

**Курс: Функциональное программирование**  
**Практика 1. Чистое лямбда-исчисление как язык**  
**программирования**

**Разминка**

- Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки

$$[x \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[y \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[z \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[x \mapsto w (\lambda x. y x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

Определите, возможно ли в получившемся терме выполнить  $\beta$ -преобразование.

- Уберите лишние скобки и при возможности выполните  $\beta$ -преобразование

$$((\lambda z. (z (y z))) (z x) z)$$

- Эквивалентны ли термы

$$\lambda x. x$$

$$\lambda y. y$$

$$\lambda x y. x y$$

**Кодирование фундаментальных типов и операций над ними**

Булевы значения можно определить так

$$\text{tru} \equiv \lambda t f. t$$

$$\text{fls} \equiv \lambda t f. f$$

Стандартные булевы операции кодируются так

$$\begin{aligned}\text{if} &\equiv \lambda b x y. b x y \\ \text{not} &\equiv \lambda b. b \text{ fls } \text{tru} \\ \text{and} &\equiv \lambda x y. x y \text{ fls} \\ \text{or} &\equiv ??? \text{ (упражнение)}\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства условного выражения выполняются, то есть что для любых  $M$  и  $N$  верно

$$\begin{aligned}\text{if } \text{tru } M \ N &=_{\beta} M; \\ \text{if } \text{fls } M \ N &=_{\beta} N.\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства логического оператора «И» выполняются, то есть что для любого  $M$  верно

$$\begin{aligned}\text{and } \text{tru } M &=_{\beta} M; \\ \text{and } \text{fls } M &=_{\beta} \text{fls}.\end{aligned}$$

► Попробуйте найти более «короткую» версию оператора «НЕ».

► Реализуйте оператор «ИЛИ».

**Пару** (двухэлементный кортеж) можно определить так

$$\text{pair} \equiv \lambda x y f. f x y$$

Стандартные операции для пары (проекции)

$$\begin{aligned}\text{fst} &\equiv \lambda p. p \ K \\ \text{snd} &\equiv \lambda p. p \ K_*\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства проекций выполняются, то есть что для любых  $M$  и  $N$  верно

$$\begin{aligned}\text{fst } (\text{pair } M \ N) &=_{\beta} M; \\ \text{snd } (\text{pair } M \ N) &=_{\beta} N.\end{aligned}$$

**Числа** (нумералы Чёрча)

$$\begin{aligned}\bar{0} &\equiv \lambda s z. z \\ \bar{1} &\equiv \lambda s z. s z \\ \bar{2} &\equiv \lambda s z. s (s z) \\ \bar{3} &\equiv \lambda s z. s (s (s z)) \\ \bar{4} &\equiv \lambda s z. s (s (s (s z))) \\ &\dots\end{aligned}$$

Выражение  $F^n(X)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $F, X \in \Lambda$ , определим индуктивно

$$\begin{aligned} F^0(X) &\equiv X; \\ F^{n+1}(X) &\equiv F(F^n(X)). \end{aligned}$$

Тогда  $n$ -ое число Чёрча может быть записано так

$$\bar{n} \equiv \lambda s z. s^n(z).$$

Проверка числа на ноль ( $\bar{0} \equiv \lambda s z. z$ ):

$$\text{iszro} \equiv \lambda n. n (\lambda x. \text{fls}) \text{tru}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `iszro` выполняются.
- Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`.

Функция следования для чисел Чёрча

$$\text{succ} \equiv \lambda n s z. s (n s z)$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `succ` выполняются.
- Попробуйте найти другое определение `succ`.

Функция сложения чисел Чёрча

$$\text{plus} \equiv \lambda m n s z. m s (n s z)$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `plus` выполняются.
- Попробуйте найти определение `plus` с использованием `succ`.

Функция умножения чисел Чёрча

$$\begin{aligned} \text{mult1} &\equiv \lambda m n. m (\text{plus } n) \bar{0} \\ \text{mult2} &\equiv \lambda m n s z. m (n s) z \end{aligned}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства умножения выполняются.
- Можно ли `mult2` записать короче?

Функция возведения в степень для чисел Чёрча

$$\begin{aligned} \text{power1} &\equiv \lambda m n. m (\text{mult } n) 1 \\ \text{power2} &\equiv \lambda m n s z. n m s z \end{aligned}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства возведения в степень выполняются.
- Можно ли `power2` записать короче?

## Домашнее задание

- Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

$$\begin{array}{ll} [x \mapsto \lambda y. y\ w] & \lambda y\ z. x\ y\ w\ (z\ x) \\ [x \mapsto \lambda z. z] & \lambda x\ y. x\ y\ (\lambda x. x\ y)\ x \\ [y \mapsto x\ z] & x\ y\ (\lambda x\ z. x\ y\ z)\ y \end{array}$$

Определите, возможно ли в получившемся терме выполнить  $\beta$ -преобразование, и, если это так, выполните его. (1 балл)

- Уберите лишние скобки и при возможности выполните  $\beta$ -преобразование

$$\begin{array}{l} (x\ (\lambda x. ((x\ y)\ x))\ y) \\ ((\lambda p. (\lambda q. ((q\ (p\ r))\ s)))\ ((q\ (p\ r))\ s)) \end{array}$$

(1 балл)

- Покажите, что для любых  $M$  и  $N$  выполняется

$$\lambda x. M\ N =_{\beta} S\ (\lambda x. M)\ (\lambda x. N)$$

(1 балл)

- Покажите, что

$$\begin{array}{l} S\ K\ K =_{\beta} I \\ B =_{\beta} S\ (K\ S)\ K \end{array}$$

(2 балла)

- Приведите доказательства по индукции тех фактов, что **plus** действительно складывает (1 балл), **mult2** — умножает (1.5 балла), а **power2** — возводит в степень (2.5 балла).