

UNIVERSIDAD DE GRANADA



ESCUELA INTERNACIONAL DE POSTGRADO

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE EDIFICACIÓN

TRABAJO FIN DE MÁSTER

PROGRAMA: MÁSTER EN REHABILITACIÓN ARQUITECTÓNICA

TUTORES

María Isabel Berenguer Maldonado

Manuel Ruiz Galán

MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA TEMPERATURA EN UN EDIFICIO

ANDREA DANIELA RINCÓN SANDOVAL

GRANADA, ESPAÑA

2023

*A mis padres Giovanny y Amanda
A mis nonitos Teresa y Efraín
A mis hermanos Juan Di y Ana María
A mi vida Nicolas Gabriel*

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas que me han apoyado en mi trayectoria durante la realización de este Máster. En primer lugar, agradezco a Dios por brindarme las herramientas y oportunidades para poder cursar esta importante etapa en mi formación académica.

A mis queridos padres, Giovanny Rincón y Amanda Sandoval, les agradezco de corazón por su incondicional apoyo emocional y económico durante mi estancia en la ciudad de Granada. Su respaldo constante ha sido fundamental para que pueda concentrarme en mis estudios y alcanzar mis metas.

También quiero agradecer a mis abuelos maternos, quienes han estado siempre presentes en mi vida, brindándome su amor y apoyo incondicional. Su presencia ha sido una fuente de fuerza y motivación para seguir adelante.

Agradezco especialmente a mi querido novio, Nico, por su increíble fortaleza y comprensión durante la distancia que nos separó mientras yo cursaba el Máster en la ciudad de Granada. Su apoyo y sacrificio al frente de los negocios han sido fundamentales para que pueda concentrarme en mi formación.

Agradezco de corazón a mis hermanos, Ana y Juan Di, por su constante apoyo y compañía durante mi tiempo lejos de casa. Sus llamadas frecuentes y el cuidado de mis queridas mascotas han sido un gran alivio para mí. Siempre que hablaba con ellos, sentía una recarga de energía y cercanía a pesar de la distancia. Su presencia y amor incondicional han sido un pilar fundamental en mi vida. Estoy sinceramente agradecido por tenerlos como hermanos y por todo lo que han hecho por mí.

Por último, quiero expresar mi gratitud a la Universidad de Granada y, en particular, a mis tutores, quienes me han brindado un valioso acompañamiento a distancia. Su orientación y asesoramiento continuo han sido determinantes para culminar con éxito mi Trabajo Final de Máster.

A todas estas personas, les estoy eternamente agradecido por su amor, apoyo y confianza en mí. Sin su ayuda, este logro no hubiera sido posible.

Resumen

Este documento es un Trabajo Fin de Máster titulado "Modelos Matemáticos para el Estudio de la Distribución de la Temperatura en un Edificio". Fue realizado por Andrea Daniela Rincón Sandoval como parte del programa de Máster en Rehabilitación Arquitectónica de la Universidad de Granada, España.

El objetivo principal de la investigación es implementar un modelo matemático integral para estudiar la variación de la temperatura en diferentes espacios, considerando factores como, el consumo de sistemas de climatización, específicamente un dispositivo de aire acondicionado, las propiedades térmicas de los materiales de construcción y su influencia en el hallazgo de la constante K , además de la incidencia en la distribución de diferentes configuraciones espaciales.

El documento comienza con una introducción que destaca la importancia de la eficiencia energética en el contexto actual de preocupación por el cambio climático y la sostenibilidad. Luego, se presentan las herramientas matemáticas teóricas utilizadas en el trabajo, como los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y los conceptos básicos de transferencia de calor en los edificios. Se explica el uso de ecuaciones diferenciales y se describen los fundamentos teóricos relacionados con el calentamiento de los edificios.

A continuación, se aborda el modelo de eficiencia energética de un edificio con varias estancias. Se plantea el problema y se implementa el modelo matemático basado en la bibliografía explorada. Se presentan las variables y parámetros considerados en el modelo, así como las ecuaciones fundamentales utilizadas. Adicional a esto se describe detalladamente la metodología de resolución utilizada para obtener los resultados mostrados mediante los casos prácticos, de los que se anexa los códigos empleados al final del documento. Se explican los métodos numéricos empleados, en la herramienta computacional utilizada, el software libre Maxima.

Índice general

1.	INTRODUCCIÓN	7
2.	OBJETIVOS	8
2.1	Objetivo General	8
2.2	Objetivos específicos	8
3.	ESTADO DEL ARTE	9
3.1	Antecedentes de la investigación	9
4.	HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS TEÓRICAS	11
4.1	Sistema de ecuaciones diferenciales lineales	11
4.2	Ley de enfriamiento de Newton	12
→	Aplicación a la climatización de edificios	13
4.3	Conceptos básicos de transferencia de calor en los edificios.	13
→	Transferencia de calor por conducción	14
→	Transferencia de calor por convección	19
→	Coeficiente de transferencia de calor (K)	20
4.4	Ley de enfriamiento de Newton Vs Ecuación de calor de Fourier	23
5.	MODELO DE EFICIENCIA ENÉGETICA DE UN EDIFICIO CON VARIAS ESTANCIAS	25
5.1	Planteamiento del problema	25
5.2	Modelo matemático del problema	26
→	Variables y parámetros	27
→	Ecuaciones fundamentales:	28
→	Restricciones	31
→	Metodología de resolución.....	32
5.3	Modelos matemáticos del problema para diferentes configuraciones espaciales 34	
→	Modelo configuración espacial N° 1	35
→	Modelo configuración espacial N° 2	35
→	Modelo configuración espacial N° 3	36
→	Modelo configuración espacial N° 4	36
6.	ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS, RESOLUCIÓN DE CASOS PRÁCTICOS	39
6.1	Resolución de los modelos matemáticos con diferentes configuraciones espaciales.	39
6.2	Resolución de los modelos matemáticos con una misma configuración espacial y K variable	45
6.3	Resolución de los modelos matemáticos con una misma configuración espacial y E periódica.....	51
7.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	53
8.	BIBLIOGRAFÍA.....	55
9.	ANEXOS.....	57

Lista de imágenes

- Imagen 1. Conducción de calor a través de una pared plana. Recuperado de:
<http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/3576/Capitulo2.pdf> 15
- Imagen 2. Lista de materiales y sus propiedades térmicas a temperatura ambiente. Recuperado de
<https://pedrojhernandez.com/2014/04/09/caracteristicas-termicas-de-los-materiales/> 18
- Imagen 3. Pared ejemplo para hallar el valor de k 22
- Imagen 4. Modelo simplificado de dos habitaciones sin fuentes adicionales de calor0 y bajo los efectos del clima exterior. 26
- Imagen 5. Modelo simplificado para plantear la ecuación base del modelo general. 28
- Imagen 6. Grafica del resultado de la primera prueba con un modelo base sin fuentes de energía..... 30
- Imagen 7. Distribución de tres habitaciones para generar el modelo matemático general. 30
- Imagen 8. Ejemplo de modelo matemático planteado, con las restricciones establecidas en el Software Máxima. 32
- Imagen 9. Resolución del modelo con ayuda del comando Desolve. 33
- Imagen 10. Gráfica obtenida con los datos referenciados en la Imagen 9. 33
- Imagen 11. Configuración espacial N° 1 35
- Imagen 12. Configuración espacial N° 2 35
- Imagen 13. Configuración espacial N° 3 36
- Imagen 14. Configuración espacial N° 4 36
- Imagen 15. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 1 40
- Imagen 16. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 2 41
- Imagen 17. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 3 43
- Imagen 18. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 4 44
- Imagen 19. Gráfica iteración N° 1 -K variable 47
- Imagen 20. Gráfica iteración N° 2 -K variable 48
- Imagen 21. Gráfica iteración N° 3 -K variable 49
- Imagen 22. Gráfica traslapo iteraciones N°1,2 y 3 en la estancia a -K variable. 49
- Imagen 23. Gráfica traslapo iteraciones N°1,2 y 3 en la estancia b -K variable 50
- Imagen 24. Gráfica traslapo iteraciones N°1,2 y 3 en la estancia c -K variable. 50
- Imagen 21. Gráfica muestra con E variable e iteración N° 1 52

1. INTRODUCCIÓN

En el contexto actual de preocupación por el cambio climático y la sostenibilidad, la eficiencia energética se ha convertido en un tema de vital importancia en el ámbito de la construcción y la gestión de edificios. La demanda creciente de energía, los costos asociados y los impactos ambientales derivados del consumo excesivo de recursos energéticos han impulsado la necesidad de desarrollar enfoques innovadores para evaluar y mejorar la eficiencia energética en edificios. En este sentido, los modelos matemáticos han surgido como herramientas poderosas para comprender y optimizar el consumo energético en dichos entornos.

El objetivo principal de esta investigación es implementar un modelo matemático integral, basado en la ley de enfriamiento de Newton, que permita evaluar y mejorar la eficiencia energética en edificios, tomando en cuenta factores clave como la demanda de energía, el consumo de los sistemas de climatización y la optimización de los recursos disponibles. Este modelo proporcionará una guía que ayudará a generar una herramienta efectiva para los profesionales del diseño y la gestión de edificios, así como para los responsables de la toma de decisiones en políticas energéticas.

En resumen, esta investigación busca contribuir al campo de la eficiencia energética en edificios mediante el desarrollo de un modelo matemático que permita evaluar y optimizar el consumo de energía de manera integral. Los resultados obtenidos serán de gran relevancia para promover prácticas sostenibles en la construcción y gestión de edificios, así como para impulsar políticas energéticas que fomenten la reducción de emisiones y el uso eficiente de los recursos disponibles.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

El objetivo del presente Trabajo Fin de Máster es analizar el modelo matemático que estudia la variación de la temperatura en diferentes espacios, lo que implica un enfoque en comprender y evaluar el modelo matemático utilizado para describir cómo la temperatura varía en diferentes partes de un sistema o entorno, como un edificio.

Para lograr dicho objetivo se requiere de lo siguiente:

2.2 Objetivos específicos

- Revisión bibliográfica de los antecedentes relacionada con modelos matemáticos utilizados anteriormente para estudiar la variación de la temperatura en diferentes espacios.
- Programar un modelo matemático planteado en el software Maxima para facilitar la interpretación de los resultados.
- Considerar ejemplos prácticos para evaluar la aplicación del modelo en diferentes circunstancias y distribución de los espacios.

3. ESTADO DEL ARTE

3.1 Antecedentes de la investigación

Se han realizado numerosas investigaciones relacionadas con el diseño, evaluación y análisis de modelos matemáticos para la eficiencia energética en diversos aspectos como:

1. Modelos de confort térmico para interiores: Existen diferentes modelos matemáticos que evalúan el confort térmico en espacios interiores, teniendo en cuenta parámetros como la temperatura, la humedad, la velocidad del aire y las características térmicas de los materiales. Estos modelos ayudan a comprender cómo el diseño de un espacio, la orientación de las ventanas, la distribución del flujo de aire y otros factores influyen en el confort térmico de los ocupantes.
2. Tecnologías fotónicas y modelos matemáticos para iluminación inteligente: La iluminación inteligente utiliza sensores y sistemas de control para adaptar el nivel de iluminación de acuerdo con las necesidades y condiciones específicas. Los modelos matemáticos se utilizan para optimizar la distribución de la luz, minimizar el consumo energético y maximizar el confort visual. Estos modelos consideran factores como la distribución espacial de las luminarias, el tipo de fuente de luz, la reflectancia de las superficies y las preferencias de los usuarios.
3. Aplicación de modelos matemáticos en elementos arquitectónicos, especialmente en fachadas: Los modelos matemáticos se han utilizado para evaluar y optimizar elementos arquitectónicos, como fachadas, en términos de eficiencia energética. Estos modelos consideran aspectos como el rendimiento térmico de los materiales, la protección solar, la ventilación natural y el aprovechamiento de la luz natural. La simulación computacional y el análisis paramétrico se emplean para evaluar diferentes diseños y encontrar soluciones eficientes.

Uno de los estudios que más se acerca al objeto de la presente investigación consiste en la creación de un modelo matemático para estudiar la variación del confort térmico en una habitación como consecuencia del flujo de calor a través de sus paredes, realizado por un estudiante de la universidad Benemérita Autónoma de Puebla (Calvario, 2020), en donde se basa en la utilización de ecuaciones diferenciales parciales con énfasis en el trabajo realizado por Fourier con su ecuación de calor.

El modelo matemático propuesto busca comprender cómo el flujo de calor a través de las paredes de una habitación afecta el confort térmico en su interior. Al considerar las propiedades térmicas de los materiales de construcción, la geometría de la habitación y las condiciones ambientales, el modelo puede predecir la distribución de temperatura en el espacio y evaluar el nivel de confort térmico experimentado por los ocupantes.

Este tipo de estudio es especialmente relevante para el diseño de sistemas de climatización eficientes y el desarrollo de estrategias de gestión energética en edificios. Al comprender cómo los flujos de calor afectan el confort térmico en diferentes áreas de una habitación, se pueden tomar decisiones informadas sobre la ubicación de las fuentes de calor, la selección de materiales de construcción y la optimización de la eficiencia energética.

4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS TEÓRICAS

En este capítulo, se proporciona una descripción general de los elementos teóricos y computacionales que se utilizaron para comprender el desarrollo de este trabajo. Se pone énfasis en el uso de ecuaciones diferenciales ordinarias y la aplicación de conceptos básicos para el estudio del calentamiento de edificios, empleando la ley de enfriamiento de Newton y utilizando el software libre Maxima como herramienta de apoyo.

4.1 Sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es un conjunto de ecuaciones compuesto por dos o más ecuaciones en las que sus términos no están derivados con exponentes, dentro de otra función, ni se multiplican entre sí.

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{array} \right.$$

Ecuación 1

Y el sistema de ecuaciones diferenciales lineales puede escribirse de forma matricial como.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

Ecuación 2

Es muy normal encontrar este tipo de ecuaciones en diferentes aplicaciones para estudiar una situación de la realidad, en muchos casos sistemas complejos en los que se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas, entendiéndose que todas las ecuaciones son independientes.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se subdividen en sistemas de ecuaciones **homogéneos** y **no homogéneos**, en lo que el primero se reconoce porque todos los términos de las ecuaciones contienen la función desconocida, y en el segundo como se puede suponer uno de sus términos no contiene la función desconocida.

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y'_2 = y_1 - y_2 + 7y_3, \\ y'_3 = -4y_1 + y_2 + y_3. \end{array} \right.$$

Ecuación 3

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2, \\ y'_2 = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{array} \right.$$

Ecuación 4

Este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, solo se puede resolver en ciertos casos, algunos de ellos son el sistema de ecuaciones lineal homogéneo de

coeficientes constante y algún sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, es decir con una matriz constante $A(x)=A$ que es el que vamos a tratar en el presente documento.

Referenciamos a (R. Kent Nagle, 2005) y (Zill, 2009) para un estudio detallado de ciertos métodos básicos de resolución de esos tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales, sin embargo, hemos optado por el uso del software libre Maxima para resolver los sistemas que surgen en los modelos de distribución de la temperatura en el interior de un edificio.

4.2 Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que, cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su entorno no es muy grande, la transferencia de calor por conducción, convección y radiación hacia o desde el cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su entorno externo, siempre y cuando la temperatura del entorno se mantenga constante durante el proceso de enfriamiento.

La genialidad de Newton se evidencia una vez más a través de un sencillo experimento que realizó utilizando un horno de carbón en una pequeña cocina. Calentó un bloque de hierro hasta que se puso al rojo vivo y luego lo colocó en un lugar frío, observando cómo se enfriaba en el tiempo. Sus observaciones sobre la tasa de enfriamiento del bloque llevaron al desarrollo de lo que ahora conocemos como la ley de enfriamiento de Newton. (Tripler, 2021).

Esta ley describe que la velocidad de pérdida de calor de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno circundante. Se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{dQ}{dt} = hA(T - T_A), \quad Ecuación\ 5$$

donde h es el coeficiente de intercambio de calor descrito en el siguiente capítulo, A el área superficial, y T_A la temperatura del ambiente en ese momento.

Si la temperatura del cuerpo es mayor que la temperatura ambiente, se producirá una transferencia de calor desde el cuerpo hacia el entorno. Esta transferencia de calor puede ser descrita como proporcional a la diferencia de temperaturas. Matemáticamente, podemos expresar este fenómeno mediante una ecuación diferencial como sigue:

$$dQ = -m.c.dT, \quad Ecuación\ 6$$

donde "m" representa la masa del cuerpo y "c" su capacidad calorífica específica (el producto "mc" se conoce como "C", que es la capacidad calorífica del sistema). El signo negativo indica una pérdida de calor. Podemos combinar la Ecuación 5 y la Ecuación 6 en una forma simplificada de la siguiente manera, describiendo la constante "k".

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A)$$

Ecuación 7

→ Aplicación a la climatización de edificios

La ley de enfriamiento de Newton puede aplicarse al calentamiento de edificios al considerar el proceso opuesto: el calentamiento de un objeto o espacio a una temperatura más baja que su entorno. Aunque la ley de enfriamiento de Newton se formula originalmente para el enfriamiento, puede invertirse para analizar el calentamiento.

En el contexto del calentamiento de edificios, la ley de enfriamiento de Newton puede utilizarse para determinar la tasa de ganancia de calor hacia el interior de un edificio desde su entorno. La ecuación se modifica de la siguiente manera:

$$T'(t) = K(E(t) - T(t)).$$

Ecuación 8

donde:

$E(t)$ = Temperatura exterior del edificio, que puede ser variable,

$T(t)$ = Temperatura del lugar en un tiempo determinado t ,

K = constante de tiempo del edificio.

Esta ecuación se desarrolla más adelante en el capítulo del modelo matemático objeto del presente trabajo.

4.3 Conceptos básicos de trasferencia de calor en los edificios.

Al analizar la envolvente que rodea a las personas en un edificio, se identifican dos funciones básicas que se debe cumplir:

1. Generar un microclima interior: Dado que las condiciones exteriores rara vez coincidirán con los requerimientos de confort, la envolvente debe ser capaz de crear un ambiente interior que se acerque lo más posible a esos requerimientos. Para lograrlo, la envolvente debe aprovechar los elementos favorables del entorno exterior y rechazar los elementos desfavorables. De esta manera, se busca mantener un nivel de confort térmico adecuado en el interior del edificio.

2. Complementar instalaciones de acondicionamiento: En aquellos casos en los que sea factible y necesario contar con sistemas de acondicionamiento, como calefacción o aire acondicionado, la envolvente debe trabajar en conjunto con dichas instalaciones. Su objetivo es minimizar la potencia requerida por estos sistemas y reducir el consumo de energía asociado. De esta forma, la envolvente contribuye a mejorar la eficiencia energética del edificio, permitiendo un uso más eficiente de las instalaciones de acondicionamiento.

Estas funciones son esenciales para lograr un entorno interior cómodo y eficiente en términos energéticos. La envolvente del edificio desempeña un papel clave en el logro de estas metas, combinando estrategias de diseño arquitectónico, selección de materiales y sistemas constructivos adecuados.

→ Transferencia de calor por conducción

El proceso de transferencia de calor a través de materiales sólidos se conoce como conducción térmica. En este proceso, la energía térmica se transmite de partícula a partícula a través del material, sin que haya desplazamiento de la materia. Por lo tanto, la conducción se produce por contacto directo y el calor fluye desde la zona más caliente hacia la más fría.

Los avances iniciales en el estudio de la conducción de calor se deben en gran parte a los esfuerzos del matemático francés Fourier en 1822. Fourier propuso la ley de conducción de calor, que es una generalización basada en observaciones empíricas. Esta ley describe cómo se conduce el calor a través de un material, desde una región de alta temperatura hacia una región de baja temperatura.

La ley de conducción de calor de Fourier es fundamental en la comprensión y modelado matemático de la transferencia de calor en sólidos. Permite predecir cómo se distribuye el calor en un material y cómo evoluciona la temperatura a lo largo del tiempo. Su aplicación ha sido de gran importancia en diversos campos, como la ingeniería, la física y la ciencia de materiales, proporcionando un marco teórico sólido para el estudio de la conducción térmica.

La rapidez de transferencia de calor "q" a través de un material se define como la cantidad de flujo de calor por unidad de tiempo y se expresa en unidades de calor por hora (Cal/hr). Por otro lado, el flujo de calor total "Q" se define como la rapidez de transferencia de calor a través de un área unitaria.

Las interrelaciones entre estas magnitudes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Calor } Q & (\text{Calorías}) \\ \text{Rapidez de transferencia de calor } q &= Q/\text{tiempo} \quad (\text{Cal/h}) \end{aligned}$$

Estas interrelaciones nos permiten cuantificar y relacionar la transferencia de calor a través de un material, ya sea en términos de la rapidez de transferencia de calor por unidad de tiempo (q) o en términos del flujo de calor total a lo largo de un período de tiempo (Q).

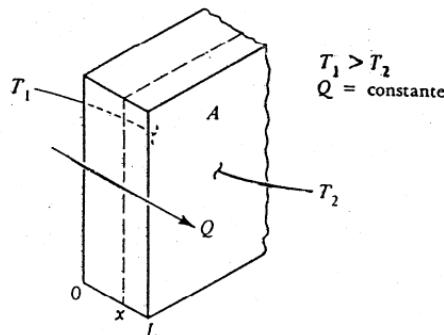
Aplicando la ley de Fourier como se hace en (Palafox, 1993) se obtiene:

$$Q = \frac{KA(T_{int} - T_{ext})}{L},$$

Ecuación 9

donde:

Q = razón de flujo de calor,
 A =área de la pared normal al flujo de calor,
 T_{int} =temperatura de la superficie interior de la pared,
 T_{ext} =temperatura de la superficie exterior de la pared,
 K =conductividad térmica del material de la pared,
 L =espesor de la pared.



*Imagen 1. Conducción de calor a través de una pared plana. Recuperado de:
<http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/3576/Capitulo2.pdf>*

Conductancia (C)

Según se concluye en la guía técnica de procedimientos y aspectos de la simulación de instalaciones térmicas en edificios de la Asociación Técnica Española de Climatización y Refrigeración (Asociación Técnica Española de Climatización y Refrigeración (ATECYR), 2008) así como en el informe de tesis de la Universidad de Sonora (Palafox, 1993), la conductancia térmica se define como la velocidad de flujo de calor a través de un área superficial unitaria de un cuerpo, desde una de sus caras hasta la otra, en condiciones de un diferencial de temperatura unitario. Cuando se produce una diferencia de temperatura entre dos superficies opuestas de una pared o sección, el calor se

transfiere de la región más caliente a la más fría, en un intento de equilibrar el desequilibrio térmico.

Cuando las caras se mantienen a dos temperaturas diferentes y constantes, la velocidad de flujo de calor entre ellas también se mantiene constante, lo que se conoce como una condición de estado estable. La conductancia térmica se representa con la letra "C" y se define mediante la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \text{Transmisión de calor } q &= C(T_c - T_f) A \\ \text{Conductancia } (C) &= \frac{q}{(T_c - T_f) A} \end{aligned}$$

Ecuación 10

Donde:

Tc=Es la temperatura de la cara caliente

Tf=Es la temperatura de la cara fría

A= Es el área superficial.

Y la conductancia de un material homogéneo se encuentra simplemente dividiendo su conductividad térmica por su espesor

$$C = \frac{k}{L}$$

Ecuación 11

Conductividad: (k o λ)

La conductividad térmica de un material se refiere a su capacidad para conducir el calor a través de un área y un espesor unitarios, en condiciones de estado estable o estacionario, donde se mantiene una diferencia de temperatura unitaria entre sus caras. Normalmente, en construcción se considera un espesor estandarizado como unidad. La conductividad térmica se representa comúnmente con la letra k . Al referirse a un espesor estándar, la conductividad térmica facilita la comparación rápida entre diferentes materiales para evaluar su eficiencia en la transmisión de calor.

$$\text{Transmisión de calor } q = \frac{k(T_c - T_f)A}{x}$$

$$\text{Conductividad } k = \frac{qx}{(T_c - T_f)}$$

Resistencia térmica, (R):

Existe un enfoque más común en la literatura para hablar sobre la resistencia térmica de los componentes de un edificio en lugar de la conductancia o conductividad de sus partes. La resistencia térmica, representada por la letra "R", es simplemente el inverso de la conductancia térmica. Se define mediante la siguiente relación:

$$\text{Resistencia } R = \frac{(T_c - T_f)A - 1}{q} \frac{1}{C}$$

Ecuación 12

La preferencia por expresar los valores de resistencia térmica (R) en números enteros se debe a varias razones que contribuyen a su manejo y comprensión más sencilla. En primer lugar, los valores enteros facilitan el recuerdo y la manipulación de los datos en comparación con las conductancias. Al trabajar con números enteros, resulta más intuitivo y práctico realizar cálculos y comparaciones.

Además, las resistencias térmicas son aditivas, lo que implica que la resistencia total de una sección de un edificio se obtiene al sumar las resistencias individuales de cada una de las capas que la componen (Ecuación 13). Este enfoque aditivo simplifica los cálculos y proporciona una mejor comprensión de la contribución de cada componente a la resistencia térmica total del sistema.

$$R_{\text{pared}} = R_1 + R_2 + R_3$$

Ecuación 13

Control del flujo de calor por conducción:

La ecuación de transmisión de calor considera tres variables fundamentales que tienen un impacto significativo en las pérdidas o ganancias de calor por conducción en un edificio. Estas variables son:

1. Área superficial: El área superficial del edificio juega un papel crucial en la transmisión de calor. A mayor área superficial, mayor será la cantidad de calor transferida entre el interior y el exterior. Es importante considerar estrategias para minimizar el área superficial expuesta al ambiente externo, como el diseño eficiente de la estructura y la optimización de las dimensiones.
2. Resistencia térmica de la envolvente del edificio
3. Diferencial de temperaturas.

