Линейная алгебра №2

Домашняя работа

Упр 1 а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Характеристический многочлен $\varphi_A(\lambda) =$
$= |A - \lambda E|$, где E – единичная матрица,
λ – независимая переменная.

Собственные значения матрицы – корни её характеристического многочлена.

$$\varphi_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 5 & 2 & (-3) \\ 4 & 5 & (-4) \\ 6 & 4 & (-4) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & (-3) \\ 4 & (5-\lambda) & (-4) \\ 6 & 4 & (-4-\lambda) \end{vmatrix} = \left((5-\lambda)\cdot(5-\lambda)\cdot(-4-\lambda)\right) + (4\cdot 4\cdot(-3)) +$$

$$+(2\cdot(-4)\cdot 6)) - ((-3)\cdot(5-\lambda)\cdot 6 + (2\cdot 4\cdot(-4-\lambda)) + (4\cdot(-4)\cdot$$

$$= -196 + 15\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 202 - 26\lambda =$$

$$6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0 \,/\cdot(-1)$

$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$

$\lambda_1=1;\ \lambda_2=2;\ \lambda_3=3$

$\boxed{\lambda_1=1}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Av=\lambda v$

$Av=\lambda E v$

$(A-\lambda E)v=0$

$$\begin{cases} 4x+2y-3z=0 \\ 4x+4y-4z=0 \\ 6x+4y-5z=0 \end{cases}$$

I $4x+4y-4z=0 \,/:4$

$x+y-z=0$; $y=(-x+z)$

$x=(-y+z)$ $\quad -z=-x-y \,/(-1)$

$z=x+y$

II $4x+2y-3(x+y)=0$

$4x+2y-3x-3y=0$

$x-y=0$

$x=y$

(III) $z = 2x$

$6x + 4x - 5(2x) = 0$

$10x - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ - собственный вектор при $\lambda = 1$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & (-3) \\ 4 & 3 & (-4) \\ 6 & 4 & (-6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \\ 6x + 4y - 6z = 0 \mid :2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \mid (\cdot 4) \\ 4x + 3y - 4z = 0 \mid \cdot (3) \end{cases}$$

$(12x + 8y - 12z) - (12x + 9y - 12z) = 0$

$-y = 0 \mid \cdot (-1)$

$y = 0$

(II) $3x - 3z = 0$

$3x = 3z \mid :3$

$x = z \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - собственный вектор при $\lambda = 2$

$\boxed{\lambda = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & (-3) \\ 4 & 2 & (-4) \\ 6 & 4 & (-7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \\ 6x + 4y - 7z = 0 \end{cases}$$

(I) $4x + 2y - 4z = 0 \quad | :2$

$2x + y - 2z = 0$

$2x - 2z = (-y) \quad | \cdot (-1)$

$(-2x + 2z) = y$

(II) $2x + 2(-2x + 2z) - 3z = 0$

$2x - 4x + 4z - 3z = 0$

$-2x + z = 0$

$z = 2x$

(III) $y = (-2x + 4x) = 2x \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ - собственный вектор

B – диагональная матрица, где на диагонали стоят собственные значения

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

T – матрица переходов (из собственных векторов)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T^{(-1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 \times 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & (-1) & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \ominus =$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1) & 1 & \cdot(-1) & (-1) & 1 & 0 \\ 0 & (-1) & 0 & \cdot(-1) & (-2) & 0 & 1 \end{array} =$$

$$\cancel{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (-1) & 1 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & (-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & (-1) \end{array}\right) \begin{matrix} \ominus \\ \\ \ominus \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (-1) & 1 & (-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & (-1) \end{array}\right) \oplus =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & (-1) \\ 0 & 0 & 1 \cdot 2 & 1 & 1 & (-1) \end{array}\right) \ominus =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (-2) & (-1) & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & (-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & (-1) \end{array}\right) \boxed{\begin{matrix} (-2) & (-1) & 2 \\ 2 & 0 & (-1) \\ 1 & 1 & (-1) \end{matrix} = T^{(-1)}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2) & (-1) & 2 \\ 2 & 0 & (-1) \\ 1 & 1 & (-1) \end{pmatrix}$$

$$A = TBT^{(-1)}$$

$$A^{2018} = \left(TBT^{-1}\right)^{2018} = \underbrace{TB\cancel{T^{(-1)}}\cdot \cancel{T}B\cancel{T^{(-1)}}\cdot \ldots \cdot \cancel{T}BT^{(-1)}}_{2018\ \text{puta}}$$

