



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias  
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de  
Telecomunicación

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Métodos para la resolución de ecuaciones integrales y su integración en un sistema para la simulación de la distribución de temperatura en edificios mediante el uso de servicios

Presentado por:

David Cantón Ruiz

Tutor:

Manuel Ruiz Galán

*Departamento de Matemática Aplicada*

Ángel Ruiz Zafra

*Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos*

Curso académico 2023-2024



Métodos para la resolución de ecuaciones  
integrales y su integración en un sistema  
para la simulación de la distribución de  
temperatura en edificios mediante el uso de  
servicios

David Cantón Ruiz

David Cantón Ruiz *Métodos para la resolución de ecuaciones integrales y su integración en un sistema para la simulación de la distribución de temperatura en edificios mediante el uso de servicios.*  
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

**Responsable de  
tutorización**

Manuel Ruiz Galán  
*Departamento de Matemática Aplicada*  
Ángel Ruiz Zafra  
*Departamento de Lenguajes y Sistemas  
Informáticos*

Doble Grado en Ingeniería  
Informática y Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Escuela Técnica Superior  
de Ingenierías Informática  
y de Telecomunicación  
Universidad de Granada

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. David Cantón Ruiz

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 20 de septiembre de 2023

Fdo: David Cantón Ruiz



# Índice general

<b>Summary</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Clasificación de ecuaciones integrales</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción	1
1.2. Ecuaciones integrales de Volterra	1
1.3. Ecuaciones integrales de Fredholm	2
1.4. Ecuaciones integrales de Volterra-Fredholm	2
1.5. Ecuaciones integrales singulares	3
<b>2. Existencia y unicidad de solución de la ecuación lineal integral de Volterra de segunda clase</b>	<b>5</b>
2.1. Teorema de la serie geométrica y sus variantes	5
2.1.1. Generalización del teorema	7
2.1.2. Un resultado de perturbación	8
2.1.3. Existencia y unicidad de solución para sistemas de ecuaciones integrales lineales de Volterra de segunda clase	11
<b>3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase</b>	<b>13</b>
3.1. Introducción	13
3.2. Métodos basados en series	13
3.2.1. Método de descomposición de Adomian (ADM)	13
3.2.2. Método de descomposición modificado (mADM)	15
3.2.3. Método de la solución en series	17
3.3. Métodos iterativos	18
3.3.1. Método de iteración variacional (VIM)	18
3.3.2. Método de aproximaciones sucesivas	21
3.4. Otros métodos	23
3.4.1. Fenómeno de los términos de ruido	23
3.4.2. Método de la Transformada de Laplace	24
<b>4. Sistemas de ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase</b>	<b>27</b>
4.1. Introducción	27
4.2. Método de descomposición de Adomian	27
4.3. Método de la transformada de Laplace	29
4.4. Método de aproximaciones sucesivas	29
<b>5. Equivalencia entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones de Volterra</b>	<b>33</b>
5.1. Escalar	33
5.2. Vectorial	34
<b>6. Aplicación: Calentamiento y enfriamiento de edificios</b>	<b>37</b>
6.1. Edificio como habitación única	37

## *Índice general*

6.2. Ejemplo con dos habitaciones . . . . .	40
<b>A. Primer apéndice</b>	<b>45</b>
<b>Glosario</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>



## Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).



## Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.



# 1. Clasificación de ecuaciones integrales

Podemos encontrar ecuaciones integrales de muchos tipos distintos. Esto depende principalmente de los límites de integración y del núcleo de la ecuación. A continuación nos enfocaremos en los tipos de ecuaciones integrales.

## 1.1. Introducción

El objetivo que perseguimos en este primer capítulo es el estudio y clasificación de ecuaciones integrales, para proporcionar una comprensión más profunda de su estructura y comportamiento, y aunque no siempre se indique de forma explícita, todas las ecuaciones integrales con las que vamos a trabajar son lineales. A través de un análisis detallado y riguroso, vamos a establecer un marco teórico sólido que permita abordar con mayor eficacia una amplia gama de problemas en contextos prácticos. Además, ilustraremos ejemplos que nos ayudarán a entender más fácilmente la diferencia entre los distintos tipos de ecuaciones integrales.

El modelo de ecuación integral lineal con el que vamos a trabajar es el siguiente:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) u(t) dt,$$

donde  $g(x)$  y  $h(x)$  son los límites de integración,  $\lambda$  es una constante, y  $K(x, t)$  es una función conocida de dos variables reales,  $x$  y  $t$ , que llamaremos el *núcleo* de la ecuación integral. Podemos ver cómo la función real desconocida  $u(x)$ , que queremos determinar, aparece tanto dentro como fuera de la integral, sin embargo, también nos podrá aparecer sólo dentro de la misma. Esto será lo que determine si estamos ante una ecuación de primera o segunda clase, nosotros nos centraremos en las de segunda clase, aunque de igual forma mostraremos cómo son las ecuaciones integrales de primera clase, para que se vea la diferencia entre ambas.

Las funciones  $f(x)$  y  $K(x, t)$  son conocidas de antemano, y los límites de integración pueden ser ambas variables, constantes, o uno variable y otro constante. Esto será clave para determinar el tipo de ecuación integral que tenemos delante.

*Observación 1.1.* Nótese que si la función  $f(x)$  es idénticamente nula, diremos que la ecuación resultante

$$u(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) u(t) dt$$

es homogénea.

## 1.2. Ecuaciones integrales de Volterra

**Definición 1.1.** En las ecuaciones integrales de Volterra, uno de los límites de integración es una variable y el otro una constante. Para las ecuaciones integrales de Volterra de *segunda clase*,

### 1. Clasificación de ecuaciones integrales

la función desconocida  $u(x)$  aparece tanto dentro como fuera de la integral. Se representa de la siguiente forma:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt. \quad (1.1)$$

Sin embargo, en las ecuaciones integrales de Volterra de *primera clase*, la función desconocida  $u(x)$  aparece sólo dentro de la integral como se muestra a continuación:

$$f(x) = \int_0^x K(x, t)u(t)dt$$

**Ejemplo 1.1.** A continuación mostramos un ejemplo de una ecuación integral de Volterra de segunda clase:

$$u(x) = 5x + 2 \int_0^x (x - t)u(t)dt$$

Un ejemplo de primera clase sería el siguiente:

$$x \cos x = \int_0^x (e^t + x)u(t)dt$$

### 1.3. Ecuaciones integrales de Fredholm

**Definición 1.2.** En las ecuaciones integrales de Fredholm, los límites de integración son fijos. Además, la función desconocida  $u(x)$  aparece tanto dentro como fuera de la integral. De igual forma que hemos hecho con las ecuaciones de Volterra, vamos a definir la ecuación integral de Fredholm de *segunda clase*:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

Por otro lado, tenemos las ecuaciones de *primera clase*, en las que la función  $u(x)$  sólo puede aparecer dentro de la ecuación integral:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

**Ejemplo 1.2.** Un ejemplo de una ecuación de segunda clase puede ser el siguiente:

$$u(x) = \sin x + \frac{1}{4} \int_0^2 (x - t)u(t)dt,$$

y de primera clase:

$$x^2 + 5x = \int_0^1 \cos(xt)u(t)dt.$$

### 1.4. Ecuaciones integrales de Volterra-Fredholm

Como curiosidad, estas ecuaciones surgieron del modelo matemático del desarrollo espacio-tiempo de una epidemia, y de varios modelos físicos y biológicos. Normalmente nos aparecen

representadas así:

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt, \quad (1.2)$$

Es interesante ver que (1.2) contiene ecuaciones integrales disjuntas de Volterra y Fredholm, ya que la primera integral tiene un límite variable y la segunda tiene ambos límites fijos. Además, podemos ver que la función  $u(x)$  aparece dentro y fuera de la integral, que es una característica de las ecuaciones de segunda clase, nuestro principal enfoque.

**Ejemplo 1.3.** Un ejemplo de una ecuación integral de Volterra-Fredholm es el siguiente:

$$u(x) = 9x^3 - 2x + \int_0^x xu(t)dt - \int_{-1}^1 tu(t)dt,$$

## 1.5. Ecuaciones integrales singulares

**Definición 1.3.** Diremos que una ecuación integral de Volterra de segunda clase

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt$$

o primera clase

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt$$

es *singular* si satisface alguna de las siguientes condiciones:

- Uno de los límites de integración, o ambos, son infinitos.
- El núcleo  $K(x, t)$  no está acotado en algún punto del intervalo de integración.

A continuación vamos a centrarnos en unas ecuaciones particulares, pudiendo ser de segunda clase:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

o de primera clase

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Se conocen como *ecuación integral singular débil* y *ecuación integral generalizada de Abel*, respectivamente. Para el valor de  $\alpha = \frac{1}{2}$ , la ecuación:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

se llama *ecuación integral singular de Abel*. Nótese que el núcleo no está acotado en el límite superior  $t = x$ .

**Ejemplo 1.4.** Ejemplos de una ecuación integral de Abel, generalizada de Abel, y singular débil serían los siguientes:

$$\frac{\sin x}{2} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt,$$

1. *Clasificación de ecuaciones integrales*

$$6x^2 + 5 = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} u(t) dt,$$

$$u(x) = \cos x + \sqrt{x} + 3 \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} u(t) dt,$$

respectivamente.



## 2. Existencia y unicidad de solución de la ecuación lineal integral de Volterra de segunda clase

### 2.1. Teorema de la serie geométrica y sus variantes

El siguiente resultado se usa muy a menudo en análisis numérico y matemática aplicada. También es la forma que tenemos para analizar si tienen solución los problemas que están "cerca" a otros problemas que sabemos que tienen solución única.