La Imagen 2, obtenida de la página web de Pedro Hernández, denominada “características térmicas de los materiales” (Hernandez, 2014), muestra cómo los materiales aislantes pueden utilizarse en conjunto con otros materiales de construcción para mejorar la eficiencia térmica de la envolvente del edificio. Por ejemplo, los ladrillos son ampliamente utilizados en la construcción, y al combinarlos con un material aislante en la estructura de la pared, se crea una barrera adicional al flujo de calor. El mortero, el estuco y el vidrio también pueden incorporarse en el diseño de la envolvente para proporcionar aislamiento térmico adicional.

	Material	λ	ρ	Cp	a	b
		W/mK	kg/m ³	J/kgK	m ² /s	J/m ² K.s
1	Poliuretano	0,026	30	1400	6,19E-7	3,30E+1
2	Aire	0,026	1,223	1063	2,02E-5	5,85E+0
3	Poliestireno	0,035	50	1675	4,18E-7	5,41E+1
4	Espuma fenólica	0,038	30	1400	9,05E-7	3,99E+1
5	Lana de vidrio	0,041	200	656	3,13E-7	7,33E+1
6	Corcho comprimido	0,085	540	2000	7,87E-8	3,03E+2
7	Mortero de cemento	0,090	1920	669	7,01E-8	3,40E+2
8	Madera de construcción	0,130	630	1360	1,52E-7	3,34E+2
9	Madera de pino	0,148	640	2512	9,19E-8	4,87E+2
10	Madera pesada	0,200	700	1250	2,29E-7	4,18E+2
11	Concreto celular	0,220	600	880	4,17E-7	3,41E+2
12	Tierra con paja	0,300	400	900	8,33E-7	3,29E+2
13	Concreto celular	0,330	800	880	4,69E-7	4,82E+2
14	Yeso	0,488	1440	837	4,05E-7	7,67E+2
15	Mortero cemento/arena	0,530	1570	1000	3,38E-7	9,12E+2
16	Aqua	0,582	1000	4187	1,39E-7	1,56E+3
17	Ladrillos de arcilla	0,814	1800	921	4,91E-7	1,16E+3
18	Tierra muro portante	0,850	2000	900	4,72E-7	1,24E+3
19	Vidrio plano	1,160	2490	830	5,61E-7	1,55E+3
20	Arcilla	1,279	1460	879	9,97E-7	1,28E+3
21	Piedra arenisca	1,300	2000	712	9,13E-7	1,36E+3
22	Concreto pesado	1,750	2300	920	8,27E-7	1,92E+3
23	Piedra	1,861	2250	712	1,16E-6	1,73E+3
24	Mármol	2,900	2590	800	1,40E-6	2,45E+3
25	Granito	3,500	2500	754	1,86E-6	2,57E+3
26	Acero	50	7800	512	1,25E-5	1,41E+4
27	Aluminio	160	2800	896	6,38E-5	2,00E+4
28	Cobre	389	8900	385	1,13E-4	3,65E+4
Máx		389,000	8900	4187	1,13E-4	3,65E+4
Mín		0,026	1	385	7,01E-8	5,85E+0
Rango		388,974	8899	3802	1,13E-4	3,65E+4

Imagen 2. Lista de materiales y sus propiedades térmicas a temperatura ambiente.
 Recuperado de <https://pedrojhernandez.com/2014/04/09/caracteristicas-termicas-de-los-materiales/>

→ Transferencia de calor por convección

En el análisis de transferencia de calor, se distinguen dos tipos principales de convección: la convección natural y la convección forzada. La convección natural ocurre cuando el movimiento del aire se debe únicamente a las diferencias de temperatura, sin la ayuda de ningún medio mecánico adicional. Por otro lado, la convección forzada implica el uso de un medio mecánico, como un ventilador, para promover el movimiento del aire y aumentar la transferencia de calor.

Para casos prácticos como en el caso específico de la pared plana, que se muestra en la Imagen 1, el sector de la construcción se utiliza la siguiente expresión para determinar las tasas de transferencia de calor por convección:

$$Q=hA(T_s-T_\infty),$$

Ecuación 14

donde:

Q = calor transferido de la superficie al fluido circundante.

A =Área superficial.

T_∞ =Temperatura en la superficie.

Valor U

En la práctica, es común que no conozcamos las temperaturas superficiales actuales en un momento dado al realizar cálculos de transmisión de calor. En su lugar, se suelen utilizar temperaturas de diseño, que son valores predefinidos para el aire interno y externo. Sin embargo, es importante tener en cuenta los efectos de la transición entre las temperaturas del aire y las superficies en la ecuación de flujo de calor. Para incorporar estos efectos, se introduce el concepto de conductancias de capa límite, que representan las propiedades de transferencia de calor entre las superficies y el aire adyacente.

Las conductancias de capa límite se expresan a menudo en términos de coeficientes de película y se denotan como h_0 y h_1 para las superficies externas e internas, respectivamente. El valor de h_0 varía en función de la velocidad del aire, mientras que h_1 está relacionado con la orientación de la superficie.

La ecuación de transmisión de calor mencionada previamente puede ser reescrita para el intercambio de calor aire-aire, teniendo en cuenta las conductancias de capa límite. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la forma exacta de la ecuación dependerá del contexto y las condiciones específicas del sistema en consideración.

En resumen, al realizar cálculos de transmisión de calor, es común utilizar temperaturas de diseño en lugar de temperaturas superficiales actuales. Para tener en cuenta los efectos de la transición entre las temperaturas del aire y las superficies, se incorporan las conductancias de capa límite en la ecuación de flujo de calor.

$$\text{Transmisión de calor } q = \frac{(T_1 - T_c)A}{1/h_1 + R + 1/h_0},$$

Ecuación 15

donde:

T₁=Temperatura externa del aire,
 T₀= Temperatura interna del aire,
 h₁= Coeficiente de película interna,
 h₀ = Coeficiente de película externa,
 R= Resistencia a la transferencia por conducción.

En el contexto de la transmisión de calor, el coeficiente global de transferencia de calor, también conocido como conductancia global, transmitancia térmica o valor U, se refiere al inverso de la suma de todas las resistencias térmicas presentes en un sistema, incluyendo los coeficientes de película asociados a las superficies.

El coeficiente global de transferencia de calor (U) se utiliza para cuantificar la eficiencia general de transferencia de calor de un sistema. Representa la facilidad con la que el calor se transfiere a través de una estructura, considerando tanto la conductividad térmica de los materiales como los coeficientes de película asociados a las interfaces de contacto entre el aire y las superficies.

El valor U se calcula como el inverso de la suma de todas las resistencias térmicas, utilizando la siguiente fórmula:

$$U = 1 / (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n),$$

Ecuación 16

donde R₁, R₂, R₃, ... R_n representan las resistencias térmicas individuales de cada componente del sistema, incluyendo las resistencias de capa límite asociadas a los coeficientes de película.

El valor U se expresa típicamente en unidades de W/(m²·K), lo que indica la cantidad de calor que se transfiere a través de un área de 1 metro cuadrado cuando hay una diferencia de temperatura de 1 Kelvin entre los dos lados del sistema.

→ Coeficiente de transferencia de calor (K)

Según lo analizado por (Larregain Pedro, 2009), en su artículo “comparación entre curvas de calentamiento teóricas, la que se conoce como el coeficiente de transferencia de calor K depende de las propiedades del objeto y el entorno; en el contexto de edificios

generalmente se considera el coeficiente de conductividad térmica del material de construcción (K) (en lugar de la constante K en la ley de enfriamiento de Newton). El coeficiente de conductividad térmica es una medida de la capacidad de un material para conducir el calor y está relacionado con la velocidad de transferencia de calor a través del material.

$$K = \frac{hA}{mc}$$

Ecuación 17

donde:

h = conductancia global, transmitancia térmica o valor U, coeficiente de intercambio de calor, que en este caso es global, agrupando la transferencia de calor por convección, conducción y radiación,
 A = Área superficial del cuerpo que se encuentra expuesta al medio ambiente,
 m = masa del cuerpo,
 c = calor específico del material.

En la práctica, el coeficiente de transferencia de calor convectivo K se determina experimentalmente mediante pruebas o mediciones en condiciones controladas, como se mencionó anteriormente. El valor de K puede depender de factores como la velocidad del flujo de aire, la geometría del edificio y las propiedades de los materiales de construcción. Dicha constante K se conoce también como la transmitancia térmica o el valor U, según lo concluido del artículo de Francisco Tomas, “¿cómo calcular la transmitancia térmica (valor U) en la envolvente material de un edificio?” (Franco, 2018).

Una vez que se obtiene el valor de K , se puede utilizar en la ecuación de la ley de enfriamiento de Newton para estimar la tasa de ganancia de calor hacia el interior del edificio. Esto es útil para evaluar el rendimiento térmico de un edificio, diseñar sistemas de calefacción eficientes y tomar decisiones relacionadas con el aislamiento térmico y la gestión de la energía, como en el presente trabajo.

En el marco de la investigación mencionada, se llevó a cabo una prueba utilizando la Ecuación 17 para sustituir los datos y obtener un resultado específico. Se hizo hincapié en la correcta discriminación de las unidades, con el fin de determinar si la magnitud obtenida concuerda con la lógica de la ley de enfriamiento de Newton y se aproxima a los valores teóricos de la constante.

Supongamos que tenemos un (1) m^2 de pared de bloque hueco N° 4 sin mortero de pega y sin vanos, que puede pesar aproximadamente 75Kg, y ahora basados en los datos de h obtenidos de la NTC 4595 ((ICONTEC), 1999), que no debe ser superior a 3W/ m^2 realizamos la siguiente operación, tomando como base la Ecuación 17:

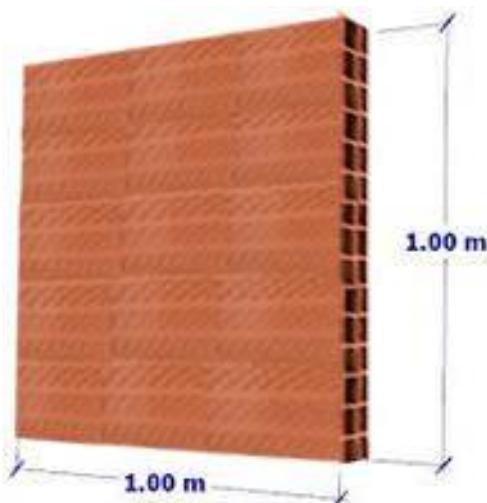


Imagen 3. Pared ejemplo para hallar el valor de k

$$K = \frac{(2,7 \text{ W/m}^2\text{C}) * 1\text{m}^2}{(75 \text{ Kg}) * 921\text{J/KgK}}$$

Ahora reorganizando unidades

$$K = \frac{(2,7 \text{ J/sm}^2\text{C}) * 1\text{m}^2}{(75 \text{ Kg}) * 921\text{J/KgC}}$$

Resolviendo se obtiene

$$K = \frac{2,7}{69075s} = 0.000390879/s$$

Pasándolo a unidades de hora

$$K = 0.14/h$$

El valor de K en la aplicación del calentamiento de edificios, según el modelo descrito más adelante, se estima en aproximadamente 1/7h, para el resultado anterior. En este caso, K representa la constante de tiempo del edificio, la cual es de 7 horas. Sin embargo, de acuerdo con la teoría citada en (Peña, 2004), esta constante oscila entre 2 y 4 horas, aproximadamente la mitad del tiempo obtenido en el ejemplo anterior.

Es importante considerar que en un edificio existen vanos cubiertos por vidrio y el mortero de pega de los ladrillos, factores que pueden influir en el valor de K . Si realizamos el mismo ejercicio utilizando los valores de la Imagen 2, podríamos obtener un valor de K que se alinee con el resultado obtenido.

Es fundamental realizar un análisis más detallado y evaluar cómo estos elementos específicos del edificio afectan el valor de K en el contexto del calentamiento. Esto nos permitirá una comparación más precisa entre los resultados teóricos que no son objeto de la presente investigación.

4.4 Ley de enfriamiento de Newton Vs Ecuación de calor de Fourier

Aunque la ecuación de calor de Fourier es ampliamente utilizada en el diseño de modelos matemáticos para mejorar la eficiencia energética, como se evidencia en el capítulo 3, es necesario entender que la ecuación del calor de Fourier y la ley de enfriamiento de Newton son dos conceptos diferentes utilizados en la física para describir la transferencia de calor. aunque ambos conceptos están relacionados con la propagación del calor, se aplican en diferentes situaciones y contextos, como se puede evidenciar en la tesis “Un modelo matemático para estudiar la variación del confort térmico en una habitación como consecuencia del flujo de calor a través de sus paredes” (Calvario, 2020).

La ecuación del calor de Fourier es una ecuación diferencial en derivadas parciales que describe la conducción del calor en un medio sólido. Esta ecuación se utiliza para modelar cómo se propaga el calor a través de un objeto o material, teniendo en cuenta la difusión térmica, mientras que la ley de enfriamiento de newton se utiliza para calcular la tasa de transferencia de calor entre un objeto y su entorno. ambos conceptos son importantes en el estudio de la termodinámica y la transferencia de calor, pero se aplican en diferentes situaciones y tienen formulaciones matemáticas distintas.

5. MODELO DE EFICIENCIA ENÉGETICA DE UN EDIFICIO CON VARIAS ESTANCIAS

5.1 Planteamiento del problema

La arquitectura se enfrenta a desafíos significativos en busca de métodos eficientes para lograr el confort térmico en los edificios. Un aspecto clave en el diseño arquitectónico es el análisis de los cambios de temperatura en distintas ubicaciones, ya que esto representa uno de los principales problemas a abordar para lograr un ambiente confortable desde el punto de vista térmico.

En consecuencia, es fundamental considerar estrategias y técnicas arquitectónicas que optimicen el control de la temperatura. Esto implica el estudio de factores como la orientación del edificio, la eficiencia de la envolvente térmica, la adecuada selección de materiales y sistemas de climatización, entre otros.

El objetivo principal es encontrar soluciones que minimicen la dependencia de los sistemas de calefacción y aire acondicionado, reduciendo así el consumo energético y los costos asociados. En este sentido, el diseño arquitectónico debe ser integral, considerando tanto los aspectos estéticos como los funcionales y energéticos, para lograr un equilibrio entre el confort térmico, la sostenibilidad y la eficiencia energética en los edificios.

En la actualidad, existen diversas soluciones para hacer frente a los cambios de temperatura a nivel global. Una de estas soluciones es la implementación de sistemas de calefacción y aire acondicionado en diferentes áreas de un edificio, con el objetivo de regular la temperatura y alcanzar el confort térmico deseado. Según los estándares establecidos por la norma ISO 7730 (Certificación, 2006), se recomienda mantener la temperatura en un rango de 20 a 26 grados Celsius, siendo los 23 grados Celsius lo óptimo para obtener un confort térmico estandarizado.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que el uso de estos sistemas conlleva una desventaja en términos de consumo energético, lo que a su vez se traduce en un gasto económico, y en un impacto negativo en el medio ambiente.

Para comprender mejor el problema, consideremos una habitación que se ve afectada por los cambios de temperatura externos. En el interior de la habitación, se encuentra un sistema de calefacción o aire acondicionado diseñado para regular la temperatura y lograr un estado de confort. Una vez que se alcanza este estado deseado, el sistema de aire se desactiva después de un cierto período de tiempo. Sin embargo, debido a la influencia de la temperatura externa, la habitación eventualmente pierde su estado de confort, lo que lleva a la activación nuevamente del sistema de aire acondicionado. Este

proceso se repite en forma iterativa, buscando mantener una temperatura óptima dentro de la habitación.

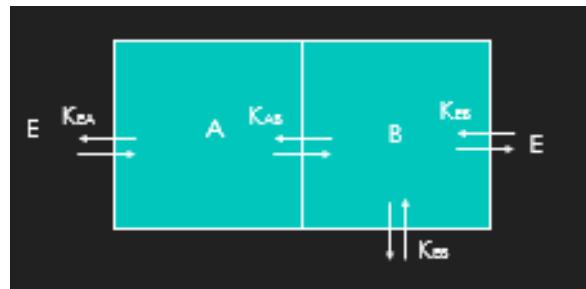


Imagen 4. Modelo simplificado de dos habitaciones sin fuentes adicionales de calor y bajo los efectos del clima exterior.

Ante la situación descrita, se lleva a cabo un análisis de transferencia de calor en las paredes de la habitación para comprender cómo se distribuye el calor. En este análisis inicial, se considera que no hay ninguna fuente externa de energía y se toman en cuenta únicamente los factores ambientales relacionados con la temperatura.

El estudio se lleva a cabo en paredes homogéneas compuestas por un material uniforme y de espesor constante. En este contexto, se asume que no hay irregularidades en la unión de los materiales y se descartan las influencias del entorno en cuanto al flujo de calor y a las temperaturas en las fronteras entre los materiales.

Esta simplificación permite analizar el comportamiento de transferencia de calor en un sistema más controlado y comprender la distribución térmica en las paredes de la habitación sin considerar las complejidades adicionales. Al estudiar estas paredes homogéneas, se obtienen resultados iniciales que pueden servir de base para desarrollar un modelo más amplio y aplicable en situaciones más realistas y variables.

Este enfoque nos permite comenzar con el análisis de una región más sencilla con el fin de posteriormente implementar un modelo que permita extrapolar los conceptos obtenidos a un escenario más complejo.

5.2 Modelo matemático del problema

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente, se implementa un modelo matemático para comprender la complejidad de un sistema en el que se involucra la transferencia de calor entre diferentes espacios. Este modelo se basa en una visión simplificada, pero captura aspectos importantes, como la influencia de los materiales utilizados y la calidad del aislamiento que rodea una habitación.

Además, se incorporan términos que representan el aislamiento y las características de los sistemas de calefacción o aire acondicionado presentes en el espacio. Estos términos

consideran la capacidad de mantener una temperatura deseada y la eficiencia energética del sistema.

En el ámbito del análisis del intercambio de calor en edificios se ha implementado un modelo matemático basado en las ecuaciones diferenciales propuestas por Beatriz Campos, y su aplicación al calentamiento de edificios (Beatriz Campos, 2011), y complementado con los apuntes de ecuaciones diferenciales José Peña (Peña, 2004). Además, para ayudar a entender la implementación del modelo matemático objeto de este trabajo y cada uno de sus variables y parámetros se ha consultado la investigación de Jesús Fernando Hinojosa Palafox, (Palafox, 1993).

Al utilizar este modelo matemático, se pueden obtener resultados y conclusiones sobre como la selección de materiales y el nivel de aislamiento pueden afectar la eficiencia energética de un espacio, así como la distribución del calor y el confort térmico en diferentes áreas de la habitación. Estos aspectos son importantes para comprender y optimizar la eficiencia de los sistemas de calefacción y aire acondicionado, así como para mejorar la calidad de vida en los espacios habitables.

→ Variables y parámetros

Para el modelo matemático planteado, en el que inicialmente se considera el edificio como una unidad, es decir, no se va a tener en cuenta el número de habitaciones que tiene, se utilizará como base la ley de enfriamiento de Newton teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Diferencia de temperatura: La ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa de transferencia de calor es proporcional a la diferencia de temperatura entre dos cuerpos. En este caso, se considerará la diferencia de temperatura entre el interior y el exterior del edificio como factor determinante para el flujo de calor.
2. Coeficiente de transferencia de calor: Se tendrá en cuenta el coeficiente de transferencia de calor, que depende de las propiedades térmicas de los materiales de construcción utilizados en las paredes, techos y suelos del edificio. Este coeficiente representa la capacidad de los materiales para conducir el calor y afectará la tasa de transferencia de calor.

Una vez entendido esto, se procede a analizar como el cálculo de las ecuaciones mediante la ley de enfriamiento de Newton según el libro de ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera (R. Kent Nagle, 2005) implica el uso de diferentes variables como lo son:

- La temperatura al interior del edificio representada como $T(t)$, o dependiendo del nombre de estancia ($a(t)$, $b(t)$, etc.)
- La temperatura exterior, que para el caso de la presente investigación se denomina $E(t)$
- Las fuentes de calor (o enfriamiento) que provoca cambios en la temperatura de la habitación en función de su capacidad calorífica como aire acondicionado o calefacción $H(t)$.
- El calor generado en el interior del edificio a causa de la presencia de seres vivos, maquinarias y demás $U(t)$
- La constante de tiempo del edificio K que depende de las propiedades físicas del edificio, en la que intervienen las propiedades térmicas de los materiales, como la conductividad, la convección y radiación, contando cada uno con sus particularidades, que según (Peña, 2004), un valor normal para un edificio cerrado oscila entre las 2 y 4 horas.

→ **Ecuaciones fundamentales:**

Las ecuaciones fundamentales del sistema se basan en la ley de enfriamiento de Newton anteriormente descrita, en las que para plantearlas se requirió de procedimientos experimentales, de prueba y error con ayuda del software Maxima, y aunque la ley de enfriamiento de Newton no se aplica directamente a edificios completos, se emplean principios y modelos más complejos de transferencia de calor para analizar y comprender el comportamiento térmico de los edificios y optimizar su diseño y eficiencia energética

En una primera prueba realizada con la ayuda del software Maxima, se resuelve un problema que involucra un modelo con una sola estancia y el entorno exterior. En esta prueba inicial, no se tienen en cuenta otros parámetros, como las fuentes de energía externa. El objetivo es obtener una primera aproximación y comprender el comportamiento térmico básico del sistema.

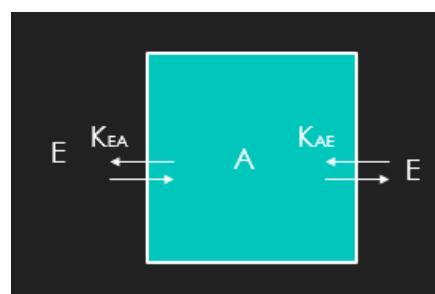


Imagen 5. Modelo simplificado para plantear la ecuación base del modelo general.

Si $T'(t)$ es la temperatura de la estancia A vacía en un instante de tiempo t y $E(t)$ es la temperatura en el exterior de la estancia, y la ley de Newton afirma que:

$$T'(t) = K(E(t) - T(t))$$

Ecuación 18

Si se supone que la temperatura exterior es constante $E(t)=E_0$, entonces la ecuación puede escribirse como:

$$T'(t) = \frac{dT}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(T(t) - E_0) = -K(T(t) - E_0)$$

Ecuación 19

que proporciona la siguiente solución:

$$T(t) - E_0 = ce^{-Kt},$$

Ecuación 20

donde $c \in \mathbb{R}$

Si $T(0)$ es la temperatura inicial del edificio $c=T(0)-E_0$ y la solución es:

$$T(t) - E_0 = (T(0) - E_0)e^{-Kt}$$

Ecuación 21

El tiempo que pasa desde el valor $T(0)-E_0$ hasta el valor $(T(0) - E_0)/e$ es $t_0 = 1/K$, que recibe el nombre de constante de transferencia del edificio.

Ahora adaptando todo este desarrollo con los datos propios de la Imagen 5 y la Ecuación 18, reemplazando y organizando términos se obtiene lo que vamos a llamar en el presente documento como la ecuación fundamental del modelo.

$$T'(t) = \frac{1}{K_{EA}}(E(t) - T(t))$$

Ecuación 22

Posteriormente, con el fin de verificar la eficiencia de la ecuación fundamental, se propone una temperatura exterior $E=31^\circ\text{C}$, tomando como referencia la temperatura más alta registrada en la ciudad de Cartagena, Colombia. Además, se utiliza una constante $K=3$ horas. Al desarrollar la Ecuación 22 se obtiene la siguiente gráfica:

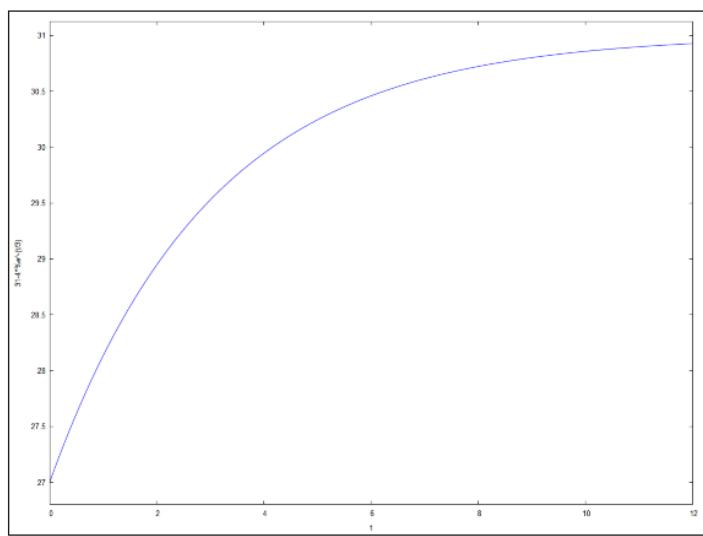


Imagen 6. Grafica del resultado de la primera prueba con un modelo base sin fuentes de energía

En esta gráfica, se puede apreciar que el modelo exhibe un comportamiento coherente con la ley de enfriamiento de Newton. Según esta ley, cuando la temperatura exterior supera la temperatura interior, la temperatura interior tiende a ajustarse para acercarse o igualar a la temperatura exterior.

