Modulendprüfung TA.LRS.H10

Thierry Prud'homme, Peter Gruber
thierry.prudhomme@hslu.ch

Aufgabenliste: **#Mit Unterlagen, 240 Punkte** Themen: #

[Aufgabe 1] (*Blockschaltbild, 12 Punkte*) In einem Auto dient der Tempomat (Bild 1) zur der automatischen Regelung der Fahrzeuggeschwindigkeit.

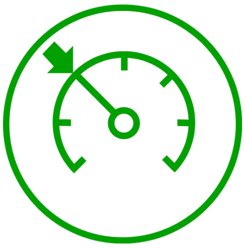


Abbildung 1: Tempomat

Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Tempomats für die 2 Fälle, mit und ohne automatische Schaltung. Geben Sie für diese 2 Fälle die folgenden Signale an:

- Stellgrösse / Steuergrösse
- Ausgangsgrösse / Regelgrösse
- Störgrösse
- Referenzgrösse / Führungsgrösse

Lösung:

- Fall 1 (Handschaltung): Das Blockschaltbild des Tempomats ist im Bild 2 zu sehen.

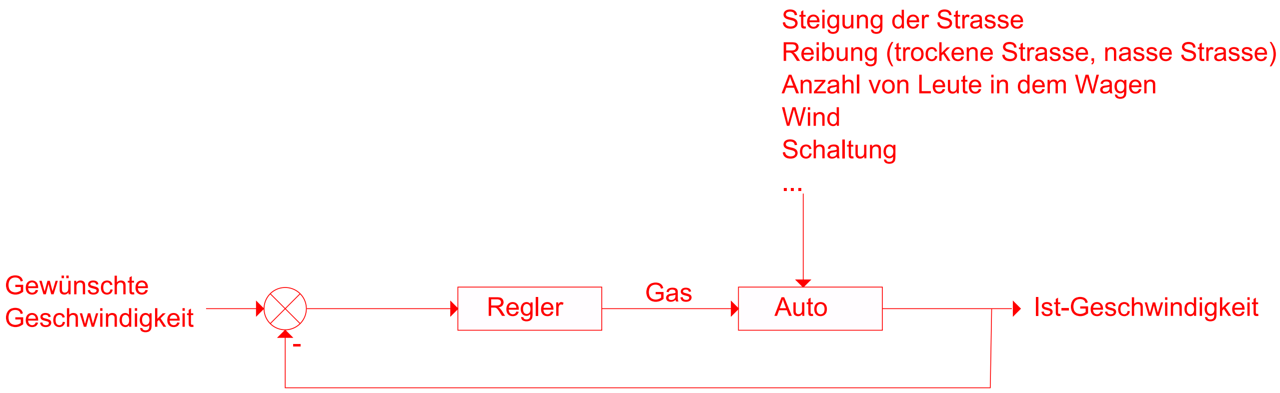


Abbildung 2: Blockschaltbild des Tempomats mit Handschaltung

  - Steuergrösse: Die einzige Steuergrösse ist der Gas. Der Fahrer ist zuständig für die Wahl der Schaltung.
  - Regelgrösse: Die Geschwindigkeit des Fahrzeuges wird geregelt.
  - Störgrösse: Die Steigung der Strasse, der Wind, die Belegung des Fahrzeuges und die Schaltung sind Störgrösse da Sie einen Einfluss auf der Geschwindigkeit haben aber sie können nicht gesteuert werden.
  - Führungsgrösse: Die Führungsgrösse ist die vom Fahrer gewünschte Geschwindigkeit.

- Fall 2 (Automatische Schaltung): Das Blockschaltbild des Tempomats ist im Bild 3 zu sehen.

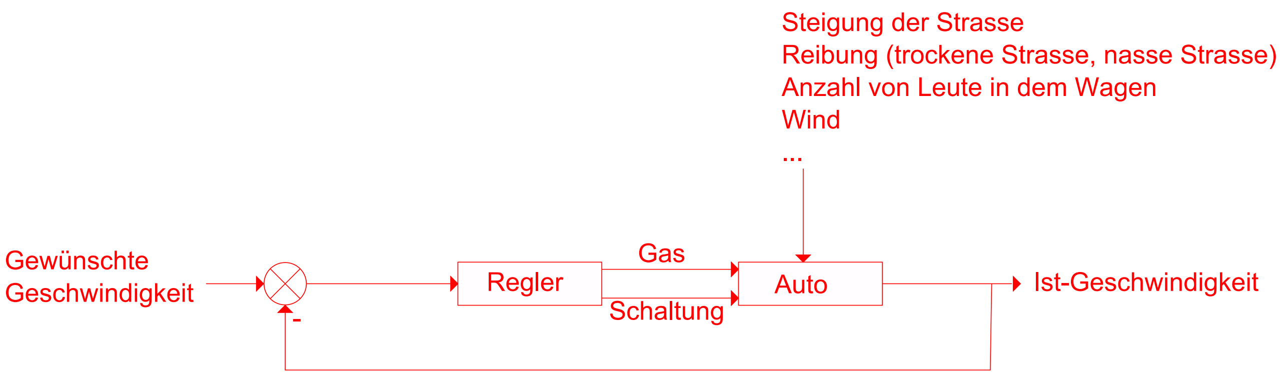
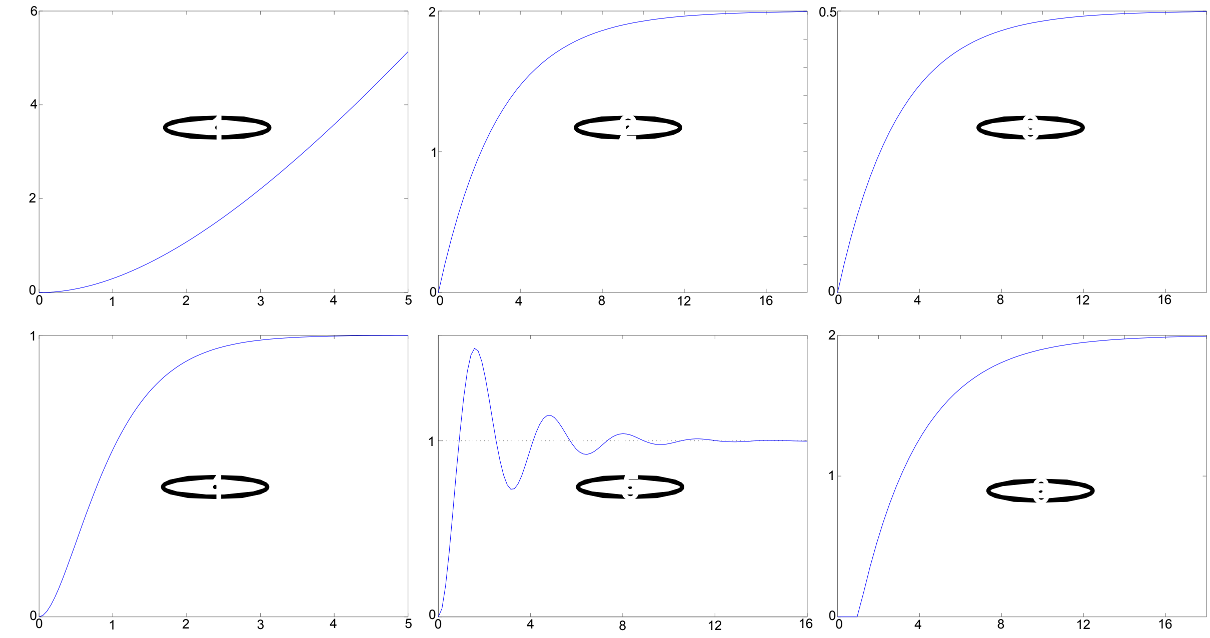


Abbildung 3: Blockschaltbild des Tempomats mit automatischer Schaltungs

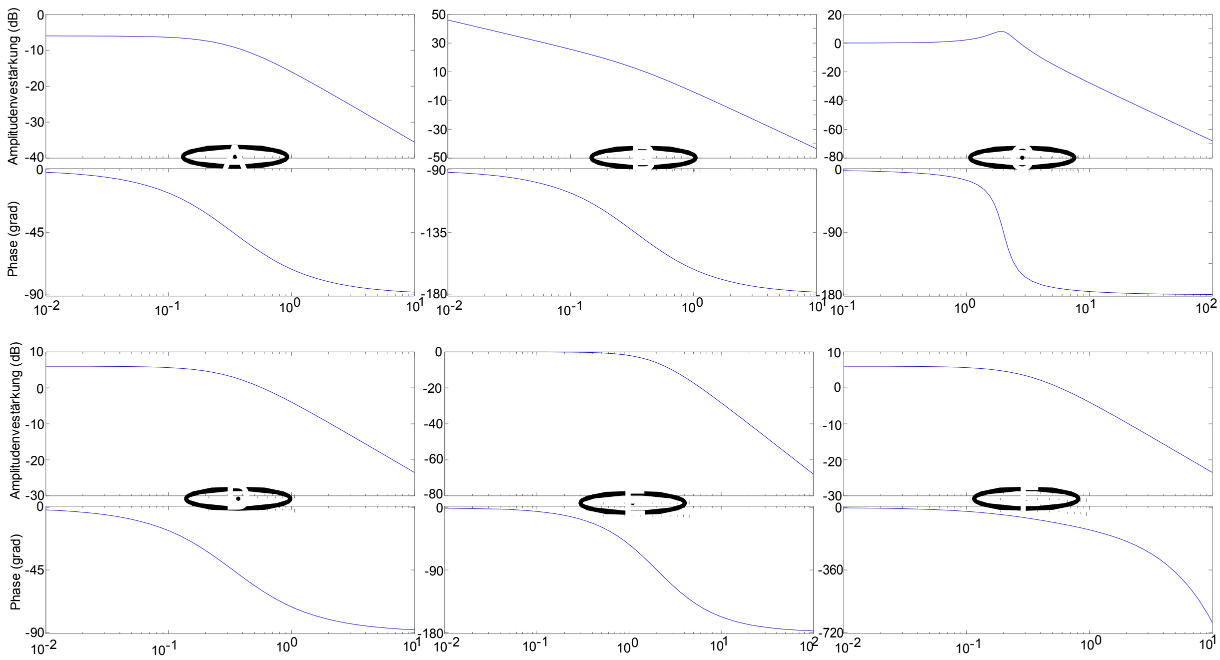
Die grösse sind die gleiche wie bei manualer Schaltung, nur die Schaltung ist eine zweite Steuergrösse die vom Regler berechnet werden muss. Die ist nicht mehr eine Störgrösse.

