UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

trabajo de fin de grado

Métodos para la resolución de ecuaciones integrales y su integración en un sistema para la simulación de la distribución de temperatura en edificios mediante el uso de servicios

Presentado por:
David Cantón Ruiz

Tutor:
Manuel Ruiz Galán
Departamento de Matemática Aplicada

Ángel Ruiz Zafra
Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos

Curso académico 2023-2024

Métodos para la resolución de ecuaciones integrales y su integración en un sistema para la simulación de la distribución de temperatura en edificios mediante el uso de servicios

David Cantón Ruiz

David Cantón Ruiz *Métodos para la resolución de ecuaciones integrales y su integración en un sistema para la simulación de la distribución de temperatura en edificios mediante el uso de servicios*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

Responsable de tutorización	Manuel Ruiz Galán *Departamento de Matemática Aplicada* Ángel Ruiz Zafra *Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos*	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. David Cantón Ruiz

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 14 de agosto de 2023

Fdo: David Cantón Ruiz

Índice general

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).
File: `preliminares/summary.tex`

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo `preliminares/introduccion.tex`

1. Clasificación de ecuaciones integrales (lineales)

Podemos encontrar ecuaciones integrales de muchos tipos distintos. Esto depende principalmente de los límites de integración y del núcleo de la ecuación. A continuación nos enfocaremos en los distintos tipos de ecuaciones integrales.

1.1. Introducción

Primero vamos a entender el modelo de ecuación integral con el que vamos a trabajar, siendo de la siguiente forma:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt,$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son los límites de integración, λ es una constante, y $K(x,t)$ es una función conocida de dos variables, x y t, que llamaremos el *núcleo* de la ecuación integral. Podemos ver cómo la función desconocida $u(x)$, que queremos determinar, aparece tanto dentro como fuera de la integral, sin embargo, también nos podrá aparecer sólo dentro de la misma. Esto será lo que determine si estamos ante una ecuación de primera o segunda clase, pero nosotros nos centraremos en las de segunda clase.

Las funciones $f(x)$ y $K(x,t)$ son conocidas de antemano, y los límites de integración pueden ser ambos variables, constantes, o ambos.

Observación 1.1. Nótese que si la función $f(x)$ es idénticamente nula, la ecuación resultante

$$u(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

se dirá que es *homogénea*.

1.2. Ecuaciones integrales de Volterra

Definición 1.1. En las ecuaciones integrales de Volterra, al menos uno de los límites de integración es una variable. Para las ecuaciones integrales de Volterra de *segunda clase*, la función desconocida $u(x)$ aparece tanto dentro como fuera de la integral. Se representa de la siguiente forma:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt. \tag{1.1}$$

Sin embargo, en las ecuaciones integrales de Volterra de *primera clase*, la función desconocida $u(x)$ aparece sólo dentro de la integral como se muestra a continuación:

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

Ejemplo 1.1. A continuación mostramos un ejemplo de una ecuación integral de Volterra de segunda clase:

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

Un ejemplo de primera clase sería el siguiente:

$$xe^{-x} = \int_0^x e^{t-x}u(t)dt$$

1.3. Ecuaciones integrales de Fredholm

Definición 1.2. En las ecuaciones integrales de Fredholm, los límites de integración son fijos. Además, la función desconocida $u(x)$ aparece tanto dentro como fuera de la integral. Se representan de la siguiente forma:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

A esto le llamamos ecuación integral de Fredholm de *segunda clase*. Sin embargo, para las de *primera clase*, tenemos que la función $u(x)$ puede aparecer sólo dentro de la ecuación integral:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

Ejemplo 1.2. Un ejemplo de una ecuación de segunda clase puede ser el siguiente:

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x-t)u(t)dt,$$

y de primera clase:

$$\frac{sinx - xcosx}{x^2} = \int_0^1 sin(xt)u(t)dt.$$

1.4. Ecuaciones integrales de Volterra-Fredholm

Como curiosidad, estas ecuaciones surgieron de problemas de valores en límites parabólicos, del modelo matemático del desarrollo del espacio-tiempo de una epidemia, y de varios modelos físicos y biológicos. En la literatura nos aparecen de dos formas:

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt \tag{1.2}$$

y

$$u(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_\Omega F(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{1.3}$$

donde $f(x,t)$ y $F(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau))$ son funciones analíticas en $D = \Omega \times [0,T]$, y Ω es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n, n = 1,2,3$.