Una vez que se ha establecido la ecuación fundamental, se procede a utilizarla para desarrollar un modelo que incorpora conceptos de sistemas de ecuaciones diferenciales. En este sentido, se plantea el siguiente modelo matemático (Ecuación 23), el cual incluye tres habitaciones que se encuentran inicialmente distribuidas de la siguiente manera:

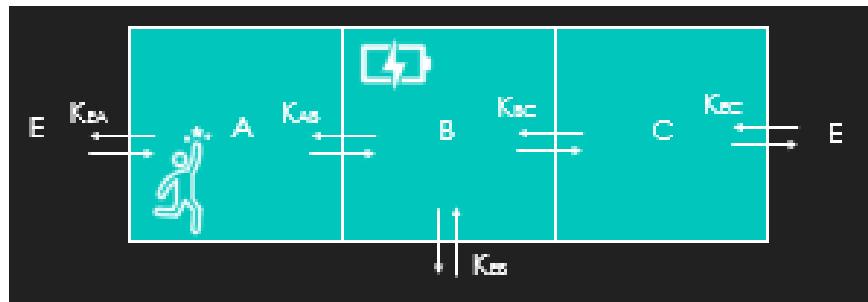


Imagen 7. Distribución de tres habitaciones para generar el modelo matemático general.

Notando por $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$, las temperaturas en un instante t en las habitaciones A, B y C, respectivamente, y distribuyendo los datos de la gráfica para mostrar el modelo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 1. \quad a'(t) &= \frac{1}{K_{EA}}(E - a(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(b(t) - a(t)) + H(t) \\
 2. \quad b'(t) &= \frac{1}{K_{EB}}(E - b(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(a(t) - b(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(c(t) - b(t)) + U(t) \\
 3. \quad c'(t) &= \frac{1}{K_{EC}}(E - c(t)) + \frac{1}{K_{CB}}(b(t) - c(t))
 \end{aligned}$$

Ecuación 23

Se puede apreciar que la estancia A no se encuentra vacía por lo que produce un calentamiento adicional debido al calor corporal conocido en el presente documento como **H(t)**. Adicionalmente en la estancia B se dispone de un sistema de calefacción o aire acondicionado, que, si se va a utilizar en la ciudad de Cartagena y para futuros ejemplos se definirá como aire acondicionado, denotado por **U(t)**.

→ Restricciones

Las restricciones son elementos fundamentales en un modelo matemático para la eficiencia energética de los edificios, ya que establecen límites y objetivos claros que deben cumplirse. En este sentido, se considerarán diversas restricciones con el fin de garantizar un rendimiento óptimo en términos de confort, sostenibilidad y viabilidad económica.

Una de las principales restricciones a considerar es el **confort térmico**, que se refiere a la satisfacción de las personas que ocupan el edificio. Con el objetivo de lograrlo, se establecerán límites en las temperaturas interiores que se acerquen a los 23°C a lo largo de todo el año. Cabe mencionar que el modelo utiliza las temperaturas históricas obtenidas del sitio web Climate Data (<https://es.climate-data.org/américa-del-sur/colombia/bolívar/cartagena-3312/>) para la ciudad de Cartagena, Colombia, donde las estaciones no están claramente definidas.

Otra de las restricciones hace referencia a la **constante de transferencia de calor K**, que se encuentra en el rango de valores dentro de las 2 a 4 horas según lo mencionado en el texto de José S. Cánovas Peña (Peña, 2004)

Además, existen otras restricciones que no son abordadas en este trabajo, como el consumo energético asociado a consideraciones económicas y medioambientales. Esto implica comparar la relación entre el uso de materiales y el uso de equipos de aire acondicionado en relación con su capacidad calorífica.

La inclusión de estas restricciones en el modelo matemático garantiza que los resultados y soluciones obtenidos sean lo más aproximado a la realidad y viables, y que el enfoque de eficiencia energética se ajuste a las necesidades y objetivos específicos del edificio en cuestión. Cabe mencionar que estas restricciones pueden variar según las regulaciones locales, la tipología del edificio y las metas establecidas para la eficiencia energética.

→ Metodología de resolución

La metodología de resolución del modelo matemático propuesto se basará en el uso del software libre Maxima, una poderosa herramienta de álgebra computacional. Maxima permite la manipulación simbólica de ecuaciones y la realización de cálculos numéricos, lo cual resulta fundamental para abordar la complejidad del modelo y obtener soluciones precisas.

El proceso de resolución constará de los siguientes pasos:

- 1. Definición y formulación del modelo matemático en Maxima:** Se traducirá el modelo matemático, que incluye las ecuaciones fundamentales, las variables y parámetros, las funciones objetivo y las restricciones, en un formato adecuado para su implementación en Maxima. Esto implica la representación simbólica de las ecuaciones y la asignación de los valores correspondientes a las variables y parámetros.

```
(%i9) Kea:4;
(%o9) 4

(%i10) Kab:4;
(%o10) 4

(%i11) Keb:4;
(%o11) 4

(%i12) Kbc:4;
(%o12) 4

(%i13) Kec:4;
(%o13) 4

(%i14) eq1: 'diff(a1(t),t)=((1/Kea)·(E(t)-a1(t)))+((1/Kab)·(b1(t)-a1(t)))+H(t);
(%o14)  $\frac{d}{dt} a1(t) = \frac{b1(t) - a1(t)}{4} + \frac{31 - a1(t)}{4} + 0.017845$ 

(%i15) eq2: 'diff(b1(t),t)=((1/Keb)·(E(t)-b1(t)))+((1/Kab)·(a1(t)-b1(t)))+((1/Kbc)·(c1(t)-b1(t)))+U(t);
(%o15)  $\frac{d}{dt} b1(t) = \frac{c1(t) - b1(t)}{4} + \frac{a1(t) - b1(t)}{4} + \frac{31 - b1(t)}{4} - \frac{3}{4}$ 

(%i16) eq3: 'diff(c1(t),t)=((1/Kec)·(E(t)-c1(t)))+((1/Kbc)·(b1(t)-c1(t)))+U(t);
(%o16)  $\frac{d}{dt} c1(t) = \frac{b1(t) - c1(t)}{4} + \frac{31 - c1(t)}{4} - \frac{3}{4}$ 
```

Imagen 8. Ejemplo de modelo matemático planteado, con las restricciones establecidas en el Software Maxima.

- 2. Implementación y ejecución del modelo en Maxima:** Utilizando la sintaxis de Maxima, se introducirán las ecuaciones, variables y parámetros definidos en el paso anterior. A continuación, se ejecutará el modelo, estableciendo una

temperatura inicial con ayuda del comando **desolve** para obtener los resultados correspondientes, respecto a la temperatura en las estancias a través del tiempo. Maxima realizará los cálculos necesarios, permitiendo el análisis de las ecuaciones y la evaluación de las funciones objetivo bajo las restricciones establecidas.

```
(%o17) atvalue(a1(t),t=0,30)
(%o17) 30

(%o18) atvalue(b1(t),t=0,30)
(%o18) 30

(%o19) atvalue(c1(t),t=0,30)
(%o19) 30

(%o20) desolve([eq1,eq2,eq3],[a1(t),b1(t),c1(t)]);
rat: replaced 0.017845 by .3569/200000 = 0.017845
rat: replaced -0.017845 by -.3569/200000 = -0.017845
(%o20) [a1(t) =  $\frac{146431 \text{ He}^{-\frac{t}{4}}}{150000} + \frac{153569 \text{ He}^{-\frac{t}{2}}}{200000} - \frac{153569 \text{ He}^{-t}}{1200000} + \frac{2393569}{80000}, b1(t) =  $\frac{146431 \text{ He}^{-\frac{t}{4}}}{150000} + \frac{153569 \text{ He}^{-\frac{t}{2}}}{600000} + \frac{5753569}{200000}, c1(t) =  $\frac{146431 \text{ He}^{-\frac{t}{4}}}{150000} + \frac{153569 \text{ He}^{-\frac{t}{2}}}{200000} - \frac{153569 \text{ He}^{-t}}{1200000} + \frac{11353569}{400000}]$ 

(%o21) Tempa:=(146431 %e^{(-t/4)})/150000-(153569 %e^{(-t/2)})/200000-(153569 %e^{(-t)})/1200000+2393569/80000;
(%o21)  $\frac{146431 \text{ He}^{-\frac{t}{4}}}{150000} - \frac{153569 \text{ He}^{-\frac{t}{2}}}{200000} - \frac{153569 \text{ He}^{-t}}{1200000} + \frac{2393569}{80000}$ 

(%o22) Tempb:=(146431 %e^{(-t/4)})/150000+(153569 %e^{(-t)})/600000+5753569/200000;
(%o22)  $\frac{146431 \text{ He}^{-\frac{t}{4}}}{150000} + \frac{153569 \text{ He}^{-\frac{t}{2}}}{600000} + \frac{5753569}{200000}$ 

(%o23) Tempc:=(146431 %e^{(-t/4)})/150000-(153569 %e^{(-t/2)})/200000-(153569 %e^{(-t)})/1200000+11353569/400000;
(%o23)  $\frac{146431 \text{ He}^{-\frac{t}{4}}}{150000} + \frac{153569 \text{ He}^{-\frac{t}{2}}}{200000} - \frac{153569 \text{ He}^{-t}}{1200000} + \frac{11353569}{400000}$$$ 
```

Imagen 9. Resolución del modelo con ayuda del comando Desolve.

- Análisis y validación de los resultados:** Se examinan los resultados obtenidos a partir de la ejecución del modelo en Maxima con ayuda del comando **wxplot2d**. Se realiza un análisis exhaustivo de las soluciones, evaluando el cumplimiento de las restricciones y la viabilidad de estas. Además, al comparar los resultados con los objetivos planteados se evidencia que, aunque la temperatura baja, pasadas doce horas no se alcanza la temperatura objetivo de los 23°C, en ninguna de las estancias.

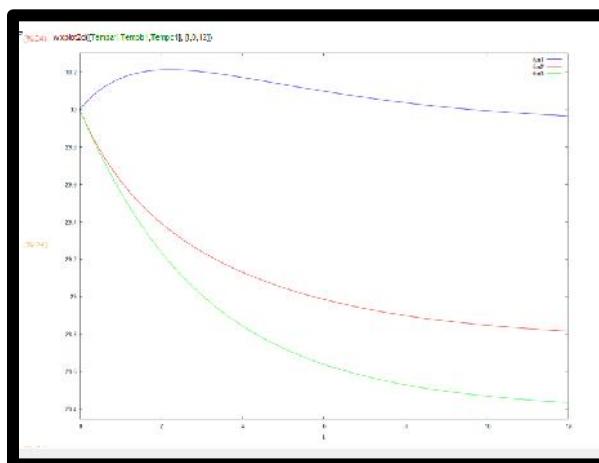


Imagen 10. Gráfica obtenida con los datos referenciados en la Imagen 9.

4. **Sensibilidad y optimización:** Utilizando las capacidades de optimización de Maxima, se podrán explorar diferentes escenarios y ajustes para buscar soluciones óptimas. Analizando la sensibilidad del modelo a cambios en los parámetros, y realizando ajustes para maximizar la eficiencia energética del edificio, se realizan diferentes pruebas con distintas distribuciones, números de estancias y cambios en los valores de los parámetros, que se describirán más detalladamente en el capítulo 5 teniendo en cuenta las restricciones establecidas.
5. **Presentación de resultados:** En el presente documento, se presentarán de forma clara y concisa los resultados obtenidos, tanto en forma numérica como gráfica, tal y como acabaos de hacer. Se incluirán tablas y gráficos que reflejen los datos obtenidos y las conclusiones derivadas del análisis realizado con el apoyo de Maxima. Estos resultados y conclusiones se agregarán como anexos al final del documento, lo que permitirá una comprensión completa y detallada de los resultados del modelo y respaldará las conclusiones de la investigación.

La utilización de Maxima como herramienta de resolución del modelo matemático aportará rigurosidad, precisión y eficiencia al proceso de análisis y evaluación de la eficiencia energética en edificios. Su capacidad para manejar cálculos complejos y simbólicos facilitará la comprensión de los fenómenos involucrados y permitirá obtener soluciones confiables y validadas.

Es importante resaltar que el modelo matemático propuesto es una representación simplificada de la realidad, y su precisión y validez dependen de la calidad de los datos de entrada y de las suposiciones realizadas. Por lo tanto, se debe tener en cuenta la incertidumbre asociada al modelo y considerar la sensibilidad de los resultados ante cambios en los parámetros.

En resumen, el modelo matemático desarrollado en esta investigación es una herramienta integral para evaluar y mejorar la eficiencia energética en edificios. Su enfoque multidisciplinario, considerando variables clave y optimizando el consumo de energía, lo convierte en una contribución significativa para promover prácticas sostenibles en la construcción y gestión de edificios.

5.3 Modelos matemáticos del problema para diferentes configuraciones espaciales

Una vez que se ha implementado el modelo matemático para tres estancias y se han considerado las técnicas previamente presentadas, surge la necesidad de aplicarlo en contextos más complejos y realista. Por lo tanto, más realista se procede a implementar el modelo para cuatro estancias en diversas configuraciones espaciales, con el propósito de realizar diferentes simulaciones que serán detallados en capítulo 6 y evaluar la eficiencia del modelo.

→ Modelo configuración espacial N° 1

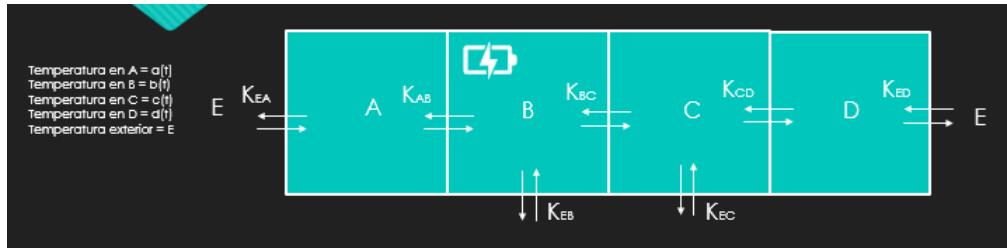


Imagen 11. Configuración espacial N° 1

Se plantea el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 1. \quad a'(t) &= \frac{1}{K_{EA}}(E - a(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(b(t) - a(t)) \\
 2. \quad b'(t) &= \frac{1}{K_{EB}}(E - b(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(a(t) - b(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(c(t) - b(t)) + U(t) \\
 3. \quad c'(t) &= \frac{1}{K_{EC}}(E - c(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(b(t) - c(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(d(t) - c(t)) \\
 4. \quad d'(t) &= \frac{1}{K_{ED}}(E - d(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(c(t) - d(t))
 \end{aligned} \tag{Ecuación 24}$$

→ Modelo configuración espacial N° 2

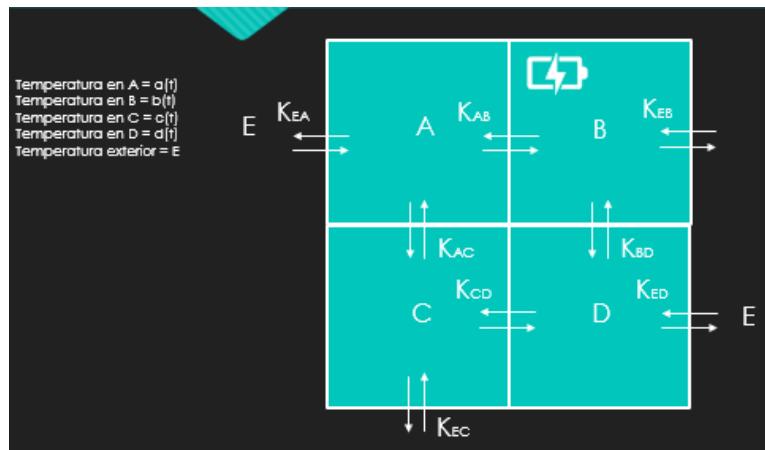


Imagen 12. Configuración espacial N° 2

$$\begin{aligned}
 1. \quad a'(t) &= \frac{1}{K_{EA}}(E - a(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(b(t) - a(t)) + \frac{1}{K_{AC}}(c(t) - a(t)) \\
 2. \quad b'(t) &= \frac{1}{K_{EB}}(E - b(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(a(t) - b(t)) + \frac{1}{K_{BD}}(d(t) - b(t)) + U(t) \\
 3. \quad c'(t) &= \frac{1}{K_{EC}}(E - c(t)) + \frac{1}{K_{AC}}(a(t) - c(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(d(t) - c(t)) \\
 4. \quad d'(t) &= \frac{1}{K_{ED}}(E - d(t)) + \frac{1}{K_{BD}}(b(t) - d(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(c(t) - d(t))
 \end{aligned} \tag{Ecuación 25}$$

→ Modelo configuración espacial N° 3

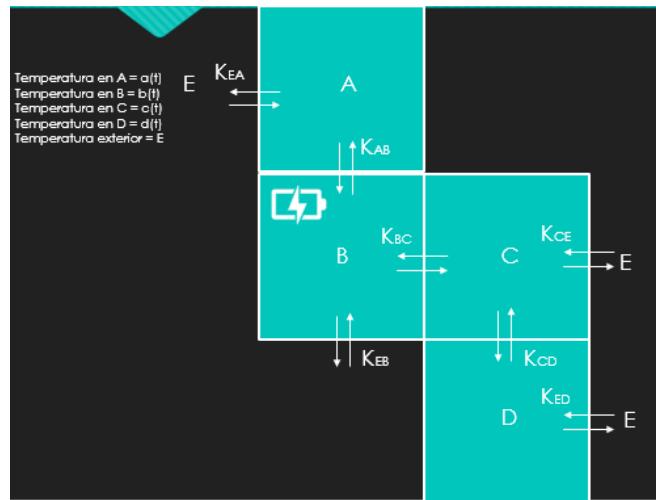


Imagen 13. Configuración espacial N° 3

$$\begin{aligned}
 1. \quad a'(t) &= \frac{1}{K_{EA}}(E - a(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(b(t) - a(t)) \\
 2. \quad b'(t) &= \frac{1}{K_{EB}}(E - b(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(a(t) - b(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(c(t) - b(t)) + U(t) \\
 3. \quad c'(t) &= \frac{1}{K_{EC}}(E - c(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(b(t) - c(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(d(t) - c(t)) \\
 4. \quad d'(t) &= \frac{1}{K_{ED}}(E - d(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(c(t) - d(t))
 \end{aligned}$$

Ecuación 26

→ Modelo configuración espacial N° 4

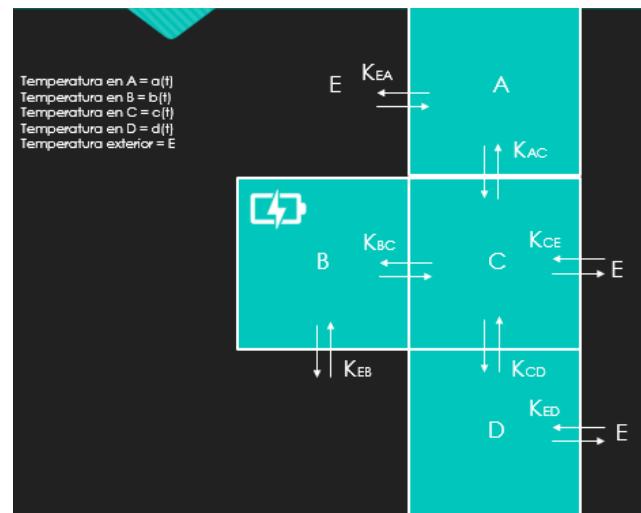


Imagen 14. Configuración espacial N° 4

$$\begin{aligned}
 1. \quad a'(t) &= \frac{1}{K_{EA}}(E - a(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(c(t) - a(t)) \\
 2. \quad b'(t) &= \frac{1}{K_{EB}}(E - b(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(c(t) - b(t)) + U(t) \\
 3. \quad c'(t) &= \frac{1}{K_{EC}}(E - c(t)) + \frac{1}{K_{AC}}(a(t) - c(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(b(t) - c(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(d(t) - c(t)) \\
 4. \quad d'(t) &= \frac{1}{K_{ED}}(E - d(t)) + \frac{1}{K_{CD}}(c(t) - d(t))
 \end{aligned}$$

Ecuación 27

Después de haber formulado el modelo matemático, se procede a su implementación en el software libre Maxima. Lo que permitió llevar a cabo las iteraciones necesarias para simular la transferencia de calor en las cuatro estancias bajo diferentes configuraciones espaciales.

Es importante establecer las condiciones iniciales y los parámetros de contorno adecuados para cada estancia. Esto incluye definir las temperaturas iniciales, así como los datos relacionados con los objetos adyacentes, los coeficientes de transferencia de calor en las superficies de contacto, entre otros factores relevantes, que se describirán con valores concretos en el siguiente capítulo.

En caso de que los resultados no sean satisfactorios, es posible realizar ajustes en el modelo matemático, las condiciones iniciales o las condiciones de contorno. Esto puede requerir modificaciones en las ecuaciones, cambios en los parámetros o la consideración de otros efectos físicos relevantes, que puedan ser considerados a futuro por lo que al final del presente documento se anexarán los documentos para que puedan ser usados en futuras investigaciones.

6. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS, RESOLUCIÓN DE CASOS PRÁCTICOS

6.1 Resolución de los modelos matemáticos con diferentes configuraciones espaciales.

→ Resolución configuración espacial N° 1 (Anexo1)

Implementando los siguientes valores concretos, con los espacios vacíos:

- $E=31^{\circ}\text{C}$,
- Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, o sea, que la temperatura total que disipa es $-3^{\circ}\text{C}/4\text{h}$,
- Constantes de transferencia de calor (K) = 3 horas.

Se obtiene el siguiente resultado:

$$a1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t} \left(\frac{243 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}} + \frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{56} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{853}{28}}{16}$$

$$b1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t} \left(\frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{28} - \frac{81 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{419}{14}}{16}$$

$$c1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t} \left(\frac{81 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{28} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{214}{7}}{16}$$

$$d1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t} \left(-\frac{243 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{56} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{431}{14}}{16}$$

Y se muestra en gráficas así:

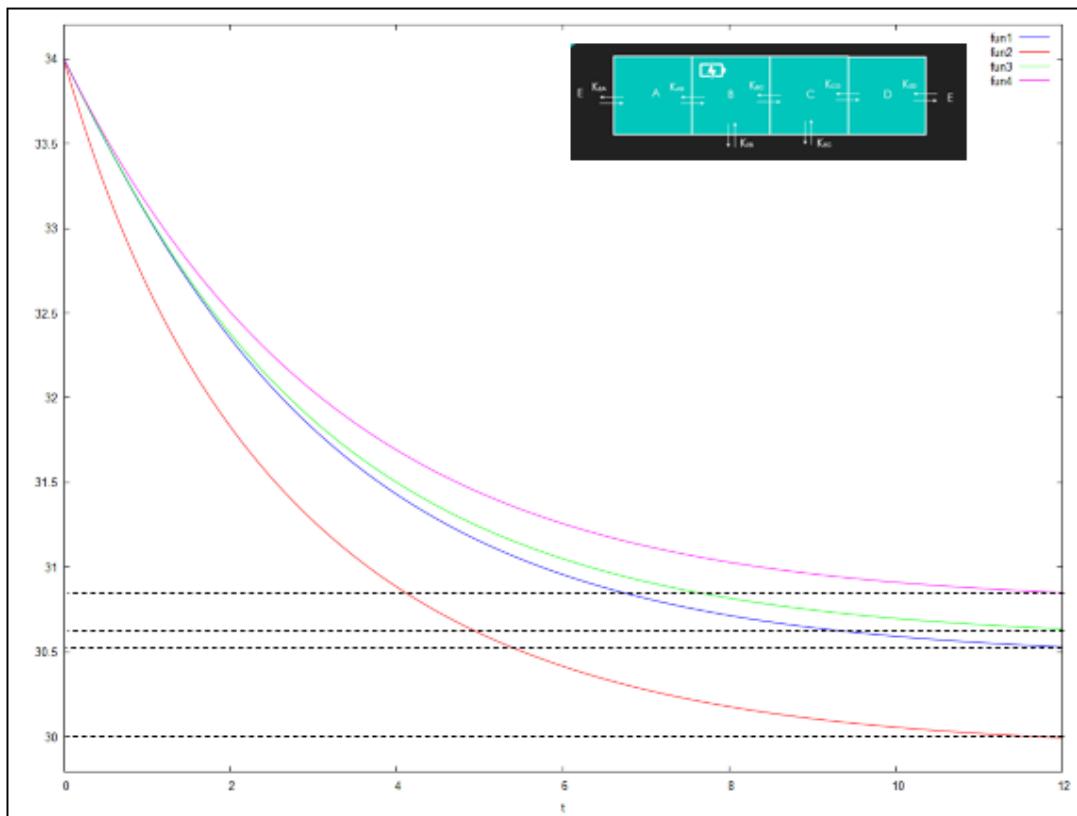


Imagen 15. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 1

Efectivamente se puede observar que la habitación B es la que experimenta el mayor cambio de temperatura después de transcurridas doce (12) horas. Esto se debe a que cuenta con un dispositivo de aire acondicionado que ayuda a mantener una temperatura más baja. Aunque las otras habitaciones disminuyen su temperatura para tratar de igualarse a la temperatura exterior, no logran alcanzar la temperatura mínima de aproximadamente 30°C que se registra en la habitación B.

→ Resolución configuración espacial N° 2 (Anexo 2)

Implementando los siguientes valores concretos, con los espacios vacíos:

- $E=31^{\circ}\text{C}$,
- Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, es decir que la temperatura total que disipa es $-3^{\circ}\text{C}/4\text{h}$,
- Constantes de transferencia de calor (K) = 3 horas.

