Линал №2. Домашнее задание

Упр 1. Условие линейной зависимости двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\mu a + \lambda b = \bar{0},$$

где μ и $\lambda \in \mathbb{R}$ и хотя бы одно из них не равно 0.

Система линейных уравнений с 2 неизвестными:

$$\mu(5,3,8) + \lambda(4,3,1) = \bar{0}$$

$$(\mu\cdot 5, \mu\cdot 3, \mu\cdot 8) + (\lambda\cdot 4, \lambda\cdot 3, \lambda\cdot 1) = \bar{0}$$

$$(5\mu + 4\lambda, 3\mu + 3\lambda, 8\mu + 1\lambda) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 5\mu + 4\lambda = 0 \\ 3\mu + 3\lambda = 0 \\ 8\mu + 1\lambda = 0 \end{cases}$$

(1) $3\mu = (-3\lambda) \quad |:3$

$\mu = (-\lambda)$

(I) $5\cdot(-\lambda) + 4\lambda = 0$

$-5\lambda + 4\lambda = 0$

$-\lambda = 0 \mid \cdot(-1)$

$\lambda = 0$

III $8 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (5,3,8)$ и $(4,3,1)$ линейно-независимы.

Система лин. уравнений с 3-мя неизвестными

$\mu(5,3,8) + \lambda(4,3,1) + \nu(3,2,3 = \bar{0}$

$(5\mu, 3\mu, 8\mu) + (4\lambda, 3\lambda, 1\lambda) + (3\nu, 2\nu, 3\nu) = \bar{0}$

$(5\mu + 4\lambda + 3\nu,\ 3\mu + 3\lambda + 2\nu,\ 8\mu + \lambda + 3\nu) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 5\mu + 4\lambda + 3\nu = 0 \\ 3\mu + 3\lambda + 2\nu = 0 \\ 8\mu + \lambda + 3\nu = 0 \end{cases}$$

I $\lambda = -3\nu - 8\mu$

II $5\mu + 4(-3\nu - 8\mu) + 3\nu = 0$

$5\mu - 12\nu - 32\mu + 3\nu = 0$

$-27\mu - 9\nu = 0 \mid : (-9)$

$3\mu + \nu = 0 \Rightarrow \boxed{\nu = -3\mu}$

III $\lambda = -3(-3\mu) - 8\mu$

$\lambda = 9\mu - 8\mu$

$\lambda = \mu$

IV $3\mu + 3\lambda + 2\nu = 0$

$6\mu + 2(-3\mu) = 0$

$0 = 0 \quad \Rightarrow$

Существуют ненулевое решение этой системы уравнений, например, $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\nu = (-3)$ => Три вектор-строки линейно-зависимы.

Ранг матрицы равен 2.
Строки $(5, 3, 8)$ и $(4, 3, 1)$ – линейно-независимы

$\mu(5, 4, 3) + \lambda(3, 3, 2) = \bar{0}$

$$\begin{cases} 5\mu + 3\lambda = 0 \\ 4\mu + 3\lambda = 0 \\ 3\mu + 2\lambda = 0 \end{cases}$$

I $(5\mu + 3\lambda) - (4\mu + 3\lambda) = 0$

$\mu = 0$

II $3\mu + 2\lambda = 0$

$2\lambda = 0 \,|\, :2$

$\lambda = 0 \quad \Rightarrow$ столбцы $(5, 4, 3)$ и $(3, 3, 2)$ линейно-независимы.

Упр2 а) $A\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 - 4\cdot 4 = (-12)$ I

II
$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= (2) \\ A_{12} &= (-4) \\ A_{21} &= (-4) \\ A_{22} &= (2) \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = B$$

III
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = B^T \Rightarrow A^{(-1)} = \frac{1}{(-12)} \cdot B^T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(-12)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right) & \left(+\frac{1}{3}\right) \\ \left(+\frac{1}{3}\right) & \left(-\frac{1}{6}\right) \end{pmatrix}$$

б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

I Определитель $ad - bc = \det A$

II
$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= d \\ A_{12} &= (-c) \\ A_{21} &= (-b) \\ A_{22} &= a \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} d & (-c) \\ (-b) & a \end{pmatrix} = B$$

(III) $B^T = \begin{pmatrix} d & (-b) \\ (-c) & a \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & (-b) \\ (-c) & a \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & (-b) \\ (-c) & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{ad-bc}\right) & \left(\frac{-b}{ad-bc}\right) \\ \left(\frac{-c}{ad-bc}\right) & \left(\frac{a}{ad-bc}\right) \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot(-2) \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdot(-3) \\ 0 & 0 & 7 \end{array} \; (+) \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \; (+) \cdot(-3)$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{matrix}\;\begin{matrix} \\ \\ (:7) \end{matrix}\;\right|\;\begin{matrix} 7 & (-3) & 0 \\ (-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\;\begin{matrix} \\ \\ (:7) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\;\right|\;\begin{matrix} 7 & (-3) & 0 \\ (-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{matrix}$$

$$A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 7 & (-3) & 0 \\ (-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Упр 3}}$ a) $\det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (4\cdot 0) - (7\cdot(-1)) = 7$

б) $\det\begin{pmatrix} (-1) & 5 & 4 \\ 3 & (-2) & 0 \\ (-1) & 3 & 6 \end{pmatrix} = ((-1)\cdot(-2)\cdot 6) + (5\cdot 0\cdot(-1)) + (4\cdot 3\cdot 3) -$

$-(4\cdot(-2)\cdot(-1)) - (5\cdot 3\cdot 6) - ((-1)\cdot 0\cdot 3) =$

$12 + 0 + 36 - 8 - 90 = (-50)$

Упр 4

В координатах: $(2;4;(-2))$, $(1;2;(-1))$

$f(e_1) = 2f_1 + 4f_2 - 2f_3$

$f(e_2) = 1f_1 + 2f_2 - 1f_3 = f_1 + 2f_2 - f_3$

а) $\cdot(2;4;(-2)$

$\cdot(1;2;(-1))$

б) $f(b) = f(2e_1 - 3e_2) = f(2e_1) - f(3e_2) =$

$= 2f(e_1) - 3f(e_2) = 2(2f_1 + 4f_2 - 2f_3) - 3\cdot$

$(f_1 + 2f_2 - f_3) = 4f_1 + 8f_2 - 4f_3 - 3f_1 - 6f_2 + 3f_3$

$f_1 + 2f_2 - f_3$ в координатах $(1,2,(-1))$