Функциональное программирование
Лекция 2. Рекурсия и редукция

Денис Николаевич Москвин

СПбГУ, факультет МКН,
бакалавриат «Современное программирование», 2 курс

11.09.2025

План лекции

1. Теорема о неподвижной точке
2. Нормальная форма
3. Теорема Чёрча-Россера
4. Нормализация и стратегии редукции

План лекции

1. Теорема о неподвижной точке
2. Нормальная форма
3. Теорема Чёрча-Россера
4. Нормализация и стратегии редукции

Отношение β-эквивалентности, основанное на схеме β-преобразования

$$(\lambda\, n.\, M)\, N \;=_\beta\; [n \mapsto N]\, M$$

даёт возможность решать простейшие уравнения на термы.

Пример

Найти G, такой что $\forall\, M, N, L$ верно $G\, M\, N\, L =_\beta M\, L\, (N\, L)$.

$$\begin{array}{lcl}
G\,M\,N\,L & = & M\,L\,(N\,L) \\
G\,M\,N\,L & = & (\lambda l.\, M\, l\,(N\, l))\, L \\
G\,M\,N & = & \lambda l.\, M\, l\,(N\, l) \\
G\,M & = & \lambda n.\, \lambda l.\, M\, l\,(n\, l) \\
G & = & \lambda m\, n\, l.\, m\, l\,(n\, l)
\end{array}$$

А если уравнение рекурсивное, например, $G\, M = M\, G$?

Отношение β-эквивалентности, основанное на схеме β-преобразования

$$(\lambda\, n.\, M)\, N \;=_\beta\; [n \mapsto N]\, M$$

даёт возможность решать простейшие уравнения на термы.

Пример

Найти G, такой что $\forall\, M, N, L$ верно $G\, M\, N\, L =_\beta M\, L\, (N\, L)$.

$$\begin{array}{lcl}
G\, M\, N\, L & = & M\, L\, (N\, L) \\
G\, M\, N\, L & = & (\lambda l.\, M\, l\, (N\, l))\, L \\
G\, M\, N & = & \lambda l.\, M\, l\, (N\, l) \\
G\, M & = & \lambda n.\, \lambda l.\, M\, l\, (n\, l) \\
G & = & \lambda m\, n\, l.\, m\, l\, (n\, l)
\end{array}$$

А если уравнение рекурсивное, например, $G\, M = M\, G$?

Оказывается, имеется универсальный способ решения!

Теорема

Для любого λ-терма F существует неподвижная точка:
$\forall F \in \Lambda.\ \exists X \in \Lambda.\ \lambda \vdash F\,X =_\beta X$

Доказательство

Введем $W \equiv \lambda x.\, F\,(x\,x)$ и $X \equiv W\,W$. Тогда
$X \equiv W\,W \equiv (\lambda x.\, F(x\,x))\,W =_\beta F\,(W\,W) \equiv F\,X.$

Теорема о комбинаторе неподвижной точки

Существует $\mathbf{Y}$, такой что $\forall F \in \Lambda.\ \lambda \vdash F(\mathbf{Y}\,F) =_\beta \mathbf{Y}\,F.$

Доказательство

Введём $\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\, f\,(x\,x))(\lambda x.\, f\,(x\,x))$. Имеем $\mathbf{Y}\,F =_\beta W\,W$ из предыдущего доказательства.

Y-комбинатор и рекурсия

Y-комбинатор позволяет ввести рекурсию в λ-исчисление.

Пример

Факториал рекурсивно, как уравнение

$$\mathtt{fac} = \lambda n.\,\mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ n)\ 1\ (\mathtt{mult}\ n\,(\mathtt{fac}\,(\mathtt{pred}\ n)))$$

Переписываем в виде

$$\mathtt{fac} = \underbrace{(\lambda f\,n.\,\mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ n)\ 1\ (\mathtt{mult}\ n\,(f\,(\mathtt{pred}\ n))))}_{\mathtt{fac}'}\ \mathtt{fac}$$

Отсюда видно, что $\mathtt{fac}$ — неподвижная точка для вспомогательной функции $\mathtt{fac}'$:

$$\mathtt{fac} = \mathsf{Y}\ \mathtt{fac}'$$

Работа Y-комбинатора

Как работает $\mathtt{fac} \equiv \mathbf{Y}\,\mathtt{fac}'$?