**Teorema 2.1.** (Teorema de la serie geométrica) Sea  $X$  un espacio de Banach,  $L \in \mathcal{L}(X)$ . Suponemos

$$\|L\| \leq 1.$$

Entonces  $I - L$  es una biyección en  $X$ , su inversa es un operador lineal continuo,

$$(I - L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n,$$

y

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}. \quad (2.1)$$

*Demostración.* Definimos una sucesión en  $\mathcal{L}(X)$  :  $M_n = \sum_{i=0}^n L^i, n \geq 0$ . Para  $p \geq 1$ ,

$$\|M_{n+p} - M_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} L^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L^i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L\|^i.$$

Usando que  $\|L\| \leq 1$ , tenemos

$$\|M_{n+p} - M_n\| \leq \frac{\|L\|^{n+1}}{1 - \|L\|}.$$

Por tanto,

$$\sup_{p \geq 1} \|M_{n+p} - M_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

y  $\{M_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{L}(X)$ . Como  $\mathcal{L}(X)$  es completo, hay un  $M \in \mathcal{L}(X)$  tal que

$$\|M_n - M\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Usando la definición de  $M_n$  y una simple manipulación algebraica,

$$(I - L)M_n = M_n(I - L) = I - L^{n+1}.$$

Si  $n \rightarrow \infty$  obtenemos

$$(I - L)M = M(I - L) = I.$$

2. Existencia y unicidad de solución de la ecuación lineal integral de Volterra de segunda clase

Esta relación implica que  $(I - L)$  es una biyección, y

$$M = (I - L)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n L^i = \sum_{n=0}^{\infty} L^n.$$

Para probar la desigualdad (2.1), observemos que

$$\|M_n\| \leq \sum_{i=0}^n \|L\|^i \leq \frac{1}{1 - \|L\|}.$$

Tomando el límite en  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos (2.1). □

*Observación 2.1.* El teorema dice que bajo las hipótesis que hemos marcado, para cualquier  $f \in X$ , la ecuación

$$(I - L)u = f \tag{2.2}$$

tiene solución única  $u = (I - L)^{-1}f \in X$ . Además, la solución depende continuamente de la parte derecha  $f$ : Siendo  $(I - L)u_1 = f_1$  y  $(I - L)u_2 = f_2$ , de esto se sigue que

$$u_1 - u_2 = (I - L)^{-1}(f_1 - f_2),$$

y por tanto,

$$\|u_1 - u_2\| \leq c \|f_1 - f_2\|$$

con  $c = 1/(1 - \|L\|)$ .

*Observación 2.2.* Este teorema también nos da una forma de aproximar la solución de la ecuación (2.2). Bajo las hipótesis del teorema, tenemos

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

donde

$$u_n = \sum_{j=0}^n L^j f.$$

A continuación presentamos un resultado importante que nos garantiza la existencia y unicidad de una ecuación lineal integral, y en particular, nos sirve para las ecuaciones de Volterra de segunda clase.

**Corolario 2.1.** *Toda ecuación lineal integral tiene solución única.*

*Demostración.* Sea la siguiente ecuación:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

con  $\lambda \neq 0$ ,  $K(x, t)$  continua, y  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ . Sea  $X = \mathcal{C}[a, b]$  con la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Vamos a reescribir la ecuación de forma simbólica, organizando los términos para poder aplicar posteriormente el teorema de la serie geométrica:

$$(\lambda I - K)u = f,$$

donde  $K$  es un operador integral lineal gerinado por el núcleo  $K(\cdot, \cdot)$ . Nosotros también lo escribiremos a menudo como  $(\lambda - K)u = f$ , para aclarar la notación.

Escribimos la ecuación de esta manera puesto que así se puede convertir en la forma que necesitamos para aplicar el teorema de la serie geométrica:

$$(I - L)u = \frac{1}{\lambda}f, \quad L = \frac{1}{\lambda}K.$$

Aplicando el teorema de la serie geométrica, afirmamos que si

$$\|L\| = \frac{1}{|\lambda|} \|K\| \leq 1,$$

entonces  $(I - L)^{-1}$  existe y

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}.$$

Equivalentemente, si

$$\|K\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_0^x |K(x, t)| dt \leq |\lambda|,$$

entonces  $(\lambda I - K)^{-1}$  existe y

$$\|(\lambda I - K)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|K\|}.$$

Luego, para cualquier  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , la ecuación integral tiene solución única  $u \in \mathcal{C}[a, b]$  y

$$\|u\|_\infty \leq \|(\lambda I - K)^{-1}\| \|f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{|\lambda| - \|K\|}.$$

□

*Observación 2.3.* Gracias a la demostración del teorema podemos ver que para un operador lineal  $L \in \mathcal{L}(X)$  sobre un espacio de Banach  $V$ , si  $\|L\| \leq 1$ , entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} L^n$  converge en  $\mathcal{L}(X)$  y el valor de la serie es el operador  $(I - L)^{-1}$ .

### 2.1.1. Generalización del teorema

Para motivar la generalización del teorema, vamos a considerar la ecuación integral de Volterra de segunda clase

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)u(t)dt, \quad x \in [0, B],$$

donde  $B \geq 0$  y suponemos que el núcleo  $K(x, t)$  es continuo para  $0 \leq t \leq x \leq B$ , y  $f \in \mathcal{C}[0, B]$ . Si aplicamos el teorema, tendremos que suponer una condición para poder concluir la existencia de solución única, de forma que

$$\max_{x \in [0, B]} \int_0^x |K(x, t)| dt \leq 1.$$

## 2. Existencia y unicidad de solución de la ecuación lineal integral de Volterra de segunda clase

Sin embargo, podemos usar una variante del teorema de la serie geométrica sin importar el tamaño del núcleo  $K(x, t)$ , y garantizando la existencia de solución única. Simbólicamente, escribimos la ecuación integral como  $(I - L)u = f$ .

**Corolario 2.2.** Sea  $X$  un espacio de Banach,  $L \in \mathcal{L}(X)$ . Suponemos que para algún entero  $m \geq 1$  se cumple

$$\|L^m\| \leq 1.$$

Entonces  $I - L$  es una biyección en  $X$ , su inversa es un operador lineal acotado, y

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L^m\|} \sum_{i=0}^{m-1} \|L^i\|. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Gracias al teorema de la serie geométrica, sabemos que  $(I - L^m)^{-1}$  existe como un operador biyectivo acotado de  $X$  en sí mismo,

$$(I - L^m)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} L^{mj}$$

en  $\mathcal{L}(X)$ , y

$$\|(I - L^m)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L^m\|}.$$

De las igualdades

$$(I - L)\left(\sum_{i=0}^{m-1} L^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} L^i\right)(I - L) = I - L^m,$$

concluimos que  $(I - L)$  es una biyección,

$$(I - L)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{m-1} L^i\right)(I - L^m)^{-1}$$

y la desigualdad (2.3) se mantiene. □

### 2.1.2. Un resultado de perturbación

La *perturbación* es una técnica en matemática aplicada que estudia una ecuación relacionándola con otra ecuación “cercana” para la cual existe un resultado que nos proporciona una solución. El siguiente teorema es una de las herramientas más utilizadas.

**Teorema 2.2.** Sea  $X$  y  $Y$  espacios normados, siendo al menos uno de ellos completo. Suponemos que  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$  tiene inversa acotada  $L^{-1} : Y \rightarrow X$ . Suponemos  $M \in \mathcal{L}(X, Y)$  satisface

$$\|M - L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}. \quad (2.4)$$

Entonces  $M : X \rightarrow Y$  es una biyección,  $M^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  y

$$\|M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\|\|L - M\|}. \quad (2.5)$$

Además,

$$\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|^2 \|L - M\|}{1 - \|L^{-1}\| \|L - M\|}. \quad (2.6)$$

Para soluciones de las ecuaciones  $Lx_1 = y$  y  $Mx_2 = y$ , tenemos la acotación

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|M^{-1}\| \|(L - M)x_1\|. \quad (2.7)$$

*Demostración.* Escribimos  $M$  como una perturbación de  $L$ . Si  $Y$  es completo, escribimos

$$M = [I - (L - M)L^{-1}]L;$$

mientras que si  $X$  es completo, escribiremos

$$M = L[I - L^{-1}(L - M)].$$

Vamos a hacer la demostración en el caso de que  $Y$  sea completo. El operador  $(L - M)L^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$  satisface

$$\|(L - M)L^{-1}\| \leq \|L - M\| \|L^{-1}\| < 1.$$

Luego por el teorema de la serie geométrica,  $[I - (L - M)L^{-1}]^{-1}$  existe y además,

$$\|[I - (L - M)L^{-1}]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(L - M)L^{-1}\|} \leq \frac{1}{1 - \|L^{-1}\| \|L - M\|}.$$

$M^{-1}$  existe con

$$M^{-1} = L^{-1}[I - (L - M)L^{-1}]^{-1}$$

y

$$\|M^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \|[I - (L - M)L^{-1}]^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\| \|L - M\|}.$$

Para probar (2.6), escribimos

$$L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1},$$

tomando normas y usando (2.5).

Para (2.7),

$$x_1 - x_2 = (L^{-1} - M^{-1})y = M^{-1}(M - L)L^{-1}y = M^{-1}(M - L)x_1$$

y aplicamos normas y acotaciones. □

Podemos resumir el teorema anterior en una frase: *Un operador cercano a otro operador con inversa acotada, también tendrá inversa acotada.* Este es el marco de trabajo para innumerables resultados de existencia de soluciones para ecuaciones integrales y diferenciales.

**Pensar: consistencia, estabilidad y convergencia.**

**Ejemplo 2.1.** Vamos a examinar si la ecuación integral tiene solución

$$\lambda u(x) - \int_0^1 \sin(xt)u(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.8)$$

2. Existencia y unicidad de solución de la ecuación lineal integral de Volterra de segunda clase

con  $\lambda \neq 0$ . De la discusión del corolario (2.1), si

$$|\lambda| > \|K\| = \int_0^1 \sin(t)dt = 1 - \cos(1) \approx 0.4597, \quad (2.9)$$

entonces para cada  $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ , la ecuación admite una solución única  $u \in \mathcal{C}[0, 1]$ .

Para obtener más valores de  $\lambda$  para los cuales nuestra ecuación tiene solución única, aplicamos el teorema de perturbación. Ya que  $\cos(xt) \approx xt$  para valores pequeños de  $|xt|$ , comparamos la ecuación con

$$\lambda v(x) - \int_0^1 xt v(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.10)$$

Siguiendo la notación el teorema de perturbación, la ecuación (2.8) sería  $Mu = f$ , y (2.10) sería  $Lv = f$ . El espacio normado es  $X = \mathcal{C}[0, 1]$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , y  $L, M \in \mathcal{L}(X)$ .

