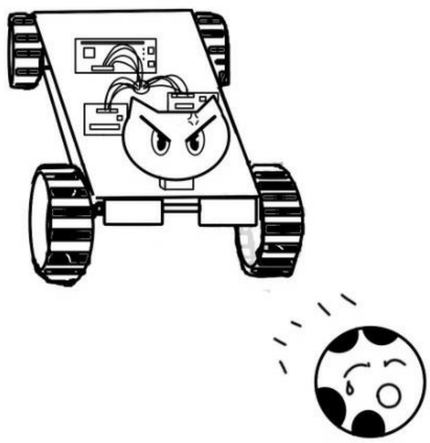
Projeto SSL - IFPR 2023



Trigonometria vs Filtro de Kalman

Lara Vaz e Guilherme Macanhan

Julho, 2023

Sumário

1 Introdução

Trabalho feito para pesquisar sobre as **TÉCNICAS DE TRIGONOMETRIA** e **FILTRO DE KALMAN** dentro da competição da **Small Size League**. As perguntas que serão respondidas neste documento serão:

1. - Como funciona?

2. - Quais dados necessitam/precisam para que funcione?

3. - Qual a Diferença entre essas duas formas de estratégia?

4. - Em quais situações são usadas essas funções?

5. - Como seria aplicado no robô?

2 Trigonometria

A trigonometria é uma ramificação da matemática que se dedica ao estudo das relações entre os lados e ângulos dos triângulos, bem como suas aplicações em diversas áreas. Ela fornece ferramentas para calcular e resolver problemas relacionados à geometria angular e é fundamental para a solução de questões envolvendo triângulos e suas medidas.

Existem várias funções trigonométricas importantes, como seno, cosseno e tangente, que desempenham papéis cruciais na resolução de problemas trigonométricos.

Essas funções relacionam os ângulos de um triângulo com as medidas dos seus lados.

A trigonometria é amplamente utilizada em várias áreas da ciência, engenharia e tecnologia. Alguns exemplos de aplicações incluem:

1. **Navegação e cartografia:** A trigonometria é usada para calcular distâncias, alturas e ângulos em sistemas de navegação e para mapear regiões geográficas.
2. **Computação gráfica:** É utilizada em jogos, animações e gráficos computacionais para criar e posicionar objetos em uma cena tridimensional.
3. **Engenharia elétrica e comunicações:** Na análise de circuitos elétricos e na transmissão de sinais, a trigonometria é usada para calcular fases e amplitudes de ondas.
4. **Física e outras ciências naturais:** A trigonometria é aplicada em várias áreas da física, como mecânica, óptica e acústica, para resolver problemas relacionados a movimentos, refração e interferência, entre outros.
5. **Robótica:** Em robótica, a trigonometria é usada para calcular a posição, a orientação e a trajetória dos robôs, bem como para planejar seus movimentos.

3 Fórmulas da Trigonometria

Fórmula do seno e cosseno:

A fórmula básica do seno e cosseno é usada para encontrar os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo (um triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90 graus).

1. **Seno (*sin*)**: A fórmula do seno relaciona a medida de um ângulo agudo (menor que 90 graus) com o comprimento do lado oposto ao ângulo dividido pelo comprimento da hipotenusa (o lado mais longo do triângulo).

   A fórmula é dada por: *sen* = lado oposto / hipotenusa.

2. **Cosseno (*cos*):** A fórmula do cosseno relaciona a medida de um ângulo agudo com o comprimento do lado adjacente ao ângulo dividido pelo comprimento da hipotenusa.

   A fórmula é dada por: *cos* = lado adjacente / hipotenusa.

Fórmula da tangente:

A tangente (*tan*) é outra função trigonométrica que está relacionada ao seno e cosseno. Ela é calculada dividindo o seno pelo cosseno de um ângulo.

A fórmula da tangente é dada por: tan = $\text{sen}\theta$ **/** $\cos\theta$ **.**

Trigonometria em Triângulos não Retângulos:

Para triângulos não retângulos (aqueles que não possuem um ângulo reto), as funções trigonométricas também podem ser aplicadas, mas exigem técnicas adicionais para resolver os problemas. Isso geralmente envolve o uso de identidades trigonométricas e a aplicação das razões entre os lados de um triângulo.