Пример

$$
\begin{aligned}
\mathtt{fac}\ 3 &= (\mathbf{Y}\,\mathtt{fac}')\,3 \\
&= \mathtt{fac}'\,(\mathbf{Y}\,\mathtt{fac}')\,3 \\
&= \mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ 3)\ \mathsf{1}\ (\mathtt{mult}\ 3\,((\mathbf{Y}\,\mathtt{fac}')\,(\mathtt{pred}\ 3))) \\
&= \mathtt{mult}\ 3\,((\mathbf{Y}\,\mathtt{fac}')\,2) \\
&= \mathtt{mult}\ 3\,(\mathtt{fac}'\,(\mathbf{Y}\,\mathtt{fac}')\,2) \\
&= \mathtt{mult}\ 3\,(\mathtt{mult}\ 2\,((\mathbf{Y}\,\mathtt{fac}')\,\mathsf{1})) \\
&= \mathtt{mult}\ 3\,(\mathtt{mult}\ 2\,(\mathtt{mult}\ \mathsf{1}\,((\mathbf{Y}\,\mathtt{fac}')\,\mathsf{0}))) \\
&= \mathtt{mult}\ 3\,(\mathtt{mult}\ 2\,(\mathtt{mult}\ \mathsf{1}\ \mathsf{1})) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

План лекции

1. Теорема о неподвижной точке
2. Нормальная форма
3. Теорема Чёрча-Россера
4. Нормализация и стратегии редукции

Равенство и неравенство

- Мы строили λ-исчисление как теорию о равенстве термов.
- Эффективный способ доказывать равенство — сократить все редексы:

Докажем, что $\mathbf{K}\ \mathbf{I}\ =_\beta\ \mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_*$

$$\mathbf{K}\ \mathbf{I} \equiv (\lambda x y.\, x)\,(\lambda z.\, z) =_\beta \lambda y\, z.\, z$$

$$\mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \equiv (\lambda x.\, x)\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* =_\beta \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \equiv (\lambda x.\, x)\,(\lambda y\, z.\, z) =_\beta \lambda y\, z.\, z$$

- А как доказывать неравенство? Например, $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}_*$?
- Является ли результат вычислений уникальным с точностью до α-эквивалентности?

Нормальная форма

Определение

λ-терм M находится в β-***нормальной форме*** (β-NF), если в нем нет подтермов, являющихся β-редексами.

Определение

λ-терм M имеет β-нормальную форму, если для некоторого N выполняется $M =_\beta N$ и N находится в β-NF.

Примеры

- Терм $\lambda x\, y.\, x\,(\lambda z.\, z\, x)\, y$ находится в β-нормальной форме.
- Терм $(\lambda x.\, x\, x)\, y$ не находится в β-нормальной форме, но имеет в качестве β-nf терм $y\, y$.

Нормальная форма (2)

Утверждение

Не все термы имеют β-нормальную форму.

Пример

$$\begin{array}{ccl} \boldsymbol{\Omega} & \equiv & \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\omega} \\ & \equiv & (\lambda x.\, x\, x)\,(\lambda x.\, x\, x) \\ & \rightsquigarrow_\beta & (\lambda x.\, x\, x)\,(\lambda x.\, x\, x) \\ & \rightsquigarrow_\beta & \dots \end{array}$$

Это пока не доказательство! Может быть существует терм N в β-NF, такой что $\boldsymbol{\Omega} =_\beta N$, например, так

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, twoheadrightarrow] \arrow[dr, twoheadrightarrow] & \\ \boldsymbol{\Omega} & & N \end{tikzcd}$$

Нормальная форма (3)

Бывают термы, «удлинняющиеся» при редукции.

