Stochastik

Wahrscheinlichkeitsverteilung/Binomialverteilung

Mirko Birbaumer

Hochschule Luzern Technik & Architektur

Zufallsvariable: Beispiel Jasskarte

- Beispiel: Jasskarten
  - Ein Pack Jasskarten besteht aus 36 verschiedenen Karten
  - Um beim Jassen Stiche zu vergleichen, werden den Jasskarten Zahlwerte zugewiesen
  - So hat ein König den Wert 4
  - Ohne diese Werte wären verschiedene Stiche beim Jass sehr schwierig miteinander zu vergleichen
  - **Zufallsvariable**: *Funktion*, die jeder Jasskarte einen Zahlwert zuordnet

Zufallsvariable: Beispiel Jasskarte

$$
\begin{array}{lcl}
\omega = \text{As} & \mapsto & X(\omega) = 11 \\
\omega = \text{König} & \mapsto & X(\omega) = 4 \\
\vdots & & \vdots \\
\omega = \text{Sechs} & \mapsto & X(\omega) = 0
\end{array}
$$

- Zu jedem Elementarereignis ω gehört demnach ein Zahlenwert $X(\omega) = x$
- Dabei ist X eine *Funktion*, die jedem Elementarereignis ω den Zahlwert x zuordnet

Zufallsvariable

- **Zufallsvariable** : X ist eine Funktion auf dem Grundraum Ω
- Sie ordnet jedem Element des Grundraumes *eine Zahl* zu
- Vorteil: Mit den Werten der Zufallsvariable kann man rechnen
- Beispiel Jasskarten: mit den Zahlenwerten $X(\omega)$ kann man den „Durchschnitt“ der gezogenen Karten berechnen
- Für die Elementareignisse „As“, „König“ etc. macht das Wort „Durchschnitt“ keinen Sinn

Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsvariable

Eine **Zufallsvariable** X ist eine **Funktion**:

$$X: \quad \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Eine Zufallsvariable wird mit einem **Grossbuchstaben** X (oder Y, Z) bezeichnet und steht für eine Funktion.

Zufallsvariablen: Notation

- Der entsprechende **Kleinbuchstabe** x (oder y, z) stellt einen konkreten Wert dar, den die Zufallsvariable annehmen kann: x ist **eine Realisierung** der Zufallsvariablen X
- $X = x$: Für das Ereignis, bei dem die Zufallsvariable X den Wert x annimmt
- $X = 2$ entspricht dem Ereignis: „einen Under ziehen“
- Bei einer Zufallsvariable ist nicht die Funktion $X(\cdot)$ zufällig, sondern nur das Argument ω
- Je nach Ausgang des Zufallsexperiments ω erhalten wir einen anderen Wert $x = X(\omega)$

Diskrete Zufallsvariablen

- Zufallsvariablen sind **diskret**, falls Zahlen, die X annehmen kann, *diskret* sind
- Beispiel Jasskarten: die Anzahl dieser Werte ist endlich

$$\{0, 2, 3, 4, 10, 11\}$$

- eine diskrete Menge kann auch unendlich viele Elemente enthalten:

$$\{2.5, 4.5, 6.5, 8.5, \ldots, \}$$

- Anzahlen sind stets diskret, also Elemente von $\mathbb{N}_0$

Wahrscheinlichkeit einer Realisierung

- Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit einer Realisierung x einer Zufallsvariablen X?
- Beispiel: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Karte den Wert $X = 4$ hat? Die Realisation $X = 4$ entspricht dem Ziehen eines Königs.

$$
\begin{aligned}
P(X = 4) &= P(\{\omega \mid \omega = \text{ ein König}\}) \\
&= P(\text{Eicheln-König}) + P(\text{Rosen-König}) + \\
&\quad + P(\text{Schellen-König}) + P(\text{Schilten-König}) \\
&= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Wahrscheinlichkeit einer Realisierung