Se obtiene el siguiente resultado:

$$a1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{611}{20}$$

$$b1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{8} + \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{599}{20}$$

$$c1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{8} + \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80}$$

$$d1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{611}{20}$$

Y se muestra en gráficas así:

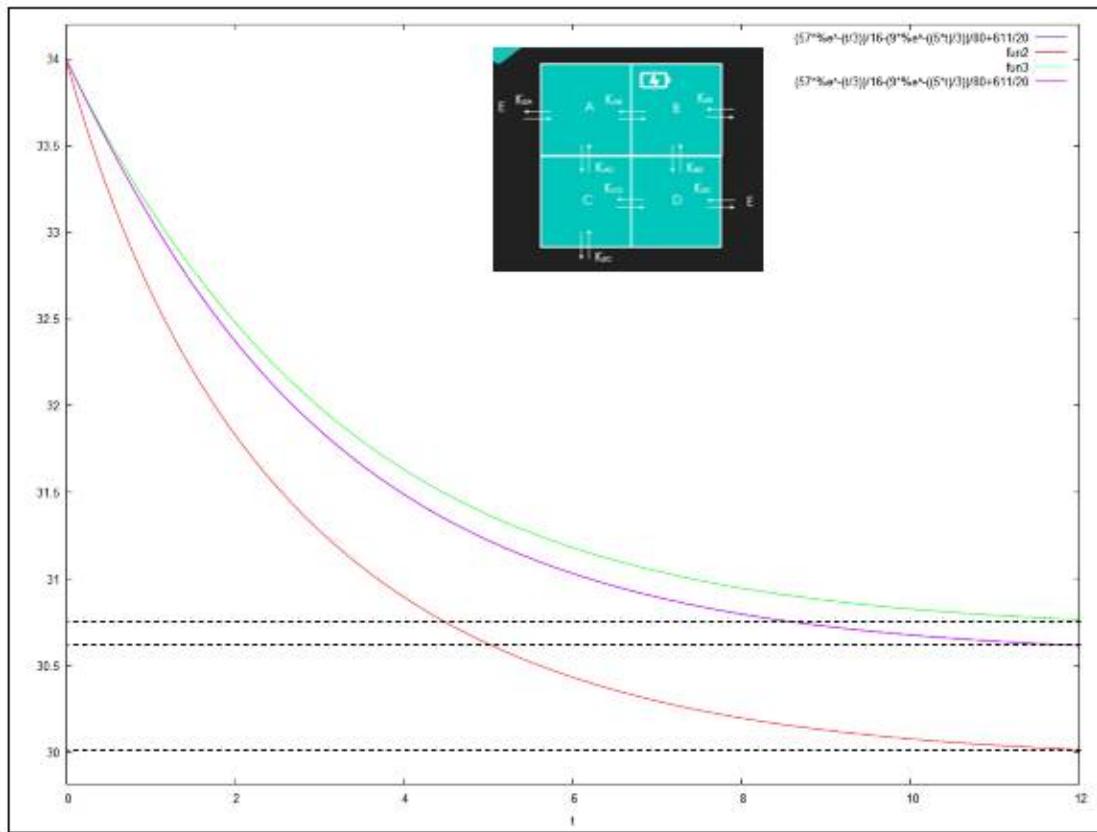


Imagen 16. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 2

Después de transcurridas doce (12) horas, se puede notar claramente que la habitación B, al igual que en el ejercicio anterior es la que experimenta la temperatura más baja. Esto se debe al hecho de que cuenta con un sistema de aire acondicionado, el cual contribuye a mantener una temperatura más fresca y agradable. Por otro lado, las otras habitaciones también disminuyen su temperatura para intentar igualarse a la temperatura exterior, pero no logran alcanzar la temperatura mínima registrada en la habitación B, la cual se sitúa en aproximadamente 30°C.

Además de lo mencionado, se puede observar que las temperaturas de la habitación A y C disminuyen en la misma proporción a lo largo del tiempo. Esto se debe a que estas

habitaciones se encuentran en la misma posición o ubicación dentro del edificio, lo que puede influir en la manera en que se distribuye el flujo de aire y la transferencia de calor.

→ Resolución configuración espacial N° 3 (Anexo 3)

Implementando los siguientes valores concretos, con los espacios vacíos:

- E=31°C,
- Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, o sea que la temperatura total que disipa es -3°C/4h,
- Constantes de transferencia de calor (K) = 3 horas.

Se obtiene el siguiente resultado:

$$a1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t}(\frac{243 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}} + \frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{56})}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{853}{28}}{1}$$

$$b1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t}(\frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{28} - \frac{81 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}})}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{419}{14}}{1}$$

$$c1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t}(\frac{81 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{28})}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{214}{7}}{1}$$

$$d1(t) = \frac{\frac{\%e^{-t}(-\frac{243 \sinh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh(\frac{\sqrt{2}t}{3})}{56})}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{431}{14}}{1}$$

Y se muestra en gráficas así:

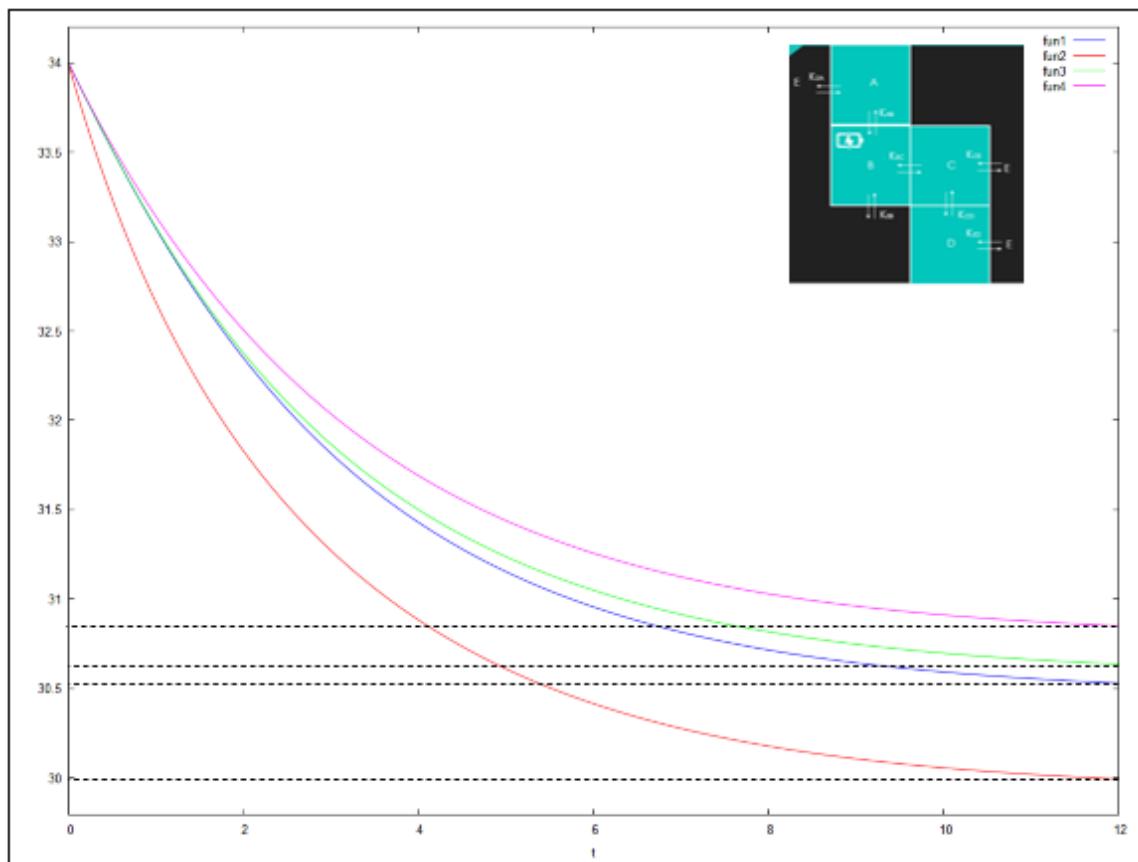


Imagen 17. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 3

Se puede observar que las habitaciones A y C se ven afectadas por el dispositivo de aire acondicionado que se encuentra en la habitación B, debido a su proximidad. Esto indica que la ubicación y distribución de las habitaciones, junto con factores como el aislamiento térmico y la ventilación, juegan un papel importante en la propagación de los cambios de temperatura en el edificio. En el caso de la habitación D, que se considera una estancia con paredes completamente selladas, es posible que esté menos expuesta al flujo de aire enfriado por el dispositivo de aire acondicionado, lo que resulta en una disminución de temperatura menos pronunciada.

→ Resolución configuración espacial N° 4 (Anexo 4)

Implementando los siguientes valores concretos, con los espacios vacíos:

- $E=31^{\circ}\text{C}$,
- Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, o sea que la temperatura total que disipa es $-3^{\circ}\text{C}/4\text{h}$,
- Constantes de transferencia de calor (K) = 3 horas.

Se obtiene el siguiente resultado:

$$a1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-\frac{2t}{3}}}{8} + \frac{3\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{1231}{40}$$

$$b1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-\frac{2t}{3}}}{4} + \frac{3\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{593}{20}$$

$$c1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{611}{20}$$

$$d1(t) = \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-\frac{2t}{3}}}{8} + \frac{3\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{1231}{40}$$

Y se muestra en gráficas así:

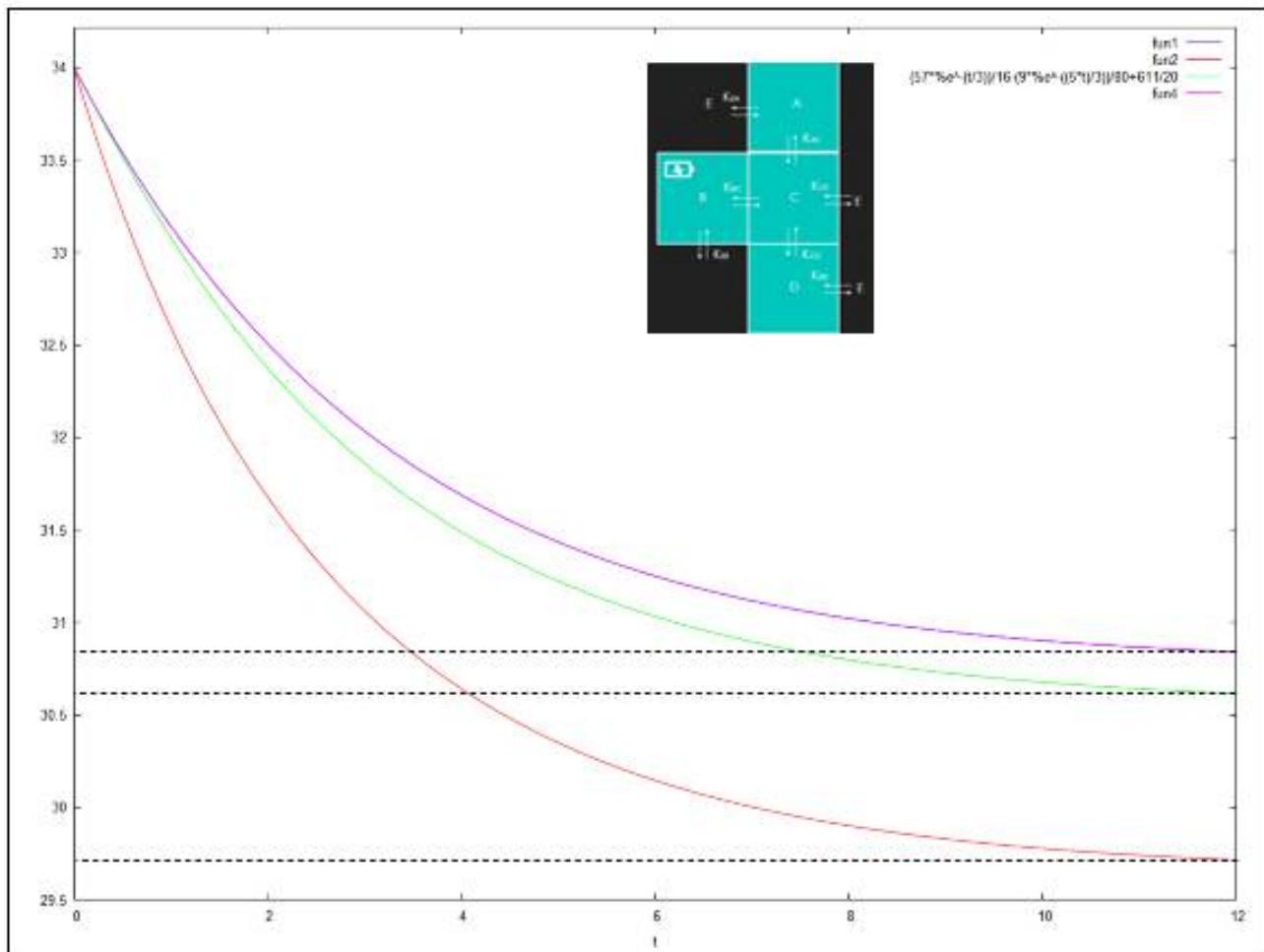


Imagen 18. Gráfica aplicación de distribución espacial N° 4

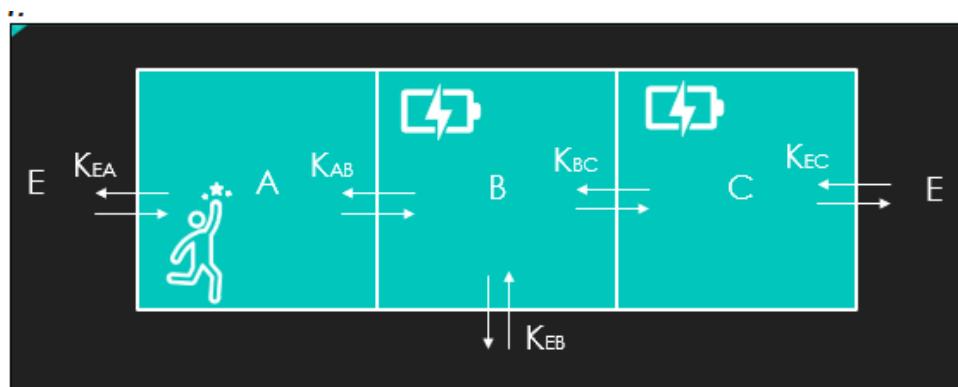
En este caso particular, se observa que la temperatura en la habitación B disminuye más que en los otros ejemplos. Esto puede deberse a la influencia de tres caras expuestas a la temperatura exterior. Además, la presencia del dispositivo de aire acondicionado contribuye a enfriar aún más la habitación.

Estos resultados demuestran la eficacia del dispositivo de aire acondicionado en la habitación B y resalta la importancia de contar con sistemas adecuados de climatización para garantizar el confort térmico en los espacios interiores. Asimismo, estos hallazgos nos confirman la eficiencia del modelo a la hora de interpretar datos concretos y plasmarlos gráficamente.

Estos hallazgos nos proporcionan información valiosa sobre la distribución de temperatura en las diferentes habitaciones y nos permiten comprender mejor cómo ciertos factores, como la ubicación y la presencia de dispositivos de climatización, pueden influir en el confort térmico de cada espacio. Esto nos brinda la oportunidad de tomar decisiones informadas para mejorar la eficiencia energética y el diseño de los sistemas de climatización en futuros proyectos de construcción o renovación de edificios.

6.2 Resolución de los modelos matemáticos con una misma configuración espacial y K variable

En este caso de estudio, se emplea una configuración espacial que consta de tres estancias. Se llevan a cabo tres simulaciones, en las cuales se varía la constante K en cada una de ellas. El objetivo principal de estas simulaciones es analizar y comprender la influencia que tiene la constante K en nuestro modelo matemático.



Empleando los siguientes valores concretos, con una temperatura inicial interna de 30°C:

- $E=31^{\circ}\text{C}$,
- Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, o sea que la temperatura total que disipa es $-3^{\circ}\text{C}/4\text{h}$,
- Constantes de transferencia de calor (K) = varían entre las 2 y 4 horas,
- Una persona genera en reposo según la ISO 7730 83w = 71.38, Kcal/h, y si usamos la capacidad calorífica del espacio, se encuentra que esa persona en reposo aporta 0.01784 °C/h.

Se utiliza el modelo matemático anteriormente propuesto en la Ecuación 23, y que corresponde a la siguiente:

$$\begin{aligned}
 1. \quad a'(t) &= \frac{1}{K_{EA}}(E - a(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(b(t) - a(t)) + H(t) \\
 2. \quad b'(t) &= \frac{1}{K_{EB}}(E - b(t)) + \frac{1}{K_{AB}}(a(t) - b(t)) + \frac{1}{K_{BC}}(c(t) - b(t)) + U(t) \\
 3. \quad c'(t) &= \frac{1}{K_{EC}}(E - c(t)) + \frac{1}{K_{CB}}(b(t) - c(t)) + U(t)
 \end{aligned}$$

Con los siguiente valore para K

→ **Simulación N° 1- K Variable (Anexo 5)**

*KEA:4

*KAB:2

*KEB:3.5

*KBC:2

*KEC:4

Se obtiene el siguiente resultado:

$$a1(t) = \frac{\%e^{-\frac{57t}{56}} \left(\frac{366930627 \sinh(\frac{\sqrt{1793}t}{56})}{325000\sqrt{1793}} + \frac{7475153 \cosh(\frac{\sqrt{1793}t}{56})}{325000} \right)}{28} - \frac{153569\%e^{-\frac{3t}{4}}}{300000} + \frac{2894819}{97500}$$

$$b1(t) = \frac{\%e^{-\frac{57t}{56}} \left(\frac{282106783 \sinh(\frac{\sqrt{1793}t}{56})}{325000\sqrt{1793}} + \frac{9100119 \cosh(\frac{\sqrt{1793}t}{56})}{325000} \right)}{28} + \frac{37699983}{1300000}$$

$$c1(t) = \frac{\%e^{-\frac{57t}{56}} \left(\frac{366930627 \sinh(\frac{\sqrt{1793}t}{56})}{325000\sqrt{1793}} + \frac{7475153 \cosh(\frac{\sqrt{1793}t}{56})}{325000} \right)}{28} + \frac{153569\%e^{-\frac{3t}{4}}}{300000} + \frac{55899983}{1950000}$$

Y de manera gráfica:

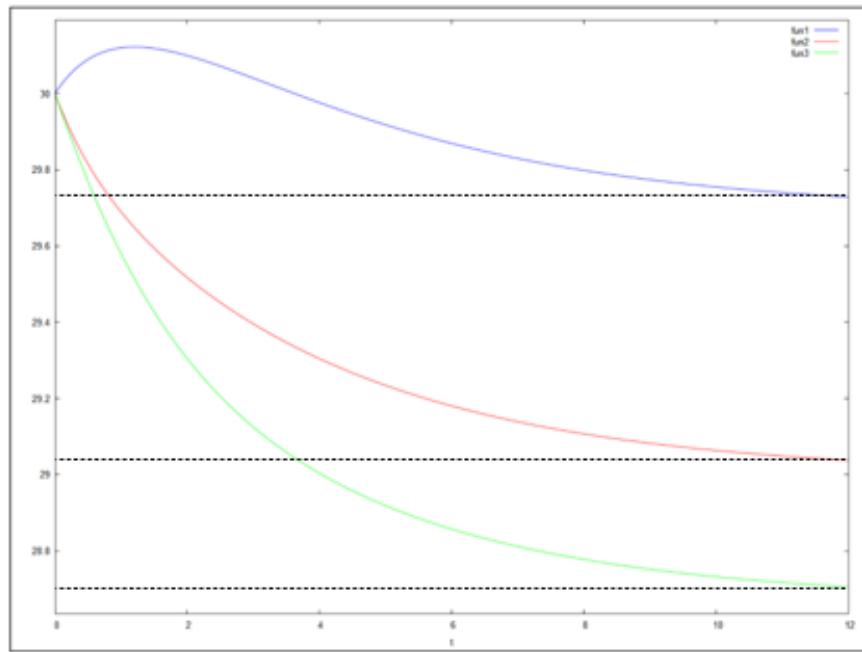


Imagen 19. Gráfica iteración N° 1 -K variable

→ Simulación N° 2- K Variable (Anexo 5)

*KEA:1

*KAB:0.7

*KEB:1

*KBC:0.5

*KEC:1

Se obtiene el siguiente resultado:

$$a2(t) = \frac{\%e^{-\frac{31t}{7}} \left(-\frac{31174507 \sinh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{4600000\sqrt{39}} - \frac{1074983 \cosh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{862500} \right)}{7} - \frac{303569\%e^{-t}}{600000} + \frac{141146397}{4600000}$$

$$b2(t) = \frac{\%e^{-\frac{31t}{7}} \left(\frac{1074983 \cosh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{2760000} - \frac{1074983 \sinh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{4600000\sqrt{39}} \right)}{7} - \frac{303569\%e^{-t}}{600000} + \frac{70035707}{2300000}$$

$$c2(t) = \frac{\%e^{-\frac{31t}{7}} \left(\frac{82691\sqrt{39} \sinh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{460000} + \frac{11824813 \cosh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{13800000} \right)}{7} - \frac{303569\%e^{-t}}{600000} + \frac{34941069}{1150000}$$

Y de manera gráfica:

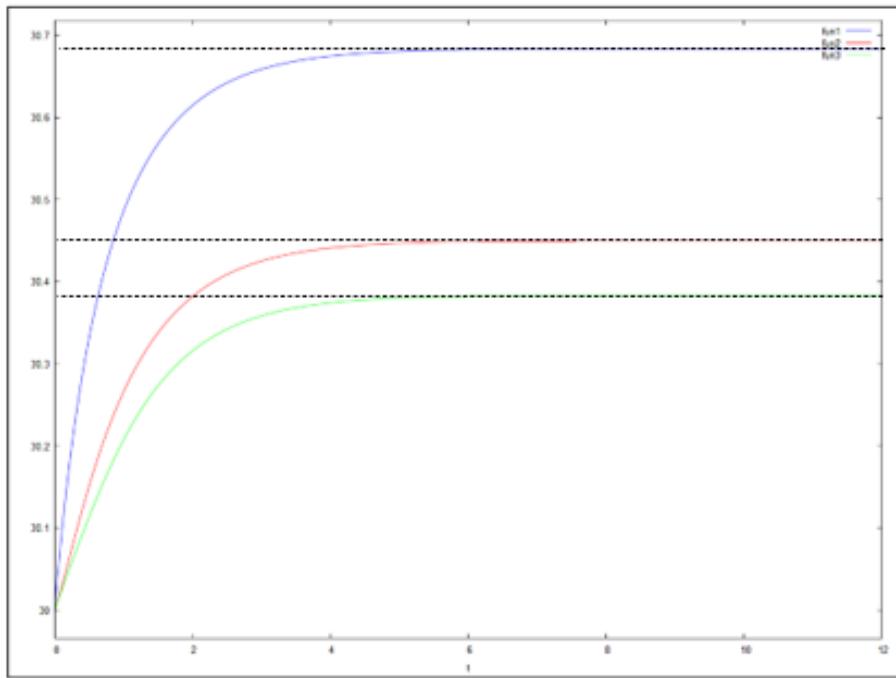


Imagen 20. Gráfica iteración N° 2 -K variable

→ Simulación N° 3- K Variable (Anexo 5)

$$*KEA:2$$

$$*KBC:3.5$$

$$*KAB:4$$

$$*KEC:2$$

$$*KEB:2$$

Se obtiene el siguiente resultado:

$$a3(t) = \frac{\%e^{-\frac{29t}{28}} \left(-\frac{153569 \sinh(\frac{\sqrt{57}t}{28})}{3200\sqrt{57}} - \frac{10289123 \cosh(\frac{\sqrt{57}t}{28})}{1200000} \right)}{14} - \frac{3569\%e^{-\frac{t}{2}}}{300000} + \frac{171496329}{5600000}$$

$$b3(t) = \frac{\%e^{-\frac{29t}{28}} \left(\frac{3532087 \cosh(\frac{\sqrt{57}t}{28})}{1200000} - \frac{5989191 \sinh(\frac{\sqrt{57}t}{28})}{400000\sqrt{57}} \right)}{14} - \frac{3569\%e^{-\frac{t}{2}}}{300000} + \frac{166889259}{5600000}$$

$$c3(t) = \frac{\%e^{-\frac{29t}{28}} \left(\frac{6296329 \sinh(\frac{\sqrt{57}t}{28})}{100000\sqrt{57}} + \frac{1689259 \cosh(\frac{\sqrt{57}t}{28})}{300000} \right)}{14} - \frac{3569\%e^{-\frac{t}{2}}}{300000} + \frac{41453569}{1400000}$$

Y de manera gráfica:

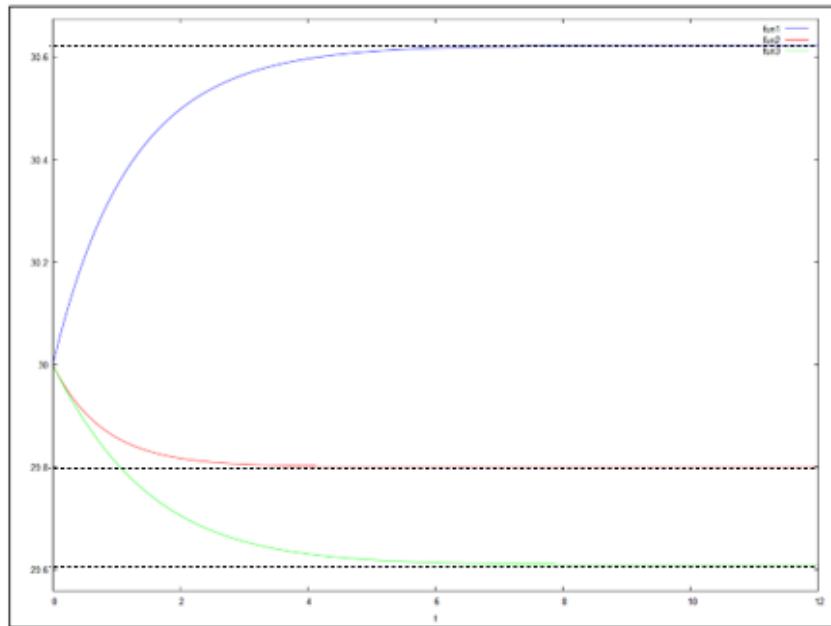


Imagen 21. Gráfica iteración N° 3 -K variable

Ahora una gráfica en donde se muestra la temperatura en las mismas estancias con K diferentes en tiempo de 12 horas.