Podemos resolver la ecuación integral (2.10) de forma explícita. Suponiendo  $\lambda \neq 0$ , tenemos que cada solución  $v$  toma la forma

$$v(x) = \frac{1}{\lambda} [f(x) + cx]$$

para alguna constante  $c$ . Sustituyéndolo en la ecuación nos lleva a una fórmula para  $c$ , y entonces

$$v(x) = \frac{1}{\lambda} [f(x) + \frac{1}{\lambda - 1/3} \int_0^1 xt f(t)dt], \quad \lambda \neq 0, \frac{1}{3}.$$

Esta relación define  $L^{-1}f$  para toda  $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ .

Para usar el teorema de perturbación, necesitamos medir algunas cantidades. Se puede calcular que

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} (1 + \frac{1}{2|\lambda - 1/3|})$$

y

$$\|L - M\| = \int_0^1 (t - \cos t)dt = \cos(1) - \frac{1}{2} \approx 0.0403.$$

La condición (2.4) viene de

$$\frac{1}{|\lambda|} (1 + \frac{1}{2|\lambda - 1/3|}) < \frac{1}{\cos(1) - 1/2}. \quad (2.11)$$

En la Figura 2.1 podemos ver un gráfico de la parte izquierda de esta desigualdad. Si  $\lambda$  es un número real, entonces hay tres casos a considerar:  $\lambda > 1/3$ ,  $0 < \lambda < 1/3$ , y  $\lambda < 0$ . Para el caso  $\lambda < 0$ , la desigualdad es cierta si y sólo si  $\lambda < \lambda_0 \approx -0.0881$ , que es la raíz negativa de la ecuación

$$\lambda^2 - (\frac{5}{6} - \cos(1))\lambda - \frac{5}{6}(\cos(1) - \frac{1}{2}) = 0.$$

Como consecuencia el teorema de perturbación, tenemos que si  $\lambda < \lambda_0$ , entonces nuestra ecuación integral tiene solución única para cualquier  $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ . Esto es una mejora significativa en comparación con el punto de partida que teníamos (2.9).

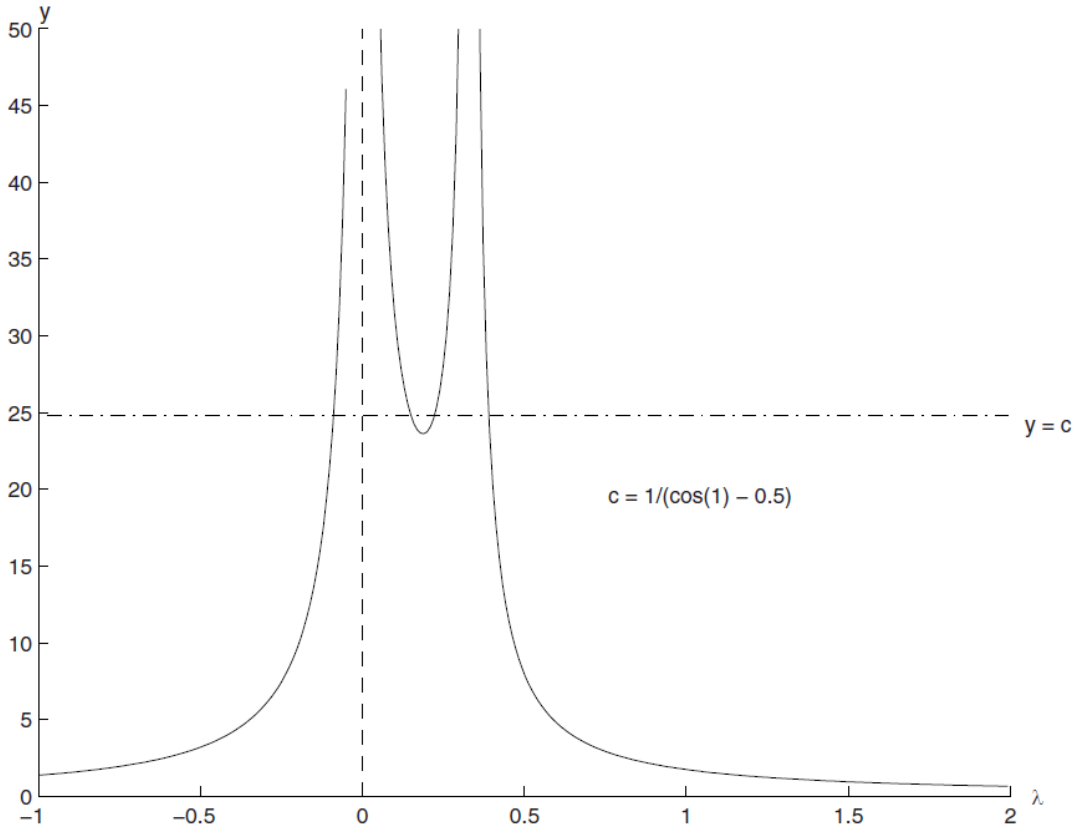


Figura 2.1.: Gráfico de la parte izquierda de la desigualdad (2.11)

### 2.1.3. Existencia y unicidad de solución para sistemas de ecuaciones integrales lineales de Volterra de segunda clase

En el caso vectorial, partimos de

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x) + \int_0^x \mathbf{K}(x,t)\mathbf{u}(t)dt, \quad x \in [0, B],$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector formado por todas las funciones que queremos determinar.  $\mathbf{f}$  es el vector formado por las funciones continuas independientes, y  $\mathbf{K}$  es el vector formado por los núcleos de cada una de las ecuaciones que forman el sistema:

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \dots \\ u_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(x,t) = \begin{pmatrix} K_1(x,t) \\ K_2(x,t) \\ \dots \\ K_n(x,t) \end{pmatrix},$$

Añadir Corolario 2.1 con la notación vectorial + su demostración?





### 3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

Volterra empezó a trabajar en las ecuaciones integrales en 1884, pero el nombre de *ecuación integral* se lo dio Bois-Reymond en 1888. Sin embargo, el término *ecuación integral de Volterra* se utilizó por primera vez en 1908 por el matemático rumano Traian Lalesco.

#### 3.1. Introducción

El diseño de métodos numéricos para ecuaciones integrales en general, y en particular de Volterra, es un campo de investigación vigente actualmente. Vamos a trabajar con una gran variedad de métodos numéricos y analíticos, tales como el método de aproximaciones sucesivas, la transformada de Laplace, colocación con splines, Runge-Kutta, y otros muchos que han sido utilizados para manejar las ecuaciones integrales de Volterra.

A parte de estudiar algunos de estos métodos tradicionales, veremos otros métodos algo más recientes tales como:

- Método de descomposición de Adomian (ADM)
- Método de descomposición modificado (mADM)
- Método de iteración variacional (VIM)

Nos vamos a centrar principalmente en cómo se aplican estos métodos siendo nuestro objetivo principal, encontrar una solución  $u(x)$  para la ecuación integral de Volterra de segunda clase.

Para apreciar mejor en qué están basados cada uno de los métodos, vamos a distinguir entre los métodos que utilizan series, los métodos iterativos, y otros métodos especiales que no se parecen tanto a los anteriores.

#### 3.2. Métodos basados en series

##### 3.2.1. Método de descomposición de Adomian (ADM)

Fue desarrollado por George Adomian y está muy bien abordado en muchas referencias. Se ha investigado mucho sobre este método para poder aplicarlo a una amplia clase de ecuaciones diferenciales ordinarias en derivadas parciales, y también ecuaciones integrales.

Consiste en descomponer una función  $u(x)$  de cualquier ecuación en una suma de un número infinito de componentes definidas por la serie de descomposición

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (3.1)$$

o equivalentemente

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots,$$

### 3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

donde las componentes  $u_n(x)$ ,  $n \geq 0$  tienen que ser determinadas de una forma recursiva. El método se ocupa de encontrar las componentes  $u_0, u_1, u_2, \dots$  individualmente. Como ya veremos más adelante, se pueden hallar estas componentes de una forma sencilla a través de una relación de recurrencia que normalmente implica integrales simples que pueden ser fácilmente evaluadas.

Para establecer la relación de recurrencia, sustituimos (3.1) en la ecuación integral de Volterra (1.1) para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt,$$

o equivalentemente

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) [u_0(t) + u_1(t) + \dots] dt.$$

La primera componente  $u_0(x)$  se identifica con todos los términos que no están incluidos dentro de la integral. Por lo tanto, las componentes  $u_j(x)$ ,  $j \geq 1$ , de la función desconocida  $u(x)$ , están completamente determinadas a través de la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), & u_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_0(t) dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_1(t) dt, & u_3(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_2(t) dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

y análogamente para las demás componentes. Como podemos ver en (3.2), las componentes  $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$  están completamente determinadas. Como resultado, la solución  $u(x)$  de la ecuación integral de Volterra (1.1) en forma de serie se obtiene fácilmente utilizando (3.1).

*Observación 3.1.* Se ha visto cómo el método de descomposición ha transformado la ecuación integral en una elegante determinación de componentes calculables. Muchos investigadores formalizaron que si existe una solución exacta para el problema, entonces la serie obtenida converge muy rápidamente a esa solución.

Sin embargo, para problemas concretos donde no se puede obtener una solución, generalmente se utiliza un número truncado de términos con fines numéricos. Cuantos más componentes usemos, mayor precisión obtendremos.

**Ejemplo 3.1.** Resolveremos la siguiente ecuación integral de Volterra utilizando el ADM:

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt.$$

En este caso,  $f(x) = 1, \lambda = -1, K(x, t) = 1$ . Se asume que la solución  $u(x)$  tiene una forma en series como la dada en (3.1). Sustituyendo la serie en ambos lados de nuestra ecuación,

obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt$$

o equivalentemente

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = 1 - \int_0^x [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots] dt.$$

La primera componente corresponde con todos los términos que no están incluidos dentro de la integral, por tanto, obtenemos la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_{k+1}(x) &= - \int_0^x u_k(t) dt, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_1(x) &= - \int_0^x u_0(t) dt = - \int_0^x 1 dt = -x, \\ u_2(x) &= - \int_0^x u_1(t) dt = - \int_0^x (-t) dt = \frac{1}{2!} x^2, \\ u_3(x) &= - \int_0^x u_2(t) dt = - \int_0^x \frac{1}{2!} t^2 dt = -\frac{1}{3!} x^3, \end{aligned}$$

Así, obtenemos la solución en serie:

$$u(x) = 1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \dots,$$

que converge a la solución:

$$u(x) = e^{-x}.$$

### 3.2.2. Método de descomposición modificado (mADM)

Una modificación importante del ADM fue desarrollada por Wazwaz. Este método facilitará el proceso de cálculo y acelerará la convergencia de la solución en series. Se aplicará, siempre que se pueda, a cualquier ecuación integral y diferencial de cualquier orden.