[Aufgabe 2] (*Schrittantwortanalyse, 12 Punkte*) Untenstehend sind Einheitsschrittantworten und Bode-Diagramme von 6 Systemen aufgezeichnet. Ordnen Sie jeder Schrittantwort das entsprechende Bode-Diagramm zu.



Einheitsschrittanwroten (X-Achse - Zeit (sec))

Bode Diagramme (X-Achse - Pulsfrequenz (rad/sec))



Lösung:

1-B; 2-D; 3-A; 4-E; 5-C; 6-F

[Aufgabe 3] (*Fragebogen, 18 Punkte*) Beantworten Sie die folgenden Frage mit Ja oder Nein.

Nummer	Frage	Ja	Nein
1	Ein lineares System 2. Ordnung kann schwingen.	□	□
2	Ein System höherer Ordnung hat mindestens einen Speicher.	□	□
3	Regt man ein lineares System mit einer Frequenz f_1 an, so kann am Ausgang die Frequenz $2f_1$ erscheinen	□	□
4	Ein instabiles System kann nie mit einer Rückkopplung stabilisiert werden.	□	□
5	Pole weit links von der reellen Achse klingen schneller ab als solche nahe der reellen Achse.	□	□
6	Grosse Bandbreite bedeutet grosse Anstiegszeit.	□	□
7	Grosses Überschwingen bedeutet kleine Dämpfung.	□	□
8	Eine Totzeit im Regelkreis verbessert das Regelverhalten.	□	□
9	Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu beurteilen muss die Nyquistkurve des offenen Kreises untersucht werden.	□	□
10	Die Totzeit ist ein lineares Element.	□	□
11	Mit der Laplacetransformation lassen sich nichtlineare Differentialgleichungen lösen.	□	□
12	Ein PI-Regler kann die Phase anheben.	□	□
13	Eine Differentialgleichung, in der die Zeit explizit auf der linken Seite vorkommt, ist nichtlinear.	□	□
14	Die Nullstellen beeinflussen die Stabilität eines Systems.	□	□
15	Durch die Linearisierung um einen Arbeitspunkt wird das physikalische System linear.	□	□
16	Die Schrittantwort eines Integrators springt bei t=0.	□	□
17	Die Impulsantwort eines linearen Systems ist die Ableitung der Schrittantwort.	□	□
18	Mit der Laplacetransformation lassen sich Einschwingvorgänge berechnen.	□	□

Tabelle 1: Fragebogen

Lösung:

Nummer	Frage	Ja	Nein
1	Ein lineares System 2. Ordnung kann schwingen.	☑	☐
2	Ein System höherer Ordnung hat mindestens einen Speicher.	☑	☐
3	Regt man ein lineares System mit einer Frequenz f_1 an, so kann am Ausgang die Frequenz $2f_1$ erscheinen	☐	☑
4	Ein instabiles System kann nie mit einer Rückkopplung stabilisiert werden.	☐	☑
5	Pole weit links von der reellen Achse klingen schneller ab als solche nahe der reellen Achse.	☑	☐
6	Grosse Bandbreite bedeutet grosse Anstiegszeit.	☐	☑
7	Grosses Überschwingen bedeutet kleine Dämpfung.	☑	☐
8	Eine Totzeit im Regelkreis verbessert das Regelverhalten.	☐	☑
9	Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises muss die Nyquistkurve des offenen Kreises untersucht werden.	☑	☐
10	Die Totzeit ist ein lineares Element.	☑	☐
11	Mit der Laplacetransformation lassen sich nichtlineare Differentialgleichungen lösen.	☐	☑
12	Ein PI-Regler kann die Phase anheben.	☐	☑
13	Eine Differentialgleichung, in der die Zeit explizit auf der linken Seite vorkommt, ist nichtlinear.	☐	☑
14	Die Nullstellen beeinflussen die Stabilität eines Systems.	☐	☑
15	Durch die Linearisierung um einen Arbeitspunkt wird das physikalische System linear.	☐	☑
16	Die Schrittantwort eines Integrators springt bei t=0.	☐	☑
17	Die Impulsantwort eines linearen Systems ist die Ableitung der Schrittantwort.	☑	☐
18	Mit der Laplacetransformation lassen sich Einschwingvorgänge berechnen.	☑	☐

Tabelle 2: Fragebogen

[Aufgabe 4] (*Laplace Übertragungsfunktion, 40 Punkte*) Ein Prozess kann mit der folgenden Übertragungsfunktion modelliert werden:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4(s+1)}{s^2+5s+6}$$

wobei $Y(s) = L\{y(t)\}$ die Laplace Transformation des Ausganges des Prozesses und $U(s) = L\{u(t)\}$ die Laplace Transformation des Einganges des Prozesses sind.

1. Leiten Sie aus dieser Übertragungsfunktion die Differentialgleichung, die die Beziehung zwischen $y(t)$ und $u(t)$ beschreibt, her.
2. Zeichnen Sie den Wirkungsplan des Systems (wenn Sie den Wirkungsplan ohne Differentiator zeichnen können erhalten Sie 10 zusätzliche Punkte).
3. Berechnen Sie Nullstellen und Pole dieser Übertragungsfunktion. Ist das System stabil? Schwingend?
4. Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Sprungantwort des Systems für einen Sprung von 0 auf 1 zu der Zeit $t_0 = 0$. Wir machen die Hypothese dass $y(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$.
5. Berechnen Sie $y(\infty)$ wenn $u(t)$ den gleichen Sprung wie zuvor macht zuerst mit der Funktion die Sie zu der vorherigen Unteraufgabe hergeleitet haben und dann mit dem Laplace Endwertsatz der Laplace Transformation.
6. Welchen Reglertyp PD oder PI würden Sie zu Regelung des oben genannten Prozesses bevorzugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Die Übertragungsfunktion kann zuerst wie folgt transformiert werden:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4(s+1)}{s^2+5s+6}\\ (s^2+5s+6)Y(s) &= 4(s+1)U(s)\\ s^2Y(s)+5sY(s)+6Y(s) &= 4sU(s)+4U(s)\end{aligned}$$

   Da die Initialbedingungen für die Herleitung der Übertragungsfunktion vernachlässigt worden sind kann man die folgenden Transformationen machen um wieder in dem Zeitbereich die Differenzialgleichung zu bekommen:

$$\begin{aligned}U(s) &\rightarrow u(t)\\ Y(s) &\rightarrow y(t)\\ sU(s) &\rightarrow \dot{u}(t)\\ sY(s) &\rightarrow \dot{y}(t)\\ s^2Y(s) &\rightarrow \ddot{y}(t)\end{aligned}$$

   Wenn man diese Transformationen vornimmt bekommt man die folgende Differenzialgleichung:

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=4\dot{u}(t)+4u(t)$$

2. Um den Wirkungsplan am bestens zeichnen zu können kann man zuerst die Differentialgleichung leicht ändern:

$$\ddot{y}(t)=-5\dot{y}(t)-6y(t)+4\dot{u}(t)+4u(t)$$

   Der Wirkungsplan ist im Bild 4 zu sehen.

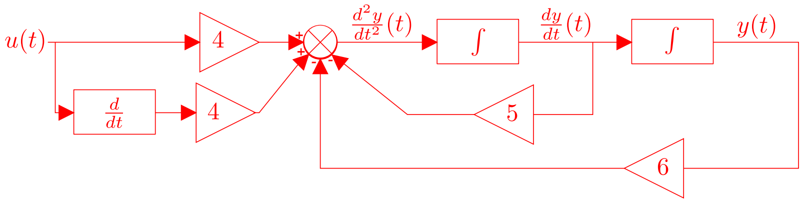


Abbildung 4: Wirkungsplan des Prozesses

3. Diese Übertragungsfunktion hat eine einzige Nullstelle:

$$n_1=-1$$

   und zwei reellen Pole:

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{-5-\sqrt{25-24}}{2}=-3\\ p_1 &= \frac{-5+\sqrt{25-24}}{2}=-2\end{aligned}$$

   Das System ist stabil da die 2 Pole negativen reellen Anteile haben. Das System ist nicht schwingend da diese zwei Pole reelle sind.

