

# Introduction

## Contents

### Cours

- [Rappels de probabilité](#)
- [Éléments de statistiques](#)
- [Statistique descriptive](#)
- [Sélection de variables](#)
- [Analyse en composantes principales](#)
- [Régression](#)
- [Quelques méthodes de classification](#)

### TP

- [Sujets de TP](#)
- [TP Statistiques descriptives](#)
- [TP ACP](#)
- [Définition de quelques outils](#)
- [Exercice 1 : étude de propriétés de vins](#)
- [Exercice 2 : étude de données image](#)
- [TP Régression linéaire](#)
- [TP long](#)

### Annexes

- [Analyse canonique](#)
- [Analyse Factorielle des correspondances](#)
- [Analyse des correspondances multiples](#)
- [TP AFC / ACM](#)
- [Exercice 1 : Analyse Factorielle des Correspondances](#)
- [Exercice 2 : Analyse des Correspondances Multiples](#)
- [Index](#)

## Eléments de vocabulaire

On définit ici de manière informelle les termes utilisés dans la suite :

- **Population** : ensemble de cardinalité finie, notée  $N$ , ou infinie ;
- **Echantillon** : sous-ensemble de la population, de cardinalité  $n$  ;
- **Individu** : sous-ensemble de la population ou de l'échantillon, de cardinalité 1 ;
- **Caractère** : nature de la caractéristique à laquelle on s'intéresse statistiquement. Il peut être **qualitatif** (nominal ou ordinal) ou **quantitatif** (discret ou continu).

## Probabilités et statistiques

La question qui se pose est la suivante : comment définir ou estimer la valeur de probabilité associée à un événement ? Plusieurs points de vue ont été proposés et adoptés que nous synthétisons très brièvement.

### Approche fréquentiste

Ce point de vue historique, souvent présenté comme le plus "naturel" ou "objectif", consiste à définir une probabilité comme la limite de la fréquence d'observation de la caractéristique lorsque la taille de l'échantillon devient infinie. On suppose ici que les probabilités sont une loi de la nature qu'il faut mesurer par l'expérience. En pratique, la probabilité d'un événement est donc estimée/approximée en répétant un très grand nombre de fois l'expérience dans les mêmes conditions. C'est de ces expériences répétées que sont nés les outils de la statistique tels que la régression linéaire ou le test du  $\chi^2$ . On rencontre néanmoins très rapidement des limitations avec ce type d'approche. D'une part, il est impossible d'un point de vue fréquentiste de traiter de petits échantillons de données. De plus, certains types de données ne sont pas exploitables en raison de leur caractère non expérimental (par exemple, quelle probabilité associer à un événement du type "nombre de votants aux prochaines élections" qui n'est pas répétable). Enfin, il est parfois difficile de définir un modèle permettant de modéliser une erreur de mesure ou la variation observée d'un caractère dans une population.

### Approche bayésienne

Un point de vue bien différent consiste à définir les probabilités comme une mesure subjective de l'incertitude. Dans ce cadre, tout événement peut être probabilisé à partir d'un a priori de l'observateur. Ce point de vue est appelé Bayésien (fait appel à la règle de Bayes) pour calculer la loi de probabilité des événements à partir des échantillons de données a posteriori. L'intérêt majeur de ce type de démarche est que tout est probabilisable (jusqu'aux paramètres du modèle utilisé) et qu'il s'appuie sur des résultats de la théorie des probabilités, comme le théorème central limite. Ce point de vue "subjectif" a longtemps été dénoncé par les adeptes de l'approche fréquentiste qui rejettent l'idée que l'on puisse définir un tel a priori sur les événements. En effet, l'objection majeure que l'on oppose souvent à la méthodologie bayésienne est que deux observateurs différents, ayant des a priori différents, donneront des résultats ou des interprétations différentes.

T. Bayes



## Démarche générale

De manière assez générale, une étude statistique consiste à obtenir des informations sur un caractère concernant une population de grande taille en s'appuyant sur celles d'un sous-ensemble de taille réduite (l'échantillon), afin le plus souvent d'orienter une décision. Le choix de l'échantillon se fera par tirage avec ou sans remise, par tirage uniforme (« au hasard ») ou non (tirage stratifié dans le cas d'un sondage par exemple, ou selon une loi de probabilité précise si une information a priori est disponible). On estime alors des propriétés d'un caractère de l'échantillon. A partir de ces estimations, on cherche à donner « au mieux » des valeurs aux paramètres correspondant de la population (la moyenne, la variance,...). L'estimation pourra être ponctuelle ou par intervalle de confiance. On pourra également s'intéresser à des tests d'ajustement (ou d'adéquation) à une loi de type donné. La décision, étape finale de l'analyse statistique, se fera par des tests statistiques.

#### Example 1

Un cuisinier cherche à savoir si sa sauce est suffisamment salée. Après avoir remué sa casserole, il prélève une cuillérée de sauce (l'échantillon). Il la goûte (il estime le caractère salé de l'échantillon). En fonction du résultat, il décide que la casserole de sauce (la population) est suffisamment salée ou pas.

#### Important

La science des statistiques se décompose donc en :

- la **statistique descriptive**, dont l'objectif est de décrire le caractère d'un échantillon en résumant l'information qu'il contient ;
- la **statistique inférentielle**, dont l'objectif est d'inférer, à partir de l'information recueillie sur l'échantillon, des propriétés valables sur la population, de manière la plus fiable possible.

A cette dichotomie s'ajoute la **statistique exploratoire**, branche de l'analyse de données, qui cherche à comprendre l'organisation des individus de l'échantillon (existe-t-il des groupes d'individus semblables ? les caractères mesurés sont-ils les plus pertinents ?...)

Nous n'abordons pas dans ce cours la statistique inférentielle.

## Rappels de probabilité

### Expérience aléatoire

#### Définitions

##### Definition 1 (Expérience aléatoire)

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat a priori. Répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents.

##### Example 2

- Le lancer de dé
- Les côtes exactes d'une pièce fabriquée dans un atelier

##### Definition 2 (Issue)

On appelle **issue** d'une expérience aléatoire l'un des résultats possibles de cette expérience

##### Definition 3 (Univers des possibles)

On appelle **univers des possibles** d'une expérience aléatoire l'ensemble  $\Omega$  des issues de cette expérience.

##### Example 3

Lorsque l'on joue à pile ou face avec une pièce de monnaie, l'expérience a deux issues possibles et  $\Omega = \{P, F\}$ .

L'univers des possibles n'est pas défini de manière unique, mais dépend de l'usage de l'expérience. Par exemple, pour le lancer de deux dés, on peut être intéressé par :

- le résultat du lancer, dans ce cas  $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$
- la somme des deux faces et  $\Omega = [2, 12]$

##### Definition 4 (Événement)

Etant donnée une expérience aléatoire, un **événement** est une assertion vraie ou fausse suivant l'issue de l'expérience. C'est donc un sous-ensemble  $E$  de  $\Omega$ .

##### Example 4

- Dans l'expérience du lancer de deux dés, on peut s'intéresser à l'événement « la somme des deux faces est paire » ou encore « la somme est supérieure à 7 ».
- Si l'expérience considérée concerne les jobs effectués sur une machine on peut considérer :
  1.  $\Omega = \mathbb{N}$  et l'événement « le nombre de jobs ne dépasse pas 10 » :  $E = [0, 10]$
  2.  $\Omega = \mathbb{R}^*$  et l'événement « le job dure plus de 15 s » et  $E = ]15, +\infty[$

Il existe certains événements particuliers :

- l'événement dit certain : c'est l'univers des possibles (par exemple « la somme des deux faces d'un lancer de deux dés est inférieure ou égale à 12 »)
- l'événement impossible (« la somme des deux faces d'un lancer de deux dés est supérieure ou égale à 20 »)
- l'événement simple : tout singleton de  $\Omega$
- l'événement composé : tout sous-ensemble de  $\Omega$  de cardinalité au moins égale à 2.

### Notation et opérations sur les événements

Les événements peuvent être interprétés soit d'un point de vue ensembliste (Diagrammes de Venn), soit de manière équivalente d'un point de vue probabiliste.

Notation	Interprétation probabiliste
$\omega$	issue possible, événement élémentaire
$A$	événement
$\omega \in A$	$\omega$ réalise $A$
$A \subset B$	$A$ implique $B$
$A \cup B$	$A$ ou $B$
$A \cap B$	$A$ et $B$
$\bar{A}$	contraire de $A$
$\emptyset$	événement impossible
$\Omega$	événement certain
$A \cap B = \emptyset$	$A$ et $B$ incompatibles
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$	$A$ et pas $B$

## Probabilités

### Objectif

L'objectif des probabilités est de donner une **mesure** à la chance qu'a un événement de se réaliser lors d'une expérience aléatoire. Pour ce faire, on définit une fonction  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$  vérifiant certains axiomes et propriétés.

#### Definition 5 (Tribu)

Soit  $T$  une famille d'événements. Pour que  $T$  soit probabilisable, il faut que :

- $\emptyset \in T, \Omega \in T$
- Si  $A_i$  est une suite dans  $T$  alors  $\cup_i A_i \in T$  et  $\cap_i A_i \in T$
- Si  $A \in T$  alors  $\bar{A} \in T$

$T$  est une **tribu** et  $(\Omega, T)$  est un **espace probabilisable**.

En pratique, on choisit souvent la tribu engendrée par une famille de  $n$  événements  $A_i$ , qui est l'ensemble des parties de  $\Omega$  obtenues en effectuant l'union de  $k$  événements  $A_i, i \in [\![1, n]\!]$ .

#### Example 5

Dans le cas du lancer d'un dé,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et :

- la tribu engendrée par la famille d'événements  $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$  est  $\{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ .
- la tribu engendrée par la famille d'événements  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$  est l'ensemble des parties de  $\Omega$ . Plus généralement, si  $\Omega$  est dénombrable, cette tribu est appelée **tribu discrète**.

On peut également s'intéresser, si  $\Omega = \mathbb{R}$ , à la tribu engendrée par les ouverts de  $\mathbb{R}$ , on parle alors de **tribu borélienne**.

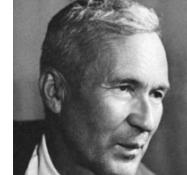
### Probabilité

#### Axiom 1 (Axiomatique de Kolmogorov)

On appelle **probabilité** sur  $(\Omega, T)$  une application  $P$  de  $T$  dans  $[0, 1]$  vérifiant :

- $(\forall A \in T) P(A) \in [0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute famille dénombrable  $(A_i)$  d'événements disjoints  $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

A. Kolmogorov



$(\Omega, T, P)$  est un **espace probabilisé**.

#### Property 1

- $P(\emptyset) = 0$
- $(\forall A) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $(\forall A, B) P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $(\forall A, B) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $(\forall A, B)$  si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$
- Pour toute famille dénombrable  $(A_i)$  d'événements quelconques  $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

### Conditionnement

Les probabilités **conditionnelles** intègrent une information supplémentaire sous la forme de l'observation de la réalisation d'un événement donné.

#### Definition 6 (Probabilité conditionnelle)

Soit  $B$  un événement de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant  $B$  le rapport

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A | B)$  représente la probabilité que  $A$  se réalise sachant que  $B$  est réalisé.

Remarquons que l'on peut écrire  $P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A)$ .

### Example 6

7% des français sont atteints d'un cancer du poumon. 70% des malades sont des fumeurs et 50% des français fument. On recherche la probabilité d'être atteint d'un cancer du poumon lorsque l'on est fumeur. L'événement  $A$  est « avoir un cancer du poumon », et  $B$  est « être fumeur ». D'après les données on a  $P(A)=0.07$ ,  $P(B) = 0.5$  et  $P(B | A) = 0.7$ . On a alors  $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  avec  $P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$  d'où

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} = 0.098$$

## Indépendance

### Definition 7 (Indépendance)

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **indépendants** si et seulement si  $P(A | B) = P(A)$ .

On a alors bien évidemment  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

### Remark 1

La notion d'indépendance est directement rattachée à  $P$ :  $A$  et  $B$  peuvent être indépendants pour une probabilité donnée, mais pas pour une autre.

On peut généraliser la notion d'indépendance à une famille d'événements  $(A_i)_{i \in [1,n]}$ : on dira que les  $A_i$  sont **mutuellement indépendants** si pour tout  $I \subset [1,n]$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

L'indépendance mutuelle est plus forte que l'indépendance deux à deux.

### Remark 2

La notion d'indépendance n'est pas une notion purement ensembliste. Deux événements peuvent être indépendants pour une loi de probabilité et pas pour une autre.

## Théorème des probabilités totales

### Theorem 1

Soit  $\{B_i\}$  un système complet d'événements (qui forment donc une partition de  $\Omega$ ). Pour tout événement  $A$ , on peut écrire

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

## Règle de Bayes

A partir de l'égalité  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ , on définit la règle de Bayes

$$(\forall A, B) \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Si  $B_i$  est un système complet d'événements, on a de plus

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{\sum_k P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_k P(A|B_k)P(B_k)}$$

### Example 7

Un fabricant de boulons a trois usines de fabrication situées à Amiens, Besançon et Clermont-Ferrand. Amiens fournit 25% de la production, Besançon 20% et Clermont-Ferrand 55%. Les boulons de 5mm représentent 20% des boulons produits à Amiens, 30% à Besançon et 15% à Clermont-Ferrand. On répond à la question suivante : sachant que le boulon acheté a une taille de 5mm, quelle est la probabilité qu'il soit produit à Clermont-Ferrand ?

On note  $B_1$  (respectivement  $B_2, B_3$ ) l'événement « Le boulon est produit à Amiens (resp. Besançon, Clermont-Ferrand) ». On note également  $A$  l'événement « Le boulon fait 5mm ». On cherche donc

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.15*0.55}{0.1925} = 0.428.$$

On a calculé dans l'exemple une **probabilité a posteriori**, c'est à dire sachant une information supplémentaire (le boulon fait 5mm). La prise en compte de cette information modifie la valeur de la probabilité associée à  $B_3$ . La théorie des probabilités au travers de l'approche bayésienne est adaptée pour prendre en compte toute information nouvelle.

## Variable aléatoire

### Concept de variable aléatoire

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ .

### Definition 8 (Variable aléatoire)

Une variable aléatoire est une application  $X : \Omega \rightarrow E$  (on prendra  $E = \mathbb{R}$ )

Pour obtenir la probabilité d'une valeur quelconque image par  $X$ , il suffit de dénombrer les  $\omega$  qui réalisent cette valeur.

### Example 8

Si  $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$ , on considère la loi de probabilité  $P$  telle que :  $(\forall \omega \in \Omega) \quad P(\omega) = \frac{1}{2}$ .  $P(X = 1) = P(\{\text{Pile}\}) = \frac{1}{2}$ .

On dit que l'on transporte la loi de probabilité de  $\Omega$  sur  $E$  par l'application  $X$ .

Les éléments de  $E$  sont les **réalisations** de la variable aléatoire.

#### Example 9

Si l'expérience consiste à observer le résultat du tirage de deux dés à 6 faces,  $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$ , on considère la loi de probabilité telle que  $(\forall \omega \in \Omega) P(\omega) = \frac{1}{36}$ .

Si l'application  $X$  réalise la somme des deux éléments de  $\omega \in \Omega$ , alors on a par exemple  $P(X = 3) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36}$ , ou encore  $P(X = 5) = P(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36}$ .

#### Variable aléatoire mesurable

On définit sur  $E$  une tribu  $T'$ .  $(E, T')$  est alors un espace probabilisable, et tout élément  $B$  de  $T'$  est un évènement. On note alors  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$

#### Definition 9 (Variable aléatoire mesurable)

Une variable aléatoire  $X$  est dite mesurable si et seulement si :  $(\forall B \in T') X^{-1}(B) \in T$

Dans les deux exemples précédents, on a par exemple  $X^{-1}(1) = \{Pile\}$  ou encore  $X^{-1}(3) = \{(1,2), (2,1)\}$  et  $P(X = 3) = P(X^{-1}(3)) = \frac{2}{36}$ .

On note souvent  $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega/X(\omega) \in B\})$  et on l'appelle **probabilité image** de  $P$  par  $X$ . En calculant la probabilité de chaque réalisation de la variable aléatoire  $X$ , on peut en déduire la **loi de probabilité** (ou **distribution**) de  $X$ .

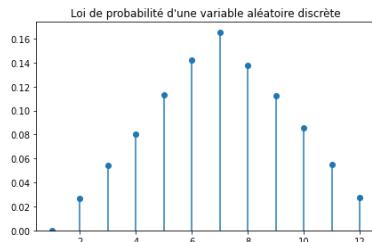
- Pour une variable aléatoire discrète  $X$ , la loi de probabilité est donc  $P_X(x_i) = P(X = x_i) = P(\{\omega/X(\omega) = x_i\})$ .  $P_X$  est appelée **masse ponctuelle**.
- Pour une variable aléatoire continue  $X$ , la loi de probabilité est donc  $f_X(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx) = P(\{\omega/x \leq X(\omega) \leq x + dx\})$ .  $f_X$  est appelée **densité de probabilité**.

```
from math import floor
from random import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tirage():
    d1=floor(6*random()+1)
    d2=floor(6*random()+1)
    return d1+d2 -1

x = np.arange(0,12)+1
f = np.zeros(12)
n=10000
for i in range(n):
    f[tirage() ] += 1
f=f/n

plt.plot( x, f, 'o' )
plt.vlines( x, 0, f )
plt.ylim( bottom=0 )
plt.title("Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète")
plt.tight_layout()
plt.show()
```



#### Definition 10 (Fonction de répartition)

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  est l'application  $F_X$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0,1]$  telle que  $F_X(x) = P(X \leq x)$ .

$F_X$  est donc monotone croissante, continue à droite et on a en particulier :

- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$

```

from math import floor
from random import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tirage():
    d1=floor(6*random()+1)
    d2=floor(6*random()+1)
    return d1+d2 -1

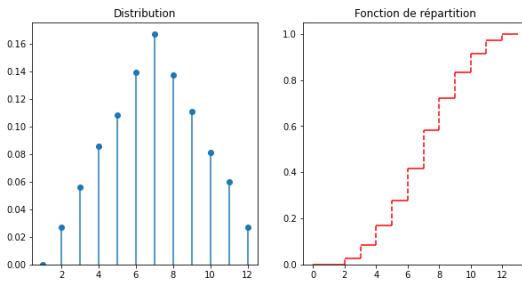
x = np.arange(0,12)+1
f = np.zeros(12)
n=10000
for i in range(n):
    f[tirage() ] += 1
f=f/n

data = np.arange(0, 14)
fn = np.insert(np.cumsum(f), 0, 0)

plt.figure(figsize=(10,5))
plt.subplot(121)
plt.plot( x, f, 'o' )
plt.vlines( x, 0, f )
plt.ylim( bottom=0 )
plt.title("Distribution")
plt.subplot(122)

plt.hlines(y=fn, xmin=data[:-1], xmax=data[1:], color='red', zorder=1)
plt.vlines(x=data[1:-1], ymin=fn[:-1], ymax=fn[1:], color='red',
           linestyle='dashed', zorder=1)
plt.ylim( bottom=0 )
plt.title("Fonction de répartition")
plt.show()

```



La notion de variable aléatoire est ainsi une formalisation de la notion de grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire. On peut alors préciser et formaliser la définition précédente.

#### Definition 11 (Variable aléatoire)

Une variable aléatoire est une application mesurable  $X : (\Omega, \mathcal{T}, P) \rightarrow (E, \mathcal{T}')$

#### Remark 3

- Si  $E = \mathbb{N}$ , on parle de variable aléatoire (réelle) discrète
- Si  $E = \mathbb{R}$ , on parle de variable aléatoire (réelle) continue.  $\mathcal{T}'$  est alors la tribu borélienne
- Si  $E = \mathbb{N}^n$  ou  $E = \mathbb{R}^n$ , on parle de vecteur aléatoire de dimension  $n$ .

#### Caractéristiques des variables aléatoires

Une loi de probabilité est caractérisée par un certain nombre de grandeurs :

- sa valeur centrale
- sa dispersion
- sa forme

#### Espérance mathématique d'une variable aléatoire

#### Definition 12 (Espérance)

Soit  $X$  une variable aléatoire. On définit l'espérance mathématique de  $X$ , et on note  $\mathbb{E}(X)$  par :

- $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i} x_i P_X(x_i)$  si  $X$  est discrète et si la somme converge.
- $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \int_x x dP(x) = \int_x x f_X(x) dx$  si  $X$  est continue et si l'intégrale converge.

$\mathbb{E}(X)$  est la moyenne arithmétique (également notée  $\mu_X$ ) des différentes valeurs prises par  $X$  pondérées par leur probabilité.

```

from scipy.stats import rv_discrete
x = [10, 20, 30]
p = [0.2, 0.3, 0.5]
distribution = rv_discrete(values=(x, p))
print("Espérance : ", distribution.expect())

```

Espérance : 23.0

```

from scipy.stats import rv_continuous
from math import exp
a = 3.5
b = 5.5
class distribution_gen(rv_continuous):
    def _pdf(self, x):
        return 6*exp(-(x - 5)**2)
    distribution = distribution_gen()
    print("Espérance : ", distribution.expect(lambda x: 1, lb=a, ub=b))

```

Espérance : 7.904816400226159

On dira que  $X$  est centrée si  $\mathbb{E}(X) = 0$ .

#### Example 10

Pour l'expérience d'un lancer de dé à 6 faces :  $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^6 i \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$

#### Property 2

- $(\forall a \in \mathbb{R}) \mathbb{E}(a) = a$
- $(\forall a \in \mathbb{R}) \mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$
- $(\forall a \in \mathbb{R}) \mathbb{E}(X + a) = \mathbb{E}(X) + a$

Moment d'une fonction d'une variable aléatoire

Soit  $\phi$  l'application qui associe à toute variable aléatoire  $X$  la variable aléatoire  $Y = \phi(X)$ .

#### Definition 13 (Moment)

Le moment  $\mathbb{E}[\phi(X)]$  de la fonction  $\phi$  de la variable aléatoire  $X$  est égal à

- $\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{x_i} \phi(x_i) P_X(x_i)$  si  $X$  est discrète
- $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_x \phi(x) f_X(x) dx$  si  $X$  est continue

#### Definition 14 (Moment d'ordre $k$ )

Le moment d'ordre  $k$  d'une variable aléatoire  $X$  est égal à :

- $\mathbb{E}(X^k) = \sum_{x_i} x_i^k P_X(x_i)$  si  $X$  est discrète
- $\mathbb{E}(X^k) = \int_x x^k f_X(x) dx$  si  $X$  est continue

Le moment d'ordre  $k$  est donc un cas particulier avec  $Y = X^k$ .

#### Remark 4

L'espérance  $\mathbb{E}(X)$  est le moment d'ordre 1.

#### Definition 15 (Moment centré d'ordre $k$ )

On appelle moment centré d'ordre  $k$  la quantité  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$

Ainsi :

- pour une variable aléatoire discrète  $X$ ,  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k] = \sum_{x_i} (x_i - \mathbb{E}(X))^k P_X(x_i) = \sum_{x_i} (x_i - \mu_X)^k P_X(x_i)$
- pour une variable aléatoire continue  $X$ ,  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k] = \int_x (x - \mathbb{E}(X))^k f_X(x) dx = \int_x (x - \mu_X)^k f_X(x) dx$

Variance d'une variable aléatoire

Pour  $k=2$ , le moment centré d'ordre 2 est appelé la **variance** et est noté  $\mathbb{V}(X)$ . La racine carrée de la variance est l'**écart type** et est noté  $\sigma_X$ . On a donc  $\sigma_X^2 = \mathbb{V}(X)$ .

#### Proposition 1 (Formule de Koenig)

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu_X^2$$

En effet,  $\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \mathbb{E}[(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2)] = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu_X \mathbb{E}(X) + \mu_X^2$ .

```
from scipy.stats import rv_discrete
x = [10, 20, 30]
p = [0.2, 0.3, 0.5]
distribution = rv_discrete(values=(x, p))
print("Variance : ", distribution.var())
print("Ecart-type : ", distribution.std())
```

Variance : 61.0  
Ecart-type : 7.810249675906654

```
from scipy.stats import rv_continuous
from math import exp
a = 3.5
b = 5.5
class distribution_gen(rv_continuous):
    def _pdf(self, x):
        return 6*exp(-(x - 5)**2)
distribution = distribution_gen(a=a, b=b)
print("Variance: ", distribution.var())
print("Ecart-type : ", distribution.std())
```

Variance: 0.029595913310970445  
Ecart-type : 0.1720346282321395

#### Property 3

- $(\forall a, b \in \mathbb{R}) \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$
- $(\forall a \in \mathbb{R}) \mathbb{E}[(X - a)^2] = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X) - a)^2$  (théorème de Huygens)
- $\forall k > 0 P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$  (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

On dira que la variable aléatoire  $X$  est **réduite** (ou **normée**) si  $\mathbb{V}(X) = 1$ .

Moments d'ordre supérieur

On considère également souvent les moments d'ordre 3 (coefficients d'asymétrie ou skewness) et 4 (coefficients d'aplatissement ou kurtosis).

```
try:  
    import scipy  
except ModuleNotFoundError:  
    !pip3 install --quiet scipy
```

## Éléments de statistiques

Dans l'expression « étude statistique », il faut distinguer :

1. **les données statistiques** : suivant l'étude, plusieurs problèmes peuvent être posés :
  - Recueil des données (brutes) avec notamment le problème des sondages
  - Nature des données avec éventuellement la transformation des données brutes, notamment pour les séries chronologiques (série corrigée des variations saisonnières)
  - Organisation des données : il s'agit le plus souvent de résumer l'information par les techniques de la statistique descriptive
2. **le modèle mathématique** : une analyse du phénomène étudié doit permettre de traduire les problèmes posés par l'étude dans un langage formel, celui des probabilités. Après avoir fait des choix, des hypothèses sur la loi de probabilité et sur les paramètres de cette loi, on s'efforce de se placer dans un modèle statistique dans lequel des outils théoriques permettent de résoudre un certain nombre de problèmes théoriques. Dans ce modèle théorique, il s'agit de donner une interprétation aux données expérimentales et, souvent, des hypothèses impliquant que « même loi » et d'indépendance sont faites.
3. **l'analyse statistique** : l'utilisation d'outils statistiques adaptés au modèle retenu permet de faire l'interface entre les données statistiques et le modèle théorique choisi pour décrire le phénomène étudié.

L'étude statistique peut alors se traduire sous diverses formes :

- préciser le modèle choisi, en estimant les paramètres intervenant dans celui-ci
- juger la validité d'hypothèses faites sur ces paramètres qui se traduira non pas en « confirmation d'hypothèses », mais en « détecteur d'hypothèses fausses »
- juger l'adéquation du modèle retenu en termes de lois de probabilité avec la même réserve que ci-dessus

Les résultats théoriques devront être interprétés dans le contexte de l'étude en considérant que ces résultats ont été obtenus dans le cadre d'un modèle théorique précis, d'où la nécessité d'une analyse correcte et d'une bonne formalisation. De plus, il faudra prendre en compte les techniques utilisées, qui ne permettent de répondre qu'à des questions précises. Enfin, dans le cas d'une application pratique, il faudra garder à l'esprit que les conclusions auront des conséquences économiques (ou autres).

## Echantillon d'une variable aléatoire

### Définition

#### Definition 16 (Echantillon)

Soit une variable aléatoire  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto \mathbb{R}$ . On appelle  $n$ -échantillon de la variable aléatoire parente  $X$  la donnée de  $n$  variables aléatoires  $X_1 \dots X_n$  définies sur le même espace, indépendantes, ayant même loi que  $X$ .

On a donc pour tout  $(x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$P(X_1 < x_1 \dots X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \dots P(X_n < x_n) = P(X < x_1) \dots P(X < x_n)$$

On considère alors une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$  décrite par l'intermédiaire de la variable aléatoire  $X$ . Considérer un  $n$  échantillon de  $X$  consiste à supposer la possibilité de  $n$  répétitions de l'expérience  $\mathcal{E}$  dans des conditions identiques, sans interactions entre elles.

Chaque répétition conduit à l'observation d'une valeur prise par  $X$ , d'où l'observation de  $n$  valeurs  $x_1 \dots x_n$  à la suite des  $n$  répétitions, considérées comme une valeur effectivement prise par le  $n$ -échantillon  $(X_1 \dots X_n)$  de  $X$ . Les valeurs  $(x_1 \dots x_n)$  relèvent de l'observation : ce sont les données statistiques recueillies à la suite des  $n$  expériences : elles sont appelées réalisation du  $n$ -échantillon.

A noter que les hypothèses de même loi et d'indépendance sont simplificatrices.

### Schéma de Bernoulli et modèle binomial

Si  $\mathcal{E}$  n'a que deux éventualités possibles (réalisation ou non d'un événement  $A$ ), alors l'expérience peut être décrite par l'intermédiaire d'une variable aléatoire  $X : \mathbb{I}_A$ , fonction indicatrice de  $A$ ), de Bernoulli  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto \{0, 1\}$  avec  $P(X = 1) = P(A) = p \in ]0, 1[$ .

Si  $\mathcal{E}$  est répétée  $n$  fois dans des conditions identiques, sans interaction entre elles, on considère un  $n$ -échantillon  $(X_1 \dots X_n)$  de variable aléatoire parente  $X$ . Les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  représentent le nombre de réalisations de  $A$  à la suite des  $n$  répétitions. Une telle situation est dite relever du schéma de Bernoulli.

#### Property 4

$S_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto \llbracket 0, n \rrbracket$  a une loi binomiale  $B(n, p)$  :

- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $\mathbb{E}(S_n) = np, \quad \mathbb{V}(S_n) = np(1-p)$

En effet, d'après l'indépendance pour toute suite  $(\delta_1 \dots \delta_n)$  avec pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \delta_k \in \{0, 1\}$ , on a :

$$P(X_1 = \delta_1 \dots X_n = \delta_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k = \delta_k) = \prod_{k=1}^n P(X = \delta_k) = p^{\delta_n} (1-p)^{(n-\delta_n)}$$

avec  $\delta_1 + \dots + \delta_n = s_n$ , les variables aléatoires ayant même loi de Bernoulli que  $X$ .

Le nombre de solutions de  $\delta_1 + \dots + \delta_n = s_n$  avec  $s_n \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\delta_k \in \{0, 1\}$  est  $\binom{s_n}{n}$ , d'où le résultat.

D'après la linéarité de l'espérance et l'égalité de Bienaymé, on a de plus

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = n\mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = n\mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

### Moyenne et variances empiriques d'un $n$ -échantillon

Etant donné un  $n$ -échantillon  $(X_1 \dots X_n)$  d'une variable aléatoire parente  $X$ , on appelle :

- moyenne empirique du  $n$ -échantillon la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

- variance empirique biaisée du  $n$ -échantillon la variable aléatoire (Ne pas confondre avec la variable  $S_n$  du schéma de Bernoulli)

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \bar{X}_n^2$$

- variance empirique non biaisée du  $n$ -échantillon la variable aléatoire

$$S'^2_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$$

On a bien sûr  $(n-1)S'^2_n = nS_n^2$ .

Les valeurs prises par  $\bar{X}_n$  coïncident avec la moyenne expérimentale  $\bar{x}_n$  des données expérimentales  $(x_1 \dots x_n)$ , réalisation du  $n$ -échantillon. De même pour  $S_n^2$  pour la variance expérimentale.

#### Property 5

1.  $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}(X) = m$  ;  $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{\mathbb{V}(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$
2.  $\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$  ;  $\mathbb{E}(S'^2_n) = \sigma^2$
3. Sous l'hypothèse de normalité,  $\mathbb{V}(S'^2_n) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

En effet :

1. Immédiat d'après la linéarité de l'espérance, l'égalité de Bienaymé et la propriété  $\mathbb{V}(\alpha X) = \alpha^2 \mathbb{V}(X)$

$$2. (n-1)S'^2_n = \sum_{k=1}^n X_k^2 - n\bar{X}_n^2 \text{ d'où}$$

$$(n-1)\mathbb{E}(S'^2_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) - n\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = n(\sigma^2 + m^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + m^2\right) \text{ et le résultat.}$$

Le dernier point est admis.

#### Echantillons de variables aléatoires normales

Les lois de probabilité usuelles sont rappelées en fin de ce chapitre (voir les lois usuelles).

#### Etude d'un $n$ -échantillon

Soit un  $n$ -échantillon  $X_1 \dots X_n$  de variable aléatoire parente  $X$  de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ . On a les résultats suivants :

1.  $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$
2.  $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$  suit une loi  $\chi_{n-1}^2$
3. les variables aléatoires  $\bar{X}_n$  et  $S_n^2$  sont indépendantes
4.  $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{S_n} = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X}_n - m}{S_n}$  suit une loi de Student à  $n-1$  degrés de liberté.

#### Etude de deux échantillons indépendants

Soient un  $n$ -échantillon  $X_1 \dots X_n$  de  $X$  de loi  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ , un  $m$ -échantillon  $Y_1 \dots Y_m$  de  $Y$  de loi  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ , les échantillons étant indépendants.

Avec des notations évidentes, on a les résultats suivants :

- $F = \frac{\sigma_1^2 S_n^2(X)}{\sigma_1^2 S_n^2(Y)} = \frac{(m-1)n}{(n-1)m} \frac{\sigma_2^2 S_m^2(X)}{\sigma_2^2 S_m^2(Y)}$  admet une loi de Fisher-Snedécor  $FS(n-1, m-1)$
- $T = \sqrt{\frac{(n+m-2)mn}{m+n}} \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{nS_n^2(X) + mS_m^2(Y)}}$  admet, sous l'hypothèse  $\sigma_1 = \sigma_2$ , une loi de Student à  $(n+m-2)$  degrés de liberté.

#### Remark 5

Sous l'hypothèse  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  :

- $\bar{X}_n - \bar{Y}_m$  suit une loi  $\mathcal{N}(m_1 - m_2, \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}})$
- $\frac{nS_n^2(X)}{\sigma^2} + \frac{mS_m^2(Y)}{\sigma^2}$  a une loi  $\chi_{n-1+m-1}^2$ .



#### Loi des grands nombres

##### Inégalité de Tchebychev

##### Theorem 2

Soit une variable aléatoire  $X$  de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ . Alors :

$$(\forall t > 0) P(|X - m| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \quad \text{et} \quad (\forall u > 0) P\left(\frac{|X - m|}{\sigma} \geq u\right) \leq \frac{1}{u^2}$$

En effet : Soit  $A = \{|X - m| \geq t\}$  et  $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$  si  $\omega \in A$ , 0 sinon. Alors :

$$(\forall \omega \in \Omega) |X(\omega) - m|^2 \geq |X(\omega) - m|^2 \mathbb{1}_A(\omega) \geq t^2 \mathbb{1}_A(\omega)$$

L'espérance étant croissante et vérifiant  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$ , on a  $\sigma^2 = \mathbb{E}(|X - m|^2) \geq t^2 P(A) = t^2 P(|X - m| \geq t)$  et le résultat.



#### Remark 6

Ces inégalités, souvent très grossières et d'intérêt essentiellement théorique, n'ont d'utilité que pour  $t > \sigma$  ou  $u > 1$  (une probabilité est toujours inférieure à 1). La seconde donne un majorant de la probabilité d'observer des valeurs prises par  $X$  à l'extérieur de l'intervalle  $[m - u\sigma, m + u\sigma]$

#### Phénomène de régularité statistique

Considérons plusieurs séquences de 100 lancers d'une pièce de monnaie et notons, pour chaque séquence, la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  des fréquences des piles obtenus. Un exemple de simulation avec  $p = 0.4$  est proposé dans la figure suivante avec le code ayant servi à la produire.

```

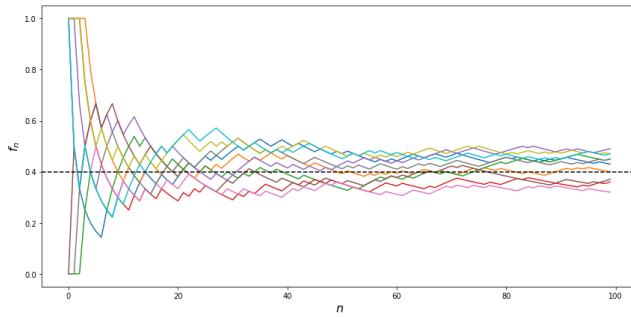
import numpy as np
from random import random
import matplotlib.pyplot as plt

def experience(n):
    p=0.4
    f = []
    for j in range(n):
        if random() <p:
            f += [1.]
        else:
            f+=[0]

    f = np.cumsum(f)
    for i in range(n):
        f[i] = float(f[i])/(i+1)
    return(f)

n = 100
plt.figure(figsize=(12,6))
x = np.arange(n)
nb_sequences = 10
for i in range(nb_sequences):
    f = experience(n)
    plt.plot(x,f)
    plt.xlabel('ns', fontsize=16)
    plt.ylabel('sf_ns', fontsize=16)
    plt.axhline(y = 0.4, color = 'k', linestyle = '--')
plt.tight_layout()

```



La fluctuation de la fréquence est importante pour des petites valeurs de  $n$ , puis elle s'atténue, pour se stabiliser autour d'une valeur voisine de  $p$ .

Cette constatation expérimentale conduit aux remarques suivantes, qui sont précisées dans la suite dans le cadre théorique :

- $f_n$  donne une idée de la valeur de  $p$  avec une plus ou moins grande précision
- la probabilité apparaît comme une fréquence limite.

#### Loi faible des grands nombres

##### Theorem 3

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d) de même loi qu'une variable  $X$ , admettant une moyenne  $m$  et un écart-type  $\sigma$ . Si  $(\bar{X}_n)_{n \geq 1}$  est la suite des moyennes empiriques associée à  $(X_n)_{n \geq 1}$  alors

$$(\forall t > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq t) = 0$$

On dit que la suite converge en probabilité vers  $m$  et on note  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} m$

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Tchebychev :  $P(|\bar{X}_n - m| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{nt^2}$  puisque  $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

L'observation des valeurs prises par la moyenne empirique donne une bonne information sur la moyenne théorique  $m$  de  $X$ . La précision, au sens ci-dessus, est d'autant meilleure que  $n$  est grand.

#### Loi forte des grands nombres

avec les hypothèses précédentes, on peut montrer que

$$P(\{\omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n(\omega) = m\}) = 1$$

Sauf cas très improbable (avec probabilité nulle), la suite des réalisations  $(\bar{x}_n)_{n \geq 1}$  des moyennes expérimentales des mesures converge vers la moyenne théorique  $m$ . On dit que la suite  $(\bar{X}_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers  $m$  et on note  $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} m$ .

##### Remark 7

Si  $X = \mathbb{1}_A$  alors  $m = p = P(A)$  et la probabilité de l'événement  $A$  apparaît comme une fréquence limite.



#### Approximation de $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

##### Théorème d'analyse

Si  $p$  est une fonction de  $n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} np(n) = \lambda > 0$ , alors pour tout  $k \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

```

En effet
$begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} p^{k(1-p)^{n-k}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}
$begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} p^{k(1-p)^{n-k}} = \frac{(np)^k}{k!} \prod_{j=0}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right) (1-p)^{n-k}

et le résultat est démontré en remarquant que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$.

### Application
Soit $S_n$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Lorsque $n$ est grand (>50) et $p$ petite ($np < 10$), on peut approcher la loi de $S_n$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$. On lit alors la valeur correspondante dans la table de la loi de Poisson, pour tout $k \in [0, n]$. $P(S_n=k) \approx e^{-np} \frac{\lambda^k}{k!}$

De plus, en remarquant que $\Sigma_{n=0}^{\infty} n$ suit $\mathcal{B}(n, 1-p)$, on a
$P(\Sigma_{n=0}^{\infty} n = k) = \begin{pmatrix} \infty \\ p \end{pmatrix} p^k (1-p)^{k-\infty} = 0
et quand $n$ est grand (>50) et $p$ voisin de 1 ($n(1-p) < 10$) on peut approcher la loi de $\Sigma_{n=0}^{\infty} n$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(n(1-p))$.

## Théorème central limite
### Le T.C.L.
```{prf:theorem}
Soit une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires, i.i.d. de même loi qu'une variable parente $X$, définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère la suite des moyennes empiriques $(\bar{X}_n)_{n \geq 1}$ des $n$-échantillons $(X_n)$.

Si $X$ admet une moyenne $m$ et un écart-type $\sigma$, alors
$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| > \epsilon\right) = \phi(\epsilon)$
où $\phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

On dit que $\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

La figure suivante illustre ce modèle dans le cas où la variable aléatoire parente $X$ suit un schéma de Bernoulli avec $P(X = 1) = 0.1$, $P(X=0) = 0.9$.


```
### Commentaires
Pour mesurer une grandeur de valeur inconnue $m$, il suffit d'une seule mesure lorsqu'il n'y a pas d'erreur expérimentale. Mais les mesures sont toujours entachées d'erreur et une expérience ou mesure peut être modélisée par une variable aléatoire $X$ dont la moyenne théorique $\mathbb{E}(X)$ est la valeur cherchée $m$ si les mesures ne sont pas biaisées, c'est-à-dire affectées d'une erreur systématique.

Ayant effectué $n$ mesures, on a une réalisation d'un $n$-échantillon de $X$ et une valeur observée $\bar{x}_n$ de la moyenne empirique $\bar{X}_n$. On peut prendre cette valeur comme estimation de $m$, l'écart $|\bar{x}_n - m|$ étant une réalisation de $|\bar{X}_n - m|$.

- La loi forte des grands nombres justifie cette estimation en supposant $\mathbb{E}(X) = m$.
- L'inégalité de Tchebychev donne une idée grossière de l'écart en terme de probabilité
- le théorème central limite donne une évaluation asymptotique de cet écart aléatoire

```

Dans la pratique, pour \$n\$ grand, dans le cadre de ce théorème, on a l'approximation suivante :

```

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad P(|\bar{X}_n - m| > b) \approx \phi(b) - \phi(a)$

### Cas particulier : théorème de Moivre-Laplace
```{prf:theorem}
Soit $X \sim \mathbb{B}(1, A)$ une variable aléatoire de Bernoulli avec $P(X=1) = A$. Dans les conditions du théorème central limite la variable $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et
$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| > \epsilon\right) = \phi(\epsilon)$
```

```

On peut donc approcher une loi binomiale par une loi normale.

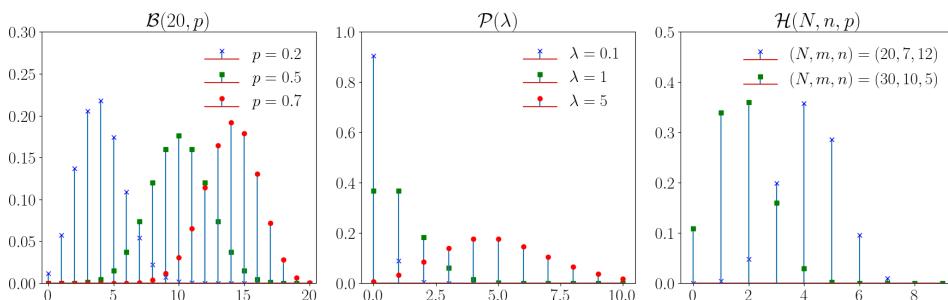
## Modèles probabilistes usuels

On donne ici un catalogue non exhaustif des principaux modèles probabilistes, et leurs principales propriétés. Une illustration graphique des lois correspondantes est proposée dans les figures suivantes.

### Lois discrètes

On considère une variable aléatoire \$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto \mathcal{D}

| Modèle                                            | \$\mathcal{D}\$ | \$P(X = k)\$                                           | \$\mathbb{E}(X)\$                                       | \$\mathbb{V}(X)\$                                       | Utilisation                               |
|---------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Bernoulli                                         | \$\{0, 1\}\$    | \$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p = q\$                 | \$p\$                                                   | \$pq\$                                                  | Expérience ayant 2 éventualités possibles |
| Binomiale \$\mathcal{B}(n, p)\$                   | \$[0, n]\$      | \$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\$                           | \$np\$                                                  | \$npq\$                                                 | Tirage avec remise                        |
| Hypergéométrique, \$\mathcal{H}(m, N, n), m < N\$ | \$[0, n]\$      | \$\frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}\$ | \$n \frac{m}{M} \frac{N-n}{N-1} \dots \frac{N-m}{N-n}\$ | \$n \frac{m}{M} \frac{N-n}{N-1} \dots \frac{N-m}{N-n}\$ | Tirage sans remise                        |
| Uniforme                                          | \$[1, n]\$      | \$\frac{1}{n}\$                                        | \$\frac{n+1}{2}\$                                       | \$\frac{n^2-1}{12}\$                                    | Equiprobabilité des résultats             |
| Poisson \$\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0\$     | \$\mathbb{N}\$  | \$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\$                  | \$\lambda\$                                             | \$\lambda\$                                             | Files d'attente, Evénements rares         |



Modèle de Bernoulli

```

from scipy.stats import bernoulli
n = 10 #nombre de répétitions de l'expérience
p = 0.3 # probabilité de succès
print("Moyenne : ", bernoulli.mean(p))
print("Variance: ", bernoulli.var(p))

```

Moyenne : 0.3  
Variance: 0.21

#### Loi binomiale

```

from scipy.stats import binom
n = 10
x = 7
p = 0.2
print("Moyenne : ", binom.mean(n, p))
print("Variance: ", binom.var(n, p))
print("Densité de probabilité : ", binom.pmf(x, n, p))
print("Fonction de répartition : ", binom.cdf(x,n,p))

```

Moyenne : 2.0  
Variance: 1.6  
Densité de probabilité : 0.000786432  
Fonction de répartition : 0.9999220736

#### Loi hypergéométrique

```

from scipy.stats import hypergeom
x = 2
M = 15
m = 9
n = 5
print("Moyenne : ", hypergeom.mean(M, m, n))
print("Variance: ", hypergeom.var(M, m, n))
print("Densité de probabilité : ", hypergeom.pmf(x, M, m, n))
print("Fonction de répartition : ", hypergeom.cdf(x, M, m, n))

```

Moyenne : 3.0  
Variane: 0.8571428571428571  
Densité de probabilité : 0.23976023976023975  
Fonction de répartition : 0.28671328671328666

#### Distribution de Poisson

```

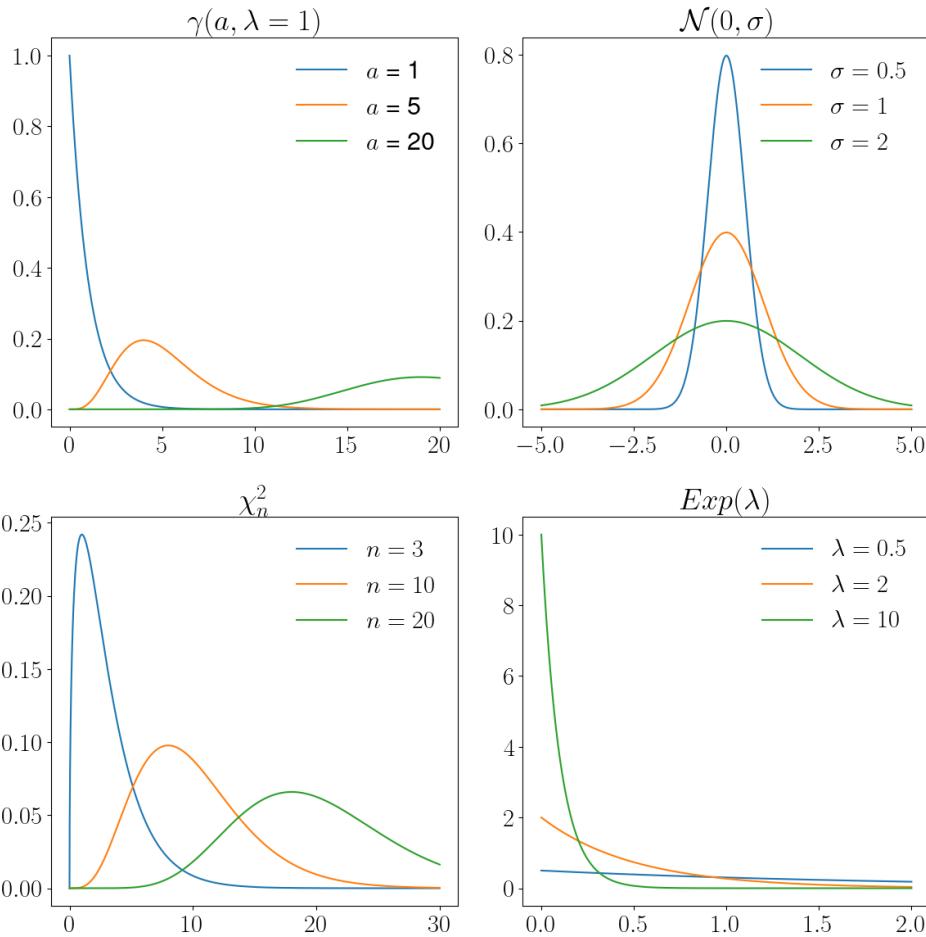
from scipy.stats import poisson
x = 1
Lambda = 2/3
print("Moyenne : ", poisson.mean(Lambda))
print("Variane: ", poisson.var(Lambda))
print("Densité de probabilité : ", poisson.pmf(x, Lambda))
print("Fonction de répartition : ", poisson.cdf(x, Lambda))

```

Moyenne : 0.6666666666666666  
Variane: 0.6666666666666666  
Densité de probabilité : 0.3422780793550613  
Fonction de répartition : 0.8556951983876534

#### Lois absolument continues

| Modèle                                       | $\mathcal{D}$      | Densité                                                                                                                                                 | $\mathbb{E}(X)$                                 | $\mathbb{V}(X)$                                  | Utilisation                              |
|----------------------------------------------|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|
| Uniforme                                     | $[a, b]$           | $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$                                                                                                            | $\frac{b+a}{2}$                                 | $\frac{(b-a)^2}{12}$                             | Pas d'a priori sur la distribution       |
| Exponentiel $Exp(\lambda)\lambda > 0$        | $\mathbb{R}^+$     | $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$                                                                                                        | $\frac{1}{\lambda}$                             | $\frac{1}{\lambda^2}$                            | Files d'attente, Durée de vie sans usure |
| Pareto $\alpha > 1, x_0 > 0$                 | $[x_0, +\infty[$   | $f(x) = \frac{\alpha-1}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \mathbb{1}_{x \geq x_0}$                                                               | $\frac{\alpha-1}{\alpha-2} x_0$<br>$\alpha > 2$ | $\frac{(\alpha-1)x_0^2}{(\alpha-3)(\alpha-2)^2}$ | Revenu des ménages                       |
| Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$             | $\mathbb{R}$       | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$                                                                                     | $m$                                             | $\sigma^2$                                       | voir T.C.L.                              |
| Gamma $\gamma(a, \lambda)a > 0, \lambda > 0$ | $(\mathbb{R}^+)^*$ | $f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{x>0}$                                                                            | $\frac{a}{\lambda}$                             | $\frac{a}{\lambda^2}$                            |                                          |
| Khi-deux $\chi_n^2$ $n$ degrés liberté       | $\mathbb{R}$       | $f(x, k) = \frac{1}{2^k \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$                                                                        | $n$                                             | $2n$                                             | Test du khi-deux                         |
| Student $n$ degrés liberté                   | $\mathbb{R}$       | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$<br>$t > 0$                          |                                                 |                                                  | Test égalité moyenne                     |
| Fisher-Snedécor $n$ et $m$ degrés liberté    | $(\mathbb{R}^+)^*$ | $\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{n-2}{2}}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}}$ |                                                 |                                                  |                                          |



#### Modèle uniforme

```
from scipy.stats import uniform
x = 2.5
a = 1
b = 5
mean, var = uniform.stats(moments='mv', loc=a, scale=b-1)

print("Espérance: ", mean)
print("Variance: ", var)
print("Densité de probabilité : ", uniform.pdf(x, loc = a, scale = b-1))
print("Fonction de répartition : ", uniform.cdf(x, loc = a, scale = b-1))
```

Espérance: 3.0  
 Variance: 1.333333333333333  
 Densité de probabilité : 0.25  
 Fonction de répartition : 0.375

#### Loi normale

```
from scipy.stats import norm
x = 1.3
m = 0
sigma = 1

mean,var = norm.stats(loc = m, scale = sigma, moments='mv')

print("Moyenne : ", mean)
print("Variance : ", var)
print("Densité de probabilité : ", norm.pdf(x, loc = m, scale = sigma))
print("Fonction de répartition : ", norm.cdf(x, loc = m, scale = sigma))
```

Moyenne : 0.0  
 Variance : 1.0  
 Densité de probabilité : 0.17136859204780736  
 Fonction de répartition : 0.9031995154143897

Sous l'hypothèse de normalité, de nombreux outils statistiques sont disponibles. Souvent, l'hypothèse de normalité est justifiée par l'intermédiaire du théorème centrale limite. Des considérations, parfois abusives, permettent de se placer dans le cadre d'utilisation de ce théorème et de choisir un modèle normal alors qu'une étude des données statistiques met en défaut le choix de ce modèle (problème dit d'adéquation).

#### Property 6

Si  $X$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  alors la variable  $Z = \frac{X-m}{\sigma}$  est la variable centrée réduite associée, et suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  dite aussi loi de Gauss-Laplace.

La fonction de répartition de  $Z$  est  $\phi(Z) = P(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ , dont les valeurs peuvent être lues dans une table.

#### Theorem 4

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes, de loi respective  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$  et  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ . Alors la variable aléatoire  $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$  admet une loi  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  avec

$$m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2$$

En particulier, étant données  $n$  variables aléatoires  $X_1 \cdots X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , alors la variable aléatoire  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$ .

#### Remark 8

Dans ce cas,  $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

#### Loi exponentielle

```
from scipy.stats import expon
Lambda = 0.5
x = 1
mean,var = expon.stats(scale=Lambda, moments='mv')
print("Espérance : ", mean)
print("Variance : ", var)
print("Densité de probabilité : ", expon.pdf(x, scale = Lambda))
print("Fonction de répartition : ", expon.cdf(x, scale = Lambda))
```

```
Espérance : 0.5
Variance : 0.25
Densité de probabilité : 0.2706705664732254
Fonction de répartition : 0.8646647167633873
```

On parle de loi de probabilité sans mémoire car elle vérifie :  $(\forall s, t \in (\mathbb{R}^+)^*) P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

#### Distribution Gamma

```
from scipy.stats import gamma
x = 3
a = 3
Lambda = 1.8
mean, var = gamma.stats(a, scale = 1/Lambda, moments='mv')
print("Moyenne : ", mean)
print("Variance : ", var)
print("Densité de probabilité : ", gamma.pdf(x, a, scale = 1/Lambda))
print("Fonction de répartition : ", gamma.cdf(x, a, scale = 1/Lambda))
```

```
Moyenne : 1.6666666666666667
Variance : 0.925925925925926
Densité de probabilité : 0.1185331502579268
Fonction de répartition : 0.9052421318239862
```

Les propriétés de cette loi reposent sur celles de la fonction  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ , intégrale convergente pour tout  $a > 0$ .