$$= T\cdot B^{2018}\cdot T^{(-1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2018} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2018} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2) & (-1) & 2 \\ 2 & 0 & (-1) \\ 1 & 1 & (-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^{2018} & 3^{2018} \\ 1 & 0 & 2\cdot 3^{2018} \\ 2 & 2^{2018} & 2\cdot 3^{2018} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2) & (-1) & 2 \\ 2 & 0 & (-1) \\ 1 & 1 & (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2+2^{2019}+3^{2018}) & (-1+3^{2018}) & (2-2^{2018}-3^{2018}) \\ (-2+2\cdot 3^{2018}) & (-1+2\cdot 3^{2018}) & (2-2\cdot 3^{2018}) \\ (-4+2^{2019}+2\cdot 3^{2018}) & (-2+2\cdot 3^{2018}) & (4-2^{2018}-2\cdot 3^{2018}) \end{pmatrix}$$

Упр 1 б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & (-3) \\ 2 & 3 & (-2) \\ 4 & 4 & (-3) \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & (-3) \\ 2 & 3-\lambda & (-2) \\ 4 & 4 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$((4-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(-3-\lambda) + (2\cdot 4\cdot(-3)) \cdot (3\cdot(-2)\cdot 4)) -$$

$$-((-3)\cdot(3-\lambda)\cdot(4) + (3\cdot 2\cdot(-3-\lambda)) + ((-2)\cdot 4\cdot(4-\lambda))) =$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 4-1 & 3 & (-3) \\ 2 & 3-1 & (-2) \\ 4 & 4 & (-3-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{cases} 3x+3y-3z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \mid :2 \\ 4x+4y-4z=0 \end{cases}$$

I $x+y-z=0$

$z=x+y$ — Решение системы

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ - 2 собственных вектора при $\lambda = 1$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$\begin{cases} 2x+3y-3z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 4x+4y-5z=0 \end{cases}$$

$y=2z-2x$

$2x+3(2z-2x)-3z=0$

$2x+6z-6x-3z=0$

$-4x+3z=0$

$-4x = -3z \quad |:(-4)$

$x = \frac{3z}{4}$

$y = 2z - 2\left(\frac{3z}{4}\right)$

$y = 2z - \frac{6z}{4}$

$y = 2z - \frac{3z}{2}$

$y = \frac{z}{2}$

$4\left(\frac{3z}{4}\right) + 4\cdot\frac{z}{2} - 5z = 0$

$3z + 2z - 5z = 0$

Решение: $x = \frac{3z}{4}$, $y = \frac{z}{2}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ при $\lambda = 2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$T^{(-1)}$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\ \ominus \right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ \ominus$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\ \ominus \right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (-1) & 0 & 1 \end{matrix}\ \ominus$$

$$\left.\begin{array}{ccc}1&0&3\\0&1&2\\0&0&(-1)\end{array}\right|\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\(-1)&(-1)&1\end{array}\cdot(-1)$$

$$\begin{array}{c}\ominus\\ \times 2\end{array}\left.\begin{array}{ccc}1&0&3\\0&1&2\\0&0&1\end{array}\right|\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\1&1&(-1)_{\times 2}\end{array}\ominus$$

$$\begin{array}{c}\ominus\\ 3\times\end{array}\left.\begin{array}{ccc}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right|\begin{array}{ccc}1&0&0\\(-2)&(-1)&2\\1&1&(-1)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right\|\boxed{\begin{array}{ccc}(-2)&(-3)&3\\(-2)&(-1)&2\\1&1&(-1)\end{array} = T^{(-1)}}$$

$$A = TBT^{(-1)}$$

$$A = \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)&(-3)&3\\(-2)&(-1)&2\\1&1&(-1)\end{pmatrix}$$

$$A^{2018} = \left(TBT^{(-1)}\right)^{2018} = T\cdot B^{2018}\cdot T^{(-1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2018} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2) & (-3) & 3 \\ (-2) & (-1) & 2 \\ 1 & 1 & (-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\cdot 2^{2018} \\ 0 & 1 & 2\cdot 2^{2018} \\ 1 & 1 & 4\cdot 2^{2018} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2) & (-3) & 3 \\ (-2) & (-1) & 2 \\ 1 & 1 & (-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-2+3\cdot 2^{2018}) & (-3+3\cdot 2^{2018}) & (3-3\cdot 2^{2018}) \\ (-2+2\cdot 2^{2018}) & (-1+2\cdot 2^{2018}) & (2-2\cdot 2^{2018}) \\ (-4+4\cdot 2^{2018}) & (-4+4\cdot 2^{2018}) & (5-4\cdot 2^{2018}) \end{pmatrix}$$