Referência Bibliográfica

Learning to Solve Trigonometry Problems That Involve Algebraic Transformation Skills via Learning by Analogy and Learning by Comparison

4 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um método de estimativa e fusão de dados usado para obter estimativas precisas e suaves de estados desconhecidos de um sistema com base em medições ruidosas. Ele é amplamente utilizado em diversas aplicações, **incluindo robótica, navegação, rastreamento de objetos, processamento de sinais** e muitas outras áreas.

O filtro de Kalman é projetado para lidar com sistemas lineares e gaussianos, onde os erros de medição e os erros do sistema são modelados como ruídos com distribuição normal. Ele usa duas etapas principais: a etapa de previsão (ou time update), que projeta o estado do sistema e sua incerteza para o próximo instante de tempo, e a etapa de correção (ou measurement update), que incorpora as medições reais para ajustar a estimativa do estado e reduzir a incerteza.

A grande vantagem do filtro de Kalman é a sua eficiência computacional, permitindo obter estimativas precisas com baixo consumo de recursos. Além disso, é um método recursivo, o que significa que a estimativa pode ser atualizada em tempo real à medida que novas medições são obtidas.

5 Fórmulas do Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman é um algoritmo de estimativa que utiliza um modelo matemático para combinar informações de medidas imprecisas com estimativas anteriores, produzindo uma estimativa mais precisa do estado atual de um sistema. Ele é amplamente usado em sistemas de controle, navegação e rastreamento, incluindo aplicações em robótica, como a localização e o rastreamento de objetos.

Modelo de Estado:

O estado do sistema é representado por um vetor x que contém as coordenadas (**x**, **y**) do robô no campo, o ângulo de orientação (θ) do robô, bem como as coordenadas (**x**, **y**) da bola no campo.

O vetor de estado é denotado como: $\overrightarrow{X}$ = [X θ Y $\overrightarrow{XB}$ $\overrightarrow{YB}$] onde $\overrightarrow{XB}$ e $\overrightarrow{YB}$ representam as coordenadas da bola.

Modelo de Atualização de Tempo:

A atualização de tempo representa a predição do estado do robô com base em seu movimento estimado. A fórmula para a atualização de tempo é dada por:

$$\overrightarrow{XK} = \boldsymbol{f} * \overrightarrow{XK} \ \textbf{-1} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$$

onde $\overrightarrow{XK}$ é o novo estado estimado, F é a matriz de transição de estado que modela o movimento do robô, $\overrightarrow{XK}$ -1 é o estado estimado anterior, u é o vetor de controle que representa o movimento atual do robô (por exemplo, **velocidade** e **direção**) e w é o ruído de processo, que representa a incerteza do movimento.

Modelo de Medição: As medidas do robô e da bola são obtidas por meio dos sensores de visão e são representadas como um vetor z. A fórmula para o modelo de medição é dada por:

$$\overrightarrow{ZK} = \mathrm{H} * \overrightarrow{XK} + \mathrm{v}$$

onde $\overrightarrow{ZK}$ é o vetor de medidas, H é a matriz de medição que relaciona as medidas ao estado do sistema, $\overrightarrow{XK}$ é o estado estimado atual e v é o ruído de medição, que representa a incerteza das medidas.

Atualização de Medição:

A atualização de medição combina as medidas recebidas com o estado estimado para melhorar a precisão da estimativa. A fórmula para a atualização de medição é dada por:

$$\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XK} + \mathrm{K} * (\overrightarrow{ZK} - \mathrm{H} * \overrightarrow{XK})$$

onde $\overrightarrow{XK}$ é o novo estado estimado após a atualização, K é a matriz de ganho de Kalman, que determina o quanto as medidas devem influenciar a estimativa e $\overrightarrow{ZK}$ é o vetor de medidas.

Essas fórmulas são iterativamente aplicadas em cada ciclo do sistema para obter uma estimativa precisa do estado do robô e da bola ao longo do tempo.

> **Referência Bibliográfica**
>
> Application of the extended Kalman Filter to robot soccer localisation and world modelling.

6 Dados necessários

6.1 Dados da Trigonometria

Os dados essenciais podem variar de acordo com o contexto da aplicação, mas em geral, os seguintes elementos são fundamentais:

Medidas dos ângulos: A trigonometria lida com ângulos, portanto, é essencial ter informações sobre os ângulos envolvidos no problema. As medidas dos ângulos geralmente são fornecidas em graus ou radianos.