#### Theorem 5

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi respective  $\gamma(a, \lambda)$  et  $\gamma(b, \lambda)$ , alors  $X = X_1 + X_2$  est de loi  $\gamma(a+b, \lambda)$

#### Theorem 6

Si  $X$  est de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors la variable aléatoire  $Y = X^2$  admet une loi  $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Etant données plus généralement  $n$  variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , alors la variable aléatoire  $V = \sum_{k=1}^n \left( \frac{X_k - m}{\sigma} \right)^2$  admet une loi  $\gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ . C'est la loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté.

#### Loi du Khi-deux

```
from scipy.stats import chi2
x=3
n=2
mean, var = chi2.stats(n, moments='mv')
print("Moyenne : ", mean)
print("Variance : ", var)
print("Densité de probabilité : ", chi2(n).pdf(x))
print("Fonction de répartition : ", chi2(n).cdf(x))
```

```
Moyenne : 2.0
Variance : 4.0
Densité de probabilité : 0.11156508007421491
Fonction de répartition : 0.7768698398515702
```

#### Loi de Student

```
from scipy.stats import t
n = 2
x=3
mean, var = t.stats(n, moments='mv')
print("Moyenne : ", mean)
print("Variance : ", var)
print("Densité de probabilité : ", t(n).pdf(x))
print("Fonction de répartition : ", t(n).cdf(x))
```

```
Moyenne : 0.0
Variance : inf
Densité de probabilité : 0.027410122234342152
Fonction de répartition : 0.9522670168666454
```

L'utilisation pratique de cette loi est énoncée par le théorème suivant :

### Theorem 7

Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes, de loi respective  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\chi_n^2$ . Alors la variable aléatoire  $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$  admet une loi de Student à  $n$  degrés de liberté.

Loi de Fisher-Snedecor

```
from scipy.stats import f
n = 2
m=4
x=3
mean, var = f.stats(n, m,moments='mv')
print("Moyenne : ", mean)
print("Variance : ", var)
print("Densité de probabilité : ", f(n,m).pdf(x))
print("Fonction de répartition : ", f(n,m).cdf(x))
```

```
Moyenne :  2.0
Variance :  inf
Densité de probabilité :  0.06399999999999996
Fonction de répartition :  0.84
```

L'utilisation pratique de cette loi est énoncée par le théorème suivant :

### Theorem 8

Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes, de loi respective  $\chi_n^2$  et  $\chi_m^2$ . Alors la variable aléatoire  $T = \frac{X/n}{Y/m}$  admet une loi de Fisher-Snedecor à  $n$  et  $m$  degrés de liberté.

## Statistique descriptive

### Définitions

Dans la suite, nous nous intéressons à des unités statistiques ou individus statistiques ou unités d'observation (individus, entreprises, ménages, données abstraites...). Bien que le cas infini soit envisageable, nous nous restreignons ici à l'étude d'un nombre fini de ces unités. Un ou plusieurs caractères (ou variables) est mesuré sur chaque unité. Les variables sont désignées par simplicité par une lettre. Leurs valeurs possibles sont appelées modalités et l'ensemble des valeurs possibles ou des modalités est appelé le domaine. L'ensemble des individus statistiques forme la population.

### Typologie des variables

La typologie des variables définit le type de problème statistique que l'on doit aborder :

#### Definition 17 (Variable qualitative)

La variable est dite qualitative lorsque les modalités sont des catégories. Suivant qu'il existe une relation d'ordre sur les catégories, on distingue :

- la variable qualitative nominale, si les modalités ne peuvent pas être ordonnées
- la variable qualitative ordinaire, si les modalités peuvent être ordonnées

#### Definition 18 (Variable quantitative)

La variable est dite quantitative lorsque les modalités sont des valeurs numériques (scalaires ou vectorielles) :

- la variable est quantitative discrète si les modalités forment un ensemble dénombrable
- la variable quantitative est continue si les modalités vivent dans un espace continu.

Dans certains cas (l'âge par exemple), une variable d'un type (quantitative continue ici) peut être exprimée d'une autre manière pour des raisons pratiques de collecte ou de mesure. De même, les variables qualitatives ordinaires peuvent être codées, par exemple selon une échelle de satisfaction.

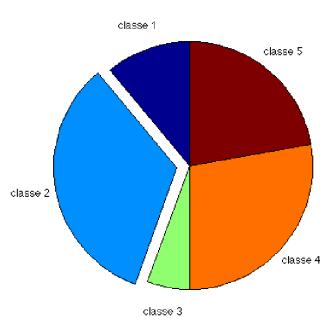
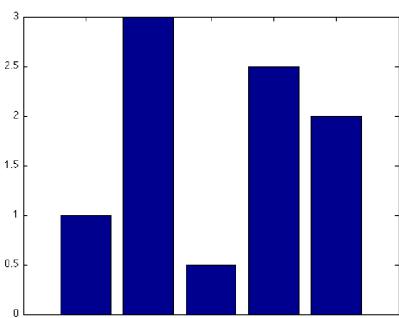
#### Definition 19 (Série statistique)

On appelle série statistique une suite de  $n$  valeurs prises par une variable  $X$  sur les unités d'observation, notées  $x_1 \dots x_n$ .

### Variable qualitative nominale

Une variable qualitative nominale a des valeurs distinctes qui ne peuvent pas être ordonnées. On note  $J$  le nombre de valeurs distinctes ou de modalités, notées  $x_1 \dots x_J$ . On appelle effectif d'une modalité ou d'une valeur distincte le nombre de fois que cette modalité (ou valeur distincte) apparaît dans la série statistique. On note  $n_j$  l'effectif de la modalité  $x_j$ . La fréquence d'une modalité  $j$  est alors égale à  $f_j = \frac{n_j}{n}$ .

Le tableau statistique d'une variable qualitative nominale peut être représenté par deux types de graphiques. Les effectifs sont représentés par un diagramme en tuyau d'orgue et les fréquences par un diagramme en secteurs. Pour ce dernier, si le nombre de modalités devient trop important, la représentation perd de son intérêt.



## Variable qualitative ordinale

Le domaine peut être muni d'une relation d'ordre. Les valeurs distinctes d'une variable ordinaire peuvent donc être ordonnées  $x_1 \leq x_2 \dots \leq x_J$ , à permutation près dans l'ordre croissant des indices. L'effectif cumulé  $N_j$  et la fréquence cumulée  $F_j$  des variables sont alors définis par

$$(\forall j \in [\![1, J]\!]) \quad N_j = \sum_{i=1}^j n_i \quad \text{et} \quad F_j = \sum_{i=1}^j f_i$$

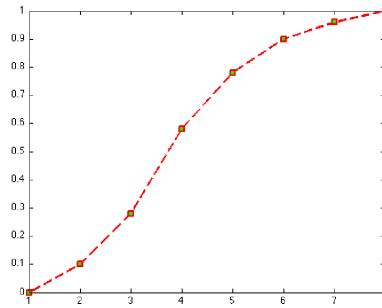
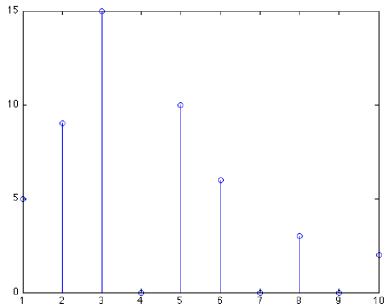
Les fréquences et les effectifs (cumulés ou non) peuvent être représentés sous la forme d'un diagramme en tuyaux d'orgue.

## Variable quantitative discrète

Le domaine d'une telle variable est dénombrable. Comme pour les variables qualitatives ordinaires, on peut calculer les effectifs (cumulés ou non) et les fréquences (cumulées ou non).

La répartition des valeurs de la variable peut être représentée par un diagramme en bâtonnets. Les fréquences cumulées sont visualisées par la fonction de répartition de la variable, définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ F_j & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}[ \\ 1 & \text{si } x_J \leq x \end{cases}$$



## Variable quantitative continue

Le domaine d'une variable quantitative continue est infini et est assimilé à  $\mathbb{R}$  ou à un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Cependant, la mesure étant limitée en précision, on peut traiter ces variables comme des variables discrètes.

La représentation graphique de ces variables (et la construction du tableau statistique) passe par le regroupement des modalités ou valeurs en classes. Le tableau ainsi construit est souvent appelé distribution groupée. La classe  $j$  est l'ensemble des valeurs incluses dans  $[c_j^-, c_j^+]$ , où  $c_j^-$  et  $c_j^+$  sont les bornes inférieure et supérieure de la classe. Sur cet intervalle, on peut calculer la fréquence  $f_j$  de la classe, la fréquence cumulée, l'effectif  $n_j$ . La répartition en classes nécessite de définir a priori le nombre de classes  $J$  et l'amplitude  $a_j$  des intervalles. Si elles peuvent être définies de manière empirique, quelques règles permettent d'établir  $J$  et l'amplitude pour une série statistique de  $n$  observations. Par exemple :

- $J = 1 + 3.3\log_{10}(n)$  (règle de Sturge)
- $J = 2.5\sqrt{n}$  (règle de Yule)

La représentation graphique se fait par exemple par histogramme. Les histogrammes sont des représentations de la distribution des données, agrégées par intervalles. A partir de l'étendue des données, on subdivise l'intervalle en  $k$  bins, de tailles  $t_k$  non nécessairement identiques, et on compte le nombre d'individus  $n_k$  rentrant dans chaque bin. L'histogramme peut alors être :

- non normalisé :  $h_k = n_k$
- normalisé :  $h_k = n_k/t_k$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.loadtxt("./data/data.csv", delimiter=",")[:,1]

# Comptage des individus
def count(X, bins):
    def findBin(x, bins):
        for i, bin in enumerate(bins):
            left, right = bin
            if left <= x < right:
                return i
    return None

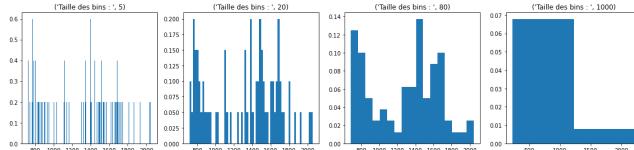
count = [0] * len(bins)
for x in X:
    i = findBin(x, bins)
    if i != None:
        count[i] += 1

return count

# Affichage de l'histogramme
def plot_hist(X, bin_min, bin_max, bin_width, normed=True):
    bins = [i, i+bin_width] for i in np.arange(bin_min, bin_max, bin_width)
    bin_left = [l for l, r in bins]
    bin_widths = [r-l for l, r in bins]
    bin_height = [
        float(c) / w if normed else c
        for c, w in zip(count(X, bins), bin_widths)
    ]
    plt.bar(bin_left, width=bin_width, height=bin_height)
    plt.tight_layout()

bin_min = min(X)
bin_max = max(X)

plt.figure(figsize=(16, 4))
for subplot, binsize in ((141, 5), (142, 20), (143, 80), (144, 1000)):
    title = 'Taille des bins : ', binsize
    plt.subplot(subplot)
    plt.title(title, fontsize=12)
    plot_hist(X, bin_min, bin_max, binsize)
```



Le choix de la largeur  $t$  des bins dépend des données, et par exemple on a :

- Loi de Scott :  $t = \frac{3.5\sigma}{Card(X)^{1/3}}$ , où  $\sigma$  est l'écart type des données.
- Loi de Freedman-Diaconis :  $t = \frac{2IQR}{Card(X)^{1/3}}$ , où  $IQR$  est la distance interquartile.

### Remark 9

Toutes les classes n'ont pas nécessairement la même amplitude



Les effectifs (ou les fréquences) sont représenté(s) par un histogramme. Si l'on s'intéresse à la représentation des effectifs (resp. des fréquences), la densité d'effectif  $h_j$  (resp. de fréquence  $d_j$ ), définie par  $h_j = \frac{n_j}{a_j}$  (resp.  $d_j = \frac{f_j}{a_j}$ ), détermine la hauteur du rectangle représentant la classe  $j$ . L'aire de l'histogramme est égale à l'effectif total  $n$  pour l'histogramme des effectifs, et à 1 pour l'histogramme des fréquences.

Comme dans le cas discret, la fonction de répartition peut être calculée de la manière suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c_1^- \\ F_{j-1} + \frac{f_j}{c_j^+ - c_j^-}(x - c_j^-) & \text{si } x \in [c_j^-, c_j^+] \\ 1 & \text{si } c_j^+ \leq x \end{cases}$$

### Pré-traitement des données

Faire une analyse de données, c'est traiter un tableau de taille  $n \times d$  où  $n$  est le nombre d'individus et  $d$  le nombre de variables (caractères) mesurées sur ces individus. En raison de la collecte des données, des erreurs de mesure ou d'autres facteurs, ce tableau est parfois incomplet et il convient de le prétraiter pour pouvoir effectuer l'analyse.

### Points aberrants

Une anomalie (ou point aberrant, ou outlier) est une observation (ou un sous-ensemble d'observations) qui semble incompatible avec le reste de l'ensemble de données.

S'il est parfois possible d'identifier graphiquement ces points aberrants à l'aide de boîtes à moustaches (voir [Pour résumer](#)), il existe une vaste littérature sur la détection d'anomalies qu'il n'est pas possible d'aborder ici. De plus, suivant le type de données manipulées (données séquentielles ou non), le type de méthode peut être différent. On mentionne donc ici quelques techniques simples :

- le détecteur de Hampel : on considère que  $x_i$  est un point aberrant si

$$|x_i - x_{\frac{1}{2}}| > 3.MADM$$

où  $MADM = 1.4826 \cdot |x_i - x_{\frac{1}{2}}|_{\perp}$ , et où  $y_{\frac{1}{2}}$  est la médiane des données  $y$

- la règle empirique de l'écart-type : on considère que  $x_i$  est un point aberrant si

$$|x_i - \bar{x}| > 3\sigma$$

où  $\bar{x}$  (respectivement  $\sigma$ ) est la moyenne (resp. l'écart-type) des données.

- la méthode LOF (Local Outlier Factor) qui repose sur le concept de densité locale, où la localité est donnée par les  $k$  voisins les plus proches, dont la distance est utilisée pour estimer la densité. En comparant la densité locale d'un objet aux densités locales de ses voisins, il est possible d'identifier des régions de densité similaire et des points dont la densité est nettement inférieure à celle de leurs voisins. Ces derniers sont considérés comme des valeurs aberrantes. La densité locale est estimée par la distance typique à laquelle un point peut être atteint à partir de ses voisins.
- la méthode COF (Connectivity based Outlier Factor) basée sur le même principe que LOF, à ceci près que l'estimation de densité est effectuée en utilisant le minimum de la somme des distances reliant tous les voisins d'un point donné.

Dans le code suivant, 7 anomalies sont introduites dans un jeu de 70 données dans le plan, et détectées par la méthode LOF. Le score d'anomalie calculé par la méthode est proportionnel au cercle entourant le point. Les faux positifs (points de données détectés par LOF comme étant des anomalies) sont reportés en rouge.

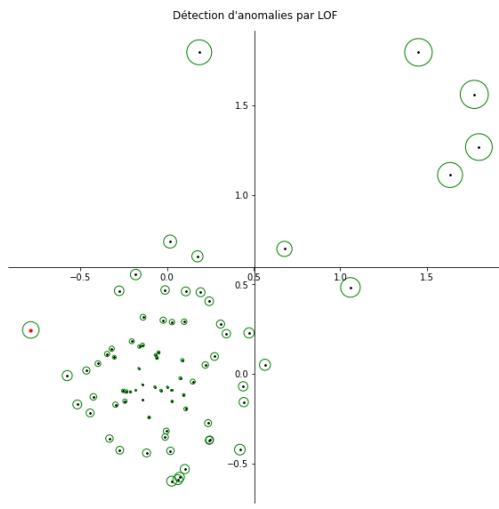
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.neighbors import LocalOutlierFactor

np.random.seed(42)
X1 = 0.3 * np.random.randn(70, 2)
X2 = np.random.uniform(low=0, high=2, size=(7, 2))
X = np.r_[X1, X2]
anom = np.ones(len(X), dtype=int)
anom[-len(X2):] = 1

clf = LocalOutlierFactor(n_neighbors=20, contamination=0.1)
y_pred = clf.fit_predict(X)
err = y_pred != anom
n_errors = (err).sum()
X_scores = clf.negative_outlier_factor_
X3 = X[err==True]

fig = plt.figure(figsize=(8,8))
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.spines['left'].set_position('center')
ax.spines['bottom'].set_position('center')
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

plt.scatter(X1[:, 0], X1[:, 1], color="k", s=3.0)
plt.scatter(X3[:, 0], X3[:, 1], color='r', s=10)
r = (X_scores.max() - X_scores) / (X_scores.max() - X_scores.min())
scatter = plt.scatter(X1[:, 0], X1[:, 1], s=1000 * r, edgecolors="g", facecolors="none")
plt.suptitle("Détection d'anomalies par LOF")
plt.tight_layout()
plt.show()
```



## Données manquantes

Lors de la collecte des données, il arrive que certaines d'entre elles ne soient pas disponibles ou enregistrées. On distingue trois types de données manquantes :

1. les données manquant de manière complètement aléatoire : la probabilité qu'une donnée soit manquante ne dépend pas des valeurs connues ni de la valeur manquante elle-même.
2. les données manquant de manière aléatoire : la probabilité qu'une donnée soit manquante peut dépendre de valeurs connues (d'autres variables parmi les  $d$ ), mais pas de la variable dont les valeurs sont manquantes.
3. les données manquant de manière non aléatoire : la probabilité qu'une donnée soit manquante dépend d'autres variables qui ont également des valeurs manquantes, ou elle dépend de la variable elle-même.

Pour résoudre ce problème de données manquantes, dans la mesure où ces dernières ne sont pas trop nombreuses, on a recours à des techniques d'**imputation**.

Dans le cas d'une imputation simple (une seule donnée manquante), on peut par exemple remplacer la valeur manquante dans une colonne  $j \in [1, p]$  par :

- une valeur fixe
- une statistique sur la colonne  $j$  (la plus petite ou la plus grande valeur, la moyenne de la colonne, la valeur la plus fréquente...)
- une valeur issue des  $k$  plus proches voisins de la ligne du tableau où la valeur en position  $j$  est manquante
- une valeur calculée par régression (voir chapitre correspondant) sur l'ensemble du tableau
- la valeur précédente (ou suivante) dans le cas où la colonne est une série ordonnée ou temporelle.

Le code suivant remplace les valeurs manquantes (`np.nan`) par la moyenne de la colonne qui contient ces valeurs.

```
import numpy as np
from sklearn.impute import SimpleImputer
imp = SimpleImputer(missing_values=np.nan, strategy='mean')
X = [[1, 2], [np.nan, 3], [4, 5]]
print(imp.fit_transform(X))
```

```
[[1.  2. ]
 [2.5 3. ]
 [4.  5. ]]
```

Dans le cas d'une imputation multiple, où un sous-ensemble de valeurs doit être comblé, on peut adopter la stratégie suivante :

1. Effectuer une imputation simple pour toutes les valeurs manquantes de l'ensemble de données.
2. Remettre les valeurs manquantes d'une variable  $j \in [1, p]$  à « manquante ».
3. Former un modèle pour prédire les valeurs manquantes de  $j$  en utilisant les valeurs disponibles de la variable  $j$  en tant que variable dépendante et les autres variables de l'ensemble de données comme indépendantes.
4. Prédire les valeurs manquantes dans la colonne  $j$  en utilisant le modèle entraîné à l'étape 3.
5. Répéter les étapes 2 à 4 pour toutes les autres colonnes présentant des valeurs manquantes.
6. Répéter l'étape 2-5 jusqu'à convergence (ou un nombre maximal d'itérations)
7. Répéter les étapes 1-6 plusieurs fois avec différentes initialisations de nombres aléatoires pour créer différentes versions de l'ensemble de données complet/imputé.

```
import numpy as np
from sklearn.experimental import enable_iterative_imputer
from sklearn.impute import IterativeImputer
imp = IterativeImputer(max_iter=5, random_state=0)
X = [[1, 2], [3, 6], [4, 8], [np.nan, 3], [7, np.nan]]
print((imp.fit_transform(X)))
```

```
[[ 1.         2.        ]
 [ 3.         6.        ]
 [ 4.         8.        ]
 [ 1.50004509  3.        ]
 [ 7.         14.00004135]]
```

## Transformation des données qualitatives

Pour pouvoir être traitées numériquement, les données qualitatives doivent être transformées. Plusieurs techniques existent parmi lesquelles :

- pour le cas des variables ordinaires : on utilise le rang pour encoder les modalités de la variable. Par exemple, pour un niveau de diplomation `Brevet <Bac<Licence<Master<Doctorat`, on codera `Licence` par 3 et `Doctorat` par 5.
- le one-hot encoding : pour une variable qualitative présentant  $J$  modalités, on construit un vecteur de taille  $J$  dont les composantes sont toutes nulles sauf la  $J$ -ème qui vaut 1. Par exemple, si  $J=3$ , on construit 1 vecteur de taille 3, et pour un individu ayant la modalité 2, on le code en (0 1 0). Lorsque  $J$  est élevé, on se retrouve avec un jeu de données volumineux.

- les méthodes de plongement (embedding) : utilisées principalement en apprentissage profond (Deep learning) pour le traitement du langage naturel, ces classes de méthodes construisent une représentation de chaque modalité d'une variable qualitative en un vecteur numérique de taille fixe et choisie. Pour le mot « rouge » de la variable « couleur », par exemple, l'encodage peut par exemple être représenté par le vecteur (0.31 0.57 0.12). En pratique, le calcul de ces représentations s'effectue classiquement par l'entraînement d'un réseau de neurones ayant pour entrée uniquement les variables qualitatives. Tout d'abord, un encodage one-hot est appliquée à la variable afin d'être mise en entrée du réseau, qui n'accepte que les entrées numériques. La sortie d'une des couches cachées du réseau constitue alors le vecteur recherché. On concatène ensuite ce vecteur aux données initiales, utilisées dans l'ajustement du modèle final.

```
from sklearn.preprocessing import OrdinalEncoder,OneHotEncoder
import numpy as np
X =[['Rouge'], ['Vert'], ['Rouge'], ['Bleu']]
ohe = OneHotEncoder()
oe = OrdinalEncoder()
print("Données : \n",X)
print("One Hot Encoder : \n", ohe.fit_transform(X).toarray())
print("Ordinal Encoder : \n", oe.fit_transform(np.array(X)))
```

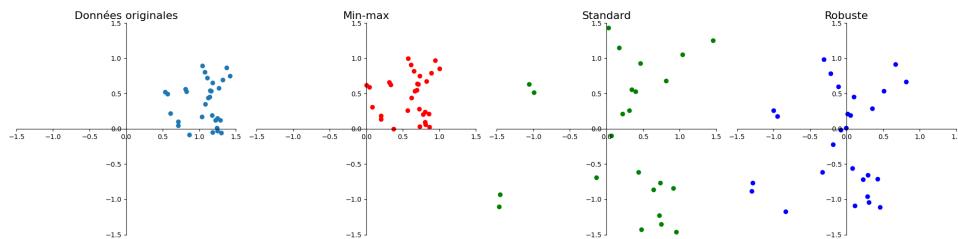
```
Données :
[['Rouge'], ['Vert'], ['Rouge'], ['Bleu']]
One Hot Encoder :
[[0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]
 [0. 1. 0.]
 [1. 0. 0.]]
Ordinal Encoder :
[[1.]
 [2.]
 [1.]
 [0.]]
```

## Normalisation

Il arrive que les données collectées ne soient pas du même ordre de grandeur, notamment en raison des unités de mesure (un individu mesuré par sa taille en millimètres et son poids en tonnes par exemple). Cette différence de valeur absolue introduit un biais dans l'analyse des données ([figure 2](#)) qu'il convient de corriger. C'est le processus de normalisation des données.

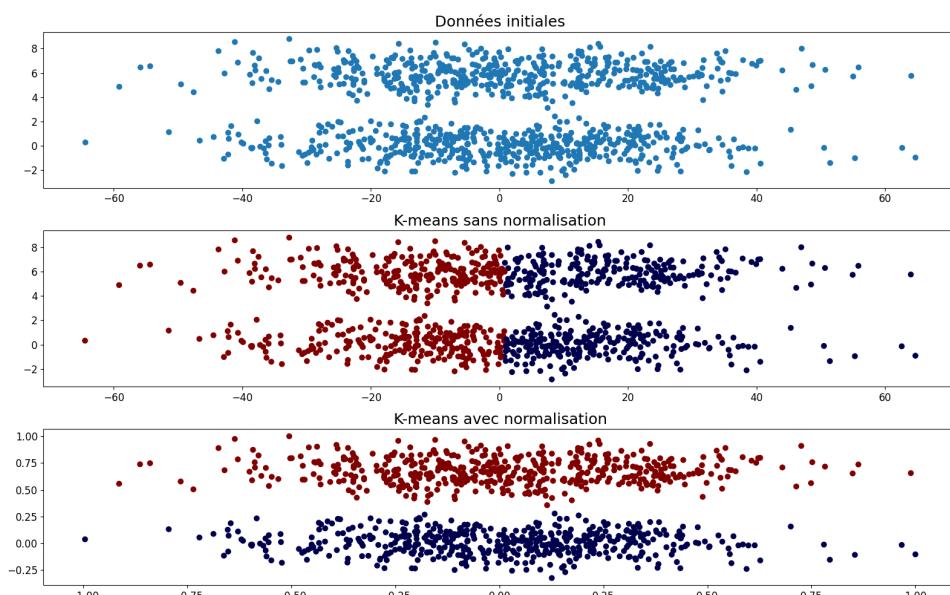
Pour une colonne  $j \in [1, p]$ , on dispose de  $n$  valeurs  $x_{ij}, i \in [1, n]$ . On note :  $x_{\min} = \min_{i \in [1, n]} x_{ij}$ ,  $x_{\max} = \max_{i \in [1, n]} x_{ij}$ ,  $\bar{x}_j$  la moyenne des  $x_{ij}$ ,  $\sigma_j$  leur écart-type,  $x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{1}{2}}$  et  $x_{\frac{3}{4}}$  les premier, deuxième et troisième quartiles. On distingue alors classiquement trois types de normalisation :

1. la normalisation min-max :  $x_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$
2. la normalisation standard :  $x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j}$
3. la normalisation robuste :  $x_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{\frac{1}{4}}}{x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}}$



**Fig. 1** Effet des différents types de normalisation.

La normalisation standard dépend de la présence de points aberrants (qui affectent la moyenne).



**Fig. 2** Effet de la normalisation sur un algorithme de classification (voir chapitre correspondant). En haut un jeu de données avec deux nuages de points allongés selon l'axe des  $x$ , certainement en raison d'une différence d'échelle entre les unités de mesure de  $x$  et  $y$ . Au milieu une classification par  $k$ -moyennes,  $k=2$  sans normalisation, en utilisant la distance euclidienne. Les deux classes

sont séparées suivant l'axe des  $x$ , ne reflétant pas la répartition naturelle des points. En bas, après normalisation, les deux nuages de points sont correctement séparés

## Statistique descriptive univariée

La statistique descriptive univariée consiste à étudier un ensemble d'unités d'observations, lorsque celles-ci sont décrites par une seule variable.

Soit donc  $X$  une variable et  $x_j, j \in [1, n]$  l'ensemble des valeurs prises par cette variable,  $n_i$  étant le nombre de fois où la valeur  $x_i$  est prise.  $X$  peut être qualitative ou quantitative, les paramètres de description décrits dans la suite s'appliqueront à l'une de ces natures ou au deux.

### Paramètres de position

Plusieurs paramètres permettent de décrire la position « la plus représentative » d'une variable :

#### Definition 20 (Mode)

Le mode est la valeur distincte correspondant à l'effectif le plus élevé. Il est noté  $x_M$ .

Le mode peut être calculé pour tout type de variable, n'est pas nécessairement unique. Lorsqu'une variable continue est découpée en classes, il est possible de définir une classe modale (classe correspondant à l'effectif le plus élevé)

#### Definition 21 (Moyennes)

Les moyennes ne peuvent être définies que sur des variables quantitatives. Plusieurs moyennes peuvent être calculées, parmi lesquelles :

- la moyenne **arithmétique**  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^J n_i x_i$ . C'est le moment à l'origine d'ordre 1.
- la moyenne **géométrique** : si les  $x_i$  sont positifs, la moyenne géométrique est la quantité  $G = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$ . C'est donc l'exponentielle de la moyenne arithmétique des logarithmes des valeurs observées.
- la moyenne **harmonique** : si les  $x_i$  sont positifs, la moyenne harmonique est définie par  $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^J 1/x_i}$
- la moyenne **pondérée** : dans certains cas, on accorde pas la même importance à toutes les observations (fiabilité, confiance...). La moyenne pondérée est alors définie par  $\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$

Dans le cas où  $\forall i, w_i = 1/n$ , la moyenne pondérée est la moyenne arithmétique. De plus, dans tous les cas, on peut montrer que  $H \leq G \leq \bar{x}$ .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.loadtxt("./data/data.csv", delimiter=",")[:,1]

def ArithmeticMean(X):
    # calculable directement avec np.mean(X)
    return float(sum(X)) / len(X)

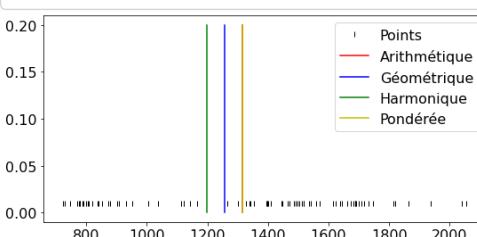
def GeometricMean(X):
    n=len(X)
    p=1
    for i in range(n):
        p*=X[i]
    return float(p**(1/n))

def HarmonicMean(X):
    n=len(X)
    s=0
    for i in range(n):
        s += 1/X[i]
    return len(X) / s

def WeightedMean(X):
    # Exemples de poids
    w = np.random.rand(len(X))
    return np.average(X,weights=w)

plt.figure(figsize=(8,4))
plt.rcParams['font.size'] = 16
plt.plot(X, [0.01]*len(X), '|', color='k',label='Points')
for method, style, title in ((ArithmeticMean,'r','Arithmétique'),
(GeometricMean,'b','Géométrique'),
(HarmonicMean,'g','Harmonique'),(WeightedMean,'y','Pondérée')):
    m=method(X)
    print (method.__name__, " : ", m)
    plt.plot([m,m],[0,0.2],style,label=title)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
ArithmeticMean : 1316.3086347078017
GeometricMean : 1258.4787575642572
HarmonicMean : 1198.219210728503
WeightedMean : 1315.5442042923557
```



#### Definition 22 (Médiane)

La médiane, notée  $x_{\frac{n}{2}}$  est la valeur centrale de la série statistique triée par ordre croissant.

En d'autres termes, c'est la valeur de la série triée telle qu'au moins 50% des effectifs soient inférieurs à  $x_{\frac{n}{2}}$ . Elle peut être calculée sur des variables quantitatives ou qualitatives ordinaires (dans le cas où des échelles de valeur ont été définies).

#### Definition 23 (Quantiles)

Le quantile d'ordre  $p$  est défini par  $x_p = F^{-1}(p)$ , où  $F$  est la fonction de répartition.

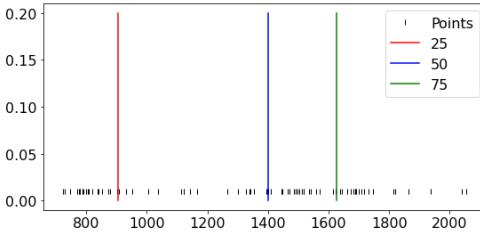
La notion de quantile généralise la notion de médiane. Si la fonction de répartition était continue et strictement croissante, la définition de  $x_p$  serait unique. Or  $F$  est discontinue et définie par paliers et les valeurs de quantiles varient suivant par exemple l'utilisation ou non d'une méthode d'interpolation de  $F$ . Pour calculer  $x_p$ , on peut par exemple considérer que si  $np$  est pair,  $x_p = \frac{x_{np} + x_{np+1}}{2}$ , on remarque alors que la médiane est le quantile d'ordre  $\frac{1}{2}$  et sinon  $x_p = x_{\lceil np \rceil}$ . En particulier, un quartile est chacune des 3 valeurs qui divisent les données triées en 4 parts égales, de sorte que chaque partie représente 1/4 de l'échantillon de population. On note  $Q_i$  le  $i^{\text{e}}$  quartile.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.loadtxt("./data/data.csv", delimiter=",")[:,1]

plt.figure(figsize=(8,4))
plt.rcParams['font.size'] = 16
plt.plot(X, [0.01]*len(X), '|', color='k',label='Points')

for q, style in ((25,'r'),(50,'b'),(75,'g')):
    m=np.percentile(X,q)
    print ('quartile ', q, " : ",m)
    plt.plot([m,m],[0,0.2],style,label=q)
plt.legend()
plt.tight_layout()
```

```
quartile 25 : 905.9190521240237
quartile 50 : 1399.66320800781
quartile 75 : 1626.326538085935
```



### Paramètres de dispersion

Il est très souvent utile d'apprécier la dispersion des mesures autour du paramètre de position. Pour cela, sur des variables quantitatives uniquement, plusieurs outils sont disponibles :

#### Definition 24 (Etendue)

L'étendue est la simple différence entre la plus grande et la plus petite valeur observée.

#### Definition 25 (Déviation maximale)

La déviation maximale est définie par  $\maxdev(X) = \max\{|x_i - \bar{x}| \mid i \in [1, n]\}$

#### Definition 26 (Déviation moyenne absolue)

La déviation moyenne absolue est définie par  $\text{mad}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$

#### Definition 27 (Distance interquartile)

La distance interquartile  $Q_3 - Q_1$  est la différence entre le troisième et le premier quartile. C'est une statistique robuste aux points aberrants.

#### Definition 28 (Variance)

La variance est la somme des carrés des écarts à la moyenne, normalisée par le nombre d'observations  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Cette variance est dite biaisée. La variance non biaisée est obtenue en divisant non pas par  $n$ , mais par  $n - 1$ .

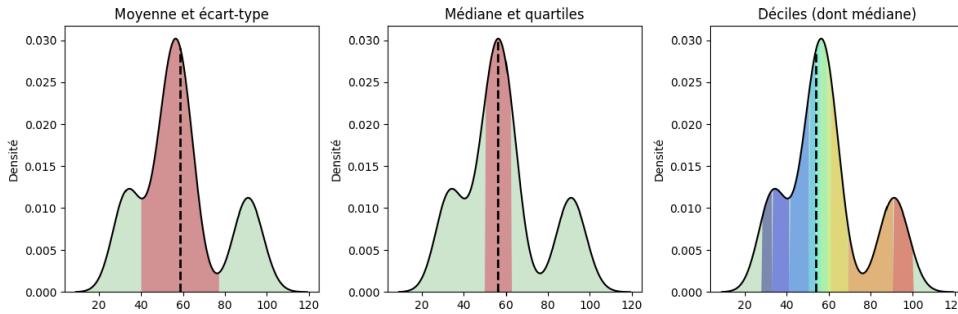
#### Definition 29 (Ecart type)

L'écart type est la racine carrée de la variance.

#### Definition 30 (Ecart moyen absolu)

L'écart moyen absolu est la somme des valeurs absolues des écarts à la moyenne divisée par le nombre d'observations.

Notons qu'il s'agit de la distance  $L_1$  du vecteur des observations au vecteur composé de la valeur moyenne, divisé par le nombre d'observations. La variance est la distance  $L_2$  entre ces deux vecteurs. Lorsque la distance est calculée par rapport au vecteur composé de la valeur médiane, on parle d'écart médian absolu.



```

import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.loadtxt("./data/data.csv", delimiter=",")[:,1]

def max_dev(X):
    m = np.mean(X)
    return max(abs(x - m) for x in X)

def mad(X):
    m = np.mean(X)
    return sum(abs(x - m) for x in X) / float(len(X))

def sigma(X):
    m = np.mean(X)
    return math.sqrt(sum((x - m)**2 for x in X) / len(X), 0.5)

def IQR(X): return np.percentile(X,75) - np.percentile(X,25)

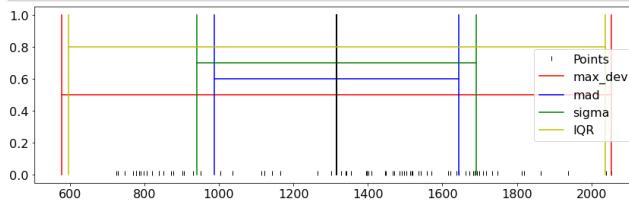
plt.figure(figsize=(12,4))
plt.rcParams['font.size'] = '16'
plt.plot(X, [0.01]*len(X), '|', color='k',label='Points')
m = np.mean(X)
for method, pos, style, in ((max_dev,0.5,'r'),(mad,0.6,'b'),(sigma,0.7,'g'),
(IQR,0.8,'y')):
    s=method(X)
    print (method.__name__, " : ",m, "+/-",s)
    plt.plot([m,m],[0,1],'black')
    plt.plot([m-s,m+s],[0,1],style,label=method.__name__)
    plt.plot([m-s,m+s],[pos,pos],style)
plt.legend(loc='best')
plt.tight_layout()

```

```

max_dev : 1316.3086347078017 +/- 738.0729570890783
mad : 1316.3086347078017 +/- 327.4656915004233
sigma : 1316.3086347078017 +/- 374.5723639541368
IQR : 1316.3086347078017 +/- 720.4074859619113

```



## Paramètres de forme

Les paramètres de forme sont souvent calculés en référence à la forme de la loi normale, pour évaluer la symétrie, l'aplatissement ou la déviation par rapport à cette loi.

### Definition 31 (Skewness)

$$g_1 = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

Le skewness est également appelé coefficient d'asymétrie de Fisher.

### Definition 32 (Kurtosis)

$$K = \frac{m_4}{m_2^2}$$

$K$  permet de mesurer l'aplatissement.

### Definition 33 (Coefficient d'asymétrie de Yule)

$$A_Y = \frac{x_{3/4} + x_{1/4} - 2x_{1/2}}{x_{3/4} - x_{1/4}}$$

Ce coefficient est fondé sur les positions de trois quartiles (le premier, la médiane et le troisième) et est normalisé par la distance interquartile.

### Definition 34 (Coefficient d'asymétrie de Pearson)

$$A_P = \frac{\bar{x} - x_M}{\sigma}$$

Ce coefficient est fondé sur la comparaison de la moyenne et du mode, et est normalisé par l'écart type.

Tous les coefficients d'asymétrie ont des propriétés similaires : ils sont nuls si la distribution est symétrique, négatifs si la distribution est allongée à gauche (left asymmetry), et positifs si la distribution est allongée à droite (right asymmetry).

On peut aussi chercher à mesurer l'aplatissement (ou kurtosis) d'une distribution de mesure. Dans ce cas, on utilise le coefficient d'aplatissement de Pearson ou de Fisher, respectivement donnés par  $\beta_2 = \frac{m_4}{\sigma^4}$  et  $g_2 = \beta_2 - 3$

Une distribution est alors dite :

- mésokurtique si  $g_2$  est proche de 0
- leptokurtique si  $g_2 > 0$  (queues plus longues et distribution plus pointue)
- platykurtique si  $g_2 < 0$  (queues plus courtes et distribution arrondie).

Pour résumer

Les principales statistiques d'une série statistique peuvent être résumées dans des **boîtes à moustache**, qui permettent de voir sur un même graphique :

- la médiane
- une boîte entre les premier et le troisième quartile
- l'étendue
- les points aberrants.

Ce mode de représentation consiste à dessiner une boîte dont les extrémités dépendent du premier et du troisième quartiles  $Q_1$  et  $Q_3$ , en ajoutant une barre à l'intérieur matérialisant le second quartile  $Q_2$  (la valeur médiane de l'échantillon). A cette boîte, on ajoute des "moustaches" dont les extrémités dépendent :

- soit des valeurs extrémiales prises par l'échantillon (minimum et maximum);
- soit de la plus petite et de la plus grande valeur de l'échantillon appartenant à l'intervalle  $[Q_1 - \delta, Q_3 + \delta]$ . La grandeur  $\delta$  est une mesure de la dispersion des données. Généralement, on utilise  $\delta = 1.5(Q_3 - Q_1)$ .

Les valeurs de l'échantillon en dehors des moustaches sont parfois matérialisées par des points et sont alors considérées comme les points aberrants de l'échantillon.

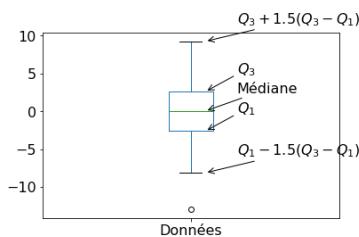
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd

def annotate_boxplot(bpdict, annotate_params=None,
                     x_offset=0.05, x_loc=0,
                     text_offset_x=35,
                     text_offset_y=20):

    if annotate_params is None:
        annotate_params = dict(xytext=(text_offset_x, text_offset_y),
                               textcoords='offset points', arrowprops={'arrowstyle': '->'})

    plt.annotate('Médiane', (x_loc + 1 + x_offset, bpdict['medians'][x_loc].get_ydata()[0]), **annotate_params)
    plt.annotate('Q3', (x_loc + 1 + x_offset, bpdict['boxes'][x_loc].get_ydata()[0]), **annotate_params)
    plt.annotate('Q1', (x_loc + 1 + x_offset, bpdict['boxes'][x_loc].get_ydata()[-1]), **annotate_params)
    plt.annotate('Q3 + 1.5(Q3 - Q1)', (x_loc + 1 + x_offset, bpdict['caps'][x_loc*2].get_ydata()[-1]), **annotate_params)
    plt.annotate('Q1 - 1.5(Q3 - Q1)', (x_loc + 1 + x_offset, bpdict['caps'][x_loc*2+1].get_ydata()[0]), **annotate_params)

df = pd.DataFrame({'Données': np.random.normal(scale=4, size=150)}
bpdict = df.boxplot(grid=False, whis=1.5, return_type='dict')
annotate_boxplot(bpdict, x_loc=0)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



La description ne fait pas tout...

La description d'un ensemble de valeurs  $x_j$  par la moyenne, la variance, voire le comportement linéaire (coefficients de corrélation, voir plus loin) peut ne pas suffire à comprendre la distribution des données. Un exemple classique (analyse bivariée, section suivante) est le quartet d'Anscombe (figure ci-dessous), constitué de quatre ensembles de points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  de même propriétés statistiques (moyenne, variance, coefficient de régression linéaire) mais qui sont distribués de manière totalement différente dans le plan.

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = [10, 8, 13, 9, 11, 14, 6, 4, 12, 7, 5]
y1 = [8.04, 6.95, 7.58, 8.81, 8.33, 9.96, 7.24, 4.26, 10.84, 4.82, 5.68]
y2 = [9.14, 8.14, 8.74, 8.77, 9.26, 8.10, 6.13, 3.10, 9.13, 7.26, 4.74]
y3 = [7.46, 6.77, 12.74, 7.11, 7.81, 8.84, 6.08, 5.39, 8.15, 6.42, 5.73]
x4 = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 19, 8, 8, 8]
y4 = [6.58, 5.76, 7.71, 8.84, 8.47, 7.04, 5.25, 12.50, 5.56, 7.91, 6.89]

datasets = {
    '1.': (x, y1),
    '2.': (x, y2),
    '3.': (x, y3),
    '4.': (x4, y4)
}

fig, axs = plt.subplots(2, 2, sharex=True, sharey=True, figsize=(6, 6))
gridspec_kw={'wspace': 0.08, 'hspace': 0.18})
axs[0, 0].set(xlim=(2, 15), ylim=(2, 14))

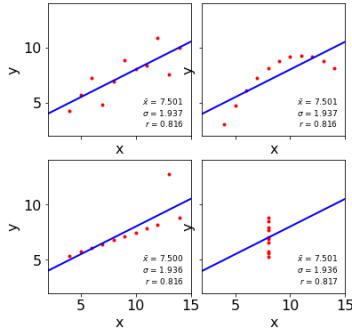
for ax, (label, (x, y)) in zip(axs.flat, datasets.items()):
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('y')
    ax.plot(x, y, '.', c='r')

    p1, p0 = np.polyfit(x, y, deg=1) # slope, intercept
    ax.axline(xy1=(0, p0), slope=p1, color='b', lw=2)

    stats = (f'\\bar x = {np.mean(y):.3f}\n'
              f'\\sigma_x = {np.std(y):.3f}\n'
              f'r = {np.corrcoef(x, y)[0][1]:.3f}')
    ax.text(0.95, 0.07, stats, fontsize=9,
            transform=ax.transAxes, horizontalalignment='right')

