Функциональное программирование Лекция 3. Просто типизированное лямбда-исчисление

Денис Николаевич Москвин

СПбГУ, факультет МКН,
бакалавриат «Современное программирование», 2 курс

18.09.2025

План лекции

1. Понятие типа
2. Просто типизированное λ-исчисление
3. Формализм систем $\lambda_{\to}$
4. Свойства $\lambda_{\to}$

План лекции

1. Понятие типа
2. Просто типизированное λ-исчисление
3. Формализм систем $\lambda_{\rightarrow}$
4. Свойства $\lambda_{\rightarrow}$

Что такое типы?

Система типов — это гибко управляемый синтаксический метод доказательства отсутствия в программе определенных видов поведения при помощи классификации выражений языка по разновидностям вычисляемых ими значений.

Бенджамин Пирс

- В λ-исчислении:
  - выражения — λ-термы;
  - вычисление — их редукция;
  - значения — (WH)NF.
- Типы — *синтаксические* конструкции, приписываемые термам по определённым правилам:

$$M : A$$

Для чего нужны типы?

- Типы дают частичную спецификацию

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad g : (\forall\, n : \mathbb{N}.\, \exists m : \mathbb{N}.\, m \leqslant n)$$

- Правильно типизированные программы не могут «сломаться» (Робин Милнер, 1978)
- Типизированные программы всегда завершаются. (это не всегда так :)
- Проверка типов отлавливает простые ошибки.

Стрелочный тип в функциональных языках

- В большинстве систем типизации тождественной функции $\mathbf{I} \equiv \lambda x.\, x$ может быть приписан тип $\alpha \to \alpha$

$$\mathbf{I} : \alpha \to \alpha$$

- В общем случае $\alpha \to \beta$ является типом функции из α в β.
- Если имеется y типа α, являющийся аргументом функции $\mathbf{I}$, то выражение $\mathbf{I}\, y$ тоже имеет тип α.
- Гипотезы о типе переменных записывают в контексте

$$y{:}\alpha \vdash (\mathbf{I}\, y) : \alpha$$

Примеры (на некотором условном языке)

$$\mathtt{sin} : \mathtt{Double} \to \mathtt{Double}$$

$$\mathtt{length} : \mathtt{Array} \to \mathtt{Int}$$

Системы Карри и Чёрча

В λ-исчислении с типами выделяют два семейства систем типов.

Системы в стиле Карри

Термы те же, что и в бестиповой теории. Каждый терм обладает множеством различных типов (обычно их бесконечно много).

Системы в стиле Чёрча

Термы — аннотированные версии бестиповых термов. Каждый терм имеет тип (обычно уникальный), выводимый из способа, которым терм аннотирован.

Два взгляда на системы типов

Подход программиста

Термы интерпретируются как программы, а типы — как их частичные спецификации.

- Системы в стиле Карри: неявная типизация (например, Haskell, Ocaml).
- Системы в стиле Чёрча: явная типизация (большинство типизированных языков).

Логический подход

Типы интерпретируются как высказывания, а термы — как их доказательства.

Связь между «вычислительными» и логическими системами называют ***соответствием Карри-Говарда***.

План лекции

Просто типизированное λ-исчисление

Самая простая система — это ***просто типизированное λ-исчисление*** ($\lambda_{\rightarrow}$ или Simple Type Theory (STT)).

Определение

Множество типов $\mathbb{T}$ системы $\lambda_{\rightarrow}$ определяется индуктивно:

$$\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{T} \qquad \text{(переменные типа)}$$

$$A, B \in \mathbb{T} \Rightarrow (A \rightarrow B) \in \mathbb{T} \qquad \text{(типы пространства функций)}$$

- В абстрактном синтаксисе:

$$\mathbb{T} \;::=\; \mathbb{V} \mid (\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T})$$

  Здесь $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных.
- Соглашение: α, β, γ используем для типовых переменных, а A, B, C — для произвольных типов.

