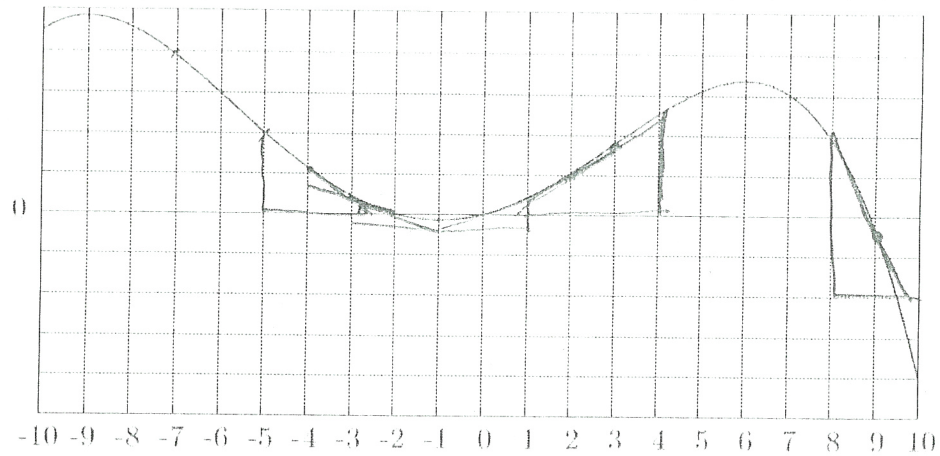
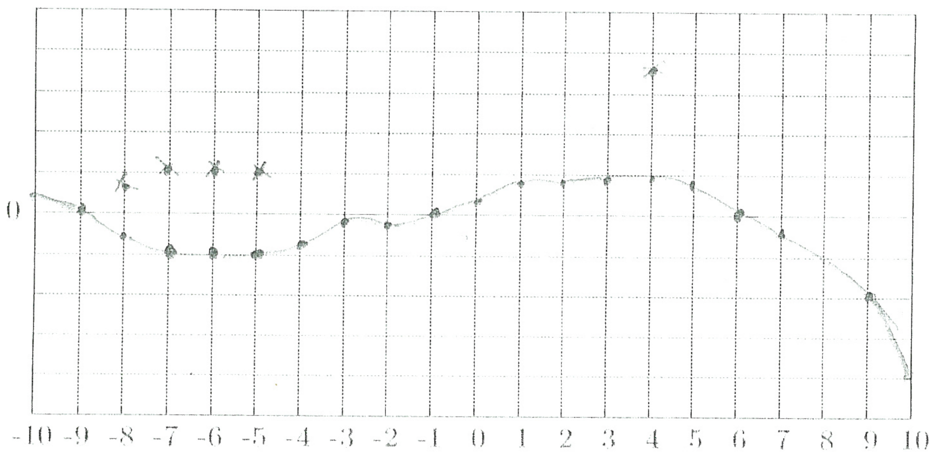
Интенсив Осень 2018 по матану №2