- Temperatura en a:

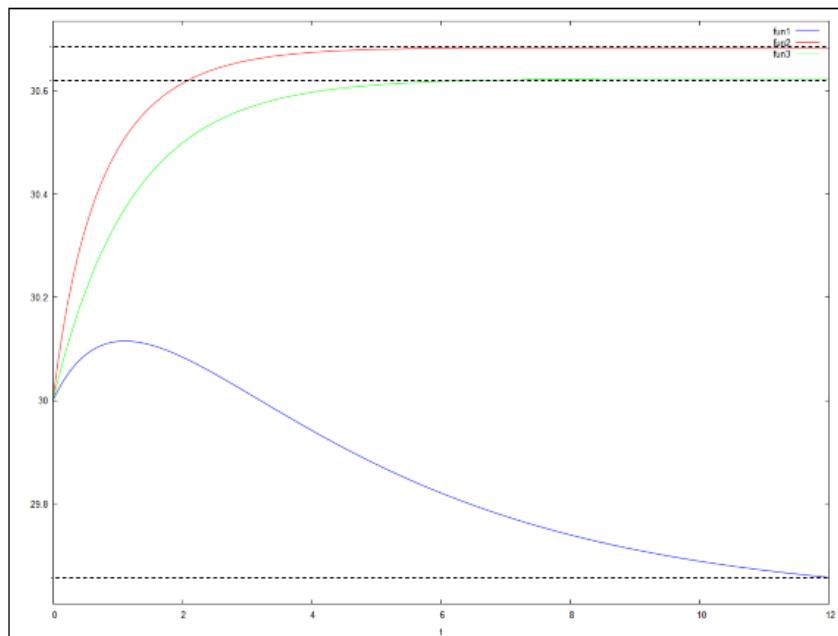


Imagen 22. Gráfica traslapo iteraciones N°1,2 y 3 en la estancia a -K variable

- Temperatura en b:

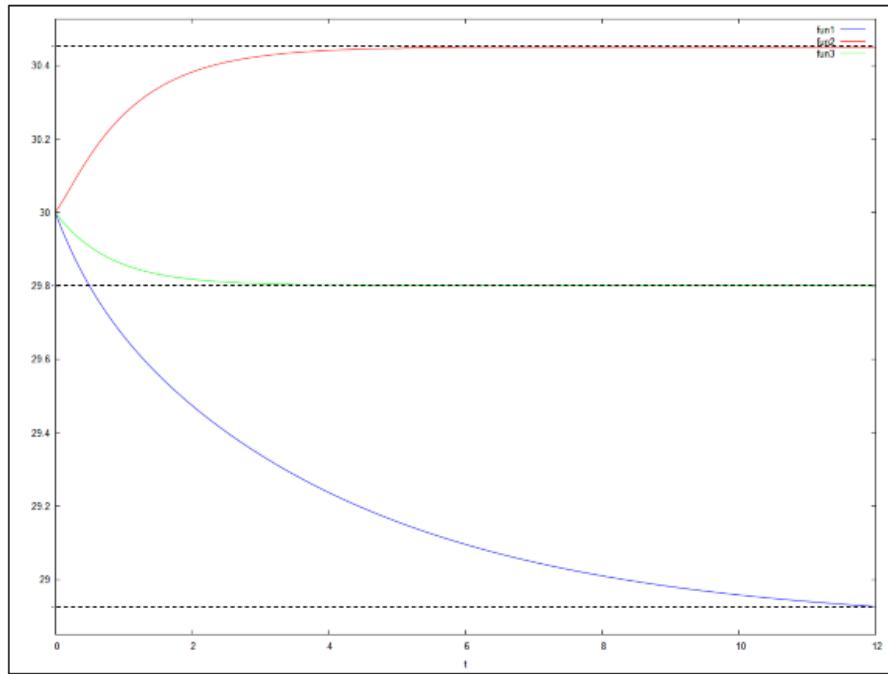


Imagen 23. Gráfica traslapo iteraciones N°1,2 y 3 en la estancia b -K variable

- Temperatura en c:

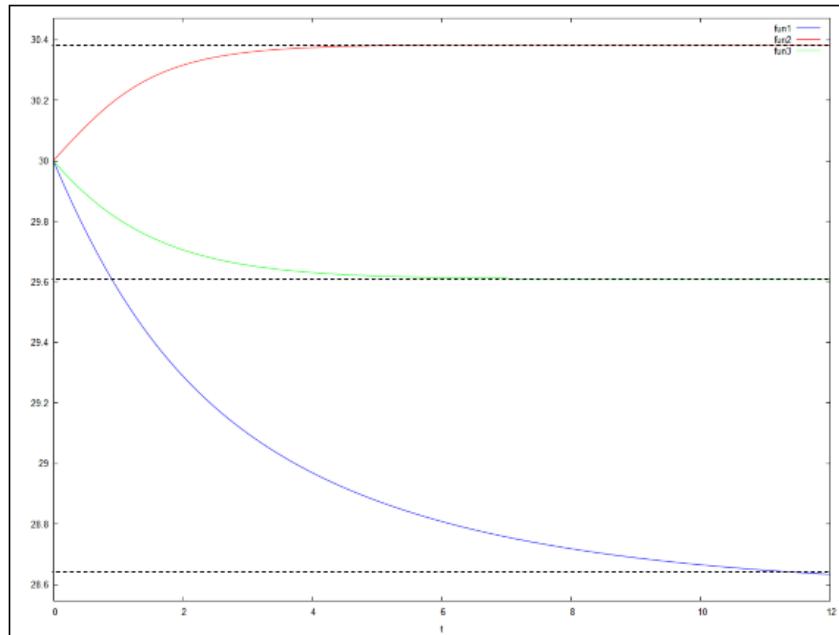


Imagen 24. Gráfica traslapo iteraciones N°1,2 y 3 en la estancia c -K variable

En resumen, se puede observar que la magnitud de la constante "K" tiene un impacto significativo en la variación de las temperaturas en las estancias, ya que está

directamente relacionada con el nivel de aislamiento de los espacios. Esto implica que, sin importar la eficiencia de los equipos de disipación de calor o calentamiento del aire, su funcionamiento será limitado si no se cuenta con un aislamiento eficiente.

Además, se puede concluir que a medida que aumenta la constante K , la eficiencia del edificio también aumenta. Esto significa que existe una relación directamente proporcional entre la constante K y la eficiencia energética del edificio. En otras palabras, un mayor nivel de aislamiento, representado por una constante K más alta, conlleva a una mayor eficiencia en el consumo de energía y a una mejor gestión térmica en el edificio.

6.3 Resolución de los modelos matemáticos con una misma configuración espacial y E periódica

Ahora teniendo en cuenta las simulaciones anteriores, tomamos los datos de la simulación N° 1, y teniendo en cuenta que la temperatura exterior no es constante en un caso más cercano a la realidad, sino que es periódica, la cambiamos por la siguiente ecuación:

$$E(t) := 29.5 - 2.5 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

Ecuación 28

Y se obtiene el siguiente resultado:

$$a(t) = \frac{\%e^{-\frac{57t}{56}} \left(\frac{\left(56 \left(203125 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 295394 \right) - 57 \left(113750 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 161679 \right)}{1625} \sinh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right) + \frac{\left(113750 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 161679 \right) \cosh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right)}{1625} \right)}{\sqrt{1793}} - \frac{1267\%e^{-\frac{3t}{4}}}{1500} - \frac{4875 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 53218}{1950}$$

28

$$b(t) = \frac{\%e^{-\frac{57t}{56}} \left(\frac{28(398125 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 585921) - 57(113750 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 175042)}{1625} \sinh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right) + \frac{(113750 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 175042) \cosh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right)}{1625} \right)}{\sqrt{1793}} - \frac{8125 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 84997}{3250}$$

28

$$c(t) = \frac{\%e^{-\frac{57t}{56}} \left(\frac{56(203125 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 295394) - 57(113750 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 161679)}{1625} \sinh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right) + \frac{(113750 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 161679) \cosh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right)}{1625} \right)}{\sqrt{1793}} + \frac{1267\%e^{-\frac{3t}{4}}}{1500} - \frac{24375 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 249619}{9750}$$

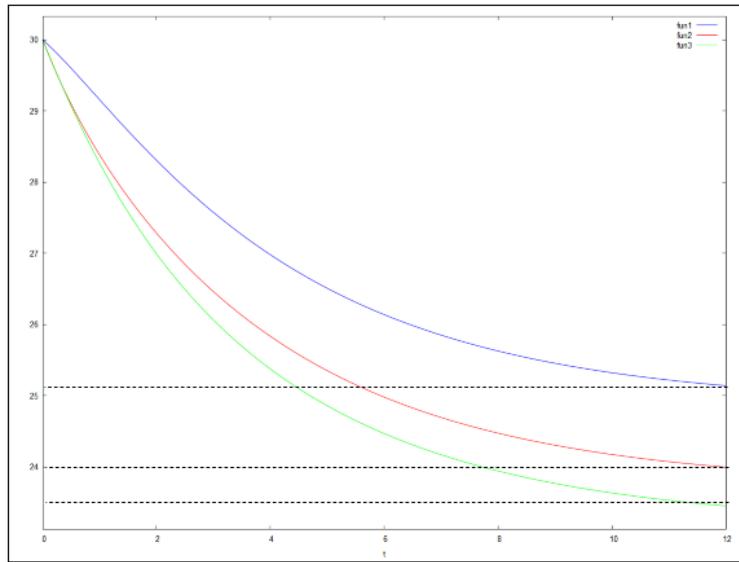


Imagen 25. Gráfica muestra con E variable e iteración N° 1

Se puede evidenciar que en comparación con la simulación N° 1 – K variable del capítulo anterior, la temperatura se ve influenciada de manera positiva, ya que alcanza una temperatura menor, lo cual es beneficioso desde el punto de vista de la eficiencia energética en el caso específico analizado.

El código de esta simulación de manera detallada se puede encontrar en el **Anexo 6**.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- En la bibliografía consultada, se examina el significado de K , y se analiza la influencia de su magnitud, ya sea grande o pequeña. Concluyendo que la K del modelo implementado es directamente proporcional con la eficiencia energética del edificio. Sin embargo, en el presente trabajo se ha desarrollado una relación propia entre K y varios parámetros usados en arquitectura. Por lo tanto, como una oportunidad para futuras investigaciones, se recomienda implementar el modelo en un caso real, utilizando valores precisos de K obtenidos a partir de la información proporcionada en el capítulo 4.3 en el apartado de Coeficiente de transferencia de calor (K). De esta manera, será posible obtener resultados más precisos y completos sobre la eficiencia energética y su relación con las distribuciones espaciales y el valor de K .
- El modelo matemático implementado en el software libre Maxima ha sido efectivo para simular la transferencia de calor en las cuatro estancias bajo diferentes configuraciones espaciales. Esto ha permitido obtener datos concretos y plasmarlos gráficamente, lo que demuestra la eficiencia del modelo en la interpretación de los resultados.
- Es crucial establecer condiciones iniciales y parámetros adecuados para cada habitación, incluyendo temperaturas iniciales, condiciones relacionadas con objetos adyacentes y coeficientes de transferencia de calor. Estos factores tienen un impacto significativo en la distribución de temperatura y deben considerarse de manera precisa para obtener resultados confiables.
- La ubicación y distribución de las habitaciones, junto con factores como el aislamiento térmico y la ventilación, jugaron un papel importante en la propagación de los cambios de temperatura en el edificio. La habitación D, del capítulo 6.1, con paredes completamente selladas, experimentó una disminución de temperatura menos pronunciada, debido a su menor exposición al flujo de aire enfriado por el dispositivo de aire acondicionado.
- La magnitud de la constante K , que está relacionada con el nivel de aislamiento de los espacios, tiene un impacto significativo en la variación de las temperaturas en las estancias. Un mayor nivel de aislamiento, representado por una constante K más alta, conlleva a una mayor eficiencia energética del edificio y una mejor gestión térmica.

8. BIBLIOGRAFÍA

- (ICONTEC), I. C. (1999). *Ingeniería civil y arquitectura, planeamiento y diseño de instalaciones y ambientes escolares NTC 4595*. Bogotá: Normas Técnicas Colombianas.
- Asociación Técnica Española de Climatización y Refrigeración (ATECYR). (2008). *Guía técnica de procedimientos y aspectos de la simulación de instalaciones térmicas en edificios*. Madrid: Instituto para la Diversificación y Ahorro de la Energía.
- Beatriz Campos, C. C. (2011). *Ecuaciones diferenciales*. Castellón de la plana: Universitat Jaume.
- Calvario, A. M. (2020). *Un modelo matemático para estudiar la variación del confort térmico en una habitación como consecuencia del flujo de calor a través de sus paredes*. Puebla: Benemerita Universidad Autónoma de Puebla.
- Certificación, A. E. (2006). *Determinación analítica e interpretación del bienestar térmico*. Madrid: Comite Europeo de Normalización.
- Franco, J. T. (24 de Julio de 2018). *¿Cómo calcular la transmitancia térmica (Valor U) en la envolvente material de un edificio?* Obtenido de https://www.archdaily.co/co/898485/como-calcular-la-transmitancia-termica-valor-u-en-la-envolvente-material-de-un-edificio?ad_source=search&ad_medium=search_result_articles
- Hernandez, P. (9 de Abril de 2014). *Características térmicas de los materiales*. . Obtenido de <https://pedrojhernandez.com/2014/04/09/caracteristicas-termicas-de-los-materiales/>
- Larregain Pedro, M. A. (2009). Comparación entre curvas de calentamiento teóricas y experimentales. *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN*, 1-12.
- Palafox, J. F. (1993). *Transferencia de calor en edificaciones*. Obtenido de <http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/3576/Capitulo2.pdf>
- Peña, J. S. (2004). *Apuntes de ecuaciones diferenciales*. N.I: N.I.
- R. Kent Nagle, E. B. (2005). Ecuaciones diferenciales y problema con valores en la frontera. México: Addison Wesley.
- Tripler, P. A. (2021). Propiedades y procesos térmicos. En *Física* (pág. 665). Barcelona: Reverté.
- Zill, D. G. (2009). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. México D.F: Cengage.

9. ANEXOS

1. Código de Maxima en formato PDF Modelo de configuración espacial N° 1.
2. Código de Maxima en formato PDF Modelo de configuración espacial N° 2.
3. Código de Maxima en formato PDF Modelo de configuración espacial N° 3
4. Código de Maxima en formato PDF Modelo de configuración espacial N° 4.
5. Código de Maxima en formato PDF simulaciones *K*-variable.
6. Código de Maxima en formato PDF temperatura exterior periódica.

ANEXO 1

Código de Maxima en formato PDF Modelo de
configuración espacial N° 1

PRUEBA CON CUATRO ESTANCIAS EN DIFERENTES CONFIGURACIONES ESPACIALES

0.1 Prueba 01--> Modelo configuración espacial N° 1

* E=31°C,

* Espacios vacíos

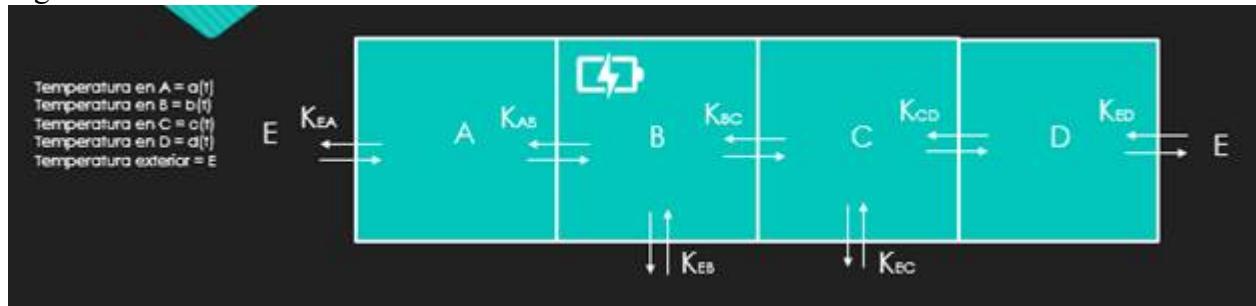
* Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, osea que el calor que disipa es -3°C/4h

* Constantes de transferencia de calor= 3 horas

(%i1) kill (all) ;

done

Figure 1:



Temperatura en A = a(t)

Temperatura en B = b(t)

Temperatura en C = c(t)

Temperatura en D = d(t)

Temperatura exterior = E

Constante de transferencia entre espacio = K

Calor generado por un dispositivo = U(t)

Calor generado en el interior = H(t)

(%i1) E (t) := 31 ;

$$E(t) := 31$$

(%i2) U (t) := - 3 / 4 ;

$$U(t) := \frac{-3}{4}$$

(%i3) KEA : 3 ;

(%i4) **KAB** : 3 ;

3

(%i5) **KEB** : 3 ;

3

(%i6) **KAB** : 3 ;

3

(%i7) **KBC** : 3 ;

3

(%i8) **KEC** : 3 ;

3

(%i9) **KCD** : 3 ;

3

(%i10) **KED** : 3 ;

3

(%i11) **eq1** : ' diff(a1 (t), t) = ((1 / **KEA**) · (**E** (t) - a1 (t))) + ((1 / **KAB**) · (b1 (t) - a1 (t))) ;

$$\frac{d}{dt} a1(t) = \frac{b1(t) - a1(t)}{3} + \frac{31 - a1(t)}{3}$$

(%i12) **eq2** : ' diff(b1 (t), t) = ((1 / **KEB**) · (**E** (t) - b1 (t))) + ((1 / **KAB**) · (a1 (t) - b1 (t))) + ((1 / **KBC**) · (c1 (t) - b1 (t))) + **U** (t);

$$\frac{d}{dt} b1(t) = \frac{c1(t) - b1(t)}{3} + \frac{a1(t) - b1(t)}{3} + \frac{31 - b1(t)}{3} - \frac{3}{4}$$

(%i13) **eq3** : ' diff(c1 (t), t) = ((1 / **KEC**) · (**E** (t) - c1 (t))) + ((1 / **KBC**) · (b1 (t) - c1 (t))) + ((1 / **KCD**) · (d1 (t) - c1 (t))) ;

$$\frac{d}{dt} c1(t) = \frac{d1(t) - c1(t)}{3} + \frac{b1(t) - c1(t)}{3} + \frac{31 - c1(t)}{3}$$

(%i14) **eq4** : ' diff(d1 (t), t) = ((1 / **KED**) · (**E** (t) - d1 (t))) + ((1 / **KCD**) · (c1 (t) - d1 (t))) ;

$$\frac{d}{dt} d1(t) = \frac{c1(t) - d1(t)}{3} + \frac{31 - d1(t)}{3}$$

(%i15) atvalue (a1 (t), t = 0 , 34);

61

34

(%i16) atvalue (b1 (t), t = 0 , 34);

34

(%i17) atvalue (c1 (t), t = 0 , 34);

34

(%i18) atvalue (d1 (t), t = 0 , 34);

34

(%i19) desolve ([eq1 , eq2 , eq3 , eq4] , [a1 (t), b1 (t), c1 (t), d1 (t)]);

(%i20) Tempa1 : (%e ^ (- t) · ((243 · sinh ((sqrt (2) · t) / 3)) / (7 · 2 ^ (7 / 2)) + (81 · cosh ((sqrt (2) · t) / 3)) / 56)) / 9 + (57 · %e ^ (- t / 3)) / 16 - (3 · %e ^ (- t)) / 16 + 853 / 28 ;

$$\frac{\%e^{-t} \left(\frac{243 \sinh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{72^{\frac{7}{2}}} + \frac{81 \cosh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{56} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{853}{28}$$

(%i21) Tempb1 : (%e ^ (- t) · ((81 · cosh ((sqrt (2) · t) / 3)) / 28 - (81 · sinh ((sqrt (2) · t) / 3)) / (7 · 2 ^ (7 / 2)))) / 9 + (57 · %e ^ (- t / 3)) / 16 + (3 · %e ^ (- t)) / 16 + 419 / 14 ;

$$\frac{\%e^{-t} \left(\frac{81 \cosh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{28} - \frac{81 \sinh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{72^{\frac{7}{2}}} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{419}{14}$$

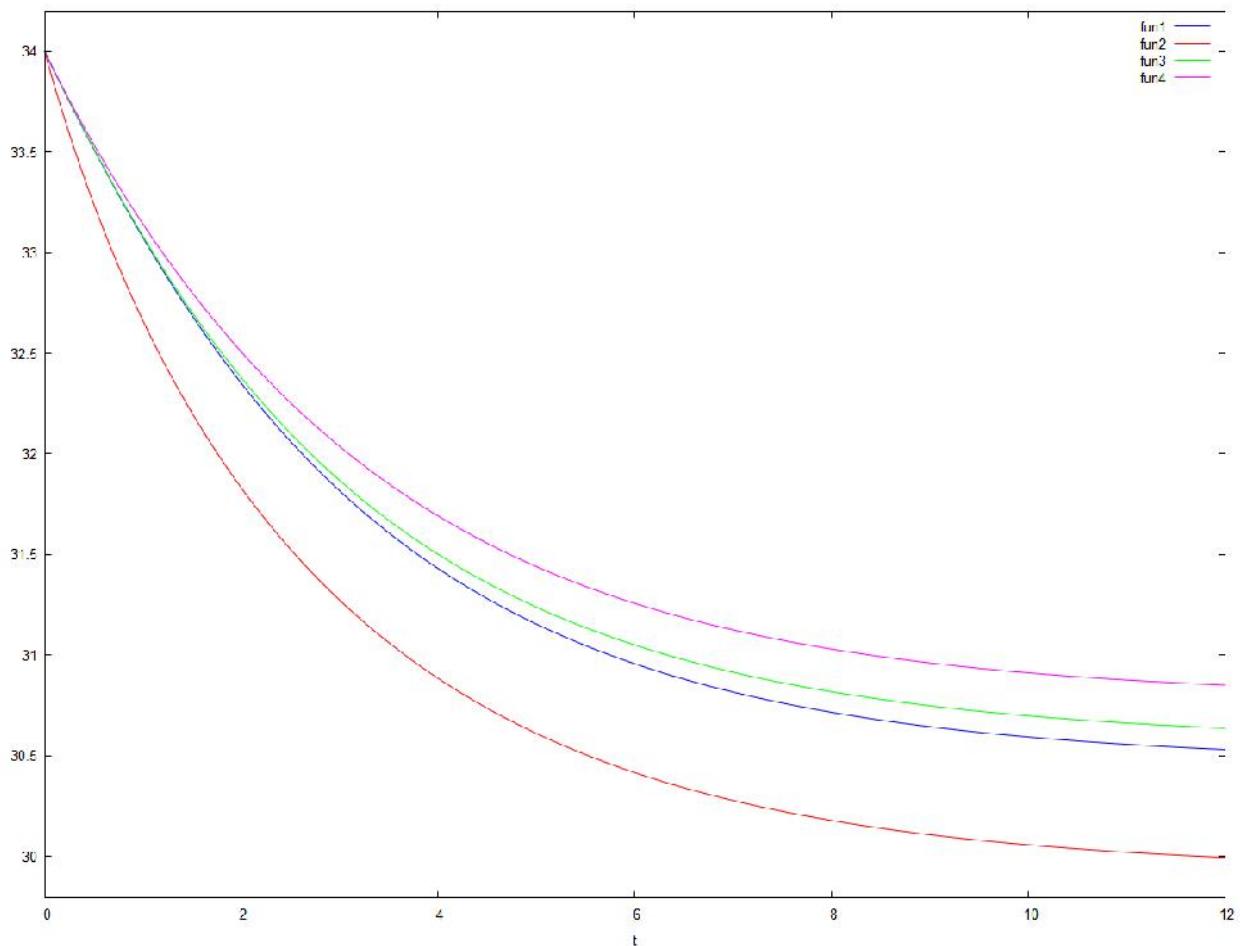
(%i22) Tempc1 : (%e ^ (- t) · ((81 · sinh ((sqrt (2) · t) / 3)) / (7 · 2 ^ (7 / 2)) - (81 · cosh ((sqrt (2) · t) / 3)) / 28)) / 9 + (57 · %e ^ (- t / 3)) / 16 + (3 · %e ^ (- t)) / 16 + 214 / 7 ;

$$\frac{\%e^{-t} \left(\frac{81 \sinh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{28} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{214}{7}$$

(%i23) Tempd1 : (%e ^ (- t) · (- (243 · sinh ((sqrt (2) · t) / 3)) / (7 · 2 ^ (7 / 2)) - (81 · cosh ((sqrt (2) · t) / 3)) / 56)) / 9 + (57 · %e ^ (- t / 3)) / 16 - (3 · %e ^ (- t)) / 16 + 431 / 14 ;

$$\frac{\%e^{-t} \left(- \frac{243 \sinh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh \left(\frac{\sqrt{2}t}{3} \right)}{56} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{431}{14}$$

(%i24) wxplot2d ([Tempa1 , Tempb1 , Tempc1 , Tempd1] , [t , 0 , 12]);