plt.show()

```



## Statistique descriptive bivariée

On s'intéresse à deux variables  $x$  et  $y$ , mesurées sur les  $n$  unités d'observation. La série statistique est alors une suite de  $n$  couples  $(x_i, y_i)$  des valeurs prises par les deux variables sur chaque individu.

### Cas de deux variables quantitatives

Le couple est un couple de valeurs numériques. C'est donc un point dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Les variables  $x$  et  $y$  peuvent être analysées séparément, en opérant une statistique univariée sur chacune de ces variables. Les paramètres calculés (de position, de dispersion...) sont dits marginaux. Cependant, il est intéressant d'étudier le lien entre ces deux variables, par l'intermédiaire des valeurs des couples. On définit pour cela un certain nombre d'outils :

#### Definition 35 (Covariance)

La covariance de  $x$  et  $y$  est définie par :  $\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

#### Definition 36 (Coefficient de corrélation)

Le coefficient de corrélation de deux variables  $x$  et  $y$  est défini par  $r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ . Le coefficient de détermination est le carré du coefficient de corrélation.

Le coefficient de corrélation est donc la covariance normalisée par les écarts types marginaux des variables. Il mesure la dépendance linéaire entre  $x$  et  $y$ . Il est compris dans l'intervalle  $[-1, 1]$  et est positif (resp. négatif) si les points sont alignés le long d'une droite croissante (resp. décroissante), d'autant plus grand en valeur absolue que la dépendance linéaire est vérifiée. Dans le cas où le coefficient est nul, il n'existe pas de dépendance linéaire.

Pour connaître plus précisément la relation linéaire qui lie  $x$  et  $y$ , on effectue une régression linéaire en calculant par exemple la droite de régression : si  $y = a + bx$ , il est facile de montrer que  $b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$  et  $a = \bar{y} - b\bar{x}$

et la droite de régression s'écrit  $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$ .

A partir de cette droite, on peut calculer les valeurs ajustées, obtenues à partir de la droite de régression :  $y_i^* = a + bx_i$ . Ce sont les valeurs théoriques des  $y_i$  et les résidus  $e_i = y_i - y_i^*$  représentent la partie inexpliquée des  $y_i$  par la droite de régression (ceux là même que l'on essaye de minimiser par la méthode des moindres carrés). Nous reviendrons dans le chapitre sur la régression sur l'analyse de ces résidus.

### Cas de deux variables qualitatives

Le couple est un couple de valeurs  $(x_i, y_i)$  où  $x_i$  et  $y_i$  prennent comme valeurs des modalités qualitatives. Notons  $x_1 \dots x_J$  et  $y_1 \dots y_K$  les valeurs distinctes prises.

Les données peuvent être regroupées sous la forme d'un **tableau de contingence** prenant la forme suivante :

|          | $y_1$     | $\dots$  | $y_k$     | $\dots$  | $y_K$     | $total$  |
|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|
| $x_1$    | $n_{11}$  | $\dots$  | $n_{1k}$  | $\dots$  | $n_{1K}$  | $n_{1.}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ |
| $x_j$    | $n_{j1}$  | $\dots$  | $n_{jk}$  | $\dots$  | $n_{jK}$  | $n_{j.}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ |
| $x_J$    | $n_{J1}$  | $\dots$  | $n_{Jk}$  | $\dots$  | $n_{JK}$  | $n_{J.}$ |
| $total$  | $n_{..1}$ | $\dots$  | $n_{..k}$ | $\dots$  | $n_{..K}$ | $n$      |

où  $n_{j.}$  (resp  $n_{..k}$ ) sont les effectifs marginaux représentant le nombre de fois où  $x_j$  (resp.  $y_k$ ) apparaît, et  $n_{jk}$  le nombre d'apparition du couple  $(x_j, y_k)$ .

Le tableau des fréquences  $f_{jk}$  s'obtient en divisant tous les effectifs par la taille  $n$  dans ce tableau.

Un tel tableau s'interprète toujours en comparant les fréquences en lignes ou les fréquences en colonnes (profils lignes ou colonnes), définies respectivement par  $f_k^{(j)} = \frac{n_{jk}}{n_{..j}} = \frac{f_{jk}}{f_{..j}}$  et  $f_j^{(k)} = \frac{n_{jk}}{n_{..k}} = \frac{f_{jk}}{f_{..k}}$

Si l'on cherche un lien entre les variables, on construit un tableau d'effectifs théoriques qui représente la situation où les variables ne sont pas liées (indépendance). Ce tableau est constitué des effectifs  $n_{jk}^* = \frac{n_{..j} n_{..k}}{n}$ . Les effectifs observés  $n_{jk}$  ont les mêmes marges que les  $n_{jk}^*$ , et les écarts à l'indépendance sont calculés par la différence  $e_{jk} = n_{jk} - n_{jk}^*$ .

La dépendance du tableau se mesure au moyen du khi-deux défini par  $\chi_{obs}^2 = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \frac{e_{jk}^2}{n_{jk}^*}$  qui peut être normalisé pour ne plus dépendre du nombre d'observations :  $\phi^2 = \frac{\chi_{obs}^2}{n}$

La construction du tableau des effectifs théoriques et sa comparaison au tableau des observations permet dans un premier temps de mettre en évidence les associations significatives entre modalités des deux variables. Pour cela, on calcule la contribution au  $\chi^2$  des modalités  $j$  et  $k$  :

$$\frac{1}{\chi_{obs}^2} \cdot \frac{(n_{jk} - n_{..j} n_{..k})^2}{n_{jk}^*}$$

Le signe de la différence  $n_{jk} - n_{jk}^*$  indique alors s'il y a une association positive ou négative entre les modalités  $j$  et  $k$ .

Plus généralement, le  $\chi_{obs}^2$  est un indicateur de liaison entre les variables. Dans le cas où  $\chi_{obs}^2 = 0$ , il y a indépendance. Pour rechercher la borne supérieure du khi-deux et voir dans quel cas elle est atteinte, on développe le carré et on obtient

$$\chi_{obs}^2 = n \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \frac{n_{jk}^2}{n_{..j} n_{..k}} - 1 \right]$$

Comme  $\frac{n_{jk}}{n_{..k}} \leq 1$  on a  $\frac{n_{jk}^2}{n_{..j} n_{..k}} \leq \frac{n_{jk}}{n_{..k}}$  d'où

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \frac{n_{jk}^2}{n_{..j} n_{..k}} \leq \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \frac{n_{jk}}{n_{..k}} = \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{j=1}^J n_{jk}}{n_{..k}} = \sum_{k=1}^K \frac{n_{..k}}{n_{..k}} = 1$$

d'où  $\chi_{obs}^2 \leq n(K-1)$ . On pourrait de même montrer que  $\chi_{obs}^2 \leq n(J-1)$  et donc  $\phi^2 \leq \min(J-1, K-1)$ .

La borne est atteinte dans le cas de la dépendance fonctionnelle (si  $\forall j \frac{n_{jk}}{n_{..j}} = 1$ , i.e. il n'existe qu'une case non nulle dans chaque ligne.)

A partir de ce khi-deux normalisé, on calcule finalement plusieurs coefficients permettant de mesurer l'indépendance, et parmi ceux-ci citons :

- le coefficient de Cramer:  $V = \sqrt{\frac{\phi^2}{\min(J-1, K-1)}}$
- le coefficient de contingence de Pearson:  $C = \sqrt{\frac{\phi^2}{\phi^2 + 1}}$
- le coefficient de Tschuprow:  $T = \sqrt{\frac{\phi^2}{\sqrt{(K-1)(J-1)}}}$

Ces coefficients sont tous compris entre 0 (indépendance) et 1 (dépendance fonctionnelle). Pour estimer à partir de quelle valeur la dépendance fonctionnelle est significative, on procède de la manière suivante : si les  $n$  observations étaient prélevées dans une population où les variables sont indépendantes, on recherche les valeurs probables de  $\chi_{obs}^2$ .

En s'appuyant sur la loi multinomiale et le test du  $\chi^2$ , on montre que  $\chi_{obs}^2$  est une réalisation d'une variable aléatoire  $Z$  suivant approximativement une loi  $\chi_{(K-1)(J-1)}^2$ .

#### Remark 10

Soient  $U_1 \dots U_p$  variables i.i.d de loi normale centrée réduite. On appelle loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté la loi de la variable  $\sum_{i=1}^p U_i^2$ .

En effet, les  $e_{jk}$  sont liées par  $(K-1)(J-1)$  relations linéaires puisqu'on estime les probabilités de réalisation de  $x_j$  et  $y_k$  respectivement par  $n_{..j}/n$  et  $n_{..k}/n$ . Il suffit alors de fixer un risque d'erreur  $\alpha$  (une valeur qui, s'il y avait indépendance, n'aurait qu'une probabilité faible d'être dépassée), et on rejette l'hypothèse d'indépendance si  $\chi_{obs}^2$  est supérieur à la valeur critique qu'une variable  $\chi_{(K-1)(J-1)}^2$  a une probabilité  $\alpha$  de dépasser. L'espérance d'un  $\chi_{(K-1)(J-1)}^2$  étant égale à son degré de liberté,  $\chi_{obs}^2$  est d'autant plus grand que le nombre de modalités  $J$  et/ou  $K$  est grand.

D'autres indices existent, qui ne dépendent pas de  $\chi_{obs}^2$ , comme par exemple

$$G^2 = 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J n_{jk} \ln \left( \frac{n_{jk}}{n_{jk}^*} \right)$$

qui sous l'hypothèse d'indépendance suit une loi  $\chi_{(K-1)(J-1)}^2$ .

#### Cas d'une variable quantitative et d'une variable qualitative

On s'intéresse ici au cas où les modalités  $x_i$  sont qualitatives, et où  $y$  est une variable quantitative, dont les modalités sont des réalisations d'une variable aléatoire  $Y$ . Le rapport de corrélation théorique entre  $x$  et  $Y$  est défini par

$$\eta_{Y|x}^2 = \frac{\sigma_{\mathbb{E}[Y|x]}^2}{\sigma_Y^2}$$

Si  $n_j$  est le nombre d'observations de la modalité  $x_j$ ,  $j \in [1, J]$ ,  $y_{ij}$  la valeur de  $Y$  du  $i^e$  individu de la modalité  $j$ ,  $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_J$  sont les moyennes de  $Y$  pour ces modalités et  $\bar{y}$  la moyenne totale sur les  $n$  individus, le rapport de corrélation empirique est défini par

$$e^2 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^J n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{\sigma_y^2}$$

La quantité

$$\sigma_{\cap}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J n_j \sigma_j^2$$

avec  $\sigma_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$ , est appelée variance intra groupe (ou intra classe), et donne une idée de la variabilité à l'intérieur de chaque modalité. La quantité  $\sigma_{\cup}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$  est la variance inter groupes (ou inter classes), et mesure la variabilité entre les différentes modalités.

Le théorème de décomposition de la variance (ou théorème de Huygens) affirme que la variance totale  $\sigma_y^2$  calculée sans distinction de modalité s'écrit :  $\sigma_y^2 = \sigma_{\cap}^2 + \sigma_{\cup}^2$

De ces définitions, on a alors :

- $e^2 = 0$  si toutes les moyennes de  $Y$  sont égales, d'où l'absence de dépendance en moyenne
- $e^2 = 1$  si tous les individus d'une modalité de  $X$  ont même valeur de  $Y$  et ceci pour chaque modalité
- $e^2$  permet de comprendre, via le théorème de Huygens, quelle variation est prédominante dans la variance totale. Ainsi par exemple, si la variable quantitative est la note d'un élève à un examen, et la variable qualitative son assiduité au cours correspondant, la variabilité entre les notes obtenues dans toute la promotion dépend de deux facteurs : le fait que les étudiants assistent ou pas aux cours, et le fait qu'à assiduité égale (i.e. à l'intérieur d'une même modalité d'assiduité) les étudiants n'ont pas le même niveau.  $e^2$  permet alors de savoir lequel de ces deux facteurs est prédominant pour expliquer la variabilité des notes dans toute la promotion.

Pour déterminer à partir de quelle valeur  $e^2$  est significatif, on compare donc  $\sigma_{\cap}^2$  à  $\sigma_{\cup}^2$ . On peut montrer que si le rapport de corrélation théorique est nul, alors la variable  $\frac{\left(\frac{\sigma_{\cap}^2}{\sigma_{\cup}^2}\right)}{\left(\frac{1-\epsilon^2}{n-J}\right)}$  suit une loi de Fisher Snedecor, en supposant que les distributions conditionnelles de  $Y$  pour chaque modalité de  $X$  sont gaussiennes, de même espérance et de même variance.

#### Remark 11

Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois  $\chi_n^2$  et  $\chi_p^2$ . On définit la loi de Fisher Snedecor par  $F(n, p) = \frac{U/n}{V/p} F(J-1, n-J)$



## Vers une analyse multivariée

Bien évidemment, dans la majorité des cas, un individu sera décrit par  $p \geq 2$  variables. Si certains algorithmes de statistique descriptive multidimensionnelle sont abordés dans ce cours, il est néanmoins possible d'avoir une première approche exploratoire de ce cas.

### Matrices de covariance et de corrélation

La première idée, lorsque l'on a observé  $d$  variables sur  $n$  individus, est de calculer les  $d$  variances de ces variables, et les  $\frac{p(p-1)}{2}$  covariances. Ces mesures sont regroupées dans une matrice  $p \times p$ , symétrique, semi définie positive, appelée matrice de variance-covariance (ou matrice des covariances), et classiquement notée  $\Sigma$ .

De même, on peut former la matrice des corrélations entre les variables, à diagonale unité et symétrique. La matrice résultante, notée  $R$ , est également semi définie positive et sa représentation graphique en fausses couleurs permet d'apprécier les dépendances linéaires entre variables.

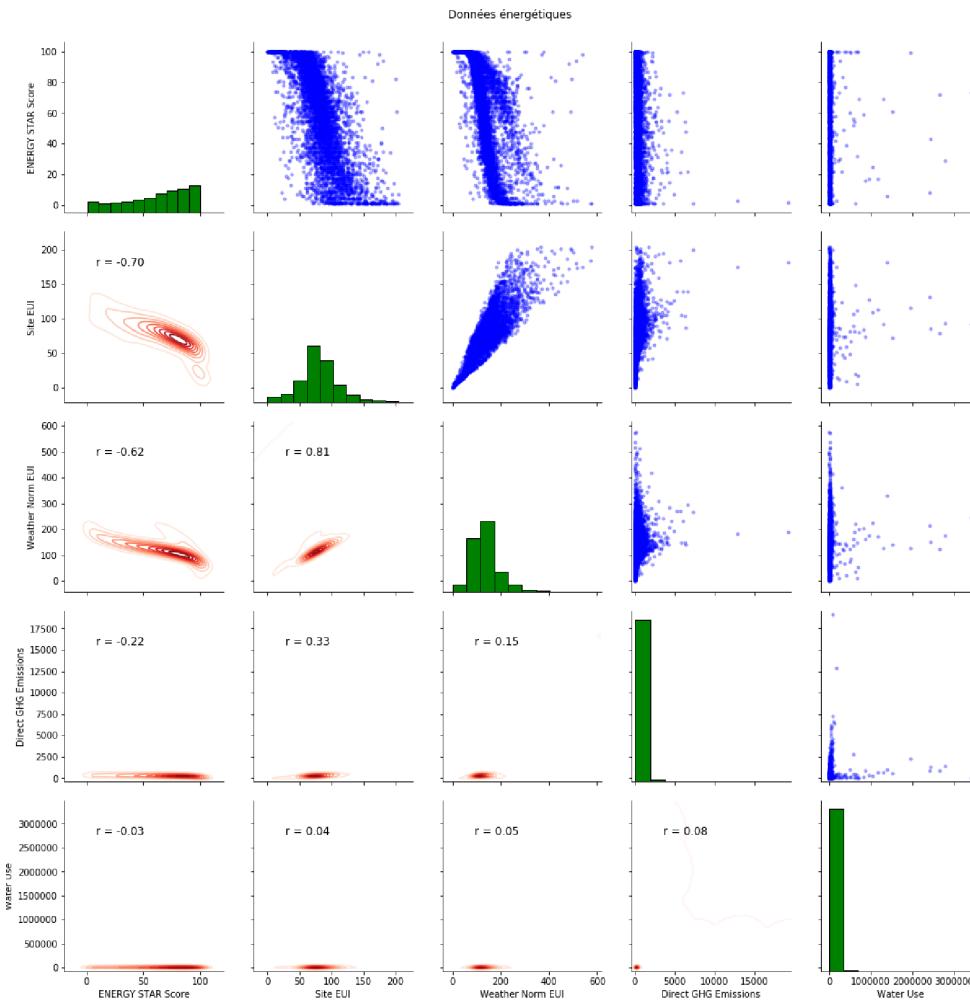


Dans le cas de variables qualitatives, les coefficients de corrélation peuvent être remplacés par les coefficients de Cramer, de Tschuprow...

#### Tableaux de nuages

On peut proposer à partir de là des représentations entre sous-ensembles de variables. La figure suivante propose un exemple de tels tableaux, parfois appelés splom (Scatter PLOT Matrix) :

- la partie triangulaire supérieure représente les nuages de points de couples de variables
- la diagonale représente les histogrammes des variables
- la partie triangulaire inférieure donne le coefficient de corrélation entre les deux variables, et une estimation de la densité de la distribution 2D des données



### Tableaux de Burt

Le tableau de Burt est une généralisation particulière de la table de contingence dans le cas où l'on étudie simultanément  $p$  variables qualitatives

$$X_1 \dots X_p. \text{ Notons } c_j \text{ le nombre de modalités de } X_j \text{ et posons } c = \sum_{j=1}^p c_j.$$

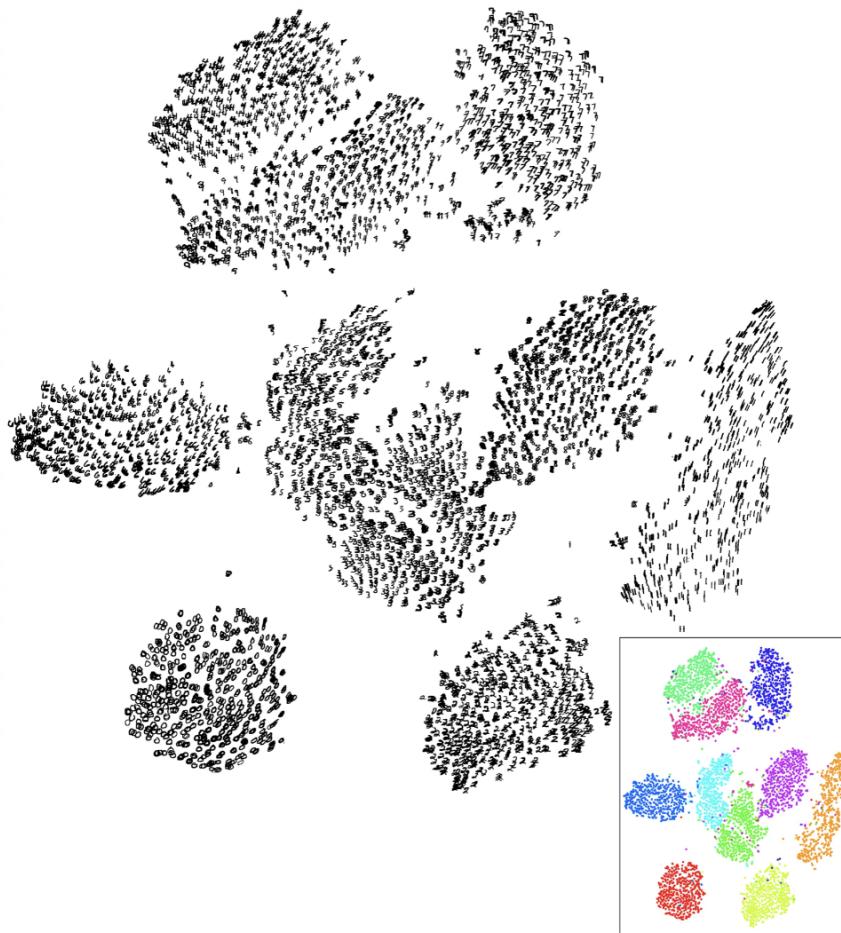
Le tableau de Burt est une matrice carrée symétrique de taille  $c$ , constituée de  $p^2$  sous-matrices. Chacune des  $p$  sous-matrices diagonales est relative à l'une des  $p$  variables, la  $j^{\text{e}}$  étant carrée de taille  $c_j$ , diagonale, et de coefficients diagonaux les effectifs marginaux de  $X_j$ . La sous-matrice dans le bloc  $(k, l)$  du tableau,  $k \neq l$ , est la table de contingence des variables  $X_k$  et  $X_l$ .

### Sélection de variables

On s'intéresse ici à  $n$  individus  $\mathbf{x}_i, i \in [1, n]$  décrits par  $d$  variables quantitatives ou caractéristiques (features),  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ . Avec l'avènement des Big Data, et la généralisation des capteurs,  $d$  peut être très grand (plusieurs milliers), et analyser telles quelles les données brutes devient difficile d'un point de vue calculatoire et interprétation. De plus, il est rare que les caractéristiques soient totalement utiles et indépendantes.

Une étape souvent utilisée en analyse de données consiste donc à prétraiter cet espace, par exemple pour :

- le transformer en un format compatible avec des algorithmes qui seront utilisés
- réduire la complexité temporelle des algorithmes qui seront utilisés
- réduire la complexité spatiale du problème traité
- découpler des variables et chercher les dépendances
- introduire des a priori, ou des propriétés importantes pour les algorithmes (données centrées normées, descripteurs épars...)
- permettre une interprétation plus intuitive et/ou graphique ([figure 2](#))



**Fig. 3** Exemple de réduction de dimension (source: Maaten & Hinton, 2008). Des images  $28 \times 28$  de chiffres manuscrits sont représentées par un vecteur de 784 valeurs, puis transformés en vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  pour les projeter dans le plan. La méthode utilisée permet d'optimiser la transformation de sorte à ce que les images représentant le même chiffre soient regroupées dans des nuages compacts.

Deux stratégies peuvent alors être utilisées :

1. sélectionner un sous-ensemble des variables initiales comme descripteurs des individus
2. calculer de nouveaux descripteurs à partir des variables initiales.

Nous nous intéressons ici à la première approche, la seconde (extraction de caractéristiques) étant abordée pour une approche linéaire dans le chapitre sur l'analyse en composantes principales.

#### Remark 12

Les méthodes d'extraction de caractéristiques peuvent être soit linéaires (on recherche des combinaisons linéaires des variables initiales permettant d'optimiser un certain critère), ou non linéaires (on parle également de manifold learning)

### Définitions

La sélection de caractéristiques consiste à choisir parmi les  $d$  descripteurs d'un ensemble d'individus  $\mathbf{x}_i, i \in [1, n]$ , un sous-ensemble de  $t < d$  caractéristiques jugées « les plus pertinentes », les  $d - t$  restantes étant ignorées.

On note  $F = (f_1 \cdots f_d)$  les  $d$  caractéristiques. On note  $Perf$  une fonction qui permet d'évaluer un sous-ensemble de caractéristiques, et on suppose que  $Perf$  atteint son maximum pour le meilleur sous-ensemble de caractéristiques (« le plus pertinent »). Le problème de sélection se formule donc comme un problème d'optimisation

$$\hat{F} = \operatorname{Arg\,max}_{U \subset F} Perf(U)$$

le cardinal  $|\hat{F}|$  de  $\hat{F}$  étant soit contrôlé par l'utilisateur, soit défini par l'algorithme de sélection.

On distingue alors trois stratégies :

- $|\hat{F}|$  est défini par l'utilisateur et l'optimisation s'effectue sur tous les sous-ensembles ayant ce cardinal
- On connaît une mesure minimale de performance  $\gamma$  et la sélection recherche le plus petit sous-ensemble  $U$  dont la performance  $Perf(U)$  est supérieure ou égale à  $\gamma$
- On cherche un compromis entre l'amélioration de la performance  $Perf(U)$  et la réduction de la taille du sous ensemble.

La mesure de pertinence d'une caractéristique est donc au centre des algorithmes de sélection. Plusieurs définitions sont possibles, et nous dirons ici qu'une caractéristique  $f_i$  est :

- pertinente si son absence entraîne une détérioration significative de la performance de l'algorithme utilisé en aval (classification ou régression)

- peu pertinente si elle n'est pas pertinente et s'il existe un sous-ensemble  $U$  tel que la performance de  $U \cup \{f_i\}$  est significativement meilleure que la performance de  $U$
- non pertinente, si elle ne rentre pas dans les deux premières définitions. En général, ces caractéristiques sont supprimées.

## Caractéristiques des méthodes de sélection

Une méthode de sélection basée sur l'optimisation de  $Perf$  utilise généralement trois étapes. Les deux dernières sont itérées jusqu'à un test d'arrêt.

### Initialisation

L'initialisation consiste à choisir l'ensemble de départ des caractéristiques. Il peut s'agir de l'ensemble vide, de  $F$  tout entier, ou un sous-ensemble quelconque  $U \subset F$ .

### Exploration des sous-ensembles

A partir de cette initialisation, les stratégies d'exploration des sous-ensembles de caractéristiques se déclinent en trois catégories :

1. génération exhaustive : tous les sous-ensembles de caractéristiques sont évalués. Si elle garantit de trouver la valeur optimale, cette méthode n'est que peu applicable dès que  $|F|$  devient important ( $2^{|F|}$  sous-ensembles possibles)
2. génération heuristique : une génération itérative est effectuée, chaque itération permettant de sélectionner ou de rejeter une ou plusieurs caractéristiques. La génération peut être ascendante (ajout de caractéristiques à partir de l'ensemble vide), descendante (suppression de caractéristiques à partir de  $F$ ), ou mixte.
3. génération stochastique : pour un ensemble de données et une initialisation définie, une stratégie de recherche heuristique retourne toujours le même sous-ensemble, ce qui la rend très sensible au changement de l'ensemble de données. La génération stochastique génère aléatoirement un nombre fini de sous-ensembles de caractéristiques afin de sélectionner le meilleur. La convergence est sous-optimale mais peut s'avérer préférable dans des algorithmes d'apprentissage, par exemple pour éviter le phénomène de surapprentissage.

### Evaluation des sous-ensembles

#### Filtres

Le critère d'évaluation utilisé évalue la pertinence d'une caractéristique selon des mesures qui reposent sur les propriétés de données d'apprentissage.

Pour  $n$  exemples  $\mathbf{x}_i, i \in [1, n]$ , on note  $\mathbf{x}_i = (x_{i1} \cdots x_{id})^T \in \mathbb{R}^d$  une donnée d'apprentissage (la  $j^e$  caractéristique  $f_j$  ayant donc pour valeur  $x_{ij}$ ),  $d$ 'étiquette  $y_i$  (en classification ou régression). Les méthodes de type filtres calculent un score pour évaluer le degré de pertinence de chacune des caractéristiques  $f_i$ , parmi lesquelles on peut citer

- Le critère de corrélation, utilisé en classification binaire

$$C_i = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \mu_i)(y_k - \mu_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \mu_i)^2 \sum_{k=1}^n (y_k - \mu_k)^2}}$$

où  $\mu_i$  (resp.  $\mu_k$ ) est la moyenne de la caractéristique  $f_i$  observée sur  $\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n$  (resp. moyenne des étiquettes)

- Le critère de Fisher, qui permet de mesurer dans un problème de classification à  $C$  classes le degré de séparabilité des classes à l'aide d'une caractéristique donnée

$$F_i = \frac{\sum_{c=1}^C n_c (\mu_c^i - \mu_i)^2}{\sum_{c=1}^C n_c (\Sigma_c^i)^2}$$

où  $n_c$ ,  $\mu_c^i$  et  $\Sigma_c^i$  sont l'effectif, la moyenne et l'écart-type de la caractéristique  $f_i$  dans la classe  $c$

- l'information mutuelle

$$I(i) = \sum_{\mathbf{x}_i} \sum_y P(X = \mathbf{x}_i, Y = y) \log \left( \frac{P(X = \mathbf{x}_i, Y = y)}{P(X = \mathbf{x}_i)P(Y = y)} \right)$$

qui mesure la dépendance entre les distributions de deux populations. Ici  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires dont les réalisations sont les valeurs de  $f_i$  et des étiquettes de classes. Les probabilités sont estimées de manière fréquentiste.

Dans l'exemple suivant, on choisit de garder  $|\hat{F}| = 2$  descripteurs, en contrôlant la pertinence par l'information mutuelle en classification.

```
from sklearn.datasets import load_iris
from sklearn.feature_selection import SelectKBest
from sklearn.feature_selection import mutual_info_classif
X, y = load_iris(return_X_y=True)
print("Taille des données avant : ", X.shape)
s = SelectKBest(mutual_info_classif, k=2)
X2 = s.fit_transform(X, y)
print("Taille des données après : ", X2.shape)
print("Variables sélectionnées : ", s.get_support())
```

```
Taille des données avant : (150, 4)
Taille des données après : (150, 2)
Variables sélectionnées : [False False True True]
```

### Méthodes enveloppantes

Le principal inconvénient des approches précédentes est le fait qu'elles ignorent l'influence des caractéristiques sélectionnées sur la performance de l'algorithme à utiliser par la suite. Les méthodes de type enveloppantes (wrappers) évaluent un sous-ensemble de caractéristiques par sa performance de classification en utilisant un algorithme d'apprentissage. Les sous-ensembles de caractéristiques sélectionnés par cette méthode sont bien adaptés à l'algorithme de classification utilisé, mais ils ne sont pas nécessairement pour un autre. De plus, la complexité de l'algorithme d'apprentissage rend ces méthodes coûteuses.

Les principales différences entre les filtres et les méthodes enveloppantes pour la sélection des caractéristiques sont les suivantes :

- Les filtres mesurent la pertinence des caractéristiques par leur corrélation avec la variable dépendante, tandis que les méthodes enveloppantes mesurent l'utilité d'un sous-ensemble de caractéristiques en entraînant un modèle sur celles-ci.
- Les filtres sont beaucoup plus rapides que les méthodes enveloppantes car elles n'impliquent pas l'apprentissage des modèles. D'un autre côté, les méthodes enveloppantes sont également très coûteuses en termes de calcul.
- Les filtres utilisent des méthodes statistiques pour l'évaluation d'un sous-ensemble de caractéristiques, tandis que les méthodes enveloppantes utilisent la validation croisée.

- Les filtres peuvent échouer à trouver le meilleur sous-ensemble de caractéristiques dans de nombreuses occasions, mais les méthodes enveloppantes peuvent toujours fournir le meilleur sous-ensemble de caractéristiques.
- L'utilisation d'un sous-ensemble de caractéristiques à partir des méthodes enveloppantes amène plus facilement au phénomène de surapprentissage

#### Remark 13

Les wrappers sélectionnent les caractéristiques en se fondant sur une estimation du risque réel.

#### Méthodes intégrées

Les méthodes intégrées incluent la sélection de variables lors du processus d'apprentissage. Un tel mécanisme intégré pour la sélection des caractéristiques peut être trouvé, par exemple, dans les algorithmes de type SVM, AdaBoost ou dans les arbres de décision.

#### Quelques méthodes de sélection

##### Suppression des descripteurs à variance faible

Une première idée simple consiste à supprimer les descripteurs ayant une faible variance, ces derniers n'étant pas discriminants dans la définition des individus.

```
from sklearn.feature_selection import VarianceThreshold
from sklearn import datasets

iris = datasets.load_iris()
X = iris.data
y = iris.target

v = VarianceThreshold(threshold=.5)
X2 = v.fit_transform(X)

print("Avant sélection, ", X.shape)
print("Après sélection, ", X2.shape)
print("Variables sélectionnées : ", v.get_support())
```

```
Avant sélection, (150, 4)
Après sélection, (150, 3)
Variables sélectionnées : [ True False  True  True]
```

##### Algorithmes de sélection séquentielle

Les algorithmes SFS (Sequential Forward Selection, [Algorithm 1](#)) et SBS (Sequential Backward Selection, [Algorithm 1](#)-rouge) ont été les premiers à être proposés. Ils utilisent des approches heuristiques de recherche en partant, pour la première, d'un ensemble de caractéristiques vide et pour la seconde de  $F$  tout entier.

##### Algorithm 1 (Algorithmes SFS et SBS)

**Entrée :**  $F = (f_1 \dots f_d)$ , taille de l'ensemble final  $T$

**Sortie :**  $\hat{F}$

1.  $\hat{F} \leftarrow \emptyset$  ( $\hat{F} \leftarrow F$ )
2. Pour  $i = 1$  à  $T$  ( $i = 1$  à  $d - T$ )
  1. Pour  $j = 1$  à  $|F|$  ( $j = 1$  à  $|\hat{F}|$ )
    1. Évaluer  $\{f_j\} \cup \hat{F}$  ( $\hat{F} \setminus \{f_j\}$ )
    2.  $f_{max}$  = meilleure caractéristique ( $f_{min}$ =moins bonne caractéristique)
  2.  $\hat{F} \leftarrow \hat{F} \cup \{f_{max}\}, F = F \setminus f_{max}$  ( $\hat{F} \setminus \hat{F} f_{min}$ )

L'étape d'évaluation utilise des données d'apprentissage : une heuristique évalue, sur un critère de performance, l'intérêt d'ajouter (ou de supprimer) le descripteur  $f_i$ .

Des variantes autour de ces algorithmes simples ont été proposées depuis et par exemple :

- il est possible à chaque itération d'inclure (ou d'exclure) un sous-ensemble de caractéristiques, plutôt qu'une seule (méthodes GSFS et GSBS)
- on peut appliquer  $p$  fois SFS puis  $q$  fois SBS, de manière itérative, avec  $p, q$  des paramètres qui peuvent évoluer au cours des itérations (algorithme SFFS et SFBS)

Dans l'exemple suivant, l'heuristique choisie est l'algorithme des 3 plus proches voisins et la mesure de performance sous-jacente est la mesure de validation croisée.

```
from sklearn.feature_selection import SequentialFeatureSelector
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier
from sklearn.datasets import load_iris
X, y = load_iris(return_X_y=True)
knn = KNeighborsClassifier(n_neighbors=3)
sfs = SequentialFeatureSelector(knn, n_features_to_select=3)
sfs.fit(X, y)

print("Taille des données avant sélection", X.shape)
print("Taille des données après sélection", sfs.transform(X).shape)
print("Variables sélectionnées : ", sfs.get_support())
```

```
Taille des données avant sélection (150, 4)
Taille des données après sélection (150, 3)
Variables sélectionnées : [ True False  True  True]
```

#### Algorithme Focus

L'algorithme de filtrage Focus ([Algorithm 2](#)) repose sur une recherche exhaustive sur  $F$  pour trouver le sous-ensemble le plus performant de taille optimale.

---

**Algorithm 2 (Algorithm FOCUS)**

---

**Entrée :**  $A = \{\mathbf{x}_i = (x_{i1} \cdots x_{id})^T \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq n\}$ , taille de l'ensemble final  $T$ , seuil  $\epsilon$

**Sortie :**  $\hat{F}$

1.  $\hat{F} \leftarrow \emptyset$
2. Pour  $i = 1$  à  $T$ 
  1. chaque sous-ensemble  $S_i$  de taille  $i$ 
    1. Si Inconsistance( $A, S_i$ ) <  $\epsilon$ 
      1.  $\hat{F} \leftarrow S_i$
      2. Retourner  $\hat{F}$

**Algorithmme relief**

La méthode relief en classification binaire ([Algorithm 3](#)), propose de calculer une mesure globale de la pertinence des caractéristiques en accumulant la différence des distances entre des exemples d'apprentissage choisis aléatoirement et leurs plus proches voisins de la même classe et de l'autre classe.

---

**Algorithm 3 (Algorithmme Relief)**

---

**Entrée :**  $A = \{\mathbf{x}_i = (x_{i1} \cdots x_{id})^T \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq n\}$ , nombre d'itérations  $T$

**Sortie :**  $w \in \mathbb{R}^d$  un vecteur de poids des caractéristiques,  $w_i \in [-1, 1], i \in [1, d]$

1. Pour  $i = 1$  à  $d$ 
  1.  $w_i \leftarrow 0$
2. Pour  $i = 1$  à  $T$ 
  1. Choisir aléatoirement un exemple  $\mathbf{x}_k$
  2. Chercher deux plus proches voisins de  $\mathbf{x}_k$ , l'un ( $\mathbf{x}_p$ ) dans sa classe, l'autre ( $\mathbf{x}_q$ ) dans l'autre classe
  3. Pour  $j = 1$  à  $d$ 
    1.  $w_j \leftarrow w_j + \frac{1}{nT} (|x_{kj} - x_{qj}| - |x_{kj} - x_{pj}|)$

**Méthode SAC**

L'algorithme SAC (Selection Adaptative de Caractéristiques) construit un ensemble de classificateurs (ou de régresseurs) ( $M_1 \cdots M_d$ ) appris sur chacun des descripteurs et sélectionne les meilleurs par discrimination linéaire de Fisher. Pour ce faire, l'algorithme construit un vecteur dont les éléments sont les performances  $Perf(M_i)$  des modèles  $M_i$ , triés par ordre décroissant. Deux moyennes  $m_1(i)$  et  $m_2(i)$  sont calculées, qui représentent les deux moyennes de performance d'apprentissage qui ont une valeur respectivement plus grande (plus petite) que la performance du modèle  $M_i$  :

$$m_1(i) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i Perf(M_j) \text{ et } m_2(i) = \frac{1}{d-i} \sum_{j=i+1}^d Perf(M_j)$$

Deux variances des performances  $v_1^2(i)$  et  $v_2^2(i)$  sont alors calculées à partir de ces moyennes, et le sous-ensemble de caractéristiques sélectionné est celui qui maximise le discriminant de Fisher

$$\frac{|m_1(i) - m_2(i)|}{v_1^2(i) + v_2^2(i)}$$

**Algorithmme RFE**

L'algorithme RLE (Recursive Feature Elimination) trie les descripteurs en analysant, localement, la sensibilité de la performance. Étant donné un prédicteur  $f$  qui attribue des poids aux caractéristiques (par exemple, les coefficients d'un modèle linéaire), l'objectif de l'algorithme est de sélectionner les caractéristiques en considérant de manière récursive des ensembles de caractéristiques de plus en plus petits. Tout d'abord, le prédicteur  $f$  est entraîné sur l'ensemble initial de caractéristiques et l'importance de chaque caractéristique est calculée par un algorithme dédié (critère de Gini, entropie...). Les caractéristiques les moins importantes sont éliminées de l'ensemble actuel de caractéristiques. Cette procédure est répétée de manière récursive sur l'ensemble élagué jusqu'à ce que le nombre souhaité de caractéristiques à sélectionner soit finalement atteint.

```
from sklearn.feature_selection import RFE
from sklearn.datasets import load_iris
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
X, y = load_iris(return_X_y=True)
estimator = DecisionTreeClassifier()
s = RFE(estimator, n_features_to_select=2, step=1)
s.fit(X, y)
```

```
print("Taille des données avant sélection", X.shape)
print("Variables sélectionnées : ", s.get_support())
print("Classement des variables : ", s.ranking_)
```

```
try:
    import pandas
except ModuleNotFoundError:
    !pip3 install --quiet pandas
```

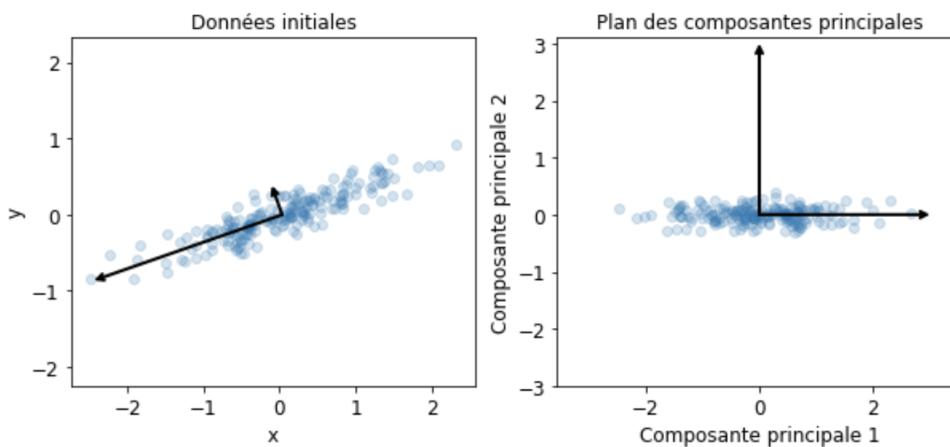
Les méthodes factorielles ont pour but de traiter et visualiser des données multidimensionnelles. La prise en compte simultanée de l'ensemble des variables est un problème difficile, rendu parfois plus simple car l'information apportée par les variables est redondante. Les méthodes factorielles visent alors à exploiter cette redondance pour tenter de remplacer les variables initiales par un nombre réduit de nouvelles variables, conservant au mieux l'information initiale.

Les principales méthodes de ce type incluent l'analyse factorielle des correspondances, l'analyse des correspondances multiples, l'analyse factorielle d'un tableau de distance (pour les tableaux de proximité) ou encore l'analyse factorielle discriminante. Ces méthodes sont proposées en annexe de ce cours.

Nous nous intéressons ici à une méthode de réduction de dimension linéaire sur données quantitatives, l'analyse en composantes principales.

## Analyse en composantes principales

Pour les données quantitatives, l'Analyse en Composantes Principales (ACP) est l'une des méthodes les plus utilisées. Elle considère que les nouvelles variables sont des combinaisons linéaires des variables initiales, non corrélées.



Dans la suite, les données seront des tableaux  $n \times d$  de variables quantitatives, une ligne étant un individu, et les colonnes décrivant les paramètres mesurés. Les observations de  $d$  variables sur  $n$  individus sont donc rassemblées dans une matrice  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ . On notera  $x^j$  la  $j$ -ème variable, identifiée par la  $j$ -ème colonne  $\mathbf{X}_{\bullet,j}$  de  $\mathbf{X}$ , et  $e_i$  le  $i$ -ème individu (i.e.  $\mathbf{X}_{i,\bullet}^T$ ).

## Principe de la méthode

### Pré-traitement du tableau

En analyse en composantes principales, on raisonne souvent sur des variables centrées et/ou réduites.

#### Données centrées

Notons  $\mathbf{g} = (\bar{x}^1 \dots \bar{x}^d)$  le vecteur des moyennes arithmétiques de chaque variable (centre de gravité) :

$$\mathbf{g} = \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{1}$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale de poids, chaque  $d_{ii}$  donnant l'importance de l'individu  $i$  dans les données (le plus souvent  $\mathbf{D} = \frac{1}{n} \mathbb{I}$ ), et  $\mathbf{1}$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont égales à 1. Le tableau  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{1}\mathbf{g}^T = (\mathbb{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T \mathbf{D})\mathbf{X}$  est le tableau centré associé à  $\mathbf{X}$ .

#### Données réduites

La matrice de variance/covariance des données centrées est égale à  $\mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X} - \mathbf{g}\mathbf{g}^T = \mathbf{Y}^T \mathbf{D} \mathbf{Y}$ .

Si on note  $\mathbf{D}_{1/\sigma}$  la matrice diagonale des inverses des écarts-types des variables, alors  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \mathbf{D}_{1/\sigma}$  est la matrice des données centrées réduites. La matrice  $\mathbf{R} = \mathbf{D}_{1/\sigma} \mathbf{V} \mathbf{D}_{1/\sigma} = \mathbf{Z}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}$  est la matrice de corrélation des données et résume la structure des dépendances linéaires entre les  $d$  variables.

### Projection des individus sur un sous-espace

Le principe de la méthode est d'obtenir une représentation approchée du nuage des  $n$  individus dans un sous-espace  $F_k$  de dimension faible. Ceci s'effectue par un mécanisme de projection.

Le choix de l'espace de projection est dicté par le critère suivant, qui revient à déformer le moins possible les distances en projection : le sous-espace de dimension  $k$  recherché est tel que la moyenne des carrés des distances entre projections soit la plus grande possible. En définissant l'inertie d'un nuage de points comme la moyenne pondérée des carrés des distances au centre de gravité, le critère revient alors à maximiser l'inertie du nuage projeté sur  $F_k$ .

Soit  $\mathbf{P}$  la projection orthogonale sur  $F_k$ . Le nuage de points projeté est associé au tableau  $\mathbf{XP}^T$  puisque chaque individu  $e_i$  se projette sur  $F_k$  selon un vecteur colonne  $\mathbf{Pe}_i$  ou ligne  $e_i \mathbf{P}^T$ .

La matrice de variance du tableau  $\mathbf{XP}^T$  est, dans le cas où les variables sont centrées :  $(\mathbf{XP}^T)^T \mathbf{D} (\mathbf{XP}^T) = \mathbf{PVP}^T$ . L'inertie du nuage projeté est donc égale à  $Tr(\mathbf{PVP}^T \mathbf{M})$ , où  $\mathbf{M}$  est une matrice symétrique définie positive de taille  $d$ , définissant la distance entre deux individus

$$d^2(e_i, e_j) = (e_i - e_j)^T \mathbf{M} (e_i - e_j)$$

Mais

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{PVP}^T \mathbf{M}) &= Tr(\mathbf{PVMP}) \quad \text{car } \mathbf{P}^T \mathbf{M} = \mathbf{MP} \\ &= Tr(\mathbf{VMP}^2) \quad \text{car } Tr(AB) = Tr(BA) \\ &= Tr(\mathbf{VMP}) \quad \text{car } P \text{ est une projection} \end{aligned}$$

Le problème posé est donc de trouver la projection  $\mathbf{P}$ , de rang  $k$  maximisant  $Tr(\mathbf{VMP})$ . La projection  $\mathbf{P}$  réalisant cette optimisation donnera alors  $F_k$ .

L'analyse en composantes principales consiste alors, de manière itérative, à chercher un sous-espace de dimension 1 d'inertie maximale, puis le sous-espace de dimension 1 orthogonal au précédent d'inertie maximale et ainsi de suite. Elle s'appuie sur le résultat suivant :

#### Theorem 9

Soit  $F_k$  un sous-espace portant l'inertie maximale. Alors le sous-espace de dimension  $k+1$  portant l'inertie maximale est la somme directe de  $F_k$  et de la droite orthogonale à  $F_k$  portant l'inertie maximale.

## Éléments principaux

### Axes principaux

Rechercher un sous-espace de dimension 1 d'inertie maximale revient à rechercher une droite de  $\mathbb{R}^n$  passant par le centre de gravité des données  $\mathbf{g}$  maximisant l'inertie du nuage projeté sur cet axe. Soit  $\mathbf{a}$  un vecteur directeur de cette droite. La projection orthogonale sur la droite est définie par la matrice de projection

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{aa}^T \mathbf{M}}{\mathbf{a}^T \mathbf{Ma}}$$

$$\begin{aligned}
Tr(\mathbf{VMP}) &= Tr \left( \mathbf{VM} \frac{\mathbf{aa}^T \mathbf{M}}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} \right) \\
&= \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} Tr(\mathbf{VMaa}^T \mathbf{M}) \\
&= \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} Tr(\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a}) \quad \text{car } Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA}) \\
&= \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a} \quad \text{car } \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

L'inertie du nuage projeté sur  $Lin(\mathbf{a})$  vaut alors

$$\frac{d}{da} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a})^2 \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a} - (\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a})^2 \mathbf{M} \mathbf{a}}{(\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a})^2}$$

$$\mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a} = \left( \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} \right) \mathbf{M} \mathbf{a}$$

soit  $\mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$  car  $\mathbf{M}$  est de rang plein. Donc  $\mathbf{a}$  est vecteur propre de  $\mathbf{M} \mathbf{V}$ , et  $\lambda$  est la plus grande des valeurs propres de  $\mathbf{M} \mathbf{V}$ . Or  $\mathbf{M}$  est symétrique, elle est diagonalisable sur une base de vecteurs propres orthonormés et on a le résultat suivant :

#### Theorem 10

Le sous-espace  $F_k$  de dimension  $k$  portant l'inertie maximale est engendré par les  $k$  premiers vecteurs propres de  $\mathbf{M} \mathbf{V}$

Les droites portées par ces vecteurs propres sont les axes principaux. Dans la suite on supposera  $\mathbf{a}$   $\mathbf{M}$ -normé.

#### Facteurs principaux

On associe à  $Lin(\mathbf{a})$  la forme linéaire  $\mathbf{u}$ , coordonnée orthogonale sur l'axe  $Lin(\mathbf{a})$ . Le vecteur  $\mathbf{u}$  définit une combinaison linéaire des variables descriptives  $x^1 \dots x^d$ . A l'axe principal  $\mathbf{a}$  est associé le facteur principal  $\mathbf{u} = \mathbf{M} \mathbf{a}$ . Puisque  $\mathbf{a}$  est vecteur propre de  $\mathbf{M} \mathbf{V}$ , on peut alors écrire

$$\mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{a}$$

et donc  $\mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ . Les facteurs principaux sont donc les vecteurs propres de  $\mathbf{M} \mathbf{V}$

#### Composantes principales

Les composantes principales sont les éléments de  $\mathbb{R}^n$  définis par  $\mathbf{c}_i = \mathbf{X} \mathbf{u}_i$ . Ce sont donc les vecteurs coordonnées des projections orthogonales des individus sur les axes propres  $\mathbf{a}_i$ . Ce sont donc les combinaisons linéaires des  $x^1 \dots x^p$  de variance maximale sous la contrainte  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i = 1$ , et cette variance est égale à la valeur propre  $\lambda_i$  associée à  $\mathbf{a}_i$ .

En pratique, l'analyse en composantes principales consiste à calculer les  $\mathbf{u}$  par diagonalisation de  $\mathbf{M} \mathbf{V}$ , puis à calculer les  $\mathbf{c} = \mathbf{X} \mathbf{u}$ . Le calcul explicite des vecteurs propres  $\mathbf{a}$  n'a que peu d'intérêt.

#### Reconstitution

Il est possible de reconstituer le tableau  $\mathbf{X}$  centré des données (ou une approximation par une matrice de rang  $k$ ) en utilisant les composantes. En effet, puisque  $\mathbf{X} \mathbf{u}_j = \mathbf{c}_j$  on a

$$\mathbf{X} \sum_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \mathbf{M}^{-1} = \sum_j \mathbf{c}_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \mathbf{M}^{-1}$$

Mais  $\sum_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \mathbf{M}^{-1} = \mathbb{I}$  car les  $\mathbf{u}_j$  sont orthonormés pour la métrique  $\mathbf{M}^{-1}$  donc

$$\mathbf{X} = \sum_j \mathbf{c}_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \mathbf{M}^{-1} \text{ et si l'on s'intéresse à l'approximation de } \mathbf{X} \text{ on ne somme que les } k \text{ premiers termes.}$$

A noter que lorsque  $\mathbf{M} = \mathbb{I}$ ,  $\mathbf{X} = \sum_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{z}_j \mathbf{v}_j^T$  où les  $\mathbf{z}_j$  sont les vecteurs propres unitaires de  $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$  et les  $\mathbf{v}_j$  les vecteurs propres unitaires de  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  (décomposition dite en valeurs singulières).

#### Interprétation des résultats

##### Quelle dimension pour $F_k$ ?

Le but premier de l'ACP est de réduire la dimension pour permettre une visualisation efficace des données, tout en préservant l'information (ici représentée par la variance du nuage de points). Il faut donc se doter d'outils permettant de répondre à la question : quelle dimension pour  $F_k$  ? Il n'y a pas de réponse théorique satisfaisante, l'essentiel étant d'avoir une représentation suffisamment expressive pour permettre une interprétation correcte du nuage de points. En préambule, il convient de remarquer que la réduction de dimension ne sera possible que si les variables  $x^1 \dots x^d$  ne sont pas indépendantes.

#### Critère théorique

On détermine ici si les valeurs propres sont significativement différentes entre elles à partir d'un certain rang : si la réponse est négative on conserve les premières valeurs propres.

On fait l'hypothèse que les  $n$  individus proviennent d'un tirage aléatoire dans une population gaussienne où  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_d$ . Si l'hypothèse est vérifiée, la moyenne arithmétique  $\alpha$  des  $d - k$  dernières valeurs propres et leur moyenne géométrique  $\gamma$  sont peu différentes. On admet que :

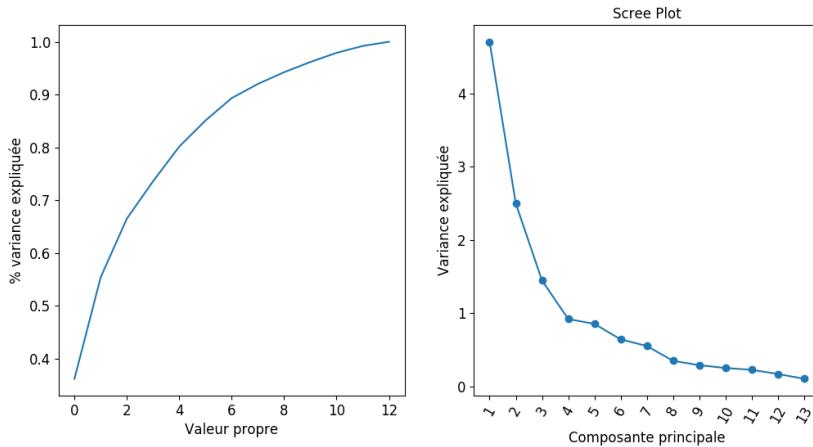
$c = \left( n - \frac{2p+11}{6} \right) (d - k) \ln \frac{\alpha}{\gamma}$  suit une loi du  $\chi^2$  de degré de liberté  $\frac{(d-k+2)(d-k-1)}{2}$  et on rejette l'hypothèse d'égalité des  $d - k$  valeurs propres si  $c$  est trop grand.

#### Pourcentage d'inertie

Le critère couramment utilisé est le pourcentage d'inertie totale expliquée, qui s'exprime sur les  $k$  premiers axes par :

$$\frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j}{\sum_{j=1}^d \lambda_j}$$

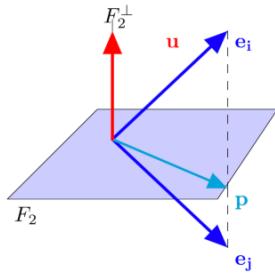
Un seuil par exemple de 90% d'inertie totale expliquée donne une valeur de  $k$  correspondante. Attention cependant, le pourcentage d'inertie doit faire intervenir le nombre de variables initiales.



### Mesures locales

Le pourcentage d'inertie expliquée est un critère global qui doit être complété par d'autres considérations. Supposons que le plan  $F_2$  explique une part importante d'inertie, et que, en projection sur ce plan, deux individus soient très proches. Cette proximité peut être illusoire si les deux individus se trouvent éloignés dans l'orthogonal de  $F_2$ . Pour prendre en compte ce phénomène, il faut envisager pour chaque individu  $e_i$  la qualité de sa représentation, souvent exprimée par le **cosinus de l'angle entre le plan principal et le vecteur  $e_i$** . Si ce cosinus est grand,  $e_i$  est voisin du plan, on peut alors examiner la position de sa projection sur le plan par rapport à d'autres points.

Dans la figure suivante,  $e_i$  et  $e_j$  se projettent sur  $F_2$  en  $p$  mais sont éloignés dans  $F_2^\perp$ .



### Critères empiriques

Lorsqu'on travaille sur données centrées réduites, on retient les composantes principales correspondant à des valeurs propres supérieures à 1 (critère de Kaiser) : en effet les composantes principales  $c_j$  étant des combinaisons linéaires des  $z - \bar{z}$  de variance maximale  $V(c_j) = \lambda$ , seules les composantes de variance supérieure à celle des variables initiales présentent un intérêt.

### Interprétation des résultats : exemple

Une analyse en composantes principales est réalisée sur un jeu de données composé de  $d=9$  indicateurs de qualité pour  $n=329$  villes américaines. Les paragraphes suivants sont illustrés par ces données.

#### Corrélation variables-facteurs

Pour donner du sens aux composantes principales  $c$ , il faut les relier aux variables initiales  $x^j$  en calculant les coefficients de corrélation linéaire  $r(c, x^j)$  et en seuillant ces coefficients en valeur absolue.

Lorsque l'on travaille sur des données centrées réduites (métrique  $\mathbf{D}_{1/\sigma}$ ), le calcul de  $r(c, x^j)$  se réduit à

$$r(c, x^j) = \frac{c^T D z^j}{\sqrt{\lambda}}$$

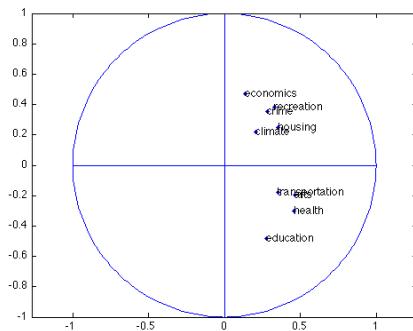
Or  $c = Z\mathbf{u}$  où  $\mathbf{u}$ , facteur principal associé à  $c$ , est vecteur propre de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}$  associé à  $\lambda$ . Donc

$$r(c, x^j) = \frac{\mathbf{u}^T Z^T D z^j}{\sqrt{\lambda}} = \frac{(\mathbf{z}^j)^T D Z \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}}$$

$(\mathbf{z}^j)^T D Z$  est la  $j^{th}$  ligne de  $Z^T D Z = \mathbf{R}$  donc  $(\mathbf{z}^j)^T D Z \mathbf{u}$  est la  $j^{th}$  composante de  $R\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$  d'où

$$r(c, x^j) = \sqrt{\lambda} u_j$$

Ces calculs s'effectuent pour chaque composante principale. Pour un couple de composantes principales  $c_1$  et  $c_2$  par exemple on représente fréquemment les corrélations sur une figure appelée « cercle des corrélations» où chaque variable  $x^j$  est repérée par un point d'abscisse  $r(c_1, x^j)$  et d'ordonnée  $r(c_2, x^j)$ .



#### Remark 14

Attention de ne pas interpréter des proximités entre points variables, si ceux-ci ne sont pas proches de la circonference.

Notons que dans le cas de la métrique  $D_{1/\sigma}$ , le cercle des corrélations est la projection de l'ensemble des variables centrées-réduites sur le sous-espace engendré par  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ . En ce sens, le cercle de corrélation est le pendant, dans l'espace des variables, de la projection des individus sur le premier plan principal.

#### Positionnement des individus

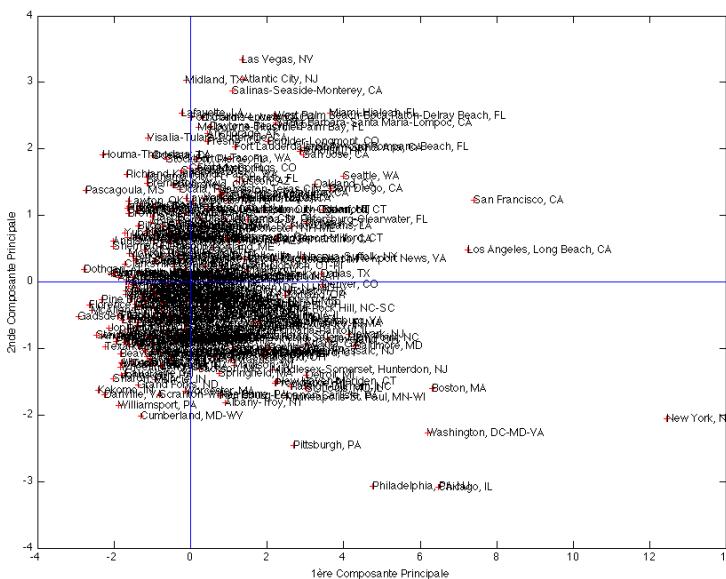
Dire que  $\mathbf{c}_1$  est très corrélée à  $x^j$  signifie que les individus ayant une forte coordonnée positive sur l'axe 1 sont caractérisés par une valeur de  $x^j$  nettement supérieure à la moyenne.

Il est très utile aussi de calculer pour chaque axe la contribution apportée par les divers individus à cet axe. Si  $c_{ki}$  est la valeur de la composante  $k$  pour le  $i^{\text{e}}$  individu, alors par construction

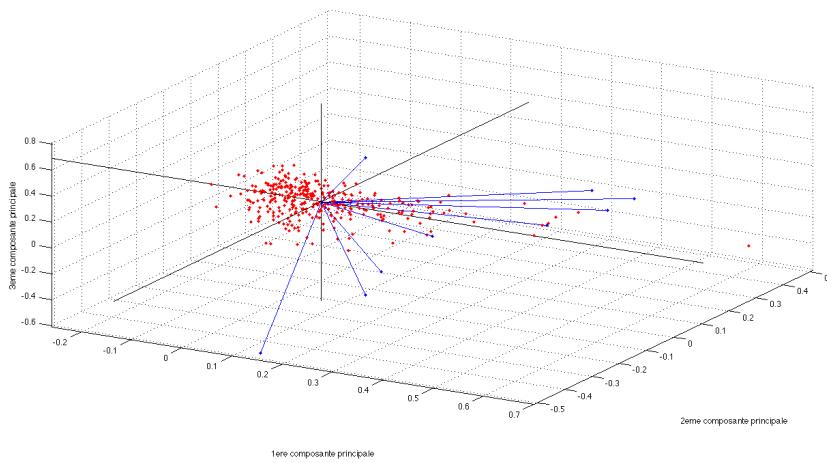
$$\sum_{i=1}^n p_i c_{ki}^2 = \lambda_k$$

où  $p_i$  est le poids de l'individu  $i$ . On appelle alors contribution de l'individu  $i$  à la composante  $\mathbf{c}_k$  la quantité  $\frac{p_i c_{ki}^2}{\lambda_k}$ . Dans le cas où le poids est différent de  $1/n$  (certains individus sont « plus importants » que d'autres), la contribution est riche d'interprétation. Dans le cas contraire, elle n'apporte rien de plus que les coordonnées de l'individu.

On peut alors positionner les individus sur les sous-espaces des premières composantes principales (plans factoriels). La figure suivante présente le positionnement de 329 villes américaines, où les 9 variables de qualité de vie précédentes ont été mesurées. Par soucis de lisibilité, seul les villes qui contribuent le plus à la création de la première composante principale ont leurs noms inscrits.



On peut également superposer les deux informations précédentes pour correler le positionnement des villes selon les variables originales. La figure suivante présente les 329 villes précédentes, plongées dans  $F_3$ , les anciennes variables étant matérialisées par des vecteurs dont la direction et la norme indiquent à quel point chaque variable contribue aux 3 premières composantes principales.



Il n'est pas souhaitable, et ceci surtout pour les premières composantes, qu'un individu ait une contribution excessive car cela serait un facteur d'instabilité, le fait de retirer cet individu modifiant profondément le résultat de l'analyse. Si ce cas se produisait il y aurait intérêt à effectuer l'analyse en éliminant cet individu puis en le mettant en élément supplémentaire, s'il ne s'agit pas d'une donnée erronée qui a été ainsi mise en évidence.

#### Facteur de taille, facteur de forme

Le théorème de Frobenius stipule qu'une matrice symétrique n'ayant que des termes positifs admet un premier vecteur propre dont toutes les composantes sont de même signe. Si ce signe est positif, la première composante est alors corrélée positivement avec toutes les variables et les individus sont rangés sur l'axe 1 par valeurs croissantes de l'ensemble des variables. Si de plus les corrélations entre variables sont du même ordre de grandeur, la première composante principale est proportionnelle à la moyenne des variables initiales. Cette première composante définit alors un facteur de taille.

La deuxième composante principale différencie alors des individus de « taille » semblable, on l'appelle souvent facteur de forme.

#### Ajout de variable et ou d'individu

Toutes les interprétations précédentes expliquent les résultats à l'aide des données initiales, qui ont permis de les calculer. On risque alors de prendre pour une propriété intrinsèque des données un simple artefact de la méthode (par exemple il existe de fortes corrélations entre la première composante principale et certaines variables, puisque  $\mathbf{c}_1$  maximise  $\sum_j r^2(\mathbf{c}, \mathbf{x}^j)$ ).

En revanche une forte corrélation entre une composante principale et une variable qui n'a pas servi à l'analyse sera significative. D'où la pratique courante de partager en deux groupes l'ensemble des variables : d'une part les variables actives qui servent à déterminer les axes principaux, d'autre part les variables passives ou supplémentaires que l'on relie a posteriori aux composantes principales. On distingue alors les variables supplémentaires suivant leur type, numérique (à placer dans les cercles de corrélation) ou qualitative (donnée d'une partition des  $n$  individus en  $k$  classes).

#### Pour résumer