- W'keit, dass ein König gezogen wird, ist also gleich der Summe der W'keiten, die verschiedenen Könige zu ziehen

> Die Werte einer Zufallsvariablen X (die möglichen Realisationen von X) treten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten auf. Die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x annimmt, berechnet sich wie folgt:
>
> $$P(X = x) = P(\{\omega \mid \; X(\omega) = x\}) = \sum_{\omega; X(\omega)=x} P(\omega)$$

- Jasskartenbeispiel: $x = 4$ und ω alle möglichen Könige, deren entsprechende Wahrscheinlichkeiten aufaddiert werden

Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Natürlich können wir die W'keiten *aller* Realisierungen berechnen, und nicht bloss die W'keit einer Realisierung (hier $x = 4$)

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Berechnen wir für *jede* Realisierung einer Zufallsvariable die zu gehörige Wahrscheinlichkeit, so sprechen wir von einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung* dieser Zufallsvariablen.

Wahrscheinlichkeitsverteilung: Jasskartenbeispiel

- W'keit $P(X=4)$ schon berechnet : $P(X=4)=\frac{1}{9}$
- Wie gross ist die W'keit $P(X=0)$ (Ereignis: „leere“ Karten) ?
  - Es hat unter den 36 Karten genau 16 „leere“ Karten
  - Somit gilt für die W'keit $P(X=0)$ mit Hilfe des Laplace-Modells:

$$P(X=0)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

- Wie gross ist die W'keit $P(X=2)$ (Ereignis: „Under“)?
  - Es hat unter den 36 Karten genau 4 Under

$$P(X=2)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: Jasskartenbeispiel

- Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Tabelle

x	0	2	3	4	10	11
$P(X=x)$	$4/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$

- Addition aller Werte der W'keitsverteilung $\rightarrow$ muss 1 ergeben

$$P(X=0)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=10)+P(X=11)=1$$

Die „Liste“ von $P(X=x)$ für alle möglichen Werte x heisst diskrete **(Wahrscheinlichkeits-) Verteilung** der diskreten Zufallsvariablen X. Dabei gilt immer

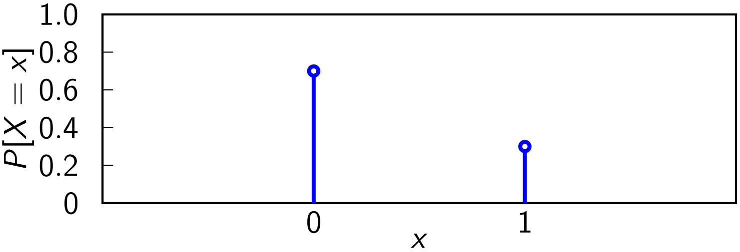
$$\sum_{\text{alle möglichen } x} P(X=x)=1.$$

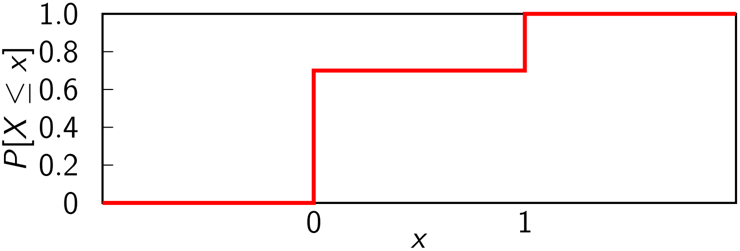
Bernoulli-Verteilung: $X \sim$ Bernoulli(π)

- „Experiment" mit **zwei** Ausgängen: „Erfolg" ($X = 1$) oder „Misserfolg" ($X = 0$)
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei π
- X nimmt nur die Werte 0 und 1 an
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist:

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - \pi$	π

Bernoulli-Verteilung ($\pi = 0.3$)





Bernoulli-Verteilung

„Experiment“ und „Erfolg“ können vieles bedeuten:

- Erdbeben tritt ein ($X = 1$) vs. Erdbeben tritt nicht ein ($X = 0$)
- Qualitätsanforderung erfüllt ($X = 1$) vs. Qualitätsanforderung nicht erfüllt ($X = 0$) (bzw. umgekehrt)

Also immer, wenn ein Experiment **zwei mögliche Ausgänge** hat, kann man die Bernoulli-Verteilung verwenden.