ANEXO 2

Código de Maxima en formato PDF Modelo de
configuración espacial N° 2

PRUEBA CON CUATRO ESTANCIAS EN DIFERENTES CONFIGURACIONES ESPACIALES

0.1 Prueba 02--> Modelo configuración espacial N° 2

* $E=31^{\circ}\text{C}$,

* Espacios vacíos

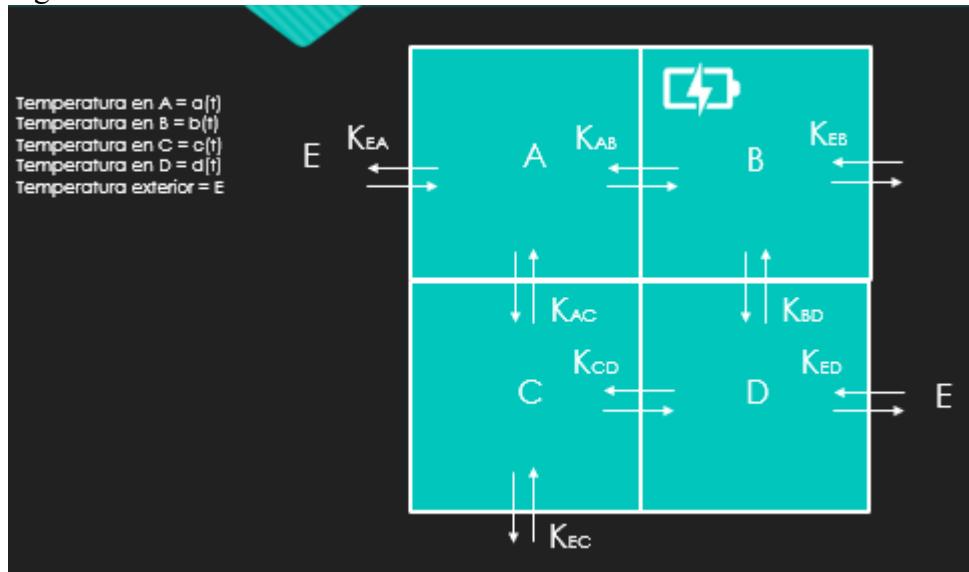
* Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, osea que el calor que disipa es $-3^{\circ}\text{C}/4\text{h}$

* Constantes de transferencia de calor= 3 horas

(%i1) kill (all) ;

done

Figure 1:



Temperatura en A = a(t)

Temperatura en B = b(t)

Temperatura en C = c(t)

Temperatura en D = d(t)

Temperatura exterior = E

Constante de transferencia entre espacio = K

Calor generado por un dispositivo = U(t)

Calor generado en el interior = H(t)

(%i1) E (t) := 31 ;

$$E(t) := 31$$

(%i2) **U**(**t**) := - 3 / 4 ;

65

$$U(t) := \frac{-3}{4}$$

(%i3) **KEA** : 3 ;

3

(%i4) **KAB** : 3 ;

3

(%i5) **KAC** : 3 ;

3

(%i6) **KEB** : 3 ;

3

(%i7) **KAB** : 3 ;

3

(%i8) **KBD** : 3 ;

3

(%i9) **KEC** : 3 ;

3

(%i10) **KCD** : 3 ;

3

(%i11) **KED** : 3 ;

3

(%i12) **eq1** : ' diff(**a1**(**t**) , **t**) = ((1 / **KEA**) · (**E**(**t**) - **a1**(**t**))) + ((1 / **KAB**) · (**b1**(**t**) - **a1**(**t**))) + ((1 / **KAC**) · (**c1**(**t**) - **a1**(**t**))) ;

$$\frac{d}{dt} a1(t) = \frac{c1(t) - a1(t)}{3} + \frac{b1(t) - a1(t)}{3} + \frac{31 - a1(t)}{3}$$

(%i13) **eq2** : ' diff(**b1**(**t**) , **t**) = ((1 / **KEB**) · (**E**(**t**) - **b1**(**t**))) + ((1 / **KAB**) · (**a1**(**t**) - **b1**(**t**))) + ((1 / **KBD**) · (**d1**(**t**) - **b1**(**t**))) + **U**(**t**) ;

$$\frac{d}{dt} b1(t) = \frac{d1(t) - b1(t)}{3} + \frac{a1(t) - b1(t)}{3} + \frac{31 - b1(t)}{3} - \frac{3}{4}$$

(%i14) $\text{eq3} : ' \text{diff}(\text{c1}(\text{t}), \text{t}) = ((1/\text{KEC}) \cdot (\text{E}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) + ((1/\text{KAC}) \cdot (\text{a1}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) + 66$
 $((1/\text{KCD}) \cdot (\text{d1}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) ;$

$$\frac{d}{dt} \text{c1}(t) = \frac{\text{d1}(t) - \text{c1}(t)}{3} + \frac{\text{a1}(t) - \text{c1}(t)}{3} + \frac{31 - \text{c1}(t)}{3}$$

(%i15) $\text{eq4} : ' \text{diff}(\text{d1}(\text{t}), \text{t}) = ((1/\text{KED}) \cdot (\text{E}(\text{t}) - \text{d1}(\text{t}))) + ((1/\text{KED}) \cdot (\text{b1}(\text{t}) - \text{d1}(\text{t}))) +$
 $((1/\text{KCD}) \cdot (\text{c1}(\text{t}) - \text{d1}(\text{t}))) ;$

$$\frac{d}{dt} \text{d1}(t) = \frac{\text{c1}(t) - \text{d1}(t)}{3} + \frac{\text{b1}(t) - \text{d1}(t)}{3} + \frac{31 - \text{d1}(t)}{3}$$

(%i16) $\text{atvalue}(\text{a1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34) ;$

34

(%i17) $\text{atvalue}(\text{b1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34) ;$

34

(%i18) $\text{atvalue}(\text{c1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34) ;$

34

(%i19) $\text{atvalue}(\text{d1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34) ;$

34

(%i20) $\text{desolve}([\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}, \text{eq4}], [\text{a1}(\text{t}), \text{b1}(\text{t}), \text{c1}(\text{t}), \text{d1}(\text{t})]) ;$

(%i21) $\text{Tempa1} : (57 \cdot \%e^{(-\text{t}/3)})/16 - (9 \cdot \%e^{(-(5 \cdot \text{t})/3)})/80 + 611/20 ;$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{611}{20}$$

(%i22) $\text{Tempb1} : (57 \cdot \%e^{(-\text{t}/3)})/16 + (3 \cdot \%e^{(-\text{t})})/8 + (9 \cdot \%e^{(-(5 \cdot \text{t})/3)})/80 + 599/20 ;$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{8} + \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{599}{20}$$

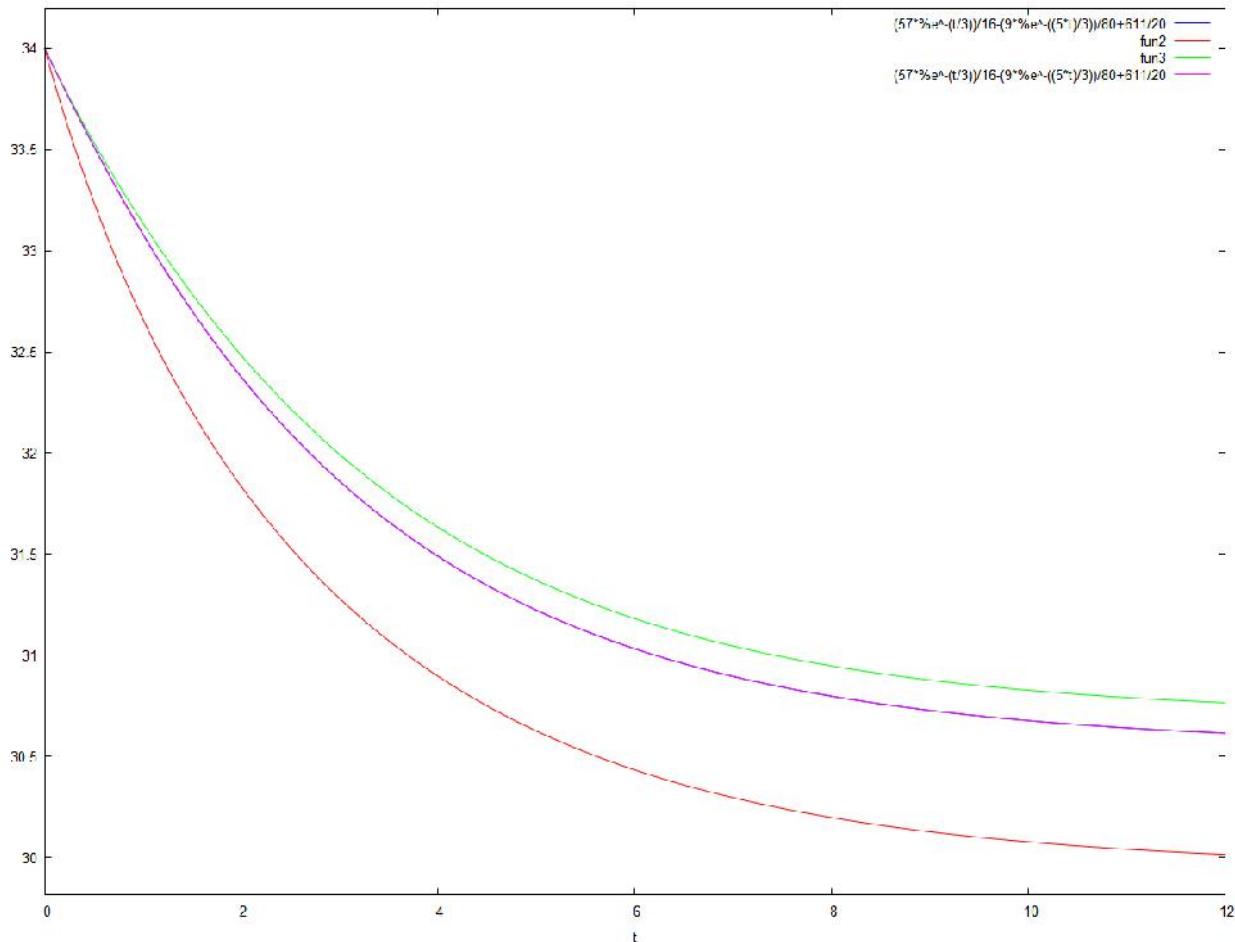
(%i23) $\text{Tempc1} : (57 \cdot \%e^{(-\text{t}/3)})/16 - (3 \cdot \%e^{(-\text{t})})/8 + (9 \cdot \%e^{(-(5 \cdot \text{t})/3)})/80 + 307/10 ;$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{8} + \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{307}{10}$$

(%i24) $\text{Tempd1} : (57 \cdot \%e^{(-\text{t}/3)})/16 - (9 \cdot \%e^{(-(5 \cdot \text{t})/3)})/80 + 611/20 ;$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{611}{20}$$

(%i25) `wxplot2d([Tempa1, Tempb1, Tempc1, Tempd1], [t, 0, 12]);`



ANEXO 3

Código de Maxima en formato PDF Modelo de
configuración espacial N° 3

PRUEBA CON CUATRO ESTANCIAS EN DIFERENTES CONFIGURACIONES ESPACIALES

0.1 Prueba 03--> Modelo configuración espacial N° 3

* $E = 31^\circ\text{C}$,

* Espacios vacíos

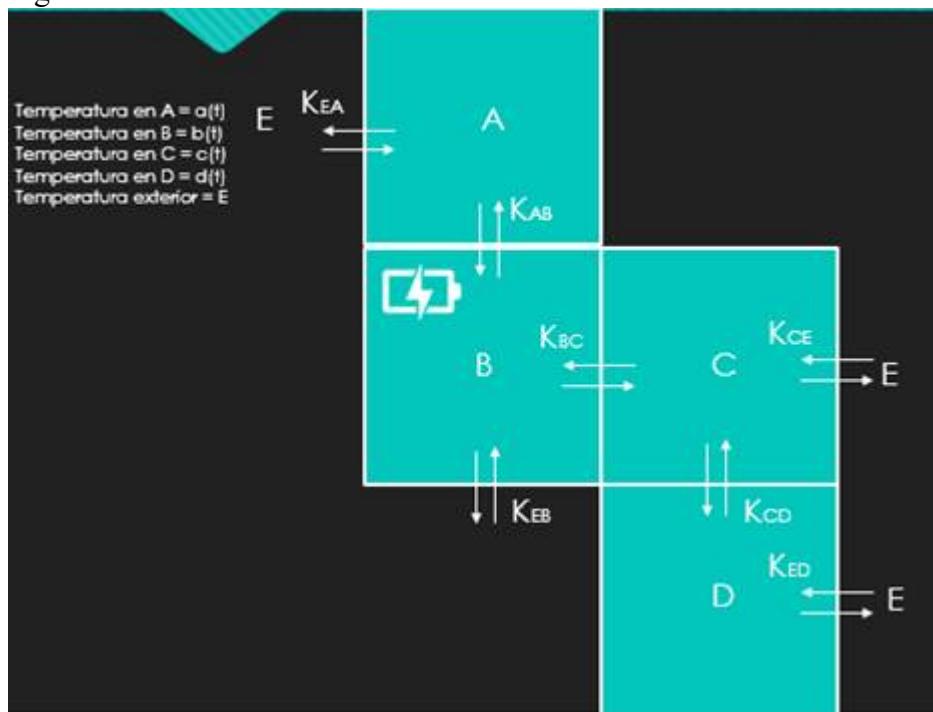
* Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, osea que el calor que disipa es $-3^\circ\text{C}/4\text{h}$

* Constantes de transferencia de calor= 3 horas

(%i1) kill (all) ;

done

Figure 1:



Temperatura en A = $a(t)$

Temperatura en B = $b(t)$

Temperatura en C = $c(t)$

Temperatura en D = $d(t)$

Temperatura exterior = E

Constante de transferencia entre espacio = K

Calor generado por un dispositivo = $U(t)$

Calor generado en el interior = $H(t)$

(%i1) $E(t) := 31$;

70

$$E(t) := 31$$

(%i2) $U(t) := -3/4$;

$$U(t) := \frac{-3}{4}$$

(%i3) $KEA := 3$;

3

(%i4) $KAB := 3$;

3

(%i5) $KEB := 3$;

3

(%i6) $KAB := 3$;

3

(%i7) $KBC := 3$;

3

(%i8) $KEC := 3$;

3

(%i9) $KCD := 3$;

3

(%i10) $KED := 3$;

3

(%i11) $eq1 := diff(a1(t), t) = ((1/KEA) \cdot (E(t) - a1(t))) + ((1/KAB) \cdot (b1(t) - a1(t)))$;

$$\frac{d}{dt} a1(t) = \frac{b1(t) - a1(t)}{3} + \frac{31 - a1(t)}{3}$$

(%i12) $eq2 := diff(b1(t), t) = ((1/KEB) \cdot (E(t) - b1(t))) + ((1/KAB) \cdot (a1(t) - b1(t))) + ((1/KBC) \cdot (c1(t) - b1(t))) + U(t)$;

$$\frac{d}{dt} b1(t) = \frac{c1(t) - b1(t)}{3} + \frac{a1(t) - b1(t)}{3} + \frac{31 - b1(t)}{3} - \frac{3}{4}$$

(%i13) $\text{eq3} := \text{diff}(\text{c1}(t), t) = ((1/\text{KEC}) \cdot (\text{E}(t) - \text{c1}(t))) + ((1/\text{KBC}) \cdot (\text{b1}(t) - \text{c1}(t))) + 71((1/\text{KCD}) \cdot (\text{d1}(t) - \text{c1}(t)));$

$$\frac{d}{dt} \text{c1}(t) = \frac{\text{d1}(t) - \text{c1}(t)}{3} + \frac{\text{b1}(t) - \text{c1}(t)}{3} + \frac{31 - \text{c1}(t)}{3}$$

(%i14) $\text{eq4} := \text{diff}(\text{d1}(t), t) = ((1/\text{KED}) \cdot (\text{E}(t) - \text{d1}(t))) + ((1/\text{KCD}) \cdot (\text{c1}(t) - \text{d1}(t)));$

$$\frac{d}{dt} \text{d1}(t) = \frac{\text{c1}(t) - \text{d1}(t)}{3} + \frac{31 - \text{d1}(t)}{3}$$

(%i15) $\text{atvalue}(\text{a1}(t), t=0, 34);$

34

(%i16) $\text{atvalue}(\text{b1}(t), t=0, 34);$

34

(%i17) $\text{atvalue}(\text{c1}(t), t=0, 34);$

34

(%i18) $\text{atvalue}(\text{d1}(t), t=0, 34);$

34

(%i19) $\text{desolve}([\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}, \text{eq4}], [\text{a1}(t), \text{b1}(t), \text{c1}(t), \text{d1}(t)]);$

(%i20) $\text{Tempal1} := (\%e^{-t} \cdot ((243 \cdot \sinh((\sqrt{2} \cdot t)/3)) / (7 \cdot 2^{(7/2)}) + (81 \cdot \cosh((\sqrt{2} \cdot t)/3)) / 56)) / 9 + (57 \cdot \%e^{-t/3}) / 16 - (3 \cdot \%e^{-t}) / 16 + 853 / 28;$

$$\frac{\%e^{-t} \left(\frac{243 \sinh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{72^{\frac{7}{2}}} + \frac{81 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{56} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{853}{28}$$

(%i21) $\text{Tempb1} := (\%e^{-t} \cdot ((81 \cdot \cosh((\sqrt{2} \cdot t)/3)) / 28 - (81 \cdot \sinh((\sqrt{2} \cdot t)/3)) / (7 \cdot 2^{(7/2)}))) / 9 + (57 \cdot \%e^{-t/3}) / 16 + (3 \cdot \%e^{-t}) / 16 + 419 / 14;$

$$\frac{\%e^{-t} \left(\frac{81 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{28} - \frac{81 \sinh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{72^{\frac{7}{2}}} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{419}{14}$$

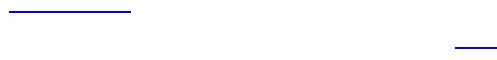
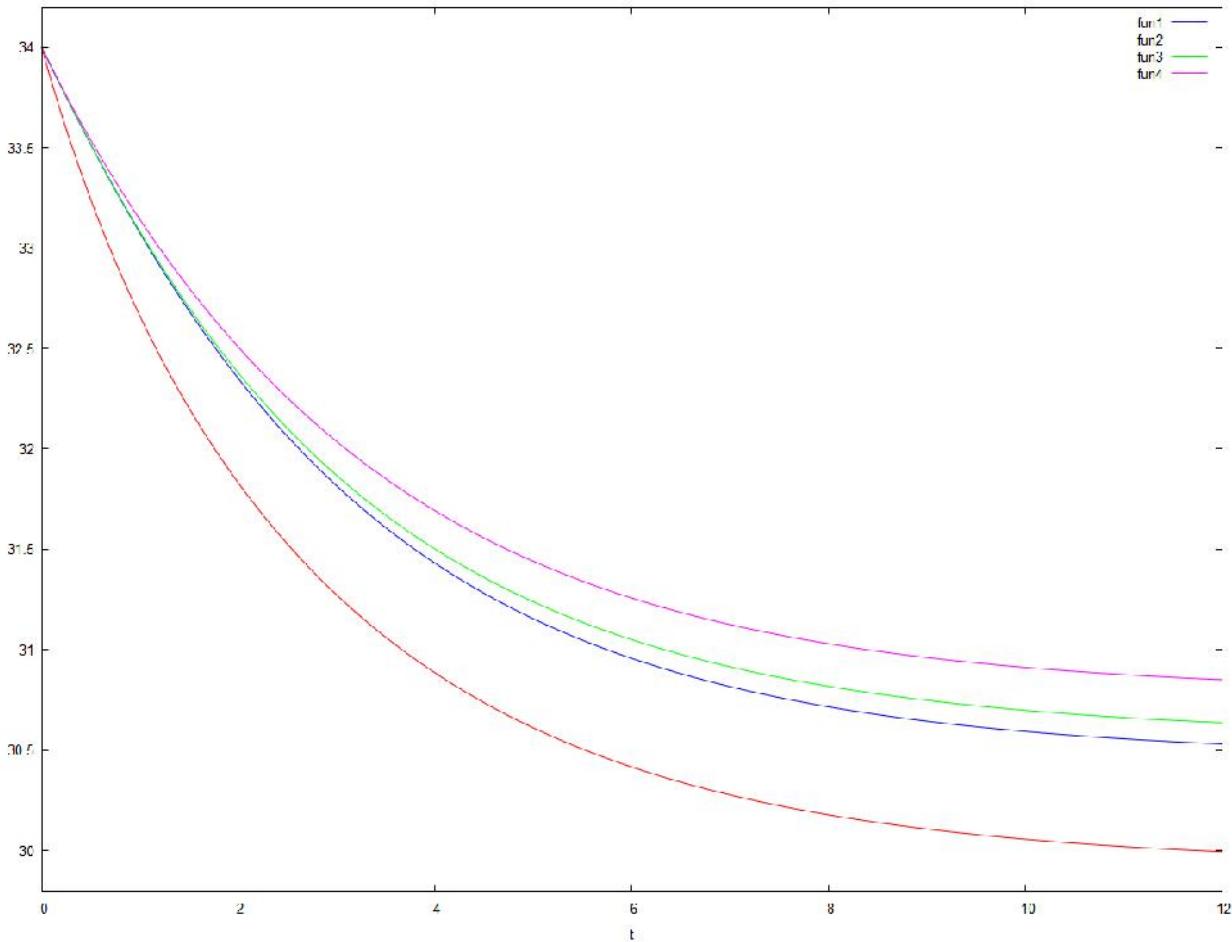
(%i22) $\text{Tempc1} := (\%e^{-t} \cdot ((81 \cdot \sinh((\sqrt{2} \cdot t)/3)) / (7 \cdot 2^{(7/2)}) - (81 \cdot \cosh((\sqrt{2} \cdot t)/3)) / 28)) / 9 + (57 \cdot \%e^{-t/3}) / 16 + (3 \cdot \%e^{-t}) / 16 + 214 / 7;$

$$\frac{\%e^{-t} \left(\frac{81 \sinh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{28} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{214}{7}$$

(%i23) **Tempd1** : (%e^{-t}) · (-(243 · sinh((sqrt(2) · t) / 3)) / (7 · 2^(7/2)) - (81 · cosh((sqrt(2) · t) / 3)) / 56)) / 9 + (57 · %e^(-t/3)) / 16 - (3 · %e^(-t)) / 16 + 431 / 14;

$$\frac{\%e^{-t} \left(-\frac{243 \sinh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{72^{\frac{7}{2}}} - \frac{81 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}t}{3}\right)}{56} \right)}{9} + \frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-t}}{16} + \frac{431}{14}$$

(%i24) **wxplot2d**([**Tempa1** , **Tempb1** , **Tempc1** , **Tempd1**] , [**t** , 0 , 12]);



ANEXO 4

Código de Maxima en formato PDF Modelo de
configuración espacial N° 4

PRUEBA CON CUATRO ESTANCIAS EN DIFERENTES CONFIGURACIONES ESPACIALES

0.1 Prueba 04--> Modelo configuración espacial N° 4

* $E=31^{\circ}\text{C}$,

* Espacios vacíos

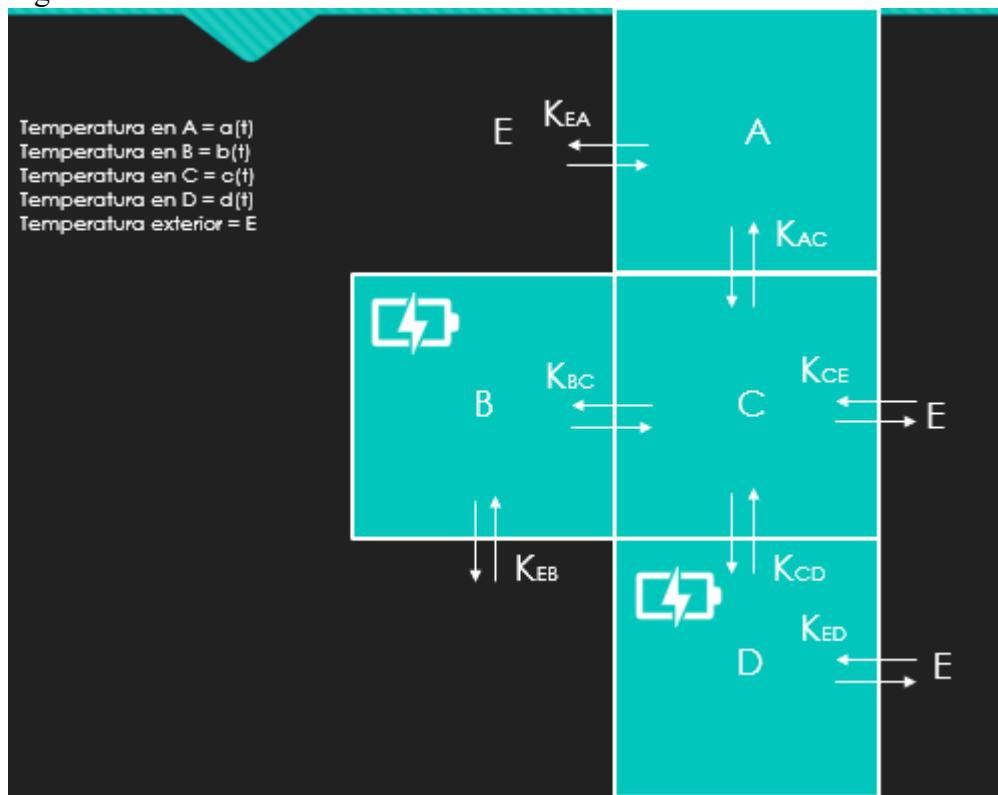
* Aire acondicionado que disipa 3000 Kcal/h, con una capacidad calorífica de 1/4000, osea que el calor que disipa es $-3^{\circ}\text{C}/4\text{h}$