Пример

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{\Omega_3} & \equiv & \boldsymbol{\omega_3}\,\boldsymbol{\omega_3} \\
& \equiv & (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
& \rightsquigarrow_\beta & (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
& \rightsquigarrow_\beta & (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
& \rightsquigarrow_\beta & \ldots
\end{array}
$$

С какой скоростью будет расти $\boldsymbol{\Omega_4} \equiv \boldsymbol{\omega_4}\,\boldsymbol{\omega_4}$?

Не все последовательности редукций приводят к β-NF.

Пример

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} & \equiv & \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x)) \\
& \rightsquigarrow_\beta & \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x)) \\
& \rightsquigarrow_\beta & \ldots \\
\\
\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} & \equiv & (\lambda x\,y.\,x)\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} \\
& \rightsquigarrow_\beta & (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega} \\
& \rightsquigarrow_\beta & \mathbf{I}
\end{array}
$$

Редукционные графы (1)

Определение

Редукционный граф терма $M \in \Lambda$ (обозначаемый $G_\beta(M)$) — это ориентированный мультиграф с вершинами в $\{N \mid M \twoheadrightarrow_\beta N\}$ и дугами $\rightsquigarrow_\beta$.

$$G_\beta(\mathbf{I}(\mathbf{I}\,x)) = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r] & {\color{blue}\bullet} \end{tikzcd} \qquad G_\beta(\mathbf{\Omega}) = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

$$G_\beta((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega}) = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & {\color{blue}\bullet} \end{tikzcd} \qquad G_\beta(\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}) = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & {\color{blue}\bullet} \end{tikzcd}$$

$$G_\beta(\mathbf{\Omega_3}) = ??? \qquad G_\beta((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega_3}) = ???$$

Редукционные графы (2)

Не все редукционные графы конечны.

Пример

$$G_\beta(\mathbf{\Omega_3}) = \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

Не все бесконечные редукционные графы не имеют нормальной формы.

Пример

$$G_\beta((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega_3}) = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[dl] & \bullet \arrow[r] \arrow[dll] & \bullet \arrow[r] \arrow[dlll] & \dots \\ \bullet & & & & \end{tikzcd}$$

План лекции

Теорема Чёрча-Россера

Теорема [Чёрч-Россер]

Если $M \twoheadrightarrow_\beta N$, $M \twoheadrightarrow_\beta K$, то существует L, такой что $N \twoheadrightarrow_\beta L$ и $K \twoheadrightarrow_\beta L$.

- Иначе говоря, β-редукция обладает ***свойством ромба***:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\ N \arrow[dr, dotted, two heads] & & K \arrow[dl, dotted, two heads] \\ & L & \end{tikzcd}$$

- Иногда используют термин ***конфлюентность***.

Теорема Чёрча-Россера неверна в «одношаговых» терминах

$$\begin{tikzcd}
 & \omega(\mathbf{II}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\omega\mathbf{I} \arrow[ddr] & & \mathbf{II}(\mathbf{II}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & & \mathbf{I}(\mathbf{II}) \arrow[dl] \arrow[dl, bend right] & \mathbf{III} \arrow[dll] \\
 & \mathbf{II} \arrow[d] & & \\
 & \mathbf{I} & &
\end{tikzcd}$$

Однако можно определить ***параллельную редукцию***, позволяющую сокращать подобные повторения за один шаг.