Es interesante ver que (1.2) contiene ecuaciones integrales disjuntas de Volterra y Fredholm, ya que la primera integral tiene un límite variable y la segunda tiene ambos límites fijos, sin embargo, en (1.3) ambas integrales están combinadas. Además, las funciones $u(x)$ y $u(x,t)$

aparecen dentro y fuera de la integral, que es una característica de las ecuaciones de segunda clase, nuestro principal enfoque.

Ejemplo 1.3. Un ejemplo de ambas formas es el siguiente:

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt,$$

$$u(x,t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi)d\xi d\tau.$$

1.5. Ecuaciones integrales singulares

Definición 1.3. Una ecuación integral de Volterra de segunda clase

$$u(x) = f(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

o de primera clase

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

se llama *singular* si uno de los límites de integración $g(x)$, $h(x)$ o ambos, son infinitos. Además, las ecuaciones anteriores se llaman singulares si el núcleo $K(x,t)$ no está acotado en algún punto del intervalo de integración.

A continuación nos centraremos en las ecuaciones de la forma:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

o de primera clase

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Estas dos formas anteriores se conocen como *ecuación integral singular débil* y *ecuación integral generalizada de Abel*, respectivamente. Para el valor de $\alpha = \dfrac{1}{2}$, la ecuación:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

se llama *ecuación integral singular de Abel*. Nótese que el núcleo no está acotado en el límite superior $t = x$.

Ejemplo 1.4. Ejemplos de una ecuación integral de Abel, generalizada de Abel, y singular débil serían los siguientes:

$$\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt,$$

$$x^3 = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t)dt,$$

$$u(x) = 1 + \sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t)dt,$$

respectivamente.

2. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

Volterra empezó a trabajar en las ecuaciones integrales en 1884, pero el nombre de *ecuación integral* se lo dio Bois-Reymond en 1888. Sin embargo, el término *ecuación integral de Volterra* se utilizó por primera vez en 1908 por el matemático rumano Traian Lalesco.

2.1. Introducción

ESTO SE PUEDE MEJORAR CREOExisten una gran variedad de métodos numéricos y analíticos, tales como el método de aproximaciones sucesivas, la transformada de Laplace, colocación de splines, Runge-Kutta, y otros han sido utilizados para manejar las ecuaciones integrales de Volterra.

A continuación veremos los últimos métodos desarrollados:

- Método de descomposición de Adomian (ADM)
- Método de descomposición modificado (mADM)
- Método de iteración variacional (VIM)

Además, estudiaremos algunos de los métodos tradicionales mencionados al principio. Nos vamos a centrar en el uso de estos métodos siendo nuestro objetivo principal, encontrar una solución $u(x)$ de la ecuación integral de Volterra de segunda clase.

2.2. Método de descomposición de Adomian

Fue desarrollado por George Adomian y está muy bien abordado en muchas referencias. Se ha realizado mucho trabajo de investigación para aplicar este método a una amplia clase de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales, y también ecuaciones integrales.

Consiste en descomponer una función $u(x)$ de cualquier ecuación en una suma de un número infinito de componentes definidas por la serie de descomposición

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \tag{2.1}$$

o equivalentemente

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ...,$$

donde las componentes $u_n(x), n \geqslant 0$ tienen que ser determinadas de una forma recursiva. El método se ocupa de encontrar las componentes $u_0, u_1, u_2, ...$ individualmente. Como ya veremos más adelante, se pueden encontrar estas componentes de una forma sencilla a través de una relación de recurrencia que normalmente implica integrales simples que pueden ser fácilmente evaluadas.