* Constantes de transferencia de calor= 3 horas

(%i1) kill (all) ;

done

Figure 1:



Temperatura en A = a(t)

Temperatura en B = b(t)

Temperatura en C = c(t)

Temperatura en D = d(t)

Temperatura exterior = E

Constante de transferencia entre espacio = K

Calor generado por un dispositivo = U(t)
Calor generado en el interior = H(t)

75

(%i1) E (t) := 31 ;

$$E(t) := 31$$

(%i2) U (t) := - 3 / 4 ;

$$U(t) := \frac{-3}{4}$$

(%i3) KEA : 3 ;

3

(%i4) KAB : 3 ;

3

(%i5) KEB : 3 ;

3

(%i6) KBC : 3 ;

3

(%i7) KEC : 3 ;

3

(%i8) KAC : 3 ;

3

(%i9) KBC : 3 ;

3

(%i10) KCD : 3 ;

3

(%i11) KED : 3 ;

3

(%i12) eq1 : ' diff (a1 (t) , t) = ((1 / KEA) · (E (t) - a1 (t))) + ((1 / KAB) · (c1 (t) - a1 (t))) ;

$$\frac{d}{dt} a1(t) = \frac{c1(t) - a1(t)}{3} + \frac{31 - a1(t)}{3}$$

(%i13) $\text{eq2} : \text{diff}(\text{b1}(\text{t}), \text{t}) = ((1/\text{KEB}) \cdot (\text{E}(\text{t}) - \text{b1}(\text{t}))) + ((1/\text{KBC}) \cdot (\text{c1}(\text{t}) - \text{b1}(\text{t}))) + 76 \text{U}(\text{t});$

$$\frac{d}{dt} \text{b1}(t) = \frac{\text{c1}(t) - \text{b1}(t)}{3} + \frac{31 - \text{b1}(t)}{3} - \frac{3}{4}$$

(%i14) $\text{eq3} : \text{diff}(\text{c1}(\text{t}), \text{t}) = ((1/\text{KEC}) \cdot (\text{E}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) + ((1/\text{KAC}) \cdot (\text{a1}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) + ((1/\text{KBC}) \cdot (\text{b1}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) + ((1/\text{KCD}) \cdot (\text{d1}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t})));$

$$\frac{d}{dt} \text{c1}(t) = \frac{\text{d1}(t) - \text{c1}(t)}{3} + \frac{\text{b1}(t) - \text{c1}(t)}{3} + \frac{\text{a1}(t) - \text{c1}(t)}{3} + \frac{31 - \text{c1}(t)}{3}$$

(%i15) $\text{eq4} : \text{diff}(\text{d1}(\text{t}), \text{t}) = ((1/\text{KED}) \cdot (\text{E}(\text{t}) - \text{d1}(\text{t}))) + ((1/\text{KCD}) \cdot (\text{c1}(\text{t}) - \text{d1}(\text{t})));$

$$\frac{d}{dt} \text{d1}(t) = \frac{\text{c1}(t) - \text{d1}(t)}{3} + \frac{31 - \text{d1}(t)}{3}$$

(%i16) $\text{atvalue}(\text{a1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34);$

$$34$$

(%i17) $\text{atvalue}(\text{b1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34);$

$$34$$

(%i18) $\text{atvalue}(\text{c1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34);$

$$34$$

(%i19) $\text{atvalue}(\text{d1}(\text{t}), \text{t} = 0, 34);$

$$34$$

(%i20) $\text{desolve}([\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}, \text{eq4}], [\text{a1}(\text{t}), \text{b1}(\text{t}), \text{c1}(\text{t}), \text{d1}(\text{t})]);$

(%i21) $\text{Tempa1} : (57 \cdot \%e^{(-\text{t}/3)})/16 - (3 \cdot \%e^{(-(2 \cdot \text{t})/3)})/8 + (3 \cdot \%e^{(-(5 \cdot \text{t})/3)})/80 + 1231/40;$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{3\%e^{-\frac{2t}{3}}}{8} + \frac{3\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{1231}{40}$$

(%i22) $\text{Tempb1} : (57 \cdot \%e^{(-\text{t}/3)})/16 + (3 \cdot \%e^{(-(2 \cdot \text{t})/3)})/4 + (3 \cdot \%e^{(-(5 \cdot \text{t})/3)})/80 + 593/20;$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} + \frac{3\%e^{-\frac{2t}{3}}}{4} + \frac{3\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{593}{20}$$

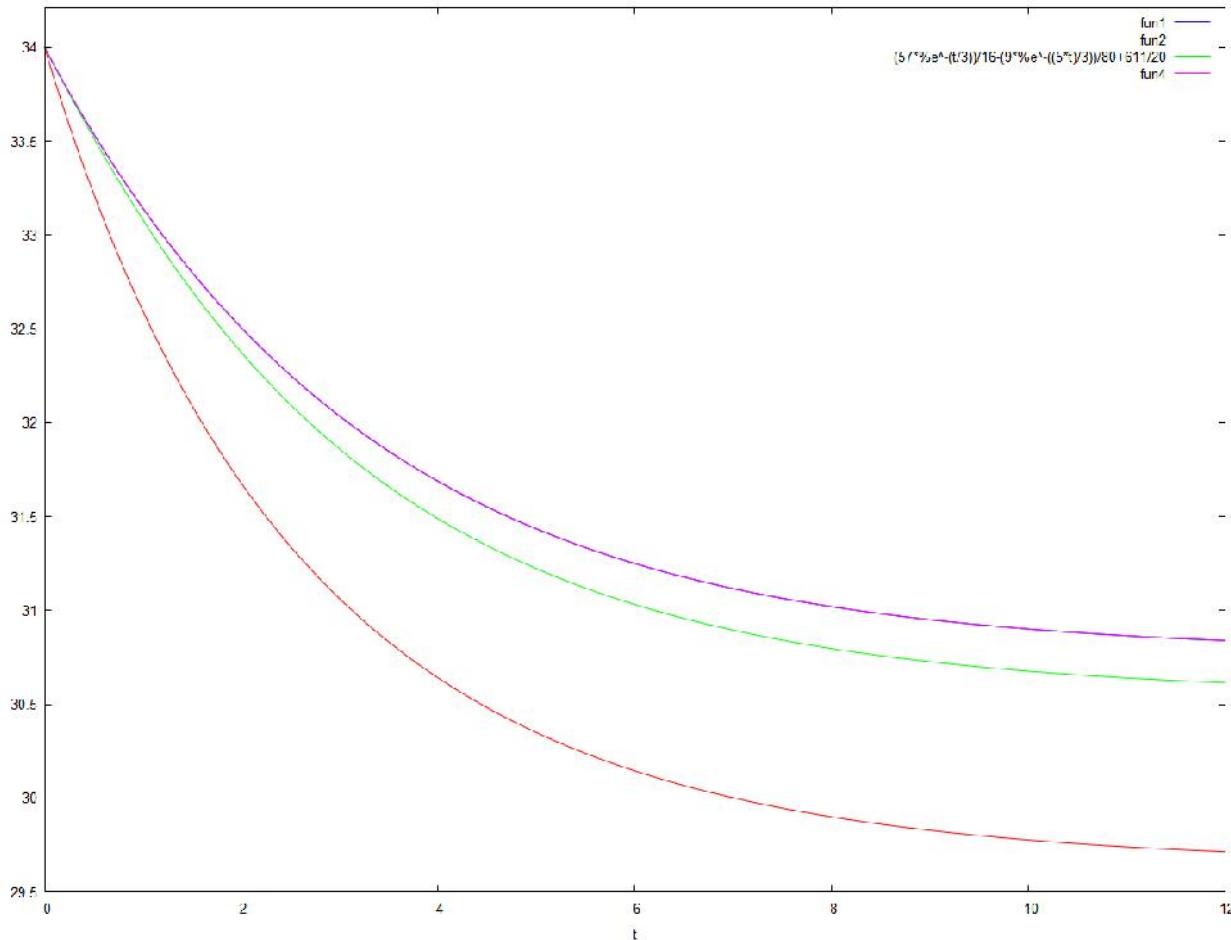
(%i23) $\text{Tempc1} : (57 \cdot \%e^{(-\text{t}/3)})/16 - (9 \cdot \%e^{(-(5 \cdot \text{t})/3)})/80 + 611/20;$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{611}{20}$$

(%i24) $\text{Tempd1} : (57 \cdot \%e^{-(t/3)})/16 - (9 \cdot \%e^{-(5t/3)})/80 + (611/20);$

$$\frac{57\%e^{-\frac{t}{3}}}{16} - \frac{9\%e^{-\frac{5t}{3}}}{80} + \frac{611}{20}$$

(%i25) $\text{wxplot2d}([\text{Tempa1}, \text{Tempb1}, \text{Tempc1}, \text{Tempd1}], [t, 0, 12]);$



ANEXO 5

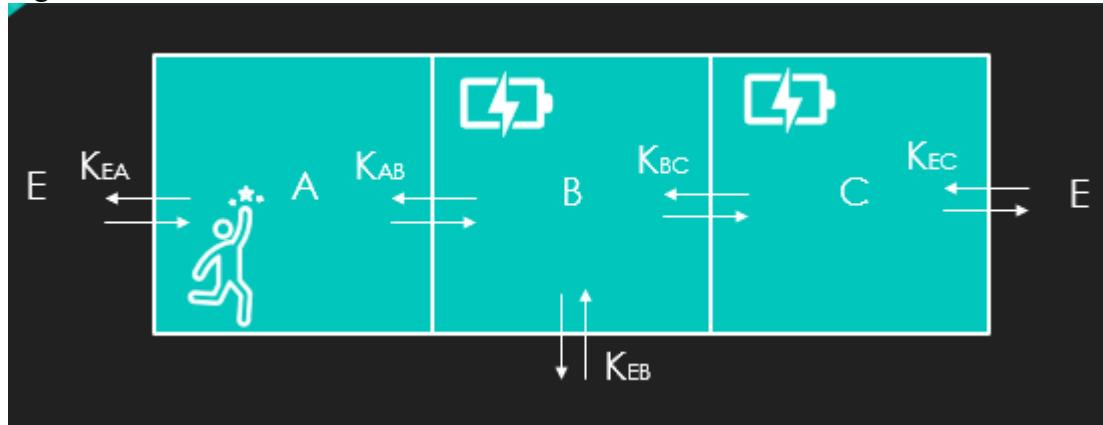
Código de Maxima en formato PDF simulaciones K
- variable

PRUEBA CON VALORES CONCRETOS, FUENTES DE ENERGÍA EN CADA ESPACIO, "K" VARIABLE Y TEMPERATURA EXTERIOR CONSTANTE

(%i1) kill (all);

done

Figure 1:



Temperatura en A = a(t)

Temperatura en B = b(t)

Temperatura en C = c(t)

Temperatura exterior = E

Constante de transferencia entre espacio = K

Calor generado por un dispositivo = U(t)

Calor generado en el interior = H(t)

0.1 Prueba 01--> E=31°C.

Una persona genera en reposo según la ISO 7730 83w = 71.38 Kcal/h

Constantes de transferencia de calor= 4 horas

(%i1) Unapersona : 83 · 0 . 86 ;

71.38

Ahora para saber cuento calor recibe un espacio con una persona en reposo, calculamos:

Cantidad de calor generado por una persona(Kcal/h) * capacidad calorífica de un espacio(°C/Kcal)

(%i2) capacidadcalorifica : (1 / 4) / 1000 ;

$$\frac{1}{4000}$$

(%i3) $H(t) = \text{Unapersona} \cdot \text{capacidadcalorifica}$;

80

$$H(t) = 0.017845$$

(%i4) $H(t) := 0.017845$;

$$H(t) := 0.017845$$

Ahora para saber cuento calor recibe un espacio con un calefactor que disipa 3000Kcal/h, calculamos:
Cantidad de calor generado por una persona(Kcal/h) * capacidad calorífica de un espacio(°C/Kcal)

(%i5) $\text{Aire} := -3000$;

$$-3000$$

(%i6) $U(t) = \text{Aire} \cdot \text{capacidadcalorifica}$;

$$U(t) = -\frac{3}{4}$$

(%i7) $U(t) := -3/4$;

$$U(t) := -\frac{3}{4}$$

(%i8) $E(t) := 31$;

$$E(t) := 31$$

(%i9) $\text{Kea} := 4$;

$$4$$

(%i10) $\text{Kab} := 2$;

$$2$$

(%i11) $\text{Keb} := 4$;

$$4$$

(%i12) $\text{Kbc} := 2$;

$$2$$

(%i13) $\text{Kec} := 4$;

$$4$$

(%i14) $\text{eq1} := \text{diff}(\text{a1}(t), t) = ((1/\text{Kea}) \cdot (\text{E}(t) - \text{a1}(t))) + ((1/\text{Kab}) \cdot (\text{b1}(t) - \text{a1}(t))) + \text{H}(t)$;

$$\frac{d}{dt} \text{a1}(t) = \frac{\text{b1}(t) - \text{a1}(t)}{2} + \frac{31 - \text{a1}(t)}{4} + 0.017845$$

81

(%i15) $\text{eq2} : ' \text{diff}(\text{b1}(\text{t}), \text{t}) = ((1 / \text{Keb}) \cdot (\text{E}(\text{t}) - \text{b1}(\text{t}))) + ((1 / \text{Kab}) \cdot (\text{a1}(\text{t}) - \text{b1}(\text{t}))) + ((1 / \text{Kbc}) \cdot (\text{c1}(\text{t}) - \text{b1}(\text{t}))) + \text{U}(\text{t});$

$$\frac{d}{dt} \text{b1}(t) = \frac{\text{c1}(t) - \text{b1}(t)}{2} + \frac{\text{a1}(t) - \text{b1}(t)}{2} + \frac{31 - \text{b1}(t)}{4} - \frac{3}{4}$$

(%i16) $\text{eq3} : ' \text{diff}(\text{c1}(\text{t}), \text{t}) = ((1 / \text{Kec}) \cdot (\text{E}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) + ((1 / \text{Kbc}) \cdot (\text{b1}(\text{t}) - \text{c1}(\text{t}))) + \text{U}(\text{t});$

$$\frac{d}{dt} \text{c1}(t) = \frac{\text{b1}(t) - \text{c1}(t)}{2} + \frac{31 - \text{c1}(t)}{4} - \frac{3}{4}$$

(%i17) $\text{atvalue}(\text{a1}(\text{t}), \text{t} = 0, 30);$

30

(%i18) $\text{atvalue}(\text{b1}(\text{t}), \text{t} = 0, 30);$

30

(%i19) $\text{atvalue}(\text{c1}(\text{t}), \text{t} = 0, 30);$

30

(%i20) $\text{desolve}([\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}], [\text{a1}(\text{t}), \text{b1}(\text{t}), \text{c1}(\text{t})]);$

rat : replaced $0.017845 \text{ by } 3569/200000 = 0.017845$

rat : replaced $-0.017845 \text{ by } -3569/200000 = -0.017845$

(%i21) $\text{Tempa1} : (146431 \cdot \%e^{(-\text{t}/4)})/150000 - (153569 \cdot \%e^{(-(3 \cdot \text{t})/4)})/300000 - (153569 \cdot \%e^{(-(7 \cdot \text{t})/4)})/2100000 + 31089259/1050000;$

$$\frac{146431\%e^{-\frac{t}{4}}}{150000} - \frac{153569\%e^{-\frac{3t}{4}}}{300000} - \frac{153569\%e^{-\frac{7t}{4}}}{2100000} + \frac{31089259}{1050000}$$

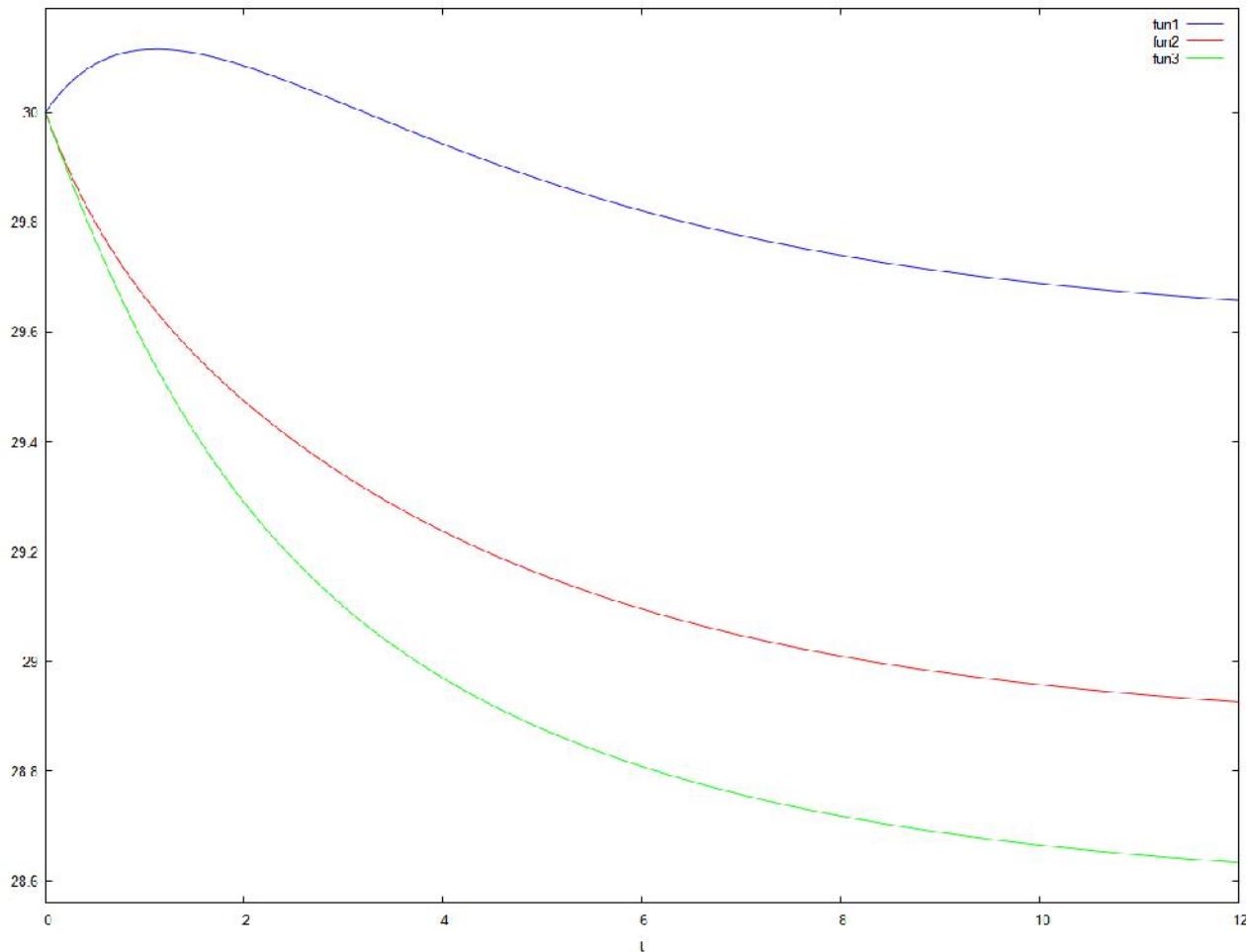
(%i22) $\text{Tempb1} : (146431 \cdot \%e^{(-\text{t}/4)})/150000 + (153569 \cdot \%e^{(-(7 \cdot \text{t})/4)})/1050000 + 5053569/175000;$

$$\frac{146431\%e^{-\frac{t}{4}}}{150000} + \frac{153569\%e^{-\frac{7t}{4}}}{1050000} + \frac{5053569}{175000}$$

(%i23) $\text{Tempc1} : (146431 \cdot \%e^{(-\text{t}/4)})/150000 + (153569 \cdot \%e^{(-(3 \cdot \text{t})/4)})/300000 - (153569 \cdot \%e^{(-(7 \cdot \text{t})/4)})/2100000 + 7503569/262500;$

$$\frac{146431\%e^{-\frac{t}{4}}}{150000} + \frac{153569\%e^{-\frac{3t}{4}}}{300000} - \frac{153569\%e^{-\frac{7t}{4}}}{2100000} + \frac{7503569}{262500}$$

(%i24) wxplot2d ([Tempa1 , Tempb1 , Tempc1], [t , 0 , 12]);



0.2 Prueba 02--> E=31°C.

Una persona genera en reposo según la ISO 7730 83w = 71.38 Kcal/h
Constantes de transferencia de calor= 4 horas

(%i25) E2 (t) := 31 ;

$$E2(t) := 31$$

(%i26) Kea2 : 1 ;

1

(%i27) Kab2 : 0 . 7 ;

0.7

(%i28) **Keb2** : 1 ;

1

(%i29) **Kbc2** : 0 . 5 ;

0.5

(%i30) **Kec2** : 1 ;

1

(%i31) **eq4** : ' diff(a2(t), t) = ((1 / Kea2) · (E2(t) - a2(t))) + ((1 / Kab2) · (b2(t) - a2(t))) + H(t);

$$\frac{d}{dt} a2(t) = 1.428571428571429 (b2(t) - a2(t)) - a2(t) + 31.017845$$

(%i32) **eq5** : ' diff(b2(t), t) = ((1 / Keb2) · (E2(t) - b2(t))) + ((1 / Kab2) · (a2(t) - b2(t))) + ((1 / Kbc2) · (c2(t) - b2(t))) + U(t);

$$\frac{d}{dt} b2(t) = 2.0 (c2(t) - b2(t)) - b2(t) + 1.428571428571429 (a2(t) - b2(t)) + \frac{121}{4}$$

(%i33) **eq6** : ' diff(c2(t), t) = ((1 / Kec2) · (E2(t) - c2(t))) + ((1 / Kbc2) · (b2(t) - c2(t))) + U(t);

$$\frac{d}{dt} c2(t) = -c2(t) + 2.0 (b2(t) - c2(t)) + \frac{121}{4}$$

(%i34) **atvalue**(a2(t), t = 0 , 30);

30

(%i35) **atvalue**(b2(t), t = 0 , 30);

30

(%i36) **atvalue**(c2(t), t = 0 , 30);

30

(%i37) **desolve**([eq4 , eq5 , eq6] , [a2(t), b2(t), c2(t)]);

rat : replaced 1.428571428571429 by 10/7 = 1.428571428571429

rat : replaced 31.017845 by 6203569/200000 = 31.017845

rat : replaced 1.428571428571429 by 10/7 = 1.428571428571429

rat : replaced 1.428571428571429 by 10/7 = 1.428571428571429

*rat : replaced*2.0by2/1 = 2.0

84

*rat : replaced*1.428571428571429by10/7 = 1.428571428571429

*rat : replaced*2.0by2/1 = 2.0

*rat : replaced*2.0by2/1 = 2.0

*rat : replaced*2.0by2/1 = 2.0

rat : replaced - 31.017845by - 6203569/200000 = -31.017845

rat : replaced - 1.428571428571429by - 10/7 = -1.428571428571429

rat : replaced - 1.428571428571429by - 10/7 = -1.428571428571429

rat : replaced - 2.0by - 2/1 = -2.0

rat : replaced - 2.0by - 2/1 = -2.0

(%i38) **Tempa2** : (%e^{-(31*t)/7}) · (- (31174507 · sinh((2 · sqrt(39) · t)/7)) / (4600000 · sqrt(39)) - (1074983 · cosh((2 · sqrt(39) · t)/7)) / 862500) / 7 - (303569 · %e^(-t)) / 600000 + 141146397 / 4600000 ;

$$\frac{\%e^{-\frac{31t}{7}} \left(-\frac{31174507 \sinh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{4600000\sqrt{39}} - \frac{1074983 \cosh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{862500} \right)}{7} - \frac{303569\%e^{-t}}{600000} + \frac{141146397}{4600000}$$