Определение

Бинарное отношение ***параллельной*** β-***редукции*** $\Rightarrow_\beta$ над Λ:

- $x \Rightarrow_\beta x$ для любой переменной x;
- если $P \Rightarrow_\beta P'$, то $\lambda x.\, P \Rightarrow_\beta \lambda x.\, P'$;
- если $P \Rightarrow_\beta P'$ и $Q \Rightarrow_\beta Q'$, то $P\,Q \Rightarrow_\beta P'\,Q'$;
- если $P \Rightarrow_\beta P'$ и $Q \Rightarrow_\beta Q'$, то $(\lambda y.\, P)\,Q \Rightarrow_\beta [y \mapsto Q']\,P'$.

$$
\begin{array}{llll}
\omega(\mathbf{II}) \Rightarrow_\beta \mathbf{II} & & \omega(\mathbf{II}) \Rightarrow_\beta \omega(\mathbf{II}) \\
\omega(\mathbf{II}) \Rightarrow_\beta \mathbf{II}(\mathbf{II}) & & \omega(\mathbf{II}) \Rightarrow_\beta \omega\mathbf{I} \\
\omega(\mathbf{II}) \not\Rightarrow_\beta \mathbf{I} & & \omega(\mathbf{II}) \not\Rightarrow_\beta \mathbf{III}
\end{array}
$$

Отношение $\Rightarrow_\beta$ рефлексивно, но не транзитивно — можно сокращать только изначально существовавшие редексы.

Леммы о параллельной редукции

Определение параллельной β-редукции

- $x \Rightarrow_\beta x$ для любой переменной x;
- если $P \Rightarrow_\beta P'$, то $\lambda x.\, P \Rightarrow_\beta \lambda x.\, P'$;
- если $P \Rightarrow_\beta P'$ и $Q \Rightarrow_\beta Q'$, то $P\,Q \Rightarrow_\beta P'\,Q'$;
- если $P \Rightarrow_\beta P'$ и $Q \Rightarrow_\beta Q'$, то $(\lambda y.\, P)\,Q \Rightarrow_\beta [y \mapsto Q']\,P'$.

Леммы о параллельной редукции

1. Если $M \rightsquigarrow_\beta M'$, то $M \Rightarrow_\beta M'$.
2. Если $M \Rightarrow_\beta M'$, то $M \twoheadrightarrow_\beta M'$.
3. Если $M \Rightarrow_\beta M'$ и $N \Rightarrow_\beta N'$, то $[x \mapsto N]\,M \Rightarrow_\beta [x \mapsto N']\,M'$.

Доказательство: (1) индукция по определению $M \rightsquigarrow_\beta M'$; (2) и (3) индукция по определению $M \Rightarrow_\beta M'$.

Определение параллельной β-редукции (4 случай)

- ...
- если $P \Rightarrow_\beta P'$ и $Q \Rightarrow_\beta Q'$, то $(\lambda y.\, P)\, Q \Rightarrow_\beta [y \mapsto Q']\, P'$.

Лемма 3 о параллельной редукции

Если $M \Rightarrow_\beta M'$ и $N \Rightarrow_\beta N'$, то $[x \mapsto N]\, M \Rightarrow_\beta [x \mapsto N']\, M'$.

4 случай: $M = (\lambda y.\, P)\, Q$, $M' = [y \mapsto Q']\, P'$.
IH: $[x \mapsto N]\, P \Rightarrow_\beta [x \mapsto N']\, P'$, $[x \mapsto N]\, Q \Rightarrow_\beta [x \mapsto N']\, Q'$.

$$
\begin{array}{ll}
[x \mapsto N]M \equiv [x \mapsto N]((\lambda y.\, P)\, Q) = & \text{def} \mapsto \\
(\lambda y.\, [x \mapsto N]P)\, ([x \mapsto N]Q) \Rightarrow_\beta & \text{IH} + \text{def} \Rightarrow_\beta \\
[y \mapsto [x \mapsto N']\, Q']\, ([x \mapsto N']\, P') = & \text{Subst Lemma} \\
[x \mapsto N']\, ([y \mapsto Q']\, P') \equiv [x \mapsto N']M' & \blacksquare
\end{array}
$$

Полная эволюция (complete development)