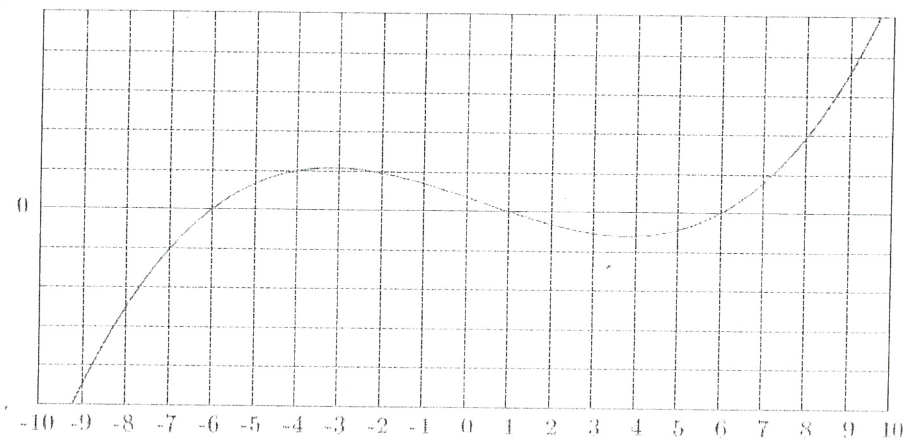
Задача №2

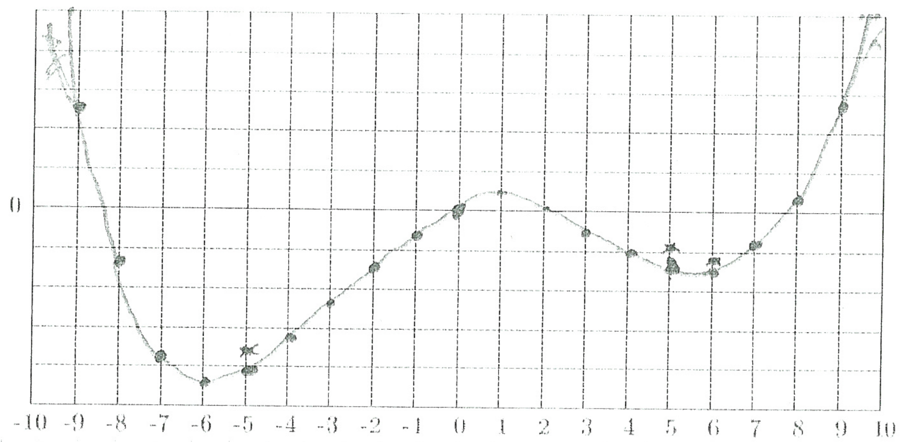
а)





в) Пусть $f(0)=0$





Упражнение № 5

а) $f(x) = \ln(\cos(x))$

$$f'(x) = (\ln(\cos(x)))' = (\cos(x))' \cdot \ln'(\cos(x)) =$$
$$= -\sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = -tg(x)$$

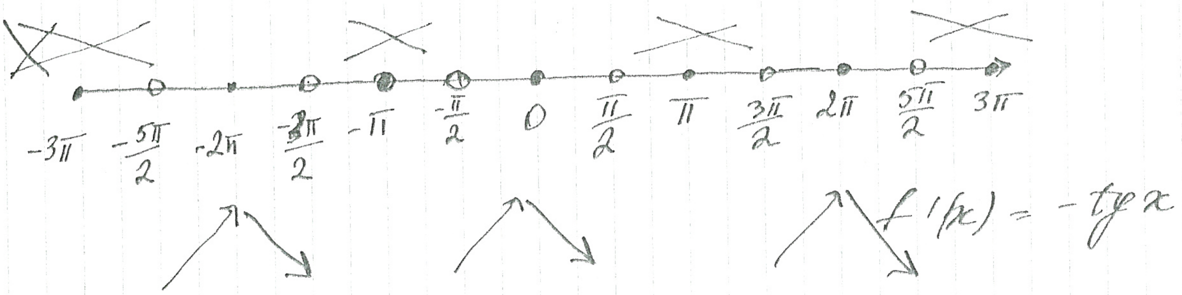
<u>Минимумы и максимумы</u>:

$f'(x)=0 \iff -tg(x)=0$

$-tg(x)=0 \quad |\cdot(-1)$

$tg(x)=0$

$x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



Минимумов нет.

Максимумы в $\ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$

Монотонность:

Возрастает в $\ldots, (-\frac{5\pi}{2}; -2\pi), (-\frac{\pi}{2}; 0), (2\pi; \frac{5\pi}{2}), \ldots$

Убывает в $\ldots, (-2\pi; -\frac{3\pi}{2}), (0; \frac{\pi}{2}), (2\pi; \frac{5\pi}{2}), \ldots$

Вертикальные асимптоты:

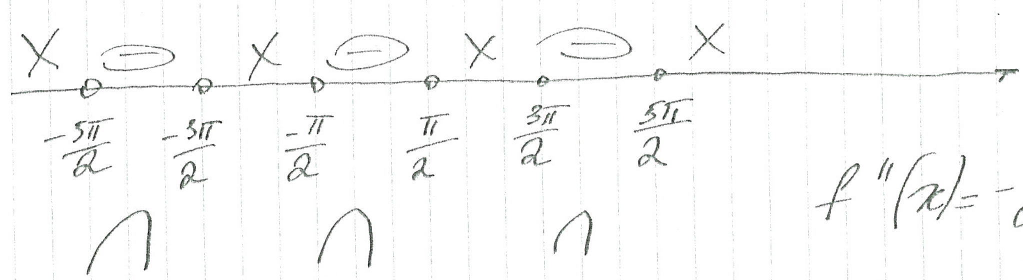
$\ldots, x=-\frac{5\pi}{2}, x=-\frac{3\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{5\pi}{2}, \ldots$

Горизонтальных асимптот нет.

