

1) Taux d'intérêts simples : si $T < 1$ ans

$$I = C \times r \times T$$

Remarque : Si **T < 1 an**, on prend le nombre de jour exact pour calculer la période T.

Exemple : Du 01/01/2005 au 01/07/2005 $\rightarrow T = (31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30) / 360 \cong 0.5$

Valeur acquise :

$$V_{acq} = C + I = C + (C \times r \times T) = C(1 + T \times r)$$

Mathématiques Financières

Rq : valeur acquise = capital initial + intérêts acquis.

Taux de rendement annuel arithmétique :

Déf. : On veut connaître le taux de rendement annuel qui aurait permis d'obtenir ici C_1 .

On a :

$$C_1 = C_0(1 + T \times r_{arith}) = C_0 + (C_0 \times T \times r_{arith})$$

D'où :

$$r_{arith} = \frac{C_1 - C_0}{C_0 \times T}$$

2) Taux d'intérêts composées :

Valeur acquise :

$$V_{acq} = C(1 + r)^n$$

Rq : Du 01/01/2004 au 10/02/2006 $\rightarrow T = 2 + (31+9)/365$

T = nbr exact de jours / nbr exact de jours de la période de référence.

Taux de rendement annuel actuariel :

On a :

$$r_{act} = \left(\frac{C_1}{C_0} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Démonstration :

$$C_1 = C_0(1 + r_{act})^T$$

$$\frac{C_1}{C_0} = (1 + r_{act})^T$$

$$\sqrt[T]{\frac{C_1}{C_0}} = \sqrt[T]{(1 + r_{act})^T}$$

$$\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^{\frac{1}{T}} = 1 + r_{act}$$

$$r_{act} = \left(\frac{C_1}{C_0}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Comparaison des intérêts simples et des intérêts composés :

Objectif : Trouver le taux arithmétique équivalent au taux actuariel, et inversement.

$$\text{On a : } C_0(1 + Tr_{arith}) = C_0(1 + r_{act})^T$$

D'où :

$$(1 + Tr_{arith}) = (1 + r_{act})^T$$

Partie II - Les principes d'actualisation et de capitalisation

Objectif : mesurer la création de richesse créée par l'investissement.

Valeur présente :

$$VP = F_0 + \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^n}$$

Rq : On suppose que les flux sont de même valeur F. On a :

$$VP = F + \frac{F}{1+r} + \frac{F}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F}{(1+r)^n}$$

$$VP = \frac{F}{1+r} + \frac{F}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F}{(1+r)^n}$$

$$VP = F \left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} \right] = F \times \left(\frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \right)$$

Valeur acquise/capitalisée :

$$V_{acq} = F_0 \times (1+r)^n + F_1 \times (1+r)^{n-1} + \dots + F_n - 1 \times (1+r) + F_n$$

2) Dans le cas d'un investissement :

Valeur nette présente/actuelle nette :

$$VNP = VP - F_0 = -F_0 + F \left(\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \right)$$

Si **VNP > 0**, on garde l'investissement.

On choisira toujours l'investissement qui a **la VNP la plus grande**.

3) Le taux de rentabilité interne (TRI) :

Définition :

Le TRI d'un investissement permet de mesurer la création de richesse.

On dira qu'un investissement est rentable s'il est supérieur aux exigences de rentabilités des investisseurs.

Il prend en compte **tous** les flux pour obtenir un rendement **annuel**.

Le TRI annule la VNP/VAN. On a :

$$0 = F_0 + \frac{F_1}{1 + TRI} + \frac{F_2}{(1 + TRI)^2} \dots + \frac{F_n}{(1 + TRI)^n}$$

$$r_1 \rightarrow VAN(r_1) > 0$$

$$TRI \rightarrow VAN(TRI) = 0$$

$$r_2 \rightarrow VAN(r_2) < 0$$

Où :

$$TRI = \frac{r_2 \times VNP(r_1) - r_1 \times VNP(r_2)}{VNP(r_1) - VNP(r_2)}$$

Partie III - Les prêts et emprunts

Vocabulaire à retenir :

- Intérêts à terme échu : les intérêts sont versés uniquement à partir de $t=1$.
- Intérêts à terme échoir : les intérêts sont versés dès que $t=0$.
- Amortissement : partie du capital qui est remboursée.
- Annuité : remboursement du capital (amortissement) + intérêts.

1) Amortissement constant :

$$Amt = \frac{C}{n}$$

C : Capital

n : nbr d'annuité

Rq : Dans ce cas, Annuité (\searrow) = Amortissement (cst) + Intérêts (\searrow).