*Observación 3.2.* Este método depende principalmente de dividir la función  $f(x)$  en dos partes, por tanto no se puede usar si la función  $f(x)$  está formada por un sólo término.

El método de descomposición modificado introduce una pequeña variación a la relación de recurrencia que vimos en el ADM, y esto nos llevará a la determinación de las componentes de  $u(x)$  de una forma más fácil y rápida.

En muchos casos, la función  $f(x)$  se puede escribir como una suma de dos funciones parciales, llamadas  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$ :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Gracias a esto, se introducirá un cambio importante a la hora de formar la relación de

### 3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

recurrencia. Para minimizar el tamaño de los cálculos, identificamos la primera componente  $u_0(x)$  como una de las partes de  $f(x)$ , que será  $f_1(x)$  o  $f_2(x)$ . La otra parte se puede añadir a la componente  $u_1(x)$  junto a los demás términos. En resumen, obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}u_0(x) &= f_1(x), \\u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u_0(t) dt, \\u_{k+1}(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_k(t) dt, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

*Observación 3.3.* Esto muestra que la diferencia entre la relación de recurrencia estándar y la modificada se basa únicamente en la formación de las dos primeras componentes  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ . Las demás componentes se mantienen igual.

Aunque esta variación en las dos primeras componentes es pequeña, juega un papel muy importante en acelerar la convergencia de la solución y en minimizar la cantidad de trabajo computacional. Además, varios trabajos de investigación han confirmado que reducir el número de componentes en  $f_1(x)$  afecta a todas las componentes, no sólo a  $u_1(x)$ .

A continuación vamos a ver dos observaciones importantes a cerca de este método:

*Observación 3.4.* Si elegimos correctamente las funciones  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$ , podremos obtener la solución exacta  $u(x)$  utilizando muy pocas iteraciones, incluso algunas veces evaluando sólo dos componentes. De hecho, el éxito de esta modificación depende de hacer una buena elección de las funciones  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$ , y la forma de obtenerlas adecuadamente es a través de prueba y error, ya que no se ha encontrado todavía una regla para facilitar esta elección.

*Observación 3.5.* Si  $f(x)$  está formada sólo por un término, podemos utilizar el método de descomposición estándar.

Podemos utilizar este método para las ecuaciones integrales tanto de Volterra como de Fredholm, lineales en nuestro caso. Veamos algún ejemplo:

**Ejemplo 3.2.** Resolver la ecuación integral de Volterra:

$$u(x) = 2x + \sin x + x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x u(t) dt.$$

La función  $f(x)$  está compuesta por 5 términos, que están fuera de la integral, y vamos a dividirlos en dos partes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2x + \sin x, \\f_2(x) &= x^2 - \cos x + 1.\end{aligned}$$

Y ahora utilizamos la fórmula de recurrencia modificada, obteniendo:

$$\begin{aligned}u_0(x) &= 2x + \sin x, \\u_1(x) &= x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x u_0(t) dt = 0, \\u_{k+1}(x) &= - \int_0^x u_k(t) dt = 0, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

Es obvio que cada componente  $u_j, j \geq 1$  es cero. Luego la solución exacta es

$$u(x) = 2x + \sin x.$$

### 3.2.3. Método de la solución en series

**Definición 3.1.** Una función real  $u(x)$  se llama *analítica* si existe derivada de cualquier orden de forma que la serie de Taylor en cualquier punto  $b$  de su dominio

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k,$$

converge a  $f(x)$  en un entorno de  $b$ .

Por simplicidad, escribiremos la forma genérica de la serie de Taylor en  $x = 0$  como

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.3)$$

Vamos a presentar un método muy útil, que se basa principalmente en la serie de Taylor para funciones analíticas, y resolverá ecuaciones integrales de Volterra. Podemos apreciar que guarda cierta similitud con Adomian, ya que de igual forma expresamos  $u$  como la suma de cierta serie.

Asumimos que la solución  $u(x)$  de la ecuación integral de Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt,$$

es analítica, y por tanto posee una solución en forma de serie de Taylor, donde los coeficientes  $a_n$  se determinarán de forma recursiva. Sustituimos (3.3) en ambos lados y obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (3.4)$$

o por simplicidad usamos

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt,$$

donde  $T(f(x))$  es la serie de Taylor para  $f(x)$ . La ecuación integral se convertirá en una integral tradicional donde en vez de integrar la función desconocida  $u(x)$ , se integrarán términos de la forma  $t^n, n \geq 0$ . Al estar en búsqueda de una solución en series, si la función  $f(x)$  incluye funciones elementales, deberemos incluir sus expansiones en forma de Taylor.

Primero integramos la parte derecha de la integral en (3.4) y tomamos los coeficientes de las potencias de  $x$ . Después igualamos los coeficientes de ambos lados para obtener una relación de recurrencia con  $a_j, j \geq 0$ . Resolver la recurrencia nos llevará a determinar completamente los coeficientes  $a_j, j \geq 0$ .

Ahora la solución en series se sigue inmediatamente de sustituir estos coeficientes. La solución exacta se obtendrá si existe, y si no, la serie obtenida se podrá utilizar con objetivos numéricos. En este caso, a más términos evaluemos, mayor precisión obtendremos.

### 3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

Veamos un ejemplo para dejar claro este método:

**Ejemplo 3.3.** Vamos a resolver la ecuación integral de Volterra

$$u(x) = 1 - x \sin x + \int_0^x t u(t) dt.$$

Sustituyendo la serie en ambos lados y utilizando la expansión en serie de Taylor para el seno obtenemos:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots = 1 - x \left( x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \int_0^x t (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt.$$

Integrando el lado derecho y quedándonos con los coeficientes encontramos

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots = 1 + \left( \frac{1}{2} a_0 - 1 \right) x^2 + \frac{1}{3} a_1 x^3 + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} a_2 \right) x^4 + \dots$$

Igualando los coeficientes de las potencias de  $x$ ,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{1}{2} a_0 - 1, & a_3 &= \frac{1}{3} a_1 = 0, \\ a_4 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{4!}, \end{aligned}$$

y para  $n, n \geq 0$ ,

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad n \geq 0.$$

La solución en forma de serie viene dada por

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots$$

que nos da la solución exacta

$$u(x) = \cos x.$$

## 3.3. Métodos iterativos

### 3.3.1. Método de iteración variacional (VIM)

Este método ha sido recientemente desarrollado, y ha demostrado ser eficaz y seguro para estudios numéricos y analíticos. El método proporciona aproximaciones sucesivas que convergen rápidamente a la solución exacta en forma de serie, siempre que exista. Este método es capaz de manejar problemas tanto lineales como no lineales de la misma forma sin necesidad de añadir ningún tipo de restricciones. Además, la serie obtenida se puede utilizar para fines numéricos si no se puede obtener la solución exacta. Vamos a presentar los pasos principales del método:

Consideramos la ecuación diferencial:

$$Lu + Nu = g(t), \tag{3.5}$$

donde  $L$  y  $N$  son operadores lineales y no lineales respectivamente, y  $g(t)$  es el término no homogéneo.

El método de iteración variacional presenta un funcional de corrección para la ecuación (3.5) en la forma:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)(Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi))d\xi, \quad (3.6)$$

donde  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange general.

*Observación 3.6.* Nótese que en este método,  $\lambda$  puede ser una constante o una función, y  $\tilde{u}_n$  es un valor restringido, por tanto se comporta como una constante, luego  $\delta\tilde{u}_n = 0$ , donde  $\delta$  es la derivada variacional.

Para un uso completo de este método, deberíamos seguir dos pasos:

1. Determinar el multiplicador de Lagrange  $\lambda(\xi)$  que será identificado de forma óptima.
2. Una vez determinado  $\lambda$ , sustituimos el resultado en (3.6) donde se deberían omitir las restricciones.

Tomando la variación de (3.6) con respecto a la variable independiente  $\tilde{u}_n$ , encontramos

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 1 + \frac{\delta}{\delta u_n} \left( \int_0^x \lambda(\xi)(Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi))d\xi \right),$$

o equivalentemente

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \left( \int_0^x \lambda(\xi)(Lu_n(\xi))d\xi \right). \quad (3.7)$$

Para determinar el multiplicador de Lagrange  $\lambda(\xi)$  normalmente se utiliza la integración por partes. Por ejemplo, si tenemos  $Lu_n(\xi) = u'_n(\xi)$  en (3.7), entonces se convierte en

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \left( \int_0^x \lambda(\xi)(u'_n(\xi))d\xi \right).$$

Integrando por partes obtenemos

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \lambda(\xi)u_n(\xi) - \int_0^x \lambda'(\xi)\delta u_n(\xi)d\xi.$$

o equivalentemente

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n(\xi)(1 + \lambda|_{\xi=x}) - \int_0^x \lambda'\delta u_n d\xi.$$

La condición final de  $u_{n+1}$  requiere que  $\delta u_{n+1} = 0$ . Esto significa que la parte izquierda vale cero, y por tanto la parte derecha también debería valer cero, lo que nos lleva a las condiciones:

$$1 + \lambda|_{\xi=x} = 0, \quad \lambda'|_{\xi=x} = 0.$$

Lo que al final nos da

$$\lambda = -1.$$

Una vez hemos determinado el multiplicador de Lagrange  $\lambda(\xi)$ , las sucesivas aproximaciones  $u_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ , de la solución  $u(x)$  se obtendrán fácilmente al usar la función selectiva  $u_0(x)$ .

### 3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

Sin embargo, para una rápida convergencia, la función  $u_0(x)$  se debe seleccionar utilizando las primeras condiciones como siguen:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(0), & \text{para la primera derivada } u'_n \\ u_0(x) &= u(0) + xu'(0), & \text{para la segunda derivada } u''_n \\ u_0(x) &= u(0) + xu'(0) + \frac{1}{2!}x^2u''(0), & \text{para la tercera derivada } u'''_n \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Por tanto, la solución

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

Es decir, el funcional de corrección nos dará varias aproximaciones, y por tanto, la solución exacta se obtiene como el límite de todas estas sucesivas aproximaciones.