$$f''(x) = (-tg(x))' = -\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$-\frac{1}{\cos^2(x)} = 0 \;\Big|\cdot(-1)$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$ Нет решений

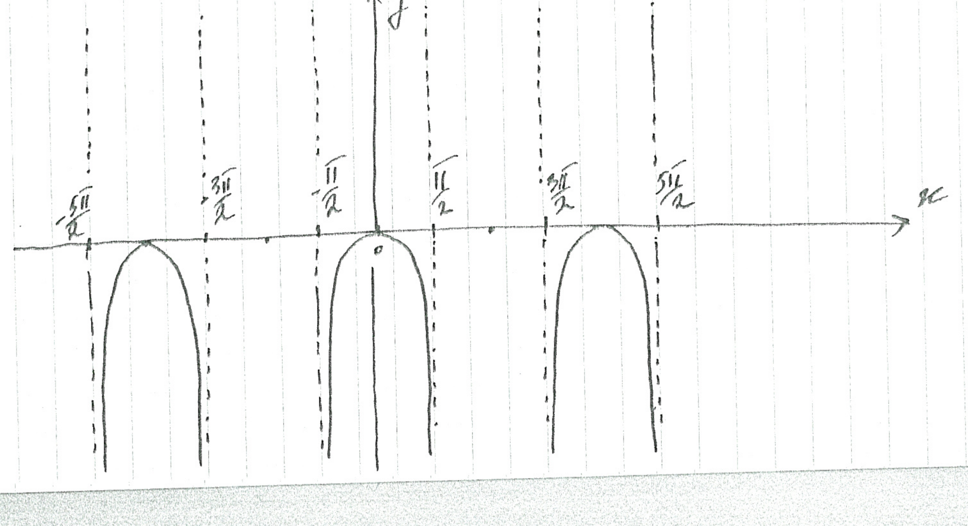


$$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2(x)}$$

Промежутки выпуклости:

$$\ldots, \left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right), \ldots$$

Макет графика:



в) $f(x) = \ln(x^4-1)$ $\quad D(f)=\{x: (x^4-1)>0\}$

$$f'(x) = (\ln(x^4-1))' =$$

$$= (x^4-1)' \cdot \ln'(x^4-1) =$$

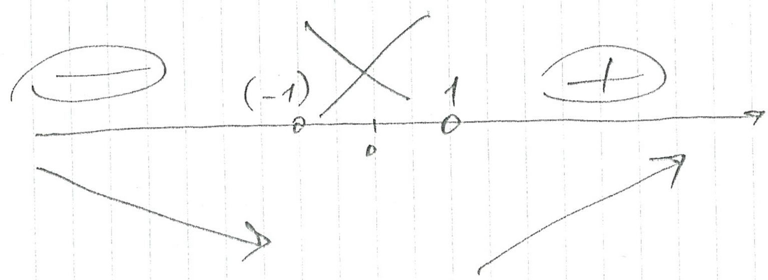
$$((x^4)'-(1)')\cdot \frac{1}{(x^4-1)} = 4x^3 \cdot \frac{1}{(x^4-1)} = \frac{4x^3}{x^4-1}$$

Минимум и максимум:

$$f'(x)=0 \iff \frac{4x^3}{x^4-1}=0$$

$4x^3=0$, только при $x=0$

Максимумов и минимумов нет.



Промежутки монотонности

- возрастание: $(1; +\infty)$
- убывание: $(-\infty; (-1))$

Вертикальные асимптоты

$x=(-1)$; $x=1$

Горизонтальных асимптот нет.

Промежутки выпуклости и вогнутости:

$$f''(x) = \left(\frac{4x^3}{x^4-1}\right)' = \frac{(x^4-1)\cdot(4x^3)' - (x^4-1)'\cdot(4x^3)}{(x^4-1)^2} =$$

$$\frac{(x^4-1)\cdot 12x^2 - 4x^3\cdot 4x^3}{(x^4-1)^2} = \frac{12x^6-12x^2-16x^6}{(x^4-1)^2} =$$

$$= \frac{-4x^6-12x^2}{(x^4-1)^2} = \frac{-4x^2(x^4+3)}{(x^4-1)^2}$$

$$\frac{-4x^2(x^4+3)}{(x^4-1)^2} = 0$$

$$-4x^2(x^4+3) = 0$$

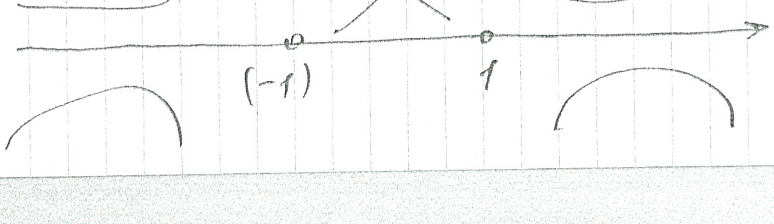
$$-4x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$x^4+3=0$$