```
from IPython.display import Video
Video("videos/ACP.mp4", embed =True, width=800)
```

0:00

#### Exemple

On étudie les consommations annuelles en 1972, exprimées en devises, de 8 denrées alimentaires (les variables), les individus étant 8 catégories socio-professionnelles (CSP) . Les données sont des moyennes par CSP :

|      | PAO | PAA | VIO | VIA | POT | LEC | RAI | PLP |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| AGRI | 167 | 1   | 163 | 23  | 41  | 8   | 6   | 6   |
| SAAG | 162 | 2   | 141 | 12  | 40  | 12  | 4   | 15  |
| PRIN | 119 | 6   | 69  | 56  | 39  | 5   | 13  | 41  |
| CSUP | 87  | 11  | 63  | 111 | 27  | 3   | 18  | 39  |
| CMOY | 103 | 5   | 68  | 77  | 32  | 4   | 11  | 30  |
| EMPL | 111 | 4   | 72  | 66  | 34  | 6   | 10  | 28  |
| OUVR | 130 | 3   | 76  | 52  | 43  | 7   | 7   | 16  |
| INAC | 138 | 7   | 117 | 74  | 53  | 8   | 12  | 20  |

avec les notations suivantes :

AGRI = Exploitants agricoles, SAAG= Salariés agricoles, PRIN = Professions indépendantes, CSUP = Cadres supérieurs, CMOY= Cadres moyens, EMPL= Employés, OUVR = Ouvriers, INAC = Inactifs.

et

PAO = Pain ordinaire, PAA = Autre pain, VIO = Vin ordinaire, VIA=Autre vin, POT= Pommes de terre, LEC=Légumes secs, RAI=Raisin de table, PLP= Plats préparés.

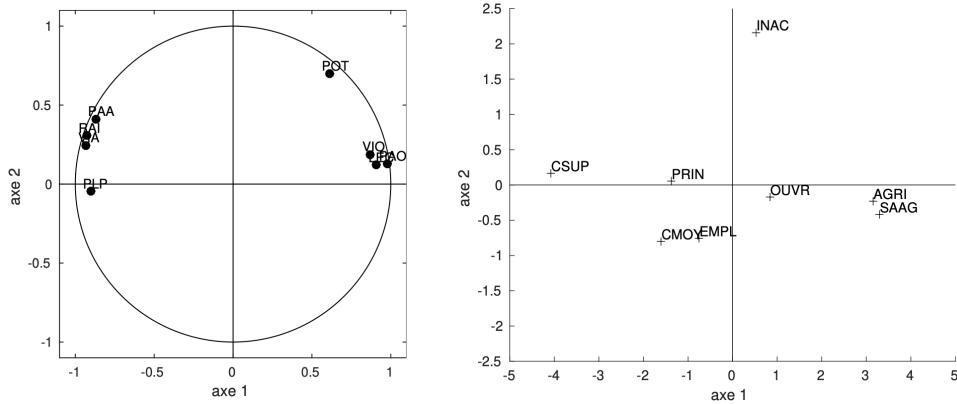
La matrice de corrélation des variables est alors

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & -.7737 & 0.9262 & -.9058 & 0.6564 & 0.8886 & -.8334 & -.8558 \\ -.7737 & 1.0000 & -.6040 & 0.9044 & -.3329 & -.6734 & 0.9588 & 0.7712 \\ 0.9262 & -.6040 & 1.0000 & -.7502 & 0.5171 & 0.7917 & -.6690 & -.8280 \\ -.9058 & 0.9044 & -.7502 & 1.0000 & -.4186 & -.8386 & 0.9239 & 0.7198 \\ 0.6564 & -.3329 & 0.5171 & -.4186 & 1.0000 & 0.6029 & -.4099 & -.5540 \\ 0.8886 & -.6734 & 0.7917 & -.8386 & 0.6029 & 1.0000 & -.8245 & -.7509 \\ -.8334 & 0.9588 & -.6690 & 0.9239 & -.4099 & -.8245 & 1.0000 & 0.8344 \\ -.8558 & 0.7712 & -.8280 & 0.7198 & -.5540 & -.7509 & 0.8344 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

et son analyse spectrale donne

|   | Valeur propre | Variance expliquée | Variance cumulative expliquée |
|---|---------------|--------------------|-------------------------------|
| 1 | 6.20794684    | 0.7760             | 0.7760                        |
| 2 | 0.87968139    | 0.1100             | 0.8860                        |
| 3 | 0.41596112    | 0.0520             | 0.9379                        |
| 4 | 0.30645467    | 0.0383             | 0.9763                        |
| 5 | 0.16844150    | 0.0211             | 0.9973                        |
| 6 | 0.01806771    | 0.0023             | 0.9996                        |
| 7 | 0.00344677    | 0.0004             | 1.0000                        |
| 8 | 0.00000000    | 0.0000             | 1.0000                        |

Le critère de Kaiser conduit à sélectionner un seul axe, qui retient 77% de l'inertie totale. L'axe 2 retenant 11% de l'inertie, il peut être intéressant de le rajouter à l'étude pour expliquer près de 90% de la variance des données. Les suivantes représentent les variables et les individus dans le plan des deux premiers vecteurs propres.



L'interprétation de ce plan se fait séquentiellement, pour chaque axe et chaque nuage de points, en regardant les contributions à la formation des axes:

- Axe 1 :

1- **Variables** : les variables contribuant le plus à la formation de l'axe 1 sont celles dont les coordonnées sur cet axe sont proches de 1 en valeur absolue. PAA et VIO sont très proches de la contribution moyenne, on les intègre donc dans l'interprétation de l'axe si elles vont dans le sens de l'interprétation que l'on peut faire, sans elles. L'axe 1 oppose les individus consommant du pain ordinaire, des légumes secs (et éventuellement du vin ordinaire) à ceux qui consomment du raisin, du vin (éventuellement du pain) plus sophistiqué et des plats préparés. L'axe 1, et donc la première composante principale, mesure la répartition entre aliments ordinaires bon marché et aliments plus recherchés.

Toutes les variables sont bien représentées sur l'axe (la qualité de représentation est égale à la coordonnée au carré). D'un point de vue graphique, une variable bien représentée est proche du bord du cercle des corrélation et à proximité de l'axe. La première composante principale explique donc correctement tous les types de consommations alimentaires.

2- **Individus** : de même, les individus contribuant le plus à la formation de l'axe 1 sont ceux dont les coordonnées sur cet axe sont les plus élevées en valeur absolue. Le premier axe met donc en opposition les agriculteurs et les cadres supérieurs quant à leurs habitudes alimentaires. Les autres catégories socio-professionnelles, assez bien représentées sur l'axe à l'exception des inactifs (cf. contributions des individus sur l'axe 1), s'échelonnent suivant la hiérarchie habituelle. Elles sont bien expliquées par l'axe.

- Axe 2 :

1- **Variables** : L'axe 2 est défini par les variables POT et PAA. Compte tenu de la différence de contribution existant entre ces deux variables, de la contribution élevée de POT (55%), et de la qualité de représentation moyenne de PAA, la deuxième composante principale peut être considérée comme essentiellement liée à la consommation de pommes de terre. Les variables, à l'exception de POT et de PAA (dans une moindre mesure) sont assez mal représentées sur l'axe. La deuxième composante principale n'explique donc qu'un aspect très particulier de la consommation alimentaire.

2- **Individus** : Pour repérer les individus ayant une contribution significative, on compare les coordonnées des individus sur l'axe 2, à la racine de la deuxième valeur propre =0,94, le signe donnant le sens de contribution.

L'axe 1 reflète donc l'opposition qui existe entre les catégories socio-professionnelles dans leur alimentation, opposant les CSP modestes qui consomment des produits basiques aux catégories favorisées qui consomment des produits plus recherchés. L'axe 2 reflète quant à lui la particularité des inactifs quant à leur alimentation, fortement composée de pommes de terre (un retour aux données d'origine vient confirmer cette conclusion).

## Implémentation

De nombreuses librairies Python permettent d'utiliser facilement l'ACP, notamment [scikit-learn](#) qui propose une méthode [PCA](#).

Nous proposons ici d'implémenter entièrement l'ACP, pour bien comprendre les mécanismes de cette approche.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

pd.options.mode.chained_assignment = None

# Données
vins = pd.read_csv("./data/vins.csv", delimiter=",", header=None)
cat_vins = vins.loc[:, 0]
X = vins.loc[:, 1:vins.shape[1]]
X = np.array(X)
n, d = X.shape
ind = np.arange(n)
variables = ['% alcool', 'acide malique', 'cendres', 'alcalinité', 'magnésium',
'phénols', 'flavonoïdes', 'non flavonoïdes', 'proanthocyanidines', 'couleur',
'teinte', '00280/00315', 'proline']

# Affichage d'un tableau
def print_tab(n, d, ind, tab):
    r = " " * 12 + "\t"
    c = ['CP'] + str(i+1) for i in range(d)]
    for j in range(d - 1):
        r += c[j] + "\t"
        r += c[d - 1] + "\n"
    for i in range(n):
        r += " %8.8s\t" % ind[i]
        for j in range(d - 1):
            r += "%s.2f \t" % tab[i][j]
        r += "%.2f\n" % tab[i][d - 1]
    return r

```

## Préparation des données

### Données centrées

$g = X^T D\mathbf{1}$  = Vecteur des moyennes arithmétiques de chaque variable

$D = \frac{1}{n} I$  = Matrice diagonale de poids, chaque  $d_{ii}$  donnant l'importance de l'individu  $i$  dans les données

```

Xt = np.transpose(X)
D = 1./n * np.identity(n)
un = np.transpose(np.array([n * [1]]))
g = np.matmul(np.matmul(Xt, D), un)
print ('g = \n', g)

```

```

g =
[[1.30006180e+01]
[2.33634831e+00]
[2.36651685e+00]
[1.94949438e+01]
[9.97415730e+01]
[2.29511236e+00]
[2.02926966e+00]
[3.61853933e-01]
[1.59089888e+00]
[5.05808988e+00]
[9.57449438e-01]
[2.61168539e+00]
[7.46893250e+02]]

```

$Y = X - \mathbf{1}g^T = (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^T D)X$  = Tableau centré associé à  $X$

```

gt = np.transpose(g)
Y = X - np.matmul(un, gt)

```

### Données réduites

$V = X^T DX - gg^T = Y^T DY$  = Matrice de variance/covariance.

```

Yt = np.transpose(Y)
V = np.matmul(np.matmul(Yt, D), Y)

```

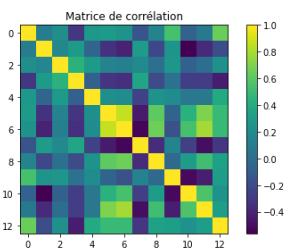
$Z = YD_{1/\sigma}$  = Matrice des données centrées réduites

$R = D_{1/\sigma} V D_{1/\sigma} = Z^T DZ$  = Matrice (symétrique) de variance/covariance des données centrées réduites.

```

sigma = seq = [np.std(x) for x in Xt]
i_sigma = [1./s for s in sigma]
D_sigma = i_sigma * np.identity(d)
Z = np.matmul(Y, D_sigma)
R = np.matmul(np.matmul(D_sigma, V), D_sigma)
plt.imshow(R)
plt.title("Matrice de corrélation")
plt.tight_layout()
plt.colorbar();

```



### Inertie du nuage de points

$M$  est une matrice symétrique définie positive correspondant à la métrique

- Si  $M = D_{1/\sigma}^2$  on calcule  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i - g)^T M (e_i - g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i)^T M y_i = Tr(VM)$
- Si  $M = I$  on calcule  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i)^T M z_i = Tr(RM)$

```

def calcul_inertie_somme (Y, M):
    inertie = 0
    for i in range(n):
        inertie += np.matmul(np.transpose(Y[i]), np.matmul(M, Y[i]))
    return inertie / n

def calcul_inertie_trace (V, M):
    return np.trace (np.matmul (V, M))

# Si les données sont centrées mais pas encore réduites on travaille avec Y et V
M = np.matmul(D_sigma, D_sigma)
print (calcul_inertie_somme(Y, M))
print (calcul_inertie_trace(V, M))

# Si les données sont centrées réduites, on travaille avec Z et R
M = np.identity(d)
print (calcul_inertie_somme(Z, M))
print (calcul_inertie_trace(R, M))

```

```

12.99999999999995
13.00000000000004
12.99999999999998
13.00000000000004

```

## Analyse spectrale

```

eigenvalues,eigenvectors = np.linalg.eig(R)
eigenvalues = sorted(eigenvalues, reverse=True)
u = [eigenvectors[:,i] for i in range(d)]

```

## Calcul des composantes principales

```

c = []
for j in range(d):
    c.append(np.matmul (Z, u[j]))

```

## Pourcentage d'inertie expliquée par un axe

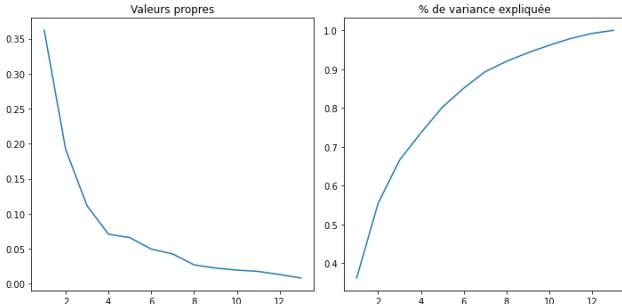
$$\sum_{j=1}^k \lambda_j$$

Pourcentage d'inertie cumulée expliquée par les  $k$  premiers axes :  $\frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j}{\sum_{j=1}^d \lambda_j}$

```

i_lambda = [l/d for l in eigenvalues]
i_cum = np.cumsum(eigenvalues)/d
plt.figure(figsize=(10,5))
plt.subplot(121)
plt.plot(np.arange(1,d+1),i_lambda)
plt.title('Valeurs propres')
plt.subplot(122)
plt.plot(np.arange(1,d+1),i_cum)
plt.title('% de variance expliquée');
plt.tight_layout()

```



## Critère de Kaiser

```

nb_l = np.sum(np.array(eigenvalues)>1)
print ("On retient " + str(nb_l) + " axes")

```

```

On retient 3 axes

```

## Analyse des résultats

### Corrélation variables/facteurs

```

r = []
for j in range(d):
    r.append(np.sqrt(eigenvalues[j]) * u[j])

```

### Cercle des corrélations pour un couple de composantes principales

Pour  $c_1$  et  $c_2$ , chaque variable  $x_j$  est repérée par un point d'abscisse  $r(c_1, x_j)$  et d'ordonnée  $r(c_2, x_j)$ .

```

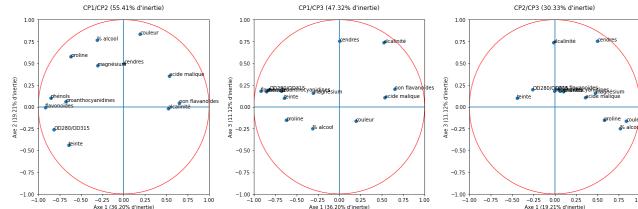
i1 = i_lambda[0] * 100
i2 = i_lambda[1] * 100
i3 = i_lambda[2] * 100
i12 = i1 + i2
i13 = i1 + i3
i23 = i2 + i3

plt.figure(figsize=(18, 6))
plt.subplot(131)
plt.title('CP1/CP2 (%.2f' % i12 + '% d\'inertie)\n')
plt.xlabel('Axe 1 (%.2f' % i1 + '% d\'inertie)')
plt.ylabel('Axe 2 (%.2f' % i2 + '% d\'inertie)')
plt.xlim([-1, 1])
plt.ylim([-1, 1])
plt.axline(0)
plt.axline(0)
plt.gca().add_patch(plt.Circle((0,0), radius= 1, facecolor='none', edgecolor='r'))
plt.scatter(r[0], r[1])
for i, txt in enumerate(variables):
    plt.annotate(txt, (r[0][i], r[1][i]))

plt.subplot(132)
plt.title('CP1/CP3 (%.2f' % i13 + '% d\'inertie)\n')
plt.xlabel('Axe 1 (%.2f' % i1 + '% d\'inertie)')
plt.ylabel('Axe 3 (%.2f' % i3 + '% d\'inertie)')
plt.xlim([-1, 1])
plt.ylim([-1, 1])
plt.axline(0)
plt.axline(0)
plt.gca().add_patch(plt.Circle((0,0), radius= 1, facecolor='none', edgecolor='r'))
plt.scatter(r[0], r[2])
for i, txt in enumerate(variables):
    plt.annotate(txt, (r[0][i], r[2][i]))

plt.subplot(133)
plt.title('CP2/CP3 (%.2f' % i23 + '% d\'inertie)\n')
plt.xlabel('Axe 1 (%.2f' % i2 + '% d\'inertie)')
plt.ylabel('Axe 3 (%.2f' % i3 + '% d\'inertie)')
plt.xlim([-1, 1])
plt.ylim([-1, 1])
plt.axline(0)
plt.axline(0)
plt.gca().add_patch(plt.Circle((0,0), radius= 1, facecolor='none', edgecolor='r'))
plt.scatter(r[1], r[2])
for i, txt in enumerate(variables):
    plt.annotate(txt, (r[1][i], r[2][i]))
plt.tight_layout()

```



### Contribution des variables

```

contributions_variables = []
for i in range (d):
    line = []
    for j in range (d):
        line.append(np.transpose(u)[i][j]*np.transpose(u)[i][j])
    contributions_variables.append(line)
print (print_tab (d, d, variables, contributions_variables))

```

|          | CP9  | CP10 | CP11 | CP12 | CP13 | CP4  | CP5  | CP6  | CP7  | CP8  |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| % alcool | 0.16 | 0.07 | 0.02 | 0.23 | 0.04 | 0.00 | 0.07 | 0.05 | 0.00 | 0.00 |
| acide ma | 0.00 | 0.01 | 0.06 | 0.05 | 0.01 | 0.29 | 0.00 | 0.29 | 0.18 | 0.00 |
| cendres  | 0.03 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.10 | 0.39 | 0.05 | 0.02 | 0.02 | 0.02 |
| alcalini | 0.18 | 0.00 | 0.04 | 0.23 | 0.00 | 0.37 | 0.00 | 0.00 | 0.08 | 0.01 |
| magnésiu | 0.02 | 0.00 | 0.07 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.12 | 0.53 | 0.00 | 0.10 |
| phénols  | 0.16 | 0.09 | 0.16 | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.22 |
| flavonoi | 0.16 | 0.09 | 0.08 | 0.09 | 0.10 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.01 | 0.69 |
| non flav | 0.04 | 0.00 | 0.09 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.04 | 0.25 | 0.07 | 0.35 |
| proantho | 0.05 | 0.00 | 0.05 | 0.04 | 0.01 | 0.05 | 0.02 | 0.02 | 0.14 | 0.01 |
| couleur  | 0.14 | 0.01 | 0.10 | 0.00 | 0.02 | 0.06 | 0.02 | 0.16 | 0.02 | 0.01 |
| teinte   | 0.00 | 0.37 | 0.01 | 0.00 | 0.28 | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.18 | 0.05 |
| OD280/OD | 0.19 | 0.07 | 0.01 | 0.00 | 0.08 | 0.01 | 0.18 | 0.03 | 0.01 | 0.00 |
| proline  | 0.01 | 0.36 | 0.14 | 0.03 | 0.02 | 0.00 | 0.27 | 0.01 | 0.07 | 0.00 |
| OD280/OD | 0.01 | 0.01 | 0.14 | 0.03 | 0.02 | 0.00 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
| proline  | 0.01 | 0.01 | 0.08 | 0.13 | 0.02 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |

### Représentation des individus

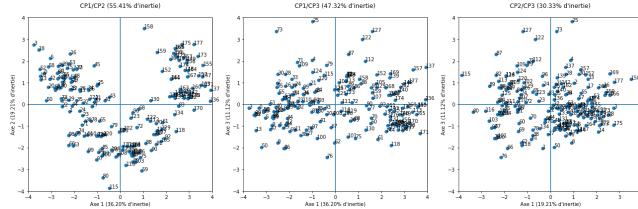
```

plt.figure(figsize=(18, 6))
plt.subplot(131)
plt.title('CP1/CP2 (%.2f' % i12 + '% d\'inertie)\n')
plt.xlabel('Axe 1 (%.2f' % i1 + '% d\'inertie)')
plt.ylabel('Axe 2 (%.2f' % i2 + '% d\'inertie)')
plt.xlim([-4, 4])
plt.ylim([-4, 4])
plt.axhline(0)
plt.axvline(0)
plt.scatter(c[0], c[1])
for i, txt in enumerate(ind):
    plt.annotate(txt, (c[0][i], c[1][i]))

plt.subplot(132)
plt.title('CP1/CP3 (%.2f' % i13 + '% d\'inertie)\n')
plt.xlabel('Axe 1 (%.2f' % i1 + '% d\'inertie)')
plt.ylabel('Axe 3 (%.2f' % i3 + '% d\'inertie)')
plt.xlim([-4, 4])
plt.ylim([-4, 4])
plt.axhline(0)
plt.axvline(0)
plt.scatter(c[0], c[2])
for i, txt in enumerate(ind):
    plt.annotate(txt, (c[0][i], c[2][i]))

plt.subplot(133)
plt.title('CP2/CP3 (%.2f' % i23 + '% d\'inertie)\n')
plt.xlabel('Axe 1 (%.2f' % i2 + '% d\'inertie)')
plt.ylabel('Axe 3 (%.2f' % i3 + '% d\'inertie)')
plt.xlim([-4, 4])
plt.ylim([-4, 4])
plt.axhline(0)
plt.axvline(0)
plt.scatter(c[1], c[2])
for i, txt in enumerate(ind):
    plt.annotate(txt, (c[1][i], c[2][i]))
plt.tight_layout()

```



Contribution des individus

$$\frac{p_i c_{ik}^2}{\lambda_k}$$

```

contributions_individus = []
for i in range(n):
    line = []
    for k in range(d):
        val = (np.transpose(c)[i][k]*np.transpose(c)[i][k]) / (n * eigenvalues[k])
        line.append(val)
    contributions_individus.append(line)
print (print_tab (n, d, ind, contributions_individus))

```

| CP9  | CP10 | CP1  | CP2  | CP3  | CP4  | CP5  | CP6  | CP7  | CP8  |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      |      | CP11 | CP12 | CP13 |      |      |      |      |      |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
|      | 1    | 0.01 | 0.01 | 0.06 |      |      |      |      |      |
| 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
|      | 2    | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 3    | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 4    | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 5    | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 6    | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.06 |      |      |      |      |      |
|      | 7    | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 8    | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 9    | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 10   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.03 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 11   | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 12   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 13   | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.05 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 14   | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 15   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 16   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 17   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 18   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 19   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 20   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.04 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 21   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 22   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.04 |      |      |      |      |      |
|      | 23   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 24   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 25   | 0.00 | 0.00 | 0.06 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 26   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 27   | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 28   | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |



|       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|       | 94   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| 0.02  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.09 | 0.01 | 0.09 | 0.02 | 0.07 | 0.00 |      |
| 95    | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |
| 96    | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.02 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 97    | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.03 |      |      |      |      |      |      |
| 98    | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.05 |      |      |      |      |      |      |
| 99    | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.04 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.08 |      |      |      |      |      |      |
| 100   | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.03 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 101   | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 102   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 103   | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 104   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.03 |      |      |      |      |      |      |
| 105   | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| 0.00  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.11 |      |      |      |      |      |      |
| 106   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 107   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.05 |      |      |      |      |      |      |
| 108   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.04 |      |      |      |      |      |      |
| 109   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.04 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 110   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.07 | 0.03 | 0.02 | 0.03 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 111   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 112   | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.01 | 0.01 | 0.02 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 113   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 114   | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 115   | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.10 |      |      |      |      |      |      |
| 116   | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.04 |      |      |      |      |      |      |
| 117   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 118   | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 119   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 120   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.04  | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 121   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.11 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.04 | 0.00 |
| 0.06  | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 122   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.04 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 123   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 124   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.09 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 125   | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 126   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| 0.02  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 127   | 0.00 | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 128   | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 129   | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 130   | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.03 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 131   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 132   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.01 |
| 0.01  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 133   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.06 |      |      |      |      |      |      |
| 134   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 135   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 136   | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.04 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 137   | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 138   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 139   | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.00  | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 140   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.03 |      |      |      |      |      |      |
| 141   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.05 |      |      |      |      |      |      |
| 142   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 143   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 144   | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.02 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 145   | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.03 |      |      |      |      |      |      |
| 146   | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01  | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 147   | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 148   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 149   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 150   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 151   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.03 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 152   | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 153   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 154   | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.04 |      |      |      |      |      |      |
| 155   | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 156   | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 157</ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 160  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 161  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 162  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 163  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 164  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 165  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 166  | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.04 |      |      |      |      |      |      |
| 167  | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |      |
| 168  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 169  | 0.01 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |      |
| 170  | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 171  | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 172  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 173  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 174  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 175  | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 176  | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |      |
| 177  | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |

Tableau des cosinus carrés

$$\frac{c_{ki}^2}{\sum_{j=1}^d c_{ji}^2}$$

```
cosinus_carres = []
c = np.array(c)

for i in range(n):
    line = []
    # on prend la représentation de l'individu i sur chacune des composantes
    tot = np.sum(x*x for x in c[:,i])
    for k in range(d):
        line.append(c[:,i][k]*c[:,i][k]/tot)
    cosinus_carres.append(line)

print (print_tab (n, d, ind, cosinus_carres))
```

| CP9  | CP10 | CP1  | CP2  | CP3  | CP4  | CP5  | CP6  | CP7  | CP8  |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 0    | 0.69 | 0.13 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |
| 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.01 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 1    | 0.43 | 0.01 | 0.36 | 0.01 | 0.01 | 0.08 | 0.00 | 0.00 |
| 0.09 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 2    | 0.57 | 0.10 | 0.09 | 0.05 | 0.01 | 0.03 | 0.02 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.13 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 3    | 0.60 | 0.32 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |
| 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 4    | 0.14 | 0.11 | 0.58 | 0.02 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.00 |
| 0.02 | 0.01 | 0.02 | 0.04 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 5    | 0.60 | 0.29 | 0.03 | 0.02 | 0.03 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 6    | 0.52 | 0.12 | 0.08 | 0.00 | 0.09 | 0.03 | 0.00 | 0.01 |
| 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.02 | 0.09 |      |      |      |      |      |
|      | 7    | 0.38 | 0.23 | 0.00 | 0.13 | 0.00 | 0.18 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 8    | 0.51 | 0.07 | 0.25 | 0.00 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02 | 0.03 | 0.03 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 9    | 0.71 | 0.06 | 0.09 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.07 | 0.00 |
| 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 10   | 0.73 | 0.10 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.09 | 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 11   | 0.39 | 0.05 | 0.18 | 0.10 | 0.07 | 0.04 | 0.02 | 0.00 |
| 0.12 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 12   | 0.53 | 0.05 | 0.09 | 0.02 | 0.17 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 0.03 | 0.00 | 0.09 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 13   | 0.50 | 0.05 | 0.06 | 0.00 | 0.17 | 0.02 | 0.09 | 0.00 |
| 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.06 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 14   | 0.65 | 0.15 | 0.06 | 0.00 | 0.04 | 0.02 | 0.04 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 15   | 0.45 | 0.24 | 0.00 | 0.18 | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 16   | 0.39 | 0.44 | 0.06 | 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 17   | 0.39 | 0.29 | 0.07 | 0.13 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.03 |
| 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 18   | 0.54 | 0.27 | 0.01 | 0.04 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.04 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 19   | 0.45 | 0.12 | 0.00 | 0.02 | 0.08 | 0.20 | 0.00 | 0.00 |
| 0.03 | 0.01 | 0.00 | 0.07 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 20   | 0.70 | 0.04 | 0.01 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.02 | 0.13 | 0.02 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 21   | 0.19 | 0.01 | 0.14 | 0.17 | 0.02 | 0.24 | 0.01 | 0.02 |
| 0.00 | 0.08 | 0.05 | 0.07 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 22   | 0.74 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.12 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.08 |      |      |      |      |      |
|      | 23   | 0.50 | 0.05 | 0.00 | 0.03 | 0.03 | 0.11 | 0.08 | 0.02 |
| 0.01 | 0.04 | 0.09 | 0.00 | 0.04 |      |      |      |      |      |
|      | 24   | 0.49 | 0.02 | 0.12 | 0.00 | 0.05 | 0.13 | 0.06 | 0.01 |
| 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.02 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 25   | 0.05 | 0.05 | 0.77 | 0.09 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 26   | 0.44 | 0.07 | 0.00 | 0.01 | 0.18 | 0.05 | 0.03 | 0.00 |
| 0.12 | 0.01 | 0.08 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 27   | 0.26 | 0.00 | 0.32 | 0.04 | 0.02 | 0.06 | 0.02 | 0.00 |
| 0.01 | 0.02 | 0.09 | 0.13 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 28   | 0.51 | 0.05 | 0.21 | 0.06 | 0.07 | 0.04 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 29   | 0.65 | 0.00 | 0.15 | 0.01 | 0.03 | 0.01 | 0.00 | 0.03 |
| 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.08 |      |      |      |      |      |
|      | 30   | 0.49 | 0.12 | 0.15 | 0.01 | 0.03 | 0.03 | 0.01 | 0.00 |
| 0.09 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 31   | 0.59 | 0.18 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 |
| 0.02 | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 32   | 0.52 | 0.00 | 0.01 | 0.11 | 0.08 | 0.00 | 0.19 | 0.01 |
| 0.05 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 33   | 0.23 | 0.17 | 0.09 | 0.35 | 0.00 | 0.01 | 0.06 | 0.00 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.02 | 0.00 | 0.03 | 0.03 | 0.00 | 0.24 | 0.00 | 0.11 | 0.01 | 0.00 |
|      | 34   | 0.42 | 0.10 | 0.05 | 0.24 | 0.00 | 0.11 | 0.01 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
|      | 35   | 0.75 | 0.01 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.09 | 0.00 |
| 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 36   | 0.28 | 0.06 | 0.03 | 0.24 | 0.01 | 0.06 | 0.00 | 0.00 |
| 0.13 | 0.00 | 0.01 | 0.17 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 37   | 0.35 | 0.00 | 0.00 | 0.25 | 0.03 | 0.05 | 0.05 | 0.00 |
| 0.00 | 0.04 | 0.20 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 38   | 0.37 | 0.10 | 0.34 | 0.10 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.02 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 39   | 0.34 | 0.17 | 0.01 | 0.08 | 0.09 | 0.13 | 0.05 | 0.00 |
| 0.03 | 0.00 | 0.03 | 0.08 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 40   | 0.67 | 0.06 | 0.00 | 0.02 | 0.02 | 0.05 | 0.03 | 0.00 |
| 0.05 | 0.00 | 0.07 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 41   | 0.08 | 0.01 | 0.11 | 0.30 | 0.02 | 0.30 | 0.00 | 0.03 |
| 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.12 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 42   | 0.67 | 0.09 | 0.01 | 0.02 | 0.01 | 0.05 | 0.07 | 0.00 |
| 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 43   | 0.05 | 0.03 | 0.01 | 0.47 | 0.02 | 0.24 | 0.08 | 0.01 |
| 0.07 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 44   | 0.66 | 0.00 | 0.06 | 0.09 | 0.03 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.06 | 0.00 | 0.01 | 0.03 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 45   | 0.14 | 0.34 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | 0.39 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.03 | 0.04 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 46   | 0.56 | 0.11 | 0.02 | 0.15 | 0.02 | 0.08 | 0.04 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 47   | 0.70 | 0.04 | 0.12 | 0.09 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 48   | 0.58 | 0.22 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.04 | 0.01 | 0.00 |
| 0.09 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 49   | 0.57 | 0.24 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.00 | 0.02 |
| 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.02 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 50   | 0.53 | 0.00 | 0.20 | 0.06 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.08 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 51   | 0.68 | 0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.10 | 0.01 | 0.08 | 0.03 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 52   | 0.68 | 0.14 | 0.02 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.11 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 53   | 0.45 | 0.32 | 0.01 | 0.13 | 0.03 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 54   | 0.56 | 0.13 | 0.11 | 0.01 | 0.09 | 0.02 | 0.02 | 0.01 |
| 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 55   | 0.61 | 0.18 | 0.03 | 0.01 | 0.08 | 0.03 | 0.01 | 0.01 |
| 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 56   | 0.66 | 0.18 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 57   | 0.56 | 0.17 | 0.01 | 0.03 | 0.06 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 0.04 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 58   | 0.66 | 0.20 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.05 | 0.00 |
| 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 59   | 0.03 | 0.28 | 0.61 | 0.03 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 60   | 0.14 | 0.11 | 0.04 | 0.49 | 0.06 | 0.00 | 0.07 | 0.00 |
| 0.07 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 61   | 0.29 | 0.06 | 0.22 | 0.18 | 0.01 | 0.04 | 0.01 | 0.01 |
| 0.08 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 62   | 0.00 | 0.17 | 0.35 | 0.16 | 0.02 | 0.04 | 0.04 | 0.00 |
| 0.04 | 0.00 | 0.16 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 63   | 0.33 | 0.29 | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.05 | 0.09 | 0.01 |
| 0.01 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.15 |      |      |      |      |      |
|      | 64   | 0.03 | 0.32 | 0.04 | 0.40 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.07 | 0.10 |      |      |      |      |      |
|      | 65   | 0.17 | 0.12 | 0.07 | 0.10 | 0.00 | 0.22 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.07 | 0.14 | 0.10 |      |      |      |      |      |
|      | 66   | 0.28 | 0.20 | 0.23 | 0.11 | 0.03 | 0.09 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 67   | 0.00 | 0.54 | 0.11 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.17 | 0.00 |
| 0.00 | 0.11 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 68   | 0.06 | 0.00 | 0.04 | 0.53 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| 0.13 | 0.09 | 0.09 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 69   | 0.13 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.57 | 0.01 | 0.07 | 0.01 |
| 0.04 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 70   | 0.29 | 0.09 | 0.05 | 0.16 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.02 |
| 0.06 | 0.02 | 0.14 | 0.01 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 71   | 0.18 | 0.06 | 0.25 | 0.00 | 0.04 | 0.01 | 0.14 | 0.01 |
| 0.15 | 0.01 | 0.09 | 0.04 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 72   | 0.08 | 0.17 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.04 | 0.38 | 0.01 |
| 0.16 | 0.00 | 0.12 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 73   | 0.23 | 0.00 | 0.39 | 0.03 | 0.14 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.04 | 0.00 | 0.04 | 0.11 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 74   | 0.30 | 0.15 | 0.02 | 0.00 | 0.09 | 0.00 | 0.17 | 0.09 |
| 0.03 | 0.02 | 0.02 | 0.10 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 75   | 0.06 | 0.50 | 0.20 | 0.06 | 0.04 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |
| 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 76   | 0.01 | 0.35 | 0.46 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.00 |
| 0.04 | 0.00 | 0.05 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 77   | 0.26 | 0.24 | 0.01 | 0.06 | 0.14 | 0.08 | 0.11 | 0.00 |
| 0.09 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 78   | 0.89 | 0.03 | 0.08 | 0.05 | 0.37 | 0.14 | 0.22 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 79   | 0.02 | 0.13 | 0.38 | 0.11 | 0.00 | 0.05 | 0.17 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.08 | 0.01 | 0.04 |      |      |      |      |      |
|      | 80   | 0.04 | 0.83 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 81   | 0.25 | 0.48 | 0.03 | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.05 | 0.01 |
| 0.08 | 0.03 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 82   | 0.02 | 0.49 | 0.15 | 0.09 | 0.09 | 0.00 | 0.04 | 0.01 |
| 0.08 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 83   | 0.61 | 0.00 | 0.02 | 0.05 | 0.12 | 0.00 | 0.13 | 0.03 |
| 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 84   | 0.07 | 0.22 | 0.04 | 0.03 | 0.08 | 0.08 | 0.07 | 0.01 |
| 0.03 | 0.00 | 0.15 | 0.16 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 85   | 0.10 | 0.64 | 0.01 | 0.10 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |
| 0.00 | 0.01 | 0.04 | 0.06 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 86   | 0.07 | 0.56 | 0.07 | 0.12 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 0.13 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 87   | 0.02 | 0.38 | 0.36 | 0.07 | 0.02 | 0.00 | 0.02 | 0.01 |
| 0.05 | 0.04 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 88   | 0.17 | 0.45 | 0.13 | 0.02 | 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.11 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 89   | 0.03 | 0.50 | 0.06 | 0.00 | 0.15 | 0.00 | 0.05 | 0.01 |
| 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.03 | 0.04 |      |      |      |      |      |
|      | 90   | 0.20 | 0.49 | 0.00 | 0.02 | 0.09 | 0.03 | 0.06 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.04 | 0.05 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 91   | 0.28 | 0.39 | 0.07 | 0.04 | 0.03 | 0.06 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.04 |      |      |      |      |      |
|      | 92   | 0.36 | 0.23 | 0.00 | 0.03 | 0.13 | 0.08 | 0.03 | 0.02 |
| 0.03 | 0.02 | 0.00 | 0.02 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 93   | 0.06 | 0.60 | 0.00 | 0.18 | 0.01 | 0.03 | 0.00 | 0.01 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.07 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 94   | 0.09 | 0.47 | 0.00 | 0.01 | 0.08 | 0.01 | 0.05 | 0.04 |
| 0.08 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.15 |      |      |      |      |      |
|      | 95   | 0.20 | 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.44 | 0.06 | 0.22 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 96   | 0.02 | 0.01 | 0.10 | 0.09 | 0.65 | 0.03 | 0.01 | 0.01 |
| 0.00 | 0.00 | 0.06 | 0.03 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 97   | 0.11 | 0.67 | 0.12 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 98   | 0.42 | 0.17 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 0.09 | 0.06 | 0.01 |
| 0.05 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.07 |      |      |      |      |      |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 99   | 0.12 | 0.29 | 0.03 | 0.09 | 0.03 | 0.02 | 0.27 | 0.00 |
| 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.09 |      |      |      |      |      |
|      | 100  | 0.06 | 0.50 | 0.22 | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 0.01 | 0.04 | 0.00 | 0.08 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 101  | 0.03 | 0.56 | 0.24 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |
| 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 102  | 0.01 | 0.27 | 0.20 | 0.09 | 0.02 | 0.09 | 0.05 | 0.01 |
| 0.18 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 103  | 0.04 | 0.74 | 0.06 | 0.02 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.01 |
| 0.02 | 0.03 | 0.01 | 0.05 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 104  | 0.02 | 0.64 | 0.03 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.03 | 0.00 |
| 0.02 | 0.04 | 0.00 | 0.08 | 0.08 |      |      |      |      |      |
|      | 105  | 0.25 | 0.23 | 0.07 | 0.01 | 0.08 | 0.00 | 0.09 | 0.02 |
| 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.00 | 0.16 |      |      |      |      |      |
|      | 106  | 0.02 | 0.70 | 0.03 | 0.02 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.02 |
| 0.01 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.06 |      |      |      |      |      |
|      | 107  | 0.37 | 0.26 | 0.01 | 0.00 | 0.05 | 0.05 | 0.00 | 0.06 |
| 0.07 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.12 |      |      |      |      |      |
|      | 108  | 0.00 | 0.60 | 0.02 | 0.09 | 0.01 | 0.14 | 0.01 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 109  | 0.22 | 0.19 | 0.28 | 0.03 | 0.01 | 0.06 | 0.01 | 0.00 |
| 0.03 | 0.00 | 0.14 | 0.03 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 110  | 0.07 | 0.07 | 0.00 | 0.44 | 0.18 | 0.08 | 0.10 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 111  | 0.01 | 0.55 | 0.00 | 0.13 | 0.01 | 0.07 | 0.11 | 0.00 |
| 0.01 | 0.05 | 0.05 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 112  | 0.12 | 0.04 | 0.29 | 0.21 | 0.04 | 0.02 | 0.09 | 0.01 |
| 0.05 | 0.04 | 0.04 | 0.03 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 113  | 0.02 | 0.53 | 0.12 | 0.07 | 0.01 | 0.10 | 0.03 | 0.00 |
| 0.06 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 114  | 0.03 | 0.43 | 0.20 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | 0.11 | 0.00 |
| 0.11 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 115  | 0.01 | 0.61 | 0.07 | 0.03 | 0.04 | 0.04 | 0.08 | 0.00 |
| 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 116  | 0.01 | 0.80 | 0.01 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.03 | 0.00 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.07 |      |      |      |      |      |
|      | 117  | 0.00 | 0.57 | 0.07 | 0.01 | 0.18 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.02 | 0.00 | 0.10 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 118  | 0.44 | 0.12 | 0.27 | 0.06 | 0.02 | 0.05 | 0.00 | 0.01 |
| 0.03 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 119  | 0.03 | 0.54 | 0.01 | 0.20 | 0.01 | 0.04 | 0.10 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 120  | 0.07 | 0.25 | 0.16 | 0.18 | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 0.24 | 0.00 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 121  | 0.05 | 0.00 | 0.75 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.06 |
| 0.08 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 122  | 0.10 | 0.03 | 0.63 | 0.09 | 0.01 | 0.10 | 0.03 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 123  | 0.01 | 0.02 | 0.01 | 0.75 | 0.00 | 0.13 | 0.03 | 0.01 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 124  | 0.05 | 0.10 | 0.11 | 0.69 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 125  | 0.00 | 0.60 | 0.03 | 0.15 | 0.01 | 0.00 | 0.04 | 0.01 |
| 0.10 | 0.00 | 0.03 | 0.02 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 126  | 0.00 | 0.21 | 0.06 | 0.21 | 0.02 | 0.12 | 0.09 | 0.06 |
| 0.13 | 0.04 | 0.04 | 0.00 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 127  | 0.15 | 0.09 | 0.66 | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.00 | 0.01 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 128  | 0.03 | 0.47 | 0.21 | 0.06 | 0.00 | 0.06 | 0.02 | 0.03 |
| 0.01 | 0.05 | 0.02 | 0.00 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 129  | 0.34 | 0.14 | 0.06 | 0.23 | 0.03 | 0.10 | 0.01 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.06 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 130  | 0.14 | 0.00 | 0.11 | 0.17 | 0.41 | 0.00 | 0.05 | 0.01 |
| 0.01 | 0.08 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 131  | 0.53 | 0.01 | 0.05 | 0.01 | 0.17 | 0.05 | 0.08 | 0.02 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.03 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 132  | 0.63 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.09 | 0.00 | 0.19 | 0.03 |
| 0.02 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 133  | 0.39 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.25 | 0.09 | 0.09 | 0.00 |
| 0.01 | 0.04 | 0.01 | 0.00 | 0.09 |      |      |      |      |      |
|      | 134  | 0.44 | 0.02 | 0.10 | 0.06 | 0.09 | 0.16 | 0.01 | 0.02 |
| 0.06 | 0.04 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 135  | 0.68 | 0.01 | 0.09 | 0.04 | 0.04 | 0.05 | 0.04 | 0.00 |
| 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 136  | 0.78 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.06 | 0.04 | 0.00 |
| 0.00 | 0.02 | 0.07 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 137  | 0.67 | 0.02 | 0.13 | 0.01 | 0.01 | 0.03 | 0.09 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 138  | 0.74 | 0.01 | 0.08 | 0.00 | 0.09 | 0.01 | 0.05 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 139  | 0.59 | 0.01 | 0.16 | 0.06 | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.06 |
| 0.01 | 0.01 | 0.03 | 0.03 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 140  | 0.71 | 0.01 | 0.03 | 0.07 | 0.03 | 0.05 | 0.00 | 0.01 |
| 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 141  | 0.56 | 0.01 | 0.10 | 0.01 | 0.01 | 0.09 | 0.10 | 0.01 |
| 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.09 |      |      |      |      |      |
|      | 142  | 0.65 | 0.02 | 0.07 | 0.08 | 0.02 | 0.11 | 0.00 | 0.01 |
| 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 143  | 0.51 | 0.02 | 0.01 | 0.04 | 0.04 | 0.22 | 0.09 | 0.01 |
| 0.01 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 144  | 0.37 | 0.10 | 0.12 | 0.01 | 0.22 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.07 | 0.08 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 145  | 0.63 | 0.03 | 0.07 | 0.01 | 0.04 | 0.02 | 0.03 | 0.00 |
| 0.01 | 0.07 | 0.01 | 0.04 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 146  | 0.70 | 0.02 | 0.08 | 0.05 | 0.00 | 0.10 | 0.00 | 0.00 |
| 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 147  | 0.77 | 0.10 | 0.00 | 0.07 | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 148  | 0.68 | 0.21 | 0.02 | 0.03 | 0.01 | 0.03 | 0.02 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 149  | 0.51 | 0.25 | 0.02 | 0.01 | 0.13 | 0.00 | 0.01 | 0.03 |
| 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |      |      |      |      |      |
|      | 150  | 0.28 | 0.29 | 0.01 | 0.00 | 0.26 | 0.00 | 0.08 | 0.03 |
| 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 151  | 0.34 | 0.22 | 0.01 | 0.01 | 0.18 | 0.05 | 0.14 | 0.01 |
| 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 152  | 0.21 | 0.15 | 0.12 | 0.00 | 0.20 | 0.06 | 0.15 | 0.00 |
| 0.00 | 0.07 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 153  | 0.41 | 0.25 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.18 | 0.06 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 154  | 0.53 | 0.01 | 0.10 | 0.03 | 0.01 | 0.25 | 0.00 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.05 |      |      |      |      |      |
|      | 155  | 0.63 | 0.16 | 0.00 | 0.08 | 0.02 | 0.00 | 0.10 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 156  | 0.53 | 0.24 | 0.04 | 0.11 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.03 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 157  | 0.60 | 0.09 | 0.13 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.09 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 158  | 0.84 | 0.42 | 0.05 | 0.03 | 0.03 | 0.36 | 0.01 | 0.02 |
| 0.01 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 159  | 0.13 | 0.29 | 0.01 | 0.03 | 0.05 | 0.42 | 0.03 | 0.03 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |      |      |      |      |      |
|      | 160  | 0.72 | 0.04 | 0.00 | 0.07 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |
| 0.09 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.03 |      |      |      |      |      |
|      | 161  | 0.53 | 0.15 | 0.00 | 0.14 | 0.01 | 0.07 | 0.03 | 0.02 |
| 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 162  | 0.73 | 0.03 | 0.06 | 0.07 | 0.01 | 0.01 | 0.07 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 163  | 0.70 | 0.05 | 0.08 | 0.01 | 0.06 | 0.05 | 0.01 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.01 |      |      |      |      |      |
|      | 164  | 0.60 | 0.17 | 0.07 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.07 | 0.00 |

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.04 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |      |      |      |      |      |      |
| 0.07 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.03 | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.08 | 0.02 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.03 | 0.03 | 0.00 |
| 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.01 | 0.01 | 0.05 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.07 | 0.05 | 0.05 | 0.01 |
| 0.03 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.06 | 0.00 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 0.02 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.09 | 0.00 | 0.01 | 0.04 | 0.05 | 0.00 |
| 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.03 | 0.01 | 0.06 | 0.00 | 0.03 | 0.03 | 0.05 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.06 | 0.02 | 0.06 | 0.05 | 0.00 |
| 0.03 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.05 | 0.01 | 0.09 | 0.00 | 0.02 | 0.00 |
| 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.09 | 0.03 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.49 | 0.36 | 0.05 | 0.02 | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

## Régression

On s'intéresse ici à l'explication d'une variable (aléatoire)  $Y$  (la variable expliquée) par une (ou plusieurs) variable(s) aléatoire(s)  $X_j$  (prédicteurs, ou variables explicatives).

### Régression simple

On dispose de  $n$  couples de variables quantitatives  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), i \in [1, n]$  constituant un échantillon d'observations indépendantes de  $(X, Y)$  et on cherche une relation statistique pouvant exister entre  $Y$  et  $X$ . On rappelle ici quelques résultats élémentaires sur la régression linéaire simple.

#### Modèle théorique

Théoriquement, on cherche une fonction  $f$  telle que  $f(X)$  soit aussi proche que possible de  $Y$ . Par proximité, on entend ici au sens des moindres carrés, et donc on cherche  $f$  telle que  $\mathbb{E}((Y - f(X))^2)$  soit minimale. On sait alors que la fonction  $f$  qui satisfait cette propriété est :

$$f(X) = \mathbb{E}(Y | X)$$

#### Definition 37 (Fonction de régression)

La fonction  $x \mapsto \mathbb{E}(Y | X = x)$  est la fonction de régression de  $Y$  en  $X$ .

La qualité de l'approximation est mesurée par le rapport de corrélation.

#### Definition 38 (Rapport de corrélation)

Le rapport de corrélation entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est défini par le rapport entre la variation expliquée et la variation totale :

$$\eta_{Y|X}^2 = \frac{\sigma_{\mathbb{E}(Y|X)}^2}{\sigma_Y^2}$$

En pratique,  $Y$  est approchée par  $Y = \mathbb{E}(Y | X) + \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un résidu aléatoire de moyenne nulle, non corrélé à  $X$  et à  $\mathbb{E}(Y | X)$  et tel que  $\sigma_\varepsilon^2 = (1 - \eta_{Y|X}^2)\sigma_Y^2$ .

Le cadre le plus utilisé est celui de la régression linéaire, c'est-à-dire lorsque  $Y = a + bX + \varepsilon$  et donc  $\mathbb{E}(Y | X) = a + bX$ , ce qui est le cas lorsque  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires gaussiennes.

Puisque  $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ , la droite de régression passe par le point  $(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$ . Ainsi

$$Y - \mathbb{E}(Y) = b(X - \mathbb{E}(X)) + \varepsilon$$

En multipliant par  $X - \mathbb{E}(X)$  et en prenant l'espérance, on trouve à gauche la covariance de  $(X, Y)$  et à droite la variance de  $X$ , soit

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= b\sigma_X^2 + \mathbb{E}(\varepsilon(X - \mathbb{E}(X))) \\ &= b\sigma_X^2 + \sigma_{\varepsilon X} && [\mathbb{E}(\varepsilon) = 0] \\ &= b\sigma_X^2 && [X \text{ et } \varepsilon \text{ non corrélés}] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } b = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

L'équation de la droite de régression est donc finalement

$$Y - \mathbb{E}(Y) = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \varepsilon$$

En calculant la variance des deux termes, et puisque  $\varepsilon$  et  $X$  ne sont pas corrélés, on trouve

$$r_{XY}^2 = \eta_{Y|X}^2$$

#### Ajustement aux données

On cherche ici à ajuster le modèle linéaire théorique aux  $n$  couples d'observations indépendantes  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), i \in [1, n]$ . Il s'agit donc de trouver  $a, b$  ainsi que la variance du résidu  $\varepsilon$ .

La méthode la plus classique est la méthode des moindres carrés : on cherche à ajuster au nuage de points  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), i \in [1, n]$  une droite d'équation  $y^* = \alpha + \beta x$  de sorte à minimiser

$$\sum_{i=1}^n (y_i^* - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i - y_i)^2$$

En annulant le gradient de cette fonction à deux variables  $(\alpha, \beta)$ , on trouve facilement

$$\beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

de sorte que  $y^* = \bar{y} + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$ .

La droite de régression linéaire passe donc par le centre de masse du nuage de points.

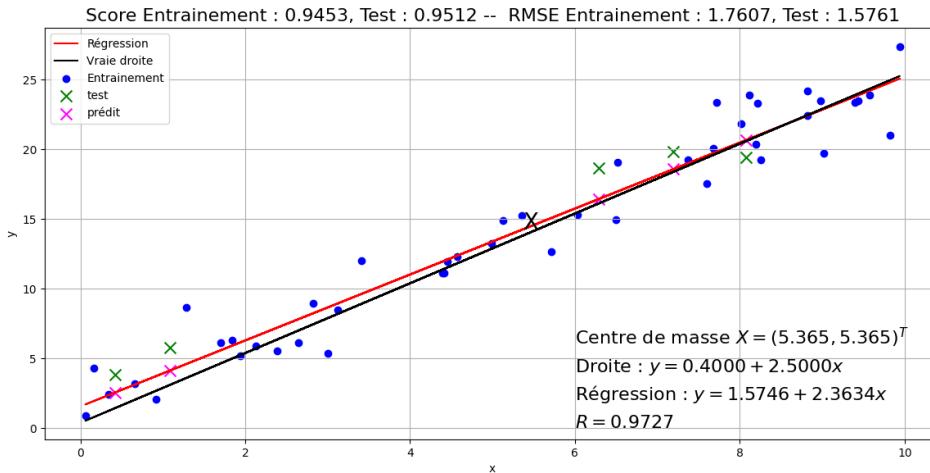
#### Remark 15

les  $x_i$  et  $y_i$  étant des réalisations de variables aléatoires, tous les termes de l'équation de la droite de régression linéaire le sont également.

#### Remark 16

On peut montrer que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $y^*$  sont des estimateurs sans biais de  $a$ ,  $b$  et  $\mathbb{E}(Y | X)$ .

La figure suivante illustre la régression linéaire d'un ensemble de points, décomposé en un ensemble d'apprentissage (bleu) sur lequel la droite de régression a été apprise et un ensemble de test (vert) sur lequel les valeurs ont été prédites (magenta).



## Régression multiple

### Ajustement linéaire d'un ensemble d'observations

La régression multiple généralise la régression simple au cas de  $p \geq 2$  prédicteurs quantitatifs (ou variables explicatives). Ici on considère un échantillon de  $n$  individus, sur lesquels  $p+1$  variables sont mesurées : une variable à expliquer  $\mathbf{Y} = (y_1 \cdots y_n)^T \in \mathbb{R}^n$  et  $p$  variables explicatives  $\mathbf{X}$ , linéairement indépendantes, mais possiblement en relation.

On cherche

$$\mathbf{Y}^* = \beta_0 \mathbf{1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{X}_i$$

proche de  $\mathbf{Y}$  au sens des moindres carrés.  $\mathbf{1}$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes valent 1.

En notant  $X = (\mathbf{1} \quad \mathbf{X}_1 \cdots \mathbf{X}_p) \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{R})$  et  $\beta = (\beta_0 \cdots \beta_p)^T \in \mathbb{R}^{p+1}$

on a  $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}\beta$ .

$\mathbf{Y}^*$  est par définition des moindres carrés la projection de  $\mathbf{Y}$  sur  $Im(\mathbf{X})$ , soit (Voir cours analyse numérique) :

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

et donc

$$\beta = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

et on a donc les paramètres de la régression multiple.

#### Remark 17

Dans le cas où la métrique utilisée est définie par une matrice symétrique définie positive  $D$  de taille  $p$ , alors

$$\beta = (\mathbf{X}^T D \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T D \mathbf{Y}$$

## Modèle

On suppose que les  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}$  sont  $n$  réalisations indépendantes de  $p+1$  variables aléatoires  $\chi_i$  et  $\omega$ . De même qu'en régression simple, la recherche de la meilleure approximation de  $\omega$  par une fonction des  $\chi_i$  amène à  $\mathbb{E}(\omega | \chi_1 \cdots \chi_p)$  et l'hypothèse de régression multiple est

$$\mathbb{E}(\omega | \chi_0 \cdots \chi_p) = b_0 + \sum_{i=1}^p b_i \chi_i + \varepsilon$$

avec  $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ ,  $\sigma_\varepsilon = \sigma^2$  et  $\varepsilon$  non corrélée aux  $\chi_i$ .