La determinación del multiplicador de Lagrange juega un papel muy importante para llegar a la solución del problema. A continuación, mostramos un esquema correspondiente al multiplicador de Lagrange y su funcional de corrección para un caso general de orden  $n$ :

$$\begin{aligned} u^{(n)} + f(u(\xi), u'(\xi), \dots, u^{(n)}(\xi)) &= 0, \lambda = (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} (\xi - x)^{(n-1)}, \\ u_{n+1} &= u_n + (-1)^n \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} (\xi - x)^{(n-1)} [u_n''' + f(u_n, \dots, u_n^{(n)})] d\xi, \end{aligned}$$

para todo  $n \geq 1$ .

Para utilizar el método de iteración variacional y resolver ecuaciones integrales de Volterra, es necesario convertir la ecuación integral a un problema de valores iniciales equivalente o a una ecuación integro-diferencial.

Vamos a examinar el problema de valores iniciales obtenido utilizando el método de iteración variacional como veremos en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.4.** Resolveremos la siguiente ecuación integral de Volterra usando el método de iteración variacional:

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt.$$

Usando la regla de Leibnitz para derivar ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$u'(x) - u(x) = 0. \quad (3.8)$$

Sustituyendo  $x = 0$ , tenemos la condición inicial  $u(0) = 1$ . Ahora, utilizando el método de iteración variacional, el funcional de corrección para la ecuación (3.8) es

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) (u_n'(\xi) - \tilde{u}_n(\xi)) d\xi. \quad (3.9)$$

Usando la fórmula del esquema visto anteriormente para el caso  $n = 1$  llegamos a que

$$\lambda = -1.$$

Sustituyendo el valor del multiplicador de Lagrange  $\lambda = -1$  en el funcional nos da la fórmula



iterativa:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u'_n(\xi) - u_n(\xi)) d\xi.$$

Como dijimos anteriormente, podemos usar la condición inicial  $u_0(x) = u(0) = 1$ . Usando esta selección en (3.9) obtenemos las siguientes aproximaciones sucesivas:

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = 1 - \int_0^x (u'_0(\xi) - u_0(\xi)) d\xi = 1 + x,$$

$$u_2(x) = 1 + x - \int_0^x (u'_1(\xi) - u_1(\xi)) d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2,$$

$$u_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \int_0^x (u'_2(\xi) - u_2(\xi)) d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3,$$

y así sucesivamente. El VIM admite el uso de

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) \end{aligned}$$

con lo que obtenemos la solución exacta

$$u(x) = e^x.$$

### 3.3.2. Método de aproximaciones sucesivas

El método de aproximaciones sucesivas, también conocido como el *método de iteración de Picard*, nos proporciona un esquema que puede ser utilizado para resolver problemas de valores iniciales o ecuaciones integrales. Este método resuelve cualquier problema encontrando aproximaciones sucesivas que convergen a la solución a partir de una inicial, llamada la *aproximación inicial*. Como veremos, la aproximación inicial puede ser cualquier función real que se utilizará en una relación recurrente para determinar las otras aproximaciones.

Dada la ecuación integral lineal de Volterra de segunda clase

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u(t) dt,$$

donde  $u(x)$  es la función desconocida a determinar,  $K(x, t)$  es el núcleo, y  $\lambda$  un parámetro. El método de las aproximaciones sucesivas introduce la siguiente relación de recurrencia

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1, \quad (3.10)$$

donde la aproximación inicial  $u_0(x)$  puede ser cualquier función real. Siempre empezamos con una suposición inicial para  $u_0(x)$ , normalmente se suele elegir 0, 1 ó  $x$ .

La convergencia de  $u_n(x)$  está justificada con el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.** Si  $f(x)$ , dada en (3.10), es una función continua para  $x \in [0, a]$ , y el núcleo  $K(x, t)$  también es continuo para  $x \in [0, a]$ ,  $t \in [0, x]$ , la sucesión de aproximaciones sucesivas  $u_n(x)$ ,  $n \geq 0$  converge a la solución  $u(x)$  de la ecuación integral bajo estudio.

### 3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

*Observación 3.7.* Es interesante notar que el método de iteración variacional admite el uso de la fórmula iterativa:

$$u_{n+1} = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left( \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial \xi} - \tilde{u}_n(\xi) \right) d\xi.$$

mientras que el método de aproximaciones sucesivas utiliza la fórmula iterativa

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1,$$

Podemos resumir las diferencias entre ambas fórmulas de la siguiente forma:

1. La primera fórmula contiene el multiplicador de Lagrange  $\lambda$  que debería ser determinado antes de aplicar la fórmula. Sin embargo, la fórmula de aproximaciones sucesivas no requiere el uso de  $\lambda$ .
2. La fórmula de iteración variacional permite el uso de la restricción  $\tilde{u}_n(\xi)$  donde  $\delta \tilde{u}_n(\xi) = 0$ . La segunda fórmula no requiere esta restricción.
3. La primera fórmula se aplica a un ODE equivalente a la ecuación integral, mientras que la segunda fórmula se aplica directamente a la fórmula iterativa de la propia ecuación integral.

Vamos a ilustrar este método con un ejemplo para que se vea más claro.

**Ejemplo 3.5.** Vamos a resolver la siguiente ecuación integral de Volterra:

$$u(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt.$$

Para la aproximación inicial  $u_0(x)$ , seleccionamos

$$u_0(x) = 0.$$

El método de las aproximaciones sucesivas nos permite el uso de la siguiente fórmula iterativa

$$u_{n+1}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u_n(t) dt, \quad n \geq 0.$$

Sustituyendo la aproximación inicial obtenemos:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u_0(t) dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2, \\ u_2(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5, \\ u_3(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. La solución  $u(x)$  viene dada por

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = e^x.$$

### 3.4. Otros métodos

#### 3.4.1. Fenómeno de los términos de ruido

Esta nueva técnica depende principalmente de los llamados *términos de ruido*, y ha demostrado una rápida convergencia hacia la solución, se puede utilizar tanto para ecuaciones integrales como para ecuaciones diferenciales.

Los términos con ruido, si existen entre las componentes  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ , nos proporcionarán la solución exacta utilizando sólo las dos primeras iteraciones. Vamos a revisar los conceptos principales de estos términos:

1. Los *términos de ruido* se definen como los términos idénticos con signos opuestos en las componentes  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ . Otros términos de ruido pueden aparecer entre otras componentes. Es importante saber que no tienen por qué existir para todas las ecuaciones.
2. Al cancelar los términos de ruido entre  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ , incluso si  $u_1(x)$  contiene términos adicionales, los términos no cancelados restantes de  $u_0(x)$  podrían proporcionar la solución exacta de la ecuación integral. La aparición de los términos de ruido entre  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$  no siempre es suficiente para obtener la solución exacta. Por lo tanto, es necesario demostrar que los términos no cancelados de  $u_0(x)$  satisfacen la ecuación integral dada.  
Por otro lado, si los términos no cancelados de  $u_0(x)$  no cumplieran con la ecuación integral dada, o los términos de ruido no aparecieran entre  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ , entonces sería necesario determinar más componentes de  $u(x)$  para obtener la solución en forma de serie.
3. Los términos de ruido aparecen en tipos específicos de ecuaciones no homogéneas, sin embargo, no aparecen en ecuaciones homogéneas.
4. Hay una condición necesaria para que se produzca la aparición de los términos de ruido, la primera componente  $u_0(x)$  debe contener la solución exacta  $u(x)$  entre otros términos. Además, se demostró que la condición de no homogeneidad de la ecuación no siempre garantiza la aparición de los términos de ruido.

Vamos a ilustrar la utilidad de los términos de ruido con un ejemplo:

**Ejemplo 3.6.** Resolveremos la siguiente ecuación integral de Volterra:

$$u(x) = 8x + x^3 - \frac{3}{8} \int_0^x tu(t)dt.$$

Establecemos la relación de recurrencia siguiendo el método estándar de Adomian:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 8x + x^3, \\ u_1(x) &= -\frac{3}{8} \int_0^x tu(t)dt = -\frac{3}{40}x^5 - x^3. \end{aligned}$$

Podemos ver que  $\pm x^3$  aparecen en  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ , además con signos opuestos, por tanto es un término de ruido. Cancelando este término de la primera componente  $u_0(x)$  obtenemos la solución exacta:

$$u(x) = 8x,$$

### 3. Ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

que satisface la ecuación integral.

*Observación 3.8.* Si hubiéramos elegido el método modificado, seleccionamos  $u_0(x) = 8x$ , luego tenemos que  $u_1(x) = 0$ . Por tanto, obtenemos el mismo resultado.

#### 3.4.2. Método de la Transformada de Laplace

Es una técnica muy potente que también es capaz de resolver problemas de valores iniciales y ecuaciones integrales. Antes de aplicar el método, vamos a ver algunos conceptos importantes.

Si el núcleo  $K(x, t)$  de la ecuación integral depende de la diferencia  $x - t$ , entonces se llama *núcleo de diferencia*. Y podemos expresar la ecuación integral de la siguiente forma:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x - t)u(t)dt. \quad (3.11)$$

Considerando dos funciones  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  que poseen las condiciones necesarias para la existencia de la transformada de Laplace. Sean las transformadas de Laplace para las funciones  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  dadas por:

$$\mathcal{L}\{f_1(x)\} = F_1(s), \quad \mathcal{L}\{f_2(x)\} = F_2(s).$$

El *producto de convolución de Laplace* de estas dos funciones se define como

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x - t)f_2(t)dt,$$

ó

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x - t)f_1(t)dt,$$

*Observación 3.9.* Recalcamos que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x).$$

Podemos fácilmente ver que la transformada de Laplace del producto de convolución viene dada por:

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_1(x - t)f_2(t)dt\right\} = F_1(s)F_2(s).$$

Basándonos en este resumen, vamos a examinar ecuaciones integrales de Volterra específicas donde el núcleo es un núcleo de diferencia. Utilizaremos tanto la transformada de Laplace como su inversa.