Соглашения и примеры

Стрелка *правоассоциативна*: если $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{T}$, то

$$A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{n-1} \to A_n \equiv$$
$$(A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_{n-1} \to A_n) \ldots))$$

$$(\alpha \to \beta) \equiv \alpha \to \beta$$
$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \equiv \alpha \to \beta \to \gamma$$
$$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \equiv (\alpha \to \beta) \to \gamma$$

$$((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \equiv$$
$$(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$$

$$((\alpha \to \beta) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta)) \equiv$$
$$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta$$

Всякий тип в $\lambda_\to$ может быть записан в виде

$$A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to \alpha$$

Как приписать тип терму? (переменные и аппликация)

- Если терм ***переменная*** — как угодно:

$$\begin{array}{l} x : \alpha \\ y : \alpha \to \beta \\ w : (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta \end{array}$$

- Если терм ***аппликация*** $M\,N$, то
  - M должно быть функцией, то есть иметь стрелочный тип $M : A \to B$;
  - N должно быть подходящим аргументом, то есть иметь тип $N : A$;
  - вся аппликация при этом получит тип результата функции: $M\,N : B$.

$$\begin{array}{lcl} x^{\alpha}, y^{\alpha\to\beta} & \vdash & y\,x : \beta \\ x^{\alpha}, y^{\alpha\to\beta}, z^{\beta\to\gamma} & \vdash & z\,(y\,x) : \gamma \end{array}$$

А какие должны иметь типы x и y, чтобы $x\,(y\,x) : \gamma$?

Как приписать тип терму? (абстракция)

- Если терм ***абстракция*** $\lambda x.\, M$, то
  - его тип должен быть стрелочным $\lambda x.\, M : A \to B$;
  - тип аргумента x должен быть A;
  - тип тела абстракции M должен быть B.
- Например, для $x : \alpha$ имеем $\lambda x.\, x : \alpha \to \alpha$
- Но писать $x^{\alpha} \ \vdash\ \lambda x.\, x : \alpha \to \alpha$ — плохая идея! Контекст глобален, а переменная x локальна, и ее имя может использоваться многократно в разных областях видимости.
- Можно ли как-то указать, что переменная x имеет тип α?
  - Если не указать, то допустимо и $\lambda x.\, x : \beta \to \beta$ и даже $\lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$ — стиль Карри.
  - Если указать $\lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha$, то тип терма определяется однозначно — стиль Чёрча.
- Типизируйте по Чёрчу: $\lambda x^{?}.\, \lambda y^{?}.\, x\,(y\,x) : ?$

Согласованность договоренностей об ассоциативности

Правила ассоциативности для типовой стрелки (вправо) и аппликации (влево) хорошо согласованы друг с другом

$$
\begin{array}{lcl}
f^{\alpha\to(\beta\to(\gamma\to\delta))}, a^{\alpha} & \vdash & f\,a : \beta \to (\gamma \to \delta) \\
f^{\alpha\to(\beta\to(\gamma\to\delta))}, a^{\alpha}, b^{\beta} & \vdash & (f\,a)\,b : \gamma \to \delta \\
f^{\alpha\to(\beta\to(\gamma\to\delta))}, a^{\alpha}, b^{\beta}, c^{\gamma} & \vdash & ((f\,a)\,b)\,c : \delta
\end{array}
$$

Все зелёные скобки необязательны и почти всегда опускаются. Ассоциативности абстракции и стрелки тоже согласованы

$$
\begin{array}{lcl}
f^{\alpha\to\beta\to\gamma\to\delta}, b^{\beta}, c^{\gamma} & \vdash & \lambda a^{\alpha}.\, f\,a\,b\,c : \alpha \to \delta \\
f^{\alpha\to\beta\to\gamma\to\delta}, c^{\gamma} & \vdash & \lambda b^{\beta}.\, (\lambda a^{\alpha}.\, f\,a\,b\,c) : \beta \to (\alpha \to \delta) \\
f^{\alpha\to\beta\to\gamma\to\delta} & \vdash & \lambda c^{\gamma}.\, (\lambda b^{\beta}.\, (\lambda a^{\alpha}.\, f\,a\,b\,c)) : \\
 & & \qquad \gamma \to (\beta \to (\alpha \to \delta))
\end{array}
$$

План лекции

Предтермы системы $\lambda_{\rightarrow}$ а ля Карри

Определение

Множество ***предтермов*** (или ***псевдотермов***) Λ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda \\ M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda \\ M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\, M) \in \Lambda \end{array}$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda \quad ::= \quad V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\, \Lambda)$$

- Предтермы системы в стиле Карри — это в точности термы бестипового λ-исчисления.

