Тервер №2, Домашняя работа

упр 1

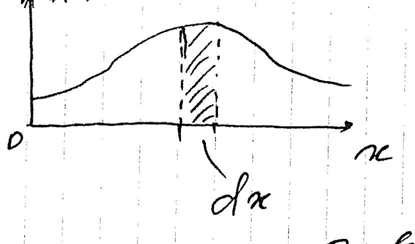
1) Да, т.к. разные пространства элементарных исходов могут давать одинаковую случайную величину.

2) $M(X+Y) = M_x + M_y$

3) Дисперсия суммы случайных величин всегда равна сумме их дисперсий, только если эти величины независимы.

4) Область (показатель) рассеивания вокруг матожидания.

5) Геометрически — это площадь прямоугольника, опирающегося на отрезке dx



Функция, площадь криволинейной трапеции которой равна вероятность попадания случайной величины в заданный диапазон.

6) 1, т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1$

7) Нет $f(x) \geq 0$

8) Нулю — нет
Единицы — нет

9) Нулю, т.к. $P(X=x) = \int_x^x f(u)\,du = 0$

Упр 4 Лампочка не загорится — p
$p \in \{0, 1\}$.

<u>Среднее:</u> $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X+Y)$

Рассмотрим 100 случайных величин
$|\Omega| = 2^{100}$

1 — лампа не загорелась. $\begin{cases} 1, & p \\ 0, & (1-p) \end{cases}$

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \ldots + \mathbb{E}(X_{100})$

$\Rightarrow (1 \cdot p) + (0 \cdot (1-p))$ — для X_i

<u>Ответ:</u> $\sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}(X_i) = 100p$

Упр 5

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = \left(1\cdot\frac{1}{6}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{6}\right)+\left(3\cdot\frac{1}{6}\right)+$$

$$+\left(4\cdot\frac{1}{6}\right)+\left(5\cdot\frac{1}{6}\right)+\left(6\cdot\frac{1}{6}\right)=$$

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

Упр 3

Распределение Бернулли подходит в общем виде для бинарной функции.

$$\begin{cases} 1, & \text{вер} = p \\ 0, & \text{вер} = (1-p) \end{cases}$$

$\cos(x)+2$	$\cos(1)+2$	$\cos(0)+2=3$
$\mathbb{P}$	p	$(1-p)$

$$\mathbb{E}(\cos(x)+2) = \left((\cos(1)+2)\cdot p\right)+\left(3\cdot(1-p)\right) =$$

$$= p\cdot\cos(1)+2p+3-3p = p\cos(1)-p+3$$

упр 6 1) Зачем делать регулировку, если % брака не меняется.

2) Среднее число — это матожидание

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \cdot p_i$$

Случайная величина — кол-во качественных деталей.

Рассмотрим на частном примере.

$p_0 = 2\%$ — деталь сразу сломанная

$p_1 = 98\% \cdot 2\%$ — вторая деталь сломанная

$p_2 = \underbrace{98\% \cdot 98\% \cdot 2\%}_{\text{т.к. события независимые.}}$ — третья деталь сломана

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \cdot i, \text{ где } p_i = (98\%)^i \cdot 2\%$$

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i\right)' = \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot x^{i-1}$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} x^i \qquad f'(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} i\cdot x^{i-1}$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f'(0,98)$$

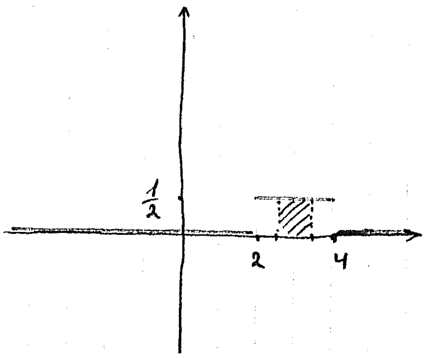
$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{(1-x)\cdot 1'-1\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}=f'(x)$$

10 000 0,98

$$f'(0,98)=\frac{1}{(1-0,98)^2}=\frac{1}{0,0004}=\frac{10000}{4}=2500$$

$$0,02\cdot 2500=50$$

|упр 7|



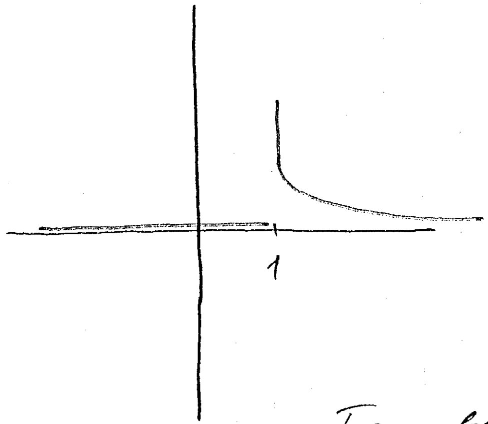
$S=a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ — вероятность $P(2,5<x<3,5)$

$$P(2,5<x<3,5)=\int_{2,5}^{3,5}\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}u\Big|_{2,5}^{3,5}=\frac{1}{2}(3,5-2,5)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Упр 8

$$\begin{cases} f(u) = \dfrac{c}{u^4}, & u \geq 1 \\ f(u) = 0, & u < 1 \end{cases}$$

а)



$f(u) \to 0$ при $u \to (+\infty)$

По свойству плотности:

1) плотность ≥ 0

2) Площадь под графиком $= 1$

$$\Rightarrow \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} f(u)\,du = 1 = \int_{1}^{(+\infty)} \frac{c}{u^4}\,du = 1$$

$$\int_{1}^{(+\infty)} c\,u^{(-4)}\,du = c \cdot \frac{u^{(-3)}}{(-3)} \Bigg|_{1}^{(+\infty)} = c \cdot \left(0 - \frac{1}{-3}\right) = c \cdot \frac{1}{3} =$$

б) $\mathbb{P}(X<3)$

$$\int_1^3 \frac{c}{u^4}\,du\ , \text{ где } c=3$$

$$\int_1^3 \frac{3}{u^4}\,du = \int_1^3 3\cdot u^{(-4)}\cdot du = 3\cdot \frac{u^{(-3)}}{(-3)}\Bigg|_1^3 =$$

$$= 3\cdot\left(\frac{3^{(-3)}}{(-3)} - \frac{1^{(-3)}}{(-3)}\right) = 3\left(\frac{\frac{1}{27}-1}{(-3)}\right) =$$

$$3\cdot\left(\frac{\left(-\frac{26}{27}\right)}{(-3)}\right) = 3\cdot\frac{26}{81} = \frac{26}{27}$$

б) $\mathbb{P}(X>7)$

$$\int_{(-\infty)}^{(+\infty)} \frac{3}{u^4}\cdot du = \int^{+\infty} 3\cdot u^{(-4)}\cdot du =$$

$$3\cdot\left(\frac{u^{(-3)}}{(-3)}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty\ 7} 3\cdot\left(0-\frac{7^{(-3)}}{(-3)}\right) = 3\left(0-\frac{\frac{1}{343}}{(-3)}\right) =$$

$$3\cdot\frac{1}{343\cdot 3} = \frac{1}{343}$$