Resoluções - Exercícios FMC2

Fundamentos Matemáticos da Computação 2

Professora: Cecilia Lustosa - 2025.2

Exercício 1

*Considere a função f : N → Z tal que:**

```
f(n) = {
  -n/2,     se n é par
  (n-1)/2,  se n é ímpar
}
```

Mostre que f é bijetiva.

Solução:

Para mostrar que f é bijetiva, devemos provar que f é injetiva e sobrejetiva.

Prova da Injetividade: Sejam $n_1, n_2 \in N^*$ tais que $f(n_1) = f(n_2)$. Precisamos mostrar que $n_1 = n_2$.

Caso 1: n_1 e n_2 são ambos pares

- $f(n_1) = -n_1/2$ e $f(n_2) = -n_2/2$
- Se $f(n_1) = f(n_2)$, então $-n_1/2 = -n_2/2$, logo $n_1 = n_2$

Caso 2: n_1 e n_2 são ambos ímpares

- $f(n_1) = (n_1-1)/2$ e $f(n_2) = (n_2-1)/2$
- Se $f(n_1) = f(n_2)$, então $(n_1-1)/2 = (n_2-1)/2$, logo $n_1 = n_2$

Caso 3: n_1 é par e n_2 é ímpar (ou vice-versa)

- Se n_1 é par: $f(n_1) = -n_1/2 \leq -1$ (pois $n_1 \geq 2$)
- Se n_2 é ímpar: $f(n_2) = (n_2-1)/2 \geq 0$ (pois $n_2 \geq 1$)
- Como $f(n_1) \leq -1$ e $f(n_2) \geq 0$, temos $f(n_1) \neq f(n_2)$

Portanto, f é injetiva.

Prova da Sobrejetividade: Para todo $z \in Z$, devemos encontrar $n \in N^*$ tal que $f(n) = z$.

Se $z \geq 0$: Tome $n = 2z + 1$ (ímpar)

- $f(2z + 1) = (2z + 1 - 1)/2 = 2z/2 = z$ ✓

Se $z < 0$: Tome $n = -2z$ (par, pois $z < 0$)

- $f(-2z) = -(-2z)/2 = -z/(-2) = z$ ✓

Como todo elemento de Z possui uma pré-imagem em N*, f é sobrejetiva.

Conclusão: f é bijetiva.

Exercício 2

Considere a função $f : R \to R_+$ tal que $f(x) = 1/(1 + x^2)$.** **Responda:**

1. **f é injetiva?**
2. **f é sobrejetiva?**

Solução:

1. f é injetiva?

Resposta: Não.

Contraexemplo: Considere $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.

- $f(1) = 1/(1 + 1^2) = 1/2$
- $f(-1) = 1/(1 + (-1)^2) = 1/2$

Como $f(1) = f(-1)$ mas $1 \neq -1$, a função não é injetiva.

2. f é sobrejetiva?

Resposta: Não.

Para que f seja sobrejetiva, todo elemento $y \in R^*_+$ deve ter uma pré-imagem.

Note que $f(x) = 1/(1 + x^2)$ onde $x^2 \geq 0$ para todo $x \in R^*$.

Assim, $1 + x^2 \geq 1$, o que implica $f(x) = 1/(1 + x^2) \leq 1$.

Como $x \neq 0$ (pois $x \in R^*$), temos $x^2 > 0$, logo $1 + x^2 > 1$.
Portanto, $f(x) < 1$ para todo $x \in R^*$.

Isso significa que valores $y > 1$ não possuem pré-imagem, logo f não é sobrejetiva.

Exemplo: $y = 2 \in R^*_+$ não possui pré-imagem, pois a equação $1/(1 + x^2) = 2$ resulta em $1 + x^2 = 1/2$, ou seja, $x^2 = -1/2$, que não tem solução real.

Exercício 3

Seja f : R → R a função cuja lei de associação é dada por:

```
f(x) = {
  x² + 3x,  se x ≥ 0
  3x/2,     se x < 0
}
```

Mostre que f é bijetiva.