4. Zuerst muss man die Laplace Transformation der Anregung (Sprung) berechnen:

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

Die Laplace Transformation der Antwort $Y(s)$ bekommt man wie folgt:

$$Y(s) = G(s)L\{u(t)\} = \frac{4(s+1)}{s^2+5s+6}\frac{1}{s} = \frac{4(s+1)}{(s+3)(s+2)}\frac{1}{s}$$

Jetzt muss die Partialbruchzerlegung berechnet werden:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+3} + \frac{c}{s+2}$$

mit:

$$\begin{aligned} a &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ b &= \frac{4(-3+1)}{(-3+2)(-3)} = \frac{-8}{3} \\ c &= \frac{4(-2+1)}{(-2+3)(-2)} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned}$$

Jetzt muss man die Partialbruchzerlegung Laplace rücktransformieren:

$$\begin{aligned} y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{2}{3}\frac{1}{s}\right\} \\ &\quad + L^{-1}\left\{\frac{-8}{3}\frac{1}{s+3}\right\} \\ &\quad + L^{-1}\left\{2\frac{1}{s+2}\right\} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}e^{-3t} + 2e^{-2t}$$

5. Mit der oben hergeleiteten Gleichung bekommt man:

$$y(\infty) = \frac{2}{3} + 0 + 0 = \frac{2}{3}$$

Mit Laplace Endwertsatz hat man die folgende Gleichung:

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \to 0} G(s)L\{u(t)\} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{4(s+1)}{(s+3)(s+2)}\frac{1}{s} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Man bekommt das gleiche Ergebnis.

6. Hier ist ein PI Regler nötig um eine stationäre Ungenauigkeit zu vermeiden.

[Aufgabe 5] (*Linearisierung, 30 Punkte*) Ein Elektromagnet wird für die Regelung eines metallischen Körpers angewendet, siehe Bild 5

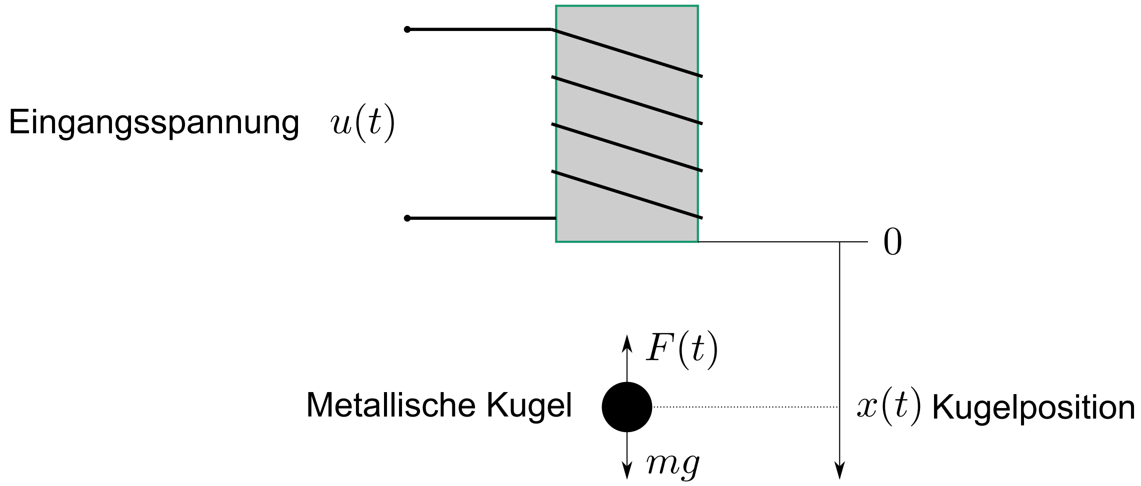


Abbildung 5: Magnetische Aufhängung

Der Prozess kann mit den folgenden Differentialgleichungen modelliert werden:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= = mg - F \\ F &= \frac{mgu^2(t)}{(a_1x(t)+a_0)^2} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\ddot{x}(t) = g - \frac{gu^2(t)}{(a_1x(t)+a_0)^2}$$

wobei $u(t)$ in (V) die Eingangsspannung des Elektromagneten ist. $x(t)$ ist die vertikale Position der Kugel in (m). a_0 und a_1 sind 2 Konstante, die nehmen die folgenden Werten:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 100 \end{aligned}$$

Wir machen die Hypothese dass $g = 10$ (m^2/s).

1. Beweisen Sie, dass dieser Prozess nichtlinear ist.
2. Zeichnen Sie den Wirkungsplan dieses nichtlinearen Prozesses.
3. Der Prozess ist im stationären Zustand mit $\overline{x} = 0.02$ (m). Wie gross ist die Spannung $\overline{u}$ von $u(t)$ in diesem Zustand?
4. Linearisieren Sie den Prozess um den Arbeitspunkt $(\overline{u}, \overline{x})$.
5. Zeichnen Sie den Wirkungsplan des linearisierten Prozesses.
6. Leiten Sie die Übertragungsfunktion des linearisierten Prozesses her.

Lösung:

1. Man kann beweisen dass die Lösung $x_{tot}(t)$ auf der Eingang $u_1(t)+u_2(t)$ nicht die Summe der Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf die Eingängen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ ist.
   Für $x_{tot}(t)$ gilt die folgenden Gleichung:
   $$\ddot{x_{tot}}(t) = g - \frac{g(u_1+u_2)^2(t)}{(a_1 x_{tot}(t)+a_0)^2}$$
   und für $x_1(t)$ und $x_2(t)$:
   $$\ddot{x}_1(t) = g - \frac{gu_1^2(t)}{(a_1x_1(t)+a_0)^2}$$
   $$\ddot{x}_2(t) = g - \frac{gu_2^2(t)}{(a_1x_2(t)+a_0)^2}$$
   Man kann die 2 letzten Gleichungen summieren. Daraus ergibt sich:
   $$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t)+\ddot{x}_2(t) &= g - \frac{gu_1^2(t)}{(a_1x_1(t)+a_0)^2} + g - \frac{gu_2^2(t)}{(a_1x_2(t)+a_0)^2} \\ (x_1 \ddot{+} x_2)(t) &= 2g - \frac{gu_1^2(t)}{(a_1x_1(t)+a_0)^2} - \frac{gu_2^2(t)}{(a_1x_2(t)+a_0)^2} \end{aligned}$$
   Es ist klar dass:
   $$(x_1 \ddot{+} x_2)(t) \neq \ddot{x_{tot}}(t)$$
   Daraus ergibt sich:
   $$x_1(t)+x_2(t) \neq x_{tot}(t).$$
   Der Überlagerungsprinzip gilt nicht für diesen Prozess. Aus diesem Grund ist das Prozess nicht linear.
2. Der Wirkungsplan ist im Bild 6 zu sehen.

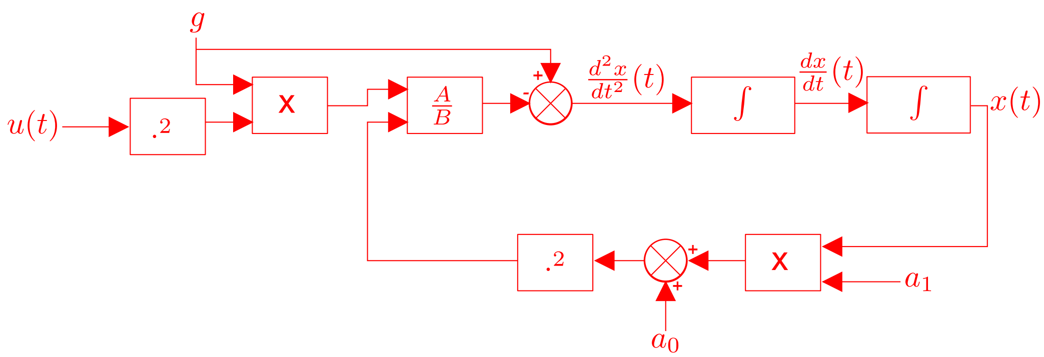


Abbildung 6: Wirkungsplan

3. Im stationären Zustand hat man die folgende Gleichung:

$$\ddot{x}(t) = 0 = g - \frac{g\overline{u}^2}{(a_1\overline{x} + a_0)^2}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{g\overline{u}^2}{(a_1\overline{x} + a_0)^2} &= g \\
\overline{u}^2 &= (a_1\overline{x} + a_0)^2 \\
\overline{u} &= a_1\overline{x} + a_0 \\
\overline{u} &= 4 \text{ (V)}
\end{aligned}$$

4. Jetzt geht es darum das Prozess um den Arbeitspunkt ($\overline{u} = 4, \overline{x} = 0.2$) zu linearisieren. Man definiert zuerst die folgenden Grössen:

$$\begin{aligned}
\Delta u(t) &= u(t) - \overline{u} \\
\Delta x(t) &= x(t) - \overline{x} \\
\Delta \ddot{x}(t) &= \ddot{x}(t)
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung des Prozesses kann wie folgt geschrieben werden:

$$\ddot{x}(t) - g + \frac{gu^2(t)}{(a_1x(t) + a_0)^2} = 0$$

Man defininert $F(\ddot{x}(t), x(t), u(t)) = \ddot{x}(t) - g + \frac{gu^2(t)}{(a_1x(t)+a_0)^2}$. Daraus ergibt sich die Differenzialgleichung des linearisierten Prozesses:

$$\begin{aligned}
& \left.\frac{\delta F}{\delta \ddot{x}}\right|_{(x=\overline{x},u=\overline{u})} \Delta\ddot{x}(t) \\
+ & \left.\frac{\delta F}{\delta x}\right|_{(x=\overline{x},u=\overline{u})} \Delta x(t) \\
+ & \left.\frac{\delta F}{\delta u}\right|_{(x=\overline{x},u=\overline{u})} \Delta u(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta\ddot{x}(t) \\
- & \frac{2a_1g\overline{u}^2}{(a_1\overline{x} + a_0)^3}\Delta x(t) \\
+ & \frac{2g\overline{u}}{(a_1\overline{x} + a_0)^2}\Delta u(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\ddot{x}(t) &= \frac{2a_1g\overline{u}^2}{(a_1\overline{x} + a_0)^3}\Delta x(t) - \frac{2g\overline{u}}{(a_1\overline{x} + a_0)^2}\Delta u(t) \\
\Delta\ddot{x}(t) &= 500\Delta x(t) - 5\Delta u(t)
\end{aligned}$$