Medidas dos lados do triângulo: Em problemas trigonométricos que envolvem triângulos, é necessário ter informações sobre os comprimentos dos lados do triângulo. As medidas dos lados podem ser fornecidas em unidades como centímetros, metros, polegadas, etc.

Relação entre ângulos e lados: A trigonometria se baseia em relações matemáticas entre ângulos e os lados de um triângulo. A relação mais fundamental é a do teorema de Pitágoras, que descreve a relação entre os lados em um triângulo retângulo (lados adjacentes, opostos e hipotenusa).

Valores das funções trigonométricas: As funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) são usadas para relacionar ângulos e lados em um triângulo. Em alguns problemas, pode ser necessário usar tabelas trigonométricas ou calculadoras para obter os valores dessas funções.

Condições e restrições do problema: Algumas situações podem apresentar condições ou restrições específicas que limitam os valores possíveis dos ângulos ou lados do triângulo. Essas informações são importantes para restringir as soluções possíveis.

6.2 Dados do Filtro de Kalman

Para que o filtro de Kalman funcione adequadamente, são necessários alguns dados e informações essenciais, como:

Modelo do sistema: É preciso ter um modelo que descreva o comportamento dinâmico do sistema que se deseja controlar ou estimar. Esse modelo geralmente é representado por equações matemáticas que descrevem como o estado do sistema evolui ao longo do tempo. No caso de um robô móvel, o modelo pode incluir informações sobre a física do robô, como cinemática, dinâmica e restrições de movimento.

Estado inicial: É necessário ter uma estimativa inicial do estado do sistema no instante inicial (tempo $t = 0$) ou algum conhecimento a priori sobre o estado inicial. Essa estimativa pode ser obtida, por exemplo, a partir de um sistema de localização inicial, como um sensor de posicionamento.

Medidas (dados dos sensores): O filtro de Kalman requer medidas ou observações do sistema ao longo do tempo. No caso do robô móvel, isso pode incluir dados provenientes de sensores, como sensores de posicionamento, sensores de visão (câmeras) e sensores inerciais (giroscópios, acelerômetros).

Ruído do processo e ruído de medição: O filtro de Kalman assume que há incerteza no processo (mudanças no estado do sistema) e nas medições dos sensores. Portanto, é necessário conhecer ou estimar as características do ruído do processo e do ruído de medição, que são geralmente modelados como processos aleatórios com média zero e covariância conhecida.

Matrizes de covariância: É importante ter informações sobre a covariância do ruído do processo e do ruído de medição. Essas informações são geralmente representadas em forma de matrizes de covariância e são essenciais para o cálculo das estimativas do filtro de Kalman.

7 Diferença entre as estratégias

As principais diferenças entre a trigonometria e o filtro de Kalman são as seguintes:

Campo de estudo:

Trigonometria: A trigonometria é uma ramificação da matemática que se dedica ao estudo das relações entre os lados e ângulos dos triângulos, bem como suas aplicações em diversas áreas.

Filtro de Kalman: O filtro de Kalman é um método matemático utilizado para estimar o estado de um sistema dinâmico com base em informações passadas e em medidas obtidas por sensores. É amplamente utilizado em sistemas de rastreamento, controle e localização, incluindo aplicações em robótica, sistemas de navegação e processamento de sinais.

Aplicação:

Trigonometria: A trigonometria é aplicada em várias áreas da ciência, engenharia e tecnologia, como navegação, engenharia, astronomia, computação gráfica, física, entre outras.

Filtro de Kalman: O filtro de Kalman é aplicado em problemas de estimação e controle em sistemas dinâmicos, como localização e rastreamento de objetos, sistemas de navegação, sistemas de controle, processamento de sinais, entre outros.

Foco dos Cálculos:

Trigonometria: A trigonometria se concentra em calcular as relações entre os ângulos e os lados de triângulos e resolver problemas relacionados à geometria angular.

Filtro de Kalman: O filtro de Kalman se concentra em calcular estimativas do estado de um sistema com base em modelos matemáticos e medidas dos sensores, levando em consideração a incerteza dos processos e das medições.

Dados Necessários:

Trigonometria: A trigonometria requer informações sobre os ângulos e os lados dos triângulos envolvidos em um problema trigonométrico.