Определение

Полной эволюцией (complete development) терма M называют терм M^*, определяемый индуктивно

$$
\begin{array}{lcl}
x^* & = & x, \\
(\lambda x.\, P)^* & = & \lambda x.\, P^*, \\
(P\,Q)^* & = & P^*\,Q^*, \ \text{если } P \text{ не абстракция}, \\
((\lambda x.\, P)\,Q)^* & = & [x \mapsto Q^*]\,P^*.
\end{array}
$$

Отношение $M \Rightarrow_\beta N$ порождается сокращением *некоторых* редексов в M (изнутри наружу), а M^* — сокращением *всех* редексов (тоже изнутри наружу).

$$(\omega(\mathbf{II}))^* = \mathbf{II}$$

Лемма о полной эволюции

Если $M \Rightarrow_\beta M'$, то $M' \Rightarrow_\beta M^*$.

Доказательство: индукция по определению $M \Rightarrow_\beta M'$ с использованием Леммы (3) для последнего случая. ■

Следствие

Если $M \Rightarrow_\beta M'$ и $M \Rightarrow_\beta M''$, то $M' \Rightarrow_\beta M^*$ и $M'' \Rightarrow_\beta M^*$.

Иными словами: для параллельной редукции выполняется свойство ромба.

Теорема Чёрча-Россера, доказательство

Теорема [Чёрч-Россер]

Если $M \twoheadrightarrow_\beta N$, $M \twoheadrightarrow_\beta K$, то существует L, такой что $N \twoheadrightarrow_\beta L$ и $K \twoheadrightarrow_\beta L$.

Доказательство. Если $M \rightsquigarrow_\beta \ldots \rightsquigarrow_\beta N$ и $M \rightsquigarrow_\beta \ldots \rightsquigarrow_\beta K$, то $M \Rightarrow_\beta \ldots \Rightarrow_\beta N$ и $M \Rightarrow_\beta \ldots \Rightarrow_\beta K$. Сцепляя диаграммки, находим L, такое что $N \Rightarrow_\beta \ldots \Rightarrow_\beta L$ и $K \Rightarrow_\beta \ldots \Rightarrow_\beta L$, откуда $N \twoheadrightarrow_\beta \ldots \twoheadrightarrow_\beta L$ и $K \twoheadrightarrow_\beta \ldots \twoheadrightarrow_\beta L$.
$\blacksquare$

Следствия теоремы Чёрча-Россера (1)

Теорема о существовании общего редукта

Если $M =_\beta N$, то существует L, такой что, $M \twoheadrightarrow_\beta L$ и $N \twoheadrightarrow_\beta L$.

Доказательство (индукция по генерации $=_\beta$)

- $M =_\beta N$, поскольку $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Возьмем $L \equiv N$.
- $M =_\beta N$, поскольку $N =_\beta M$. По гипотезе индукции имеется общий β-редукт L_1 для N, M. Возьмем $L \equiv L_1$.
- $M =_\beta N$, поскольку $M =_\beta N'$, $N' =_\beta N$. Тогда

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, two heads] & (IH) & N' \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & (IH) & N \arrow[dl, two heads] \\
 & L_1 \arrow[dr, two heads, dotted] & CR & L_2 \arrow[dl, two heads, dotted] & \\
 & & L & &
\end{tikzcd}
$$

$\blacksquare$

Теорема [Редуцируемость к NF]

Если M имеет N в качестве β-NF, то $M \twoheadrightarrow_\beta N$.

Теперь мы можем доказать отсутствие NF у $\mathbf{\Omega}$. Иначе выполнялось бы

$$\mathbf{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta N, \qquad N \text{ является } \beta\text{-NF}.$$

Но $\mathbf{\Omega}$ редуцируется лишь к себе и не является β-NF.

Теорема [Единственность NF]

λ-терм имеет не более одной β-NF.

Теперь мы можем доказывать «неравенства», например

$$\lambda \nvdash \mathtt{tru} = \mathtt{fls}.$$

Иначе было бы $\mathtt{tru} =_\beta \mathtt{fls}$, но это две разные NF, что противоречит единственности.