Предермы системы $\lambda_{\rightarrow}$ а ля Чёрч

Определение

Множество ***предтермов*** $\Lambda_{\mathbb{T}}$ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и аннотированной типами абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M, N \in \Lambda_{\mathbb{T}} & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \\ M \in \Lambda_{\mathbb{T}}, x \in V, A \in \mathbb{T} & \Rightarrow & (\lambda x^{A}.\,M) \in \Lambda_{\mathbb{T}} \end{array}$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda_{\mathbb{T}} \quad ::= \quad V \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\,\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V^{\mathbb{T}}.\,\Lambda_{\mathbb{T}})$$

- Все соглашения о скобках и ассоциативности те же, что и в системе Λ.

Примеры предтермов

Система $\lambda_\to$ а ля Карри:

$$\lambda x\, y.\, x$$
$$\lambda f\, g\, x.\, f\,(g\, x)$$
$$\lambda x.\, x\, x$$

Система $\lambda_\to$ а ля Чёрч:

$$\lambda x^\alpha\, y^\beta.\, x$$
$$\lambda x^\alpha\, y^\alpha.\, x$$

$$\lambda f^\alpha\, g^\beta\, x^\gamma.\, f\,(g\, x)$$
$$\lambda f^{\beta\to\gamma}\, g^{\alpha\to\beta}\, x^\alpha.\, f\,(g\, x)$$

$$\lambda x^\alpha.\, x\, x$$

Красные предтермы так и останутся в этом статусе.

Утверждение о типизации

Определение

Утверждение типизации в $\lambda_{\to}$ «а ля Карри» имеет вид

$$M : A$$

где $M \in \Lambda$ и $A \in \mathbb{T}$. Тип A иногда называют ***предикатом***, а терм M — ***субъектом*** утверждения.

Для $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч» надо лишь заменить Λ на $\Lambda_{\mathbb{T}}$.

Примеры утверждений типизации

Система в стиле Карри	Система в стиле Чёрча
$\lambda x.\, x : \alpha \to \alpha$	$\lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha$
$\lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$\lambda x^{\alpha \to \beta}.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$
$\lambda x y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$	$\lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$

Объявления

Определение

Объявление — это утверждение типизации с термовой переменной в качестве субъекта.

$$\begin{aligned} &x : \alpha \\ &y : \beta \\ &f : \alpha \to \beta \\ &g : (\alpha \to \beta) \to \gamma \end{aligned}$$

Или, в «степенном» синтаксисе

$$\begin{aligned} &x^{\alpha} \\ &y^{\beta} \\ &f^{\alpha \to \beta} \\ &g^{(\alpha \to \beta) \to \gamma} \end{aligned}$$

Контексты

Определение

Контекст — это множество объявлений с *различными* переменными в качестве субъекта

$$\Gamma = \{x_1^{A_1}, x_2^{A_2}, \ldots, x_n^{A_n}\}$$

Контекст иногда называют *базисом* или *окружением*.

- Фигурные скобки множества обычно опускают

$$\Gamma = x^{\alpha}, f^{\alpha\to\beta}, g^{(\alpha\to\beta)\to\gamma}$$

- Контексты можно ***расширять***, добавляя объявление *свежей* переменной

$$\Delta = \Gamma, y^{\beta} \equiv x^{\alpha}, f^{\alpha\to\beta}, g^{(\alpha\to\beta)\to\gamma}, y^{\beta}$$

- Контекст можно рассматривать как (частичную) функцию из множества переменных V в множество типов $\mathbb{T}$.

Правила типизации $\lambda_{\to}$ «а ля Карри»

Утверждение $M : C$ называется ***выводимым*** в контексте Γ, обозначение

$$\Gamma \vdash M : C$$

если его вывод может быть произведен по правилам:

(аксиома) $\quad \Gamma \vdash x : A$, если $x^A \in \Gamma$

$$(\to E) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\,N : B}$$

$$(\to I) \qquad \frac{\Gamma, x^A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\, M : A \to B}$$

Если для предтерма M существуют Γ и C, такие что $\Gamma \vdash M : C$, то его называют ***(допустимым) термом***.

