Домашнее задание по линалу №1

Упр 1

$$\begin{cases} -6x-9y+3z+2v=4 \\ -2x+3y+5z+2v=2 \\ -2x+6y+4z+3v=4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -9 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) :(-6)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \quad \text{I}: (A_1 \cdot 2) + A_2 \quad \text{II}: (A_1 \cdot 2) + A_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 6 & 4 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 9 & 3 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right) :(6)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 9 & 3 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 9 & 3 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} A2 \cdot (-9) \\ + \\ A3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -3 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \quad :(-3)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} A_1 \\ + \\ A_2 \cdot (1{,}5) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1{,}5 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} A1 \\ + \\ (A3 \cdot 1{,}5) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} A2 \\ + \\ \left(A3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{27} & \frac{13}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \left(-\frac{1}{9}\right) & \left(-\frac{5}{9}\right) \end{array}\right)$$

v — свободная переменная

$$\begin{cases} x - \frac{5}{6}v = -\frac{5}{3} \\ y + \frac{8}{27}v = \frac{18}{27} \\ z - \frac{1}{9}v = -\frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{6}v - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{8}{27}v + \frac{18}{27} \\ z = \frac{1}{9}v - \frac{5}{9} \end{cases}$$

ФСР

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{8}{27} \\ \frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{13}{27} \\ -\frac{5}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Возможно бесконечно много фундаментальных систем решений, заменяя v на $v+1$ или $v+2$ или $v+n$ $(n \in N)$. Поскольку v свободная переменная.

Упр 3

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B$ не существует т.к. разного размера

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 26 & 11 \\ 7 & (-1) \end{pmatrix}$

$1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2$
$4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 2$
$1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0$
$4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 0$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} (-2) & 7 & 7 \\ 17 & 23 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4$
$5 \cdot 1 + 3 \cdot 4$
$2 \cdot 1 + 0 \cdot 4$
$2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1$
$5 \cdot 4 + 3 \cdot 1$
$2 \cdot 4 + 0 \cdot 1$

Упр 2

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ (-1) \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ (-1) \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

методом подбора $0x_1 + 15x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0$
искомая система уравнений.

Упр 4

1) Очевидно, что сумма 2 квадратных верхнетреугольных матриц является верхнетреугольной матрицей.

2) При умножении кв. верхнетреугольной матрицы на $n \in \mathbb{N}$ получается верхнетреугольная матрица.

a) $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$ следует из коммутативности сложения $\mathbb{R}$

в) $u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$ —‖—
из ассоциативности сложения $\mathbb{R}$

c) нулевым вектором является матрица из нулей d) $A - A \cdot (-1)$

f) Ассоциативность умножения $\mathbb{R}$

g) Следует из дистрибутивности умножения $\mathbb{R}$

k) ——————— " ———————

e) при $n=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{базис}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n=10 \Rightarrow$ множители из 10 таблиц

Базисом будет множество верхнетреугольных матриц $n \times n$ у которых 1 элемент $\neq 0$, а все остальные $=0$

$\boxed{\text{Упр 5}}$ • Определим множество четной степени n в общем виде, где n – четное

$$\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} = a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{\frac{n}{2}} x^n$$

• введем операцию сложения и умножения на скаляр многочлен

•• сложение

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} + \sum_{i=1}^{n/2} b_i x^{2i}\right) = \sum_{i=1}^{n/2} (a_i + b_i) \cdot x^{2i}}_{\in V}$$

•• умножение на скаляр

$$\underbrace{\lambda \sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} = \sum_{i=1}^{n/2} (a_i \cdot \lambda) \lambda^{2i}}_{\in V}$$

• Проверим для введенных операций аксиомы:

a) $$\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} + \sum_{i=1}^{n/2} b_i x^{2i} = \sum_{i=1}^{n/2} b_i x^{2i} + \sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}$$

b) $$\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} + \left(\sum_{i=1}^{n/2} b_i x^{2i} + \sum_{i=1}^{n/2} c_i x^{2i}\right) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} + \sum_{i=1}^{n/2} b_i x^{2i}\right) + \sum_{i=1}^{n/2} c_i x^{2i}$$

Т.к n - чётное $\Rightarrow x \subset [0; +\infty)$

c) $$0 + \sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} = \sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} + 0 = \sum_{i=1}^{n/2} (a_i + b_i) x^{2i}$$

d) $$\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} - 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right) = 0$$

e) $$\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right) \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}$$

f) $\alpha\left(\beta\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right)\right) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}$

g) $(\alpha+\beta)\cdot\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i} = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right) =$

$\alpha\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right) + \beta\cdot\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right)$

h) $\alpha\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n/2} b_i x^{2i}\right) =$

$= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n/2} a_i x^{2i}\right) + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n/2} b_i x^{2i}\right.$

Базис: $x^2, x^4, x^6, \dots, x^n$

линейно-независимая система векторов. Если $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + \dots + \lambda_{\frac{n}{2}} x^n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n = 0$

Упр6

а) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 1 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 1 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 48 & 12 \\ 0 & 64 & 48 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 256, & 256, & 96 \\ 0, & 256, & 256 \\ 0, & 0, & 256 \end{pmatrix}$

$A^n =$

$A: 1 = a_1$

$A^2: 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = a_2$

$A^3: 4^2 \cdot 1 + a_2 \cdot 4 = a_3$

$a_k = 4^{k-1} \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 4$

$\underline{a_n = 4^{k-1} + 4a_{n-1}}$

при $n \geqslant 2$

$b_n = a_{n-1} \cdot 1 + b_{n-1} \cdot 4$

$\underline{b_n = a_{n-1} + 4 \cdot b_{n-1}}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 4^n & a_n & b_n \\ 0^n & 4^n & a_n \\ 0^n & 0^n & 4^n \end{pmatrix}$$

б) $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 27 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 81 & (108) & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n & b_n & c_n \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$d_n = (-3)^{n-1} + 3d_{n-1}$$

$$c_n = b_n + 3c_{n-1}$$

$$a_n = 2^{n-1} + 2a_{n-1}$$

$$b_n = (-3)^{n-1} - 3b_{n-1}$$

Упр 7 Не хочу делать. Устал.