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados en (3.11) tenemos

$$U(s) = F(s) + \lambda \mathcal{K}(s)U(s),$$

donde

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\}, \quad \mathcal{K}(s) = \mathcal{L}\{K(x)\}, \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}.$$

Resolviendo la ecuación para  $U(s)$  obtenemos

$$U(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda \mathcal{K}(s)}, \quad \lambda \mathcal{K}(s) \neq 1.$$

La solución  $u(x)$  se obtiene tomando la inversa de la transformada de Laplace en la ecuación anterior donde obtenemos:

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 - \lambda \mathcal{K}(s)}\right\}.$$

**Ejemplo 3.7.** Resolveremos la siguiente ecuación integral de Volterra utilizando el nuevo método:

$$u(x) = \sin x + \cos x + 2 \int_0^x \sin(x-t)u(t)dt.$$

Vamos a aplicar la transformada de Laplace, y nos apoyaremos en su linealidad para obtener

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{\sin x + \cos x\} + 2\mathcal{L}\{\sin(x-t) * u(x)\},$$

y por tanto

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 1}U(s),$$

o equivalentemente

$$U(s) = \frac{1}{s - 1}.$$

Tomando la inversa de Laplace en ambos lados obtenemos la solución exacta

$$u(x) = e^x.$$



## 4. Sistemas de ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase

### 4.1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones integrales, lineales y no lineales, aparecen en muchas aplicaciones de ingeniería, física, química y modelos de crecimiento de poblaciones. Las ideas generales y las características esenciales de estos sistemas se pueden aplicar en muchos ámbitos.

Una gran variedad de métodos numéricos y analíticos se usan para manejar estos sistemas, pero la mayoría encuentran dificultades en términos del gran trabajo computacional, sobre todo cuando el sistema incluye varias ecuaciones integrales. Para evitar estas dificultades que normalmente se ven en los métodos tradicionales, vamos a utilizar algunos de los métodos introducidos en el capítulo anterior. Los tres métodos que vamos a estudiar en este capítulo son los siguientes:

- Método de descomposición de Adomian
- Método de la transformada de Laplace
- Método de las aproximaciones sucesivas

Los sistemas de ecuaciones integrales lineales de Volterra de segunda clase, vienen dados por

$$\begin{aligned}u(x) &= f_1(x) + \int_0^x (K_1(x,t)u(t) + \tilde{K}_1(x,t)v(t) + \dots), \\v(x) &= f_2(x) + \int_0^x (K_2(x,t)u(t) + \tilde{K}_2(x,t)v(t) + \dots).\end{aligned}$$

Las funciones desconocidas  $u(x), v(x), \dots$ , que se determinarán, aparecen dentro y fuera de la integral. Los núcleos  $K_i(x, t)$  y  $\tilde{K}_i(x, t)$  y la función  $f_i(x)$  son funciones reales dadas. A continuación veremos los métodos para resolver estos sistemas.

### 4.2. Método de descomposición de Adomian

Como ya vimos anteriormente, este método descompone cada solución en una suma infinita de componentes, donde cada componente se determina de forma recursiva. Este método puede utilizarse en su forma estándar o combinando los términos de ruido. Además, el método de descomposición modificado se utilizará donde sea apropiado. Veamos un ejemplo para resolver un sistema de ecuaciones integrales de Volterra utilizando este método.

**Ejemplo 4.1.** Partimos del siguiente sistema:

$$u(x) = x - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x ((x-t)^2u(t) + (x-t)v(t))dt,$$

4. *Sistemas de ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase*

$$v(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \int_0^x ((x-t)^3 u(t) + (x-t)^2 v(t)) dt.$$

El método nos sugiere que los términos lineales  $u(x)$  y  $v(x)$  se descompongan como una suma infinita de componentes

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x),$$

donde  $u_n(x)$  y  $v_n(x)$ ,  $n \geq 0$  son las componentes de  $u(x)$  y  $v(x)$  que encontraremos de forma recursiva.

Sustituyendo las series en el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) &= x - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x ((x-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)) dt, \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) &= x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \int_0^x ((x-t)^3 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + (x-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)) dt. \end{aligned}$$

Las primeras componentes  $u_0(x)$  y  $v_0(x)$  se definen como todos los términos que no están dentro de la integral, luego transformamos el sistema en un conjunto de relaciones recursivas dadas por

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x - \frac{1}{6}x^4, \\ u_{k+1}(x) &= \int_0^x ((x-t)^2 u_k(t) + (x-t) v_k(t)) dt, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_0(x) &= x^2 - \frac{1}{12}x^5, \\ v_{k+1}(x) &= \int_0^x ((x-t)^3 u_k(t) + (x-t)^2 v_k(t)) dt, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Si hacemos la primera iteración obtenemos

$$u_0(x) = x - \frac{1}{6}x^4, \quad u_1(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{280}x^7,$$

y

$$v_0(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5, \quad v_1(x) = \frac{1}{12}x^5 - \frac{11}{10080}x^8.$$

Es obvio que los términos de ruido  $\pm \frac{1}{6}x^4$  aparecen entre  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ . Además, los términos de ruido  $\pm \frac{1}{12}x^5$  aparecen entre  $v_0(x)$  y  $v_1(x)$ . Si cancelamos estos términos de ruido en  $u_0(x)$  y  $v_0(x)$ , el resto de términos restantes nos dan la solución exacta

$$(u(x), v(x)) = (x, x^2).$$



### 4.3. Método de la transformada de Laplace

Puesto que ya hemos explicado este método en profundidad en el capítulo anterior, vamos a mostrar directamente un ejemplo en el que veremos cómo se aplica a un sistema de ecuaciones integrales de Volterra.

**Ejemplo 4.2.** Sea

$$u(x) = 1 - x^2 + x^3 + \int_0^x ((x-t)u(t) + (x-t)v(t))dt,$$

$$v(x) = 1 - x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \int_0^x ((x-t)u(t) - (x-t)v(t))dt.$$

Es importante darse cuenta que ambos núcleos son iguales, es decir,  $K_1(x-t) = K_2(x-t) = x-t$ . Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de cada ecuación obtenemos

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{1 - x^2 + x^3\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(x) + (x-t) * v(x)\},$$

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\} = \mathcal{L}\{1 - x^3 - \frac{1}{10}x^5\} + \mathcal{L}\{(x-t) * u(x) - (x-t) * v(x)\}.$$

Esto al mismo tiempo nos da

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2}U(s) + \frac{1}{s^2}V(s),$$

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{6}{s^4} - \frac{12}{s^6} + \frac{1}{s^2}U(s) - \frac{1}{s^2}V(s),$$

Reorganizando un poco el sistema obtenemos

$$(1 - \frac{1}{s^2})U(s) - \frac{1}{s^2}V(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4},$$

$$(1 + \frac{1}{s^2})V(s) - \frac{1}{s^2}U(s) = \frac{1}{s} - \frac{6}{s^4} - \frac{12}{s^6}.$$

Resolviendo el sistema para  $U(s)$  y  $V(s)$  tenemos como resultado

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{3!}{s^4},$$

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{3!}{s^4}.$$

Tomando la inversa de la transformada de Laplace en ambos lados de cada ecuación, la solución exacta viene dada por

$$(u(x), v(x)) = (1 + x^3, 1 - x^3).$$

### 4.4. Método de aproximaciones sucesivas

El método de aproximaciones sucesivas también se puede aplicar a sistemas de ecuaciones integrales de Volterra en el caso vectorial. Cuando tenemos un sistema de ecuaciones integrales

4. *Sistemas de ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase*

de Volterra en forma vectorial, el procedimiento es similar al caso escalar, pero trabajaremos con vectores en lugar de con funciones escalares, es decir, tenemos que

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x) + \int_0^x \mathbf{K}(x, t) \mathbf{u}(t) dt$$

donde  $\mathbf{u}(x)$  es un vector de funciones que deseas encontrar,  $\mathbf{f}(x)$  es un vector de funciones conocidas, y  $\mathbf{K}(x, t)$  es la matriz de funciones núcleo. Además, necesitaremos un vector con las aproximaciones iniciales de cada ecuación, que denotaremos como  $\mathbf{u}_0$ . Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 4.3.** Consideramos el siguiente sistema:

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

$$v(x) = 1 - x \sin x + x \cos x + \int_0^x tv(t)dt$$

donde tenemos los siguientes vectores:

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - x \sin x + x \cos x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(x, t) = \begin{pmatrix} x-t \\ t \end{pmatrix},$$

Además tenemos el vector de aproximaciones iniciales para ambas ecuaciones:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Por tanto la fórmula iterativa que vamos a utilizar para calcular las aproximaciones sucesivas es

$$\mathbf{u}_{n+1}(x) = \mathbf{f}(x) + \int_0^x \mathbf{K}(x, t) \mathbf{u}_n(t) dt, \quad n \geq 0.$$

Sustituyendo  $\mathbf{u}_0$  obtenemos:

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{f}(x) + \int_0^x \mathbf{K}(x, t) \mathbf{u}_0(t) dt = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}x^2 \\ 1 + \frac{1}{3}x^3 - x \sin x + x \cos x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{f}(x) + \int_0^x \mathbf{K}(x, t) \mathbf{u}_1(t) dt = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \\ 3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{15}x^3 - (2 + 3x - x^2) \sin x - (2 - 3x - x^2) \cos x \end{pmatrix}$$

Para  $n \geq 3$ , obtenemos:

$$\mathbf{u}_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}.$$

Luego la solución a nuestro sistema es

$$\mathbf{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}.$$



## 5. Equivalencia entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones de Volterra

A continuación veremos la equivalencia que existe entre ambos tipos de ecuaciones, más concretamente, veremos las ecuaciones diferenciales lineales como un caso particular de las ecuaciones de Volterra. Primero vamos a ver el caso escalar, y después lo haremos vectorialmente.

### 5.1. Escalar

Consideramos el PVI:

$$x \in \mathcal{C}^1(0, B) : \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in (0, B)$$

La solución del PVI es de la forma

$$x \in \mathcal{C}[0, B] : x = T(x)$$

donde definimos el operador lineal  $T$  como

$$T : \mathcal{C}[0, B] \longrightarrow \mathcal{C}[0, B]$$

$$x \longmapsto T(x) : [0, B] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(T(x))(t) = x_0 + \int_0^t (a(s)x(s) + b(s))ds$$

Por tanto, vemos que la solución del PVI es un caso particular de la ecuación integral lineal de Volterra de segunda clase:

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t, s)x(s)ds,$$

donde

$$f(t) = x_0 + \int_0^t b(s)ds, \quad K(t, s) = a(s), \quad \lambda = 1.$$

Para ver la equivalencia, aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo a la siguiente ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (a(s)x(s) + b(s))ds,$$

y obtenemos

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in (0, B).$$

## 5. Equivalencia entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones de Volterra

En definitiva, la solución del PVI inicial coincide con la solución de la ecuación de Volterra lineal de segunda clase.