Para establecer la relación de recurrencia, sustituimos (2.1) en la ecuación integral de Volterra (1.1) para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t))dt,$$

o equivalentemente

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ... = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)[u_0(t) + u_1(t) + ...]dt.$$

La primera componente $u_0(x)$ se identifica con todos los términos que no están incluidos dentro de la integral. Por lo tanto, las componentes $u_j(x), j \geqslant 1$ de la función desconocida $u(x)$ están completamente determinados a través de la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_n(t)dt, \qquad n \geqslant 0, \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), & u_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt, & u_3(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_2(t)dt, \end{aligned} \tag{2.2}$$

y análogamente para las demás componentes. Como podemos ver en (2.2), las componentes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), ...$ están completamente determinadas. Como resultado, la solución $u(x)$ de la ecuación integral de Volterra (1.1) en forma de serie se obtiene fácilmente utilizando (2.1).

Observación 2.1. Se ha visto cómo el método de descomposición ha transformado la ecuación integral en una elegante determinación de componentes calculables. Muchos investigadores formalizaron que si existe una solución exacta para el problema, entonces la serie obtenida converge muy rápidamente a esa solución.

Sin embargo, para problemas concretos donde no se puede obtener una solución, generalmente se utiliza un número truncado de términos con fines numéricos. Cuantos más componentes usemos, mayor precisión obtendremos.

Ejemplo 2.1. Resuelve la siguiente ecuación integral de Volterra:

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt.$$

En este caso, $f(x) = 1, \lambda = -1, K(x,t) = 1$. Se asume que la solución $u(x)$ tiene una forma en series como la dada en (2.1). Sustituyendo la serie en ambos lados de nuestra ecuación, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt$$

o equivalentemente

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ... = 1 - \int_0^x [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + ...]dt.$$

La primera componente corresponde con todos los términos que no están incluidos dentro de la integral, por tanto, obtenemos la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_{k+1}(x) &= -\int_0^x u_k(t)dt, \qquad k \geqslant 0, \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_1(x) &= -\int_0^x u_0(t)dt = -\int_0^x 1dt = -x, \\ u_2(x) &= -\int_0^x u_1(t)dt = -\int_0^x (-t)dt = \frac{1}{2!}x^2, \\ u_3(x) &= -\int_0^x u_2(t)dt = -\int_0^x \frac{1}{2!}t^2dt = \frac{1}{3!}x^3, \end{aligned}$$

Así, obtenemos la solución en serie:

$$u(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + ...,$$

que converge a la solución:

$$u(x) = e^{-x}.$$

2.3. Método de descomposición modificado

Una modificación importante del ADM fue desarrollada por Wazwaz. Este método facilitará el proceso de cálculo y acelerará la convergencia de la solución en series. Se aplicará, siempre que se pueda, a cualquier ecuación integral y diferencial de cualquier orden.

Observación 2.2. Este método depende principalmente de dividir la función $f(x)$ en dos partes, por tanto no se puede usar si la función $f(x)$ está formada sólo por un término.

El método de descomposición modificado introduce una pequeña variación a la relación de recurrencia que vimos en el ADM, y esto nos llevará a la determinación de las componentes de $u(x)$ de una forma más fácil y rápida.

En muchos casos, la función $f(x)$ se puede escribir como una suma de dos funciones parciales, llamadas $f_1(x)$ y $f_2(x)$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Gracias a esto, se introducirá un cambio importante en la formación de la relación de recurrencia. Para minimizar el tamaño de los cálculos, identificamos la primera componente $u_0(x)$ como una de las partes de $f(x)$, que será $f_1(x)$ o $f_2(x)$. La otra parte se puede añadir a la componente $u_1(x)$ junto a los demás términos. En resumen, obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x), \\ u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt, \\ u_{k+1}(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_k(t)dt, \qquad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

Observación 2.3. Esto muestra que la diferencia entre la relación de recurrencia estándar y la modificada se basa únicamente en la formación de las dos primeras componentes $u_0(x)$ y $u_1(x)$. Las demás componentes se mantienen igual.