5. Der Wirkungsplan des linearisierten Prozess ist im Bild 7 zu sehen.

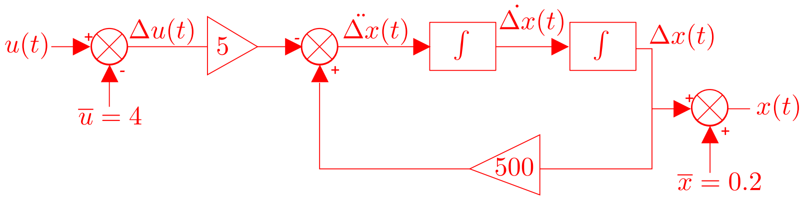


Abbildung 7: Wirkungsplan des linearisierten Prozesses

6. Aus der vorherigen Differentialgleichung kann man die Übertragungsfunktion des linearisierten Prozess herleiten. Man definiert zuerst $\Delta X(s) = L\{\Delta x(t)\}$ und $\Delta U(s) = L\{\Delta u(t)\}$ und danach ersetzt man in der Differentialgleichung $\Delta\ddot{x}(t)$ durch $s^2 \Delta X(s)$. Daraus ergibt sich:

$$s^2 \Delta X(s) = 500 \Delta X(s) - 5 \Delta U(s)$$

Die Übertragungsfunktion ist $G(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)}$.

$$G(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-5}{s^2 - 500}$$

[Aufgabe 6] (*Regelkreis Analyse und Synthese, 54 Punkte*) Im Bild 8 ist ein Regelkreis zu sehen:

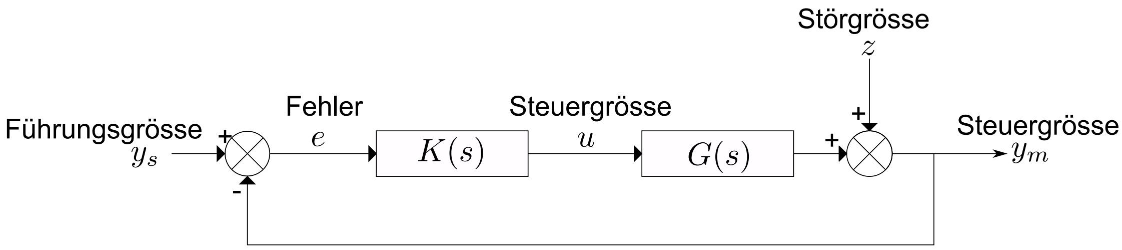


Abbildung 8: Blockschaltbild des Regelkreises

Der Prozess kann wir folgt modelliert werden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2}$$

1. Was für ein Streckentyp ist es? (mit oder ohne Ausgleich?)
2. Zuerst wird versucht das System mit einem Proportionalrelger zu regeln.

   $$K(s) = K_p$$

   Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises.
3. Zeichnen Sie das asymptotische Bode Diagramm und Nyquist Ortskurve des offenen Regelkreises.
4. Berechnen Sie die Führungs- und Störübertragungsfunktion. Was fällt dabei auf?
5. Verwenden Sie nun als Regler einen idealen PD Regler:

   $$K(s) = K_p\,(1 + T_d s)$$

   Zeichnen Sie das asymptotische Bode Diagramm und Nyquist Ortskurve des offenen Regelkreises für die 2 folgenden Fällen ($K_p = 1, T_d = 5$) und ($K_p = 1, T_d = 0.1$). Welche Verstärkungsreserve und Stabilitätsreserve können Sie aus den asymptotischen Bode-Diagrammen für diese 2 Fälle auslesen?
6. Berechnen Sie Verstärkungsreserve und Stabilitätsreseve für den Fall ($K_p = 1, T_d = 0.5$).
7. Leiten Sie für $K_p = 1$ und T_d undefiniert die Führungsübertragungsfunktion (geschlossener Regelkreis) und die Störübergtragungsfunktion (geschlossener Regelkreis) her. Für welche Werte von T_d ist das Verhalten des geschlossenen Regelkreises schwingend?
8. Berechnen den Endwert von $y_m(t)$ für einen Führungsgrössensprung als auch für einen Störgrössensprung.
9. Für $T_d = 0.5$, skizzieren Sie grob den Verlauf von $y_m(t)$ für einen Führungsgrössensprung als auch für einen Störgrössensprung.

Lösung:

1. Es geht hier um einen Doppelintegrator.
2. Die Übetragungsfunktion des offenen Regelkreises ist:

$$OLTF(s) = K_p \frac{3}{s^2}$$

3. Das asymptotische Bode-Diagramm des offenen Regelkreises ist im Bild 9 zu sehen.

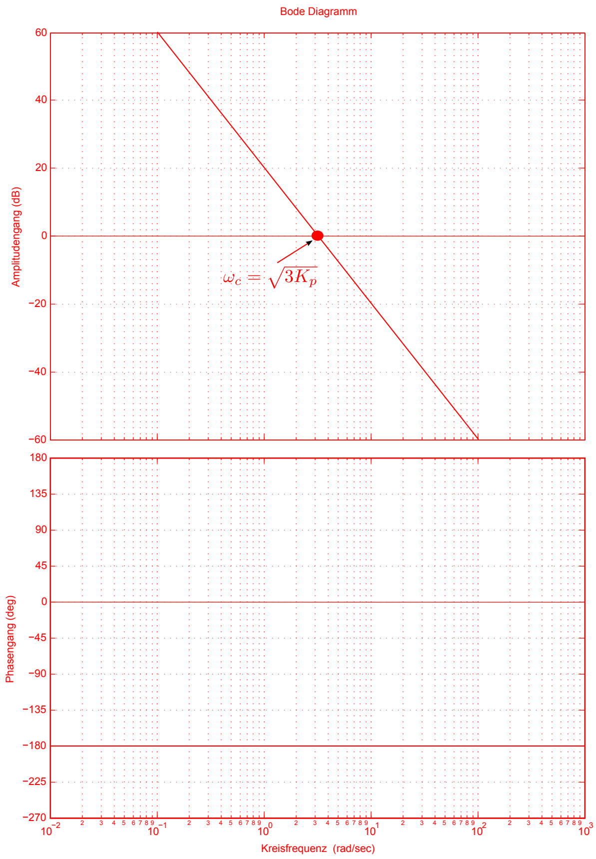


Abbildung 9: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises

Es kann festgestellt werden dass der Betrag von $OLTF(j\omega)$ zu der Frequenz $w_c = \sqrt{3K_p}$ gleich 1 ist.
Das asymptotische Nyquist Diagramm des offenen Regelkreises ist im Bild 10 zu sehen.

4. Die Führungsübertragungsfunktion ist:

$$\begin{aligned} CLTF_f(s) = \frac{Y_m(s)}{Y_s(s)} &= \frac{OLTF(s)}{1 + OLTF(s)} \\ &= \frac{K_p \frac{3}{s^2}}{1 + K_p \frac{3}{s^2}} \\ &= \frac{3K_p}{s^2 + 3K_p} \end{aligned}$$

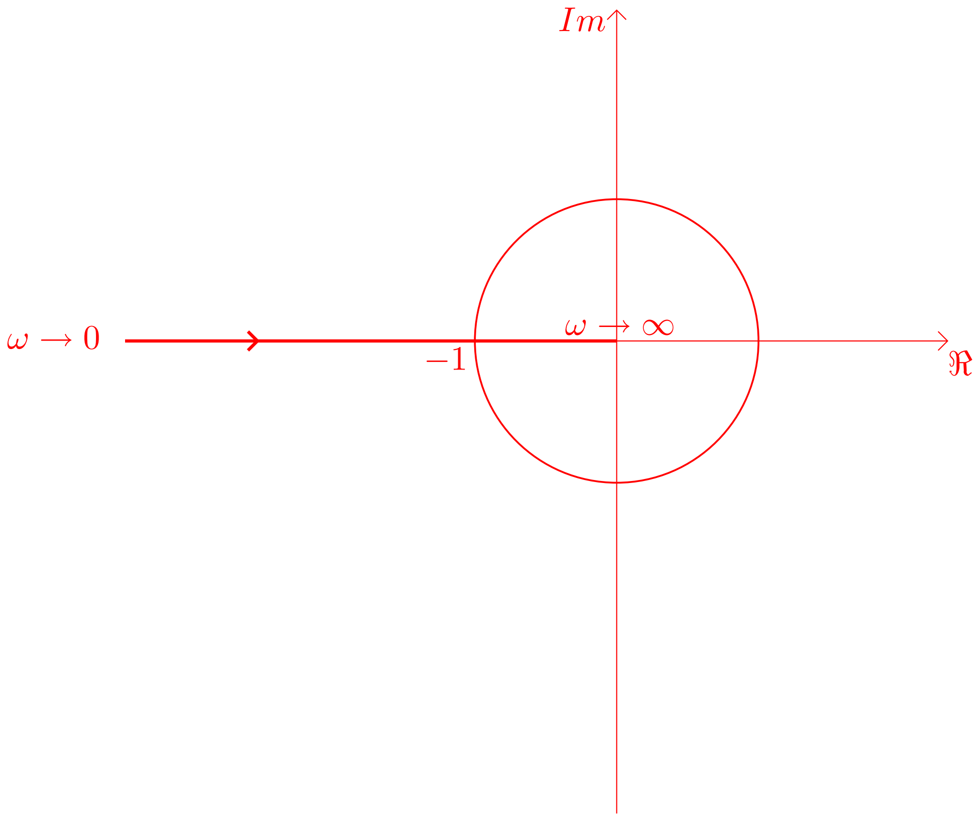


Abbildung 10: Nyquist-Diagramm des offenen Regelkreises

Die Störübertragungsfunktion:

$$
\begin{aligned}
CLTF_s(s) = \frac{Y_m(s)}{Z(s)} &= \frac{1}{1+OLTF(s)} \\
&= \frac{1}{1+K_p\frac{3}{s^2}} \\
&= \frac{s^2}{s^2+3K_p}
\end{aligned}
$$

5. Mit dem PD Regler kann die Übetragungsfunktion des offenen Regelkreises wie folgt berechnet werden:

$$OLTF(s) = K_p(1+T_d s)\frac{3}{s^2}$$

- Fall ($K_p = 1, T_d = 5$): Das asymptotische Bode-Diagramm ist im Bild 11 zu sehen:

  Aus diesem asymptotischen Bode-Diagramm kann eine Phasenreserve von 90° gelesen werden. Die Verstärkungsreserve ist unbegrenzt da die Phase nie 180° überschreitet.
- Fall ($K_p = 1, T_d = 0.1$): Das asymptotische Bode-Diagramm ist im Bild 12 zu sehen:

  Aus diesem asymptotischen Bode-Diagramm kann eine Phasenreserve von 0° gelesen werden. Die Verstärkungsreserve ist unbegrenzt da die Phase nie 180° überschreitet.

6. Die Verstärkungsreserve ist unbegrenz da die Phase nie 180° überschreitet. Für die Berechnung der Phasenreserve muss zuerst die Frequenz ω_d zu dem Punkt $|OLTF(j\omega_d)| = 1$ berechnet werden. Zuerst muss $|OLTF(j\omega)|$ wie folgt berechnet werden:

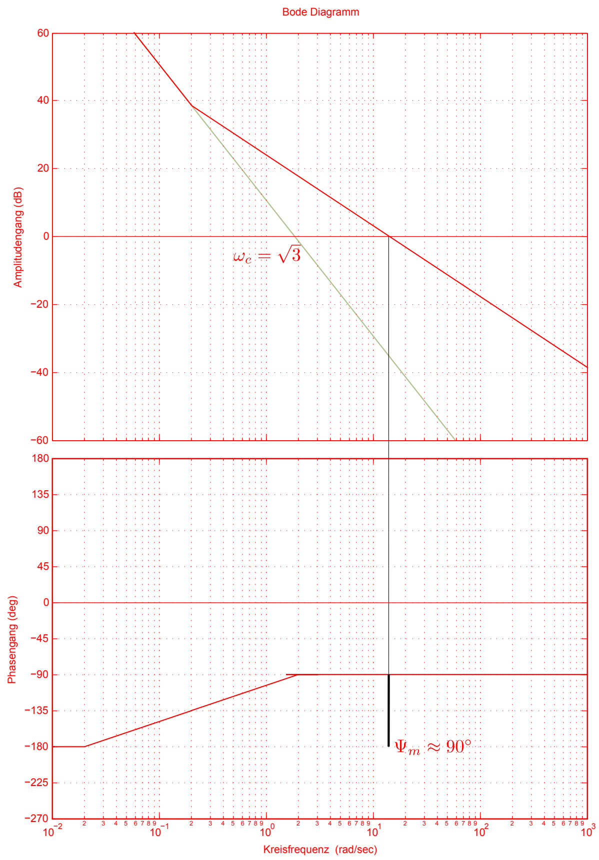


Abbildung 11: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises für den Fall 1

$$
\begin{aligned}
|OLTF(j\omega)| &= \left| -K_p(1 + jT_d\omega)\frac{3}{\omega^2} \right| \\
&= 3Kp\frac{\sqrt{1 + T_d^2\omega^2}}{\omega^2}
\end{aligned}
$$

Die folgende Gleichung muss für ω jetzt gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
|OLTF(j\omega_d)| &= 1 \\
3Kp\frac{\sqrt{1 + T_d^2\omega^2}}{\omega^2} &= 1 \\
3Kp\sqrt{1 + T_d^2\omega^2} &= \omega^2 \\
9K_p^2\left(1 + T_d^2\omega^2\right) &= \omega^4 \\
\omega^4 - 9K_p^2T_d^2\omega^2 - 9K_p^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Wir definieren $\Omega = \omega^2$, daraus ergibt sich:

$$\Omega^2 - 9K_p^2T_d^2\Omega - 9K_p^2 = 0$$

Die 2 Lösungen zu diesem Polynom sind:

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{9K_p^2T_d^2 - \sqrt{9K_p^2T_d^2 + 36K_p^2}}{2} = -2.079 \\
\Omega_2 &= \frac{9K_p^2T_d^2 + \sqrt{9K_p^2T_d^2 + 36K_p^2}}{2} = 4.329
\end{aligned}
$$

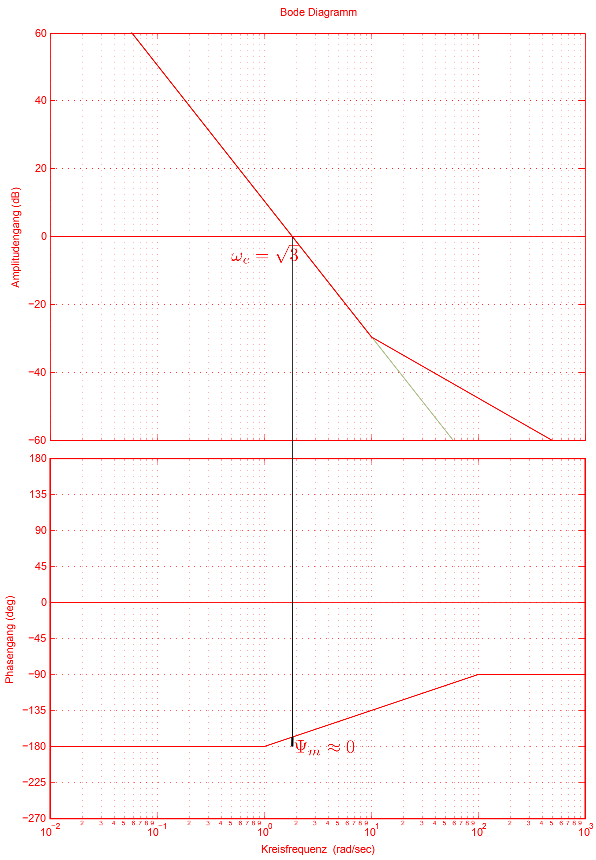


Abbildung 12: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises für den Fall 2

Es gibt nur eine positive ω als Lösung:

$$\omega_d = \sqrt{\Omega_2} = 2.08 \text{ (rad/s)}$$

Jetzt muss die Phase $\arg(OLTF(j\omega_d))$ zu diesem Punkt berechnet werden. Real- und Imaginär-Anteil von $OLTF(j\omega)$ müssen berechnet werden:

$$\begin{aligned} OLTF(j\omega) &= -K_p(1 + jT_d\omega)\frac{3}{\omega^2} \\ &= \underbrace{-\frac{3K_p}{\omega^2}}_{\text{Re}} + j\underbrace{\frac{-3K_pT_d\omega}{\omega^2}}_{\text{Im}} \end{aligned}$$

Jetzt kann $\arg(OLTF(j\omega_d))$ wir folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \arg(OLTF(j\omega_d)) &= \arctan\left(\frac{\text{Im}(OLTF(j\omega))}{\text{Re}(OLTF(j\omega))}\right) \\ &= \arctan\left(T_d\omega\right) \\ &= -133.87\ ^\circ \end{aligned}$$

Daraus kann die Phasenreserve Ψ_m berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Psi_m &= 180 + \arg(OLTF(j\omega_d)) \\ &= 46.13\ ^\circ \end{aligned}$$

7. Die Führungsübertragungsfunktion kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} CLTF_f(s) = \frac{Y_m(s)}{Y_s(s)} &= \frac{OLTF(s)}{1+OLTF(s)} \\ &= \frac{\frac{3(1+T_d s)}{s^2}}{1+\frac{3(1+T_d s)}{s^2}} \\ &= \frac{3(1+T_d s)}{s^2+3(1+T_d s)} \\ &= \frac{3(1+T_d s)}{s^2+3T_d s+3} \end{aligned}$$

Die Störübertragungsfunktion kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} CLTF_s(s) = \frac{Y_m(s)}{Z(s)} &= \frac{1}{1+OLTF(s)} \\ &= \frac{1}{1+\frac{3(1+T_d s)}{s^2}} \\ &= \frac{s^2}{s^2+3T_d s+3} \end{aligned}$$

Das Verhalten des geschlossenen Regelkreises ist schwingend wenn es 2 konjgierten komplexe Pole in dem Nenner von $CLTF_f(s)$ und $CLTF_s(s)$ gibt.
Die Wurzeln dieses Polynoms sind:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-3T_d-\sqrt{9T_d^2-12}}{2} \\ s_2 &= \frac{-3T_d+\sqrt{9T_d^2-12}}{2} \end{aligned}$$

Diese Wurzeln sind komplex wenn $9T_d^2-12<0$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 9T_d^2-12 &< 0 \\ 9T_d^2 &< 12 \\ T_d^2 &< \frac{12}{9} \\ T_d &< \sqrt{\frac{12}{9}} \\ T_d &< 1.1547 \text{ (s)} \end{aligned}$$

Das Verhalten des geschlossenen Regelkreises ist schwingend wenn $T_d < 1.1547$ (s).

