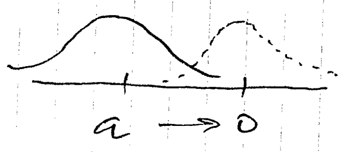
Тервер, домашняя работа № 3

Упр 1

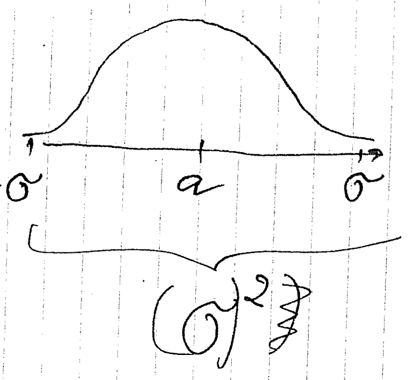
1)



Матожидание: для $a<0$: $X+(-a)$
вычитаем a из случайной величины.
для $a>0$: $X-a$

Дисперсия: $Var(X-a)=\sigma^2$

$$Var\left(\frac{X-a}{\sigma}\right)=1$$



2) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ получить $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$

$(X+a)\cdot\sigma \Rightarrow \mathcal{N}(a,\sigma^2)$

3) $F_X(x) := \mathbb{P}(X \le x),\ x \in \mathbb{R}$

4) $F'(x) = f(x)$, где F – функция распределения, а f – плотность распределения.

5) $\mathbb{P}(X>3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \int_3^{+\infty} F'(y)\,dy =$

$F(y)\Big|_3^{+\infty} = F(+\infty) - F(3) = 1 - F(3)$

для непрерывного пространства.

Упр 2 $X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$

$Y = (5 + X\cdot\ln 2)/2$

Матожидание:

$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\big((5+X\cdot\ln 2)/2\big) =$

$$\frac{\mathbb{E}(5+X\cdot\ln 2)}{2}=\frac{\mathbb{E}5+\mathbb{E}(X\cdot\ln 2)}{2}=$$

$$\frac{5+\ln 2(\mathbb{E}X)}{2}=\frac{5+\ln 2\cdot a}{2}=$$

$$\frac{5+a\ln 2}{2}$$

Дисперсия:

$$Var(Y)=Var(Y+c)$$

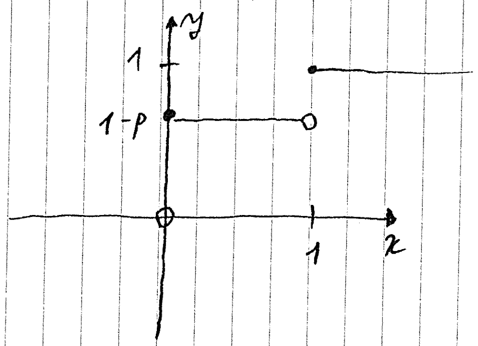
$$Var\left(\frac{(5+X\cdot\ln 2)}{2}\right)=\frac{1}{4}Var(5+X\cdot\ln 2)=$$

$$\frac{1}{4}Var(X\cdot\ln 2)=(\ln 2)^2\cdot\frac{1}{4}Var(X)=$$

$$(\ln 2)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sigma^2$$

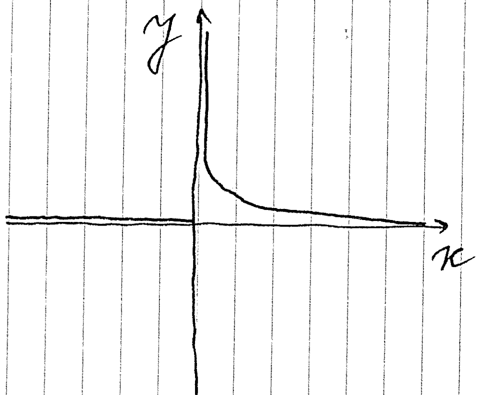
$\boxed{\text{Упр 3}}$ $\mathbb{B}_p: \begin{cases} 1 \text{ с вер } p \\ 0 \text{ с вер } 1-p \end{cases}$

$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$



В общем случае будет иметь ступенчатый вид.

$\boxed{\text{Упр 5}}$ $f(u) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{u}{30}}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$



$\mathbb{E}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x \frac{1}{30} e^{-\frac{x}{30}} dx$

т.к. $x < 0$ $f(x) = 0$

$$\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}dx = \frac{1}{30}\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{x}{30}}dx =$$

$$\frac{1}{30}\cdot\Big(\big(-30e^{-\frac{x}{30}}\big)\cdot x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\big(-30e^{-\frac{x}{30}}\big)\cdot 1dx =$$

$$\frac{1}{30}\cdot\Big(-30\cdot e^{-\frac{\infty}{30}}\cdot\infty - \big(-30e^{-\frac{0}{30}}\cdot 0\big) +$$

$$+30\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{30}}dx\Big) = \cancel{\frac{1}{30}}\cdot\cancel{30}\cdot\big(-30e^{-\frac{x}{30}}\big)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -30\cdot(0-1) = -30\cdot(-1) = \underline{\underline{30}}$$ (среднее время работы машины)

$$\int_0^3 \frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}dx = \frac{1}{30}\int_0^3 e^{-\frac{x}{30}}dx =$$

$$\frac{1}{30}\big(-30\cdot e^{-\frac{x}{30}}\big)\Big|_0^3 = \frac{1}{30}\cdot(-30)\cdot\big(e^{-\frac{1}{10}}-e^0\big) =$$

$$-1\cdot\big(e^{-\frac{1}{10}}-1\big) = -e^{-\frac{1}{10}}+1 = \underline{\underline{1-e^{-\frac{1}{10}}}}$$ (вероятность, что машина проработает не больше 3х дней)