### 5.2. Vectorial

En este caso, el PVI sería:

$$\begin{aligned} x &\in \mathcal{C}^1([0, B], \mathbb{R}^n) \\ x : [0, B] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} : \begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \\ x_1(0) = x_1, \dots, x_n(0) = x_n, \end{cases} \quad (5.1)$$

utilizando notación matricial para simplificar las fórmulas, nos quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

y el vector  $\mathbf{x}_0$  está formado por los valores iniciales de cada una de las ecuaciones.

La solución de este PVI viene dada por

$$\mathbf{x} \in \mathcal{C}([0, B], \mathbb{R}^n) : \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : (\mathcal{C}[0, B], \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, B], \mathbb{R}^n) \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{T}\mathbf{x} : [0, B] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{T}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}(s))ds, \end{aligned}$$

cuando hablamos de hacer una integral compuesta por matrices y vectores, la haremos elemento a elemento, es decir,

$$\int_0^t (\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}(s))ds = \int_0^t \mathbf{y}(s)ds = \begin{pmatrix} \int_0^t y_1(s)ds \\ \int_0^t y_2(s)ds \\ \dots \\ \int_0^t y_n(s)ds \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{y}(s) = (y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s))$ . Luego al igual que en el caso escalar, la solución del PVI es un caso particular de la ecuación de Volterra de segunda clase

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) + \int_0^t \mathbf{K}(t, s)\mathbf{x}(s)ds.$$

Ahora vemos la equivalencia aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo a cada uno de

los elementos de la matriz y de los vectores de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}(s))ds,$$

obteniendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

Es decir, tanto de forma escalar como vectorial, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 5.1.** *La solución del PVI (5.1) coincide con la solución de la ecuación integral lineal de Volterra de segunda clase dada por*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}(s))ds.$$





## 6. Aplicación: Calentamiento y enfriamiento de edificios

Como aplicación sobre lo estudiado anteriormente, vamos a formular un modelo matemático que describa la temperatura dentro de un edificio, como función de la temperatura exterior, el calor generado dentro del edificio y el calefactor o el aire acondicionado.

Un enfoque natural para modelar la temperatura dentro de un edificio es el uso del análisis por compartimentos.

### 6.1. Edificio como habitación única

Sea  $T(t)$  la temperatura dentro del edificio en el instante  $t$  y veamos al edificio como un único compartimento, es decir, sin estar dividido en varias habitaciones. Entonces la razón de cambio en la temperatura queda determinada por todos los factores que generan o disipan calor. Tomaremos en cuenta tres factores principales que afectan la temperatura dentro del edificio:

- En primer lugar está el calor generado por las personas, las luces y las máquinas dentro del edificio. Esto causa una razón de incremento en la temperatura que denotaremos por  $H(t)$ .
- En segundo lugar está el calentamiento (o enfriamiento) proporcionado por la calefacción (o el aire acondicionado). Esta razón de incremento (o decremento) en temperatura será representada por  $U(t)$ .
- El tercer factor es el efecto de la temperatura exterior  $M(t)$  sobre la temperatura dentro del edificio. La evidencia experimental ha mostrado que este factor se puede modelar mediante la **ley de enfriamiento de Newton**.

Esta ley establece que hay una razón de cambio de la temperatura  $T(t)$  que es proporcional a la diferencia entre la temperatura exterior  $M(t)$  y la temperatura interior  $T(t)$ . Es decir, la razón de cambio en temperatura del edificio debida a  $M(t)$  es

$$K[M(t) - T(t)].$$

La constante positiva  $K$  depende de las propiedades físicas del edificio, como la cantidad de puertas y ventanas o el tipo de aislamiento, pero  $K$  no depende de  $M$ ,  $T$  o  $t$ . Por lo tanto, cuando la temperatura exterior es mayor que la temperatura interior,  $M(t) - T(t) > 0$  y hay un incremento en la temperatura del edificio debido a  $M(t)$ .

Por otro lado, cuando la temperatura exterior es menor que la temperatura interior, entonces  $M(t) - T(t) < 0$  y la temperatura del edificio disminuye.

En general, la razón de calentamiento adicional  $H(t)$  y la razón de calefacción (o enfriamiento)  $U(t)$  quedan descritas en términos de energía por unidad de tiempo (como las unidades térmicas británicas por hora). Sin embargo, al multiplicar por la capacidad calórica del edificio

## 6. Aplicación: Calentamiento y enfriamiento de edificios

(en unidades de cambio de temperatura por unidad de energía calórica), podemos expresar las dos cantidades  $H(t)$  y  $U(t)$  en términos de temperatura por unidad de tiempo.

En definitiva, vemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + U(t),$$

cuando la razón de calentamiento adicional  $H(t)$  es siempre no negativa y  $U(t)$  es positiva para la calefacción y negativa para el aire acondicionado. Como la ecuación es lineal, la resolveremos fácilmente escribiéndola en la forma canónica

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t) + P(t)T(t) = Q(t),$$

donde

$$P(t) := K,$$

$$Q(t) := KM(t) + H(t) + U(t), \quad (6.1)$$

vemos que el factor integrante es

$$\mu(t) = \exp\left(\int K dt\right) = e^{Kt}.$$

Para resolver la ecuación, multiplicamos  $e^{Kt}$  e integramos:

$$e^{Kt} \frac{\partial T}{\partial t}(t) + Ke^{Kt}T(t) = e^{Kt}Q(t),$$

$$e^{Kt}T(t) = \int e^{Kt}Q(t)dt + C.$$

Al despejar  $T(t)$  se tiene

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-Kt} \int e^{Kt}Q(t)dt + Ce^{-Kt} \\ &= e^{-Kt} \left\{ \int e^{Kt}[KM(t) + H(t) + U(t)]dt + C \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

A continuación vamos a resolver unos ejercicios sobre calentamiento y enfriamiento de edificios en el que tenemos solamente una habitación. Vamos a ver primero un ejemplo sencillo en el que suponemos la temperatura exterior constante:

**Ejemplo 6.1.** Suponemos que al final del día (en el instante  $t_0$ ), cuando las personas salen del edificio, la temperatura exterior permanece constante e igual a  $M_0$ , la razón de calentamiento adicional  $H$  dentro del edificio se anula y la razón de uso del calefactor o el aire acondicionado  $U$  también se anula. Determinar  $T(t)$ , dada la condición inicial  $T(t_0) = T_0$ .

**Solución.** Con  $M = M_0$ ,  $H = 0$  y  $U = 0$ , la ecuación (6.2) se convierte en

$$T(t) = e^{-Kt} \left\{ \int e^{Kt}KM_0dt + C \right\} = e^{-Kt}[M_0e^{Kt} + C] = M_0 + Ce^{-Kt}.$$

Al hacer  $t = t_0$  y usar el valor inicial  $T_0$  de la temperatura, vemos que la constante  $C$  es  $(T_0 - M_0)e^{Kt_0}$ . Por lo tanto,

$$T(t) = M_0 + (T_0 - M_0)e^{-K(t-t_0)}.$$

Cuando  $M_0 < T_0$ , es decir, la temperatura exterior es menor que la interior, la solución de la ecuación decrece de manera exponencial a partir de la temperatura inicial  $T_0$  hasta la temperatura final  $M_0$ .

*Observación 6.1.* Para determinar el tiempo que tarda la temperatura en cambiar, consideramos la sencilla ecuación lineal  $dA/dt = -\alpha A$ , cuyas soluciones son de la forma  $A(t) = A(0)e^{-\alpha t}$ . Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la función  $A(t)$  decae en forma exponencial ( $\alpha > 0$ ) o crece de manera exponencial ( $\alpha < 0$ ). En cualquier caso, el tiempo que tarda  $A(t)$  en cambiar de  $A(0)$  a  $A(0)/e$  es justamente  $1/\alpha$ , ya que

$$A\left(\frac{1}{\alpha}\right) = A(0)e^{-\alpha(1/\alpha)} = \frac{A(0)}{e}.$$

La cantidad  $1/|\alpha|$ , que no depende de  $A(0)$ , es la **constante de tiempo**.

Volviendo al ejemplo 1, vemos que la temperatura  $T(t)$  satisface la ecuación

$$\frac{dT}{dt}(t) = -KT(t) + KM_0, \quad \frac{d(T - M_0)}{dt}(t) = -K[T(t) - M_0],$$

donde  $M_0$  es una constante, en cualquier caso, la constante de tiempo es justamente  $1/K$ , lo que representa el tiempo que tarda la diferencia de temperaturas  $T - M_0$  en cambiar de  $T - M_0$  a  $(T - M_0)/e$ . También diremos que  $1/K$  es la **constante de tiempo para el edificio** (sin calefacción o aire acondicionado). Un valor típico para la constante de tiempo de un edificio es de 2 a 4 horas, pero puede ser menor si las ventanas están abiertas o existe algún ventilador. También puede ser mayor si el edificio está aislado.

#### GRÁFICA + BREVE EXPLICACIÓN

**Ejemplo 6.2.** Determinar la temperatura del edificio  $T(t)$  si la razón de calentamiento adicional  $H(t)$  es igual a la constante  $H_0$ , no hay calentamiento ni enfriamiento ( $U(t) = 0$ ) y la temperatura exterior  $M$  varía como una onda senoidal en un periodo de 24 horas, con un mínimo en  $t = 0$  (medianoche) y un máximo en  $t = 12$  (mediodía). Es decir,

$$M(t) = M_0 - B \cos \omega t,$$

donde  $B$  es una constante positiva,  $M_0$  es la temperatura exterior promedio y  $\omega = 2\pi/24 = \pi/12$  radianes/hora. (Esto podría ocurrir durante la primavera o el otoño cuando no hay calefactor ni aire acondicionado).