On peut montrer que  $\beta$  est un estimateur sans biais du vecteur aléatoire  $(b_0 \cdots b_p)$ , et en est la meilleure approximation. De plus, la meilleure estimation sans biais de la variance  $\sigma^2$  est

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*\|^2}{n-p-1}$$

## Modèle linéaire généralisé

### Position du problème

Dans le cas le plus général, on ne cherche pas à expliquer une seule variable mais  $k \in \mathbb{N}$ , obtenues par répétitions de l'expérience, les  $\mathbf{X}_j$  restant identiques : pour  $i \in [1, k]$   $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^n$  est la  $i^{\text{e}}$  observation.

### Solution à partir des données

Le modèle fait l'hypothèse que le centre de gravité  $\mathbf{g}$  des  $k$  observations se situe dans  $\text{Im}(\mathbf{X})$ , soit  $\mathbf{g} = \mathbf{X}\beta$ . La plupart du temps, on ne connaît cependant qu'une seule des  $k$  observations  $\mathbf{Y}$ , et le problème revient à approximer le mieux possible  $\mathbf{g}$  en ne connaissant que  $\mathbf{Y}$ .

Cette approximation  $\mathbf{g}^*$  s'exprime comme la projection orthogonale de  $\mathbf{Y}$  sur  $\text{Im}(\mathbf{X})$ , selon une métrique  $\mathbf{M}$ , à choisir de sorte que  $\mathbf{g}^*$  soit la plus proche possible de  $\mathbf{g}$ . Dit autrement, en répétant la projection avec  $\mathbf{Y}_1 \dots \mathbf{Y}_k$ , les  $k$  approximations  $g_i^* = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i, i \in [1, k]$  doivent être le plus concentrées possible autour de  $\mathbf{g}$ .

Ceci revient donc à trouver  $\mathbf{M}$  de sorte à ce que l'inertie du nuage des  $\mathbf{g}_i^*$  soit minimale. On montre (théorème de Gauss-Markov généralisé) que  $\mathbf{M} = \mathbf{V}^{-1}$ , où  $\mathbf{V}$  est la matrice de variance-covariance du nuage des  $\mathbf{Y}_i$ . Ainsi, pour une seule observation, on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^* &= \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} \\ \beta &= (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

### Modèle

En ayant une infinité d'observations, on approche le modèle probabiliste. On suppose que  $\mathbf{Y}$  est une réalisation d'un vecteur aléatoire d'espérance  $\mathbf{X}\mathbf{b}$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$ . Le modèle s'écrit alors  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  centré de variance  $\Sigma$ , et le problème est donc d'estimer  $\mathbf{b}$ . On montre que  $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{Y}$ , appelé estimation des moindres carrés généralisés est, sous des hypothèses larges, l'estimation de variance minimale de  $\mathbf{b}$ .

### Modèles régularisés

On peut montrer que l'estimateur des moindres carrés est de variance minimale parmi les estimateurs linéaires sans biais. Cependant, la variance aboutit dans certains cas à des erreurs de prédiction importantes. Dans ce cas, on cherche des estimateurs de variance plus petite quitte à avoir un (léger) biais. Pour ce faire, on peut supprimer l'effet de certaines variables explicatives ce qui revient à leur attribuer un poids nul. Par ailleurs, dans le cas où  $p$  est grand, l'interprétation des résultats obtenus est parfois complexe. Ainsi, on pourra préférer un modèle estimé avec moins de variables explicatives afin de privilégier l'interprétation plutôt que la précision.

Dans cette section, on s'intéresse à des méthodes permettant de produire des estimateurs dont les valeurs sont d'amplitudes réduites. On parle de modèles parcimonieux lorsque des variables ont des coefficients nuls.

### Régression Ridge

Dans l'approche moindres carrés linéaires classique, on cherche  $\mathbf{Y}^* = \beta_0 \mathbf{1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{X}_i$  proche de  $\mathbf{Y}$  au sens de la minimisation de  $\|\mathbf{Y}^* - \mathbf{Y}\|^2$ . On cherche donc  $\beta_{mc} \in \mathbb{R}^{p+1}$  tel que :

$$\beta_{mc} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \left[ \sum_{i=1}^n \left( y_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}) \right)^2 \right]$$

Dans l'approche Ridge regression (ou régression de Tikhonov), on pénalise l'amplitude des coefficients  $\beta_j$ . Pour ce faire, on pose  $\beta_{\setminus 0}$  le vecteur des  $p$  dernières composantes de  $\beta$  et on cherche le vecteur  $\beta_r$ , tel que

$$\beta_r = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \left[ \sum_{i=1}^n \left( y_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}) \right)^2 + \lambda \|\beta_{\setminus 0}\|_2^2 \right]$$

Le réel positif  $\lambda$ , pondérant  $\|\beta_{\setminus 0}\|_2^2$  appelée fonction de pénalité, permet de réguler l'importance du second terme sur la minimisation. Un  $\lambda$  grand impose à la minimisation d'avoir une amplitude faible des coefficients  $\beta_j, j \in [1, p]$ , et une variance faible de l'estimateur de  $\beta$ .

Contrairement à la régression linéaire multiple classique où les variables ne sont pas nécessairement normalisées, ici il est nécessaire de réduire les variables explicatives. En pratique on les centre également, et dans ce cas :

1. la première composante de  $\beta_r$  est prise égale à la moyenne empirique des  $y_i$  avant centrage
2. les  $p$  autres composantes de  $\beta_r$  sont obtenues par minimisation :

$$\hat{\beta}_r = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p} ((\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{v})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{v}) + \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{v})$$

donc la solution analytique est  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbb{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ .

Le choix de  $\lambda$  n'est pas évident. La solution la plus simple consiste à prendre plusieurs valeurs, à tester les solutions proposées par ces valeurs et à retenir le  $\lambda$  ayant obtenu le meilleur score (par exemple la précision sur un ensemble de test). De manière moins expérimentale, il existe des algorithmes (basés sur la décomposition en valeurs singulières) permettant de choisir une "bonne" valeur de paramètre.

### Régression Lasso

La régression Lasso (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) est, dans son principe, très proche de la régression Ridge, la seule différence résidant dans la norme utilisée dans la fonction de pénalité : on cherche  $\beta$  minimisant

$$\beta_l = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \left[ \sum_{i=1}^n \left( y_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}) \right)^2 + \lambda \|\beta_{\setminus 0}\|_1 \right]$$

Contrairement à la régression Ridge, il n'y a pas de solution analytique (la norme  $\ell_1$  rend la fonction non différentiable) et on doit donc recourir à des méthodes de résolution numérique. Lorsque  $\lambda$  est grand, la minimisation force la fonction de pénalité à être petite : étant donné que cette dernière est une somme de valeurs absolues, la minimisation impose à certains coefficients  $\beta_j, j \in [1, p]$  d'être nuls. On parle alors de régression parcimonieuse (et la régression peut donc être vue comme une méthode de sélection de variables).

Quand  $p > n$ , la méthode ne sélectionne que  $n$  variables. De plus, si plusieurs variables sont corrélées entre elles, Lasso ignore toutes sauf une. Et, pire, même si  $n > p$ , et s'il y a de fortes corrélations entre les variables explicatives, on trouve empiriquement que Ridge donne de meilleurs résultats que Lasso.

### Régression Elasticnet

On suppose ici que  $\mathbf{X}$  est centré réduit, et  $\mathbf{Y}$  est centré (donc  $\beta_0 = 0$ ). La régression Elasticnet est un mélange de Ridge et Lasso : on cherche  $\beta_e$  tel que

$$\beta_e = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left[ \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 + \lambda_1 \|\beta\|_1 + \lambda_2 \|\beta\|_2^2 \right]$$

En notant  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  et  $\alpha = \lambda_1/\lambda$  on minimise alors

$$\sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 + \lambda(\alpha\|\boldsymbol{\beta}\|_1^2 + (1-\alpha)\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2)$$

On montre alors que la solution de la régression Elasticnet peut être obtenue à l'aide de la solution de la régression Lasso.

#### Property 7

Soit  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  la matrice des variables explicatives, et  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur des valeurs de la variable expliquée. Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ . On pose

$$\mathbf{X}^* \in \mathcal{M}_{(n+p)p}(\mathbb{R}) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2}} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \sqrt{\lambda_2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on note  $\gamma = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

Alors la fonction objectif de la régression Elasticnet s'écrit  $\|\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}^*\|_2^2 + \gamma \|\boldsymbol{\beta}^*\|_1$ . Si  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  minimise cette fonction, alors l'estimateur naïf de la régression Elasticnet est

$$\boldsymbol{\beta}_e = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2}} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

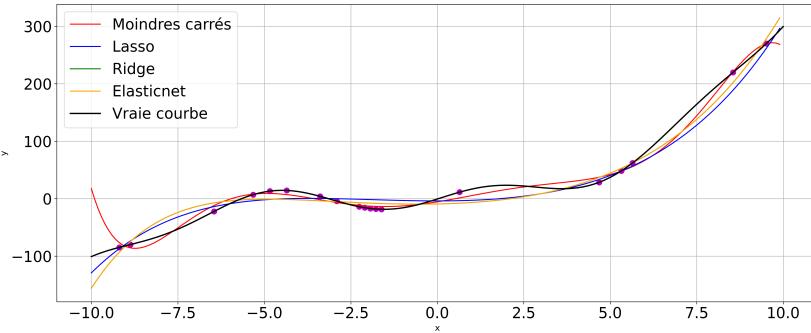
Puisque  $\mathbf{X}^*$  est de rang  $p$ , la solution peut sélectionner  $p$  variables contrairement à la régression Lasso.

En pratique, cet estimateur naïf ne donne satisfaction que lorsqu'il est proche de  $\boldsymbol{\beta}_r$  ou de  $\boldsymbol{\beta}_l$ . On retient généralement l'estimateur rééchelonné  $(1+\lambda_2)\boldsymbol{\beta}_e = \sqrt{1+\lambda_2}\hat{\boldsymbol{\beta}}$  (Elasticnet peut être vu comme un Lasso où la matrice de variance-covariance est proche de la matrice Identité, et on montre que le facteur  $1 + \lambda_2$  intervient alors).

La figure suivante compare les différentes méthodes de régression sur la fonction

$$f(x) = x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + 18\sin(x)$$

avec  $p = 8$  et  $n = 20$ . Les  $n = 20$  points échantillonnes sur la courbe  $y = f(x)$  sont utilisés pour faire la régression sur l'intervalle  $[-10, 10]$ .



## Régression logistique

Dans les sections précédentes, nous n'avons pas abordé les cas où les prédicteurs exhibent des dépendances non linéaires ou lorsque la variable à prédire n'est pas quantitative.

La régression logistique est un modèle linéaire généralisé utilisé pour prédire une variable binaire, ou catégorielle, à partir de prédicteurs quantitatifs ou catégoriels.

### Régression logistique binaire

Dans un premier temps, la variable à prédire est binaire : elle ne prend donc que deux valeurs 0/1 (ou -1/1). Dans le chapitre suivant, nous étudierons des algorithmes permettant d'aborder ce problème sous un angle classification. Ici, nous nous intéressons à une modélisation probabiliste, permettant notamment de prendre en compte le bruit dans les données.

#### Modèle

On recherche une distribution conditionnelle  $P(Y|X)$  de la variable à prédire sachant les prédicteurs. Si le problème est en 0/1, alors  $Y$  est une variable indicatrice et on a  $P(Y=1) = \mathbb{E}(Y)$  et  $P(Y=1|X=x) = \mathbb{E}(Y|X=x)$ . La probabilité conditionnelle est donc l'espérance conditionnelle de l'indicatrice.

Supposons que  $P(Y=1|X=x) = p(x, \theta)$  avec  $p$  fonction paramétrée par  $\theta$ . On suppose également que les observations sont indépendantes. La vraisemblance est alors donnée par

$$\prod_{i=1}^n P(Y=y_i|X=x_i) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)^{y_i} (1-p(x_i, \theta))^{1-y_i}$$

#### Remark 18

Pour  $n$  tirages d'une variable de Bernoulli dont la probabilité de succès est constante et vaut  $p$ , la vraisemblance est  $\prod_{i=1}^n p^{y_i} (1-p)^{1-y_i}$ . Cette vraisemblance est maximisée lorsque  $p = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$ .

En notant  $p_i = p(x_i, \theta)$ , maximiser la vraisemblance sans contrainte amène à la solution non informative  $p_i = 1$  si  $y_i = 1$  et 0 sinon. Si l'on essaye d'ajouter des contraintes (relations entre les  $p_i$ ), alors l'estimation du maximum de vraisemblance devient difficile.

Ici le modèle  $p_i = p(x_i, \theta)$  suppose que si  $p$  est continue, alors des valeurs proches de  $x_i$  amènent à des valeurs proches de  $p_i$ . En supposant  $p$  connue comme fonction de  $\theta$ , la vraisemblance est une fonction de  $\theta$  et on peut estimer ce paramètre en maximisant la vraisemblance.

## Régression logistique

On recherche un "bon" modèle pour  $p$  :

1. On peut dans un premier temps supposer que  $p(\mathbf{x})$  est une fonction linéaire de  $\mathbf{x}$ . Les fonctions linéaires étant non bornées, elles ne peuvent modéliser des probabilités.
2. On peut alors supposer que  $\log p(\mathbf{x})$  est une fonction linéaire de  $\mathbf{x}$ . Là aussi, la fonction logarithme est non bornée supérieurement, et ne peut modéliser une probabilité.
3. Partant de cette idée, on borne le logarithme en utilisant la transformation logistique (ou logit)  $\log \frac{p(\mathbf{x})}{1-p(\mathbf{x})}$ . Etant donné un événement ayant une probabilité  $p$  de réussir, le rapport  $p/(1-p)$  est appelé la côte de l'événement (rapport de la probabilité qu'il se produise sur celle qu'il ne se produise pas. Si vous avez  $p=3/4$  de chances de réussir à votre examen de permis, cette côte est  $p/(1-p) = \frac{3/4}{1/4} = 3$  contre un). On peut alors supposer que cette fonction de  $p$  est linéaire en  $\mathbf{x}$ .

Le modèle de régression logistique s'écrit alors formellement

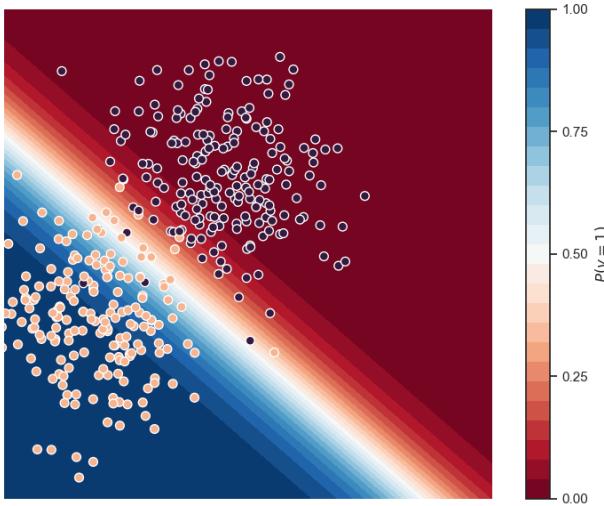
$$\text{logit}(p(\mathbf{x})) = \log \frac{p(\mathbf{x})}{1-p(\mathbf{x})} = \beta_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}$$

En résolvant par rapport à  $p$  on trouve alors

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{\beta_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}}}{1 + e^{\beta_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}}} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{x})}} \quad \text{avec } \boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \boldsymbol{\beta})^T$$

Pour minimiser les erreurs de prédiction, on doit prédrer  $Y = 1$  si  $p \geq 0.5$ , soit  $\beta_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{x} \geq 0$  et  $Y = 0$  sinon. La régression logistique est donc un classifieur linéaire, dont la frontière de décision est justement l'hyperplan  $\beta_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{x} = 0$ . On peut montrer que la distance de  $\mathbf{x}$  à cet hyperplan est  $\beta_0 / \|\boldsymbol{\beta}\| + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} / \|\boldsymbol{\beta}\|$ . Les probabilités d'appartenance de  $\mathbf{x}$  aux classes décroissent donc d'autant plus vite que  $\|\boldsymbol{\beta}\|$  est grand.

Dans la figure suivante, la probabilité d'appartenance à la classe 1 (points rouges) est donnée en fausses couleurs.



## Régression logistique à plusieurs classes

Dans ce cas,  $Y$  peut prendre  $k$  valeurs. Le modèle reste le même, chaque classe  $c \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  ayant son jeu de paramètres  $\boldsymbol{\theta}_c = (\beta_0^c, \boldsymbol{\beta}^c)^T$ . Les probabilités conditionnelles prédites sont alors

$$(\forall c \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket) \quad P(Y = c | X = \mathbf{x}) = \frac{e^{\beta_0^c \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}^c \mathbf{x}}}{1 + e^{\beta_0^c \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}^c \mathbf{x}}}$$

### Interprétation

Si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , alors  $p(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-\beta_0}}$ . L'ordonnée à l'origine fixe donc le taux d'événements « de base ».

Supposons  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$  (l'interprétation sera la même dans le cas général). Considérons l'effet sur la probabilité d'un événement du changement de  $x \in \mathbb{R}$  d'une unité, passant de  $x_0$  à  $x_0 + 1$ . Alors :

$\text{logit}(p(x_0 + 1)) - \text{logit}(p(x_0)) = \beta_0 + \beta(x_0 + 1) - (\beta_0 + \beta(x_0)) = \beta$  et en utilisant la définition de la fonction logit :

$$\begin{aligned} \log \frac{p(x_0 + 1)}{1 - p(x_0 + 1)} - \log \frac{p(x_0)}{1 - p(x_0)} &= \beta \\ \log \left[ \frac{\frac{p(x_0 + 1)}{1 - p(x_0 + 1)}}{\frac{p(x_0)}{1 - p(x_0)}} \right] &= \beta \end{aligned}$$

En notant OR (Odds Ratio, ou rapport de côte) le terme en argument du log, et en prenant l'exponentielle, on trouve  $OR = e^\beta$ . Le coefficient  $\beta$  est donc tel que  $e^\beta$  est le rapport de côte pour un changement unitaire de l'entrée  $x$ . Si  $x$  est incrémenté de deux unités, alors le rapport de côte est de  $e^{2\beta} = (e^\beta)^2$ , que l'on généralise facilement au cas d'un changement de  $n$  unités à  $OR = (e^\beta)^n$ .

Dans le cas où  $\boldsymbol{\beta}$  est un vecteur, sa  $i$ ème composante est une estimation du changement de la probabilité d'un événement correspondant à une augmentation d'une unité de la  $i$ ème composante de  $\mathbf{x}$ , les autres composantes étant constantes.

### Estimation des coefficients de la régression logistique

D'après le modèle probabiliste, la distribution associée à la régression logistique est la loi binomiale. Pour  $n$  échantillons  $(x_i, y_i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la vraisemblance s'écrit

$$\prod_{i=1}^n p(x_i, \boldsymbol{\theta})^{y_i} (1 - p(x_i, \boldsymbol{\theta}))^{1-y_i}$$

Pour estimer les paramètres  $\beta_0$  et  $\boldsymbol{\beta}$  à partir des données, on maximise cette vraisemblance. On prend son logarithme, on calcule son gradient et on en déduit un système d'équations à résoudre. Cette approche amène à des calculs complexes, la formulation analytique n'étant pas simple, et une approximation numérique est en pratique mise en oeuvre pour trouver l'optimal.

## Analyse des résultats d'une régression

### Etude des résidus

L'étude des résidus  $y_i - \hat{y}_i^*$  permet de repérer les observations aberrantes ou au contraire qui jouent un rôle fondamental dans la détermination de la régression. Elle permet également de vérifier que le modèle linéaire est justifié.

Comme  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta + \mathbf{X}\beta$ , où  $\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta$  est orthogonal à  $\mathbf{X}\beta$ , la matrice de variance des résidus s'écrit

$$\mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \mathbb{V}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) + \mathbb{V}(\mathbf{X}\beta)$$

$$\sigma^2 \mathbf{I} = \mathbb{V}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) + \sigma^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

soit  $\mathbb{V}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T)$

et les résidus sont donc en général corrélés entre eux.

#### Remark 19

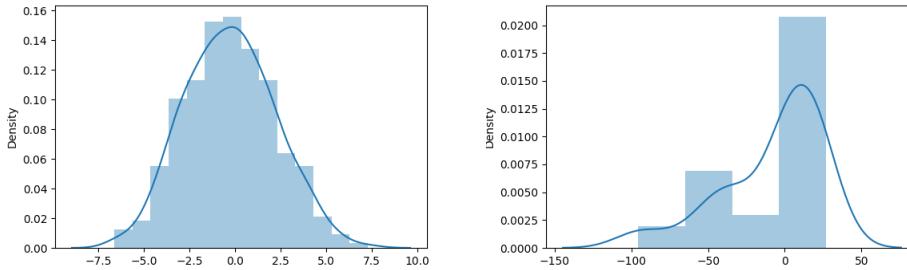
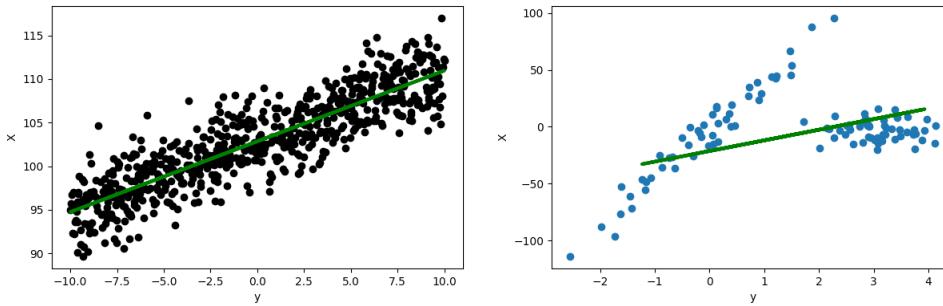
$\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$  est la projection orthogonale sur  $\text{Im}(\mathbf{X})^\perp$

Si  $p_i$  est le  $i^e$  terme diagonal du projecteur  $\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ , alors

$$\mathbb{V}(y_i - \hat{y}_i^*) = (1 - p_i)\sigma^2$$

d'où l'estimation de la variance du résidu  $\hat{\mathbb{V}}(y_i - \hat{y}_i^*) = (1 - p_i)\hat{\sigma}^2$ .

Si le modèle linéaire est justifié, alors la distribution des résidus suit approximativement une loi normale. Un test statistique (par exemple le test de Jarque-Berra) viendra confirmer ou infirmer l'hypothèse selon laquelle la distribution peut être considérée comme telle.



#### Definition 39 (Résidu studentisé)

On appelle résidu studentisé la quantité  $\frac{y_i - \hat{y}_i^*}{\hat{\sigma} \sqrt{1 - h_p}}$

Lorsque  $n$  est grand, ces résidus doivent être compris dans l'intervalle [-2,2].

Un fort résidu peut indiquer une valeur aberrante, mais la réciproque n'est pas vraie. Il est donc nécessaire d'étudier l'influence de chaque observation sur les résultats.

### Influence des observations

Pour étudier l'influence des observations sur la prédiction, deux approches sont possibles (et complémentaires) :

- étudier l'influence d'une observation sur sa propre prédiction. On calcule le résidu prédit  $y_i - \hat{y}_i^*$ , où  $\hat{y}_i^*$  est la prévision obtenue avec les  $n - 1$  autres observations que  $y_i$ . Il est facile de montrer que ce résidu vaut  $\frac{y_i - \hat{y}_i^*}{1 - p_i}$

#### Remark 20

Il convient de rester prudent lorsque  $p_i$  est grand, et la quantité  $\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i^*)^2}{(1 - p_i)^2}$  est une mesure du pouvoir prédictif du modèle.

- étudier l'influence d'une observation sur les estimations des paramètres de la régression  $\beta_i$ . On peut par exemple calculer une distance, dite de Cook, entre  $\beta$  et  $\beta_i$ :

$$d(\beta, \beta_i) = \frac{(\beta - \beta_i)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\beta - \beta_i)}{\hat{\sigma}^2 (p+1)} = \frac{\|\mathbf{Y}^* - \mathbf{Y}_i^*\|^2}{\hat{\sigma}^2 (p+1)}$$

où  $\mathbf{Y}_i^* = \mathbf{X} \beta_i$ . Si  $d(\beta, \beta_i) > 1$ , alors en général l'observation  $i$  a une influence anormale.

### Stabilité des coefficients de régression

La source principale d'instabilité dans l'estimation des paramètres de régression réside dans le fait que les variables explicatives sont très corrélées entre elles. Comme  $\mathbb{V}(\beta) = \sigma^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$  alors si les  $\mathbf{X}_i$  sont corrélés, la matrice  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  est mal conditionnée. Dans ce cas, les paramètres sont estimés avec imprécision et les prédictions sont entachées d'erreur. Il est donc essentiel de mesurer les colinéarités entre prédicteurs. Par simplicité (sans que cela nuise à la généralité), on suppose ici que les variables sont centrées et réduites :  $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$  est donc une matrice de taille  $p$  (le fait de centrer les données supprime la constante) et  $\beta \in \mathbb{R}^p$ . Ainsi  $(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = n\mathbf{R}$  où  $\mathbf{R}$  est la matrice de corrélation entre les prédicteurs.

Deux stratégies sont classiquement proposées :

- Facteur d'inflation de la variance : on a  $\mathbb{V}(\beta) = \sigma^2 \frac{\mathbf{R}^{-1}}{n}$  et  $\sigma_{\beta_j}^2 = \frac{\sigma^2}{n} (\mathbf{R}^{-1})_{jj}$ . Or le  $j^e$  terme de  $\mathbf{R}^{-1}$  est  $\frac{1}{1-R_j^2}$  où  $R_j^2$  est le carré du coefficient de corrélation multiple de  $\mathbf{X}_j$  et des  $p-1$  autres variables explicatives. Ce terme est le facteur d'inflation de la variance. La moyenne de ces  $p$  termes est parfois utilisée comme indice global de colinéarité multiple.

#### Remark 21

Si les variables explicatives sont orthogonales, la régression multiple revient à  $p$  régressions simples.

- La factorisation spectrale de  $\mathbf{R}$  s'écrit  $\mathbf{R} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T$ . Donc  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{U}\Lambda^{-1}\mathbf{U}^T$  et la variance de  $\beta_j$  s'écrit

$$\mathbb{V}(\beta_j) = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^p \frac{u_{ji}^2}{\lambda_i}$$

et dépend donc des inverses des valeurs propres de  $\mathbf{R}$ . Dans le cas où les prédicteurs sont fortement corrélés, les dernières valeurs propres sont proches de 0 ce qui entraîne l'instabilité des paramètres de régression.

Pour améliorer la stabilité des paramètres de régression, on peut alors :

- rejeter certains termes de la somme précédente, par exemple en remplaçant les  $p$  prédicteurs par leurs  $p$  composantes principales (Ceci revient à effectuer  $p$  régressions simples).
- régulariser la régression en utilisant une approche de type Ridge regression.

## Sélection des variables

Plutôt que d'expliquer  $\mathbf{Y}$  par l'ensemble des prédicteurs, on peut chercher un sous-ensemble de ces  $p$  variables permettant d'obtenir quasiment le même résultat (régression). Nous avons déjà abordé la sélection de variables dans un chapitre précédent.

## Exemple

### Données

On s'intéresse aux données suivantes et on cherche s'il existe une relation entre la production  $Y$  et les deux variables prédictives  $X_1$  et  $X_2$ .

| Usine | Travail (h) $X_1$ | Capital (machines/h) $X_2$ | Production ( $10^3$ T) |
|-------|-------------------|----------------------------|------------------------|
| 1     | 1100              | 300                        | 60                     |
| 2     | 1200              | 400                        | 120                    |
| 3     | 1430              | 420                        | 190                    |
| 4     | 1500              | 400                        | 250                    |
| 5     | 1520              | 510                        | 300                    |
| 6     | 1620              | 590                        | 360                    |
| 7     | 1800              | 600                        | 380                    |
| 8     | 1820              | 630                        | 430                    |
| 9     | 1800              | 610                        | 440                    |

### Modèle

On fait l'hypothèse d'un modèle linéaire

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

On a alors  $\beta = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -437.714 \\ 0.336 \\ 0.410 \end{pmatrix}$  et l'équation du modèle linéaire (hyperplan) aux moindres carrés est

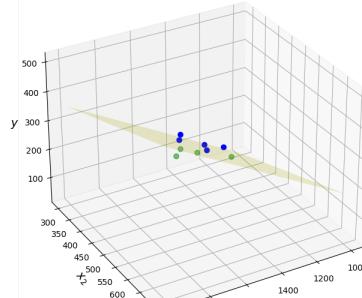
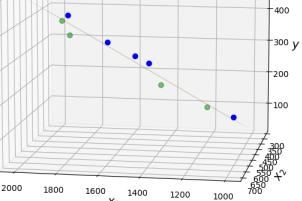
$$y = -437.714 + 0.336X_1 + 0.41X_2$$

$$\text{De plus } \sigma^2 = \frac{\|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}^*\|^2}{n-p-1} = \frac{3194}{6} = 639$$

de sorte que la covariance des paramètres de régression vaut

$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 3355.56 & -4.152 & 6.184 \\ -4.152 & 0.008 & -0.016 \\ 6.184 & -0.016 & 0.038 \end{pmatrix}$$

Dans la figure suivante, les points au-dessus du plan regressor sont en bleu, les autres en vert.



Un point de vue...

Un autre

```
try:
    import pandas
except ModuleNotFoundError:
    !pip3 install --quiet pandas
import numpy, matplotlib,pandas
```

## Quelques méthodes de classification

### Introduction

La classification automatique a pour but d'obtenir une représentation simplifiée des données initiales. Elle consiste à organiser un ensemble de données en classes homogènes ou classes naturelles.

Une définition formelle de la classification, qui puisse servir de base à un processus automatisé, amène à se poser les questions suivantes :

- Comment les objets à classer sont-ils définis ?
- Comment définir la notion de ressemblance entre objets ?
- Qu'est-ce qu'une classe ?
- Comment sont structurées les classes ?
- Comment juger une classification par rapport à une autre ?

Pour effectuer cette classification, deux démarches sont généralement utilisées :

- on regroupe en classes les objets qui partagent certaines caractéristiques.
- on regroupe en classes les objets qui possèdent des caractéristiques proches. C'est cette approche qui est étudiée ici

### Structures de classification

#### Partition

##### Definition 40 (Partition)

$\Omega$  étant un ensemble fini, un ensemble  $P = (P_1, P_2, \dots, P_g)$  de parties non vides de  $\Omega$  est une partition si :

- $(\forall k \neq l) P_k \cap P_l = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^g P_i = \Omega$

Dans un ensemble  $\Omega$  partitionné en  $g$  classes, chaque élément de l'ensemble appartient à une classe et une seule. Une manière pratique de décrire cette partition  $P$  consiste à lui associer la matrice de classification  $\mathbf{C} = (c_{ij})$ ,  $i \in [1, n]$ ,  $j \in [1, g]$ , avec  $c_{ij} = 1$  si l'individu  $i$  appartient à  $P_j$ , et  $c_{ij} = 0$  sinon. Dans le cas où l'on accepte qu'un individu appartienne à plusieurs classes (avec des degrés d'appartenance), on autorise  $c_{ij}$  à couvrir l'intervalle  $[0, 1]$  et on parle alors de classification floue.

#### Hiérarchie indicée

#### Definition 41 (Hiérarchie)

$\Omega$  étant un ensemble fini, un ensemble  $H$  de parties non vides de  $\Omega$  est une hiérarchie sur  $\Omega$  si :

- $\Omega \in H$
- $(\forall x \in \Omega)\{x\} \in H$
- $(\forall h, h' \in H)h \cap h' = \emptyset$  ou  $h \subset h'$  ou  $h' \subset h$

Une hiérarchie est souvent représentée par l'intermédiaire d'un indice, fonction  $i$  de  $H$  dans  $\mathbb{R}^+$ , strictement croissante vis à vis de l'inclusion et de noyau l'ensemble des singletons de  $\Omega$ .

#### Partition et hiérarchie

Si  $P = (P_1 \dots, P_g)$  est une partition de  $\Omega$ , l'ensemble  $H$  formé des classes  $P_k$  de  $P$ , des singletons de  $\Omega$  et de l'ensemble  $\Omega$  lui-même forme une hiérarchie. Remarquons qu'en inversement, il est possible d'associer à chaque niveau d'une hiérarchie indicée une partition. Une hiérarchie indicée correspond donc à un ensemble de partitions emboîtées.

#### Objectifs de la classification

##### Difficultés de caractériser les objectifs

L'objectif de la classification automatique est l'organisation en classes homogènes des éléments d'un ensemble  $\Omega$ . Pour définir cette notion de classes homogènes, on utilise le plus souvent une mesure de similarité (ou de dissimilarité) sur  $\Omega$ . Par exemple, on peut imposer à un couple quelconque d'individus d'une même classe d'être plus « proches » que n'importe quel couple formé par un individu de la classe et un individu d'une autre classe. En pratique, cet objectif est inutilisable, et plusieurs démarches sont alors utilisées pour remplacer cet objectif trop difficile à atteindre.

#### Démarche numérique

##### Partition

On remplace cette condition trop exigeante par une fonction numérique (critère) qui mesure la qualité d'homogénéité d'une partition. Le problème peut paraître alors très simple. En effet, par exemple, dans le cas de la recherche d'une partition, il suffit de chercher parmi l'ensemble fini de toutes les partitions celle qui optimise le critère numérique. Malheureusement, le nombre de ces partitions étant très grand, leur énumération est impossible dans un temps raisonnable. Le nombre de partitions en  $g$  classes d'un ensemble à  $n$  éléments, que l'on note  $S_n^g$ , est le nombre de Stirling de deuxième espèce. En posant  $S_0^0 = 1$  et pour tout  $n > 0$ ,  $S_n^0 = S_{n-1}^0 = 0$ , il peut être calculé par récurrence grâce à la relation  $S_n^g = S_{n-1}^{g-1} + gS_{n-1}^g$ . On peut montrer que

$$S_n^g = \frac{1}{g!} \sum_{i=1}^g (-1)^{g-i} \binom{g}{i} i^n$$

et donc  $S_n^g \sim \frac{g^n}{g!}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . En pratique, sur un ordinateur calculant  $10^6$  partitions par seconde, il faut 126 000 ans pour calculer l'ensemble des partitions d'un ensemble à  $n = 25$  éléments.

On utilise alors des heuristiques qui donnent, non pas la meilleure solution, mais une « bonne solution », proche de la solution optimale. On parle alors d'optimisation locale. Lorsqu'il existe une structure d'ordre sur l'ensemble  $\Omega$  et que celle-ci doit être respectée par la partition, il existe un algorithme de programmation dynamique (algorithme de Fisher), qui fournit la solution optimale.

##### Hiérarchie

Dans le cas d'une hiérarchie, on cherche à obtenir des classes d'autant plus homogènes qu'elles sont situées dans le bas de la hiérarchie. La définition d'un critère est moins facile. Nous verrons qu'il est possible de le faire en utilisant la notion d'ultramétrique (ultramétrique optimale).

#### Démarche algorithmique

Il s'agit cette fois de définir directement un algorithme qui construit des classes homogènes en tenant compte de la mesure de similarité. Il est relativement facile de proposer de tels algorithmes, le problème est de pouvoir vérifier que les résultats fournis sont intéressants et répondent au problème posé. En réalité, cette démarche rejette assez souvent la précédente.

#### Mesure de dissimilarité et distance

Les algorithmes de classification dépendent d'une métrique qui définit implicitement la forme des classes qui seront calculées. Si la distance euclidienne suppose une isotropie dans les axes (et donc une représentation sphérique des classes), d'autres distances ou indices de dissimilarité peuvent être utilisés.

##### Indice de dissimilarité

On se place dans  $\mathbb{R}^d$ , et on considère  $n$  individus à classer  $\mathbf{x}_1 \dots, \mathbf{x}_n$ .

#### Definition 42 (Dissimilarité - ultramétrique)

Une mesure de dissimilarité  $\delta$  est une fonction de

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &\mapsto \delta_{ij} = \delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \end{aligned}$$

vérifiant :

- $(\forall i, j \in [1, n]) \delta_{ij} = \delta_{ji}$
- $(\forall i \in [1, n]) \delta_{ii} = 0$

Si l'inégalité triangulaire  $\delta_{ij} \leq \delta_{ik} + \delta_{kj}$  est de plus vérifiée pour tout  $i, j, k$ , alors  $\delta$  est une distance.

Si enfin l'inégalité ultramétrique  $\delta_{ij} \leq \max(\delta_{ik} + \delta_{jk})$  est vérifiée pour tout  $i, j, k$ ,  $\delta$  est une ultramétrique.

A partir des mesures de dissimilarité, on déduit des mesures de similarité  $s_{ij}$  le passage de l'une à l'autre se faisant par exemple par  $\delta_{ij} = s_{max} - s_{ij}$ .

#### Cas de variables qualitatives

On suppose que les  $d$  composantes des  $\mathbf{x}_i$  sont qualitatives, et on se limite ici au cas de variables bimodales. Étant donné  $\mathbf{x}_i = (x_i^1 \dots, x_i^d)$  et  $\mathbf{x}_j$ , on note :

- $a_{ij}$  le nombre de co-occurrences entre les individus  $i$  et  $j$
- $b_{ij}$  le nombre de co-absences entre les individus  $i$  et  $j$
- $c_{ij}$  le nombre d'attributs présents chez  $i$  et absents chez  $j$
- $d_{ij}$  le nombre d'attributs absents chez  $i$  et présents chez  $j$

les mesures suivantes sont des exemples de dissimilarité :

- $\delta_{ij} = \sqrt{b_{ij} + c_{ij}}$  [distance « euclidienne » binaire]
- $\delta_{ij} = \frac{(b_{ij} - b_{ij} + c_{ij} - d_{ij})^2}{(a_{ij} - b_{ij} + c_{ij} - d_{ij})^2}$  [différence binaire de taille]
- $\delta_{ij} = \frac{(b_{ij} + c_{ij})}{(a_{ij} - b_{ij} + c_{ij} - d_{ij})}$  [différence binaire de motif]
- $\delta_{ij} = \frac{(a_{ij} - b_{ij} + c_{ij} - d_{ij})(b_{ij} + c_{ij}) - (b_{ij} - c_{ij})^2}{(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij})^2}$  [différence binaire de forme]
- $\delta_{ij} = \frac{(b_{ij} + c_{ij})}{4(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij})}$  [dissimilité binaire de variance]
- $\delta_{ij} = \frac{(b_{ij} + c_{ij})}{2a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}}$  [dissimilité binaire de Lance et Williams]

#### Cas de variables quantitatives

Dans le cas de variables quantitatives, les normes  $L_p$  :

$$\|\mathbf{x}_i\|_p = \left( \sum_{j=1}^d |x_i^j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

sont classiquement utilisées, et par exemple

- $p = 1$  :  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_i^k - x_j^k|$  est la norme  $L_1$  (ou city block).
- $p = 2$  :  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_i^k - x_j^k)^2}$  est la norme  $L_2$  (ou norme euclidienne).
- «  $p = \infty$  » :  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} \{|x_i^k - x_j^k|\}$  est la norme du max (ou norme de Tchebychev)

Si les variables ne sont pas normalisées, on peut utiliser la distance de Mahalanobis

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d w_{kl} (x_i^k - x_j^k)(x_i^l - x_j^l)$$

où la matrice des  $w_{kl}$  est l'inverse de la matrice de covariance empirique. Cette distance élimine également les corrélations entre variables.

Enfin, on peut utiliser une métrique issue du coefficient de corrélation, dite distance de Pearson :  $\delta_{ij} = \sqrt{1 - r_{ij}^2}$  avec

$$r_{ij}^2 = \frac{\left( \sum_{k=1}^d (x_i^k - \bar{x}_i)(x_j^k - \bar{x}_j) \right)^2}{\sum_{k=1}^d (x_i^k - \bar{x}_i)^2 \sum_{k=1}^d (x_j^k - \bar{x}_j)^2}$$

#### Variables de comptage

Dans le cas particulier de variables de comptage ( $x_i^k$  effectif de la classe  $k$  pour l'individu  $i$ ), une mesure naturelle de dissimilité entre  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  est le  $\chi^2$  du tableau de contingence  $2 \times d$  associé.

#### Quelle mesure choisir ?

Une réflexion sur le type de dissimilité à choisir est nécessaire. Il est en particulier intéressant de répondre aux questions suivantes:

- de quelles variables initiales (qualitatives et/ou quantitatives) doit dépendre la dissimilité?
- est-il souhaitable (et possible) d'obtenir des variables pertinentes supplémentaires? Si oui par mesure ? par analyse linéaire (ACP...) ou non linéaire (manifold learning) ?
- quelles doivent être les importances relatives des diverses variables retenues dans la constitution de la dissimilité ?

## Classification ascendante hiérarchique

L'objectif est de construire une hiérarchie indiquée d'un ensemble  $\Omega$  sur lequel on connaît une mesure de dissimilité  $\delta$  telle que les points les plus proches soient regroupés dans les classes de plus petit indice. La hiérarchie est alors construite en appliquant itérativement ce principe, et l'arbre obtenu sur l'ensemble des itérations est appelé un dendrogramme.

Il existe essentiellement deux approches :

- la classification descendante : on divise  $\Omega$  en classes, puis on recommence sur chacune de ces classes itérativement jusqu'à ce que les classes soient réduites à des singletons.
- la classification ascendante : cette fois on part de la partition de  $\Omega$  où chaque classe est un singleton. On procède alors par fusions successives des classes jusqu'à obtenir une seule classe, c'est-à-dire l'ensemble  $\Omega$  lui-même. Nous insistons sur ce type de classification dans la suite.

#### Algorithm

##### Construction de la hiérarchie

$\Omega$  étant l'ensemble à classifier et  $\delta$  une mesure de dissimilité sur cet ensemble, on définit à partir de  $\delta$  une distance  $D$  entre les parties de  $\Omega$ . Cette distance est en réalité une mesure de dissimilité qui ne vérifie pas nécessairement toutes les propriétés d'une distance sur l'ensemble des parties de  $\Omega$ . En général,  $D$  est appelé critère d'agrégation. L'algorithme est alors le suivant :

---

##### Algorithm 4 (Algorithm de clustering hiérarchique ascendant)

---

**Entrée :** Les éléments de  $\Omega$

**Sortie :** Une hiérarchie

1. Initialisation : partition des singletons
2. Calcul des distances entre classes.
3. Tant que le nombre de classes est >1
  1. Regroupement des 2 classes les plus proches au sens de  $D$
  2. Calcul des distances entre la nouvelle classe et les anciennes classes non regroupées.

Il est facile de montrer que l'ensemble des classes définies au cours de cet algorithme forme une hiérarchie.

##### Construction de l'indice

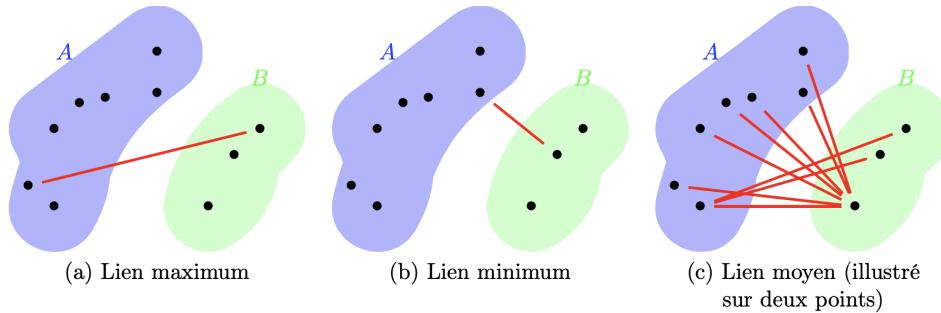
Après avoir défini une hiérarchie, il est nécessaire de lui associer un indice. Pour les classes du bas de la hiérarchie, c'est-à-dire les singletons, cet indice est nécessairement la valeur 0. Pour les autres classes, cet indice est généralement défini en associant à chacune des classes construites au cours de l'algorithme la distance  $D$  qui sépare les deux classes fusionnées pour former cette nouvelle classe. Pour que cette définition conduise bien à un indice, il est nécessaire que les indices obtenus soient strictement croissants avec le niveau de la hiérarchie. Plusieurs difficultés peuvent alors apparaître :

- pour certains critères d'agrégation, l'indice ainsi défini n'est pas nécessairement croissant. On parle alors d'inversion. Par exemple, si les données sont formées par trois points du plan situés au sommet d'un triangle équilatéral de côté 1 et si on prend comme distance  $D$  entre classes la distance entre les centres de gravité, on obtient une inversion.
- lorsqu'il y a égalité de l'indice pour plusieurs niveaux emboités, il suffit de filtrer la hiérarchie, c'est-à-dire conserver une seule classe qui regroupe toutes les classes emboîtées ayant le même indice.

### Critères d'agrégation

Il existe de nombreux critères d'agrégation, mais les plus utilisés sont les suivants :

- critère du lien commun :  $D_{min}(A, B) = \min_{i \in A, j \in B} \delta_{ij}$
- critère du lien maximum :  $D_{max}(A, B) = \max_{i \in A, j \in B} \delta_{ij}$
- critère du lien moyen :  $D_{moy}(A, B) = \frac{\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} \delta_{ij}}{|A||B|}$



### Formule de récurrence de Lance et Williams

Pour les trois critères d'agrégation précédents, il existe des relations de simplification du calcul des distances entre classes essentielles pour la mise en place pratique de l'algorithme de classification ascendante :

- $D_{min}(A, B \cup C) = \min(D_{min}(A, B), D_{min}(A, C))$
- $D_{max}(A, B \cup C) = \max(D_{max}(A, B), D_{min}(A, C))$
- $D_{moy}(A, B \cup C) = \frac{|B|D_{moy}(A, B) + |C|D_{moy}(A, C)}{|B| + |C|}$

### Critère de Ward

Lorsque l'ensemble  $\Omega$  à classifier est mesuré par  $d$  variables quantitatives, il est possible de lui associer un nuage de points pondérés dans  $\mathbb{R}^d$  muni de la distance euclidienne. Généralement, les pondérations seront toutes égales à 1. Le critère d'agrégation le plus utilisé dans cette situation est alors le critère d'inertie de Ward :

$$D(A, B) = \frac{p_A p_B}{p_A + p_B} \|(\mathbf{g}(A), \mathbf{g}(B))\|_2^2$$

où  $p_E$  représente la somme des pondérations des éléments d'une classe  $E$  et  $\mathbf{g}(E)$  est le centre de gravité d'une classe  $E$ .

### Propriétés d'optimalité

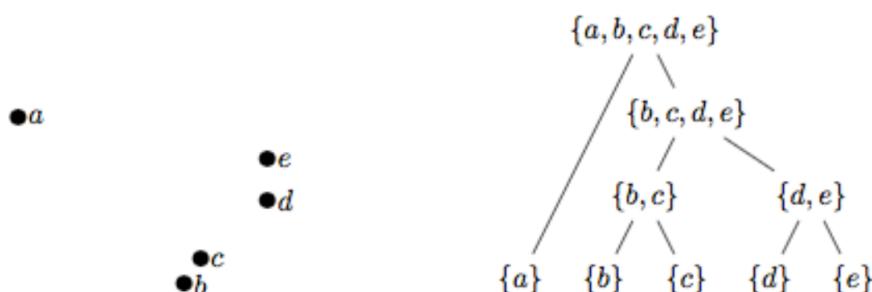
La notion de hiérarchie indiquée est équivalente à la notion d'ultramétrique. La classification hiérarchique ascendante transforme donc la mesure de dissimilarité  $d$  initiale en une mesure de dissimilarité  $\delta$  qui possède la propriété d'être une ultramétrique.

Le problème de la classification hiérarchique peut donc également se poser en ces termes : trouver l'ultramétrique  $\delta^*$  la plus proche de  $\delta$ . Il reste à munir l'espace des mesures de dissimilarité sur  $\Omega$  d'une distance. On pourra utiliser, par exemple :

- $\Delta(\delta, \delta^*) = \sum_{i, j \in \Omega} (\delta_{ij} - \delta_{ij}^*)^2$
- $\Delta(\delta, \delta^*) = \sum_{i, j \in \Omega} |\delta_{ij} - \delta_{ij}^*|$

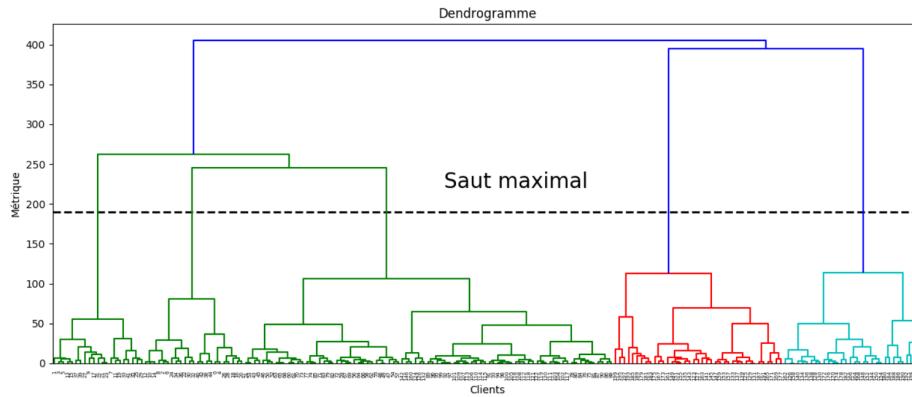
### Critère d'arrêt et partition

L'ensemble des itérations peut être visualisé sous la forme d'un arbre, appelé dendrogramme. La figure suivante présente un exemple de dendrogramme en clustering hiérarchique descendant sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . La distance  $D$  n'est pas reportée



Le critère d'arrêt permet de déterminer la partition de  $X$  la plus appropriée. Ici encore, plusieurs choix sont possibles :

- en fixant a priori un nombre de classes
- en fixant une borne supérieure  $r$  pour  $D$ , et en stoppant les itérations dès que les distances calculées par les liens dépassent  $r$ . A noter que  $r$  peut être également calculé par  $r = \alpha \max\{\delta(x, y), x, y \in X\}$  (critère dit « scale distance upper bound »).
- en coupant le dendrogramme au saut de distance  $D$  maximal.



### Utilisation des méthodes

La première difficulté est le choix de la mesure de dissimilarité sur  $\Omega$  et du critère d'agrégation. Généralement, lorsque l'on dispose de variables quantitatives, le critère conseillé est le critère d'inertie. Ensuite, il est souvent nécessaire de disposer d'outils d'aide à l'interprétation et d'outils permettant de diminuer le nombre de niveaux de hiérarchie. Il est d'autre part conseillé d'utiliser conjointement d'autres méthodes d'analyse des données comme l'Analyse en Composantes Principales.

```
from IPython.display import Video
Video("videos/dendrogram.mp4", embed=True, width=800)
```

0:00

### Exemple

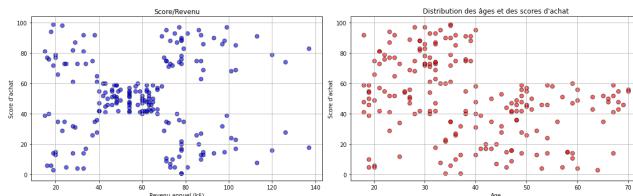
On étudie ici un jeu de données correspondant aux achats dans un supermarché. On cherche à caractériser les comportements des acheteurs en fonction de leurs revenus

```
import pandas as pd
df = pd.read_csv('./data/Mall_Customers.csv')
df.head(5)
```

|   | CustomerID | Genre  | Age | Annual Income (k\$) | Spending Score (1-100) |
|---|------------|--------|-----|---------------------|------------------------|
| 0 | 1          | Male   | 19  | 15                  | 39                     |
| 1 | 2          | Male   | 21  | 15                  | 81                     |
| 2 | 3          | Female | 20  | 16                  | 6                      |
| 3 | 4          | Female | 23  | 16                  | 77                     |
| 4 | 5          | Female | 31  | 17                  | 40                     |

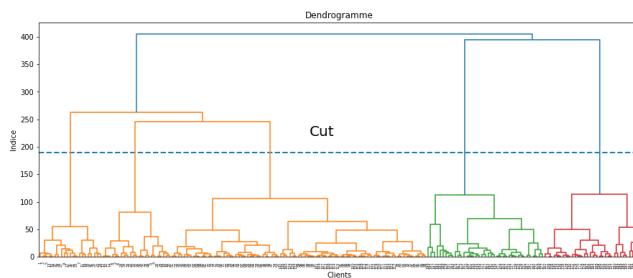
On affiche les données

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(16,5))
plt.subplot(121)
plt.title("Score/Revenu")
plt.xlabel ("Revenu annuel (k$)")
plt.ylabel ("Score d'achat")
plt.grid(True)
plt.scatter(df['Annual Income (k$)'],df['Spending Score (1-100)'],color='blue',edgecolor='k',alpha=0.6, s=50)
plt.subplot(122)
plt.title("Distribution des âges et des scores d'achat")
plt.xlabel ("Age")
plt.ylabel ("Score d'achat")
plt.grid(True)
plt.scatter(df['Age'],df['Spending Score (1-100)'],color='red',edgecolor='k',alpha=0.6, s=50)
plt.tight_layout()
```



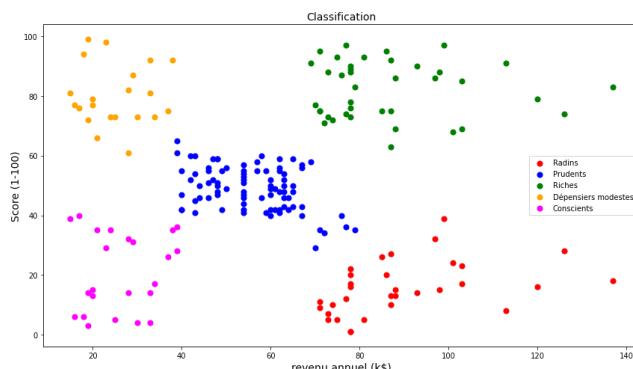
L'objectif est de trouver des catégories de population ayant les mêmes comportements d'achat. Le nombre de classes étant inconnu, la classification hiérarchique va permettre de donner des indications sur le nombre de groupes.