Filtro de Kalman: O filtro de Kalman requer informações sobre o modelo do sistema, o estado inicial, as medidas dos sensores e a covariância do ruído do processo e do ruído de medição.

Em resumo, enquanto a trigonometria lida com relações geométricas entre ângulos e lados de triângulos, o filtro de Kalman é um método matemático usado para estimar o estado de sistemas dinâmicos com base em modelos matemáticos e medidas dos sensores.

8 Situações de usuabilidade das funções

O Filtro de Kalman e a Trigonometria são aplicados em diferentes contextos e situações, sendo úteis em áreas distintas. Vamos ver onde cada um deles é usado:

Filtro de Kalman: O Filtro de Kalman é um algoritmo de estimativa utilizado em sistemas que envolvem medições sujeitas a ruído e incertezas. Ele é amplamente empregado em várias aplicações, como:

Navegação inercial: Em sistemas de navegação, como GPS e sistemas inerciais, o Filtro de Kalman é usado para combinar as informações de sensores (como acelerômetros e giroscópios) com as medições de posição para obter estimativas mais precisas da localização e orientação.

Robótica: Em robótica, o Filtro de Kalman é usado para estimar a posição e a velocidade do robô, incorporando informações de sensores como odômetros, sensores de proximidade e câmeras.

Processamento de sinais: Em sistemas de comunicação e processamento de sinais, o Filtro de Kalman é usado para estimar o estado oculto do sistema a partir das medições observadas.

Previsão meteorológica: Na área da meteorologia, o Filtro de Kalman é utilizado para combinar dados observados com modelos meteorológicos e fornecer previsões mais precisas do tempo.

Finanças: Em finanças, o Filtro de Kalman é usado em modelagem e previsão de séries temporais financeiras, como preços de ações e taxas de juros.

Trigonometria:

A Trigonometria é aplicada em uma ampla variedade de situações que envolvem ângulos e triângulos, e é essencial em diversas áreas, como:

Geometria: Na geometria, a Trigonometria é usada para calcular ângulos, lados e áreas de triângulos, bem como em outras formas geométricas.

Engenharia: Em engenharia, a Trigonometria é aplicada no dimensionamento e cálculo de estruturas, bem como em projetos de construção e arquitetura.

Astronomia: A Trigonometria é utilizada para medir distâncias e ângulos no estudo de corpos celestes e na determinação de posições astronômicas.

Navegação: Na navegação marítima e aérea, a Trigonometria é usada para calcular distâncias, ângulos e posições.

Física: A Trigonometria é aplicada em problemas que envolvem movimento, como o movimento de projéteis e a descrição de movimentos oscilatórios.

Computação gráfica: Em computação gráfica e jogos, a Trigonometria é usada para calcular a posição e a rotação de objetos em ambientes tridimensionais.

Eletrônica: Na eletrônica, a Trigonometria é aplicada na análise de circuitos AC e em problemas que envolvem ondas senoidais.

9 Utilizando a Técnica de Trigonometria em robôs

OBS: Após discussões com o professor, foi evidenciado que ambas as técnicas têm sua utilidade; contudo, o Filtro de Kalman é um conceito mais avançado para alunos do ensino médio. Embora não seja impossível, dadas as restrições de tempo para a conclusão do projeto, não é viável aprofundar-se na teoria de Kalman. Dessa forma, optou-se por empregar a teoria de trigonometria para realizar os cálculos de previsão da posição da bola, utilizando os frames disponibilizados ao usuário.

Devido à alta frequência de frames enviados ao usuário, o sistema aproveitará os frames anteriores para calcular, por meio de fórmulas trigonométricas, uma nova posição para o robô. Essa posição calculada será transmitida ao robô por meio de mensagens utilizando o protocolo protobuf.

10 Referências Bibliográficas

Referências

[1] J., V. Real life applications of trigonometry, 2017.

[2] Muhammad Nuruddin Sudin, Siti Norul Huda Sheikh Abdullah, M. F. N., and Sahran, S. *Trigonometry Technique for Ball Prediction in Robot Soccer.* © Springer International Publishing, 2014.

[3] Oelmann, D., and Rothsching, Z. The application of the kalman filter on robot soccer.

[4] Rick. Midclleto, M. F., and McNeill, L. *Application of the extended Kalman Filter to robot soccer localisation and world modelling.* Elsevier IFAC Publications, 2004.

[4]
[2]
[3]
[1]