Aunque este variación en las dos primeras componentes es pequeña, juega un papel muy importante en acelerar la convergencia de la solución y en minimizar la cantidad de trabajo computacional. Además, varios trabajos de investigación han confirmado que reducir el número de componentes en $f_1(x)$ afecta a todas las componentes, no sólo a $u_1(x)$.

A continuación vamos a ver dos observaciones importantes a cerca de este método:

Observación 2.4. Si elegimos correctamente las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, la solución exacta $u(x)$ se puede obtener utilizando muy pocas iteraciones, incluso algunas veces evaluando sólo dos componentes. De hecho, el éxito de esta modificación depende de hacer una buena elección de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, y la forma de obtenerlas adecuadamente es a través de pruebas, ya que no se ha encontrado todavía una regla para facilitar esta elección.

Observación 2.5. Si $f(x)$ está formada sólo por un término, podemos utilizar el método de descomposición estándar.

Vamos a utilizar este método para las ecuaciones integrales tanto de Volterra como de Fredholm, lineales en nuestro caso. Veamos algún ejemplo:

Ejemplo 2.2. Resolver la ecuación integral de Volterra:

$$u(x) = 2x + \sin x + x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x u(t)dt.$$

La función $f(x)$ se compone de 5 términos, que están fuera de la integral, y vamos a dividirlos en dos partes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x + \sin x, \\ f_2(x) &= x^2 - \cos x + 1. \end{aligned}$$

Y ahora utilizamos la fórmula de recurrencia modificada, obteniendo:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2x + \sin x, \\ u_1(x) &= x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x u_0(t)dt = 0, \\ u_{k+1}(x) &= -\int_0^x u_k(t)dt = 0, \qquad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

Es obvio que cada componente $u_j, j \geqslant 1$ es cero. Luego la solución exacta es

$$u(x) = 2x + \sin x.$$

2.4. Fenómeno de los términos de ruido

La nueva técnica depende principalmente de los llamados *términos de ruido*, y ha demostrado una rápida convergencia a la solución, se puede utilizar tanto para ecuaciones integrales como para ecuaciones diferenciales.

Los términos con ruido, si existen entre las componentes $u_0(x)$ y $u_1(x)$, nos proporcionarán la solución exacta utilizando sólo las dos primeras iteraciones. Vamos a revisar los conceptos principales de estos términos:

1. Los *términos de ruido* se definen como los términos idénticos con signos opuestos en las componentes $u_0(x)$ y $u_1(x)$. Otros términos de ruido pueden aparecer entre otras componentes. Es importante saber que no tienen por qué existir para todas las ecuaciones.

2. Al cancelar los términos de ruido entre $u_0(x)$ y $u_1(x)$, incluso si $u_1(x)$ contiene términos adicionales, los términos no cancelados restantes de $u_0(x)$ podrían proporcionar la solución exacta de la ecuación integral. La aparición de los términos de ruido entre $u_0(x)$ y $u_1(x)$ no siempre es suficiente para obtener la solución exacta. Por lo tanto, es necesario demostrar que los términos no cancelados de $u_0(x)$ satisfacen la ecuación integral dada.

   Por otro lado, si los términos no cancelados de $u_0(x)$ no cumplieran con la ecuación integral dada, o los términos de ruido no aparecieran entre $u_0(x)$ y $u_1(x)$, entonces sería necesario determinar más componentes de $u(x)$ para obtener la solución en una forma de serie.

3. Los términos de ruido aparecen en tipos específicos de ecuaciones no homogéneas, sin embargo, no aparecen en ecuaciones homogéneas.

4. Hay una condición necesaria para que se produzca la aparición de los términos de ruido, la primera componente $u_0(x)$ debe contener la solución exacta $u(x)$ entre otros términos. Además, se demostró que la condición de no homogeneidad de la ecuación no siempre garantiza la aparición de los términos de ruido.