Beispiel: Binomialverteilung: $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$

- Werfen eine faire Münze viermal, also $n = 4$ und $\pi = 0.5$.
- X : Anzahl Würfe mit Kopf
- Die möglichen Ausgänge dieses Experiments können wir als eine Liste mit „Wörtern" bestehend aus 4 Buchstaben darstellen
- Dabei ist z.B.
$$X(ZZZZ) = 0$$
da kein K in $ZZZZ$ vorkommt
- Entsprechend ist
$$X(KKZK) = 3$$
da 3 K's in $KKZK$ vorkommen

Beispiel: Binomialverteilung: $X \sim \mathrm{Bin}(n, \pi)$

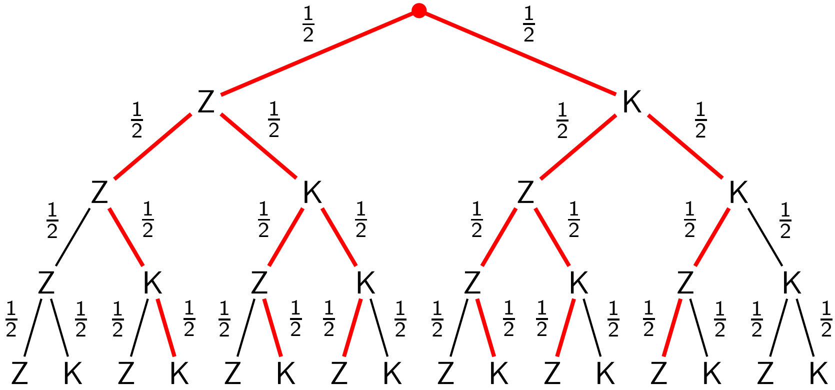
- Alle Worte sind in folgender Tabelle aufgeführt

Elementarereignis	x	Elementarereignis	x
ZZZZ	0	KZZZ	1
ZZZK	1	KZZK	2
ZZKZ	1	KZZK	2
ZZKK	2	KZKK	3
ZKZZ	1	KKZZ	2
ZKZK	2	KKZK	3
ZKKZ	2	KKKZ	3
ZKKK	3	KKKK	4

- Das Ereignis mit $X = 2$ besteht aus folgenden 6 Elementarereignissen

$$\{ZZKK, ZKZK, ZKKZ, KZZK, KZKZ, KKZZ\}$$

Beispiel: Binomialverteilung: $X \sim \mathrm{Bin}(n, \pi)$



Beispiel: Binomialverteilung: $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$

- Annahme: jeder Münzwurf ist unabhängig vom vorhergehenden Münzwurf, dann ist

$$P(KKZZ) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(Z) \cdot P(Z) = (0.5)^2 \cdot (1 - 0.5)^2 = 0.0625$$

- Jedes der 6 Elementarereignisse mit $X = 2$ ereignet sich mit derselben Wahrscheinlichkeit
- Es für $X = 2$ genau sechs Elementarereignisse

$$P(X = 2) = 6 \cdot 0.0625 = 0.375$$

Wahrscheinlichkeit für x-mal Kopf bei 4 Münzwürfen

$$P(X = x) = (\# \text{ Elementarereignisse mit x} - \text{mal Kopf}) \times (0.5)^x \cdot (1 - 0.5)^{4-x}$$

Binomialkoeffizient

- Wie kann man im allgemeinen die Anzahl Elementarereignisse mit x mal Kopf bei 4 Münzwürfen berechnen?