8. Der Endwertsatz der Laplace Transformation kann zu diesem Zweck gebraucht werden. $Y_s(s)$ und $Z(s)$ müssen durch $\frac{1}{s}$ ersetzt werden. Daraus ergibt sich für den Führungsgrössensprung:

$$\begin{aligned} y_m(t=\infty) &= \lim_{s\to 0} sCLTF_f(s)\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} CLTF_f(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{3(1+T_d s)}{s^2+3T_d s+3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Daraus kann es festgestellt werden dass es keine stationäre genauigkeit gibt (nur für eine konstante Führungsgrösse).
Und für den Störgrössensprung:

$$
\begin{aligned}
y_m(t=\infty) &= \lim_{s\to 0} sCLTF_s(s)\frac{1}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} CLTF_s(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{s^2+3T_d s+3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

9. Der Verlauf von $y_m(t)$ für einen Führungsgrössensprung ist im Bild 13 zu sehen:

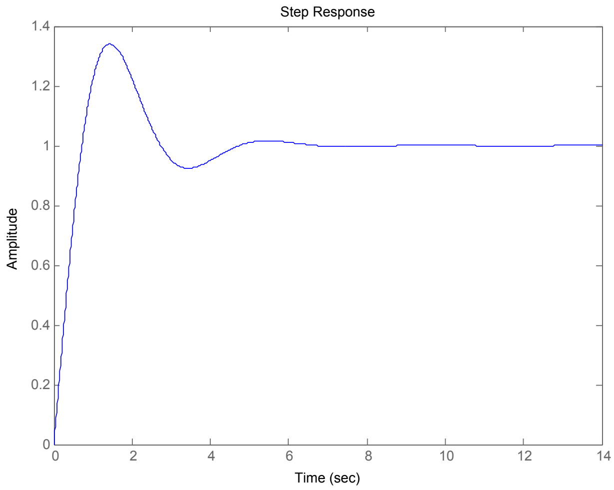


Abbildung 13: Verlauf vom $y_m(t)$ für einen Führungsgrössensprung

Der Verlauf von $y_m(t)$ für einen Störgrössensprung ist im Bild 14 zu sehen:

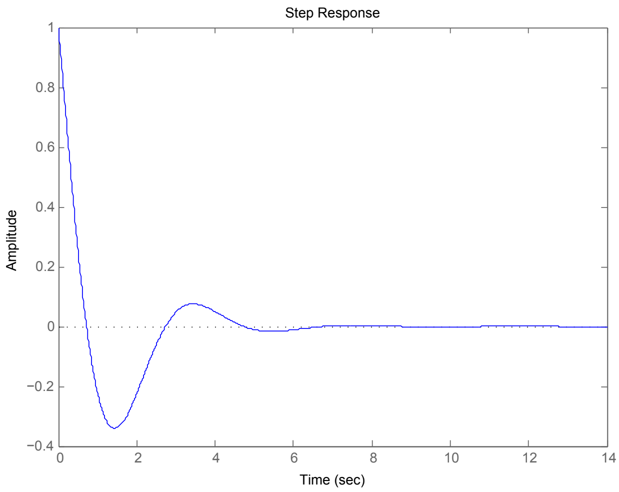


Abbildung 14: Verlauf vom $y_m(t)$ für einen Störgrössensprung

[Aufgabe 7] (*IT_1T_t Prozessidentifikation, 34 Punkte*) Die Sprungantwort eines ungeregelten Systems ist im Bild 15 zu sehen. Der Sprung hat eine Amplitude von 1. Die Einheit der x-Achse ist in Sekunden (sec).

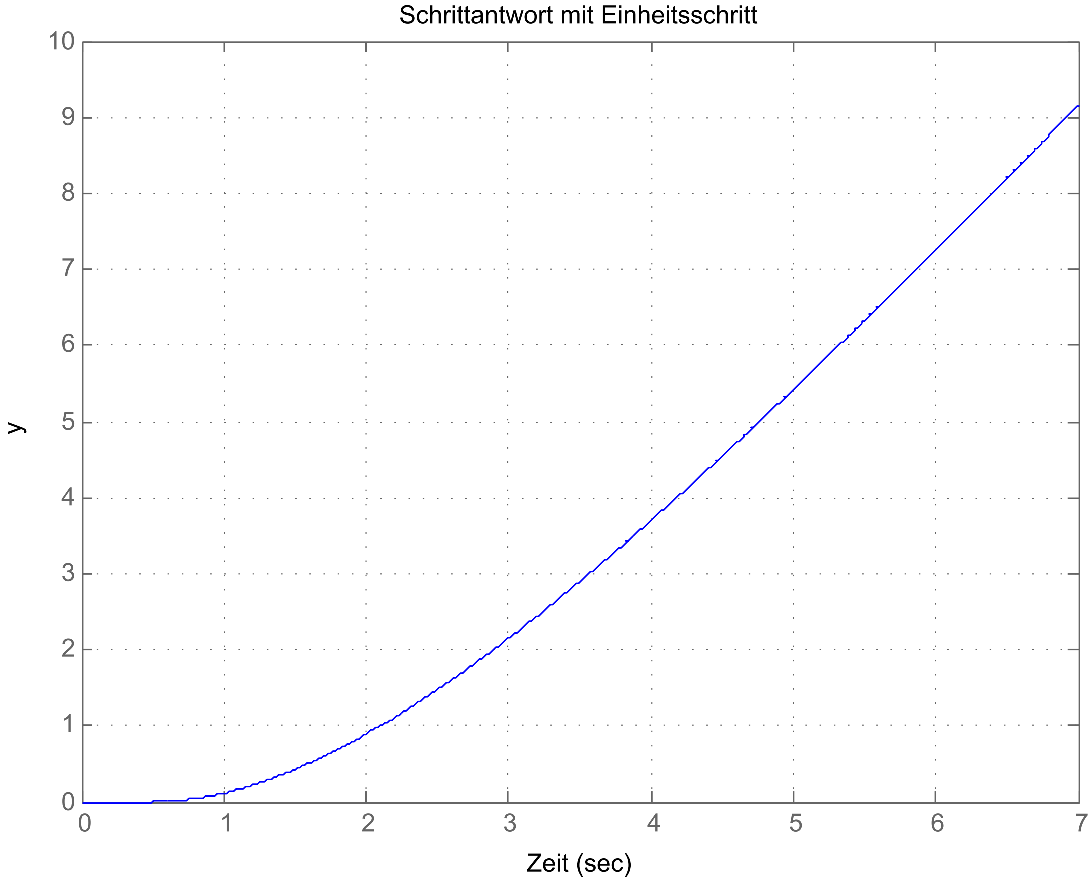


Abbildung 15: Sprungantwort des Prozesses

1. Leiten Sie aus der Sprungantwort die Übertragungsfunktion des Prozesses $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ her. Die Sprungantwort des Prozesses ist gegeben durch:

$$y_\epsilon(t) = K\left(t - T_t - T\left(1 - e^{-\frac{(t-T_t)}{T}}\right)\right) \text{ für } t \geq T_t$$

   Wir gross werden K, T und T_t.

2. Es wird nun ein idealer PD-Regler mit der folgenden Übertragungsfuntion $K(s)$ eingesetzt:

$$K(s) = K_p(1 + sT_d) \tag{1}$$

   wobei die Nullstelle des Reglers den einen Pol der Übertragung des Prozesses kompensieren soll. Wie gross wird somit T_d? Leiten Sie jetzt die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises her.

3. Skizzieren Sie die Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises für $K_p = 0.25$.

4. Berechnen Sie für $K_p = 0.25$ die Phasenreserve (Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Kreisfrequenz bei der der Betrag eins wird).

5. Gibt es Werte für K_p die zu einem instabilen Verhalten führen? Wenn ja, bestimmen Sie den Wert von K_p für den die Ortskurve durch den kritischen Pukt (-1,0) geht.