**Solución.** La función  $Q(t)$  que vimos en (6.1) ahora es

$$Q(t) = K(M_0 - B \cos \omega t) + H_0.$$

Al hacer  $B_0 := M_0 + H_0/K$ , podemos escribir  $Q$  como

$$Q(t) = K(B_0 - B \cos \omega t),$$

donde  $KB_0$  representa el valor promedio diario de  $Q(t)$ , es decir,

$$KB_0 = \frac{1}{24} \int_0^{24} Q(t) dt.$$

Cuando la función de forzamiento  $Q(t)$  que hemos obtenido se sustituye en la expresión

## 6. Aplicación: Calentamiento y enfriamiento de edificios

para la temperatura en la ecuación (6.2), el resultado, después de integrar por partes, es

$$T(t) = e^{-Kt} \left[ \int e^{Kt} (KB_0 - KB \cos \omega t) dt + C \right]$$
$$T(t) = B_0 - BF(t) + Ce^{-Kt}, \quad (6.3)$$

donde

$$F(t) := \frac{\cos \omega t + (\omega/K) \sin \omega t}{1 + (\omega/K)^2}$$

Elegimos la constante  $C$  de modo que en medianoche ( $t = 0$ ), el valor de temperatura  $T$  sea igual a cierta temperatura inicial  $T_0$ . Así,

$$C = T_0 - B_0 + BF(0) = T_0 - B_0 + \frac{B}{1 + (\omega/K)^2}.$$

Observamos que el tercer término de la solución (6.3) que multiplica a la constante  $C$  tiende a cero exponencialmente. El término constante  $B_0$  es igual a  $M_0 + H_0/Ky$  representa la temperatura promedio diaria dentro del edificio (despreciando el término exponencial). Cuando no hay una razón de calentamiento adicional dentro del edificio ( $H_0 = 0$ ), esta temperatura promedio es igual a la temperatura exterior promedio  $M_0$ . El término  $BF(t)$  representa la variación senoidal de la temperatura dentro del edificio correspondiente a la variación de la temperatura en el exterior.

Como  $F(t)$  se puede escribir en la forma

$$F(t) = [1 + (\omega/K)^2]^{-1/2} \cos(\omega t - \phi),$$

donde  $\tan \phi = \omega/K$ , la variación senoidal dentro del edificio se retrasa con respecto de la variación en el exterior por  $\phi/\omega$

horas. Además, la magnitud de la variación dentro del edificio es ligeramente menor, por un factor de  $[1 + (\omega/K)^2]^{-1/2}$ , que la variación en el exterior. La frecuencia angular de variación  $\omega$  es  $2\pi/24$  radianes/hora (aproximadamente  $1/4$ ). Los valores usuales para la razón adimensional  $\omega/K$  están entre  $1/2$  y  $1$ . Para este rango, el retraso entre la temperatura interior y la exterior es aproximadamente de 1.8 a 3 horas y la magnitud de la variación interior está entre 89 y 71 % de la variación en el exterior. En la [Figura 6.1](#) podemos ver la variación senoidal de 24 horas de la temperatura exterior para un día moderado típico así como las variaciones de temperatura dentro del edificio para una razón adimensional  $\omega/K$  de la unidad, que corresponde a una constante de tiempo  $1/K$  de aproximadamente 4 horas. Al trazar esta última curva, hemos supuesto que el término exponencial ha desaparecido.

### 6.2. Ejemplo con dos habitaciones

Ahora consideremos el mismo problema con dos zonas, de modo que el calor se transfiere de una a otra en función de la diferencia de temperatura. Suponemos además que alguna de las zonas posee una fuente de calor (o de enfriamiento) que hará que ésta se caliente (o enfríe) en función de su capacidad calorífica. La variación de temperatura en cada zona será la suma del calor (o frío) generado por dicha fuente, si existe en esa zona, y la pérdida o ganancia de calor generada por el contacto con otras zonas o con el exterior. Para calcular las ecuaciones aplicaremos la *ley de Newton del enfriamiento* vista anteriormente.

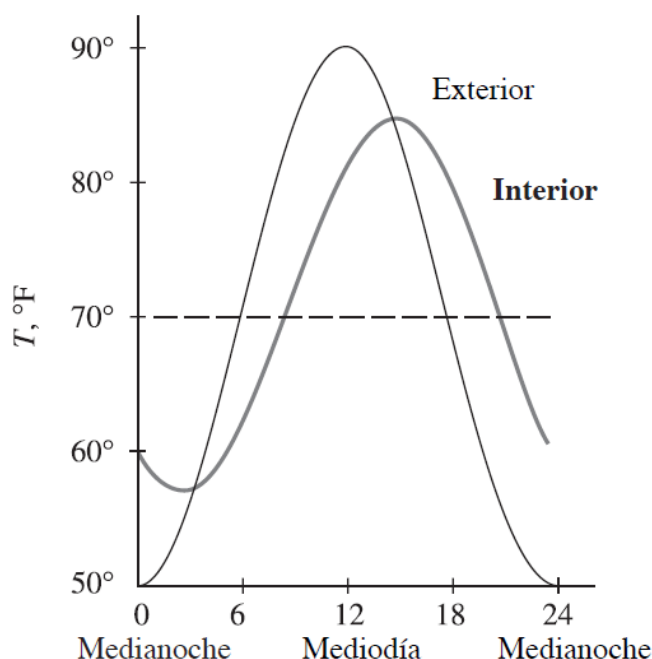


Figura 6.1.: Variación de la temperatura dentro y fuera de un edificio sin calefacción

**Ejemplo 6.3.** Un estudio consta de dos zonas: la zona A de la planta alta y la zona B de la planta baja como podemos ver en la **Figura 6.2**. La planta baja, que tiene una capacidad calorífica de  $(1/5)^{\circ}\text{C}/1000 \text{ btu}$  (btu: unidades térmicas británicas), es calentada por un calefactor que genera  $90000 \text{ btu}$  por hora. Las constantes de tiempo de transferencia de calor son: 3 horas entre la planta baja y el exterior,  $1/2$  hora entre la planta alta y el exterior y  $1/2$  hora entre las dos plantas. Si la temperatura en el exterior permanece constante a  $2^{\circ}\text{C}$  e inicialmente ambas zonas estaban a  $22^{\circ}\text{C}$ , calculemos la temperatura en la planta baja al cabo de 1 hora.

**Solución.** En este caso, tenemos tres regiones, la zona A, la zona B y el exterior, luego tendremos que tener en cuenta la transferencia de calor entre las tres.

Sea  $x(t)$  la temperatura en la zona A en un instante  $t$  y sea  $y(t)$  la temperatura en la zona B en un instante  $t$ .

La zona B recibe el calor generado por el calefactor a razón de  $90000 \text{ btu}/h$ , puesto que su capacidad calorífica es de  $(1/5)^{\circ}\text{C}/1000 \text{ btu}$ , tendremos que la temperatura que gana B es:

$$90000 \text{ btu}/h \times (1/5)^{\circ}\text{C}/1000 \text{ btu} = 18^{\circ}\text{C}/h.$$

La variación de temperatura en las zonas A y B vendrá dada por:

$$\frac{dx}{dt} = 2(2 - x) + 2(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}(2 - y) + 2(x - y) + 18.$$

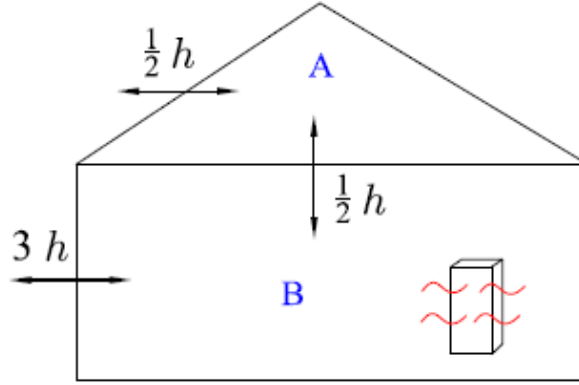


Figura 6.2.: Calentamiento de edificio compuesto por dos zonas.

Por tanto, tenemos el sistema no homogéneo:

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y - 4$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - \frac{7}{3}y + \frac{56}{3}$$

Resolvamos el sistema. La ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} -4-r & 2 \\ 2 & -\frac{7}{3}-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3r^2 + 19r + 16 = 0,$$

cuyas raíces son los valores propios:  $r_1 = -1$  y  $r_2 = -\frac{16}{3}$ . Calculemos los vectores propios asociados a cada valor:

$$H_{-1} = \{(x, y) : \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x, y) : -3x + 2y = 0\},$$

$$H_{-16/3} = \{(x, y) : \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 2 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x, y) : 2x + 3y = 0\},$$

Por tanto, un vector propio asociado a  $r_1 = -1$  es  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  y un vector propio asociado a  $r_2 = -\frac{16}{3}$  es  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  y la solución de la parte homogénea resulta:

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-16t/3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos una solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Puesto que el término no homogéneo es un polinomio de grado 0 y además 0 no es raíz de la ecuación característica, podemos tomar la solución particular de la forma:

$$\vec{x}_p = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{56}{3} \end{pmatrix}$$

pasando el término independiente al otro lado de la igualdad,

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{56}{3} \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos:  $a_1 = 35/4$  y  $a_2 = 31/2$ . La solución general es:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-16t/3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35/4 \\ 31/2 \end{pmatrix}$$

Considerando las condiciones iniciales: para  $t = 0$ ,  $x(0) = 22$  y  $y(0) = 22$ , se tiene:

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35/4 \\ 31/2 \end{pmatrix}$$

Agrupando los términos independientes y reescribiendo los sumandos multiplicados por las constantes  $C_1$  y  $C_2$  en términos de la matriz fundamental, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53/4 \\ 13/2 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema obtenemos:

$$C_1 = 46/13 \quad y \quad C_2 = 107/52.$$

La solución a este problema de valor inicial es:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{46}{13} e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{107}{52} e^{-16t/3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35/4 \\ 31/2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la temperatura en B era  $y(t)$ , ésta al cabo de 1h será:

$$y(1) = \frac{46}{13} e^{-1} 3 + \frac{107}{52} e^{-16/3} (-2) + \frac{31}{2} \approx 19,405^\circ\text{C}.$$

#### **COSAS PARA HACER:**

- meter el `displaystyle` en las integrales para que se vean mas grandes - poner el ejemplo del sistema en la equivalencia, resolverlo mediante aprox. sucesivas, maxima y compararlas con

#### 6. *Aplicación: Calentamiento y enfriamiento de edificios*

graficas, además cambiar el número de iteraciones para ver la diferencia - En el modelo, mirar el TFM tranquilamente y añadir un ejemplo con 4-5 habitaciones o los dos mejor, y resolverlo al igual que en la equivalencia?¿ - Cambiar las graficas de la aplicacion y comentarlas.



## A. Primer apéndice

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/apendice01.tex`



## Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$  Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$  Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$  Conjunto de números enteros.



## **Bibliografía**

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.