- Anzahl Möglichkeiten, die vier Buchstaben in den beiden Gruppen einzuordnen (Kopf und Zahl) mit x-mal Kopf, berechnet sich mit

$$\binom{4}{x} = \frac{4!}{x!(4-x)!}$$

- Somit lautet die W'keit $P(X = x)$ in unserem Beispiel

$$P(X = x) = \binom{4}{x}(0.5)^x \cdot (1-0.5)^{4-x}$$

Binomialkoeffizient

- Im Falle von $x = 2$ gilt

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

- Binomialkoeffizient mit **R**:

R-Befehl: choose()

```
> choose(4,2)
[1] 6
```

Binomialverteilung: $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$

- Zufallsexperiment wird n-mal durchgeführt, wobei die Zufallsvariable X_i für den i-ten Versuch Bernoulli-verteilt ist (Erfolg/Misserfolg)
- Der **Grundraum** beinhaltet $|\Omega| = 2^n$ Elementarereignisse
- **Zufallsvariable:**

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls „Erfolg“} \\ 0 & \text{falls „Misserfolg“} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i : \quad \text{Gesamtzahl von „Erfolgen“}$$

- Der Wertebereich von X ist daher $W = \{0, 1, \ldots, n\}$

Beispiel: Münzenwurf

- Veranschaulichung dieser Zufallsvariablen mit dem Wort $KKZK$

- Es ist dann
$$X_1(\boldsymbol{K}KZK) = 1$$
da beim 1. Wurf K geworfen wurde

- Entsprechend gilt
$$X_2(K\boldsymbol{K}ZK) = 1; \quad X_3(KK\boldsymbol{F}K) = 0; \quad X_4(KKZ\boldsymbol{K}) = 1$$

- Für die Zufallsvariable X gilt dann
$$\begin{aligned} X(KKZK) &= X_1(\boldsymbol{K}KZK) + X_2(K\boldsymbol{K}ZK) + X_3(KK\boldsymbol{Z}K) + X_4(KKZ\boldsymbol{K}) \\ &= 1 + 1 + 0 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Beispiel: Münzenwurf

- Haben alle $X_i = 1$ (K im i-ten Wurf) die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit π und sind unabhängig, dann führt die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(X = x)$ zur **Binomialverteilung** (Wahrscheinlichkeitsverteilung)

- Um $P(X = x)$ zu berechnen, muss man bestimmen, auf wieviele Arten man x Einer auf n Plätze anordnen kann

- Die Antwort ist gegeben durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Beispiel: Münzenwurf

Binomial(n, π)-Verteilung:

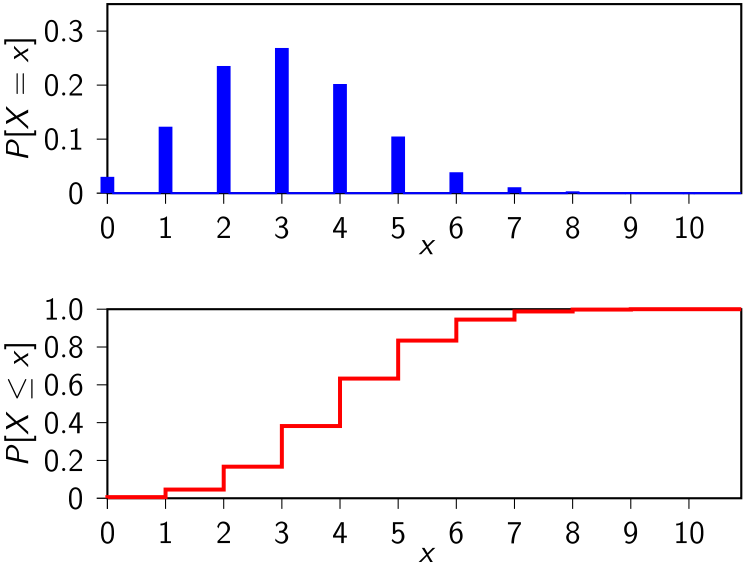
Eine Zufallsvariable X mit Werten in $W = \{0, 1, \ldots, n\}$ heisst Binomial(n, π)-verteilt, falls