```
import scipy.cluster.hierarchy as sch
X = df.iloc[:,[3,4]].values
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.title('Dendrogramme')
plt.xlabel('Clients')
plt.ylabel('Indice')
plt.hlines(y=190,xmin=0,xmax=2000,lw=2,linestyles='--')
plt.text(x=900,y=220,s='Cut',fontsize=20)
dendrogram = sch.dendrogram(sch.linkage(X, method = 'ward'))
plt.show()
```



On projette ensuite le résultat de la classification

```
from sklearn.cluster import AgglomerativeClustering
model = AgglomerativeClustering(n_clusters = 5, metric = 'euclidean', linkage = 'ward')
y_model = model.fit_predict(X)
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.scatter(X[y_model == 0, 0], X[y_model == 0, 1], s = 50, c = 'red', label = 'Rادس')
plt.scatter(X[y_model == 1, 0], X[y_model == 1, 1], s = 50, c = 'blue', label = 'Prudent')
plt.scatter(X[y_model == 2, 0], X[y_model == 2, 1], s = 50, c = 'green', label = 'Riches')
plt.scatter(X[y_model == 3, 0], X[y_model == 3, 1], s = 50, c = 'orange', label = 'Dépenseurs modestes')
plt.scatter(X[y_model == 4, 0], X[y_model == 4, 1], s = 50, c = 'magenta', label = 'Conscients')
plt.title('Classification',fontsize=14)
plt.xlabel ("revenu annuel (k$)",fontsize=14)
plt.ylabel ("Score (1-100)",fontsize=14)
plt.legend(loc='best')
plt.tight_layout()
```



## Recherche de partitions

### Méthode des centres mobiles

La méthode des centres mobiles est encore connue sous le nom de méthode de réallocation-centrage ou des k-means lorsque l'ensemble à classifier est mesuré par  $d$  variables. Ici,  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  est muni de sa distance euclidienne  $\delta$ . Pour simplifier la présentation, les pondérations des individus seront toutes égales à 1, mais la généralisation à des pondérations quelconques ne pose aucun problème.

### Algorithme

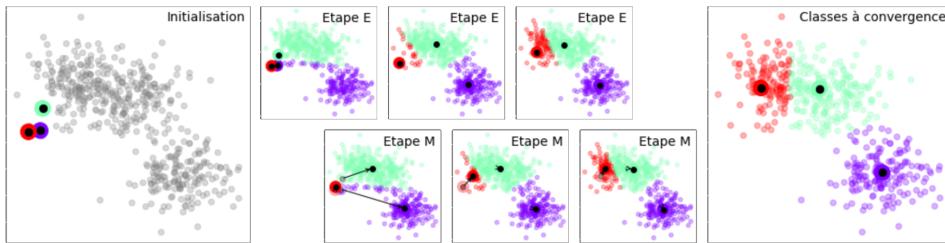
L'algorithme des centres-mobiles peut se définir ainsi :

#### Algorithm 5 (Algorithme des centres mobiles)

Entrée :  $\Omega, g$ , métrique

Sortie : Une partition de  $\Omega$

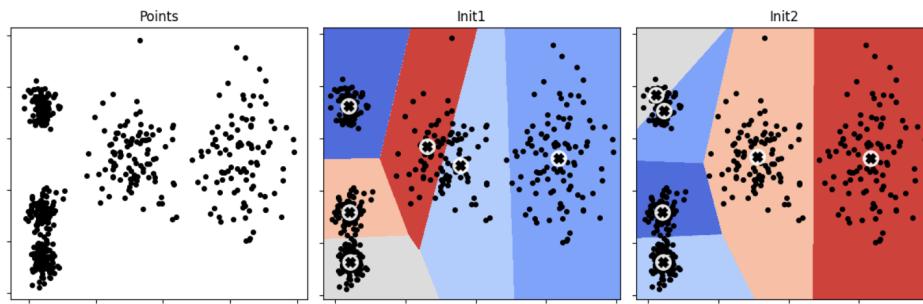
1. Initialisation : tirage au hasard de  $g$  points de  $\Omega$  (centres initiaux des  $g$  classes)
2. Tant que (non convergence)
  1. Étape E : Construction de la partition en affectant chaque point de  $\Omega$  à la classe dont il est le plus près du centre (en cas d'égalité, l'affectation se fait à la classe de plus petit indice).
  2. Étape M : Les centres de gravité de la partition qui vient d'être calculée deviennent les nouveaux centres



```
from IPython.display import Video
Video("videos/kmeans.mp4", embed=True, width=800)
```

0:00

L'initialisation des centres de classe étant aléatoire, il convient de répliquer l'algorithme plusieurs fois et de, par exemple, retenir la partition majoritaire. La figure suivante présente deux résultats des k-means, sur un même jeu de données (5 classes, 50 points par classes), avec une initialisation aléatoire différente.



#### Critère et convergence

La qualité d'un couple partition-centres est mesurée par la somme des inerties des classes par rapport à leur centre. On peut montrer qu'à chacune des deux étapes de l'algorithme, on améliore ce critère.

#### Lien avec la méthode de Ward

La méthode des centres mobiles et la méthode de Ward optimisent toutes deux, à leur façon, le critère d'inertie intra-classe. Cette situation conduit à proposer des stratégies utilisant les deux approches comme, par exemple :

- appliquer les centres-mobiles pour regrouper l'ensemble initial en un nombre « important » de classes
- appliquer la méthode de Ward en partant de ces classes
- rechercher quelques « bons » niveaux de la hiérarchie
- éventuellement, appliquer de nouveau la méthode des centres-mobiles sur les partitions obtenues pour améliorer encore leur critère.

#### Généralisation : les nuées dynamiques

L'idée de base consiste à remplacer les centres qui étaient des éléments de  $\mathbb{R}^d$  jouant le rôle de représentant ou encore de noyau de la classe par des éléments de nature très diverse adaptés au problème que l'on cherche à résoudre.

#### Formalisation

On note  $L = \{\lambda_i\}$  l'ensemble des noyaux,  $D : \Omega \times L \rightarrow \mathbb{R}^+$  une mesure de ressemblance entre éléments de  $\Omega$  et de  $L$ . L'objectif est alors de trouver la partition en  $g$  classes ( $g$  fixé a priori) de  $\Omega$  minimisant le critère  $\sum_k \sum_{x \in P_k} D(x, \lambda_k)$

Cette minimisation est réalisée de façon alternée, comme pour les centres mobiles.

#### Choix du nombre de classes

En général, le critère n'est pas indépendant du nombre de classes. Par exemple, le critère de l'inertie s'annule pour la partition triviale pour laquelle chaque point forme une classe. Il s'agit donc de la meilleure partition. Il est donc nécessaire de fixer a priori le nombre de classes. Pour résoudre ce problème très difficile, plusieurs solutions sont utilisées :

- on a une idée du nombre de classes désirées
- on recherche la meilleure partition pour plusieurs nombres de classes et on étudie la décroissance du critère en fonction du nombre de classes (méthode du coude)
- on définit une fonction  $f(\Omega)$  qui rend le critère indépendant du nombre de classes
- on ajoute des contraintes supplémentaires (nombre d'individus par classe, volume d'une classe...). C'est l'option retenue par la méthode Isodata
- on effectue des tests statistiques sur les classes

## Quelques variantes

### K-means++

Plutôt que d'initialiser les centres de manière aléatoire, l'algorithme K-means++ propose de partitionner  $\Omega = \{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n\}$  selon l'algorithme suivant :

1. Tirer uniformément le premier centre de classe  $c_1$  dans  $\Omega$
2. Pour  $i \in [2, g]$ , choisir  $c_i$  à partir de  $\mathbf{x}_i$  selon la probabilité  $D(\mathbf{x}_i)^2 / \sum_{j=1}^m D(\mathbf{x}_j)^2$  où  $D(\mathbf{x}_i)$  est la distance entre  $\mathbf{x}_i$  et le centre de classe le plus proche déjà choisi. Ceci assure de tirer des centres de classe éloignés avec forte probabilité.

### Accélération des k-means

L'algorithme original peut être amélioré de manière significative en évitant les calculs de distances non nécessaires. En exploitant l'inégalité triangulaire, et en conservant les bornes inférieures et supérieures des distances entre les points et les centres de classe, l'algorithme correspondant est performant, y compris pour de grandes valeurs de  $k$  ([Algorithm 6](#))

---

#### Algorithm 6 (Accélération des k-means)

---

**Entrée :**  $\Omega, g$

**Sortie :**  $P$  une partition de  $X$  en  $g$  classes

1. Initialisation : tirage au hasard de  $g$  points  $C = \{c_1 \dots c_g\}$
2. Pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{c} \in C$ 
  1.  $l(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0$
3. Pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ 
  1. Affecter  $\mathbf{x}$  à la classe du centre le plus proche :  $c(x) = \operatorname{Arg\,min}_{\mathbf{c} \in C} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{c})$
  2. A chaque calcul de  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{c}), l(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{c})$
  3.  $u(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \min_{\mathbf{c} \in C} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{c})$
4. Tant que (non convergence)
  1. Pour tout  $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in C$  calculer  $\delta(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$
  2. Pour tout  $\mathbf{c}$   $s(c) = \frac{1}{2} \min_{\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}} \delta(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$
  3. Identifier les  $\mathbf{x}$  tels que  $u(\mathbf{x}) \leq s(c(\mathbf{x}))$
  4. Pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{c} \in C$  tels que  $\mathbf{c} \neq c(\mathbf{x})$  et  $u(\mathbf{x}) > l(\mathbf{x}, \mathbf{c})$  et  $u(\mathbf{x}) > \frac{1}{2} \delta(c(\mathbf{x}), \mathbf{c})$ 
    1. Si  $r(\mathbf{x})$ 
      1. Calculer  $\delta(c(\mathbf{x}), \mathbf{x})$
      2.  $r(\mathbf{x}) = Faux$
    2. Sinon
      1.  $\delta(c(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$
    3. Si  $\delta(c(\mathbf{x}), \mathbf{x}) > l(\mathbf{x}, \mathbf{c})$  ou  $\delta(c(\mathbf{x}), \mathbf{x}) > \frac{1}{2} \delta(c(\mathbf{x}), \mathbf{c})$ 
      1. Calculer  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{c})$
      2. Si  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < \delta(c(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ 
        1.  $c(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$
  5. Pour tout  $\mathbf{c} \in C$ 
    1.  $\mathbf{m}(\mathbf{c})$  : centre de masse des points de  $\Omega$  plus proches de  $\mathbf{c}$
  6. Pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{c} \in C$ 
    1.  $l(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \max(l(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - \delta(\mathbf{m}(\mathbf{c}), \mathbf{c}), 0)$
  7. Pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ 
    1.  $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{m}(c(\mathbf{x})), \mathbf{c}(\mathbf{x}))$
    2.  $r(\mathbf{x}) = Vrai$
  8. Pour tout  $\mathbf{c} \in C$ 
    1.  $\mathbf{c} = \mathbf{m}(\mathbf{c})$

### k-means à mini batchs

Il est également possible d'appliquer une optimisation par mini-batchs dans l'algorithme des k-means ([Algorithm 7](#)).

---

#### Algorithm 7 (Accélération des k-means)

---

**Entrée :**  $\Omega, g, b$  taille des batchs

**Sortie :**  $P$  une partition de  $X$  en  $g$  classes

1. Initialisation : tirage au hasard de  $g$  points  $C = \{c_1 \dots c_g\}$
2.  $\mathbf{v} = 0 \in \mathbb{R}^g$
3. Tant que non convergence
  1.  $\mathcal{B} \leftarrow$  batch de  $b$  exemples tirés de  $X$
  2. Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 
    1. Affecter  $\mathbf{x}$  à la classe du centre le plus proche  $T(\mathbf{x})$
  3. Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 
    1.  $\mathbf{c} = T(\mathbf{x})$
    2.  $v_c = v_c + 1$
    3.  $\eta = \frac{1}{v_c}$
    4.  $\mathbf{c} = (1 - \eta)\mathbf{c} + \eta\mathbf{x}$

## Exemple

On génère des données

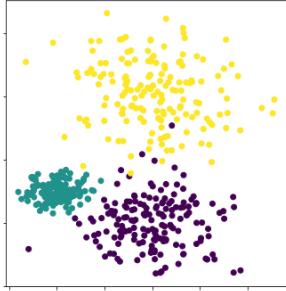
```

from sklearn.datasets import make_blobs
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

nb_classes = 3
center = np.array([
    [3, 0], [1, 1], [3, 4]])
cluster_std = np.array([0.8, 0.3, 1])

X, y = make_blobs(n_samples=500, centers=center, cluster_std = cluster_std,
random_state=42)
plt.figure(figsize=(5,5))
plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y)
plt.tight_layout()
plt.tick_params(labelbottom=False)
plt.tick_params(labelleft=False)

```



Puis on applique l'algorithme des  $k$ -means.

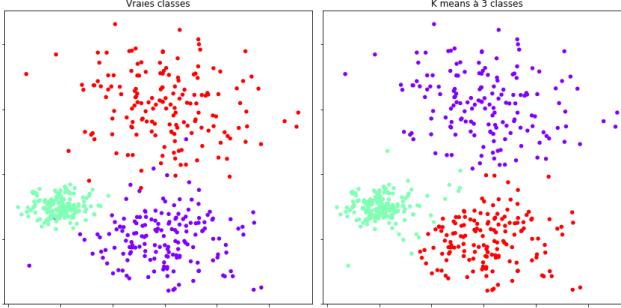
```

from sklearn.cluster import KMeans

model = KMeans(n_clusters=nb_classes,n_init=10)

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.subplot(121)
plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=y, s=30, linewidths=0,cmap=plt.cm.rainbow)
plt.title("Vraies classes")
plt.tick_params(labelbottom=False)
plt.tick_params(labelleft=False)
plt.subplot(122)
model.fit(X)
plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=model.labels_, s=30, linewidths=0,
cmap=plt.cm.rainbow)
plt.title("K means à {}d{} classes".format(nb_classes))
plt.tick_params(labelbottom=False)
plt.tick_params(labelleft=False)
plt.tight_layout()

```



## Modèles de mélange

Les modèles de mélange supposent que les données proviennent d'un mélange de distributions (généralement gaussiennes), et l'objectif est alors d'estimer les paramètres du modèle de mélange en maximisant la fonction de vraisemblance pour les données. L'optimisation directe de la fonction de vraisemblance dans ce cas n'est pas une tâche simple, en raison des contraintes nécessaires sur les paramètres et de la nature complexe de la fonction de vraisemblance, qui présente généralement un grand nombre de maxima locaux et de points de selle. Une méthode courante pour estimer les paramètres du modèle de mélange est l'algorithme EM.

### Définition

Soient  $\mathcal{S} = \{\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_n\}$   $n$  vecteurs aléatoires i.i.d. à valeur dans  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ , chaque  $\mathbf{X}_i$  étant distribué selon

$$g(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^K w_i \Phi_i(\mathbf{x})$$

où  $\Phi_i$ ,  $i \in [1, K]$  sont des densités de probabilité sur  $\mathcal{X}$  et les  $w_i$  sont des poids positifs, sommant à 1.  $g$  peut être interprétée comme suit : soit  $Z$  une variable aléatoire discrète prenant les valeurs  $i \in [1, K]$  avec probabilité  $w_i$ , et soit  $\mathbf{X}$  un vecteur aléatoire dont la distribution conditionnelle, étant donnée  $Z = z$  est  $\Phi_z$ . Alors

$$\Phi_{Z,\mathbf{X}}(z, \mathbf{x}) = \Phi_Z(z) \Phi_{\mathbf{X}|Z}(\mathbf{x}, z) = w_z(\mathbf{x})$$

et la distribution marginale de  $\mathbf{X}$  est calculée en sommant sur  $z$  les probabilités jointes.

Un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  suivant  $g$  peut donc être simulé d'abord en tirant  $Z$  suivant  $P(Z = z) = w_z$ ,  $z \in [1, K]$ , puis en tirant  $\mathbf{X}$  suivant  $\Phi_Z$ . La famille  $\mathcal{S}$  ne contenant que les  $\mathbf{X}_i$ , les  $Z_i$  sont des variables latentes, interprétées comme les étiquettes cachées des classes auxquelles les  $\mathbf{X}_i$  appartiennent.

Typiquement, les  $\Phi_k$  sont des lois paramétriques. Classiquement ce sont des lois gaussiennes  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$  et donc en rassemblant tous les paramètres des lois, incluant les  $w_k$ , dans un vecteur de paramètre  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k, w_k, k \in [1, K])$ , on peut écrire

$$g(\mathbf{s}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n g(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k \Phi_k(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$$

où  $s = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$  dénote une réalisation de  $\mathcal{S}$ .

On estime alors  $\theta$  en maximisant la log vraisemblance

$$\ell(\theta|s) = \sum_{i=1}^n \ln(g(\mathbf{x}_i|\theta)) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \sum_{k=1}^K w_k \Phi_k(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \right)$$

ce qui est en général complexe, la fonction  $\ell$  admettant de nombreux extrema locaux.

### Algorithmme EM

Plutôt que d'optimiser  $\ell$  directement depuis les données  $s$ , l'algorithme EM ([Algorithm 8](#)) augmente d'abord les données des variables latentes (les étiquettes  $\mathbf{z} = (z_1 \cdots z_n)$  des classes). L'idée est que  $s$  est uniquement la partie observée des données aléatoires  $(\mathcal{S}, \mathbf{Z})$  générées d'abord en tirant  $Z$  suivant  $P(Z = z)$ , puis en tirant  $\mathbf{X}$  suivant  $\Phi_z$ , de sorte à avoir

$$g(s, z|\theta) = \prod_{i=1}^n w_{z_i} \Phi_{z_i}(\mathbf{x}_i)$$

Ainsi, la log vraisemblance des données complètes, en général plus facile à optimiser, est

$$\bar{\ell}(\theta|s, z) = \sum_i i = 1^n \ln(w_{z_i} \Phi_{z_i}(\mathbf{x}_i))$$

Cependant, les  $z$  ne sont pas observées et  $\bar{\ell}$  ne peut être évaluée. Dans l'étape E de l'algorithme EM,  $\bar{\ell}$  est remplacée par  $\mathbb{E}_p \bar{\ell}(\theta|s, \mathbf{Z})$ , où l'indice  $p$  indique que  $\mathbf{Z}$  est distribuée selon la distribution conditionnelle de  $\mathbf{Z}$  étant donnée  $\mathcal{S} = s$ , soit

$$p(z) = g(z|s, \theta) \propto g(s, z|\theta)$$

#### Remark 22

$p(z)$  est de la forme  $p_1(z_1) \cdots p_n(z_n)$  de telle sorte que, étant donné  $\mathcal{S} = s$ , les composantes de  $\mathbf{Z}$  sont deux à deux indépendantes.

#### Algorithm 8 (Algorithmes EM)

Entrée :  $s, \theta^{(0)}$

Sortie : Approximation de la log vraisemblance maximale

1.  $i = 1$
2. Tant que (not stop)
  1. Etape E : Trouver  $p^{(i)}(z) = g(s|s, \theta^{(i-1)})$  et  $Q^{(i)}(\theta) = \mathbb{E}_p \bar{\ell}(\theta|s, \mathbf{Z})$
  2. Etape M :  $\theta^{(i)} = \operatorname{Argmax}_{\theta} Q^{(i)}(\theta)$
  3.  $i = i + 1$
3. Retourner  $\theta(i)$

Dans l'["Algorithm 8"](#), un critère d'arrêt est par exemple

$$\frac{\ell(\theta(i)|s) - \ell(\theta^{(i-1)}|s)}{\ell(\theta(i)|s)} < \epsilon$$

Sous certaines conditions, la suite des  $\ell(\theta(i)|s)$  converge vers un maximum local de la log vraisemblance  $\ell$ . La convergence vers le maximum global dépend bien sûr du choix de  $\theta^{(0)}$ , de sorte qu'une stratégie possible est d'exécuter plusieurs fois l'algorithme avec des initialisations différentes.

Dans le cas d'un mélange gaussien,  $\Phi_k = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$ ,  $k \in [\![1, K]\!]$ . Si  $\theta^{(i-1)}$  est le vecteur optimal à l'itération courante, constitué des poids  $w_k^{(i-1)}$ , des vecteurs moyenne ( $\boldsymbol{\mu}_k^{(i-1)}$ ) et des matrices de covariances ( $\boldsymbol{\Sigma}_k^{(i-1)}$ ), alors on détermine  $p^{(i)}$ , la distribution de  $\mathbf{Z}$  conditionnellement à  $\mathcal{S} = s$ , pour le paramètre  $\theta^{(i-1)}$ . Puisque les composantes de  $\mathbf{Z}$  étant donné  $\mathcal{S} = s$  sont indépendantes, il suffit de spécifier la distribution discrète  $p_j^{(i)}$  de chaque  $Z_j$ , étant données l'observation  $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j,i}$ , calculée à l'aide de la formule de Bayes

$$p_j^{(i)}(k) \propto w_k^{(i-1)} \Phi_k(\mathbf{x}_{j,i}|\boldsymbol{\mu}_k^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_k^{(i-1)}), k \in [\![1, K]\!]$$

Alors

1. Pour l'étape E

$$Q^{(i)}(\theta) = \mathbb{E}_p \sum_{j=1}^n (\ln w_{z_j} + \ln \Phi_{z_j}(\mathbf{x}_{j,i}|\boldsymbol{\mu}_{Z_j}, \boldsymbol{\Sigma}_{Z_j}))$$

où les  $Z_j$  sont indépendants et distribués selon  $p_j^{(i)}$ .

1. Pour l'étape M, on maximise

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K p_j^{(i)}(k) (\ln w_k + \ln \Phi_k(\mathbf{x}_{j,i}|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k))$$

sous la contrainte  $\sum_{k=1}^K w_k = 1$ .

En utilisant une relaxation lagrangienne, et le fait que  $\sum_{k=1}^K p_j^{(i)}(k) = 1$  on trouve pour tout  $k \in [\![1, K]\!]$

$$w_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_j^{(i)}(k)$$

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\sum_{j=1}^n p_j^{(i)}(k) \mathbf{x}_{j,i}}{\sum_{j=1}^n p_j^{(i)}(k)}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \frac{\sum_{j=1}^n p_j^{(i)}(k) (\mathbf{x}_{j,i} - \boldsymbol{\mu}_k)(\mathbf{x}_{j,i} - \boldsymbol{\mu}_k)^T}{\sum_{j=1}^n p_j^{(i)}(k)}$$

```

import numpy as np
from scipy.stats import multivariate_normal
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

X = np.genfromtxt('./data/mixture.csv', delimiter=',')
K = 3
n, d = X.shape

# Paramètres initiaux
W = np.array([[1/3,1/3,1/3]]) # poids
M = np.array([-2.0,-4,0],[-3,1,-1]) # Moyennes
C = np.zeros((3,2,2)) # Co

C[:,0,0] = 1
C[:,1,1] = 1

p = np.zeros((3,300))

for i in range(0,100):

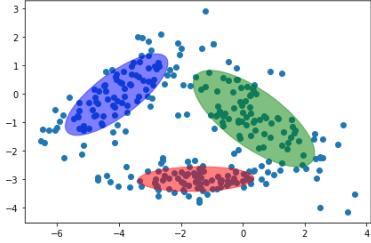
    # Etape E
    for k in range(0,K):
        mvn = multivariate_normal( M[:,k].T, C[k,:,:] )
        p[k,:] = W[0,k]*mvn.pdf(X)

    # Etape M
    p = p/sum(p,0)
    W = np.mean(p,1).reshape(1,3)
    for k in range(0,K):
        M[:,k] = (X.T @ p[:,k].T)/sum(p[:,k,:])
        xm = X.T - M[:,k].reshape(2,1)
        C[k,:,:] = xm @ (xm*p[:,k,:]).T/sum(p[:,k,:])

fig = plt.subplot(1, 1, 1)
plt.scatter(X[:,0],X[:,1])
c = ['r','b','g']
for i in range(0,3):
    v, w = np.linalg.eigh(C[i,:,:])
    v = 2.0 * np.sqrt(2.0) * np.sqrt(v)
    u = w[0] / np.linalg.norm(w[0])
    angle = np.arctan(u[1] / u[0])
    angle = 180.0 * angle / np.pi
    ell = matplotlib.patches.Ellipse(M[:,i], v[0], v[1], angle=180.0 + angle,
color=c[i])
    ell.set_clip_box(fig.bbox)
    ell.set_alpha(0.5)
    fig.add_artist(ell)

plt.tight_layout()
plt.show()

```



### Influence des matrices de covariance

Dans le cas multivarié, les descripteurs peuvent être dépendants ou non, introduisant des termes de covariance dans la matrice du même nom. Ainsi, cette dernière peut être pleine (et identique pour toutes les composantes ou non), ou diagonale (avec les variances des descripteurs égales ou non).

La matrice de covariance peut alors prendre plusieurs formes :

- chaque composante gaussienne a sa matrice de covariance propre, de forme générale
- chaque composante gaussienne a sa matrice de covariance propre, diagonale
- toutes les composantes gaussiennes ont la même matrice de covariance
- chaque composante gaussienne a une matrice de covariance diagonale, à terme diagonaux égaux

```

from sklearn.mixture import GaussianMixture
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
def Ellipses(gmm, ax):
    for n in range(gmm.n_components):
        if gmm.covariance_type == 'full':
            covariances = gmm.covariances_[n]
        elif gmm.covariance_type == 'diag':
            covariances = np.diag(gmm.covariances_[n])
        elif gmm.covariance_type == 'tied':
            covariances = gmm.covariances_
        elif gmm.covariance_type == 'spherical':
            covariances = np.eye(gmm.means_.shape[1]) * gmm.covariances_[n]

        v, w = np.linalg.eigh(covariances)
        u = w[0] / np.linalg.norm(w[0])
        angle = 180 * np.arctan2(u[1], u[0]) / np.pi
        v = 2. * np.sqrt(2.) * np.sqrt(v)
        ell = matplotlib.patches.Ellipse(gmm.means_[n], v[0], v[1],
                                         180 + angle, color=plt.cm.tab20(n))
        ell.set_clip_box(ax.bbox)
        ell.set_alpha(0.3)
        ax.add_artist(ell)

rnd = np.random.RandomState(4)

# Données
A = rnd.normal(size=(40, 2)) + rnd.normal(scale=10, size=(1, 2))
B = rnd.normal(scale=(1, 5), size=(30, 2)) + rnd.normal(scale=(15, 1), size=(1, 2))
C = np.dot(rnd.normal(scale=(1, 2), size=(40, 2)), [[1, -1], [1, 1]]) +
rnd.normal(scale=(10, 1), size=(1, 2))

X = np.vstack([A, B, C])

gmm = [GaussianMixture(n_components=3, covariance_type=cov_type, max_iter=20,
random_state=0)
       for cov_type in ['spherical', 'diag', 'tied', 'full']]

n_estimators = len(gmm)

fig, axes = plt.subplots(1, 4, figsize=(15, 10))
titles = ("Sphérique", "Diagonale", "Partagée", "Générale")

for ax, title, gmmi in zip(axes, titles, gmm):
    gmmi.fit(X)
    Ellipses(gmmi, ax)
    pred = gmmi.predict(X)
    ax.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=plt.cm.Accent(pred))

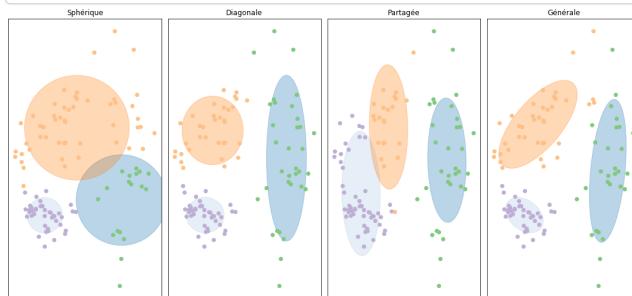
    ax.set_xticks(())
    ax.set_yticks(())
    ax.set_title(title)
    ax.set_aspect("equal")
plt.tight_layout()

```

```

<ipython-input-11-b558a92b1137>:19: MatplotlibDeprecationWarning: Passing the
angle parameter of __init__() positionally is deprecated since Matplotlib 3.6; the
parameter will become keyword-only two minor releases later.
    ell = matplotlib.patches.Ellipse(gmm.means_[n], v[0], v[1]),
<ipython-input-11-b558a92b1137>:19: MatplotlibDeprecationWarning: Passing the
angle parameter of __init__() positionally is deprecated since Matplotlib 3.6; the
parameter will become keyword-only two minor releases later.
    ell = matplotlib.patches.Ellipse(gmm.means_[n], v[0], v[1]),
<ipython-input-11-b558a92b1137>:19: MatplotlibDeprecationWarning: Passing the
angle parameter of __init__() positionally is deprecated since Matplotlib 3.6; the
parameter will become keyword-only two minor releases later.
    ell = matplotlib.patches.Ellipse(gmm.means_[n], v[0], v[1]),
<ipython-input-11-b558a92b1137>:19: MatplotlibDeprecationWarning: Passing the
angle parameter of __init__() positionally is deprecated since Matplotlib 3.6; the
parameter will become keyword-only two minor releases later.
    ell = matplotlib.patches.Ellipse(gmm.means_[n], v[0], v[1]),

```



### Comparaison aux k-means

Par défaut (métrique euclidienne), les k-means évaluent des nuages sphériques.

```

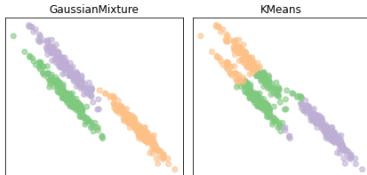
from sklearn.cluster import KMeans
from sklearn.mixture import GaussianMixture
from sklearn.datasets import make_blobs

n_samples = 500

# Nuages de points allongés
random_state = 170
X, y = make_blobs(n_samples=n_samples, random_state=random_state)
transformation = [[0.6, -0.6], [-0.5, 0.8]]
X = np.dot(X, transformation)

fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(6, 3))
for ax, model in zip(axes, [GaussianMixture(n_components=3),
                           KMeans(n_clusters=3, n_init='auto')]):
    model.fit(X)
    ax.scatter(X[:, 0], X[:, 1], c=plt.cm.Accent(model.predict(X)), alpha=.6)
    ax.set_xticks(())
    ax.set_yticks(())
    ax.set_title(type(model).__name__)
plt.tight_layout()

```



### Estimation du nombre de classes

En optimisant un critère statistique, il est possible de trouver, dans le cas où le nombre de composantes  $k$  est inconnu, la meilleure valeur par rapport à ce critère. Il est de plus possible, pour les matrices de covariance, d'estimer la meilleure forme des nuages de points, et d'adapter la matrice en fonction de cette forme.

Dans le code qui suit, on estime à la fois les matrices de covariance les plus adaptées et le nombre de composantes  $k$ , en optimisant le critère d'information Bayésien  $BIC = -2\ln(L) + pln(n)$ , où  $L$  est la vraisemblance du modèle estimé,  $n$  le nombre d'observations, et  $p$  le nombre de paramètres libres du modèle.

```

import itertools
from scipy import linalg
from sklearn.mixture import GaussianMixture
import matplotlib
n_samples = 500
fig = plt.figure(figsize=(12, 6))

# Données
ax1 = plt.subplot(221)
np.random.seed(0)
C = np.array([[10., -0.1], [1.7, .4]])
X = np.r_[np.dot(np.random.randn(n_samples, 2), C),
          .7 * np.random.randn(n_samples, 2) + np.array([-6, 3])]
ax1.plot(X)

ax1.set_title('Données', fontsize=12)
ax1.set_xlabel('t', fontsize=12)
ax1.set_ylabel('x(t)', fontsize=12)

# Critère BIC en fonction des composantes et du modèle de covariance
ax2 = plt.subplot(223)
lowest_bic = np.infty
bic = []
n_components_range = range(1, 5)
cv_types = ['spherical', 'tied', 'diag', 'full']
for cv_type in cv_types:
    for n_components in n_components_range:
        gmm = GaussianMixture(n_components=n_components,
                              covariance_type=cv_type)
        gmm.fit(X)
        bic.append(gmm.bic(X))
        if bic[-1] < lowest_bic:
            lowest_bic = bic[-1]
            best_gmm = gmm
bic = np.array(bic)
color_iter = itertools.cycle(['red', 'green', 'blue',
                             'darkorange'])

bars = []
for i, (cv_type, color) in enumerate(zip(cv_types, color_iter)):
    xpos = np.array(n_components_range) + .2 * (i - 2)
    bars.append(plt.bar(xpos, bic[i * len(n_components_range):
                                (i + 1) * len(n_components_range)],
                        width=.2, color=color))
ax2.set_title('BIC par modèle')
xpos = np.mod(bic.argmin(), len(n_components_range)) + .65 +
       .2 * np.floor(bic.argmin() / len(n_components_range))
plt.text(xpos, bic.min() * 0.97 + .03 * bic.max(), '*', fontsize=14)
ax2.set_xlabel('Nombre de composantes')
ax2.set_ylabel('BIC')
ax2.legend([b[0] for b in bars], cv_types)

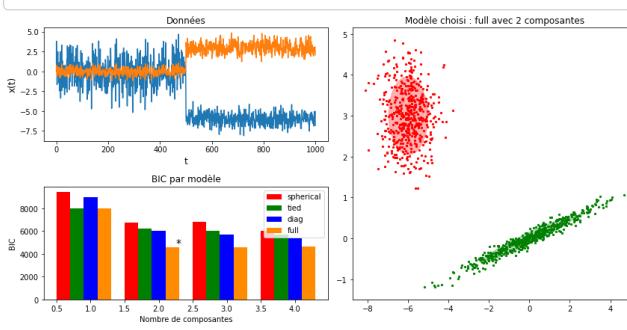
# Affichage classes
ax3 = plt.subplot(222)
Y_ = best_gmm.predict(X)
for i, (mean, cov, color) in enumerate(zip(best_gmm.means_, best_gmm.covariances_,
                                             color_iter)):
    v, w = linalg.eigh(cov)
    if not np.any(Y_ == i):
        continue
    plt.scatter(X[Y_ == i, 0], X[Y_ == i, 1], 5, color=color)

    # Ellipse modélisant la composante gaussienne
    angle = 180. * np.arctan2(w[0][1], w[0][0]) / np.pi
    v = 2. * np.sqrt(2.*v)
    ax3.add_artist(matplotlib.patches.Ellipse(mean, v[0], v[1], 180. + angle,
                                               color=color, alpha=.3))

t = "Modèle choisi : "+ best_gmm.covariance_type +" avec "+
str(best_gmm.n_components)+" composantes"
ax3.set_title(t)
plt.subplots_adjust(hspace=.35, bottom=.02)
plt.tight_layout()

```

```
<ipython-input-13-8c5d04e5c032>:71: MatplotlibDeprecationWarning: Passing the
angle parameter of __init__() positionally is deprecated since Matplotlib 3.6; the
parameter will become keyword-only two minor releases later.
    ax3.add_artist(matplotlib.patches.Ellipse(mean, v[0], v[1], 180. + angle,
color=color, alpha=.3))
```



## Modèles de mélange et estimation

Les modèles de mélange sont également utilisés en estimation de densité. Il suffit pour cela :

- d'échantillonner la composante  $C_i$  désirée, selon la distribution  $P(C_i) = \pi_i$
- d'échantillonner un  $\mathbf{x}$  de la distribution de la composante  $C_i$ , selon  $\mathcal{N}(x|\hat{\theta}_i)$

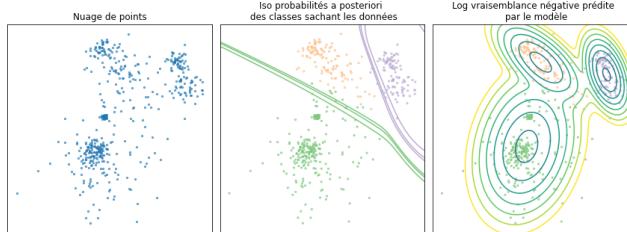
```
from matplotlib.colors import LogNorm
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.datasets import make_blobs

rng = np.random.RandomState(3)
X1, y1 = make_blobs(n_samples=500, centers=10, random_state=rng, cluster_std=
[rng.gamma(1.5) for i in range(10)])
gmm1 = GaussianMixture(n_components=3)
gmm1.fit(X1)
assignment = gmm1.predict(X1)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.subplot(131)
plt.scatter(X1[:, 0], X1[:, 1], s=5, alpha=.6)
plt.gca().set_aspect("equal")
xlim = plt.xlim()
ylim = plt.ylim()
plt.xticks(())
plt.yticks(())
plt.title("Nuage de points")

plt.subplot(132)
xs = np.linspace(xlim[0], xlim[1], 1000)
ys = np.linspace(ylim[0], ylim[1], 1000)
xx, yy = np.meshgrid(xs, ys)
pred = gmm1.predict_proba(np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()])
plt.scatter(X1[:, 0], X1[:, 1], s=5, alpha=.6, c=plt.cm.Accent(assignment))
plt.gca().set_aspect("equal")
plt.xticks(())
plt.yticks(())
levels = [.9, .95, .99, 1]
for color, component in zip(range(k), pred.T):
    plt.contour(xx, yy, component.reshape(xx.shape), colors=[plt.cm.Accent(color)], levels=levels)
plt.title("Iso probabilités à posteriori \n des classes sachant les données")

plt.subplot(133)
scores = -gmm1.score_samples(np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()])
plt.scatter(X1[:, 0], X1[:, 1], s=5, alpha=.6, c=plt.cm.Accent(assignment))
plt.gca().set_aspect("equal")
plt.xticks(())
plt.yticks(())
plt.contour(xx, yy, scores.reshape(xx.shape), levels=np.logspace(0, 1, 20))
plt.title("Log vraisemblance négative prédicté \n par le modèle")
plt.tight_layout()
```



## Sujets de TP

Vous pouvez [télécharger ici](#) l'ensemble des notebooks et des jeux de données des TP.

## TP Statistiques descriptives

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

## Statistique monovariée

| <i>Nom</i>           | <i>Note</i> |
|----------------------|-------------|
| <i>Alain</i>         | 6           |
| <i>Raymond</i>       | 5           |
| <i>Jean - Joseph</i> | 9           |
| <i>Eglantine</i>     | 3           |
| <i>Isidore</i>       | 3           |
| <i>Mauricette</i>    | 1           |
| <i>Sylvere</i>       | 9           |
| <i>Pétunia</i>       | 6           |
| <i>Philemon</i>      | 5           |
| <i>Archibald</i>     | 6           |
| <i>Théodule</i>      | 5           |
| <i>Marguerite</i>    | 6           |
| <i>Prosperpine</i>   | 5           |
| <i>Alphonse</i>      | 7           |
| <i>Géraud</i>        | 5           |
| <i>Basile</i>        | 10          |
| <i>Fantine</i>       | 2           |
| <i>Sidonie</i>       | 1           |
| <i>Thérèse</i>       | 1           |
| <i>Yves</i>          | 1           |

Le tableau suivant donne les notes (sur 10) obtenues à un examen par un groupe d'élèves.

```
{ notes = np.array([6, 5, 9, 3, 3, 1, 9, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 5, 10, 2, 1, 1, 1]) }
```

Donner les différentes modalités possibles

```
{ #TODO }
```

Calculer les effectifs cumulés de chaque modalité.

```
{ #TODO }
```

Calculer les effectifs par modalité, les fréquences et les fréquences cumulées des notes

```
{ #TODO }
```

Représenter avec un (ou plusieurs) graphique(s) adapté(s) la répartition des notes

```
{ #TODO }
```

En déduire (et afficher) la fonction de répartition empirique des notes.

```
{ #TODO }
```

En utilisant la fonction [boxplot](#), tracer la boîte à moustache des notes.

```
{ #TODO }
```

Calculer les éléments caractéristiques (indicateurs de tendance, de dispersion) des notes.

```
{ #TODO }
```

## Statistique bivariée

### Cas de variables quantitatives

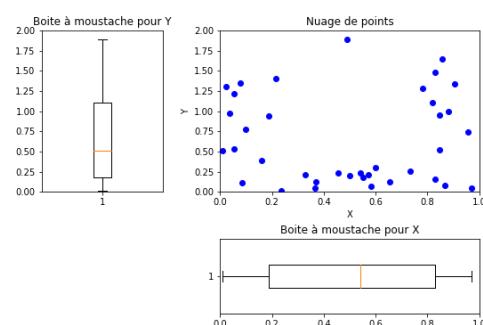
On donne le fichier de données suivant

```
X=np.loadtxt('./bivariee.txt',delimiter=',')
plt.figure(figsize=(12,8))

plt.subplot(2,2)
plt.plot(X[:,0],X[:,1],'ob')
plt.axis([0,1,0,2])
plt.title('Nuage de points')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')

plt.subplot(4,2)
plt.subplots_adjust(hspace=0.4, wspace=0.3)
plt.boxplot(X[:,0],'+',0)
plt.axis([0,1,0.75,1.25])
plt.title('Boîte à moustache pour X')

plt.subplot(2,4)
plt.boxplot(X[:,1],0,'+',1)
a = plt.axis()
plt.axis([a[0], a[1], 0, 2])
plt.title('Boîte à moustache pour Y')
plt.show()
```



Calculer la covariance entre les deux variables. Conclusion ?

```
#TODO
```

Calculer la corrélation entre les deux variables. Conclusion ?

```
#TODO
```

### Cas de variables qualitatives

On s'intéresse à un fichier décrivant la réussite d'étudiants en mathématiques (données décrites [ici](#))

```
import pandas as pd  
result = pd.read_csv('./student.csv', delimiter=';')
```

```
print(result)
```

|     | school | sex | age | address | famsize | Pstatus | Medu | Fedu | Mjob     | Fjob     | \   |
|-----|--------|-----|-----|---------|---------|---------|------|------|----------|----------|-----|
| 0   | GP     | F   | 18  | U       | GT3     | A       | 4    | 4    | at_home  | teacher  |     |
| 1   | GP     | F   | 17  | U       | GT3     | T       | 1    | 1    | at_home  | other    |     |
| 2   | GP     | F   | 15  | U       | LE3     | T       | 1    | 1    | at_home  | other    |     |
| 3   | GP     | F   | 15  | U       | GT3     | T       | 4    | 2    | health   | services |     |
| 4   | GP     | F   | 16  | U       | GT3     | T       | 3    | 3    | other    | other    |     |
| ... | ...    | ... | ... | ...     | ...     | ...     | ...  | ...  | ...      | ...      | ... |
| 390 | MS     | M   | 20  | U       | LE3     | A       | 2    | 2    | services | services |     |
| 391 | MS     | M   | 17  | U       | LE3     | T       | 3    | 1    | services | services |     |
| 392 | MS     | M   | 21  | R       | GT3     | T       | 1    | 1    | other    | other    |     |
| 393 | MS     | M   | 18  | R       | LE3     | T       | 3    | 2    | services | other    |     |
| 394 | MS     | M   | 19  | U       | LE3     | T       | 1    | 1    | other    | at_home  |     |
| ... | ...    | ... | ... | ...     | ...     | ...     | ...  | ...  | ...      | ...      | ... |
| 395 | rows   | x   | 33  | columns |         |         |      |      |          |          |     |

```
[395 rows x 33 columns]
```

On regarde les deux premières colonnes des données (code de l'école et genre de l'étudiant)

```
x = result.values[:,0]  
g = result.values[:,1]
```

Construire le tableau de contingence de ces deux variables

```
#TODO
```

Construire le tableau théorique associé en supposant l'indépendance des deux variables.

```
#TODO
```

Calculer la distance du  $\chi^2$  entre les variables  $x$  et  $g$ . Ces deux variables sont elles liées ou sont elles indépendantes ?

```
#TODO
```

On s'intéresse maintenant à la septième variable  $ne$  qui code le niveau d'éducation des mères de la manière suivante :

- 0 - none,
- 1 - primary education (4th grade),
- 2 - 5th to 9th grade,
- 3 - secondary education
- 4 - higher education

Récupérer cette variable et calculer les effectifs de chacune des modalités. Calculer le tableau de contingence entre les variables  $x$  et  $ne$

```
#TODO
```

```
#TODO
```

Les effectifs étant trop faibles, fusionner les deux premières colonnes

```
#TODO
```

Construire le tableau théorique, en supposant l'indépendance des variables

```
#TODO
```

Calculer la distance du  $\chi^2$  entre les variables  $x$  et  $ne$ . Ces deux variables sont elles liées ou sont elles indépendantes ? Que peut on en déduire sur le choix de l'école ?

```
#TODO
```

### TP ACP

```
try:  
    import sklearn, numpy, matplotlib  
except ModuleNotFoundError:  
    !pip3 install --quiet sklearn numpy matplotlib  
import sklearn, numpy, matplotlib.pyplot as plt
```

```
%matplotlib inline
plt.rcParams['axes.labelsize'] = 12
plt.rcParams['xtick.labelsize'] = 12
plt.rcParams['ytick.labelsize'] = 12
```

## Définition de quelques outils

On définit ici quelques fonctions utiles pour l'affichage des résultats, non présents dans sklearn :

- screeplot : variance expliquée en fonction des composantes principales
- CercleCorrelation : affichage du cercle des corrélations
- biplot : affichage simultané des individus et des variables dans un plan principal

```
def screeplot(Xtr, displayx = True):
    y = np.std(Xtr, axis=0)**2
    x = np.arange(len(y)) + 1
    plt.plot(x, y, "o-")
    if displayx :
        plt.xticks(x, ["CP "+str(i) for i in x], rotation=60)
    plt.ylabel("Variance")
    plt.xlabel("CP")
    plt.title("Scree Plot")

def CercleCorrelation(pca,np1,np2,data,nom_features):
    plt.Circle((0,0),radius=10, color='b', fill=False)
    circle1=plt.Circle((0,0),radius=1, color='b', fill=False)
    fig = plt.gcf()
    fig.gca().add_artist(circle1)

    for idx in range(len(nom_features)):
        str1 = "CP" + str(np1)
        str2 = "CP" + str(np2)
        x = pca.components_[np1][idx]
        y = pca.components_[np2][idx]
        plt.plot([0,0,x],[0,0,y], 'k-')
        plt.plot(x, y, 'rx')
        plt.annotate(nom_features[idx], xy=(x,y))
    plt.xlabel(str1+" (%)"% str(pca.explained_variance_ratio_[np1])
    [:4].lstrip("0."))
    plt.ylabel(str2+" (%)"% str(pca.explained_variance_ratio_[np2])
    [:4].lstrip("0."))
    plt.xlim(-1,1)
    plt.ylim(-1,1)
    plt.title("Cercle des corrélations")

def biplot(pca,np1,np2,data,nom_features):
    cp1 = pca.components_[np1]
    cp2 = pca.components_[np2]
    xs = pca.transform(data)[:,np1]
    ys = pca.transform(data)[:,np2]
    for i in range(len(cp1)):
        plt.arrow(0, 0, cp1[i]*max(xs), cp2[i]*max(ys),
                  color='r', width=0.0005, head_width=0.0025)
        plt.text(cp1[i]*max(xs)+1.2, cp2[i]*max(ys)+1.2,
                 nom_features[i], color='r')

    for i in range(len(xs)):
        plt.plot(xs[i], ys[i], 'bo')
        plt.text(xs[i]+1.2, ys[i]+1.2, i, color='b')
    plt.xlabel("CP" + str(np1)+" (%)"% str(pca.explained_variance_ratio_[np1])[:4].lstrip("0."))
    plt.xlabel("CP" + str(np2)+" (%)"% str(pca.explained_variance_ratio_[np2])[:4].lstrip("0."))
    plt.title("Biplot individus / variables sur les CP"+str(np1)+" et "+str(np2))
    plt.tight_layout()
```

## Exercice 1 : étude de propriétés de vins

Le fichier vins.csv contient les résultats d'analyses chimiques de trois classes de vins italiens, provenant de la même région mais de viticulteurs différents. Les analyses portent sur la quantification de 13 indices quantitatifs continus reliés aux vins : degré d'alcool, acide malique, présence de cendres, alcalinité des cendres, magnésium, phénols totaux, flavonoïdes, phénols non flavanoïdes, proanthocyanidines, intensité de la couleur du vin, teinte, OD280/OD315 des vins dilués et proline. Le fichier décrit un vin par ligne (sa classe et ses 13 attributs).

```
import pandas as pd
pd.options.mode.chained_assignment = None

vins = pd.read_csv("./data/vins.csv", delimiter=" ", header=None)
cat_vins = vins.loc[:, 0]
features_vins = vins.loc[:,1:vins.shape[1]]
nom_features = ['% alcool', 'acide malique', 'cendres', 'alcalinité', 'magnésium',
                'phénols', 'flavonoïdes', 'non flavanoïdes', 'proanthocyanidines', 'couleur',
                'teinte', 'OD280/OD315', 'proline']
```

===== Votre travail : =====

Appliquer une ACP à ces données, de deux manières :

- sur les données brutes du tableau
- sur les données normalisées, en utilisant la fonction StandardScaler de ScikitLearn

Pour chacune de ces analyses :

- déterminer si l'analyse est pertinente et si oui pourquoi
- Si elle l'est effectivement, déterminer le nombre de composantes principales à retenir, interpréter les axes principaux, afficher le(s) plan(s) principal(aux) et interpréter graphiquement les résultats

## Exercice 2 : étude de données image

Nous étudions des données image, représentant des chiffres manuscrits. Nous utilisons pour cela la base de données standard MNIST (Mixed National Institute of Standards and Technology), très employée pour le test de nouveaux algorithmes de reconnaissance de ces chiffres. Elle est composée de 60000 images d'apprentissage et 10000 images de test. Les images en noir et blanc, normalisées centrées de 28 pixels de côté.