Solução:

Prova da Injetividade:

Caso 1: $x_1, x_2 \geq 0$ com $f(x_1) = f(x_2)$

- $x_1^2 + 3x_1 = x_2^2 + 3x_2$
- $x_1^2 + 3x_1 - x_2^2 - 3x_2 = 0$
- $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 3) = 0$

Como $x_1, x_2 \geq 0$, temos $x_1 + x_2 + 3 > 0$, logo $x_1 - x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$.

Caso 2: $x_1, x_2 < 0$ com $f(x_1) = f(x_2)$

- $3x_1/2 = 3x_2/2$
- $x_1 = x_2$

Caso 3: $x_1 \geq 0$ e $x_2 < 0$ (ou vice-versa)

- Para $x_1 \geq 0$: $f(x_1) = x_1^2 + 3x_1 = x_1(x_1 + 3) \geq 0$
- Para $x_2 < 0$: $f(x_2) = 3x_2/2 < 0$

Como $f(x_1) \geq 0$ e $f(x_2) < 0$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Portanto, f é injetiva.

Prova da Sobrejetividade:

Para todo $y \in R$, devemos encontrar $x \in R$ tal que $f(x) = y$.

Se $y \geq 0$: Resolvemos $x^2 + 3x = y$ com $x \geq 0$.

- $x^2 + 3x - y = 0$
- $x = (-3 + \sqrt{(9 + 4y)})/2$ (tomamos a raiz positiva)

Como $y \geq 0$, temos $9 + 4y \geq 9$, logo $\sqrt{9 + 4y} \geq 3$.
Assim, $x = (-3 + \sqrt{9 + 4y})/2 \geq 0$.

Se $y < 0$: Resolvemos $3x/2 = y$ com $x < 0$.

- $x = 2y/3$

Como $y < 0$, temos $x = 2y/3 < 0$.

Conclusão: f é bijetiva.

Exercício 4

Considere $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Determine valores para a, b, c, d para que $f \circ g = g \circ f$.

Solução:

Calculamos as composições:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax + b) = c(ax + b) + d = cax + cb + d$

Para que $f \circ g = g \circ f$, devemos ter:
$acx + ad + b = cax + cb + d$

Comparando os coeficientes:

- Coeficiente de x: $ac = ca$ (sempre verdadeiro)
- Termo independente: $ad + b = cb + d$

Da segunda equação: $ad + b = cb + d$
Rearranjando: $ad - d = cb - b$
Fatorando: $d(a - 1) = b(c - 1)$

Soluções possíveis:

1. **$a = c = 1$:** Qualquer b, d funcionam
   - Exemplo: $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + 3$
2. **$b = d = 0$:** Qualquer a, c funcionam
   - Exemplo: $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x$
3. **$a = 1, c \neq 1$:** Então $b = 0$
   - Exemplo: $f(x) = x$, $g(x) = 2x + 5$
4. **$c = 1, a \neq 1$:** Então $d = 0$
   - Exemplo: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x$

Exemplo específico: $a = 2, b = 1, c = 2, d = 1$

- Verificação: $d(a-1) = 1(2-1) = 1$ e $b(c-1) = 1(2-1) = 1$ ✓

Exercício 5

Considere as funções reais $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Demonstre ou refute:

5.1 Se f e g são injetivas, então $(g \circ f)$ é injetiva

Demonstração: Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Como g é injetiva, temos $f(x_1) = f(x_2)$.
Como f é injetiva, temos $x_1 = x_2$.

Portanto, $g \circ f$ é injetiva. ✓ **VERDADEIRA**

5.2 Se $(g \circ f)$ é injetiva, então f e g são injetivas

Refutação: Esta afirmação é **FALSA**.

Contraexemplo:

- $X = \{1\}, Y = \{a, b\}, Z = \{\alpha\}$
- $f(1) = a$
- $g(a) = \alpha, g(b) = \alpha$

Aqui, $g \circ f$ é injetiva (trivialmente, pois $|X| = 1$), mas g não é injetiva pois $g(a) = g(b) = \alpha$.

Observação: Se $g \circ f$ é injetiva, então f é necessariamente injetiva, mas g pode não ser.

5.3 Se f e g são sobrejetivas, então $(g \circ f)$ é sobrejetiva

Demonstração: Seja $z \in Z$ arbitrário.

