Курс: Функциональное программирование
Практика 3. Просто типизированное λ-исчисление.

Разминка

► Придумайте контексты Γ_i, в которых верны утверждения типизации

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &\vdash x : \alpha \\
\Gamma_2 &\vdash x\,y : \alpha \\
\Gamma_3 &\vdash x\,y : \alpha \to \beta \\
\Gamma_4 &\vdash \lambda x.\, y : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma_5 &\vdash \lambda x.\, y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \\
\Gamma_6 &\vdash \lambda x.\, x : (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma_7 &\vdash \lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha
\end{aligned}
$$

► Перепишите полученные утверждения типизации в стиле Чёрча.

Вывод типа

Определите тип канонических комбинаторов
► $\mathbf{C} = \lambda f\,x\,y.\, f\,y\,x$
► $\mathbf{S} = \lambda f\,g\,x.\, f\,x\,(g\,x)$
Постройте для одного из них дерево вывода типа.

Определите тип комбинаторов
► $\lambda x\,y.\, x\,(y\,x\,x)$
► $\lambda x\,y.\, x\,y\,x$

Обитаемость типа

Найдите замкнутые термы в нормальной форме, являющиеся обитателями типа
► $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$
► $\alpha \to \beta \to \gamma \to \beta$
► $\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$
► $\alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha$
Сколько разных с точностью до α-эквивалентности нормализованных термов каждого типа вы можете привести?

Стандартные типы

▶ Какой общий тип можно приписать булевым значениям

$$\begin{array}{lcl} \texttt{tru} & \equiv & \lambda\, t\, f.\, t \\ \texttt{fls} & \equiv & \lambda\, t\, f.\, f \end{array}$$

Можно ли это сделать другими способами?

▶ Типизируйте комбинаторы `if`, `not` (обе версии) и `and`.

$$\begin{array}{lcl} \texttt{if} & \equiv & \lambda\, b\, x\, y.\, b\, x\, y \\ \texttt{not} & \equiv & \lambda\, b\, t\, f.\, b\, f\, t \\ \texttt{not}' & \equiv & \lambda\, b.\, b\ \texttt{fls}\ \texttt{tru} \\ \texttt{and} & \equiv & \lambda\, x\, y.\, x\, y\ \texttt{fls} \end{array}$$

▶ Какой общий тип можно приписать числам Чёрча

$$\begin{array}{lcl} \overline{0} & \equiv & \lambda\, s\, z.\, z \\ \overline{1} & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, z \\ \overline{2} & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, (s\, z) \\ \overline{3} & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, (s\, (s\, z)) \\ \overline{4} & \equiv & \lambda\, s\, z.\, s\, (s\, (s\, (s\, z))) \\ & \ldots & \end{array}$$

▶ Типизируйте комбинаторы `suc` (обе версии) и `iszero` (обе версии).

$$\begin{array}{lcl} \texttt{succ} & \equiv & \lambda\, n\, s\, z.\, s\, (n\, s\, z) \\ \texttt{succ2} & \equiv & \lambda\, n\, s\, z.\, n\, s\, (s\, z) \\ \texttt{iszro} & \equiv & \lambda\, n.\, n\ (\lambda\, x.\, \texttt{fls})\ \texttt{tru} \\ \texttt{iszro2} & \equiv & \lambda\, n\, t\, f.\, n\, (\lambda x.\, f)\, t \end{array}$$

▶ Какой тип можно приписать спискам

$$\begin{array}{l} [\,] \equiv \texttt{nil} \ \equiv\ \lambda c\, n.\, n \\ [2] \ \equiv\ \texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil} \ \equiv\ \lambda c\, n.\, c\ 2\ n \\ [3,2] \ \equiv\ \texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil}) \ \equiv\ \lambda c\, n.\, c\ 3\ (c\ 2\ n) \\ [5,3,2] \ \equiv\ \texttt{cons}\ 5\ (\texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil})) \ \equiv\ \lambda c\, n.\, c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n)) \end{array}$$

Тип для комбинатора неподвижной точки

На лекции упоминалось, что комбинатор неподвижной точки $\mathbf{Y}$ нетипизируем, поскольку содержит самоприменение как подтерм.

Пусть мы решили расширить λ-исчисление «внешним» комбинатором неподвижной точки $\mathtt{fix}$ с рекурсивным вычислительным правилом

$$\mathtt{fix}\ f \ \rightsquigarrow_{\mathtt{fix}}\ f\,(\mathtt{fix}\ f)$$

► Какой тип можно было бы ему приписать непротиворечивым образом?
► Найдите типы $\mathtt{fac}$, $\mathtt{fac}'$ и $\mathtt{fix}$ в определении факториала в этом расширенном исчислении

$$\mathtt{fac} = \mathtt{fix}\ \mathtt{fac}'$$

$$\mathtt{fac}' = \lambda f\, n.\, \mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ n)\ 1\ (\mathtt{mult}\ n\,(f\,(\mathtt{pred}\ n)))$$

Напомним, что $\mathtt{fac}'$ возникает из сведения рекурсивного уравнения для терма $\mathtt{fac}$ к задаче поиска неподвижной точки

$$\mathtt{fac} = \lambda n.\, \mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ n)\ 1\ (\mathtt{mult}\ n\,(\mathtt{fac}\,(\mathtt{pred}\ n)))$$

$$\mathtt{fac} = \underbrace{(\lambda f\, n.\, \mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ n)\ 1\ (\mathtt{mult}\ n\,(f\,(\mathtt{pred}\ n))))}_{\mathtt{fac}'}\ \mathtt{fac}$$

Совет: используйте сокращение $\mathtt{Nat}$ для типа чисел Черча.