```

from sklearn.datasets import fetch_openml
import matplotlib
Xmnist, ymnist = fetch_openml('mnist_784', version=1, return_X_y=True)

def planche(X):
    plt.figure(figsize=(9,9))
    exemples = (1-np.r_[X[12000:600], X[13000:30600:600],
    X[30600:60000:590]])/255
    size = 28
    taille = 10
    taille = min(len(exemples), taille)
    images = [exemple.reshape(size,size) for exemple in exemples]
    n_rows = (len(exemples) - 1) // taille + 1
    row_images = []
    n_empty = n_rows * taille - len(exemples)
    images.append(np.zeros((size, size * n_empty)))
    for row in range(n_rows):
        rimages = images[row * taille : (row + 1) * taille]
        row_images.append(np.concatenate(rimages, axis=1))
    image = np.concatenate(row_images, axis=0)
    plt.imshow(image, cmap = matplotlib.cm.binary)
    plt.axis("off")
    plt.show()

planche(Xmnist)

```

```

/usr/local/lib/python3.9/site-packages/sklearn/datasets/_openml.py:932:
FutureWarning: The default value of `parser` will change from `'liac-arff'` to
`'auto'` in 1.4. You can set `parser='auto'` to silence this warning. Therefore,
an `ImportError` will be raised from 1.4 if the dataset is dense and pandas is not
installed. Note that the pandas parser may return different data types. See the
Notes Section in fetch_openml's API doc for details.
warn(

```

```

NameError                                 Traceback (most recent call last)
Input In [7], in <module>
      21     plt.axis("off")
      22     plt.show()
--> 24 planche(Xmnist)

Input In [7], in planche(X)
      5     def planche(X):
      6         plt.figure(figsize=(9,9))
--> 7     exemples = (1-np.r_[X[12000:600], X[13000:30600:600],
      X[30600:60000:590]])/255
      8     size = 28
      9     taille = 10

NameError: name 'np' is not defined

```

```
<figure size 900x900 with 0 Axes>
```

L'ACP est ici utilisée pour réduire la représentation des données (un point ici est un vecteur de  $28 \times 28 = 784$ , l'espace original est donc  $\mathbb{R}^{784}$ ). Intuitivement, on comprend bien que, de nombreux pixels étant noirs et communs à toutes les images, 784 dimensions sont inutiles.

Pour ne pas surcharger la visualisation, vous utiliserez un sous-ensemble de `nb_digits` images de MNIST (code donné)

#### ===== Votre travail consiste à : =====

- Calculer une ACP de ces données (normalisées ? non normalisées ? justifier)
- Projeter les individus dans un plan principal (ou dans un espace 3D de composantes principales) et commenter le résultat (codes de l'affichage fournis).
- Inférer sur le nombre de composantes principales nécessaires pour expliquer les données initiales
- Essayer de reconstruire une image donnée à partir de ses coordonnées sur les  $n$  premières composantes principales (faire varier  $n$ ) et voir la qualité de la reconstruction

```

# Utilisation d'un sous-ensemble de Xmnist (pour ne pas surcharger la
visualisation)
ymnist=ymnist.astype(int)
nb_digits = 1000
s = np.arange(Xmnist.shape[0])
np.random.shuffle(s)
X0=Xmnist.to_numpy()[s]
y0=ymnist[s]
Xdata = X0[:nb_digits]
ydata = y0[:nb_digits]

# Fonction d'affichage sur le plan principal (n1,n2)
# x : coordonnées des individus projetés sur les composantes principales
# y : label de l'individu (c'est à dire le chiffre lu sur l'image)
# n1,n2 : numéro des composantes principales (0 : première CP, : 2e CP...)
def AfficheCP2D(x,y, n1,n2):
    fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
    plt.scatter(x[:, n1], x[:, n2], c=y[:,1], edgecolor='none',
alpha=0.5,cmap=plt.get_cmap('jet', 10), s=5)
    plt.xlabel('Composante principale '+str(n1+1))
    plt.ylabel('Composante principale '+str(n2+1))
    plt.title('MNIST')
    plt.colorbar()

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
def AfficheCP3D(x,y, n1,n2,n3):
    fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d', elev=30, azim=134)
    ax.scatter(x[:, n1], x[:, n2], x[:, n3], c=y, cmap=plt.cm.get_cmap('jet',
30),edgecolor='k')
    ax.set_xlabel('Composante principale '+str(n1+1))
    ax.set_ylabel('Composante principale '+str(n2+1))
    ax.set_zlabel('Composante principale '+str(n3+1))
    ax.set_title('MNIST')
    ax.w_xaxis.set_ticklabels([])
    ax.w_yaxis.set_ticklabels([])
    ax.w_zaxis.set_ticklabels([])


```

## TP Régression linéaire

```

try:
    import sklearn, numpy, matplotlib, ipywidgets, IPython
except ModuleNotFoundError:
    !pip3 install --quiet sklearn numpy matplotlib ipywidgets IPython

```

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from ipywidgets import interact, interactive, IntSlider, Layout, interact_manual
import ipywidgets as widgets
from IPython.display import display

from sklearn.linear_model import LinearRegression,Lasso,Ridge
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn.pipeline import make_pipeline
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

```

## Régression linéaire : premier exemple

On s'intéresse ici à la régression d'une droite sur un nuage de points, bruité par un bruit normal  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , dont l'amplitude peut varier

```

nb_points=50
# Paramètres de la "vraie droite" y=b0+b1*x
b0,b1 = 0.4,2.5

# Intervalle
x1= np.linspace(0,10,nb_points)
x= np.random.choice(x1,size=nb_points)

def F(test_size,amp_bruit,var_bruit,moyenne_bruit):
    y=b0+b1*x+amp_bruit*np.random.normal(loc=moyenne_bruit,scale=var_bruit,size=nb_points)
    y_true=b0+b1*x

    X_train, X_test, y_train, y_test =
    train_test_split(x,y,test_size=test_size,random_state=42)
    X_train=X_train.reshape(-1,1)
    X_test=X_test.reshape(-1,1)
    xmean = np.mean(X_train)
    ymean=np.mean(y_train)

    lr = LinearRegression()
    lr.fit(X_train,y_train)
    beta0,beta1=lr.intercept_,lr.coef_[0]

    train_pred = np.array(lr.predict(X_train))
    test_pred = np.array(lr.predict(X_test))
    train_score = lr.score(X_train,y_train)
    test_score = lr.score(X_test,y_test)
    RMSE_train=np.sqrt(np.mean(np.square(train_pred-y_train)))
    RMSE_test=np.sqrt(np.mean(np.square(test_pred-y_test)))

    plt.figure(figsize=(12,6))
    plt.title("Score Entrainement : {0:3.4f}, Test : {1:3.4f} --- RMSE\nEntrainement : {2:3.4f}, Test : {3:3.4f}".format(train_score,test_score,RMSE_train,RMSE_test),fontsize=16)
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("y")
    plt.plot(X_train,train_pred,'r', label='Régression')
    plt.plot(x,y_true,c='black', label='Vraie droite')

    plt.scatter(X_train,y_train,c='b',label='Entrainement')
    plt.scatter(X_test,y_test,edgecolors='k',marker='x',c='g',s=100,label='test')
    plt.scatter(X_test,test_pred,edgecolors='k',marker='x',c='magenta',s=100,label='pr édit')

    plt.text(6, 4, "Droite : $y = {0:3.4f} + {1:3.4f}x$".format(b0,b1),fontsize=16)
    plt.text(6, 2, "Régression : $y = {0:3.4f} + {1:3.4f}x$".format(beta0,beta1),fontsize=16)
    plt.text(6, 0, "$R={:3.4f}$".format(np.corrcoef(x,y)[0,1]),fontsize=16)

    plt.text(6, 6, "Centre de masse $X={{:3.3f},\n{{0:3.3f}}})^T$".format(xmean,ymean),fontsize=16)
    plt.text(xmean,ymean,"X",fontsize=20,label='Centre de masse')

    plt.grid(True)
    plt.legend(loc='best')

    plt.tight_layout()
    plt.savefig('regression.png',dpi=100)

```

```

m = interactive(F,amp_bruit=(0.5,1),var_bruit=(0.2,0.1),moyenne_bruit=(-3,3,0.5),
                test_size=widgets.RadioButtons(options=
{"10%":0.1,"30%":0.3,"50%":0.5},description="Test"),disabled=False,continuous_update=False)
display(m)

```

Linéaire ne veut pas dire droite...

```

nb_points=50
x1= np.linspace(-5,5,10*nb_points)
x= np.random.choice(x1,size=nb_points)

```

```

def func_fit(model_type,test_size,degree,amp_bruit,var_bruit,moyenne_bruit):
    y=2*x-0.6*x**2+0.2*x**3+18*np.sin(x)
    y1=2*x1-0.6*x1**2+0.2*x1**3+18*np.sin(x1)
    y=
    y+amp_bruit*np.random.normal(loc=moyenne_bruit,scale=var_bruit,size=nb_points)

    X_train, X_test, y_train, y_test =
    train_test_split(x,y,test_size=test_size,random_state=55)

    if (model_type=='Linéaire'):
        model =
        make_pipeline(StandardScaler(),PolynomialFeatures(degree,interaction_only=False),L
        inearRegression())
        if (model_type=='LASSO'):
            model =
            make_pipeline(StandardScaler(),PolynomialFeatures(degree,interaction_only=False),L
           asso())
        if (model_type=='Ridge'):
            model =
            make_pipeline(StandardScaler(),PolynomialFeatures(degree,interaction_only=False),R
            idge())

    X_train=X_train.reshape(-1,1)
    X_test=X_test.reshape(-1,1)

    model.fit(X_train,y_train)

    train_pred = np.array(model.predict(X_train))
    train_score = model.score(X_train,y_train)

    test_pred = np.array(model.predict(X_test))
    test_score = model.score(X_test,y_test)

    RMSE_train=np.sqrt(np.mean(np.square(train_pred-y_train)))
    RMSE_test=np.sqrt(np.mean(np.square(test_pred-y_test)))

    plt.figure(figsize=(14,6))
    plt.title("Score Entrainement : {0:3.4f}, Test : {1:3.4f} -- RMSE
Entrainement : {2:3.4f}, Test :
{3:3.4f}".format(train_score,test_score,RMSE_train,RMSE_test),fontsize=16)
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("y")
    plt.scatter(X_train,y_train,c='blue',label='Entrainement')
    plt.scatter(X_test,y_test,marker='x',c='green',s=100,label='test')
    plt.scatter(X_test,test_pred,marker='x',c='magenta',s=100,label='predit')
    plt.plot(x1,y1,c='k',lw=2,label='Vraie courbe')
    y2 = model.predict(x1.reshape(-1,1))
    plt.plot(x1,y2,c='r',lw=2,label='Courbe prédite')

    plt.grid(True)
    plt.legend(loc='best')

    plt.tight_layout()

    return (train_score,test_score)

```

```

m = interactive(func_fit,model_type=widgets.RadioButtons(options=
['Linéaire','LASSO','Ridge'],description = "Choose
Model"),layout=layout(width='250px')),
test_size=widgets.RadioButtons(options={"10%":0.1,"30%
":0.3,"50%":0.5},description="Test"),
degree=widgets.IntSlider(min=1,max=30,step=1,description=
'Degré',continuous_update=False),amp_bruit=(0,5,1),var_bruit=
(0,2,0.1),moyenne_bruit=(-3,3,0.5))
display(m)

```

## TP long

```

try:
    import pandas,seaborn
except ModuleNotFoundError:
    !pip3 install --quiet pandas,seaborn
import numpy, matplotlib.pyplot as plt,pandas,seaborn
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

```

## Jeu de données

L'objectif de ce jeu de données est de prédire une maladie rénale à partir de mesures effectuées sur des individus. Les données ont été recueillies sur une période de deux mois en Inde et comportent 25 caractéristiques

1. Age(en années)
2. Pression sanguine (mm/Hg)
3. Densité (qualitative ordinaire, parmi sg - (1.005,1.010,1.015,1.020,1)
4. Albumine (qualitative ordinaire, parmi (0,1,2,3,4,5))
5. Sucre (qualitative ordinaire, parmi (0,1,2,3,4,5))
6. Globules rouge (qualitative nominale parmi (normal,abnormal))
7. Cellules Pus (qualitative nominale parmi (normal,abnormal))
8. Amas de cellules Pus (qualitative nominale parmi (présent,absent))
9. Bactérie (qualitative nominale parmi (présent,absent))
10. Glucose (mgs/dl)
11. Urée dans le sang (mgs/dl)
12. Créatinine (mgs/dl)
13. Sodium (mEq/L)
14. Potassium (mEq/L)
15. Hémoglobine (gms)
16. Volume cellulaire
17. Comptage globules blancs
18. Comptage globules rouge
19. Hypertension (qualitative nominale parmi (oui,non))
20. Diabète (qualitative nominale parmi (oui,non))
21. Maladie coronarienne (qualitative nominale parmi (oui,non))
22. Appetit (qualitative nominale parmi (normal,pauvre))
23. Oedème (qualitative nominale parmi (oui,non))
24. Anémie (qualitative nominale parmi (oui,non))
25. Classe (malade : ckd, pas malade : notckd)

```

data = pd.read_csv('../data/dataTP.csv')

NameError                                 Traceback (most recent call last)
Input In [2], in <module>
      1 data = pd.read_csv('../data/dataTP.csv')
--> 2 NameError: name 'pd' is not defined

data.head()

   id  age  bp  sg  al  su  rbc  pc  pcc  ba ... pcv  wc  rc  htn  dm  cad  appet  pe  ane  classification
0  0  48.0  80.0  1.020  1.0  0.0  NaN  normal  notpresent  notpresent ... 44  7800  5.2  yes  yes  no  good  no  no  ckd
1  1  7.0  50.0  1.020  4.0  0.0  NaN  normal  notpresent  notpresent ... 38  6000  NaN  no  no  no  good  no  no  ckd
2  2  62.0  80.0  1.010  2.0  3.0  normal  normal  notpresent  notpresent ... 31  7500  NaN  no  yes  no  poor  no  yes  ckd
3  3  48.0  70.0  1.005  4.0  0.0  normal  abnormal  present  notpresent ... 32  6700  3.9  yes  no  no  poor  yes  yes  ckd
4  4  51.0  80.0  1.010  2.0  0.0  normal  normal  notpresent  notpresent ... 35  7300  4.6  no  no  no  good  no  no  ckd
5 rows × 26 columns

data.info()

<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 400 entries, 0 to 399
Data columns (total 26 columns):
 #   Column          Non-Null Count  Dtype  
--- 
 0   id              400 non-null    int64  
 1   age             391 non-null    float64 
 2   bp              388 non-null    float64 
 3   sg              353 non-null    float64 
 4   al              354 non-null    float64 
 5   su              351 non-null    float64 
 6   rbc             248 non-null    object  
 7   pc              335 non-null    object  
 8   pcc             396 non-null    object  
 9   ba              396 non-null    object  
 10  bgr             356 non-null    float64 
 11  bu              381 non-null    float64 
 12  sc              383 non-null    float64 
 13  sod             313 non-null    float64 
 14  pot             312 non-null    float64 
 15  hemo            348 non-null    float64 
 16  pcv             330 non-null    object  
 17  wc              295 non-null    object  
 18  rc              270 non-null    object  
 19  htn             398 non-null    object  
 20  dm              398 non-null    object  
 21  cad             398 non-null    object  
 22  appet           399 non-null    object  
 23  pe               399 non-null    object  
 24  ane             399 non-null    object  
 25  classification  400 non-null    object  
dtypes: float64(11), int64(1), object(14)
memory usage: 81.4+ KB

```

## 1. Analyse exploratoire

### Nettoyage des données

Les données, comme tout jeu de données réel, comportent de nombreuses imperfections :

- données manquantes (NaN) dans les données
- erreurs de lecture du fichier initial dans plusieurs colonnes (un "\t" est encore présent, comme par exemple dans la colonne **Classe**("ckd\t" à la place de "ckd"))
- possiblement données aberrantes.

Il est de plus nécessaire de faire les pré-traitements habituels pour assurer une analyse de données pertinente :

- gestion des variables qualitatives
- normalisation
- gestion des variables entières / flottantes

Votre premier travail consiste donc à régler tous ces points pour obtenir un fichier de données propre. Vous devez donc mettre en jeu des techniques d'[imputation](#), de [normalisation](#) ou encore de gestion de [données aberrantes](#).

### 1.1. Analyse univariée / bivariée

Vous explorerez ici les caractéristiques des variables (statistique univariée) et des relations entre couples de variables (statistiques bivariée) :

- [distribution des variables](#), [boxplot](#)...
- [corrélations](#), relations entre variables,...

Vous en déduirez des actions à prendre sur ces variables (suppression d'une colonne, application d'une fonction mathématique à une colonne,...)

### 1.2. Sélection / extraction de variables

#### 1.2.1. Sélection de variables

Vous appliquerez ici les méthodes classiques de [sélection de variables](#) sur les variables (éventuellement pré traitées par le point 1.1.) pour en extraire un jeu de données à  $d << 25$  variables initiales à analyser.

#### 1.2.2. Extraction de variable

Vous analysez le jeu de données (éventuellement pré traitées par le point 1.1.) à l'aide d'une [ACP](#) et en déduirez  $d << 25$  nouvelles variables à analyser

## 2. Problème de classification

Le premier problème qui nous intéresse est de pouvoir construire un modèle de classification non supervisée et de comparer ses résultats à la « vraie » classification proposée dans le dernière colonne. Vous construirez donc des modèles de [classification](#) à partir des éléments vus en cours, optimiserez les paramètres de ces algorithmes (nombre de classes dans les k-means par exemple) et évaluerez leur performance. Vous travaillerez d'une part sur les

variables retenues par sélection de variables, et d'autre part sur les variables calculées par extraction de variables. Vous comparerez les résultats de classification obtenus.

### 3. Problème de régression

Le second problème concerne la [régression linéaire](#) d'une ou plusieurs des colonnes en fonction des autres régression. Vous vous intéresserez donc à :

- la régression simple de la colonne 12 en fonction des autres colonnes
- la régression multiple des colonnes 16, 17 et 18 en fonction des autres colonnes

## Analyse canonique

On considère  $n$  individus décrits par deux ensembles de  $p$  et  $q$  variables quantitatives respectivement, où on suppose sans perte de généralité que  $p \leq q$ . L'analyse canonique se propose d'examiner les liens existants entre ces deux ensembles afin de savoir s'ils mesurent les mêmes propriétés. On se retrouve ici au cas de deux groupes, la généralisation au cas de  $g$  groupes quelconques donnant lieu à l'analyse canonique généralisée.

Formellement on dispose donc de deux matrices  $\mathbf{X}_1 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{X}_2 \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ , rassemblées dans une matrice  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2]$ . On supposera  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  de rang plein.

L'étude de la position géométrique relative des sous-espaces  $Im(\mathbf{X}_1)$  et  $Im(\mathbf{X}_2)$  permet d'analyser les deux ensembles de variables.

### Variables canoniques

On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une métrique  $\mathbf{D}$ .

#### Principe

La recherche de variables canoniques consiste à rechercher  $\mathbf{u}_1 \in Im(\mathbf{X}_1)$ ,  $\|\mathbf{u}_1\| = 1$  et  $\mathbf{v}_1 \in Im(\mathbf{X}_2)$ ,  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$  tels que l'angle  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$  est le plus faible. On recherche ensuite  $\mathbf{u}_2 \in Im(\mathbf{X}_1)$ ,  $\|\mathbf{u}_2\| = 1$  orthogonal à  $\mathbf{u}_1$  au sens de  $\mathbf{D}$ , et  $\mathbf{v}_2 \in Im(\mathbf{X}_2)$ ,  $\|\mathbf{v}_2\| = 1$  orthogonal à  $\mathbf{v}_1$  au sens de  $\mathbf{D}$  tels que l'angle  $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$  soit minimal. On poursuit cette procédure itérativement pour arriver au dernier couple  $(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)$ .

#### Formulation matricielle dans $\mathbb{R}^n$

On note  $\mathbf{P}_i$ ,  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  la projection orthogonale (au sens de  $\mathbf{D}$ ) sur  $Im(\mathbf{X}_i)$ . On sait alors que :

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^T \mathbf{D} \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^T \mathbf{D}$$

La recherche de  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{v}_1$  amène à maximiser  $\cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ . En utilisant le théorème suivant

#### Theorem 11 (Théorème de projection)

Soit  $L$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Étant donné un point  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , il existe un unique point  $\mathbf{p}$  de  $L$ , appelé la projection orthogonale de  $\mathbf{y}$  sur  $L$ , tel que  $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ ,  $\forall \mathbf{x} \in L$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbf{p} \in L$  soit la projection orthogonale de  $\mathbf{y}$  sur  $L$  est  $\mathbf{y} - \mathbf{p} \in L^\perp$ .

On en déduit que  $\mathbf{v}_1$  doit être tel que  $\mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1$  soit colinéaire à  $\mathbf{u}_1$ . De même,  $\mathbf{v}_1$  doit être le vecteur de  $Im(\mathbf{X}_2)$  le plus proche de  $\mathbf{u}_1$  (ou de  $\mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1$  qui lui est colinéaire), donc  $\mathbf{v}_1$  doit être colinéaire à  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1$ . Le problème se ramène donc à la recherche des éléments propres de  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$ .

Tout d'abord, les vecteurs propres de  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$  sont dans  $Im(\mathbf{X}_2)$ . En effet en multipliant à gauche  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$  par  $\mathbf{P}_2$ , et puisque  $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2$  (projection), on a immédiatement  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_1$  et donc  $\mathbf{P}_2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \in Im(\mathbf{X}_2)$ .

On montre ensuite que  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$  est symétrique (par rapport à  $\mathbf{D}$ ). Pour cela, en fonction de la remarque précédente, il suffit de démontrer que pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Im(\mathbf{X}_2)$  (symétrie du produit scalaire engendré par  $\mathbf{D}$ )

$$\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{y} = (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{y}$$

On a en effet :

$$\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{y} = (\mathbf{P}_2 \mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{P}_1 \mathbf{y} \text{ car } \mathbf{P}_2 \text{ symétrique}$$

$$= \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{P}_1 \mathbf{y} \text{ car } \mathbf{x} \in Im(\mathbf{X}_2)$$

$$= (\mathbf{P}_1 \mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{y} \text{ car } \mathbf{P}_1 \text{ symétrique}$$

$$= (\mathbf{P}_1 \mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{P}_2 \mathbf{y} \text{ car } \mathbf{y} \in Im(\mathbf{X}_2)$$

$$= (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{y} \text{ car } \mathbf{P}_2 \text{ symétrique}$$

$\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$  est donc symétrique, réelle, elle est donc diagonalisable. Elle possède au plus  $\min(p, q)$  valeurs propres non identiquement nulles, toutes positives car les  $\mathbf{P}_i$  sont des matrices semi définies positives.

On recherche donc maintenant  $\mathbf{v}_1$  tel que  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$ . Il est immédiat alors que  $\mathbf{u}_1$  est vecteur propre de  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$  associé à  $\lambda_1$ , qui représente le carré du cosinus de l'angle entre  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{u}_1$  (donc  $\lambda_1 \leq 1$ ).

Le cas  $\lambda_1 = 1$  correspond à  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$  et sa multiplicité donne la dimension de  $Im(\mathbf{X}_1) \cap Im(\mathbf{X}_2)$ .

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres nulles de rang inférieur à  $q$  engendrent la partie de  $Im(\mathbf{X}_2)$  orthogonale à  $Im(\mathbf{X}_1)$ . En résumé, dans  $\mathbb{R}^n$ , les vecteurs propres  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$  des matrices  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$  et  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$  vérifient :

- $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$  et  $\sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i = \mathbf{P}_2 \mathbf{u}_i$
- $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$  et  $\sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i = \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_i$
- $(\forall i \neq j) \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{D} \mathbf{v}_j = \mathbf{u}_i^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j = \mathbf{v}_i^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j = 0$

#### Formulation matricielle dans les espaces des variables

D'après la définition des sous-espaces image, il existe  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^p, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^q$  tels que  $\mathbf{u}_i = \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{v}_i = \mathbf{X}_2 \mathbf{b}_i$ . Les  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  sont les facteurs canoniques qui se calculent par

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \Leftrightarrow \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_i$$

soit

$$(\mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{D} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{D})(\mathbf{X}_2 (\mathbf{X}_2^T \mathbf{D} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{D}) \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_i$$

Or  $Rg(\mathbf{X}_1) = p$  donc l'équation se simplifie en

$$((\mathbf{X}_1^T \mathbf{D} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{D})(\mathbf{X}_2 (\mathbf{X}_2^T \mathbf{D} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{D}) \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$$

et de même

$$((\mathbf{X}_2^T \mathbf{D} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{D})(\mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{D} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{D}) \mathbf{X}_2 \mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$$

Si les variables sont centrées ( $\mathbf{X}_i^T \mathbf{D} \mathbf{1} = 0$ ), les matrices  $\mathbf{X}_i^T \mathbf{D} \mathbf{X}_j$  s'interprètent comme des matrices de covariance que l'on note  $\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{X}_i^T \mathbf{D} \mathbf{X}_j$  et les équations des facteurs canoniques s'écrivent finalement

$$\mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{21} \mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{21} \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} \mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$$

et les  $\lambda_i$  sont les carrés des coefficients de corrélation canonique entre les variables canoniques. Si on impose que les variables canoniques soient de variance unité, on normalise les facteurs par  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{V}_{11} \mathbf{a}_i = 1$  et  $\mathbf{b}_i^T \mathbf{V}_{22} \mathbf{b}_i = 1$ , d'où

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{21} \mathbf{a}_i \text{ et } \mathbf{a}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} \mathbf{b}_i$$

## Représentation graphique

### Représentation des variables

On peut représenter indifféremment les variables canoniques de  $Im(\mathbf{X}_1)$  ou  $Im(\mathbf{X}_2)$  : on représente pour cela les colonnes de  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  en projection sur la base des  $\mathbf{u}_i$  (resp  $\mathbf{v}_i$ ).

Par exemple, si l'on s'intéresse à la représentation sur  $Im(\mathbf{X}_1)$ , la projection sur  $Lin(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  est appelée cercle des corrélations, car, si les colonnes de  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  sont normées par rapport à  $\mathbf{D}$ , les composantes sur la base des  $(\mathbf{u}_i)$  sont les coefficients de corrélation entre variables initiales et variables canoniques. En effet, si on note pour  $k \in [1, p]$   $\mathbf{X}_{*,k}$  la  $k^e$  colonne de  $\mathbf{X}_1$  alors  $\mathbf{X}_{*,k}^T \mathbf{D} \mathbf{u}_1 = \mathbf{X}_{*,k}^T \mathbf{D} \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_1$ . Le coefficient de corrélation entre  $\mathbf{X}_{*,k}$  et  $\mathbf{u}_1$  est la  $k^e$  composante de  $\mathbf{V}_{11} \mathbf{a}_1$  car  $\mathbf{X}_{*,k} = \mathbf{X}_1 \delta_k$ , où  $\delta_k \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur nul sauf la  $k^e$  composante qui vaut 1.

De même si on note pour  $l \in [1, q]$   $\mathbf{X}_{*,l}$  la  $l^e$  colonne de  $\mathbf{X}_2$  alors  $\mathbf{X}_{*,l}^T \mathbf{D} \mathbf{u}_1 = \delta_l^T \mathbf{X}_2^T \mathbf{D} \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_1$ , et la corrélation entre  $\mathbf{X}_{*,l}$  et  $\mathbf{u}_1$  est la  $l^e$  composante de  $\mathbf{V}_{21} \mathbf{a}_1$  ou encore la  $l^e$  composante de  $\sqrt{\lambda_1} \mathbf{V}_{22} \mathbf{b}_1$ .

### Représentation des individus

Là encore, on peut représenter les individus selon les variables canoniques  $\mathbf{u}_i$  ou  $\mathbf{v}_i$ . Dans le plan  $Lin(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , par exemple, les coordonnées du  $k^e$  point sont les  $k^e$  composantes des variables canoniques  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ .

## Quelques réflexions autour de l'analyse canonique

### Intérêt théorique

L'analyse canonique présente un intérêt théorique certain car plusieurs méthodes statistiques très utilisées en sont des cas particuliers.

### Cas $q=1$

Si l'on cherche à expliquer  $\mathbf{X}_2$  par  $\mathbf{X}_1$  :

- Si  $p=1$ , c'est un problème de régression linéaire
- Si  $p > 1$ , c'est un problème de régression linéaire multiple
- Si  $\mathbf{X}_1$  est constitué d'une ou plusieurs variables qualitatives, on aboutit à un modèle d'analyse de la variance
- Si  $\mathbf{X}_1$  est constitué de variables qualitatives et quantitatives, on aboutit à un modèle d'analyse de la covariance

Dans tous ces cas, le problème est de maximiser le coefficient de corrélation entre une variable quantitative et un ensemble de variables, c'est donc bien un problème d'analyse canonique.

### Cas général

- L'analyse Factorielle Discriminante est le cas particulier de l'analyse canonique pour lequel  $\mathbf{X}_1$  décrit un ensemble de variables quantitatives et  $\mathbf{X}_2$  une variable qualitative
- L'Analyse Factorielle des correspondances est l'instantiation d'une analyse canonique dans laquelle  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  décrivent les modalités d'une variable qualitative.

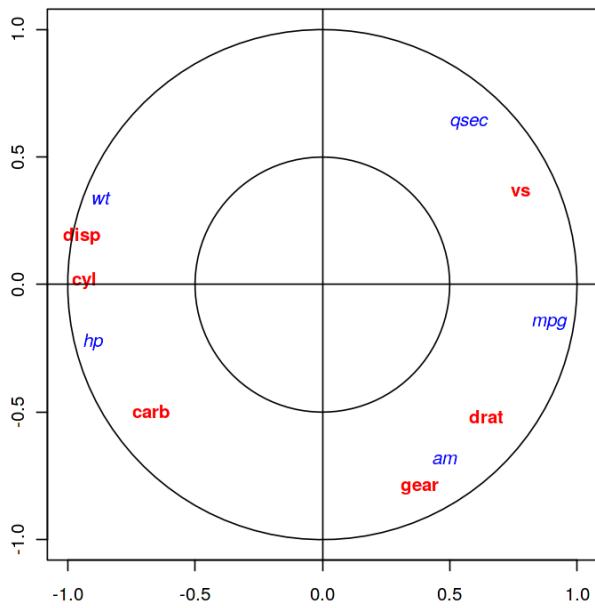
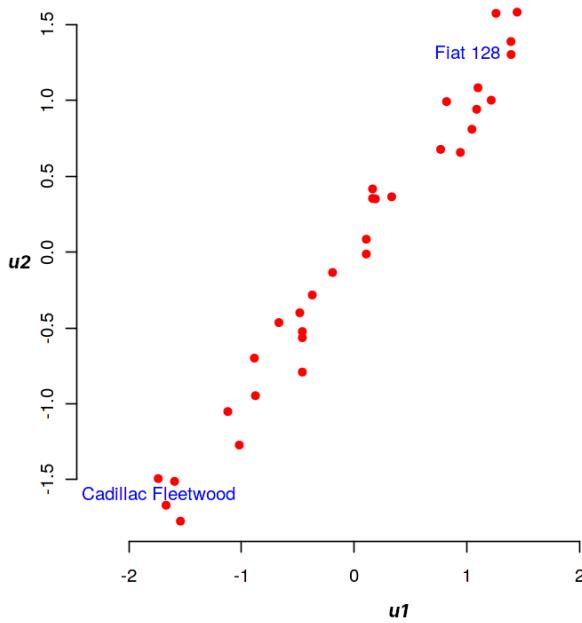
### Limites

L'analyse canonique décrit les relations linéaires existant entre deux ensembles de variables : les premières étapes mettent en évidence les directions de l'espace des variables selon lesquelles les deux ensembles sont les plus proches. Mais il est possible que les variables canoniques soient faiblement corrélées aux variables des tableaux  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$ , elles deviennent dans ce cas difficilement interprétables. Les variables d'origine n'interviennent en effet pas dans les calculs de détermination des composantes canoniques, seuls comptent les projecteurs sur les espaces engendrés par ces variables.

## Exemple

On s'intéresse au jeu de données [mtcars](#), qui décrit 32 voitures à l'aide de 11 paramètres quantitatifs. Ces paramètres peuvent être classés en deux catégories, l'une ( $\mathbf{X}_1$ ) relative à des performances de conduite (puissance, consommation, ...), l'autre ( $\mathbf{X}_2$ ) plus reliée aux caractéristiques de l'automobile (nombre de cylindres, nombre de carburateurs, ...). L'objectif est de voir s'il existe un lien entre ces deux ensembles de variables.

La projection des individus (les voitures) dans le plan  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  est donnée dans la figure suivante. A gauche, la projection des individus dans  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , à droite la projection des variables sur le cercle des corrélations. Les variables de  $\mathbf{X}_1$  sont représentées en rouge, celles de  $\mathbf{X}_2$  en bleu



Ce plan identifie deux extrêmes : les grandes voitures (en bas à gauche) et les petites voitures (en haut à droite). La corrélation des données sur ce plan est de 0.98, une relation linéaire semble donc évidente entre ces deux groupes.

La projection des variables sur le cercle des corrélations montre que toutes les variables sont expressives (près du cercle).

## Analyse Factorielle des correspondances

On cherche à expliquer la liaison entre deux variables qualitatives  $X$  et  $Y$ , caractérisées par un ensemble de couples de modalités  $(x_i, y_i)$ . On note  $x_1 \dots x_J$  et  $y_1 \dots y_K$  les modalités distinctes de  $X$  et  $Y$  respectivement.

Plus précisément, l'analyse factorielle des correspondances (AFC) vise à définir un modèle statistique permettant de fournir des paramètres dont la représentation graphique illustre les correspondances entre les modalités de ces variables. Dans sa version « analyse de données », l'AFC cherche à réduire la dimension des données en effectuant la décomposition factorielle des nuages de points associés aux profils lignes et aux profils colonnes du tableau de contingence croisant les modalités des deux variables (l'AFC est une double ACP sur les deux tableaux de profils). On aborde à la fin du chapitre une modélisation statistique de l'AFC, en supposant que les fréquences d'observation correspondent à l'observation d'une probabilité théorique, dont la distribution modélise le tableau de contingence des deux variables.

### Notations

Le tableau de contingence  $\mathbf{T}$  entre les  $X$  et  $Y$ , vu comme une matrice, est défini par

	$y_1$	...	$y_k$	...	$y_K$	<b>total</b>
$x_1$	$n_{11}$	...	$n_{1k}$	...	$n_{1K}$	$n_{1.}$
:	:	...	:	...	:	:
$x_j$	$n_{j1}$	...	$n_{jk}$	...	$n_{jK}$	$n_{j.}$
:	:	...	:	...	:	:
$x_J$	$n_{J1}$	...	$n_{Jk}$	...	$n_{JK}$	$n_{J.}$
<b>total</b>	$n_{.1}$	...	$n_{.k}$	...	$n_{.K}$	$n$

où  $n_{j.}$  (resp  $n_{.k}$ ) sont les effectifs marginaux représentant le nombre de fois où  $x_j$  (resp.  $y_k$ ) apparaît, et  $n_{jk}$  le nombre d'apparitions du couple  $(x_j, y_k)$ .

Les fréquences conjointes  $f_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$  et les fréquences marginales sont stockées dans des vecteurs  $\mathbf{g}_J = (f_{1.} \dots f_{J.})^T$  et  $\mathbf{g}_K = (f_{.1} \dots f_{.K})^T$ .

On note aussi  $\mathbf{D}_J = \text{diag}(f_{1.} \dots f_{J.})$  et  $\mathbf{D}_K = \text{diag}(f_{.1} \dots f_{.K})$ .

Dans le tableau de contingence  $\mathbf{T}$ , on lit le  $j^e$  profil ligne  $[\frac{n_{1j}}{n_j} \dots \frac{n_{kj}}{n_j}]$ , considéré comme un vecteur de  $\mathbb{R}^K$  et le  $k^e$  profil colonne  $[\frac{n_{1k}}{n_k} \dots \frac{n_{jk}}{n_k}]$  considéré comme un vecteur de  $\mathbb{R}^J$ . Ces profils sont rangés dans des matrices de profils lignes  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{KJ}(\mathbb{R})$  et de colonnes  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{JK}(\mathbb{R})$  définies par  $\mathbf{A} = \frac{1}{n} \mathbf{T}^T \mathbf{D}_J^{-1}$  et  $\mathbf{B} = \frac{1}{n} \mathbf{T} \mathbf{D}_K^{-1}$

## Double ACP

L'analyse factorielle des correspondances peut être considérée comme le résultat d'une double ACP :

- une effectuée sur les profils colonnes dans  $\mathbb{R}^J$
- une effectuée sur les profils lignes dans  $\mathbb{R}^K$

relativement à la métrique du  $\chi^2$  de matrice  $\mathbf{D}_K^{-1}$  pour l'analyse en lignes et  $\mathbf{D}_J^{-1}$  pour l'analyse en colonnes.

Ainsi, par exemple, la distance entre deux modalités  $x_i$  et  $x_p$  de  $X$  est donnée par :

$$\|\mathbf{A}_{.1} - \mathbf{A}_{.p}\|_{\mathbf{D}_K^{-1}}^2 = \sum_{i=1}^K \frac{1}{f_{i.}} (A_{i,1} - A_{i,p})^2$$

où  $\mathbf{A}_{.1}$  est la  $l^e$  colonne de  $\mathbf{A}$ . La métrique du  $\chi^2$  introduit les inverses des fréquences marginales des modalités de  $Y$  comme pondérations des écarts entre éléments de deux profils relatifs à  $X$  (et réciproquement). Elle attribue donc plus de poids aux écarts correspondants à des modalités de faible effectif (rares) pour  $Y$ .

### ACP dans $\mathbb{R}^J$

L'ACP sur les profils colonnes est réalisée en recherchant les éléments propres de  $\mathbf{BA}$ , symétrique par rapport à la métrique  $\mathbf{D}_J^{-1}$  et semi définie positive. On note  $\mathbf{U}$  la matrice des vecteurs propres. Cette ACP fournit une représentation des modalités de  $Y$ , réalisée au moyen des lignes de la matrice des composantes principales  $\mathbf{C}_K = \mathbf{B}^T \mathbf{D}_J^{-1} \mathbf{U}$ .

### ACP dans $\mathbb{R}^K$

L'ACP sur les profils lignes est réalisée en recherchant les éléments propres de  $\mathbf{AB}$ , symétrique par rapport à la métrique  $\mathbf{D}_K^{-1}$  et semi définie positive. On note  $\mathbf{V}$  la matrice des vecteurs propres. Cette ACP fournit une représentation des modalités de  $X$ , réalisée au moyen des lignes de la matrice des composantes principales  $\mathbf{C}_J = \mathbf{A}^T \mathbf{D}_K^{-1} \mathbf{V}$ .

Puisque  $\mathbf{U}$  contient les vecteurs propres de  $\mathbf{BA}$  et  $\mathbf{V}$  ceux de  $\mathbf{AB}$ , il suffit de réaliser en fait une seule ACP, les résultats de l'autre s'en déduisant simplement : si  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice des valeurs propres (hors  $\lambda_0 = 0$ ) communes aux deux ACP :

$$\mathbf{V} = \mathbf{AU\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \mathbf{U} = \mathbf{BV\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{B}^T \mathbf{D}_J^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{D}_K^{-1} \mathbf{ABV\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{D}_K^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{C}_J = \mathbf{A}^T \mathbf{D}_K^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{D}_J^{-1} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_J \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \mathbf{C}_J = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_K \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$$

#### Remark 23

Soit deux matrices  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{KJ}(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{JK}(\mathbb{R})$ . Les valeurs propres non nulles de  $\mathbf{AB}$  et  $\mathbf{BA}$  sont identiques avec le même degré de multiplicité. De plus, si  $\mathbf{u}$  est vecteur propre de  $\mathbf{BA}$  associé à la valeur propre  $\lambda \neq 0$ , alors  $\mathbf{v} = \mathbf{Au}$  est vecteur propre de  $\mathbf{AB}$  associé à la même valeur propre.

## Représentation graphique

La décomposition de  $\mathbf{T}/n$  donne :

$$\frac{f_{jk} - f_j f_k}{f_j f_k} = \sum_{i=0}^{\min(J-1, K-1)} \sqrt{\lambda_i} \frac{u_i^j v_i^k}{f_j f_k}$$

Cette quantité est appelée taux de liaison entre les modalités  $j$  et  $k$ . En se limitant au rang  $q$  on obtient pour chaque couple de modalité  $(j, k)$  de  $\mathbf{T}$  une approximation de son écart relatif à l'indépendance, comme produit scalaire des deux vecteurs  $\frac{(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}}{f_k} u_j$  et  $\frac{(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}}{f_k} v_k$ , termes génériques des matrices  $\mathbf{D}_J^{-1} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{D}_K^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ .

La représentation graphique de ces vecteurs (par exemple avec  $q = 2$ ), appelée biplot, donne la correspondance entre les deux modalités  $x_j$  et  $y_k$ . Lorsque ces deux modalités, éloignées de l'origine, sont voisines (resp. opposées), leur produit scalaire est de valeur absolue importante ; leur cellule conjointe contribue alors fortement et de manière positive (resp. négative) à la dépendance entre les deux variables. L'analyse factorielle des correspondances apparaît ainsi comme la meilleure reconstitution des fréquences  $f_{jk}$ , ou encore la meilleure représentation des écarts relatifs à l'indépendance.

## Interprétation

Les qualités de représentation dans la dimension choisie et les contributions des modalités de  $X$  ou de  $Y$  se déduisent facilement de celles de l'ACP. Ces quantités sont utilisées à la fois pour choisir la dimension de l'analyse factorielle des correspondances et pour interpréter ses résultats dans la dimension choisie.

### Inertie et test d'indépendance

En analyse en composantes principales centrée réduite, l'inertie totale du nuage de points est égale au nombre de variables. En AFC, l'inertie totale du nuage des profils lignes est égale à l'inertie totale du nuage des profils colonnes, égale au  $\chi^2$  d'indépendance entre les deux variables qualitatives.

La valeur de l'inertie est donc un indicateur de la dispersion des nuages de points et une mesure de liaison entre les deux variables qualitatives, appelée mesure d'écart à l'indépendance.

### Interprétation des valeurs propres

Les valeurs propres des ACP renseignent sur la dispersion des nuages de profils lignes et colonnes :

- Une valeur propre proche de 1 indique une dichotomie parfaite du tableau  $\mathbf{T}$ , qui peut être décomposé après reclassement des modalités en deux blocs distincts

- Plus généralement  $p$  valeurs propres proches amènent à  $k + 1$  blocs distincts
- Si toutes les valeurs propres sont proches de 1, on aboutit à l'effet Guttman : il existe une correspondance entre chaque modalité ligne et une modalité colonne « associée ». Avec une réorganisation des modalités, les effectifs importants se trouvent alors le long de la diagonale.

### Qualité globale

A  $q$  fixé, la qualité globale de la représentation se mesure comme dans le cadre de l'ACP, comme le rapport entre les  $q$  premières valeurs propres  $\lambda_i$  et la somme sur tout le spectre.

On montre que la qualité de la représentation dans la  $i^e$  dimension s'écrit  $\frac{n\lambda_i}{\chi^2}$

### Qualité de chaque modalité

Comme dans l'ACP également, la qualité d'une modalité de  $X$  (resp.  $Y$ ) se quantifie par le carré du cosinus de l'angle entre le vecteur représentant cette modalité dans  $\mathbb{R}^K$  (resp.  $\mathbb{R}^J$ ) et sa projection orthogonale au sens de  $\mathbf{D}_K^{-1}$  (resp.  $\mathbf{D}_J^{-1}$ ) dans le sous-espace principal de dimension  $q$ . Ces cosinus se calculent très simplement en faisant le rapport des sommes appropriées des carrés des coordonnées extraites des lignes de  $\mathbf{C}_J$  (resp.  $\mathbf{C}_K$ ).

### Inertie expliquée

L'inertie totale du nuage des profils lignes (resp. colonnes) est égale à la somme de toutes les valeurs propres  $\lambda_i$ . La part due au  $j^e$  profil ligne (resp.  $k^e$  profil colonne) est  $f_{j*} \sum_i (\mathbf{C}_J(ji))^2$  (resp.  $f_{*k} \sum_i (\mathbf{C}_K(ik))^2$ ).

Les contributions à l'inertie selon chaque axe se calculent de la même manière, sans sommation sur  $i$ . Elles sont utilisées pour sélectionner les modalités les plus importantes (i.e. celles qui importent le plus dans la définition de la liaison entre  $X$  et  $Y$ ).

### Choix de $q$

Comme dans le cas de l'ACP, le choix de l'espace de représentation est important. On peut estimer  $q$  comme en ACP (pourcentage de l'inertie expliquée, décroissance des valeurs propres), ou utiliser une approche probabiliste : si

$$\nu_{jk}^q = nf_{j*}f_{*k} + n \sum_{i=1}^q \sqrt{\lambda_i} u_j^i v_k^i$$

est l'estimation d'ordre  $q$  de  $n_{jk}$  alors sous certaines conditions ( $n$  grand, modèle multinomial...), on montre que

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{(n_{jk} - \nu_{jk}^q)^2}{\nu_{jk}^q} \approx \sum_{i \geq q+1} \lambda_i$$

suit approximativement une loi  $\chi^2$  à  $(J - q - 1)(K - q - 1)$  degrés de liberté. On peut donc retenir  $q$  comme étant la plus petite dimension telle que cette quantité est inférieure à la valeur limite de cette loi.

### Modèle statistique

On suppose que chaque fréquence  $f_{jk}$  correspond à l'observation d'une probabilité théorique  $\pi_{jk}$  et on modélise donc  $\mathbf{T}$  par la distribution correspondante. Le modèle décrivant cette distribution permet d'expliquer la probabilité.

### Modèle log linéaire

Souvent, le nombre  $n$  est fixé a priori. La distribution conjointe des effectifs  $n_{jk}$  est alors conditionnée par  $n$  et est une loi multinomiale de paramètre  $\pi_{jk}$  et d'espérance  $n\pi_{jk}$ .

Par définition, les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si  $\pi_{jk} = \pi_j \pi_k$ . Dans le cas contraire, on peut écrire

$$\pi_{jk} = \pi_j \pi_k \frac{\pi_{jk}}{\pi_j \pi_k}$$

En passant au log, on linéarise en

$$\ln(\pi_{jk}) = \ln(\pi_j) + \ln(\pi_k) + \ln\left(\frac{\pi_{jk}}{\pi_j \pi_k}\right)$$

Ce modèle est saturé car il comporte autant de paramètres que de données. L'indépendance est vérifiée si le dernier terme de couplage est nul pour tout  $(j, k)$ . Les paramètres du modèle sont estimés en maximisant la log vraisemblance.

### Modèle de corrélation

Dans ce modèle, on écrit

$$\pi_{jk} = \pi_j \pi_k + \sum_{i=1}^q \sqrt{\lambda_i} u_j^i v_k^i$$

où  $\mathbf{u}^i$  (resp.  $\mathbf{v}^i$ ) sont les vecteurs propres de  $\mathbf{BA}$  (resp.  $\mathbf{AB}$ ),  $\lambda_i$  les valeurs propres associées (qui sont identiques pour les deux matrices), et  $q \leq \min(J - 1, K - 1)$ .

Les contraintes  $\sum_{j=1}^J u_j^i = \sum_{k=1}^K v_k^i = 0$  et  $(\mathbf{u}^i)^T \mathbf{D}_J^{-1} \mathbf{u}^i = (\mathbf{v}^i)^T \mathbf{D}_K^{-1} \mathbf{v}^i = \delta_{ii}$  (vecteurs propres orthonormés) permettent d'identifier les paramètres du modèle.

Les estimations des paramètres  $\pi_j, \pi_k, \lambda_i, u^i, v^i$  peuvent être réalisées par maximum de vraisemblance ou par moindres carrés.

### Exemple

On utilise ici des données open source du [gouvernement](#), présentant le résultat du premier tour des élections présidentielles de 2017.

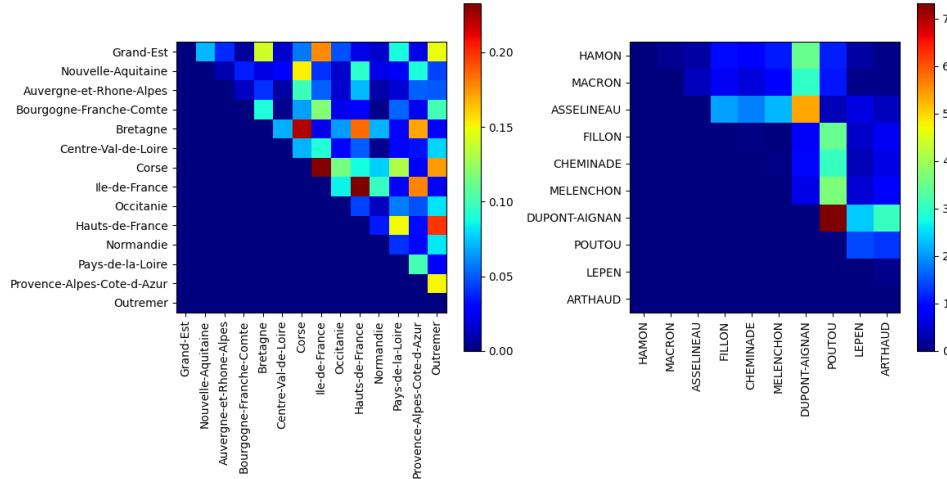
	Region	HAMON	MACRON	ASSELINEAU	FILLON	CHEMINADE
0	Grand-Est	151296	615775	30223	586390	6078
1	Nelle-Aquitaine	240175	851372	26667	602884	6264
2	AURA	256620	1026255	41352	846252	7602
3	Bourgogne-FC	87382	338187	14330	304387	2842
4	Bretagne	180827	581076	13419	380815	3400
5	Centre-Val-de-Loire	83552	323724	12075	300324	2882
6	Corse	5780	28528	965	39453	253
7	Ile-de-France	430404	1612816	64406	1249770	9796
8	Occitanie	216362	740037	28603	566045	5524
9	Hauts-de-France	166640	630300	26043	521389	5688
10	Normandie	113744	423075	14303	370188	3544
11	Pays-de-la-Loire	143491	575832	15529	516428	3731
12	PACA	113344	520909	25948	615455	4569
13	Outremer	101948	389440	18725	314017	3425

	Region	MELENCHON	LASSALLE	FILLON	DUPONT-AIGNAN	POTOU	LEPEN	ARTHAUD
0	Grand-Est	484810	30508	586390	182200	34468	825600	24272
1	Nelle-Aquitaine	703505	91915	602884	155600	49649	640228	21442
2	AURA	805846	53282	846252	215951	43530	867874	24670
3	Bourgogne-FC	276954	15843	304387	87263	18529	387658	11492
4	Bretagne	385736	19097	380815	87928	27092	306644	14296
5	Centre-Val-de-Loire	252307	13570	300324	82060	16282	329470	11365
6	Corse	21314	8711	39453	4462	1374	43041	495
7	Ile-de-France	1225311	36358	1249770	226266	45715	708340	23592
8	Occitanie	734223	75483	566045	135405	35219	762104	16777
9	Hauts-de-France	633322	22411	521389	160722	33653	1003221	29194
10	Normandie	362535	13900	370188	98957	23816	452702	15196
11	Pays-de-la-Loire	403454	16988	516428	109842	26340	364267	16018
12	PACA	515419	29551	615455	119025	21316	774791	10439
13	Outremer	256149	7748	314017	29505	17599	213553	13180

On décide dans l'analyse d'enlever le candidat LASSALLE, dont les votes sont concentrés dans les Pyrénées et en Corse (et qui introduit un biais dans l'étude).

A partir de ce tableau de données  $\mathbf{T}$ , on calcule les tableaux de fréquences en lignes et en colonnes, ainsi que les profils ligne et colonne moyens.

Comme en ACP, on s'intéresse à l'inertie du nuage de points, mais pour ce faire on utilise la distance du  $\chi^2$ . Avec cette métrique, la distance entre deux lignes (ou deux colonnes) ne dépend pas des poids respectifs des colonnes (ou lignes). Par exemple, les différents candidats obtiennent des scores très différents et l'usage de la métrique euclidienne aurait donné trop de poids aux candidats qui ont obtenu des scores élevés. De plus, la métrique du  $\chi^2$  possède la propriété d'équivalence distributionnelle : si on regroupe deux modalités lignes (colonnes), les distances entre les profils-colonne (lignes), ou entre les autres profils-lignes (colonnes) restent inchangées.

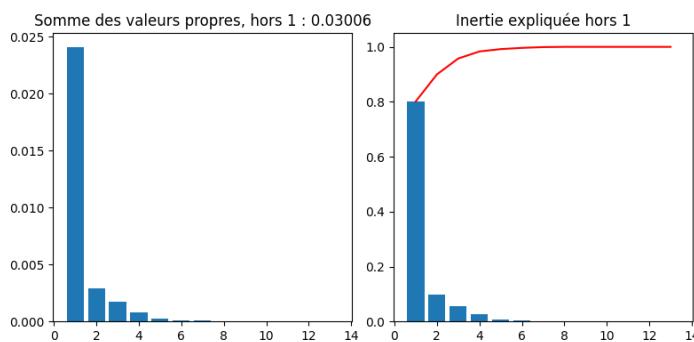
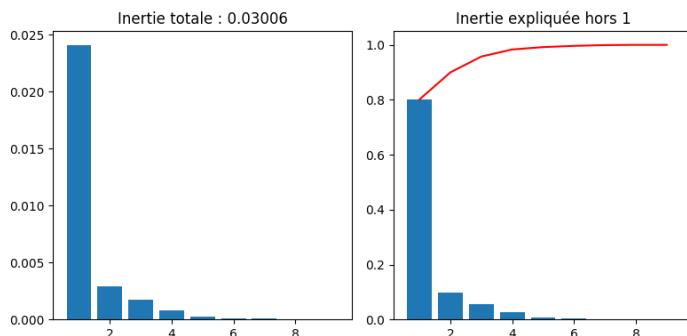


On peut également calculer les taux de liaisons, définis pour deux individus  $j$  et  $k$  par  $\frac{f_{jk} - f_j f_k}{f_j f_k}$ . Par exemple, le taux de liaison entre HAMON et Grand-Est est égal à -0.2003, tandis que le taux de liaison entre CHEMINADE et Nouvelle-Aquitaine est égal à 0.2068. Le taux de liaison s'interprète comme suit : le score du candidat dans la région est 20% moins élevé (ou 20.6% moins élevé) que le score théorique que l'on observerait si les votes étaient indépendants des régions.

Notons que  $f_{j,k}$  représente le poids théorique de chaque case du tableau des fréquences. La somme de ces coefficients vaut 1. La moyenne de la série des taux de liaisons pondérée par les  $f_{j,k}$  est nulle. De même, la variance de cette série avec la même pondération vaut  $\chi^2$ , et ici est égale à 0.0301.

On réalise ensuite une AFC, par analyse spectrale des matrices  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  et  $\mathbf{XX}^T$ , où  $\mathbf{X}$  est la matrice de terme général  $f_{jk} / \sqrt{f_j f_k}$ .

Le nombre de valeurs propres produites par la recherche des facteurs principaux est égal au minimum du nombre de lignes et du nombre de colonnes du tableau de contingence. La première valeur propre est systématiquement égale à 1, et n'est pas utilisée dans les résultats. Les autres valeurs propres sont des nombres positifs inférieurs à 1 et leur somme est égale à  $\chi^2$ .

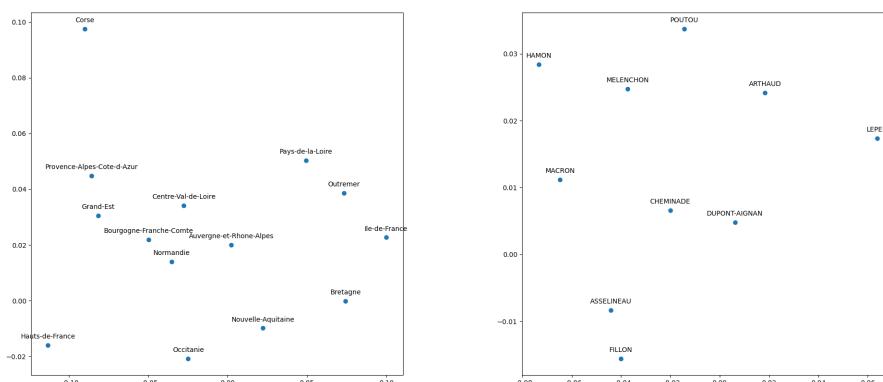


On utilise alors les vecteurs propres (axes factoriels) pour analyser les données lignes et colonnes. Pour chaque analyse, on reporte (illustré ici sur l'analyse en lignes) :

- La masse, qui rappelle les fréquences marginales des lignes c'est-à-dire le profil colonne moyen. Contrairement à l'ACP normée, dans laquelle chaque individu était affecté du même poids, les régions ont ici un poids dépendant de l'effectif total d'électeurs inscrits dans la région.
- La qualité qui indique les qualités de représentation des individus ligne sur les deux premiers axes factoriels : c'est la somme des carrés des composantes de chaque individu sur les 2 axes, normalisée par la somme des carrés des composantes sur tous les axes.
- La contribution de chaque individu à la formation de chaque axe factoriel

	Region	Masse	Coord1	Coord2	Qualité	contrib1	contrib2
0	Grand-Est	0.082561	-0.081478	0.030469	0.033810	0.1031	0.05
1	Nelle-Aquitaine	0.092573	0.022322	-0.009848	0.002607	0.0129	0.1404
2	AURA	0.116102	0.002463	0.020096	0.000032	0.0005	0.0074
3	Bourgogne-FC	0.042922	-0.049796	0.021913	0.012884	0.0203	0.0048
4	Bretagne	0.055616	0.074398	-0.000143	0.028325	0.0727	0.00599
5	Centre-Val-de-Loire	0.039694	-0.027564	0.034140	0.003982	0.0057	0.026
6	Corse	0.004089	-0.089963	0.097463	0.036278	0.0061	0.0528
7	Ile-de-France	0.157099	0.099907	0.022705	0.048773	0.3461	0.0099
8	Occitanie	0.090960	-0.024738	-0.020736	0.003126	0.0066	0.2115
9	Hauts-de-France	0.090114	-0.113101	-0.015944	0.061802	0.2215	0.1268
10	Normandie	0.052720	-0.035129	0.014011	0.006437	0.0116	0.0004
11	Pays-de-la-Loire	0.061053	0.049348	0.050417	0.012418	0.0311	0.1115
12	PACA	0.076388	-0.085523	0.044826	0.035070	0.1061	0.1766
13	Outremer	0.038108	0.073346	0.038647	0.026537	0.051	0.0222

On représente alors graphiquement les individus ligne et colonne sur le premier plan factoriel.



On en déduit alors l'analyse suivante (ici proposée sur les candidats) :

- Premier axe : Le Pen représente 67% de l'inertie de cet axe. Macron, à l'opposé en représente 19%. Clairement, cet axe oppose Le Pen à Macron, mais les autres candidats « les plus importants » ont un score du même signe que celui de Macron.

- Fillon représente 63% de son inertie et s'oppose à Hamon, Poutou et Mélenchon. Macron et Le Pen sont insignifiants sur cet axe. Cet axe représente l'opposition classique droite / gauche.
- Le Pen est placée assez loin de l'origine sur la représentation graphique: l'inertie de la modalité Le Pen (54%) est bien plus importante que sa masse (21%). Dit autrement, les scores de Le Pen présentent une grande variabilité selon les régions, plus élevée que celle des scores de Macron (inertie 16% pour une masse de 24,3%) ou encore Mélenchon (inertie 5%, inertie 19,8%). Les électeurs de Le Pen, même s'ils sont plus nombreux que lors des scrutins précédents, restent néanmoins répartis sur le territoire.
- Enfin, la première source de variation dans les votes est une opposition Le Pen / Macron, indépendante des oppositions droite / gauche traditionnelles.

## Analyse des correspondances multiples

Tandis que l'analyse factorielle des correspondances permet d'expliquer la liaison entre deux variables qualitatives, l'analyse des correspondances multiples (ACM) s'intéresse au cas où l'on dispose de  $p \geq 2$  variables. C'est l'équivalent de l'ACP pour les variables qualitatives.

### Notations

On dispose d'un tableau de données  $\mathbf{H} = (h_{ij})$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, où  $n$  est le nombre d'individus,  $p$  le nombre de variables qualitatives mesurées et pour  $i \in [1, n]$ ,  $j \in [1, p]$ ,  $h_{ij} \in \mathcal{M}_j$ ,  $\mathcal{M}_j$  étant l'ensemble des modalités de la  $j^e$  variable. Si  $m_j$  est le cardinal de  $\mathcal{M}_j$ , alors  $m = \sum_{k=1}^p m_k$  est le nombre total de modalités.