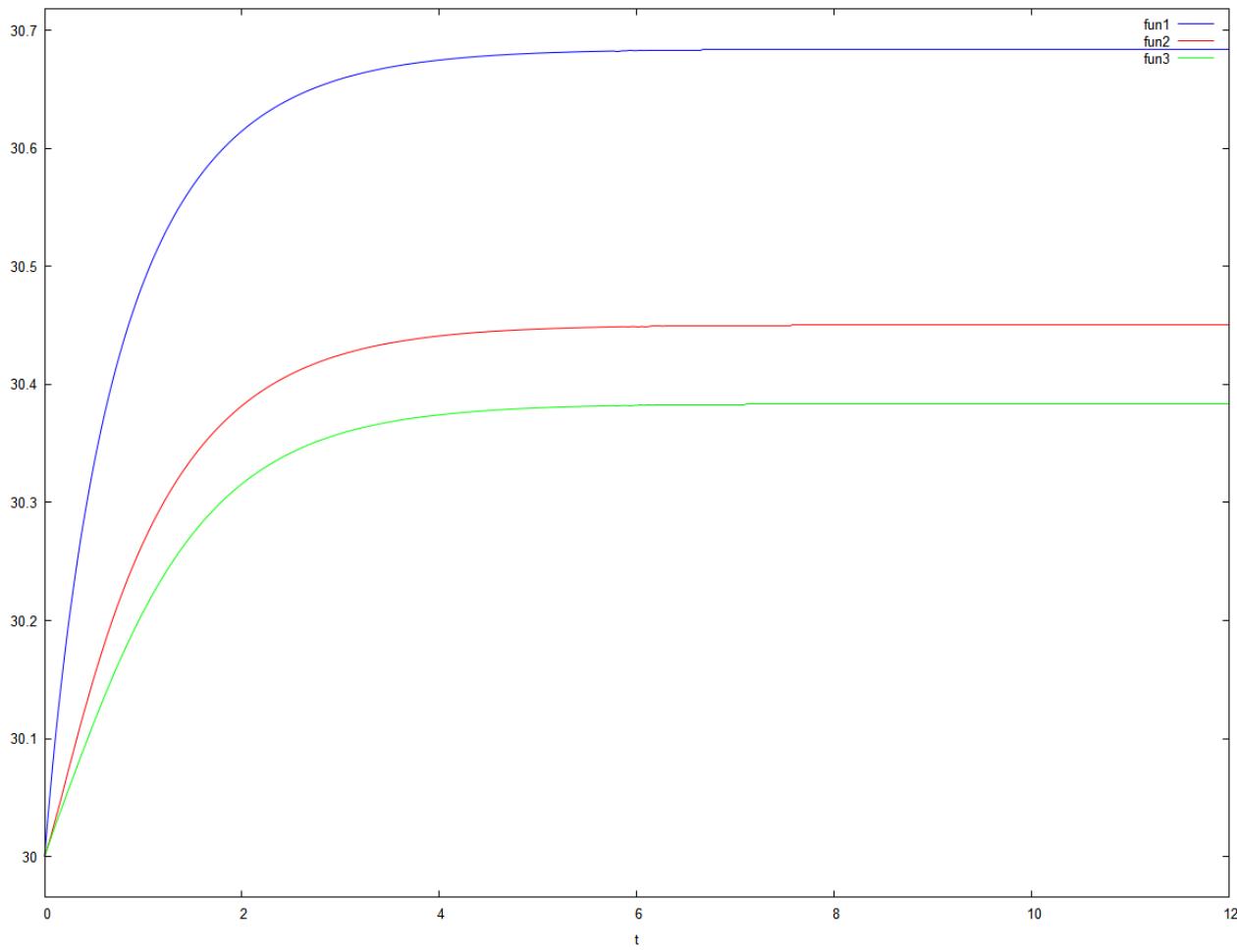
(%i39) **Tempb2** : (%e^{-(31*t)/7}) · ((1074983 · cosh((2 · sqrt(39) · t)/7)) / 2760000 - (1074983 · sinh((2 · sqrt(39) · t)/7)) / (4600000 · sqrt(39))) / 7 - (303569 · %e^(-t)) / 600000 + 70035707 / 2300000 ;

$$\frac{\%e^{-\frac{31t}{7}} \left(\frac{1074983 \cosh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{2760000} - \frac{1074983 \sinh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{4600000\sqrt{39}} \right)}{7} - \frac{303569\%e^{-t}}{600000} + \frac{70035707}{2300000}$$

(%i40) **Tempc2** : (%e^{-(31*t)/7}) · ((82691 · sqrt(39) · sinh((2 · sqrt(39) · t)/7)) / 460000 + (11824813 · cosh((2 · sqrt(39) · t)/7)) / 13800000) / 7 - (303569 · %e^(-t)) / 600000 + 34941069 / 1150000 ;

$$\frac{\%e^{-\frac{31t}{7}} \left(\frac{82691\sqrt{39} \sinh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{460000} + \frac{11824813 \cosh\left(\frac{2\sqrt{39}t}{7}\right)}{13800000} \right)}{7} - \frac{303569\%e^{-t}}{600000} + \frac{34941069}{1150000}$$

(%i41) **wxplot2d** ([Tempa2, Tempb2, Tempc2], [t, 0, 12]);



0.3 Prueba 03--> E=31°C.

Una persona genera en reposo según la ISO 7730 83w = 71.38 Kcal/h

Constantes de transferencia de calor= 4 horas

(%i42) E3 (t) := 31 ;

$$E3(t) := 31$$

(%i43) Kea3 : 2 ;

2

(%i44) Kab3 : 4 ;

4

(%i45) Keb3 : 2 ;

2

(%i46) Kbc3 : 3 . 5 ;

3.5

(%i47) **Kec3** : 2 ;

86

2

(%i48) **eq7** : ' diff(a3(t), t) = ((1 / Kea3) · (E3(t) - a3(t))) + ((1 / Kab3) · (b3(t) - a3(t))) + H(t);

$$\frac{d}{dt} a3(t) = \frac{b3(t) - a3(t)}{4} + \frac{31 - a3(t)}{2} + 0.017845$$

(%i49) **eq8** : ' diff(b3(t), t) = ((1 / Keb3) · (E3(t) - b3(t))) + ((1 / Kab3) · (a3(t) - b3(t))) + ((1 / Kbc3) · (c3(t) - b3(t))) + U(t);

$$\frac{d}{dt} b3(t) = 0.2857142857142857 (c3(t) - b3(t)) + \frac{a3(t) - b3(t)}{4} + \frac{31 - b3(t)}{2} - \frac{3}{4}$$

(%i50) **eq9** : ' diff(c3(t), t) = ((1 / Kec3) · (E3(t) - c3(t))) + ((1 / Kbc3) · (b3(t) - c3(t))) + U(t);

$$\frac{d}{dt} c3(t) = 0.2857142857142857 (b3(t) - c3(t)) + \frac{31 - c3(t)}{2} - \frac{3}{4}$$

(%i51) **atvalue**(a3(t), t = 0 , 30);

30

(%i52) **atvalue**(b3(t), t = 0 , 30);

30

(%i53) **atvalue**(c3(t), t = 0 , 30);

30

(%i54) **desolve**([eq7 , eq8 , eq9] , [a3(t), b3(t), c3(t)]);

rat : replaced 0.017845 by 3569/200000 = 0.017845

rat : replaced 0.2857142857142857 by 2/7 = 0.2857142857142857

rat : replaced - 0.017845 by - 3569/200000 = -0.017845

rat : replaced - 0.2857142857142857 by - 2/7 = -0.2857142857142857

rat : replaced - 0.2857142857142857 by - 2/7 = -0.2857142857142857

(%i55) $\text{Tempa3} := (\%e^{-(29 \cdot t)/28}) \cdot ((-153569 \cdot \sinh((\sqrt{57} \cdot t)/28)) / (3200 \cdot \sqrt{57})) - (10289123 \cdot \cosh((\sqrt{57} \cdot t)/28)) / 1200000) / 14 - (3569 \cdot \%e^{-t/2}) / 300000 + 171496329 / 5600000;$

$$\frac{\%e^{-\frac{29t}{28}} \left(-\frac{153569 \sinh\left(\frac{\sqrt{57}t}{28}\right)}{3200\sqrt{57}} - \frac{10289123 \cosh\left(\frac{\sqrt{57}t}{28}\right)}{1200000} \right)}{14} - \frac{3569\%e^{-\frac{t}{2}}}{300000} + \frac{171496329}{5600000}$$

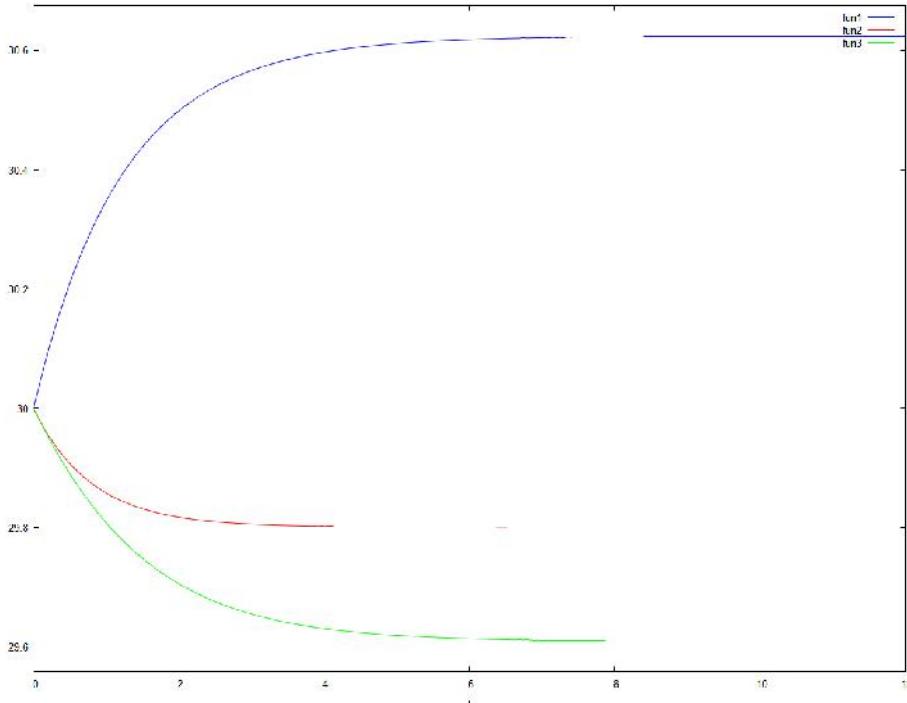
(%i56) $\text{Tempb3} := (\%e^{-(29 \cdot t)/28}) \cdot ((3532087 \cdot \cosh((\sqrt{57} \cdot t)/28)) / 1200000 - (5989191 \cdot \sinh((\sqrt{57} \cdot t)/28)) / (400000 \cdot \sqrt{57})) / 14 - (3569 \cdot \%e^{-t/2}) / 300000 + 166889259 / 5600000;$

$$\frac{\%e^{-\frac{29t}{28}} \left(\frac{3532087 \cosh\left(\frac{\sqrt{57}t}{28}\right)}{1200000} - \frac{5989191 \sinh\left(\frac{\sqrt{57}t}{28}\right)}{400000\sqrt{57}} \right)}{14} - \frac{3569\%e^{-\frac{t}{2}}}{300000} + \frac{166889259}{5600000}$$

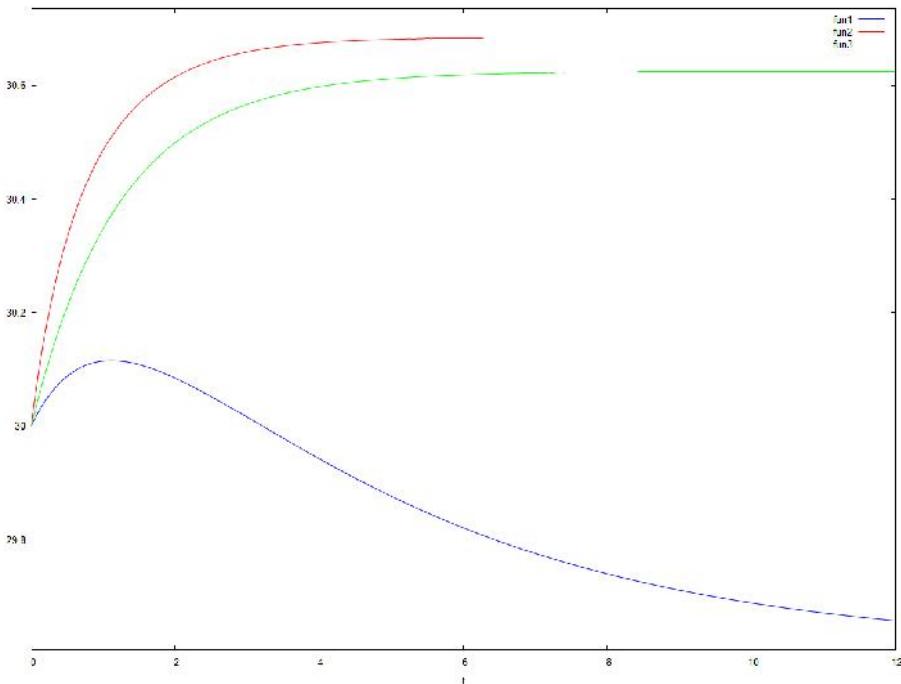
(%i57) $\text{Tempc3} := (\%e^{-(29 \cdot t)/28}) \cdot ((6296329 \cdot \sinh((\sqrt{57} \cdot t)/28)) / (100000 \cdot \sqrt{57}) + (1689259 \cdot \cosh((\sqrt{57} \cdot t)/28)) / 300000) / 14 - (3569 \cdot \%e^{-t/2}) / 300000 + 41453569 / 1400000;$

$$\frac{\%e^{-\frac{29t}{28}} \left(\frac{6296329 \sinh\left(\frac{\sqrt{57}t}{28}\right)}{100000\sqrt{57}} + \frac{1689259 \cosh\left(\frac{\sqrt{57}t}{28}\right)}{300000} \right)}{14} - \frac{3569\%e^{-\frac{t}{2}}}{300000} + \frac{41453569}{1400000}$$

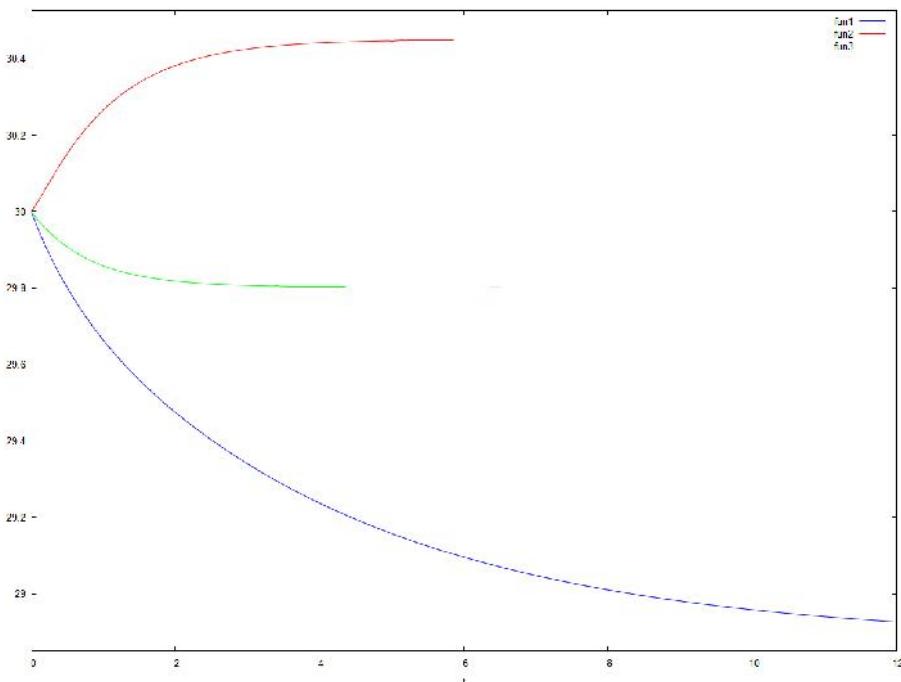
(%i58) $\text{wxplot2d}([\text{Tempa3}, \text{Tempb3}, \text{Tempc3}], [t, 0, 12]);$



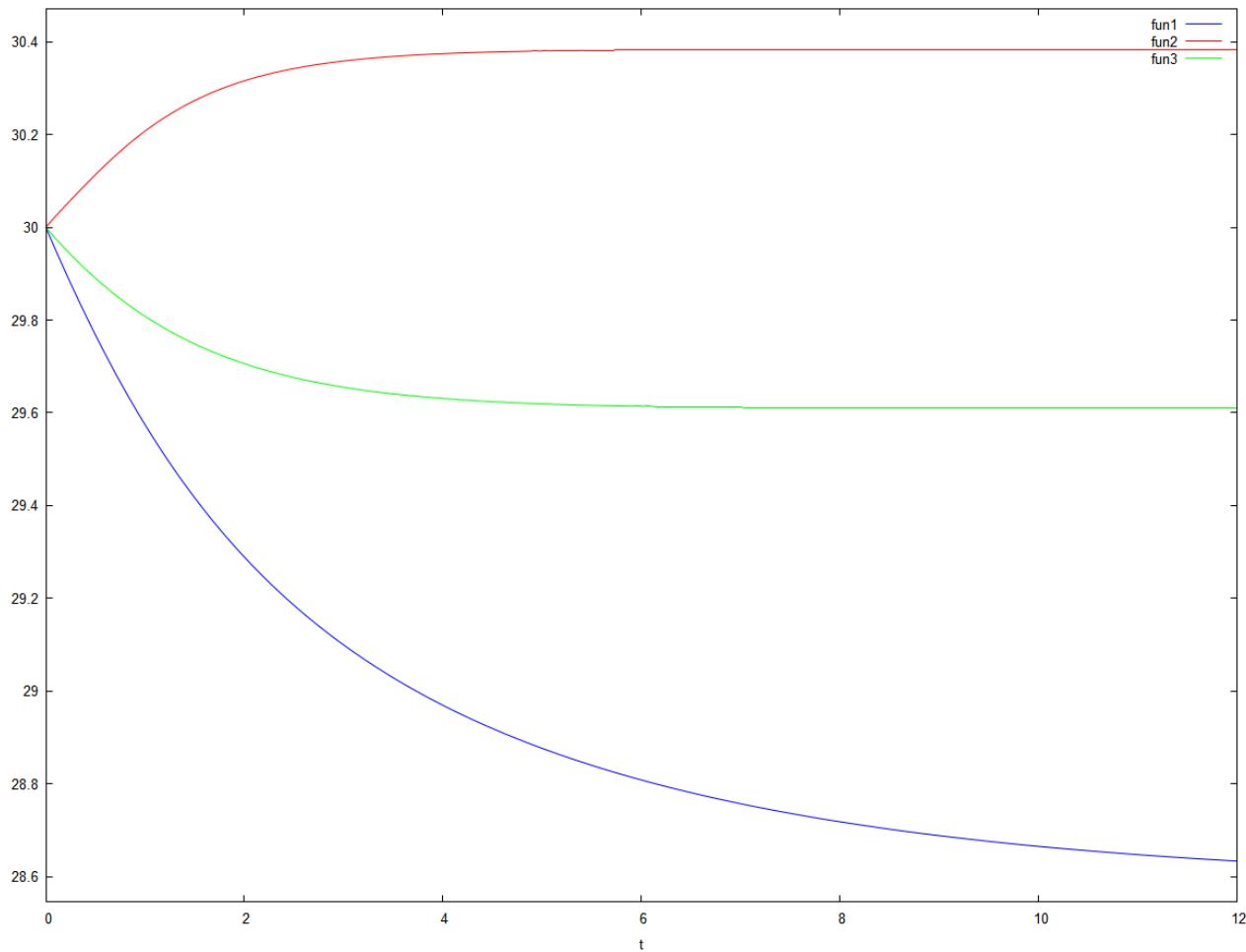
```
(%i59) wxplot2d( [ Tempa1 , Tempa2 , Tempa3 ] , [ t , 0 , 12 ] );
```



```
(%i60) wxplot2d( [ Tempb1 , Tempb2 , Tempb3 ] , [ t , 0 , 12 ] );
```



```
(%i61) wxplot2d([Tempc1,Tempc2,Tempc3],[t,0,12]);
```



ANEXO 6

Código de Maxima en formato PDF temperatura exterior
periodica.

0.1 Prueba 01.**Una persona genera en reposo según la ISO 7730 83w = 71.38 Kcal/h****Aire: -3000****TEMPERATURA EXTERIOR PERIODICA E(t):=29.5-2.5*cos(%pi/12)--> CARTAGENA****(%i1) kill (all) ;**

done

Ahora para saber cuento calor recibe un espacio con una persona en reposo, calculamos:

Cantidad de calor generado por una persona(Kcal/h) * capacidad calorífica de un espacio(°C/Kcal)

(%i1) H (t) := 0 . 017 ;

$$H(t) := 0.017$$

Ahora para saber cuento calor recibe un espacio con un calefactor que disipa 5000Kcal/h, calculamos:

Cantidad de calor generado por una persona(Kcal/h) * capacidad calorífica de un espacio(°C/Kcal)

(%i2) Aire : - 3000 ;

$$-3000$$

(%i3) U (t) = Aire · capacidad calorífica ;

$$U(t) = -3000 \cdot \text{capacidad calorífica}$$

(%i4) U (t) := - 5 / 4 ;

$$U(t) := \frac{-5}{4}$$

(%i5) E (t) := 29 . 5 - 2 . 5 · cos (%pi / 12) ;

$$E(t) := 29.5 - 2.5 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

(%i6) Kea : 4 ;

$$4$$

(%i7) Kab : 2 ;

$$2$$

(%i8) Keb : 3 . 5 ;

$$3.5$$

(%i9) Kbc : 2 ;

$$2$$

(%i10) Kec : 4 ;

$$4$$

(%i11) eq1 : ' diff (a (t) , t) = ((1 / Kea) · (E (t) - a (t))) + ((1 / Kab) · (b (t) - a (t))) + H (t) ;

$$\frac{d}{dt} a(t) = \frac{b(t) - a(t)}{2} + \frac{-a(t) - 2.5 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 29.5}{4} + 0.017$$

(%i12) eq2 : ' diff (b (t) , t) = ((1 / Keb) · (E (t) - b (t))) + ((1 / Kab) · (a (t) - b (t))) + ((1 / Kbc) · (c (t) - b (t))) + U (t) ;

$$\frac{d}{dt} b(t) = \frac{c(t) - b(t)}{2} + \frac{a(t) - b(t)}{2} + 0.2857142857142857 \left(-b(t) - 2.5 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 29.5 \right) - \frac{5}{4}$$

(%i13) eq3 : ' diff (c (t) , t) = ((1 / Kec) · (E (t) - c (t))) + ((1 / Kbc) · (b (t) - c (t))) + U (t) ;

$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{b(t) - c(t)}{2} + \frac{-c(t) - 2.5 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 29.5}{4} - \frac{5}{4}$$

(%i14) atvalue (a (t) , t = 0 , 30) ;

(%i15) **atvalue** (**b** (**t**) , **t** = 0 , 30);

30

(%i16) **atvalue** (**c** (**t**) , **t** = 0 , 30);

30

(%i17) **desolve** ([**eq1** , **eq2** , **eq3**] , [**a** (**t**) , **b** (**t**) , **c** (**t**)]):

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced 0.017 by $17/1000 = 0.017$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced 0.2857142857142857 by $2/7 = 0.2857142857142857$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced 0.2857142857142857 by $2/7 = 0.2857142857142857$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-1.25by - 5/4 = -1.25$

rat : replaced $-0.017by - 17/1000 = -0.017$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-2.5by - 5/2 = -2.5$

rat : replaced $-0.2857142857142857 by - 2/7 = -0.2857142857142857$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-2.5by - 5/2 = -2.5$

rat : replaced 29.5 by $59/2 = 29.5$

rat : replaced $-2.5by - 5/2 = -2.5$

(%i18) **Tempa** : (%e ^(-(57 · t) / 56) · (((((56 · (203125 · cos (%pi / 12) + 295394)) / 1625 - (57 · (113750 · cos (%pi / 12) + 161679)) / 1625) · sinh ((sqrt(1793) · t) / 56)) / sqrt(1793) + ((113750 · cos (%pi / 12) + 161679) · cosh ((sqrt(1793) · t) / 56)) / 1625)) / 28 - (1267 · %e ^(-(3 · t) / 4) / 1500 - (4875 · cos (%pi / 12) - 53218) / 1950;

(%e ^(-57t / 56) · $\left(\frac{\frac{56(203125 \cos(\frac{\pi}{12}) + 295394)}{1625} - \frac{57(113750 \cos(\frac{\pi}{12}) + 161679)}{1625}}{\sqrt{1793}} \right) \sinh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right) + \frac{(113750 \cos(\frac{\pi}{12}) + 161679) \cosh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right)}{1625}) / 28 - \frac{1267 \cdot e^{-\frac{3t}{4}}}{1500} + \frac{53218 - 487}{195}$

(%i19) **Tempb** : (%e ^(-(57 · t) / 56) · (((((28 · (398125 · cos (%pi / 12) + 585921)) / 1625 - (57 · (113750 · cos (%pi / 12) + 175042)) / 1625) · sinh ((sqrt(1793) · t) / 56)) / sqrt(1793) + ((113750 · cos (%pi / 12) + 175042) · cosh ((sqrt(1793) · t) / 56)) / 1625)) / 28 - (8125 · cos (%pi / 12) - 84997) / 3250;

$$\left(\frac{28(398125 \cos(\frac{\pi}{12}) + 585921)}{1625} - \frac{57(113750 \cos(\frac{\pi}{12}) + 175042)}{1625} \right) \sinh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right) + \frac{(113750 \cos(\frac{\pi}{12}) + 175042) \cosh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right)}{1625}) / 28 - \frac{8125 \cos(\frac{\pi}{12}) - 84997}{3250}$$

$$(\%i20) \text{Tempc} : (\%e^{(-57t)/56}) \cdot (((56 \cdot (203125 \cdot \cos(\%pi/12) + 295394)) / 1625 - (57 \cdot (113750 \cdot \cos(\%pi/12) + 161679)) / 1625) \cdot \sinh((\sqrt{1793}t) / 56)) / \sqrt{1793} + ((113750 \cdot \cos(\%pi/12) + 161679) \cdot \cosh((\sqrt{1793}t) / 56)) / 1625) / 28 + (1267 \cdot \%e^{(-3t)/4}) / 1500 - (24375 \cdot \cos(\%pi/12) - 249619) / 9750;$$

$$(\%e^{-57t/56}) \cdot \left(\frac{56(203125 \cos(\frac{\pi}{12}) + 295394)}{1625} - \frac{57(113750 \cos(\frac{\pi}{12}) + 161679)}{1625} \right) \sinh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right) + \frac{(113750 \cos(\frac{\pi}{12}) + 161679) \cosh\left(\frac{\sqrt{1793}t}{56}\right)}{1625}) / 28 + \frac{1267 \%e^{-3t/4}}{1500} + \frac{249619 - 24}{97}$$

(%i22) `wxplot2d([Tempa, Tempb, Tempc], [t, 0, 12]);`