Экспансия субъекта
Операция, обратная β-редукции называется β-*экспансией* (расширением). Множество типизируемых в $\lambda_\to$ термов не замкнуто относительно экспансии:
$$M \twoheadrightarrow_\beta N \;\wedge\; \Gamma \vdash N : A \;\not\Rightarrow\; \Gamma \vdash M : A.$$
Действительно, хотя $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$:
$$\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \;\rightsquigarrow_\beta\; (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega} \;\rightsquigarrow_\beta\; \mathbf{I}$$
и $\vdash \mathbf{I} : \sigma \to \sigma$, но $\nvdash \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} : \sigma \to \sigma$, поскольку последнее содержит нетипизируемый подтерм $\boldsymbol{\Omega}$.

Для $\lambda_\to$ а ля Чёрч экспансия не сохраняет тип только из-за возможного наличия нетипизируемого подтерма. Для $\lambda_\to$ а ля Карри верно более сильное отрицание:
$$M \twoheadrightarrow_\beta N \;\wedge\; \Gamma \vdash M : B \;\wedge\; \Gamma \vdash N : A \;\not\Rightarrow\; \Gamma \vdash M : A.$$

Покажем это на примере. Возьмём $M \equiv \mathbf{S}\,\mathbf{K}$ и $N \equiv \mathbf{K}_*$.
$$\begin{array}{rl} \mathbf{S} \equiv \lambda f\,g\,z.\,f\,z\,(g\,z) & \vdash \mathbf{S} : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho \\ \mathbf{K} \equiv \lambda x\,y.\,x & \vdash \mathbf{K} : \sigma \to \tau \to \sigma \\ & \vdash \mathbf{S}\,\mathbf{K} : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \sigma \\ \mathbf{K}_* \equiv \lambda x\,y.\,y & \vdash \mathbf{K}_* : \tau \to \sigma \to \sigma \end{array}$$
$$\begin{array}{rl} \mathbf{S}\,\mathbf{K} \;\rightsquigarrow_\beta & \lambda g\,z.\,\mathbf{K}\,z\,(g\,z) \;\equiv\; \lambda g\,z.\,(\lambda x\,y.\,x)\,z\,(g\,z) \;\rightsquigarrow_\beta \\ & \lambda g\,z.\,(\lambda y.\,z)\,(g\,z) \rightsquigarrow_\beta \lambda g\,z.\,z \;\equiv_\alpha\; \mathbf{K}_* \end{array}$$
В красной редукции потерялась информация о типе g, как о стрелочном. Действительно, пусть $(g\,z)$ имеет тип τ, а $z : \sigma$, тогда $g : \sigma \to \tau$.

Для $\lambda_\to$ в стиле Чёрча информация не теряется:
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S}_{\sigma\tau\rho} & \equiv & \lambda f^{\sigma\to\tau\to\rho}\,g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,f\,z\,(g\,z) \\ \mathbf{K}_{\sigma\tau} & \equiv & \lambda x^{\sigma}\,y^{\tau}.\,x \\ \mathbf{S}_{\sigma\tau\sigma}\,\mathbf{K}_{\sigma\tau} & \rightsquigarrow_\beta & \lambda g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,\mathbf{K}_{\sigma\tau}\,z\,(g\,z) \;\rightsquigarrow_\beta \\ & & \lambda g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,(\lambda y^{\tau}.\,z)\,(g\,z) \;\rightsquigarrow_\beta\; \lambda g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,z \;\equiv\; \mathbf{K}_{*(\sigma\to\tau)\sigma} \end{array}$$

Домашнее задание

Если не указано иное, в задачах подразумевается простая система типов в стиле Карри.

1. (1 балл) Аннотируйте по Черчу следующие утверждения о типизации в стиле Карри[1]

▶ $\vdash \lambda f\, g\, x.\, \mathbf{I}\,(f\,(\mathbf{I}\, g\, x)) : (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$

▶ $\vdash (\lambda i\, f\, g\, x.\, i\,(f\,(i\, g\, x)))\, \mathbf{I} : (\beta \to \alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \alpha \to \beta$

Не забудьте, что комбинатор **I** тоже представляет собой лямбда-абстракцию и, следовательно, нуждается в аннотации типа.

2. (2 балла) Типизируйте по Чёрчу

▶ $\mathbf{S\,K\,K}$

▶ $\mathbf{S\,K\,I}$

(Обратите внимание, что в задании **нет** указания редуцировать терм.)

3. (1 балл) Определите тип комбинатора

▶ $\lambda f\, g\, y.\, f\, y\, (\lambda x.\, g\, x\, y)$

4. (1 балл) Найдите замкнутые термы в нормальной форме, являющиеся обитателями типа

▶ $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\delta \to \beta) \to \delta \to \gamma$

▶ $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to (\alpha \to \beta) \to \delta \to \beta$ (2 штуки)

5. (2 балла) Найдите замкнутый, находящийся в нормальной форме терм типа

▶ $(\gamma \to \epsilon) \to ((\gamma \to \epsilon) \to \epsilon) \to \epsilon$

которому нельзя было бы приписать тип $\alpha \to (\alpha \to \epsilon) \to \epsilon$.

6. (3 балла) Найдите замкнутый, находящийся в нормальной форме терм типа

▶ $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha$

▶ $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \beta$

---

[1] Отметим, что первый терм получается из второго одношаговой β-редукцией. Это еще один пример несохранения типа при β-экспансии: тип первого нельзя приписать второму.