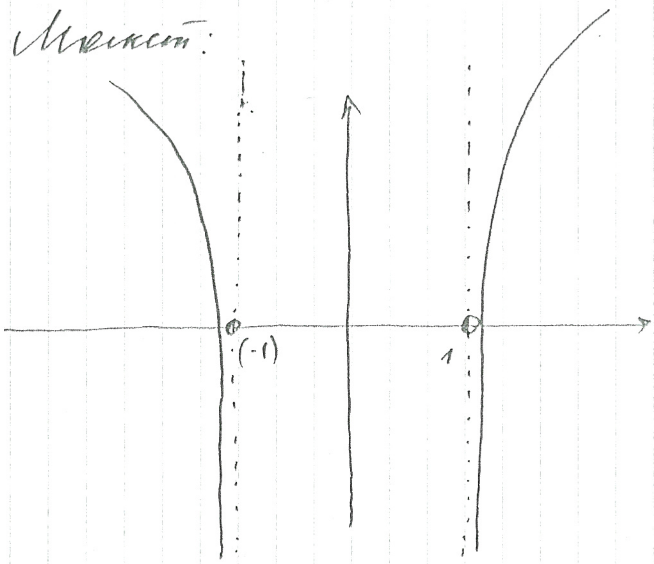
$$x^4 = (-3)$$

Нет решений



Вогнутость: $(-\infty; (-1)), (1; +\infty)$

Макет:



$\ln(x^4-1)=0$

$\ln=0$

при $(x^4-1)=1$

$x^4=2$

$\underbrace{x=\pm\sqrt[4]{2}}_{\text{точки пересечения } O(x)}$

Упражнение №6

Вспомним Даламбера, мой читатель :-)

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ - положительный числовой ряд.

Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)}}{a_n}=D$, то:

а) $D<1$ => ряд сходится (также при $D=0$)

б) $D>1$ => ряд расходится. Пример $D=\infty$

в) $D=\underline{1}$ => признак не дает ответа

В нашем случае $a_n = \frac{1}{n!}$

Обратимся к произвольному последующему члену $a_{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n+1}\right) \to 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \ \forall n$$

<u>Ответ:</u> ряд сходится по пункту а) признаков Даламбера.

$\boxed{\text{Задача № 1}}$

а) $\frac{x^2+3}{x-4} = O(x), \ x \to \infty$

Если $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C$, то $f(x) = O(g(x))$

$$\left|\frac{\left(\frac{x^2+3}{x-4}\right)}{x}\right| = \left|\frac{x^2+3}{x-4}\cdot\frac{x}{1}\right| = \left|\frac{(x^2+3)\cdot 1}{(x-4)\cdot x}\right| =$$

$$\left|\frac{x^2+3}{x^2-4x}\right| \leq 2 \quad x > x_0$$

Например $x=10 \Rightarrow \frac{10^2+3}{10^2-4\cdot 10} = \frac{103}{60} < 2$

$$\frac{x^2+3}{x^2-4x} \leq 2 \quad \Big|\cdot(x^2-4x)$$

$$(x^2+3) \leq 2(x^2-4x)$$

$$x^2+3 \leq 2x^2-8x$$

$3 \leq x^2-8x$ при $x > 10$

$$3 \leq \underbrace{x}_{10}\underbrace{(x-8)}_{2}$$

б) $\frac{x^2+3}{x-4}\cdot \sin x = O(x^k), x \to 0$

1) Рассмотрим $k<0 \Rightarrow \left(\frac{x^2+3}{x-4}\cdot \sin x \cdot x^{-k}\right) \to 0$

$\Rightarrow$ утверждение верно.

