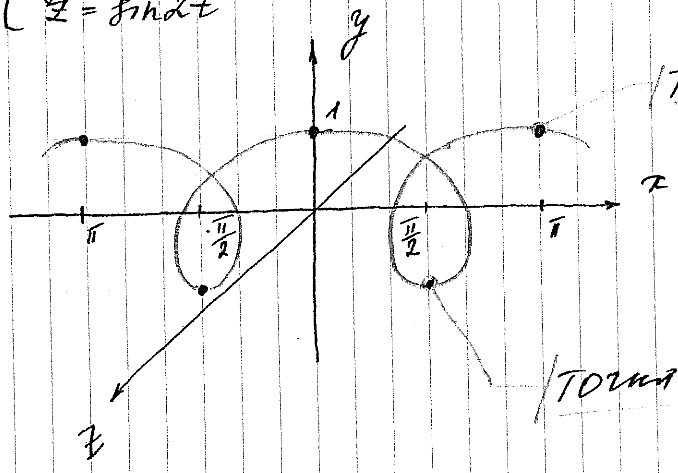
Интенсив, осень 2018
Домашнее задание № 3 по матану.
Задача № 2

а) $r(t) = (t, \cos 2t, \sin 2t)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cos 2t \\ z = \sin 2t \end{cases}$$




б,) $t = \pi$ $\quad r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$

$r'(t) = (t', (\cos 2t)', (\sin 2t)')$

$r'(t) = (1, (2t)' \cdot \cos'(2t), (2t)' \cdot \sin'(2t))$

$r'(t) = (1, 2 \cdot (-\sin(2t)), (2 \cdot \cos(2t))$

$r'(t) = (1, -2\sin 2t, 2\cos 2t)$

$r'(\pi) = (1, -2\sin 2\pi, 2\cos 2\pi)$

$r'(\pi) = (1, 0, 2)$

$\frac{\pi}{2}$) $\quad r'(\frac{\pi}{2}) = (1, -2\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2}, 2\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2})$