Типизация $\lambda_{\rightarrow}$ «а ля Карри»: пример

(аксиома) $\quad \Gamma \vdash x : A$, если $x^A \in \Gamma$

$$(\rightarrow E) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\,N : B}$$

$$(\rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma, x^A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\, M : A \rightarrow B}$$

$$\cfrac{\cfrac{x^\alpha, y^\beta \vdash x : \alpha}{x^\alpha \vdash \lambda y.\, x : \beta \rightarrow \alpha}\,(\rightarrow I)}{\vdash \lambda x\, y.\, x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha}\,(\rightarrow I)$$

Для любых $A, B \in \mathbb{T}$ верно $\vdash \lambda x\, y.\, x : A \rightarrow B \rightarrow A$.

Пример дерева вывода для $\mathbf{B}$ в $\lambda_{\to}$ «а ля Карри»

Введем сокращение $\Gamma \equiv f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha}$ для повторяющегося контекста.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \Gamma \vdash f : \beta \to \gamma
        \qquad
        \dfrac{\Gamma \vdash g : \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash x : \alpha}{\Gamma \vdash g\,x : \beta}\,(\to E)
      }{
        f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash f\,(g\,x) : \gamma
      }\,(\to E)
    }{
      f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta} \vdash \lambda x.\, f\,(g\,x) : \alpha \to \gamma
    }\,(\to I)
  }{
    f^{\beta\to\gamma} \vdash \lambda g\,x.\, f\,(g\,x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma
  }\,(\to I)
}{
  \vdash \lambda f\,g\,x.\, f\,(g\,x) : (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma
}\,(\to I)
$$

Типизация $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч» в виде деревьев вывода

(аксиома) $\quad \Gamma \vdash x : A$, если $x^A \in \Gamma$

$(\to E) \quad \dfrac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\,N : B}$

$(\to I) \quad \dfrac{\Gamma, x^A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x^{A}.\,M : A \to B}$

$$\dfrac{\dfrac{x^{\alpha}, y^{\beta} \vdash x : \alpha}{x^{\alpha} \vdash \lambda y^{\beta}.\,x : \beta \to \alpha}\,(\to I)}{\vdash \lambda x^{\alpha}\,y^{\beta}.\,x : \alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to I)$$

Для **каждой** пары $A, B \in \mathbb{T}$ верно $\vdash \lambda x^A\,y^B.\,x : A \to B \to A$.

Пример дерева вывода для $\mathbf{B}$ в $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч»

Введем сокращение $\Gamma \equiv f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha}$ для повторяющегося контекста.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \beta \to \gamma \qquad \dfrac{\Gamma \vdash g : \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash x : \alpha}{\Gamma \vdash g\,x : \beta}\,(\to E)}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash f\,(g\,x) : \gamma}\,(\to E)}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta} \vdash \lambda x^{\alpha}.\, f\,(g\,x) : \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{f^{\beta\to\gamma} \vdash \lambda g^{\alpha\to\beta}\, x^{\alpha}.\, f\,(g\,x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{\vdash \lambda f^{\beta\to\gamma}\, g^{\alpha\to\beta}\, x^{\alpha}.\, f\,(g\,x) : (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)$$

План лекции

Технические леммы

Лемма об инверсии (лемма генерации)

- $\Gamma \vdash x : A \;\Rightarrow\; x^A \in \Gamma.$
- $\Gamma \vdash M\,N : B \;\Rightarrow\; \exists A\; [\Gamma \vdash M : A \to B \;\wedge\; \Gamma \vdash N : A].$
- $\Gamma \vdash \lambda x.\, M : C \;\Rightarrow\; \exists A, B\; \left[\Gamma, x^A \vdash M : B \;\wedge\; C \equiv A \to B\right].$
  ($\lambda_\to$ а ля Карри)
- $\Gamma \vdash \lambda x^A.\, M : C \;\Rightarrow\; \exists B\; \left[\Gamma, x^A \vdash M : B \;\wedge\; C \equiv A \to B\right].$
  ($\lambda_\to$ а ля Чёрч)

Лемма о типизируемости подтерма

Пусть M' — подтерм M. Тогда $\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; \Gamma' \vdash M' : A'$ для некоторых Γ' и A'.