2) При $k=0$ $\left(\dfrac{\frac{x^2+3}{x-4}\sin x}{1}\right) \to 0$

3) При $k>1$

$$\frac{\frac{x^2+3}{x-4}\cdot \sin x}{x\cdot x^{(k-1)}} = \frac{\frac{x^2+3}{x-4}}{x^{(k-1)}}\cdot\frac{\sin x}{x} =$$

$$\frac{\left(\frac{x^2+3}{x-4}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{3}{-4}}{x^{(k-1)}\xrightarrow[x\to 0]{} ?}\cdot\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Рассмотрим: $x^{(k-1)}$ при $k\geq 1$ $\left(x^{(k-1)}\right)\to 0$

$x^{(k-1)}$ при $k<1$ $\left(x^{(k-1)}\right)\xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

Ответ: при $k>1$ не подходит, при $k\leq 1$ подходит

c) $5x^3 = o(x^2\sqrt{x}), x \to 0$

при $x<0$ — не определено =>
не правда, т.к. в окрестности 0 есть
отрицательные числа.

Задача № 7

$e^{\frac{1}{4}}$

Используем ряд Тейлора для e^x
Пусть $a=0$
Если $f(x)=e^x$, то $f(a)=e^a$

$$e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \ldots + \frac{e^0}{n!}(x-0)^n +$$

$$+ \frac{e^c}{(n+1)!}(x-0)^{(n+1)} =$$

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

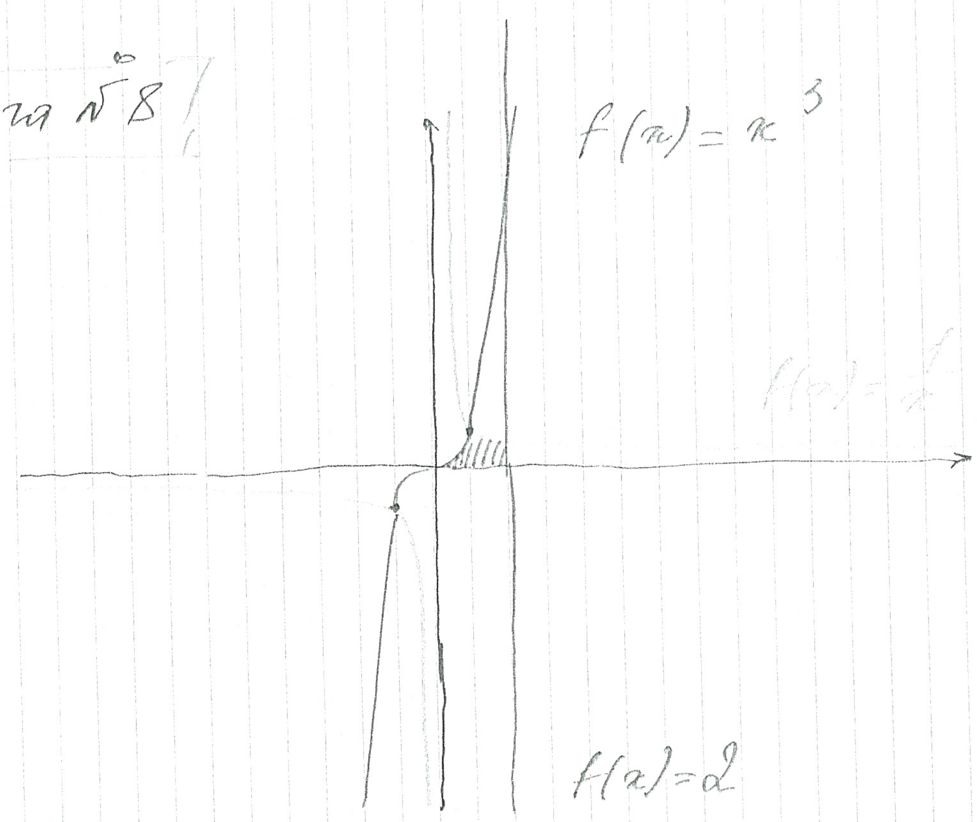
Подставим вместо x: $\frac{1}{4}$ =>

$$e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{(n+1)}$$

$$\underbrace{e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384}}_{\frac{493}{384} = 1,2838 \Rightarrow \underline{\underline{1,284}}} + \cancel{\frac{1}{6144} + e^c \ldots}$$

$$\frac{493}{384} = 1,2838 \Rightarrow \underline{\underline{1,284}}$$

$\boxed{\text{Задача №8}}$



$$S = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

$F(x) = \frac{x^4}{4}$

$F(1) - F(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

$F(x) = \ln x$

$F(2) - F(1) = \ln 2 - \ln 1 =$

$\ln 2 - \log_e 1 = \ln 2$

$$S = \frac{1}{4} + \ln 2$$