$r'(\frac{\pi}{2}) = (1, 0, -2)$

Задача № 31

$f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 4$

Пусть $f(x,y) = z$

Пусть $z = 0 \Rightarrow 4x^2 + 4y + 4 = 0$

$4x^2 + 4y^2 = (-4) \quad / : (-4)$

$-x^2 - y^2 = 1$

$-x^2 - y^2 - 1 = 0 \ (-1)$

$x^2 + y^2 + 1 = 0$

I $\quad 4x^2 + 4y^2 + 4 = 4$

$4x^2 + 4y^2 = 0$

$4(x^2 + y^2) = 0$

$x^2 + y^2 = 0$

$x = 0; \ y = 0$

II $\quad 4x^2 + 4y^2 + 4 = 10$

$4x^2 + 4y^2 = 6$

$4(x^2 + y^2) = 6$

$x^2 + y^2 = \frac{6}{4}$

$x^2 + y^2 = 1{,}5$

$x$ и $y = 0{,}86602\ldots$

III $\quad 4x^2 + 4y^2 + 4 = 12$

$4(x^2 + y^2) = 8$

$x^2 + y^2 = 2$

$x$ и $y = 1$

IV $\quad 4x^2 + 4y^2 + 4 = 6$

$4(x^2 + y^2) = 2$

$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

$x$ и $y = \pm 0{,}25$

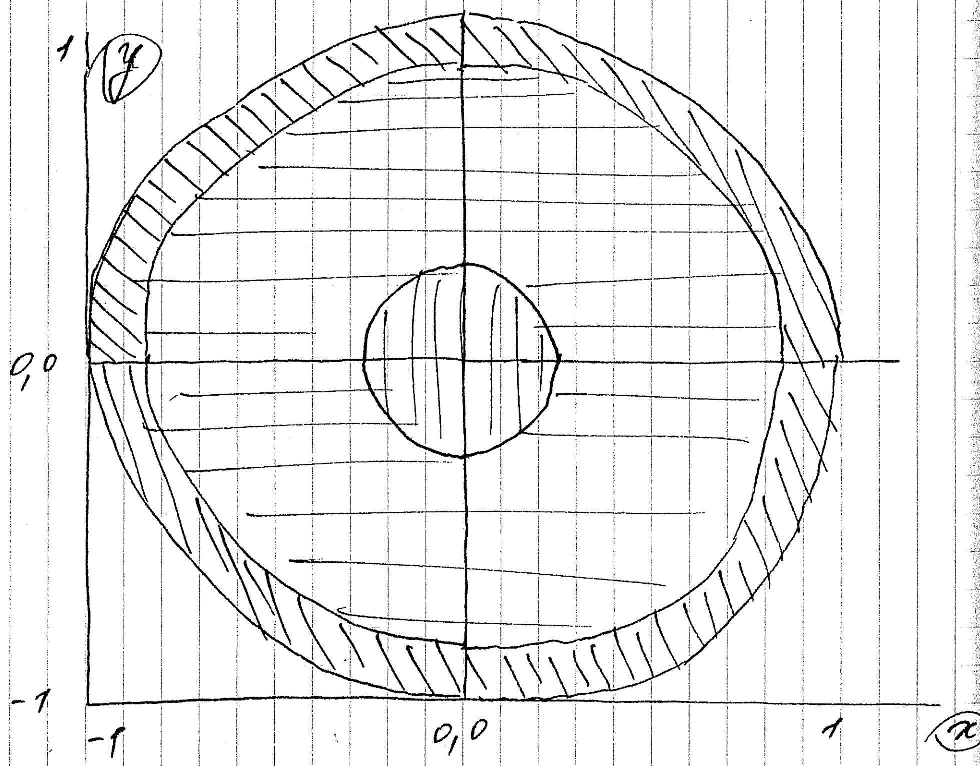
Ответ: · при $z < 4$ — не определено

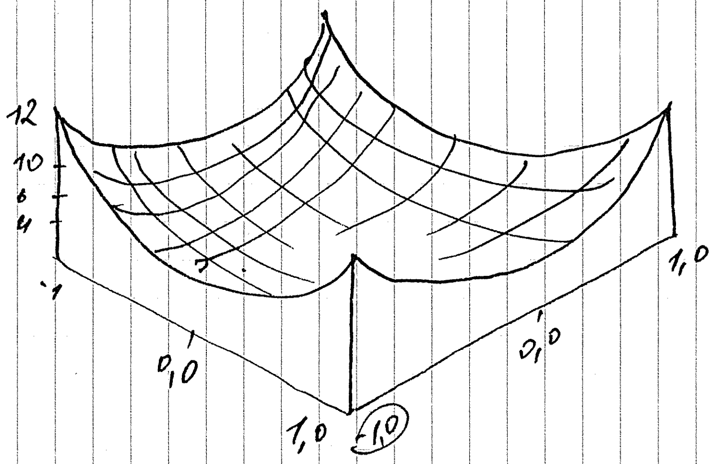
· при $z = 4 \Rightarrow x$ и $y = 0$

· при $z = 6 \Rightarrow x$ и $y = \pm 0{,}25$

· при $z = 10 \Rightarrow x$ и $y = \pm 0{,}86\ldots$

· при $z = 12 \Rightarrow x$ и $y = \pm 1$



Область определения:

$f(x,y) = 4x^2+4y^2+4$

$4(x^2+y^2) = -4 \;/ :4$

$x^2+y^2 = (-1)^x \;/$ во вторую степень

$(x^2+y^2)^2 = 1 \;/ \sqrt{\;}$

$x^2+y^2=1$

$x, y \in (-\infty; +\infty)$

Область значений:

$z \in [4; +\infty)$

В общем виде:

$4x^2+4y^2+4=z$

$4x^2+4y^2= z-4 \;/ :4$

$x^2+y^2 = \frac{z-4}{4}$

$z<4$ — нет решения

$z=4$ — ~~окружность~~ точка $(0,0)$

$z>4$ — окружность радиуса $R=\sqrt{\frac{z-4}{4}}$ с центром в точке $(0,0)$

Задача №4 $\nabla f(4,6)$

$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$

По теореме 7 у математиков заметим градиент должен быть направлен перпендикулярно линии уровня $f(x,y)$

$x^2+y^2=a^2$ — уров-ие окружности с центром в т. $(0,0)$ радиуса $a$.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$ окружность с центром в точке $(x_0, y_0)$ радиуса $a$

Задача №5

$f(x,y) = x^4+y^4-4xy+2$

$f_x(x,y) = (x^4)'+(y^4)'-(4xy)'+(2)'$

$f_x(x,y) = 4x^3+0-4y+0$

$f_x(x,y) = 4x^3-4y$

$f_y(x,y) = 0+4y^3-4x+0$

$f_y(x,y) = 4y^3 - 4x$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 = 4y \\ 4y^3 = 4x \end{cases} \quad \Big/ : 4$$

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

$(x^3)^3 = x$

$x^9 = x$

$x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow$

$x^8 - 1 = 0 \Rightarrow x^8 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x \in \{-1, 0, 1\}$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$(-1; -1) \qquad (0, 0) \qquad (1, 1)$

$f_{xx}(x,y) = (4x^3)' - (4y)' = 12x^2$

$f_{yy}(x,y) = 4y^3 - 4x = 12y^2$

$f_{xy}(x,y) = (-4)$

$D = 12x^2 \cdot 12y^2 - (-4)^2 = 144x^2y^2 - 16$

$(-1; -1)\ D = 144 - 16 = 128 \Rightarrow D > 0$ и $f_{xx}(-1;-1) > 0$

$\Rightarrow$ локальной минимум.

$(0,0)$: $D = -16 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ в точке $(0,0)$ — седловая точка

$(1,1)$ $D = 144 - 16$ $D > 0$, $f_{xx} > 0$ — локальный минимум