То есть, если терм имеет тип, то каждый его подтерм тоже имеет тип.

Леммы о контекстах

Какой контекст требуется, чтобы произвести присваивание типов?

Лемма «разбавления» (Thinning)

Пусть Γ и Δ — контексты, причём $\Delta \supseteq \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; \Delta \vdash M : A$. *Расширение контекста не влияет на выводимость утверждения типизации.*

Лемма о свободных переменных

$\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; FV(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$. *Свободные переменные типизированного терма должны присутствовать в контексте.*

Лемма сужения

$\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; \Gamma \restriction FV(M) \vdash M : A$. *Сужение контекста до множества свободных переменных терма не влияет на выводимость утверждения типизации.*

Свойства $\lambda_{\to}$: нетипизируемые предтермы

- Рассмотрим предтерм $x\,x$. Предположим, что это терм.
- Тогда имеются Γ и B, такие что

$$\Gamma \vdash x\,x : B$$

- По лемме об инверсии существует такой A, что правый подтерм $x : A$, а левый подтерм (тоже x) имеет тип $A \to B$.
- По лемме о контекстах $x \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ и должен иметь там *единственное* связывание по определению контекста. То есть $A \equiv A \to B$ — тип является подвыражением себя, чего не может быть, поскольку (*и пока*) типы конечны.

По лемме о типизируемости подтерма предтермы $\boldsymbol{\omega} = \lambda x.\, x\,x$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{Y} = \lambda f\,.\,(\lambda x\,.\,f(x\,x))(\lambda x\,.\,f(x\,x))$ не имеют типа

$$x^A \nvdash x\,x : B, \quad \nvdash \boldsymbol{\omega} : A, \quad \nvdash \boldsymbol{\Omega} : A, \quad \nvdash \mathbf{Y} : A.$$

Лемма подстановки типа для $\lambda_{\to}$

Определение

Для типов $A, B \in \mathbb{T}$ ***подстановку*** A вместо переменной типа α в B обозначим $[\alpha \mapsto A]B$.

Лемма подстановки типа

$\Gamma \vdash M : B \;\Rightarrow\; [\alpha \mapsto A]\Gamma \vdash M : [\alpha \mapsto A]B.$
($\lambda_{\to}$ Карри)
$\Gamma \vdash M : B \;\Rightarrow\; [\alpha \mapsto A]\Gamma \vdash [\alpha \mapsto A]M : [\alpha \mapsto A]B.$
($\lambda_{\to}$ Чёрч)

Подстановка $[\alpha \mapsto (\gamma \to \gamma)]$

$$\begin{array}{rcl} x^{\alpha} & \vdash & \lambda y^{\alpha} z^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha \quad \Rightarrow \\ x^{\gamma\to\gamma} & \vdash & (\lambda y^{\gamma\to\gamma} z^{\beta}.\, x) : (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma \end{array}$$

Лемма подстановки терма

Пусть $\Gamma, x^A \vdash M : B$ и $\Gamma \vdash N : A$, тогда $\Gamma \vdash [x \mapsto N]M : B$.

То есть, подходящая по типу *подстановка терма сохраняет тип*.

Пример

Берём утверждение о типизации

$$x^{\gamma\to\gamma} \ \vdash \ \lambda y^{\beta}.\, x : \beta \to \gamma \to \gamma$$

и подставляем в него вместо свободной переменной x типа $\gamma \to \gamma$ терм $\lambda z^{\gamma}.\, z$ подходящего типа $\gamma \to \gamma$. Получаем

$$\vdash \ \lambda y^{\beta}\, z^{\gamma}.\, z : \beta \to \gamma \to \gamma$$

Что произойдет с деревом вывода типа при такой подстановке?

Редукция субъекта в $\lambda_{\to}$

Лемма подстановки терма позволяет доказать теорему о сохранении типа в процессе вычислений.