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{30} e^{-\frac{x}{30}}\,dx = \frac{1}{30}\int_{10}^{+\infty} e^{-\frac{x}{30}}\,dx = \frac{1}{30}\left(-30\cdot e^{-\frac{x}{30}}\right)\Big|_{10}^{+\infty} =$$

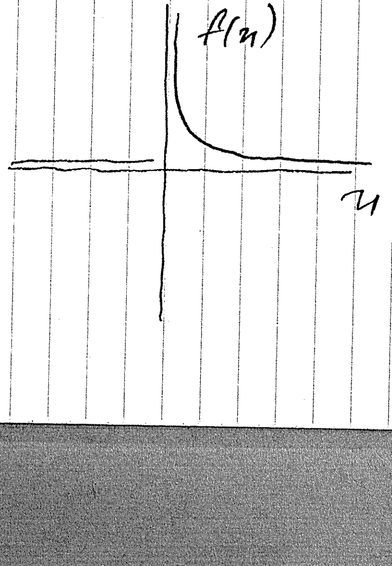
$$\frac{1}{30}\cdot(-30)\cdot\left(0-e^{-\frac{1}{3}}\right) = -1\cdot\left(-e^{-\frac{1}{3}}\right) = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{3}}}}$$

(вероятность, что машина проработает больше 10 дней)

$$\int_{30}^{+\infty} \frac{1}{30} e^{-\frac{x}{30}}\,dx = -1\cdot\left(-e^{-1}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(вероятность, что машина проработает больше 30 дней)

$\boxed{\text{Упр 6}}$ $f(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$



$$P(X>t) = \int_{t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u}\,du =$$

$$\lambda\int_t^{+\infty} e^{-\lambda u}\,du = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u}\right)\Bigg|_t^{+\infty} =$$

$$-1\left(e^{-\lambda u}\right)\Bigg|_t^{+\infty} = -1\left(0 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} = \frac{1}{e^{\lambda t}}$$

$$\mathbb{P}(X>t+s / X>t) = \frac{\mathbb{P}(X>t+s)}{\mathbb{P}(X>t)} =$$

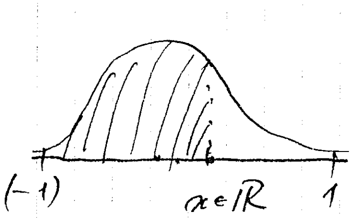
$$= \frac{\dfrac{1}{e^{\lambda\cdot(t+s)}}}{\dfrac{1}{e^{\lambda t}}} = \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda(t+s)}} = \frac{1}{e^{\lambda s}}.$$

Противоречий не вижу.

$\boxed{\text{Упр 8}}$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$F_{X^2}(x)$, где $x \in \mathbb{R}$

$$F_{X^2}(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) = \mathbb{P}((-\sqrt{x}) \leq X \leq \sqrt{x})$$



Очевидно, что при $x<0$ $\mathbb{P}(x^2 \leq x) = 0$, т.к квадрат любого отрицательного числа положительного числа >0.

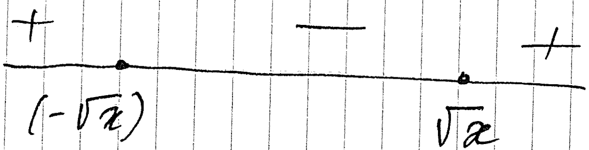
Рассмотрим $x \geq 0$:

$$X^2 \leq x$$

$$X^2 - x \leq 0$$

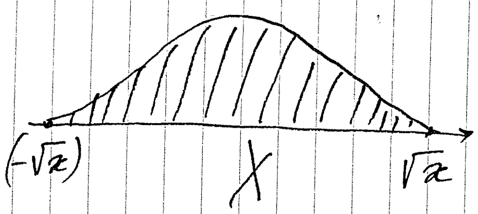
$$X^2 - (\sqrt{x})^2 \leq 0$$

$$(X - \sqrt{x})(X + \sqrt{x}) \leq 0$$



$$[(-\sqrt{x});\ \sqrt{x}]$$

$$(-\sqrt{x}) \leq x \leq \sqrt{x}$$



$$P\left((-\sqrt{x}) \leq X \leq \sqrt{x}\right) = \int_{(-\sqrt{x})}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

$$F'_{X^2}(x) = f_{X^2}(x)$$

$$F_{X^2}(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$f_{X^2}(x) = F'_{X^2}(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right)' =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right)' \cancel{=}$$

$$g(x) = \int_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (g(\sqrt{x}))' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} g'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} g'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} =$$

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}$$