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}, \; x = 0, 1, \ldots, n$$

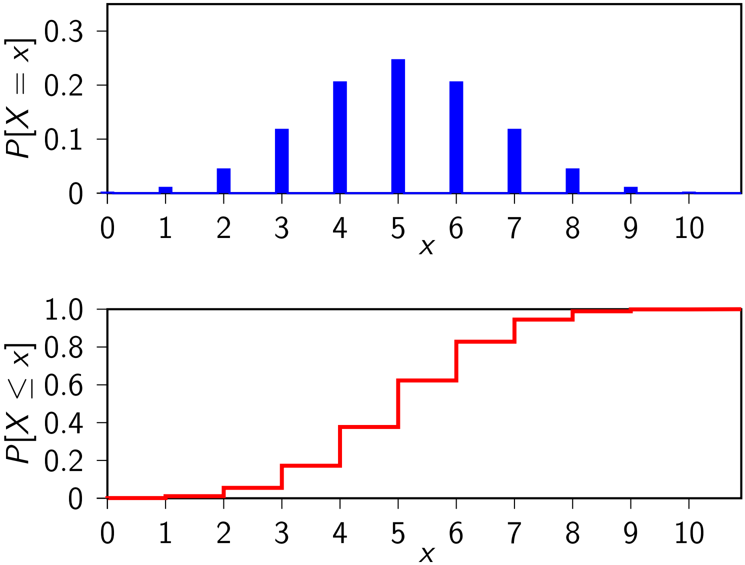
Dabei ist $0 \leq \pi \leq 1$ der Erfolgsparameter der Verteilung

- Notation:
  - Folgt die Zufallsvariable X einer gewissen W'keitsverteilung F, schreibt man abgekürzt: $X \sim F$
  - Folgt X einer Binomialverteilung mit Parametern n und π, so schreibt man $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$ oder $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$

Binomialverteilung ($n = 10, \pi = 0.3$)



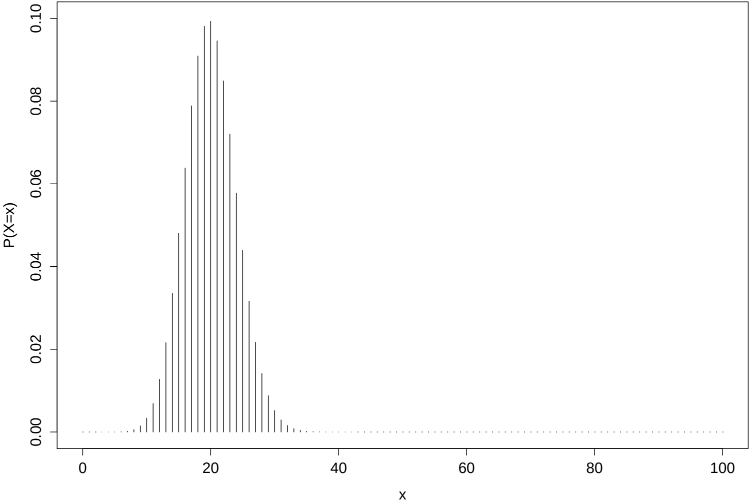
Binomialverteilung ($n = 10, \pi = 0.5$)



Beispiel: Losziehen

- Bei einer Losbude steht: „Jedes 5. Los gewinnt!“, d.h., die Gewinnw'keit ist bei jedem Los $\pi = 0.2$
- Annahme: Ziehen von einem Los hat keinen Einfluss auf das Ziehen des nächsten Loses hat (z.B. gibt es eine riesige Anzahl Lose und die Lostrommel wird nach jedem Verkauf eines Loses gut gemischt).
- Kaufen 100 Lose und bezeichnen mit X die Anzahl Gewinne unter den 100 Losen
- Dann ist X Binomial$(n = 100,\ \pi = 0.2)$ verteilt