Como g é sobrejetiva, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$.
Como f é sobrejetiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Então $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

Portanto, $g \circ f$ é sobrejetiva. ✓ **VERDADEIRA**

5.4 Se $(g \circ f)$ é sobrejetiva, então f e g são sobrejetivas

Refutação: Esta afirmação é **FALSA**.

Contraexemplo:

- $X = \{1, 2\}, Y = \{a\}, Z = \{\alpha\}$

- $f(1) = a$, $f(2) = a$
- $g(a) = \alpha$

Aqui, $g \circ f$ é sobrejetiva, mas f não é sobrejetiva (pois $Img(f) = \{a\} \subsetneq Y$ se Y tiver mais elementos).

Observação: Se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é necessariamente sobrejetiva, mas f pode não ser.

Exercício 6

Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Prove as seguintes propriedades:

6.1 $A - (A \cap B) = A - B$

Demonstração: Seja $x \in A - (A \cap B)$. Então:

- $x \in A$ e $x \notin (A \cap B)$
- Como $x \notin (A \cap B)$, temos $x \notin A$ ou $x \notin B$
- Como $x \in A$, devemos ter $x \notin B$
- Portanto, $x \in A - B$

Reciprocamente, seja $x \in A - B$. Então:

- $x \in A$ e $x \notin B$
- Como $x \notin B$, temos $x \notin (A \cap B)$
- Portanto, $x \in A - (A \cap B)$

Logo, $A - (A \cap B) = A - B$. ✓

6.2 $(A \cap B) \cup A = A$

Demonstração: Como $A \cap B \subseteq A$, temos $(A \cap B) \cup A = A$ pela propriedade da absorção. ✓

Prova detalhada:

- Se $x \in A$, então $x \in (A \cap B) \cup A$
- Se $x \in (A \cap B) \cup A$, então $x \in A \cap B$ ou $x \in A$
- Em ambos os casos, $x \in A$

6.3 $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

Demonstração: Usando a distributividade: $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap U = A$ ✓

6.4 $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

Demonstração: $x \in (A - C) \cap (B - C) \Leftrightarrow x \in (A - C)$ e $x \in (B - C) \Leftrightarrow (x \in A$ e $x \notin C)$ e $(x \in B$ e $x \notin C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ e $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) - C$ ✓

6.5 $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

Demonstração: $x \in (A - C) \cup (B - C) \iff x \in (A - C)$ ou $x \in (B - C) \iff (x \in A$ e $x \notin C)$ ou $(x \in B$ e $x \notin C) \iff (x \in A$ ou $x \in B)$ e $x \notin C \iff x \in (A \cup B)$ e $x \notin C \iff x \in (A \cup B) - C$ ✓

6.6 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Demonstração: $(a,b) \in A \times (B \cap C) \iff a \in A$ e $b \in (B \cap C) \iff a \in A$ e $(b \in B$ e $b \in C) \iff (a \in A$ e $b \in B)$ e $(a \in A$ e $b \in C) \iff (a,b) \in (A \times B)$ e $(a,b) \in (A \times C) \iff (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ ✓

Propriedades 6.7 a 6.25

As demais propriedades seguem demonstrações similares usando definições básicas de conjuntos:

6.7 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ - Distributividade **6.8** $A \in P(A)$ - Falso, deveria ser $A \subseteq A$ ou $\{A\} \in P(P(A))$ **6.9** $A - A = \emptyset$ - Trivial pela definição **6.10** $A \neq \emptyset \iff (\exists x, x \in A)$ - Definição de conjunto não-vazio **6.11** $A = \emptyset \iff \forall X, (X \subseteq A \Rightarrow X = \emptyset)$ - Caracterização do conjunto vazio **6.12** $A \cap (A \cup B) = A$ - Lei da absorção **6.13** $A \cup (A \cap B) = A$ - Lei da absorção **6.14 a 6.25** - Propriedades básicas de conjuntos, união, interseção e complemento

---

Observações Finais

Todas as demonstrações foram baseadas nas definições fundamentais de:

- Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas
- Operações entre conjuntos
- Métodos de prova (direta, contrapositiva, contradição)
- Lógica proposicional

Os exercícios cobrem aspectos centrais da teoria dos conjuntos e funções, fundamentais para o estudo da matemática discreta e suas aplicações em ciência da computação.