Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

Aufgabe 1: Unterräume

Ermitteln Sie, ob die angegebenen Teilmengen V von Vektorräumen Unterräume sind oder nicht. Geben Sie eine Basis an, falls es sich um Unterräume handelt.

a) Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Teilmenge $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{wobei} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

b) Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Teilmenge $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{wobei} \quad x_1 + x_2 = 5 \right\}$

c) Vektorraum $\mathbb{P}_2$ mit der Teilmenge $V = \left\{ a\,x^2 + b\,x + c \in \mathbb{P}_2 \quad \text{wobei} \quad b = c = 0 \right\}$

Aufgabe 2: Lineare Abbildungen

Ermitteln Sie bei den folgenden Abbildungen ob diese linear sind oder nicht und geben Sie bei den linearen Abbildungen die Matrizen der Abbildungen bezüglich der Standardbasis an.

Hinweis: Sie können entweder die Bedingungen für lineare Abbildungen durchgehen oder einfacher, Sie ermitteln direkt die Matrix der Abbildung nach dem Rezept aus der Vorlesung und testen, ob die Matrix tatsächlich die Abbildung beschreibt.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5\,x_1 - x_2 \\ 3\,x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$f_6 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2\,x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Elementare Abbildungen in der Ebene

Bestimmen Sie die Matrizen der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und überlegen Sie sich, ob diese umkehrbar sind oder nicht.

a) Projektion auf die x-Achse.

b) Projektion auf die y-Achse.

c) Spiegelung an der Geraden $y = x$.

d) Rotation um den Winkel ϕ.

Aufgabe 4: Polynomintegration

Wir betrachten die Polynomintegration (mit Integrationskonstante =0)

$$\begin{aligned} \int : \mathbb{P}_3 &\longrightarrow \mathbb{P}_4 \\ p(x) &\longmapsto \int p(x)\, dx \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung linear ist, indem Sie die Definitionen für lineare Abbildungen verwenden.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Standardbasis $x^3, x^2, x, 1$. Setzen Sie dazu die Integrationskonstante gleich Null und schreiben Sie das Polynom $a\,x^3 + b^{\,2} + c\,x + d$ als Spaltenvektor $(a, b, c, d)^{\mathbf{T}}$.

Aufgabe 5: Rotation in $\mathbb{R}^3$

Stellen Sie die Rotation um die y-Achse von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als Matrix dar.

Aufgabe 6: Translation in $\mathbb{R}^2$

Verschiebt man einen Vektor $(x, y)^{\mathbb{T}} \in \mathbb{R}^2$ um a in x-Richtung und b in y-Richtung $(x + a, y + b)^{\mathbb{T}} \in \mathbb{R}^2$, so ist diese Abbildung nicht linear, da der Nullpunkt nicht fest bleibt. Mit einem Trick können Sie die Abbildung trotzdem linear machen und als Matrix darstellen. Wie?