W'keitsverteilung $X \sim \text{Bin}(100, 0.2)$



W'keitsverteilung $X \sim \text{Bin}(100, 0.2)$

- Für $X = 20$ gilt die W'keit (mit R)

$$P(X = 20) = \binom{100}{20} \cdot 0.2^{20} \cdot 0.8^{80} = 0.0993$$

- Mit etwa 10 % W'keit hat man 20 Treffer beim Kauf von 100 Losen

R-Befehl:

```
> dbinom(20,100,0.2)
[1] 0.09930021
```

W'keitsverteilung $X \sim \text{Bin}(100, 0.2)$

- W'keit, dass man zwischen 15 und 20 Treffern zieht

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 25) &= P(X = 15) + P(X = 16) + \ldots + P(X = 25) \\ &= \binom{100}{15} \cdot 0.2^{15} \cdot 0.8^{85} + \binom{100}{16} \cdot 0.2^{16} \cdot 0.8^{84} + \ldots + \binom{100}{25} \cdot 0.2^{25} \cdot 0.8^{75} \\ &= 0.83 \end{aligned}$$

R-Befehl:

```
> sum(dbinom(15:25,100,0.2))
[1] 0.8320809
```

- Mit über 80 % W'keit zieht man zwischen 15 und 25 Gewinnen

W'keitsverteilung $X \sim \text{Bin}(100, 0.2)$

- W'keit für 35 und mehr Gewinne $P(35 \leq X \leq 100) = 0.000\,34$

R-Befehl: dbinom()

```
> sum(dbinom(35:100,100,0.2))
[1] 0.0003360872
```

- W'keit für weniger als Gewinne $P(0 \leq X \leq 9) = 0.0023$

R-Befehl: pbinom()

```
> pbinom(9,100,0.2)
[1] 0.002333561
```

Binomialverteilung: Beispiel Qualitätskontrolle

- π sei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Betonprobe den erforderlichen Anforderungen **nicht** entspricht, z.B. $\pi = 0.05$
- X sei die Anzahl „mangelhafter“ Proben von insgesamt 10 (unabhängigen) Proben
- X ist also binomialverteilt: $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 10$ und $\pi = 0.05$
- Damit können wir diverse Sachen berechnen

Binomialverteilung: Beispiel Qualitätskontrolle

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Proben **alle** den Anforderungen entsprechen?

$$P[X = 0] = \binom{10}{0}\pi^0(1-\pi)^{10} = (1-\pi)^{10}$$

R-Befehl: dbinom()

```
> dbinom(x=0,size=10,prob=0.05)
[1] 0.5987369
```

Binomialverteilung: Beispiel Qualitätskontrolle

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Proben **genau eine** den Anforderungen **nicht** entspricht?

$$P[X = 1] = \binom{10}{1} \pi^1 (1 - \pi)^9 = 10 \cdot \pi^1 (1 - \pi)^9$$

R-Befehl: dbinom()

```
> dbinom(x=1,size=10,prob=0.05)
[1] 0.3151247
```

Binomialverteilung: Beispiel Qualitätskontrolle

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Proben **mindestens zwei** den Anforderungen **nicht** entspricht?

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - P[X \leq 1]$$

R-Befehl: pbinom()

```
> 1-pbinom(q=1,size=10,prob=0.05)
[1] 0.08613836
```

Binomialverteilung: Bemerkungen

- Die „Anzahl Versuche" n ist in der Regel aus dem Kontext vorgegeben.
- Die Wahrscheinlichkeit π ist dagegen ein **Parameter**, der in der Regel **unbekannt** ist (bis jetzt haben wir einfach entsprechende Annahmen getroffen)
- Typischerweise will man π aus Daten schätzen (später)
- Bis auf weiteres tun wir so, als ob wir π kennen würden

Kennzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Der **Erwartungswert** einer diskreten Zufallsvariable X beschreibt die mittlere Lage der Verteilung und ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x x P(X = x)$$