Упр 3 ~~g~~ $q(x) = x^2+4y^2+z^2+2xy+10xz+6yz =$

$$\underbrace{(x+(y+5z))}_{x'}{}^2 - (y+5z)^2 + 4y^2 + z^2 + 6yz =$$

$$(x')^2 - (y^2+10yz+25z^2) + 4y^2 + z^2 + 6yz =$$

$$= (x')^2 - y^2 - 10yz - 25z^2 + 4y^2 + z^2 + 6yz =$$

$$=(x')^2-24z^2-4yz+3y^2=(x')^2-\Big(\underbrace{\sqrt{24}z+\frac{2y}{\sqrt{24}}}_{z'}\Big)^2-\Big(\frac{2y}{\sqrt{24}}\Big)^2\Big)+3y^2=(x')^2-\Big((z')^2-\frac{4y^2}{24_6}\Big)+3y^2=$$

$$=(x')^2-(z')^2+\frac{y^2}{6}+3y^2=(x')^2-(z')^2+\frac{19y^2}{6}=$$

$$=(x')^2-(z')^2+\Big(\sqrt{\frac{19}{6}}y\Big)^2=(x')^2-(z')^2+(y')^2=$$

$$=(x')^2+(y')^2-(z')^2$$

Матрица оригинальной формы:

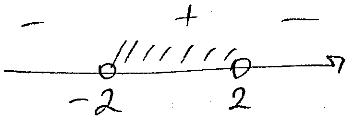
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(x)=x^2+4y^2+z^2+2\alpha xy+10xz+6y\text{[illegible]}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 5 \\ \alpha & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} Q_1=1 \\ Q_2=4-\alpha^2 \\ Q_3=4+15\alpha+15\alpha-(100+\alpha^2+9)= \end{cases}$$

главные угловые миноры

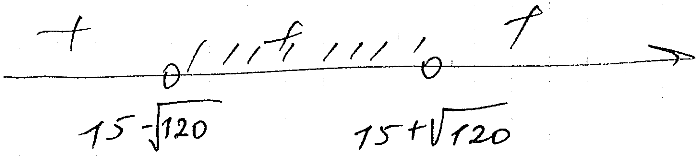
$$=4+30\alpha-109-\alpha^2=-105+30\alpha-\alpha^2=-\alpha^2+30\text{[illegible]}$$

$$4-\alpha^2>0$$
$$(2-\alpha)(2+\alpha)>0$$



$$\alpha\in(-2;2)$$

$$-\alpha^2+30\alpha-105>0$$
$$\alpha^2-30\alpha+105<0$$
$$D=900-4\cdot105=900-420=480$$
$$\alpha_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{480}}{2}=\frac{30\pm2\sqrt{120}}{2}=15\pm\sqrt{120}$$
$$(\alpha-15-\sqrt{120})(\alpha-15+\sqrt{120})<0$$



$$\alpha\in(15-\sqrt{120};\ 15+\sqrt{120})$$

Вывод: $\alpha\in\varnothing$ => форма не положительно определена ни при каких α

$Q>0$ => форма не отрицательно определена —||—

105

упр 4 $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

$f_x(x,y,z) = 3x^2 + 0 + 0 + 12y + 0 = 3x^2 + 12y$

$f_y(x,y,z) = 0 + 2y + 0 + 12x + 0 = 2y + 12x$

$f_z(x,y,z) = 0 + 0 + 2z + 0 + 2 = 2z + 2$

$f_{xx}(x,y,z) = 6x$

$f_{xy}(x,y,z) = 12$

$f_{yx}(x,y,z) = f_{xy}(x,y,z) = 12$

$f_{yy}(x,y,z) = 2$

$f_{xz}(x,y,z) = 0 = f_{zx}(x,y,z)$

$f_{yz}(x,y,z) = 0 = f_{zy}(x,y,z)$

$f_{zz}(x,y,z) = 2$

$$\begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 2y + 12x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

- $z=(-1)$
- $y=(-6x)$
- $3x^2+12(-6x)=0$

$3x^2-72x=0$

$3x(x-24)=0$

$x_1=0;\ x_2=24$

- $y_1=0$

$y_2=(-144)$

<u>При x_1</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

по критерию Сильвестра матрица не является положительно-определенной $\Rightarrow$ в т (x, y, z) — нет локального экстремума.

<u>При x_2</u>

$$\begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det|144|>0$

$\det\begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}>0$

$\det\begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}>0$, т.к. $(144\cdot 2\cdot 2)-(12\cdot 12\cdot 2)>0$

$\Rightarrow$ по критерию Сильвестра матрица положительно определена в т. $(x_2, y_2, z_2) = (24, (-144), (-1))$ локальной максимум.