#### Definition 43 (Tableau disjonctif complet)

Le tableau disjonctif complet  $\mathbf{T}$  des données est un tableau  $n \times m$  tel que

$$(\forall i \in [1, n], j \in [1, m]) \quad T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ possède la modalité } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On déduit de ce tableau disjonctif le tableau de Burt correspondant,  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$ , qui rassemble les croisements deux à deux de toutes les variables, i.e tous les tableaux de contingence des variables deux à deux. Sur la diagonale de  $\mathbf{B}$  se trouvent les coefficients  $B_{ii} = n_i$ , donnant le nombre d'individus possédant la modalité  $i$ . Les autres coefficients  $B_{ij} = \mathbf{T}_{\bullet i}^T \mathbf{T}_{\bullet j}$  quantifient le nombre d'individus ayant les modalités  $i$  et  $j$ .

### Analyse

#### Tableau de contingence de l'ACM

En analyse des correspondances multiples, on traite  $\mathbf{T}$  comme un tableau de contingence. Les totaux en ligne sont alors égaux au nombre de variables  $p$ , les totaux en colonne correspondent au nombre d'individus ayant la modalité correspondant à la colonne traitée. Pour une colonne  $j$ , on note ce total  $n_j$ . Le total de tous les coefficients de  $\mathbf{T}$  vaut donc  $np$ .

Comme dans le cas de l'AFC, l'ACM considère les fréquences, les profils ligne et les profils colonne.

Pour les fréquences :

- $f_{ij} = T_{ij}/np$  est la fréquence conjointe et vaut donc  $1/np$  si l'individu  $i$  possède la modalité  $j$  et 0 sinon. On range ces coefficients dans une matrice  $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$
- le poids des lignes est constant et vaut  $1/n$ . On note alors  $\mathbf{a} = (\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^n$  le vecteur des poids des individus.
- le poids des colonnes vaut  $n_j/np$ , et est d'autant plus fort que la modalité  $j$  est fréquente. On note alors  $\mathbf{b} = (\frac{n_1}{np} \dots \frac{n_m}{np})^T \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des poids des modalités.

Comme en analyse factorielle des correspondances, on note  $\mathbf{D}_n = \text{diag}(\mathbf{a})$  et  $\mathbf{D}_m = \text{diag}(\mathbf{b})$ .

Pour les profils ligne et colonne :

- on lit dans  $\mathbf{T}$  le  $i^e$  profil ligne, considéré comme un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ , de composantes  $T_{ij}/p, j \in [1, m]$ . Ces profils sont rangés dans une matrice  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$  et on a  $\mathbf{A} = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{F}$ .
- on lit dans  $\mathbf{T}$  le  $j^e$  profil colonne, considéré comme un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , de composantes  $T_{ij}/n_j, i \in [1, n]$ . Ces profils sont rangés dans  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$  et on a  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{D}_m^{-1}$ .

L'ACM considère, comme l'AFC, deux nuages de points centrés :

- le nuage des  $n$  individus dans  $\mathbb{R}^m$ , i.e. les  $n$  lignes de la matrice  $\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{ab}^T)$ . Chaque individu est pondéré par  $1/n$
- le nuage des  $m$  modalités dans  $\mathbb{R}^n$ , i.e. les  $n$  lignes de la matrice  $(\mathbf{F} - \mathbf{ab}^T)\mathbf{D}_m^{-1}$ . Chaque modalité  $j$  est pondérée par  $n_j/np$ .

#### Distances entre individus et entre modalités

En analyse des correspondances multiples, on utilise la distance du  $\chi^2$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ :

- dans l'espace des individus, la métrique est  $\mathbf{D}_m^{-1}$ :

$$\chi^2(i, i') = (\mathbf{A}_{i\bullet} - \mathbf{A}_{i'\bullet})^T \mathbf{D}_m^{-1} (\mathbf{A}_{i\bullet} - \mathbf{A}_{i'\bullet}) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{f_{\bullet j}} \left( \frac{T_{ij} - T_{i'j}}{p} \right)^2 = \frac{n}{p} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} (T_{ij} - T_{i'j})^2 \quad \text{Deux individus sont proches s'ils possèdent les mêmes modalités, sachant que l'on donne plus de poids au fait que ces deux individus ont en commun une modalité rare ( $n_s$  petit).}$$

- dans l'espace des modalités, la métrique est  $\mathbf{D}_n^{-1}$ :

$$\chi^2(j, j') = (\mathbf{B}_{\bullet j} - \mathbf{B}_{\bullet j'})^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{B}_{\bullet j} - \mathbf{B}_{\bullet j'}) = n \sum_{i=1}^n \left( \frac{T_{ij}}{n_j} - \frac{T_{ij'}}{n_{j'}} \right)^2 \quad \text{et deux modalités sont proches si elles sont possédées par les mêmes individus.}$$

#### Remark 24

On a de plus  $\chi^2(j, \mathbf{a}) = \frac{n_j}{n} - 1$  et  $f_{\bullet j} \chi^2(j, \mathbf{a}) = \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{n_j}{n} \right)$ . Donc la distance d'une modalité au centre du nuage est d'autant plus grande que la modalité est rare et la part de l'inertie totale, due à une modalité est d'autant plus grande que la modalité est rare. On évite donc en pratique de conserver dans l'analyse les modalités trop rares.

De même, puisque  $\sum_{k \in \mathcal{M}_j} f_{\bullet k} \chi^2(k, \mathbf{a}) = \frac{1}{p} (m_j - 1)$ , la part de l'inertie totale, due à une variable  $j$  est d'autant plus grande que le nombre de modalités de cette variable est grand. Là aussi, on évite en pratique de conserver dans l'analyse des variables ayant des nombres de modalités trop différents.

## Principe de l'ACM

L'analyse en composantes multiples consiste alors à appliquer l'analyse factorielle des correspondances du tableau des contingences  $\mathbf{T}$ , c'est-à-dire effectuer une ACP pondérée des nuages des point-individus et des point-modalités.

Une différence notable vient cependant de l'interprétation de l'inertie de ces nuages de points individus ( $I(\mathbf{A})$ ) et modalités ( $I(\mathbf{B})$ ). En AFC, on pouvait interpréter statistiquement cette inertie en terme de  $\chi^2/n$  mesurant l'indépendance entre les deux variables qualitatives. Ici, ce n'est plus le cas puisque l'on peut montrer que  $I(\mathbf{A}) = I(\mathbf{B}) = m/p - 1$ . L'inertie dépend donc du nombre moyen  $m/p$  de catégories par variable.

### Remark 25

Les anglo-saxons considèrent que l'ACM consiste à effectuer l'analyse factorielle des correspondances du tableau de Burt  $\mathbf{T}^T \mathbf{T}$ , matrice symétrique de taille  $m$ . Les profils ligne et colonne sont alors identiques et correspondent aux modalités que l'on veut analyser. On ne peut donc pas effectuer d'analyse des individus.

## Interprétation des résultats

### Inertie expliquée

L'inertie totale, égale comme nous l'avons vu à  $m/p - 1$  se calcule également comme la somme des valeurs propres  $\lambda_1 + \dots + \lambda_r$ , où  $r = \min(n-1, m-p)$  est le nombre de valeurs propres non nulles issues de l'ACP. La part d'inertie expliquée par l'axe  $z$  est alors  $\lambda_z / (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$ . En revanche, point important, le nombre d'axes retenus pour l'interprétation ou le recodage ne peut pas être choisi à partir de ces pourcentages d'inertie expliquées, contrairement à l'ACP.

### Contributions et représentation

En reprenant les résultats de l'ACP, on montre que :

- les individus les plus excentrés sur les plans factoriels sont ceux qui contribuent le plus
- les modalités les plus excentrées ne sont pas nécessairement celles qui contribuent le plus. En effet, leur contribution dépend de leur fréquence.
- la contribution d'une variable qualitative  $j$  à un axe  $z$  donne une idée de la liaison entre cette variable et la composante principale correspondant à  $z$
- une représentation graphique consiste alors à représenter les variables qualitatives sur un plan factoriel  $(z, z')$  : on propose en abscisses (respectivement ordonnées) les contributions des variables à l'axe  $z$  (resp.  $z'$ )
- on évalue la qualité de la représentation de la même manière qu'en ACP, à l'aide des cosinus carrés. Si deux individus sont bien projetés alors s'ils sont proches en projections, ils sont effectivement proches dans leur espace d'origine et on peut alors interpréter leur proximité : deux individus se ressemblent (au sens de la distance du  $\chi^2$ ) s'ils ont choisi les mêmes modalités et ; deux modalités se ressemblent (en terme de  $\chi^2$ ) si elles sont possédées par les mêmes individus.

### Cas particulier $p=2$

Dans le cas  $p=2$ , on observe 2 variables ayant respectivement  $m_1$  et  $m_2$  modalités. On se retrouve donc dans le cas où l'ACP s'applique et on peut :

- soit analyser le tableau  $\mathbf{T} \in \mathcal{M}_{n, m_1+m_2}(\mathbb{R})$  par analyse en composantes multiples,
- soit analyser le tableau de contingence  $\mathbf{K} \in \mathcal{M}_{m_1, m_2}(\mathbb{R})$  par ACP.

Si on note  $Sp(\mathbf{K}) = (\mu_i)$  et  $Sp(\mathbf{T}) = (\lambda_i)$  alors on montre que  $\mu_r = (2\lambda_r - 1)^2$ . On déduit qu'à chaque valeur propre de l'ACP correspondent deux valeurs propres de l'ACM  $\lambda_r = \frac{1 \pm \sqrt{\mu_r}}{2}$ , et une relation entre les coordonnées factorielles des deux analyses

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_K \\ \mathbf{y}_K \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda_r = \frac{1 + \sqrt{\mu_r}}{2} \\ \mathbf{c}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_K \\ -\mathbf{y}_K \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda_r = \frac{1 - \sqrt{\mu_r}}{2} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_K$  sont les composantes principales des profils ligne et colonne de  $K$ . De là viennent deux constats :

- dans l'analyse en composantes multiples de 2 variables, on ne retient que les valeurs propres supérieures strictement à 1/2, les composantes correspondant aux valeurs propres inférieures se déduisent facilement
- Les pourcentages d'inertie expliqués par les axes en ACM sont souvent très faibles et ne peuvent donc pas être interprétés comme en AFC et en ACP.

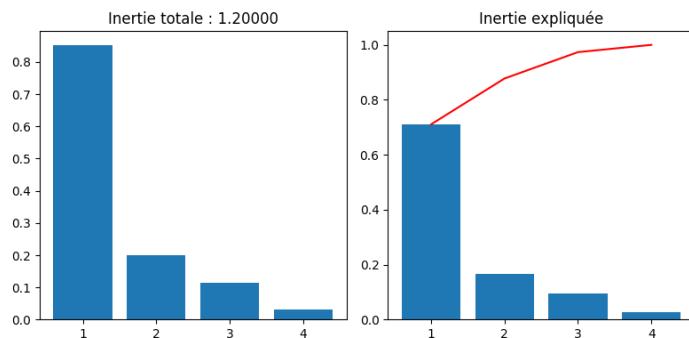
### Exemple

On souhaite évaluer l'effet de l'espèce de chêne sur des vins rouges vieillis en barrique. Un même vin a été vieilli dans six barriques différentes fabriquées avec deux types de chêne : les vins  $V_1, V_5$  et  $V_6$  ont été élevés avec le premier type de chêne, tandis que les vins  $V_2, V_3$  et  $V_4$  ont été élevés avec le second. Trois experts  $E_1, E_2, E_3$  ont ensuite choisi entre deux et cinq variables pour décrire les vins. Pour chaque vin et pour chaque variable, l'expert évalue l'intensité, codée soit comme une réponse binaire (i.e. fruité vs. non fruité), soit comme une réponse ternaire (i.e. pas fruité, un peu fruité, très fruité). On code le tout par un tableau disjonctif complet :

Expert	$E_1$					$E_2$					$E_3$						
	fruité		boisé		caféiné	fruité		grillé		vanillé		boisé		fruité		beurré	
	o	n	1	2	3	o	n	o	n	1	2	3	o	n	o	n	o
$V_1$	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
$V_2$	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
$V_3$	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
$V_4$	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
$V_5$	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
$V_6$	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1

L'objectif de l'étude est d'une part de proposer une typologie des vins et d'autre part de savoir s'il y a un accord entre les échelles utilisées par les experts.

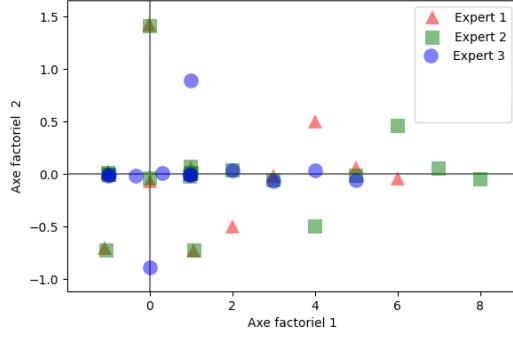
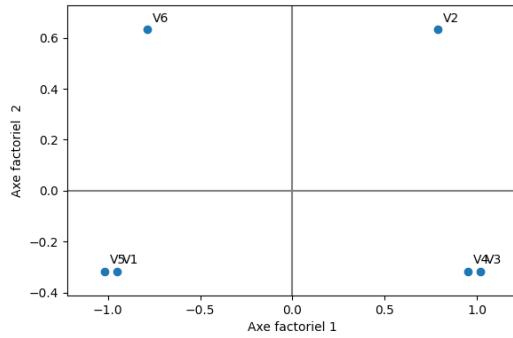
La figure suivante présente le résultat de l'analyse spectrale en lignes. Les tableaux qui suivent donnent les coordonnées des individus ( $S$ ), la qualité de leur représentation et leur contribution ( $C \times 10^3$ ) sur les trois premiers axes factoriels.



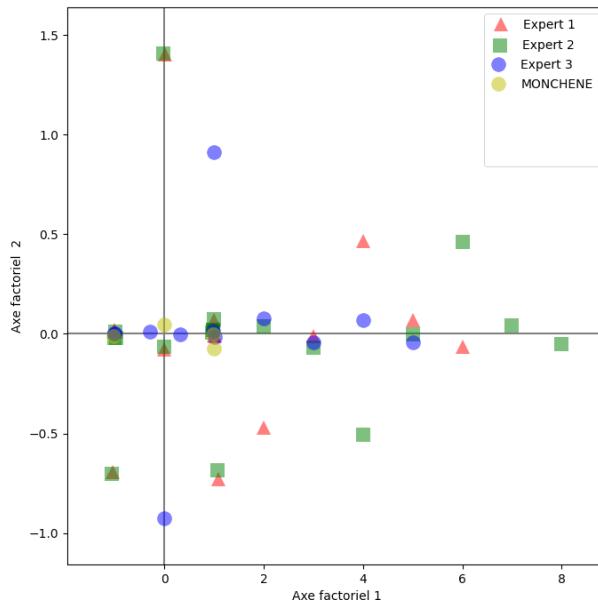
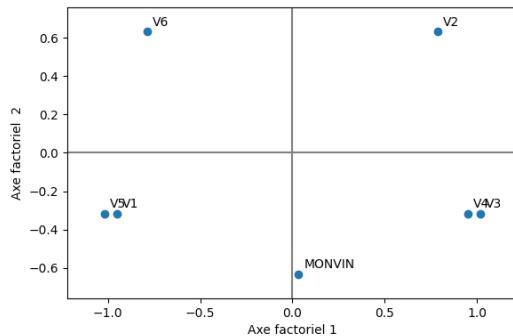
	Vin	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$
$S$	1	-0.951	0.787	1.018	0.951	-1.018	-0.787
	2	-0.316	0.632	-0.316	-0.316	-0.316	0.632
	3	0.43	0.387	0.103	-0.43	-0.103	-0.387
$\cos^2$	1	0.754	0.516	0.863	0.754	0.863	0.516
	2	0.083	0.333	0.083	0.083	0.083	0.333
	3	0.154	0.125	0.009	0.154	0.009	0.125
$C$	1	176.68	120.986	202.334	176.68	202.334	120.986
	2	83.333	333.333	83.333	83.333	83.333	333.333
	3	267.821	216.945	15.234	267.821	15.234	216.945

	$E_1$	$E_2$	$E_3$		$E_1$	$E_2$	$E_3$	
	boisé	vanillé	beurré		boisé	vanillé	beurré	
$S$	1 -0.99 0.99 0.07 -0.01 -1.07 0.99 -0.99 -0.99	2 -0.01 -0.01 -0.71 1.41 -0.71 0.00 -0.00 0.00	3 -0.06 0.06 -0.48 0.00 0.48 0.06 -0.06 -0.06	0.99 -0.99 -0.99	1.07 0.00 -0.07 -0.71 1.41 0.00 -0.00 0.00	0.99 -0.99 -0.99	-0.31 0.31 0.31 0.00 0.00 0.00 0.00	-0.99 0.99 0.99
	2 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	3 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00	0.48 0.00 -0.06 -0.9 0.9 0.06 -0.06 0.06	0.00 0.00 0.00	-0.9 0.9 0.9 0.06 0.06 0.06 -0.06	0.00 0.00 0.00
	3 0.00 0.00 0.00 0.25 1.00 0.25 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00
$\cos^2$	1 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99	2 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	3 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.99 0.99 0.99	0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99	0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99	0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99 0.99	0.99 0.99 0.99
	2 0.00 0.00 0.00 0.25 1.00 0.25 0.00 0.00	3 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00
	3 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00
$C$	1 176.68 120.986 202.334 176.68 202.334 120.986 176.68 120.986	2 83.333 333.333 83.333 83.333 333.333 83.333 83.333 333.333	3 267.821 216.945 15.234 267.821 15.234 216.945 267.821 216.945	0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 0.00

On peut alors projeter les individus lignes ou colonnes sur le premier plan factoriel.



On peut alors par exemple utiliser le type de chêne (MONCHENE) comme une variable supplémentaire (ou illustrative) à projeter sur l'analyse après coup. On peut également projeter après analyse un nouveau vin (MONVIN, donc une observation supplémentaire), testé par les experts. Lorsque ces derniers n'étaient pas sûrs de la façon d'utiliser un descripteur, un modèle de réponse (1/2, 1/2) est utilisé pour représenter la réponse.



```
try:
    import seaborn numpy matplotlib pandas mca
except ModuleNotFoundError:
    !pip3 install --quiet seaborn numpy matplotlib pandas mca
```

```
Input In [1]
import seaborn numpy matplotlib pandas mca
^
SyntaxError: invalid syntax
```

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import numpy as np
%matplotlib inline
```

## TP AFC / ACM

### Exercice 1 : Analyse Factorielle des Correspondances

Le fichier de données est un tableau d'effectifs, croisant l'origine sociale des sondés (CSP, version simplifiée) avec les médias d'informations utilisés

```
media = pd.read_table("./data/mediaCSP.txt", header=0, index_col=0,
delim_whitespace=True, encoding="utf-8")
print(media)
```

	Radio	Tel.	Quot.Nat.	Quot.Reg.	Press.Mag.	Press.TV
Prof						
Agriculter	96	118	2	71	50	17
Petit.Patr.	122	136	11	76	49	41
Prof.Cad.Sup	193	184	74	63	103	79
Prof.Int.	360	365	63	145	141	184
Employe	511	593	57	217	172	306
Ouvr.Qualif.	385	457	42	174	104	220
Ouvr.Non-Qual.	156	185	8	69	42	85
Inactif	1474	1931	181	852	642	782

===== Votre travail : =====

Vous avez à disposition un fichier [ca.py](#), permettant de réaliser les calculs relatifs à une analyse factorielle des correspondances. L'objectif est de répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la structure des moyens d'information choisis selon la CSP ? (profils lignes).
- La structure est-elle différente d'une CSP à l'autre ?
- Les médias sont-ils différents en termes de CSP ? (profils colonnes)
- Existe-t-il des relations entre CSP et médias (des CSP ont-elles une préférences pour certains médias ? Certains médias attirent-ils des catégories particulières de CSP ?)

## Analyse Factorielle des correspondances

On crée une instance de l'objet CA, que l'on applique sur le tableau des valeurs

```
from ca import CA
afc = CA(row_labels=media.index,col_labels=media.columns)
afc.fit(media.values)
```

```
CA(col_labels=Index(['Radio', 'Tel.', 'Quot.Nat.', 'Quot.Reg.', 'Press.Mag.', 'Press.TV'], dtype='object'),
   row_labels=Index(['Agriculteur', 'Petit.Patr.', 'Prof.Cad.Sup', 'Prof.Int.', 'Employe', 'Ouvr.Qualif.', 'Ouvr.Non-Qual.', 'Inactif'],
                  dtype='object', name='Prof'))
```

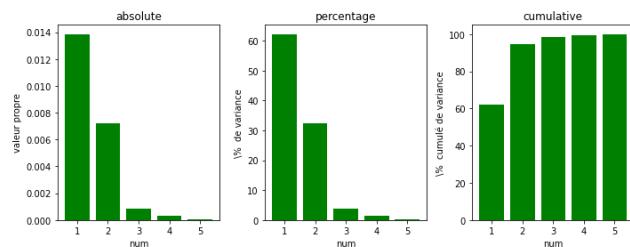
### Valeurs propres

En utilisant l'attribut `eig_` et la fonction `plot_eigenvalues` (ligne 294 du fichier `base.py`), afficher et interpréter les valeurs propres issues de l'analyse factorielle (nombre, contribution des facteurs...)

#TODO

```
[[1.38572868e-02 7.21068498e-03 8.24731391e-04 3.03851641e-04
 8.26930155e-05]
[6.21981806e+01 3.23650288e+01 3.70179190e+00 1.36383258e+00
 3.71166101e-01]
[6.21981806e+01 9.45632094e+01 9.82650013e+01 9.96288339e+01
 1.00000000e+02]]
```

#TODO



### Analyse des profils lignes

On affiche ici, pour chaque modalité ligne, la distribution des individus colonnes

```
data = np.apply_along_axis(arr=media.values, axis=1, func1d=lambda x:x/np.sum(x))
data_cum = data.cumsum(axis=1)
labels = list(media.index)
colors = plt.get_cmap('RdYlGn')(np.linspace(0.15, 0.85, data.shape[1]))

fig, ax = plt.subplots(figsize=(9.2, 5))
ax.invert_yaxis()
ax.xaxis.set_visible(False)
ax.set_xlim(0, np.sum(data, axis=1).max())

for i, (colname, color) in enumerate(zip(list(afc.col_labels_short_.values),
                                         colors)):
    widths = data[:,i]
    starts = data_cum[:,i] - widths
    ax.barh(labels, widths, left=starts, height=0.5, label=colname, color=color)
    xccenters = starts + widths / 2

    r, g, b, _ = color
    text_color = 'white' if r * g * b < 0.5 else 'darkgrey'
    for y, (x, c) in enumerate(zip(xccenters, widths)):

        ax.text(x, y, str(float(round(c,2))), ha='center', va='center',
                color=text_color)
ax.legend(ncol=len(afc.col_labels_short_.values), bbox_to_anchor=(0, 1),
          loc='lower left', fontsize='small')

plt.show()
```



En utilisant l'attribut `row_coord_`, afficher les coordonnées des modalités lignes par facteur. Calculer la moyenne pondérée et la variance des coordonnées des modalités lignes sur le premier facteur. Qu'obtenez-vous ?

#TODO

Prof	0	1	2	3	4
Agriculteur	0.166150	0.309612	-0.071838	-0.014433	0.021440
Petit.Patr.	0.068277	0.143151	-0.064422	0.020370	-0.035687
Prof.Cad.Sup	-0.429976	0.060873	-0.003021	0.016811	0.01233
Prof.Int.	-0.106603	-0.032597	-0.030898	-0.025333	-0.011955
Employe	0.015729	-0.095469	-0.005087	-0.020294	0.003462
Ouvr.Qualif.	0.043713	-0.101379	-0.019323	0.035411	-0.001730
Ouvr.Non-Qual.	0.117797	-0.094864	-0.039728	0.003493	0.022484
Inactif	0.032584	0.033395	0.025068	0.000553	-0.000935

{ #TODO

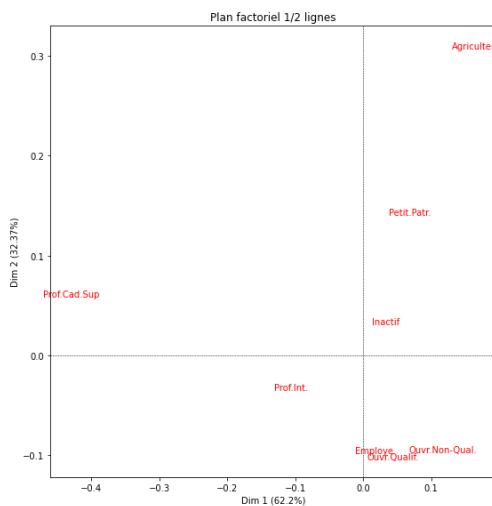
Moyenne : 1.3877787807814457e-17  
 Variance : 0.013857286816774693

Moyenne : 1.3877787807814457e-17 égale à 0

Variance : 0.013857286816774693 égale à la valeur propre associée

En utilisant la fonction mapping\_row (ligne 389, fichier [base.py](#)), représenter les individus lignes dans le premier plan factoriel (qui restitue 94.5% de l'information disponible). Analyser le résultat

{ #TODO



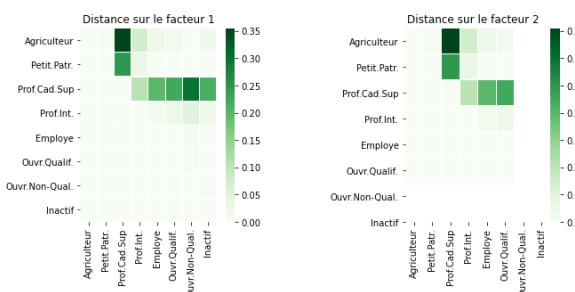
### Calcul de la distance du $\chi^2$

La distance du  $\chi^2$  entre les modalités lignes dans l'espace initial devient distance euclidienne dans l'espace factoriel. Comme en ACP, la restitution est parfaite lorsque tous les facteurs sont pris en compte, et approchée si une partie est utilisée. La précision dépend alors d'une part de la qualité de restitution du repère factoriel choisi, d'autre part de la qualité de représentation des modalités impliquées dans le calcul (les  $\cos^2$ ).

```
f,ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,4))

for l in range(0,2):
    # Distances entre modalités sur le l-eme facteur
    plt.subplot(1,2,l+1)
    distPairesLigF1 = np.zeros(shape=(data.shape[l],data.shape[l]))
    for i in range(data.shape[l]-1):
        for j in range(i+1,data.shape[l]):
            distPairesLigF1[i,j] = np.sum((afc.row_coord_[i,0]-
afc.row_coord_[j,0])**2)

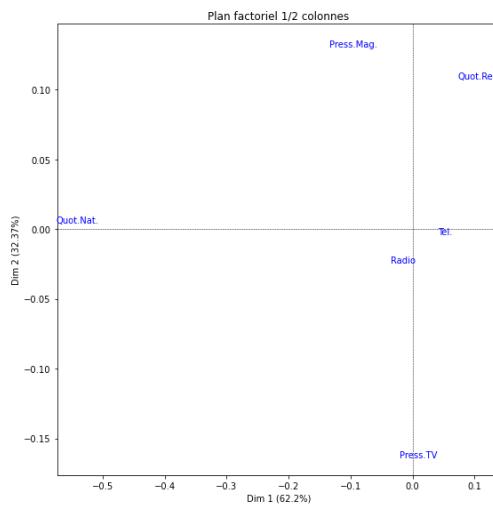
    sns.heatmap(distPairesLigF1,vmin=0,vmax=np.max(distPairesLigF1),linewidth=0.1,cmap
= 'Greens',xticklabels=media.index,yticklabels=media.index)
    plt.title("Distance sur le facteur "+str(l+1))
    f.subplots_adjust(wspace=0.9)
```



### Analyse des profils colonnes

Faire la même analyse sur les profils colonnes. Interpréter les résultats

{ #TODO



#### Analyse de l'association lignes-colonnes

Au-delà de la comparaison des profils, l'intérêt majeur de l'AFc est d'identifier les associations entre les modalités lignes et colonnes : est ce que les agriculteurs s'informent plus par la radio que les autres ? Est ce que la presse magazine attire plus les cadres ?

Avant de s'intéresser aux relations entre les modalités, il faut déjà vérifier qu'il existe bien une liaison exploitable entre les variables en ligne et colonne du tableau de contingence. La statistique du  $\chi^2$  de l'écart à l'indépendance permet de le faire

Faire un test du  $\chi^2$  (voir le cours statistiques bivariées), en utilisant la fonction `scipy.stats.chi2.cdf` du module `scipy`. Conclure.

`#TODO`

`p= 0.0`

Le test conduit au rejet de l'hypothèse nulle : les variables lignes et colonnes sont donc manifestement fortement liées.

Pour approfondir la nature des relations entre les modalités lignes et colonnes du tableau, on peut calculer l'indice d'attraction / répulsion, défini par \$

$$\frac{P(Y=y_k, X=x_l)}{P(Y=y_k)P(X=x_l)}$$

où  $x_l$  et  $y_k$  sont les profils ligne et colonne. En pratique, cet indice est calculé comme le rapport entre les effectifs observés et théoriques : s'il est supérieur à 1, il y a une attraction ; sinon il y a répulsion entre les modalités.

Calculer cet indice, effectuer un test du  $\chi^2$  et conclure.

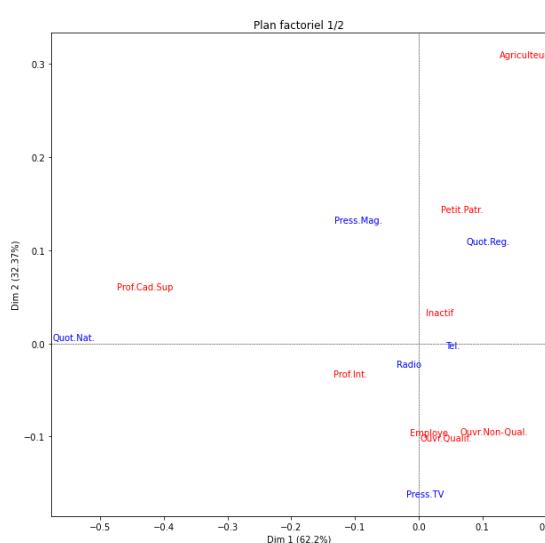
`#TODO`

`p= 0.0`

#### Représentation simultanée lignes/colonnes

En utilisant la fonction `mapping` (ligne 329 du fichier `base.py`), projeter sur le premier plan factoriel les individus ligne et colonne. Interpréter.

`#TODO`



Comme en ACP où il est possible de reconstituer approximativement les données originelles à partir des coordonnées factorielles des individus, on peut approcher le tableau des indices d'attraction-répulsion  $i_{kl}$  à partir des coordonnées factorielles des modalités lignes et colonnes : en reconstruisant à partir des  $P$  premiers facteurs, si  $F_{kp}$  et  $G_{lp}$  sont les coordonnées factorielles des modalités lignes et colonnes

$$i_{kl} = 1 + \sum_{p=1}^P \frac{F_{kp}G_{lp}}{\sqrt{\lambda_p}}$$

Ainsi :

- Deux modalités s'attirent (resp. se repoussent) si leurs coordonnées sont de même signe (resp. de signe contraire) sur les axes factoriels.
- Le trait est d'autant plus marqué que les valeurs des coordonnées sont élevées (en valeur absolue) c.-à-d. que les points sont situés aux extrémités des facteurs.
- Les coordonnées doivent être relativisées par le pouvoir de restitution du facteur ( $\lambda_h$ ).

Calculer l'approximation des inices d'attraction-répulsion à partir des données du premier facteur (P=1). Interpréter.

#TODO

	Radio	Tel.	Quot.Nat.	Quot.Reg.	Press.Mag.	Press.TV
Prof						
Agriculteur	1.018944	1.040396	0.159792	1.490461	1.342838	0.347085
Petit.Patr.	1.053787	0.975820	0.715205	1.298344	1.070936	0.681216
Prof.Cad.Sup	1.041910	0.825142	3.007112	0.672662	1.406970	0.820367
Prof.Int.	1.075237	0.905591	1.416404	0.856550	1.065063	1.057128
Employe	1.034487	0.997233	0.868608	0.868855	0.881064	1.191609
Ouvr.Qualif.	1.046731	1.032115	0.859544	0.935636	0.715455	1.150549
Ouvr.Non-Qual.	1.075500	1.059486	0.415165	0.940845	0.732672	1.127231
Inactif	0.944787	1.028150	0.873293	1.080089	1.041228	0.964165
Prof	Radio	Tel.	Quot.Nat.	Quot.Reg.	Press.Mag.	Press.TV
Agriculteur	0.978913	1.075205	0.236872	1.153604	0.866178	1.013767
Petit.Patr.	0.991322	1.030950	0.685943	1.063214	0.944927	1.005665
Prof.Cad.Sup	1.054571	0.805378	2.974881	0.602491	1.346314	0.964374
Prof.Int.	1.013530	0.951748	1.489626	0.901447	1.085861	0.991167
Employe	0.998004	1.007119	0.927759	1.014541	0.987332	1.001303
Ouvr.Qualif.	0.994452	1.019786	0.799228	1.040412	0.964793	1.003622
Ouvr.Non-Qual.	0.985050	1.053319	0.458958	1.108902	0.905123	1.009760
Inactif	0.995865	1.014749	0.850343	1.030123	0.973756	1.002700

## Exercice 2 : Analyse des Correspondances Multiples

Ici on s'intéresse à 6 traits de caractères de 27 races de chien, et on souhaite analyser le tableau par ACM

```
chiens = pd.read_table("./data/chiens.txt", header=0, index_col=0, delimiter="\t",
encoding="utf-8")
print(chiens)
```

Chien	Taille	Poids	Velocite	Intelligence	Affection	Agressivite
Beauceron	Taille++	Poids+	Veloc++	Intell+	Affec+	Agress+
Basset	Taille-	Poids-	Veloc-	Intell-	Affec-	Agress+
Berger All	Taille++	Poids+	Veloc++	Intell++	Affec+	Agress+
Boxer	Taille+	Poids+	Veloc+	Intell+	Affec+	Agress+
Bull-Dog	Taille-	Poids-	Veloc-	Intell+	Affec+	Agress-
Bull-Mastif	Taille++	Poids++	Veloc-	Intell++	Affec-	Agress+
Caniche	Taille-	Poids-	Veloc+	Intell++	Affec+	Agress+
Chihuahua	Taille-	Poids-	Veloc-	Intell-	Affec-	Agress-
Cocker	Taille+	Poids-	Veloc-	Intell+	Affec+	Agress-
Colley	Taille++	Poids-	Veloc++	Intell+	Affec+	Agress-
Dalmatien	Taille+	Poids-	Veloc+	Intell+	Affec-	Agress-
Doberman	Taille++	Poids-	Veloc++	Intell++	Affec-	Agress+
Dogue-All	Taille++	Poids++	Veloc++	Intell-	Affec-	Agress+
Epag.-Breton	Taille+	Poids-	Veloc-	Intell++	Affec-	Agress-
Epag.-FranÃ§ais	Taille++	Poids-	Veloc-	Intell+	Affec-	Agress-
Fox-Hound	Taille++	Poids-	Veloc++	Intell-	Affec-	Agress+
Fox-Terrier	Taille-	Poids-	Veloc+	Intell+	Affec+	Agress+
Gd-Bleu-Gasc	Taille++	Poids+	Veloc-	Intell-	Affec-	Agress+
Labrador	Taille+	Poids+	Veloc+	Intell+	Affec+	Agress-
Levrier	Taille+	Poids+	Veloc++	Intell-	Affec-	Agress-
Mastiff	Taille++	Poids++	Veloc-	Intell-	Affec-	Agress+
Pekinois	Taille-	Poids-	Veloc-	Intell-	Affec-	Agress-
Pointer	Taille++	Poids-	Veloc++	Intell++	Affec-	Agress-
St-Bernard	Taille++	Poids++	Veloc-	Intell+	Affec-	Agress+
Setter	Taille++	Poids-	Veloc++	Intell+	Affec-	Agress-
Teckel	Taille-	Poids-	Veloc-	Intell+	Affec+	Agress-
Terre-Neuve	Taille++	Poids++	Veloc-	Intell+	Affec-	Agress-

On récupère les variables actives : on s'intéresse à un sous-ensemble de cardinal  $k$  de variables du jeu de données (vous pouvez changer les variables utilisées).

```
var_chiens = chiens[['Taille','Velocite','Affection']]
print(var_chiens)
```

Chien	Taille	Velocite	Affection
Beauceron	Taille++	Veloc++	Affec+
Basset	Taille-	Veloc-	Affec-
Berger All	Taille++	Veloc++	Affec+
Boxer	Taille+	Veloc+	Affec+
Bull-Dog	Taille-	Veloc-	Affec+
Bull-Mastif	Taille++	Veloc-	Affec-
Caniche	Taille-	Veloc+	Affec+
Chihuahua	Taille-	Veloc-	Affec+
Cocker	Taille+	Veloc-	Affec+
Colley	Taille++	Veloc++	Affec+
Dalmatien	Taille+	Veloc+	Affec+
Doberman	Taille++	Veloc++	Affec-
Dogue-All	Taille++	Veloc++	Affec-
Epag.-Breton	Taille+	Veloc-	Affec+
Epag.-FranÃ§ais	Taille++	Veloc-	Affec+
Fox-Hound	Taille++	Veloc++	Affec-
Fox-Terrier	Taille-	Veloc-	Affec+
Gd-Bleu-Gasc	Taille++	Veloc-	Affec-
Labrador	Taille+	Veloc-	Affec+
Levrier	Taille++	Veloc++	Affec-
Mastiff	Taille++	Veloc-	Affec-
Pekinois	Taille-	Veloc-	Affec+
Pointer	Taille++	Veloc++	Affec-
St-Bernard	Taille++	Veloc-	Affec-
Setter	Taille++	Veloc++	Affec-
Teckel	Taille-	Veloc-	Affec+
Terre-Neuve	Taille++	Veloc-	Affec-

## Analyse des individus

Dans la suite, on travaille sur le tableau disjonctif complet des données (variables transformées en indicatrices 0/1).

```
#codage en 0/1 des propriétés des chiens : tableau disjonctif complet
X = pd.get_dummies(var_chiens,prefix='',prefix_sep='')
n,p = X.shape
print(X)
```

	Taille+	Taille++	Taille-	Veloc+	Veloc++	Veloc-	Affec+	\
Chien								
Beauceron	0	1	0	0	1	0	1	
Basset	0	0	1	0	0	1	0	
Berger All	0	1	0	0	1	0	1	
Boxer	1	0	0	1	0	0	1	
Bull-Dog	0	0	1	0	0	1	1	
Bull-Mastif	0	1	0	0	0	1	0	
Caniche	0	0	1	1	0	0	1	
Chihuahua	0	0	1	0	0	1	1	
Cocker	1	0	0	0	0	1	1	
Colley	0	1	0	0	1	0	1	
Dalmatien	1	0	0	1	0	0	1	
Doberman	0	1	0	0	1	0	0	
Dogue-All	0	1	0	0	1	0	0	
Epag.-Breton	1	0	0	1	0	0	1	
Epag.-FranÃ§ais	0	1	0	1	0	0	0	
Fox-Hound	0	1	0	0	1	0	0	
Fox-Terrier	0	0	1	1	0	0	1	
Gd-Bleu-Gasc	0	1	0	1	0	0	0	
Labrador	1	0	0	1	0	0	1	
Levrier	0	1	0	0	1	0	0	
Mastiff	0	1	0	0	0	1	0	
Pekinois	0	0	1	0	0	1	1	
Pointer	0	1	0	0	1	0	0	
St-Bernard	0	1	0	0	0	1	0	
Setter	0	1	0	0	1	0	0	
Teckel	0	0	1	0	0	1	1	
Terre-Neuve	0	1	0	0	0	1	0	
Affec-								
Chien								
Beauceron	0							
Basset	1							
Berger All	0							
Boxer	0							
Bull-Dog	0							
Bull-Mastif	1							
Caniche	0							
Chihuahua	0							
Cocker	0							
Colley	0							
Dalmatien	0							
Doberman	1							
Dogue-All	1							
Epag.-Breton	0							
Epag.-FranÃ§ais	1							
Fox-Hound	1							
Fox-Terrier	0							
Gd-Bleu-Gasc	1							
Labrador	0							
Levrier	1							
Mastiff	1							
Pekinois	0							
Pointer	1							
St-Bernard	1							
Setter	1							
Teckel	0							
Terre-Neuve	1							

#### ===== Votre travail : =====

Vous avez à disposition un fichier [mca.py](#), permettant de réaliser les calculs relatifs à une analyse des correspondances multiples Faire une analyse en composantes multiples de ces données et plus précisément :

- Déterminer l'importance des axes principaux calculés lors de l'ACP (attribut `eig_`, description ligne 74 de [mca.py](#)).
- Déterminer les contributions des points lignes à la variance des axes (attribut `row_contrib_`, description ligne 86 de [mca.py](#))
- Déterminer les contributions des points colonnes à la variance de l'axe (attribut `col_contrib_`, description ligne 90 de [mca.py](#))
- Déterminer la qualité de représentation des des points lignes et colonnes (attributs `row_cos2_` et `col_cos2_`, description lignes 94 et 97 de [mca.py](#))
- Tracer la projection des points lignes et colonnes (fonctions `mapping`, `mapping_row` et `mapping_col` de [mca.py](#)) sur les plans principaux
- Commenter l'ensemble de vos analyses

Calculer la distance entre individus : on utilise dans ce cas la distance du Chi2 sur modalités catégorielles (voir chapitre 1 du cours) qui met en valeur les différences entre les modalités rares

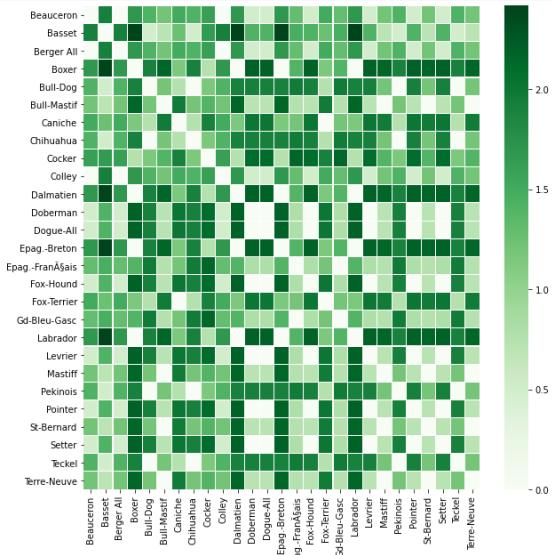
```
#profil individu moyen
ind_moy = np.sum(X.values, axis=0)/(n*p)

distchi2 = np.zeros(shape=(n,n))

#TODO : calcul de la distance

plt.figure(figsize=(10,10))
sns.heatmap(distchi2,vmin=0,vmax=np.max(distchi2),linewidth=0.1,cmap=
'Greens',xticklabels=chiens.index,yticklabels=chiens.index)
```

<AxesSubplot:>



Ainsi, par exemple, le Basset a plus de caractères en commun avec le Caniche qu'avec le Beauceron.

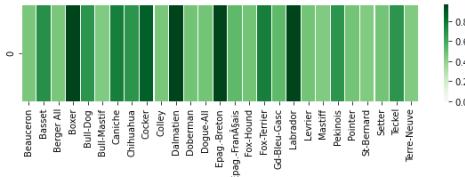
Calculer la distance à l'origine (profil moyen). Interpréter

```
#profil moyen des variables-modalités
moda_moy = np.ones(X.shape[0])/n

dist0 = np.zeros(shape=(1,n))

#TODO : calcul de la distance
sns.heatmap(dist0,vmin=0,vmax=np.max(dist0),linewidth=0.1,cmap='Greens',xticklabels=X.index)
```

<AxesSubplot:>



Ainsi par exemple, le Pointer est plus proche du chien moyen que le Cocker.

#### Analyse des colonnes

L'analyse des associations entre les modalités revient à travailler sur les profils colonnes. Le tableau de données est normalisé par les sommes en colonne. Le profil moyen est égal au poids des observations

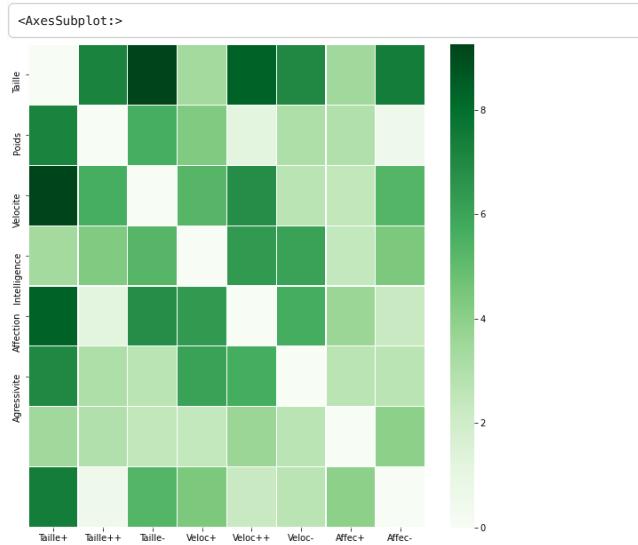
```
#somme en colonne
somme_col = np.sum(X.values, axis=0)

n,p = X.shape

#On utilise la distance du Chi2 sur modalités catégorielles qui met en valeur les
#différences entre les modalités rares
dist = np.zeros(shape=(p,p))

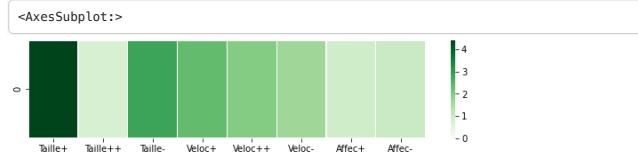
for i in range(p-1):
    for j in range(i,p):
        dist[i,j] = dist[j,i] = np.sum(n*((X.values[:,i]/somme_col[i]-
X.values[:,j]/somme_col[j])**2))

plt.figure(figsize=(10,10))
sns.heatmap(dist,vmin=0,vmax=np.max(dist),linewidth=0.1,cmap='Greens',xticklabels=X.columns,yticklabels=X.columns)
```



Calculer la distance à l'origine, qui donne une information sur la fréquence de la modalité dans la base. Elle est définie par la distance du  $\chi^2$  au profil moyen. Interpréter

```
#profil moyen des variables-modalités
moda_moy = np.ones(X.shape[0])/n
dist0 = np.zeros(shape=(1,p))
#TODO calcul distance
sns.heatmap(dist0,vmin=0,vmax=np.max(dist0),linewidth=0.1,cmap='Greens',xticklabels=X.columns)
```



Ainsi, Véloc+ est moins présent que Véloc- dans les exemples.

## ACM

On crée une instance de l'objet MCA (défini dans [mca.py](#)) et on estime le modèle des correspondances multiples sur les données  $X$

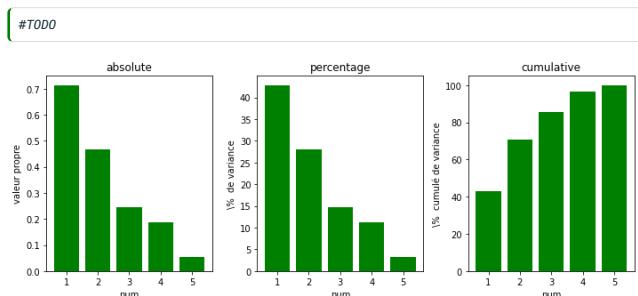
```
from mca import MCA
acm = MCA(row_labels=var_chiens.index, var_labels=var_chiens.columns)
acm.fit(var_chiens.values)

MCA(row_labels=Index(['Beauceron', 'Basset', 'Berger All', 'Boxer', 'Bull-Dog',
'Bull-Mastif',
'Caniche', 'Chihuahua', 'Cocker', 'Colley', 'Dalmatien', 'Doberman',
'Dogue-All', 'Epag.-Breton', 'Epag.-FranÃ§ais', 'Fox-Hound',
'Fox-Terrier', 'Gd-Bleu-Gasc', 'Labrador', 'Levrier', 'Mastiff',
'Pekinois', 'Pointer', 'St-Bernard', 'Setter', 'Teckel', 'Terre-Neuve'],
dtype='object', name='Chien'),
var_labels=Index(['Taille', 'Vélocité', 'Affection'], dtype='object'))
```

## Analyse des valeurs propres

L'objectif de l'Analyse des Correspondances Multiples est de décomposer l'information sur une succession d'axes factoriels orthogonaux. Le nouveau système de représentation est calculé pour préserver au mieux les distances entre individus. L nombre maximum de facteurs est  $p - k$ , où  $p$  est la somme du nombre de modalités des variables (le nombre de colonnes de  $X$ ), et  $k$  le nombre de variables initiales.

De même que pour l'analyse factorielle, calculer les valeurs propres et interpréter les facteurs.

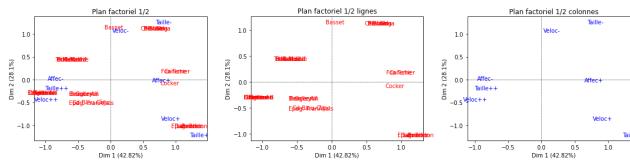


## Représentation graphique

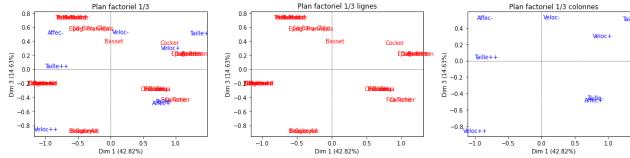
2 types de graphiques peuvent être réalisés :

- Les mappings classiques qui représentent les points lignes et colonnes sur un plan factoriel
- Des graphiques qui permettent d'interpréter rapidement les axes : on choisit un axe factoriel et on observe quels sont les points lignes et colonnes qui présentent les plus fortes contributions et cos2 pour cet axe

```
f, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(16,4))
acm.mapping(ax1, num_x_axis=1, num_y_axis=2)
acm.mapping_row(ax2, num_x_axis=1, num_y_axis=2)
acm.mapping_col(ax3, num_x_axis=1, num_y_axis=2)
f.subplots_adjust(wspace=0.52)
plt.tight_layout()
```



```
f, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(16,4))
acm.mapping(ax1, num_x_axis=1, num_y_axis=3)
acm.mapping_row(ax2, num_x_axis=1, num_y_axis=3)
acm.mapping_col(ax3, num_x_axis=1, num_y_axis=3)
f.subplots_adjust(wspace=0.52)
plt.tight_layout()
```



### Analyse du 1er axe

On utilise les formules de  $\cos^2$  pour mesurer la qualité de la projection des individus et des modalités sur les axes factoriels. En pratique, si deux individus sont bien projetés alors s'ils sont proches en projections, ils sont effectivement proches dans leur espace d'origine et on peut alors interpréter leur proximité :

- La proximité entre deux individus s'interprète en terme de distance (du  $\chi^2$ ) : deux individus se ressemblent s'ils ont choisis les mêmes modalités.
- La proximité entre deux modalités de deux variables différentes s'interprète en terme de distance (du  $\chi^2$ ) : deux modalités se ressemblent si elles sont possédées par les mêmes individus.

On peut exhiber les coordonnées des individus sur les facteurs. Par exemple sur le premier facteur

```
print(pd.DataFrame(acm.row_coord_[:,0], index=var_chiens.index))
```

	0
Chien	
Beauceron	-0.410650
Basset	0.049305
Berger All	-0.410650
Boxer	1.207263
Bull-Dog	0.689967
Bull-Mastif	-0.598234
Caniche	0.991235
Chihuahua	0.689967
Cocker	0.905995
Colley	-0.410650
Dalmatien	1.207263
Doberman	-1.051312
Dogue-All	-1.051312
Epag.-Breton	1.207263
Epag.-FranÃ§ais	-0.296967
Fox-Hound	-1.051312
Fox-Terrier	0.991235
Gd-Bleu-Gasc	-0.296967
Labrador	1.207263
Levrier	-1.051312
Mastiff	-0.598234
Pekinois	0.689967
Pointer	-1.051312
St-Bernard	-0.598234
Setter	-1.051312
Teckel	0.689967
Terre-Neuve	-0.598234

et de même pour les modalités

```
print(pd.DataFrame(acm.col_coord_[:,0], index=X.columns))
```

	0
Taille+	1.357789
Taille++	-0.830741
Taille-	0.810311
Veloc+	0.920019
Veloc++	-0.991708
Veloc-	0.156521
Affec+	0.781744
Affec-	-0.841878
\begin{tabular}{lrrr}	
\toprule	
\} & 0 & 1 & 2 \\	
\midrule	
Taille+ & 1.357789 & -1.208698 & 0.511177 \\	
Taille++ & -0.830741 & -0.183303 & 0.043597 \\	
Taille- & 0.810311 & 1.256148 & -0.458548 \\	
Veloc+ & 0.920019 & -0.854578 & 0.301665 \\	
Veloc++ & -0.991708 & -0.433463 & -0.855715 \\	
Veloc- & 0.156521 & 1.073779 & 0.528811 \\	
Affec+ & 0.781744 & -0.020376 & -0.484442 \\	
Affec- & -0.841878 & 0.021943 & 0.521706 \\	
\bottomrule	
\end{tabular}	

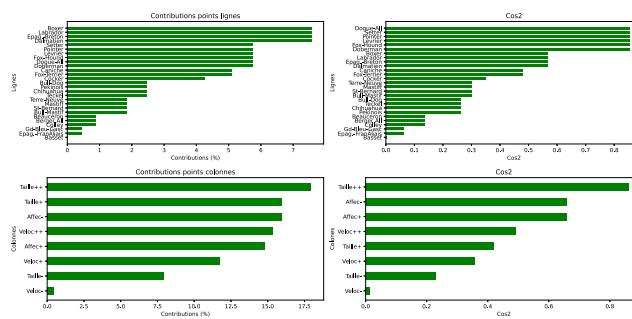
Calculer la moyenne des coordonnées pour chaque variable. Qu'observez-vous ?

```
#TODO
```

```
3.469446951953614e-18
-3.1803263726241462e-18
-6.938893903907228e-18
```

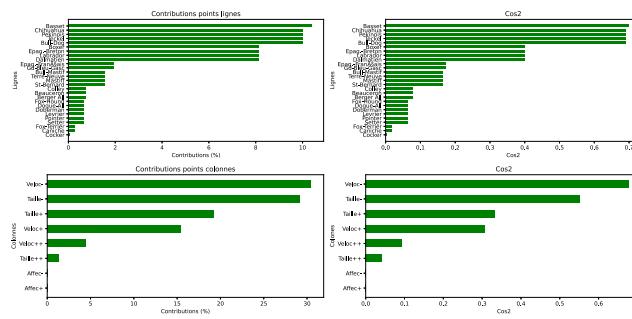
En utilisant les fonctions `plot_row_contrib` et `plot_row_cos2` (voir fichier [base.py](#)), interpréter la contribution des individus aux deux premiers facteurs.

#TODO



### Analyse du deuxième axe

#TODO



## Index