Die **Varianz** und **Standardabweichung** einer diskreten Zufallsvariable X beschreiben die Streuung der Verteilung:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_x (x - \mathrm{E}(X))^2 P(X = x)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Bemerkungen

- Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable: **gewichtetes** arithmetisches Mittel von allen möglichen Werten der Zufallsvariablen: Werte werden mit ihrer Wahrscheinlichkeit gewichtet

- Falls X in Metern (m) gemessen, so besitzt $\mathrm{Var}(X)$ die Dimension Quadratmeter (m^2) und $\sigma(X)$ wiederum die Dimension Meter (m)

- Standardabweichung „richtiges" Mass für die Abweichung vom Erwartungswert

Beispiel: Jasskarten

- Jasskartenbeispiel mit der Verteilung

x	0	2	3	4	10	11
$P(X = x)$	$4/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$

- Ziehen aus dem Stapel eine Karte : Welches ist der durchschnittliche Wert der Karte, die wir ziehen?

- Antwort gibt der Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9} + 11 \cdot \frac{1}{9} = 3.33$$

- Dieser Wert ist durchschnittlich zu erwarten, wenn eine Karte (mit Zurücklegen) sehr oft gezogen wird

Beispiel: Jasskarten

- Varianz und die Standardabweichung vom Wert einer gezogenen Jasskarte :

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= (0-3.33)^2\cdot\frac{4}{9}+(2-3.33)^2\cdot\frac{1}{9}+(3-3.33)^2\cdot\frac{1}{9}+(10-3.33)^2\cdot\frac{1}{9}+(11-3.33)^2\cdot\frac{1}{9}\\ &= 16.67\end{aligned}$$

  und

$$\sigma(X)=\sqrt{16.67}=4.08$$

- Das ist die „mittlere“ Abweichung vom Erwartungswert

Kennzahlen Bernoulliverteilung

Sei $X \sim$ Bernoulli(π), also $W_X = \{0, 1\}$:

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = \pi \\
\mathrm{Var}(X) &= (0 - \mathrm{E}(X))^2 P(X = 0) + (1 - \mathrm{E}(X))^2 P(X = 1) \\
&= (0 - \pi)^2 (1 - \pi) + (1 - \pi)^2 \pi \\
&= \pi(1 - \pi) \\
\sigma(X) &= \sqrt{\pi(1 - \pi)}
\end{aligned}$$

Kennzahlen Binomialverteilung

Sei $X \sim$ Binomial(n, π), , also $W_X = \{0, \ldots, n\}$:

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= n\pi \\ \mathrm{Var}(X) &= n\pi(1-\pi) \\ \sigma(X) &= \sqrt{n\pi(1-\pi)} \end{aligned}$$

Herleitung: Anhang Skript

Beispiel: Kennzahlen Binomialverteilung

- Kaufen 100 Lose. Losverkäufer behauptet: jedes fünfte Los ist ein Gewinn
- X: Anzahl Gewinne
- Also wenn der Losbudenverkäufer recht hat: $X \sim \text{Bin}(100, 0.2)$
- Dann ist die erwartete Anzahl Gewinne

$$\mathrm{E}(X) = n \cdot \pi = 100 \cdot 0.2 = 20$$

- Die Streuung ist

$$\sigma(X) = \sqrt{n\pi(1-\pi)} = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 4$$

- Wir erwarten also zwischen 16 und 24 Gewinnen : stimmt in etwa mit der Graphik der Binomialverteilung $\text{Bin}(100, 0.2)$ überein

Kumulative Verteilungsfunktion

Kumulative Verteilungsfunktion

Statt der “Liste“ $P(X = x)$ kann man die sukzessiven Summen betrachten:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(X = y),$$

ist die sogenannte **kumulative Verteilungsfunktion**.

Beispiel: Kumulative Verteilungsfunktion $X \sim \mathrm{Bin}(100, 0.5)$