План лекции

Слабая и сильная нормализация для терма

Терм называют ***слабо (weak) нормализуемым*** ($\mathcal{WN}_\beta$), если существует последовательность β-редукций, приводящих его к β-нормальной форме.
Терм называют ***сильно (strong) нормализуемым*** ($\mathcal{SN}_\beta$), если любая последовательность β-редукций, приводит его к β-нормальной форме.
Если терм M не является сильно нормализуемым, то пишут $M \in \infty_\beta$ (слабая *не*нормализуемость).

$$
\begin{array}{rrr}
\mathbf{K\,I\,K} \in \mathcal{SN}_\beta, & \mathbf{K\,I\,K} \in \mathcal{WN}_\beta, & \mathbf{K\,I\,K} \notin \infty_\beta; \\
\mathbf{K\,I\,\Omega} \notin \mathcal{SN}_\beta, & \mathbf{K\,I\,\Omega} \in \mathcal{WN}_\beta, & \mathbf{K\,I\,\Omega} \in \infty_\beta; \\
\mathbf{\Omega} \notin \mathcal{SN}_\beta, & \mathbf{\Omega} \notin \mathcal{WN}_\beta, & \mathbf{\Omega} \in \infty_\beta.
\end{array}
$$

Элементы $\mathcal{WN}_\beta$ обязаны сойтись на какой-то стратегии; элементы ∞_β обязаны разойтись на какой-то стратегии.

Аппликативная структура терма

Теорема

Лямбда-терм может иметь одну из двух форм:

$$\begin{aligned} \lambda\overrightarrow{x}.\,y\,\overrightarrow{N} &\equiv \lambda x_1\ldots x_n.\,y\,N_1\ldots N_k \\ \lambda\overrightarrow{x}.\,(\lambda z.\,M)\,Q\,\overrightarrow{N} &\equiv \lambda x_1\ldots x_n.\,(\lambda z.\,M)\,Q\,N_1\ldots N_k \end{aligned}$$

Здесь $n \geqslant 0, k \geqslant 0$.

Первая форма называется ***головной нормальной формой*** (HNF). Переменная y называется ***головной переменной***, а редекс $(\lambda z.\,M)\,Q$ — ***головным редексом***.

Переменная y может совпадать с одной из x_i.

Слабая головная нормальная форма (WHNF) — это HNF или лямбда-абстракция, то есть *не редекс на верхнем уровне*.

Стратегия редукции F — это отображение множества Λ в себя, тождественное для нормальных форм и обладающее свойством $M \rightsquigarrow_\beta F(M)$ для прочих термов.

Нормальная (крайне левая) стратегия F_l:

$$
\begin{array}{lcl}
F_l(\lambda\vec{x}.\,y\,\vec{P}\,Q\,\vec{R}) & = & \lambda\vec{x}.\,y\,\vec{P}\,F_l(Q)\,\vec{R}, \\
 & & \qquad \text{если } \vec{P} \in NF_\beta \text{ и } Q \notin NF_\beta; \\
F_l(\lambda\vec{x}.\,(\lambda z.\,M)\,Q\,\vec{R}) & = & \lambda\vec{x}.\,[z \mapsto Q]\,M\,\vec{R}.
\end{array}
$$

Аппликативная стратегия F_a:

$$
\begin{array}{lcl}
F_a(\lambda\vec{x}.\,y\,\vec{P}\,Q\,\vec{R}) & = & \lambda\vec{x}.\,y\,\vec{P}\,F_a(Q)\,\vec{R}, \\
 & & \qquad \text{если } \vec{P} \in NF_\beta \text{ и } Q \notin NF_\beta; \\
F_a(\lambda\vec{x}.\,(\lambda z.\,M)\,Q\,\vec{R}) & = & \lambda\vec{x}.\,[z \mapsto Q]\,M\,\vec{R}, \text{ если } Q \in NF_\beta; \\
F_a(\lambda\vec{x}.\,(\lambda z.\,M)\,Q\,\vec{R}) & = & \lambda\vec{x}.\,(\lambda z.\,M)\,F_a(Q)\,\vec{R}, \text{ если } Q \notin NF_\beta.
\end{array}
$$

