

---

# RTPLT

Thierry Prud'homme  
thierry.prudhomme@hslu.ch

Aufgabenliste: #5

Themen:  $z$ -Übertrag., Dig. Regelstrecke., Stabilität

---

[Aufgabe 1] (*Differenzengleichung*) Die folgende Gleichung ist die  $z$ -Übertragungsfunktion einer digitalisierten Regelstrecke.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-d} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

1. Was ist die Ordnung eines solchen Systems?
2. Leiten Sie aus der  $z$ -Übertragungsfunktion die Differenzengleichung zwischen  $y(k)$  und  $u(k)$ .
3. Wie würden Sie  $d$  interpretieren?
4. Wie würden Sie die Pole dieser  $z$ -Übertragungsfunktion berechnen?
5. Wie würden Sie die Stabilität des Systems analysieren?

[Aufgabe 2] ( *$z$ -Transformation*) Wir fokussieren auf das folgende Signal:

$$w(kh) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \leq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{wenn } k > 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie das die  $z$ -Transformation dieses Signals ist:

$$Z\{w(kh)\} = -\ln \frac{z-1}{z} \tag{1}$$

[Aufgabe 3] (*Partialbruchzerlegung, Differenzengleichung, Stabilität*) Ein digitalisierte Regelstrecke hat die folgende  $z$ -Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 - 2z + 6}{(z-2)(z+2)(z+5)} \tag{2}$$

1. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der  $z$ -Übertragungsfunktion die für die Berechnung der Impulsantwort relevant ist.

2. Leiten Sie aus der  $z$ -Übertragungsfunktion die Differenzengleichung zwischen  $y(k)$  und  $u(k)$ .
3. Berechnen Sie und Zeichnen Sie die Impuls-Antwort.
4. Ist das System stabil?

[Aufgabe 4] (*Partialbruchzerlegung, Differenzengleichung, Stabilität*) Ein digitalisierte Regelstrecke hat die folgende  $z$ -Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \quad (3)$$

1. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der  $z$ -Übertragungsfunktion die für die Berechnung der Impulsantwort relevant ist.
2. Leiten die aus der  $z$ -Übertragungsfunktion die Differenzengleichung zwischen  $y(k)$  und  $u(k)$  her.
3. Berechnen Sie und Zeichnen Sie die Impuls-Antwort.
4. Ist der Prozess stabil?
5. Zeichnen Sie den Wirkungsplan und programmieren Sie diesen Wirkungsplan mit Simulink.
6. Simulieren Sie die Sprungantwort mit Simulink.

[Aufgabe 5] (*Diskretisierung des analogen PID Reglers*) :

$$u(t) = K_a \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right) \quad (4)$$

1. Der I-Anteil wird mit der Trapezregel diskretisiert. Welche Formel muss gebraucht werden um die  $z$ -Übertragungsfunktion des diskretisierten I-Anteils direkt herzuleiten?
2. Der D-Anteil wird mit der Rückwärts-Rechteckregel diskretisiert. Welche Formel muss gebraucht werden um die  $z$ -Übertragungsfunktion des diskretisierten D-Anteils direkt herzuleiten?
3. Leiten Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion des PID Reglers her.
4. Berechnen Sie die Impuls-Antwort des diskretisierten PID Reglers.
5. Schreiben Sie die Pseudocode die diesen Regler implementiert.
6. Leiten Sie die Differenzengleichung zwischen  $e(k)$  und  $u(k)$  aus der  $z$ -Übertragungsfunktion des PID Reglers her.
7. Mit  $K_a = 1$ ,  $T_i = 2$  und  $T_d = 3$ , programmieren Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion mit Matlab (Funktion `tf`) und mit Simulink. Simulieren Sie die Sprungantwort mit Matlab und dann mit Simulink.

[Aufgabe 6] (*z-Übertragungsfunktion*) Ein digitalisiertes System kann mit der folgenden Differenzengleichung modelliert werden:

$$y(k+2) - y(k+1) + 0.5y(k) = u(k)$$

1. Leiten Sie aus dieser Differenzengleichung die  $z$ -Übertragungsfunktion  $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$  her.
2. Berechnen Sie und Zeichnen Sie die Sprungantwort, zuerst mit der Differenzengleichung und dann mit der  $z$ -Übertragungsfunktion.
3. Zeichnen Sie den Wirkungsplan dieses Systems.
4. Programmieren Sie diesen Wirkungsplan mit Simulink und Simulieren Sie die Sprungantwort.
5. Programmieren Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion mit Matlab (funktion `tf` und Simulieren Sie die Sprungantwort.
6. Programmieren Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion mit Simulink und Simulieren Sie die Sprungantwort.

[Aufgabe 7] (*Digitalisierung einer analogen Regelstrecke*) Die Position  $y(t)$  eines Gleichstrommotors wird geregelt. Die Steuergrösse ist die Eingangsspannung des Motors  $u(t)$ . Der Prozess kann wie folgt modelliert werden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s(s+2)}$$

Die Implementierung des Reglers ist digital (mit AD- und DA-Umsetzern).

1. Zeichnen Sie das Blockschaltbild des geregelten Prozesses.
2. Erklären Sie die verschiedenen Schritte für die Herleitung der  $z$ -Übertragungsfunktion  $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$  des erweiterten Prozesses (analoger Prozess + AD + DA).
3. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion  $\frac{G(s)}{s}$ .
4. Ersetzen Sie mit Hilfe einer Tabelle jeder Komponent  $C$  der Partialbruchzerlegung durch  $Z\{L^{-1}(C)\}$
5. Leiten Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion  $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$  her.
6. Lassen Sie die gleiche  $z$ -Übertragungsfunktion  $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$  von Matlab mit dem Befehl `c2d` berechnen und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis des vorherigen Punktes.