Exemple :

Soit un crédit ayant le profil suivant :

- Montant emprunté : 1 000 000 €,
- Taux annuel : 5%,
- Amortissement annuel constant du capital,
- Remboursement par 4 annuités à termes échu.

Commencer par calculer :

1. Les amortissements : $Amt = C/n$
2. Les intérêts : $I = C * i$
3. Le total à payer : $Annuité = Amt + I$
4. Le capital restant dû : $CRD_t = CRD_{t-1} - Amt$

Date	Total à payer (3)	Amortissement du capital (1)	Intérêts (2)	Capital restant dû : CRD (4)
0				1 000 000

Mathématiques Financières

1	250 000 + 50 000 = 300 000	1 000 000 / 4 = 250 000	1 000 000 * 5% = 50 000	1 000 000 - 250 000 = 750 000
2	250 000 + 37 500 = 287 500	250 000	750 000 * 5% = 37 500	750 000 - 250 000 = 500 000
3	250 000 + 25 000 = 275 000	250 000	500 000 * 5% = 25 000	500 000 - 250 000 = 250 000
4	250 000 + 12 500 = 262 500	250 000	250 000 * 5% = 12 500	250 000 - 250 000 = 0

2) Annuités constantes :

Annuité = Montant versé à chaque échéance.

$$F = \frac{r \times C}{\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}$$

F: Annuité (remboursement du capital + intérêts)

r : taux d'intérêt

C : Capital

n : nbr de périodes

Rq : Dans ce cas, Annuité (cst) = Amortissement (↗) + Intérêts (↘).

Exemple :

Soit un crédit ayant le profil suivant :

- Montant emprunté de 200 000€,
- Annuités constantes payées à terme échu,
- Taux d'intérêt de 5.35%,
- Remboursement sur 10 ans.

Mathématiques Financières

Date	Total à payer (1)	Amortissement (3)	Intérêts (2)	CRD (4)
0				200 000
1	26 342,98	26 342,98 - 10 700 = 15 642,98	200 000 * 5,35% = 10 700	200 000 - 15 642,98 = 184 357,02
2	26 342,98	26 342,98 - 9 863,10 = 16 479,88	184 357,02 * 5,35% = 9 863,10	184 357,02 - 9 863,10 = 174 493,92
4	26 342,98	26 342,98 - 8 981,43 = 17 361,55	174 493,92 * 5,35% = 9 306,51	174 493,92 - 9 306,51 = 165 187,41
...				

3) Le taux effectif global (TEG) :

Objectif : Comparer le coût de deux emprunts, **tous** frais compris (assurance décès invalidité, assurance perte d'emploi, et frais de dossier).

$$TEG = p \times r_p$$

$$TAEG = (1 + r_p)^p - 1$$

4) Le taux période proportionnel :

$$k_p = \frac{k_a}{p}$$

$$k_a = k_p \times p$$

k_p : taux période proportionnel

k_a : taux annuel

p : nbr de période dans une année

5) Le taux période actuariel :

$$1 + k_a = (1 + k_p^*)^p$$

$$k_p^* = (1 + k_a)^{\frac{1}{p}} - 1$$

$$k_a = (1 + k_p^*)^p - 1$$

k_p^* = taux période actuariel

Partie IV - Les obligations

Vocabulaire à retenir :

- Valeur nominale/faciale : V_n
- Valeur / Prix d'émission (V_e) : le prix auquel l'emprunt est émis
- Valeur de remboursement : V_r
- Taux facial/nominal : k
- Coupon : intérêts versés
- Coupon couru (C/C) : intérêts qui ne sont pas encore versés
- Valeur sur le marché obligataire :

1) Coupon versé : $k * V_n$

2) Coupon couru :

$$C / C(€) = \frac{V_n \times i \times d}{365}$$

$$C / C(\%) = \frac{C / C(\text{€})}{V_n}$$

i : taux nominal / facial

d : nombre de jours entre le dernier paiement et aujourd'hui

3) Cote :

$$Cote = \frac{V_t}{V_n} \times 100$$

4) Cours plein coupon : valeur sur le marché / V_n * 100

5) Cours pied coupon : cours plein coupon - C/C(%)

6) Valeur sur le marché obligataire :

Prix de l'obligation = Cours pied coupon + C/C

D'où :

$$V_t = \frac{C'_t \times V_n}{100}$$

V_t : Prix de l'obligation

C'_t : cours plein coupon