Нормализующая стратегия

Нормальная vs аппликативная стратегии

$$\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \equiv (\lambda x\,y.\,x)\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega} \rightsquigarrow_\beta \mathbf{I}$$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \rightsquigarrow_\beta (\lambda y.\,\mathbf{I})\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x)) \rightsquigarrow_\beta \ldots$$

Стратегия редукции называется *нормализующей*, если для любого $M \in WN_\beta$, существует конечное $i \in \mathbb{N}$, такое что $F^i(M) \in NF_\beta$.

Мы хотим доказать, что нормальная стратегия F_l является нормализующей.
Это, например, позволит доказывать отсутствие NF_β у терма.
Например, $\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{I}$.

Виды редексов

Если $M \notin NF_\beta$, будем писать

- $M \overset{l}{\rightsquigarrow} N$ при сокращении самого левого редекса;
- $M \overset{h}{\rightsquigarrow} N$ при сокращении головного редекса;
- $M \overset{i}{\rightsquigarrow} N$ при сокращении внутреннего редекса (т.е. не головного).

Головной — всегда самый левый, но самый левый может быть внутренним (когда головного нет).

Лемма о головных редексах

1. Если $M \overset{h}{\rightsquigarrow} M'$, то $\lambda x.\, M \overset{h}{\rightsquigarrow} \lambda x.\, M'$.
2. Если $M \overset{h}{\rightsquigarrow} M'$ и M не абстракция, то $M\,N \overset{h}{\rightsquigarrow} M'\,N$.
3. Если $M \overset{h}{\rightsquigarrow} M'$, то $[x \mapsto N]\,M \overset{h}{\rightsquigarrow} [x \mapsto N]\,M'$.

Просто.

Параллельной внутренней редукцией $\overset{i}{\Rightarrow}$ называют отношение на Λ, определяемое правилами

- Если $\overrightarrow{P} \Rightarrow_\beta \overrightarrow{Q}$, то $\lambda\overrightarrow{x}.y\,\overrightarrow{P} \overset{i}{\Rightarrow} \lambda\overrightarrow{x}.y\,\overrightarrow{Q}$;
- Если $\overrightarrow{P} \Rightarrow_\beta \overrightarrow{Q}$, $S \Rightarrow_\beta T$ и $R \Rightarrow_\beta U$, то $\lambda\overrightarrow{x}.(\lambda y.S)\,R\,\overrightarrow{P} \overset{i}{\Rightarrow} \lambda\overrightarrow{x}.(\lambda y.T)\,U\,\overrightarrow{Q}$.

Лемма о параллельной внутренней редукции

1. Если $M \overset{i}{\rightsquigarrow} M'$, то $M \overset{i}{\Rightarrow} M'$.
2. Если $M \overset{i}{\Rightarrow} M'$, то $M \overset{i}{\twoheadrightarrow}_\beta M'$.
3. Если $M \overset{i}{\Rightarrow} M'$, то $M \Rightarrow_\beta M'$.

Тривиально.

Разделенная параллельная редукция

Введем $M \Rrightarrow N$, если имеются $M_0 \dots M_n$ $(n \geqslant 0)$, такие что

$$M = M_0 \overset{h}{\rightsquigarrow} M_1 \overset{h}{\rightsquigarrow} \dots \overset{h}{\rightsquigarrow} M_n \overset{i}{\Rrightarrow} N$$

и все $M_i \Rightarrow_\beta N$.

Внутри одного шага параллельной редукции внутренние редексы сокращаем после головных.

Лемма о разделенной параллельной редукции

1. Если $M \Rrightarrow M'$, то $\lambda x.\, M \Rrightarrow \lambda x.\, M'$.
2. Если $M \Rrightarrow M'$ и $N \Rightarrow_\beta N'$, то $M\,N \Rrightarrow M'\,N'$.
3. Если $M \Rrightarrow M'$ и $N \Rrightarrow N'$, то $[x \mapsto N]\,M \Rrightarrow [x \mapsto N']\,M'$.