Vamos a ilustrar la utilidad de los términos de ruido con un ejemplo:

Ejemplo 2.3. Resolveremos la siguiente ecuación integral de Volterra:

$$u(x) = 8x + x^3 - \frac{3}{8}\int_0^x tu(t)dt.$$

Establecemos la relación de recurrencia siguiendo el método estándar de Adomian:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 8x + x^3, \\ u_1(x) &= -\frac{3}{8}\int_0^x tu(t)dt = -\frac{3}{40}x^5 - x^3. \end{aligned}$$

Podemos ver que $\pm x^3$ aparecen en $u_0(x)$ y $u_1(x)$, además con signos opuestos, por tanto es un término de ruido. Cancelando este término de la primera componente $u_0(x)$ obtenemos la solución exacta:

$$u(x) = 8x,$$

que satisface la ecuación integral.

Observación 2.6. Si hubiéramos elegido el método modificado, seleccionamos $u_0(x) = 8x$, por lo tanto, tenemos que $u_1(x) = 0$. Por tanto, obtenemos el mismo resultado.

2.5. Método de iteración variacional (VIM)

Este método ha sido recientemente desarrollado, y ha demostrado ser eficaz y confiable para estudios numéricos y analíticos. El método proporciona aproximaciones sucesivas que convergen rápidamente a la solución exacta en forma de serie, siempre que exista. Este método es capaz de manejar problemas tanto lineales como no lineales de la misma forma sin necesidad de añadir ningún tipo de restricciones. Además, la serie obtenida se puede utilizar para fines numéricos si no se puede obtener la solución exacta. Vamos a presentar los pasos principales del método:

Considera la ecuación diferencial:

$$Lu + Nu = g(t), \tag{2.3}$$

donde L y N son operadores lineales y no lineales respectivamente , y $g(t)$ es el término no homogéneo.

El método de iteración variacional presenta una funcional corrección para la ecuación (2.3) en la forma:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)(Lu_n(\xi) + Nu'_n(\xi) - g(\xi))d\xi, \tag{2.4}$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange general.

Observación 2.7. Nótese que en este método, λ puede ser una constante o una función, y $_n$ es un valor restringido, por tanto se comporta como una constante, luego $\delta_n = 0$, donde δ es la derivada variacional.

Para un uso completo de este método, deberíamos seguir dos pasos:

1. Determinar el multiplicador de Lagrange $\lambda(\xi)$ que será identificado de forma óptima.
2. Una vez determinado λ, sustituimos el resultado en (2.4) donde se deberían omitir las restricciones.

Tomando la variación de (2.4) con respecto a la variable independiente $_n$, encontramos

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 1 + \frac{\delta}{\delta u_n}\left(\int_0^x \lambda(\xi)(Lu_n(\xi) + Nu'_n(\xi) - g(\xi))d\xi\right),$$

o equivalentemente

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta\left(\int_0^x \lambda(\xi)(Lu_n(\xi))d\xi\right).$$

A. Primer apéndice

Los apéndices son opcionales.
Archivo: `apendices/apendice01.tex`

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.
Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$ Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$ Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$ Conjunto de números enteros.

Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

[Eul] Leonhard Euler. https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Recurso online. Accedido el 14 de marzo de 2019.

[Eul82] Leonhard Euler. *Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes. Vol. III*. Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series Secunda: Opera Mechanica et Astronomica, XVII. Orell Füssli, Zürich, 1982. Edited and with a preface by Charles Blanc and Pierre de Haller.

[Eul84] Leonhard Euler. *Elements of algebra*. Springer-Verlag, New York, 1984. Translated from the German by John Hewlett, Reprint of the 1840 edition, With an introduction by C. Truesdell.

[Eul85] Leonhard Euler. An essay on continued fractions. *Math. Systems Theory*, 18(4):295–328, 1985. Translated from the Latin by B. F. Wyman and M. F. Wyman.