Теорема о редукции субъекта

Пусть $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Тогда $\Gamma \vdash M : A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N : A$.

- То есть *тип терма сохраняется при β-редукциях*.
- С вычислительной точки зрения это одно из ключевых свойств любой системы типов.

Следствие

Множество типизируемых в $\lambda_{\to}$ термов замкнуто относительно редукции.

В обратную сторону эта теорема (и следствие из нее) не верны для $\lambda_{\to}$.

Единственность типа в $\lambda_{\to}$

Теорема о единственности типа для $\lambda_{\to}$ а ля Чёрч

Пусть $\Gamma \vdash_{ч} M : A$ и $\Gamma \vdash_{ч} M : B$. Тогда $A \equiv B$.

Терм в $\lambda_{\to}$ а ля Чёрч имеет единственный тип.

Следствие

Пусть $\Gamma \vdash_{ч} M : A$, $\Gamma \vdash_{ч} N : B$ и $M =_{\beta} N$. Тогда $A \equiv B$.

Типизируемые β-конвертируемые термы имеют одинаковый тип в $\lambda_{\to}$ а ля Чёрч.

Для систем в стиле Карри единственности типа нет.

Контрпример для системы а ля Карри

Оба типа подходят для $\mathbf{K} = \lambda x\, y.\, x$

$$\begin{array}{l} \vdash_{K}\ \lambda x\, y.\, x : \alpha \to (\delta \to \gamma \to \delta) \to \alpha \\ \vdash_{K}\ \lambda x\, y.\, x : (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma \end{array}$$

Связь между системами Карри и Чёрча

- Зададим на термах стирающее отображение $|\cdot| : \Lambda_{\mathbb{T}} \to \Lambda$:

$$\begin{aligned} |x| &= x \\ |M\,N| &= |M|\,|N| \\ |\lambda x^{A}.\,M| &= \lambda x.\,|M| \end{aligned}$$

- Все атрибутированные типами термы из версии Чёрча $\lambda\!\to$ «проектируются» в термы в версии Карри:

$$M \in \Lambda_{\mathbb{T}} \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{Ч}} M : A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\text{К}} |M| : A$$

- Термы из версии Карри $\lambda\!\to$ могут быть «подняты» в термы из версии Чёрча:

$$M \in \Lambda \wedge \Gamma \vdash_{\text{К}} M : A \;\Rightarrow\; \exists N \in \Lambda_{\mathbb{T}}\,[\Gamma \vdash_{\text{Ч}} N : A \;\wedge\; |N| \equiv M]$$

- Для произвольного типа $A \in \mathbb{T}$ выполняется

$$A \text{ обитаем в } \lambda\!\to\text{-Карри} \;\Leftrightarrow\; A \text{ обитаем в } \lambda\!\to\text{-Чёрч}$$

Проблемы разрешимости

- Есть ли алгоритм, который позволяют решить задачу?

$\vdash M : A?$	Задача проверки типа Type Checking Problem	ЗПТ TCP
$\vdash M : ?$	Задача синтеза (вывода) типа Type Synthesis (or Assgnment) Problem	ЗСТ, ЗВТ TSP, TAP
$\vdash ? : A$	Задача обитаемости типа Type Inhabitation Problem	ЗОТ TIP

- Для $\lambda_{\to}$ (и в стиле Чёрча, и в стиле Карри) все эти задачи разрешимы.
- ЗПТ выглядит проще ЗСТ, но в системах Карри они эквивалентны: проверка $M\,N : A?$ требует синтеза $N : ?$.

Теорема о нормализации $\lambda_{\to}$

Определение

Систему типов называют ***слабо нормализуемой***, если все ее допустимые термы слабо нормализуемы.

Определение

Систему типов называют ***сильно нормализуемой***, если все ее допустимые термы сильно нормализуемы.

Теорема о нормализации $\lambda_{\to}$

Обе системы $\lambda_{\to}$ (и Карри, и Чёрча) *сильно нормализуемы*.

То есть любой допустимый терм в $\lambda_{\to}$ всегда редуцируется к нормальной форме независимо от стратегии редукции.