(1) — тривиально, (2) и (3) — нудно.

Лемма

1. Если $M \rightrightarrows_\beta N$, то существует L, такой что $M \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow_\beta L \overset{i}{\Rightarrow} N$.
2. Если $M \overset{i}{\Rightarrow} N \overset{h}{\rightsquigarrow} L$, то существует O, такой что $M \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow^+_\beta O \overset{i}{\Rightarrow} L$.

(1) — показываем, что $M \rightrightarrows_\beta N$ влечет $M \Rightarrow N$.

(2): В предположении $P \rightrightarrows_\beta P'$, $Q \rightrightarrows_\beta Q'$, $\overrightarrow{R} \rightrightarrows_\beta \overrightarrow{R'}$

$$\begin{aligned} M &= \lambda \overrightarrow{z}.\,(\lambda x.\,P)\,Q\,\overrightarrow{R}, & N &= \lambda \overrightarrow{z}.\,(\lambda x.\,P')\,Q'\,\overrightarrow{R'}; \\ L &= \lambda \overrightarrow{z}.\,[x \mapsto Q']\,P'\,\overrightarrow{R'}, & O &= \lambda \overrightarrow{z}.\,[x \mapsto Q]\,P\,\overrightarrow{R}. \end{aligned}$$

Последнее дает $M \overset{h}{\rightsquigarrow} O \rightrightarrows_\beta L$. Теперь пользуемся (1). ■

Теорема о нормализации

Если у терма M имеется нормальная форма N, то $M \xrightarrow{l}\!\!\!\!\rightarrow_\beta N$.

Свойства стратегий

Недостаток нормальной стратегии — возможная неэффективность, достоинство — не считает ничего «лишнего».

Нормальная vs аппликативная стратегии

- Пусть N — «большой» терм

$$(\lambda x.\, F\, x\, (G\, x)\, x)\, N \rightsquigarrow_\beta F\, N\, (G\, N)\, N$$

  В процессе дальнейших редукций редексы в N придётся сокращать три раза.

- Зато в

$$(\lambda x\, y.\, y)\, N \rightsquigarrow_\beta \lambda y.\, y$$

  нормальная стратегия не вычисляет N ни разу.

- Аппликативная стратегия в обоих примерах вычислит N один раз.

Стратегии редукции и ЯП

- Аппликативная стратегия похожа на стратегию вычислений («энергичную», eager) большинства языков программирования. Сначала вычисляются аргументы, затем происходит применение функции.
- Нормальная стратегия похожа на способ вычисления в «ленивых» (lazy) языках (Haskell, Clean).
- Для решения проблем с эффективностью в «ленивых» языках используют *механизм разделения* (через вычисления в контекстах или через редукцию на графах).

Стратегии редукции и ЯП (2)

- Нет необходимости всегда доводить редукцию до NF. На практике часто ограничиваются WHNF.
- Это позволяет избежать захвата переменной при редуцировании *замкнутого* терма. (почему?)
- При наличии констант (в расширенных системах) понятие WHNF (и HNF) дополняют частично применёнными константными функциями, например

$$\mathbf{and}\ \mathbf{true}$$

  поскольку его можно записать в η-эквивалентном WHNF-виде

$$\lambda x.\,\mathbf{and}\ \mathbf{true}\ x$$

- В Haskell к WHNF относят и конструктор данных, примененный полностью или частично.

Механизмы вызова

- ***Механизм вызова*** — термин, применяемый при исследовании высокоуровневых языков программирования.
- В функциональных языках:
  - «вызов по значению» — аппликативный порядок редукций до WHNF;
  - «вызов по имени» — нормальный порядок редукций до WHNF;
  - «вызов по необходимости» — «вызов по имени» плюс разделение.