6. Leiten Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises her.

7. Gibt es eine stationäre Ungenauigkeit für das Führungsverhalten wenn der Sollwert einen Sprung macht?

Lösung:

1. Die Ermittlung der Parameter kann in der Abbildung 16 gesehen werden.

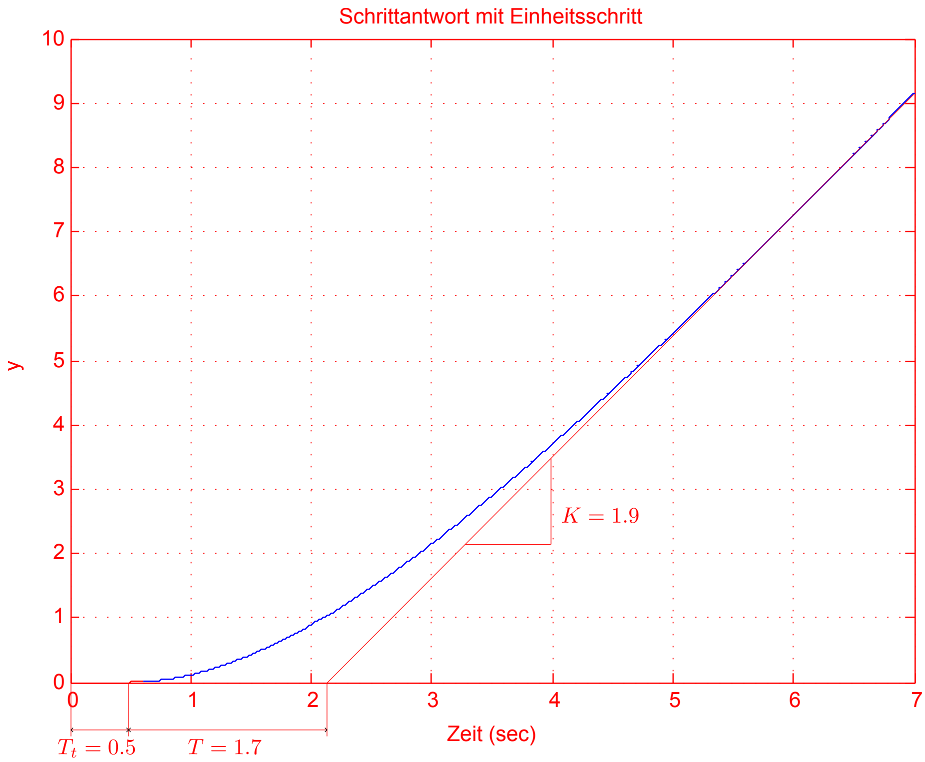


Abbildung 16: Ermittlung der Parameter

Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
T_t &= 0.5 \\
T &= 1.7 \\
K &= 1.9
\end{aligned}
$$

womit die Übertragunsfunktion des Prozesses $G(s)$ ist:

$$G(s) = e^{-T_t s} \frac{K}{s(1+Ts)}$$

2. Mit dem idealen PD Regler kann die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises wie folgt berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
OLTF(s) &= K(s)G(s) \\
&= K_p(1+T_d s)e^{-T_t s}\frac{K}{s(1+Ts)} \\
&= e^{-T_t s}K_p(1+T_d s)\frac{K}{s(1+Ts)}
\end{aligned}
$$

Die Nullstelle des Reglers kompensiert den Pol des Reglers wenn $T_d = T$. Daraus ergibt sich für $OLTF(s)$:

$$OLTF(s) = e^{-T_t s}\frac{KK_p}{s}$$

3. Es kann festgestellt werden dass $OLTF(s)$ ein Integrator mit Totzeit ist. Um das Nyquist-Diagramm skizzieren zu können müssen Realteil und Imaginärteil von $OLTF(j\omega)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
OLTF(j\omega) &= e^{-jT_t\omega}\frac{KK_p}{j\omega} \\
&= -j\frac{(\cos(\omega T_t) - j\sin(\omega T))}{\omega} \\
&= \underbrace{-\frac{KK_p\sin(\omega T)}{\omega}}_{\mathrm{Re}\{OLTF(j\omega)\}} + j\underbrace{\frac{-KK_p\cos\omega T}{\omega}}_{\mathrm{Im}\{OLTF(j\omega)\}}
\end{aligned}$$

Der Betrag kann auch berechnet werden:

$$|OLTF(j\omega)| = \frac{KK_p}{\omega}$$

Es kann festgestellt werden dass der Betrag immer kleiner wird. Es kann auch festgestellt werden dass der Realteil von $OLTF(j\omega)$ nach $-KK_pT$ konvergiert wenn ω sich an den Wert 0 annähert. Der Imaginäranteil entwickelt sich Richtung $-\infty$ wenn ω sich an den Wert 0 annähert.

Wegen der Totzeit nimmt die Phase unendlich ab. Der Startwert liegt bei $-90°$ wegen dem Integrator.

Aus diesen Kenntnissen kann das Nyquist-Diagramm von $OLTF(s)$ asymptotisch gezeichnet werden. Dieses Diagramm kan in der Abbildung 17 gesehen werden.

4. Die Frequenz ω_d wo $|OLTF(j\omega_d)| = 1$ gilt, muss berechnet werden:

$$\begin{aligned}
|OLTF(j\omega_d)| = \frac{KK_p}{\omega_d} &= 1 \\
\omega_d &= KK_p \\
&= 0.475 \text{ (rad/s)}
\end{aligned}$$

Zu dieser Frequenz muss das Argument von $OLTF(j\omega)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\arg(OLTF(j\omega_d)) &= -\frac{\pi}{2} - T_t\omega_d \\
&= -1.8083 \text{ (rad)} \\
&= -103.6\ °
\end{aligned}$$

Die Phasenreserve kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\psi_m &= \pi + \arg(OLTF(j\omega_d)) \\
&= 76.4\ °
\end{aligned}$$

5. Es kann aus dem Nyquist-Diagramm gelesen werden dass höhe Werte für K_p zu einem instabilen Verhalten führen können. Der Grenzfall wird erreicht wenn $\psi_m = 0$. Daraus ergibt sich:

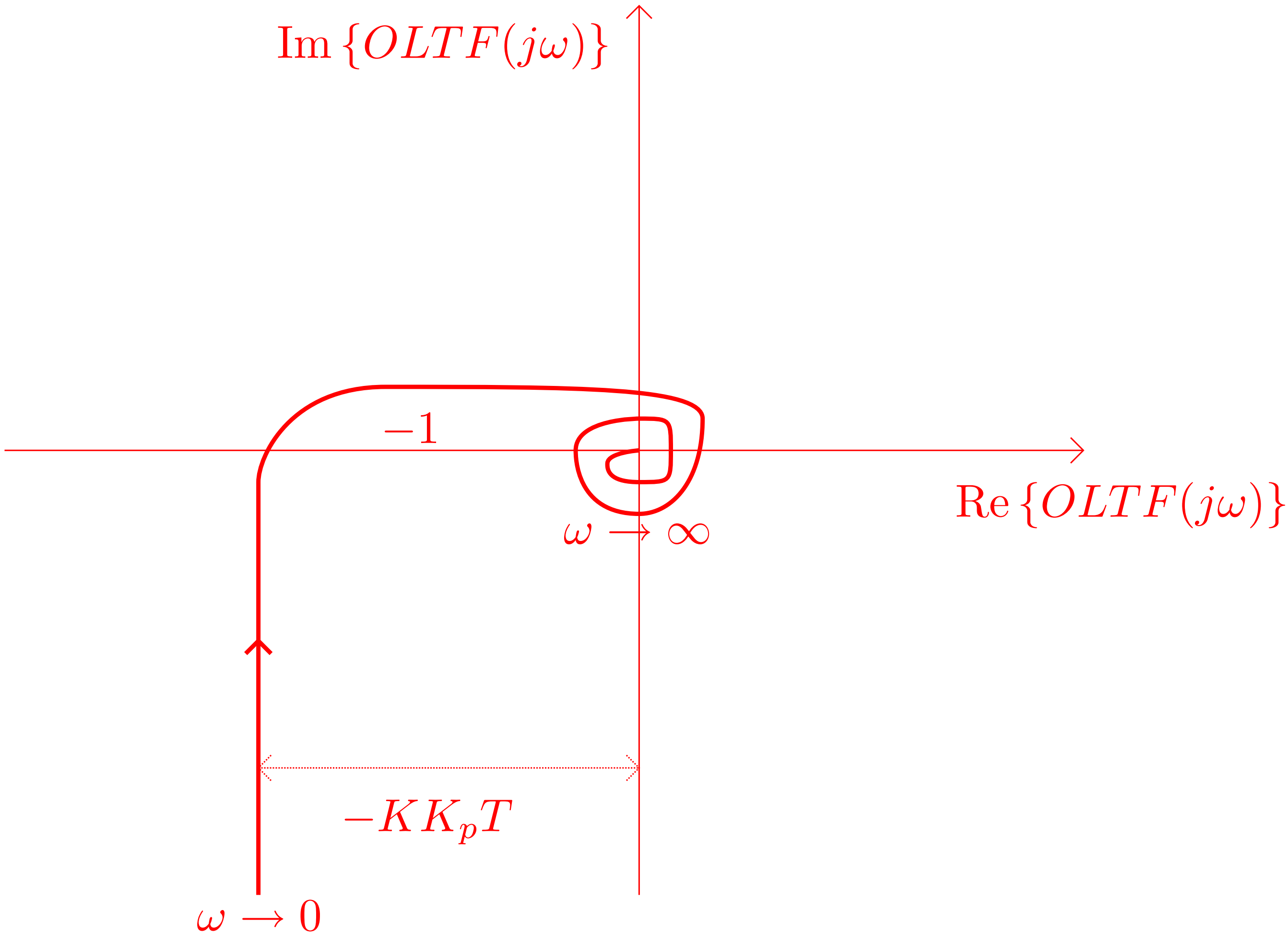


Abbildung 17: Nyquiat-Diagramm von $OLTF(s)$

$$
\begin{aligned}
\arg(OLTF(j\omega_d)) &= -\pi \\
-\frac{\pi}{2} - T_t\omega_d &= -\pi \\
\omega_d &= \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{T_t} \\
\omega_d &= \frac{\pi}{2T_t} \\
\omega_d &= 3.14 \text{ (rad/s)}
\end{aligned}
$$

Aus der Formel $|OLTF(j\omega_d)| = \frac{KK_p}{\omega_d} = 1$ kann ein Grenzwert für K_p berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
K_p &= \frac{\omega_d}{K} \\
&= 1.6535
\end{aligned}
$$

Wenn K_p grösser als 1.6535 ist der geregelte Prozess instabil.

6. Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises kann wie folgt hergeleitet wer-

den:

$$\begin{aligned} CLTF(s) &= \frac{OLTF(s)}{1+OLTF(s)} \\ &= \frac{e^{-T_t s}\frac{KK_p}{s}}{1+e^{-T_t s}\frac{KK_p}{s}} \\ &= \frac{e^{-T_t s}KK_p}{s+e^{-T_t s}KK_p} \end{aligned}$$

7. Die Übertragungsfunktion $S(s) = \frac{E(s)}{Y_s(s)} = \frac{1}{1+OLTF(s)}$ muss zuerst hergeleitet werden, womit $E(s)$ der Reglerfehler und $Y_s(s)$ die Führungsgrösse sind:

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1+OLTF(s)} \\ &= \frac{1}{1+e^{-T_t s}\frac{KK_p}{s}} \\ &= \frac{s}{s+e^{-T_t s}KK_p} \end{aligned}$$

Der Laplace Endwertsatz kann für $E(s)$ gebraucht werden:

$$\begin{aligned} e(t\to\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} sS(s)Y_s(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{s}{s+e^{-T_t s}KK_p}\frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da $e(t\to\infty) = 0$ gibt es keine stationäre Ungenauigkeit wenn die Führungsgrösse einen Sprung macht.

[Aufgabe 8] (*Übertragungsfunktionen, 40 Punkte*) Im Bild 18 ist eine Rückkopplungsschaltung zu untersuchen.

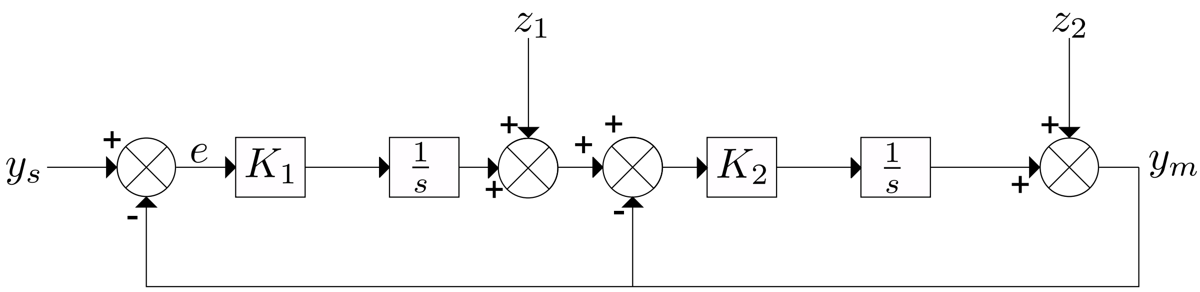


Abbildung 18: Blockschaltbild der Rückkopplungsschaltung

1. Berechnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen:

$$
\begin{aligned}
G_{y_m,y_s} &= \frac{Y_m(s)}{Y_s(s)} \text{ mit } z_1 = z_2 = 0 \\
G_{y_m,z_1} &= \frac{Y_m(s)}{Z_1(s)} \text{ mit } z_2 = y_s = 0 \\
G_{y_m,z_2} &= \frac{Y_m(s)}{Z_2(s)} \text{ mit } z_1 = y_s = 0
\end{aligned}
$$

2. Für den normierten Nenner $s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2$ wählen Sie nun $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\omega_0 = 4$. Bestimmen Sie für diese Werte K_1 und K_2 und daraus die 3 oben definierten Übertragungsfunktionen. Mit welchem Überschwingen müssen Sie rechnen wenn ein Führungsschritt anliegt?
3. Welcher stationäre Fehler $e(\infty)$ stellt sich ein, falls an allen drei Eingänge gleichzeitig ein Schritt angelegt wird?
4. Skizzieren Sie die Bode Diagramme von G_{y_m,y_s}. Was ändert sich an diesem Bode Diagramm für die 2 anderen Übertragunsfunktionen G_{y_m,z_1} und G_{y_m,z_2} bezüglich asymptotischen Amplitudengang und Phasengang.

Lösung:

1. Man kann zuerst das Blockschaltbild mit Signalen ergänzen. Man bekommt das Blockschaltbild vom Bild 19.

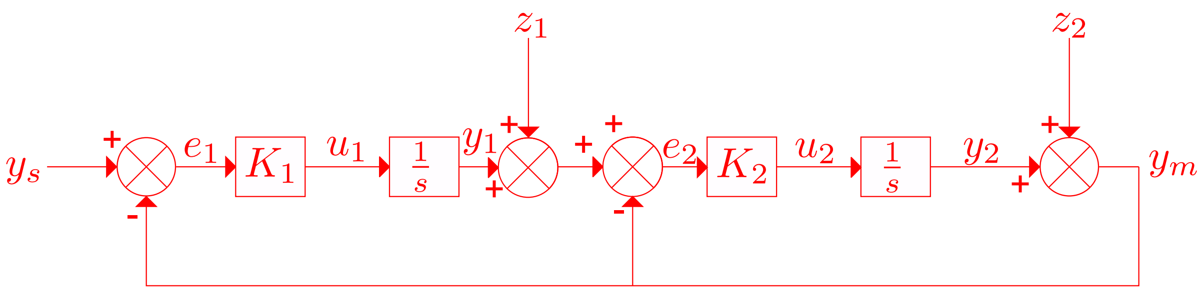


Abbildung 19: Blockschaltbild der Rückkopplungsschaltung mit Signalen

Aus diesem Bild kann man die folgenden Gleichungen herleiten:

$$\begin{aligned}
e_1 &= y_s - y_m \\
u_1 &= K_1 e_1 = K_1(y_s - y_m) \\
y_1 &= \frac{1}{s} u_1 = \frac{K_1}{s}(y_s - y_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= z_1 + y_1 - y_m = z_1 + \frac{K_1}{s}(y_s - y_m) - y_m \\
u_2 &= K_2 e_2 = K_2\left[z_1 + \frac{K_1}{s}(y_s - y_m) - y_m\right] \\
y_2 &= \frac{1}{s} u_2 = \frac{K_2}{s}\left[z_1 + \frac{K_1}{s}(y_s - y_m) - y_m\right] \\
y_m &= y_2 + z_2 = \frac{K_2}{s}\left[z_1 + \frac{K_1}{s}(y_s - y_m) - y_m\right] + z_2
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung kann man versuchen y_m auf der linken Seite zu isolieren. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
y_m\left[1 + \frac{K_1 K_2}{s^2} + \frac{K_2}{s}\right] &= \frac{K_2}{s}\left[z_1 + \frac{K_1}{s} y_s\right] + z_2 \\
y_m\left[\frac{s^2 + K_2 s + K_1 K_2}{s^2}\right] &= \frac{K_1 K_2}{s^2} y_s + \frac{K_2}{s} z_1 + z_2
\end{aligned}$$

$$y_m = \frac{K_1 K_2}{s^2 + K_2 s + K_1 K_2} y_s + \frac{K_2 s}{s^2 + K_2 s + K_1 K_2} z_1 + \frac{s^2}{s^2 + K_2 s + K_1 K_2} z_2$$

Aus dieser Gleichung kann man die drei gesuchten Übertragungsfunktionen herleiten:

$$\begin{aligned}
G_{y_m,y_s} &= \left.\frac{Y_m(s)}{Y_s(s)}\right|_{z_1=z_2=0} = \frac{K_1K_2}{s^2+K_2s+K_1K_2} \\
G_{y_m,z_1} &= \left.\frac{Y_m(s)}{Z_1(s)}\right|_{z_2=y_s=0} = \frac{K_2s}{s^2+K_2s+K_1K_2} \\
G_{y_m,z_2} &= \left.\frac{Y_m(s)}{Z_2(s)}\right|_{z_1=y_s=0} = \frac{s^2}{s^2+K_2s+K_1K_2}
\end{aligned}$$

2. Man hat die folgende Beziehung für das Nennerpolynom:

$$s^2+K_2s+K_1K_2 = s^2+2d\omega_0 s+\omega_0^2$$

Daraus kann man die 2 folgenden Gleichungen herleiten:

$$\begin{aligned}
K_2 &= 2d\omega_0 = 2\frac{4}{\sqrt{2}} = 5.6569 \\
K_1 &= \frac{\omega_0^2}{K_2} = 4^2\frac{\sqrt{2}}{8} = 2\sqrt{2} = 2.8284
\end{aligned}$$

Für die Analyse des Überschwingends beim Führungsschritt ist die folgende Übertragungsfunktion relevant:

$$\begin{aligned}
G_{y_m,y_s} = \left.\frac{Y_m(s)}{Y_s(s)}\right|_{z_1=z_2=0} &= \frac{K_1K_2}{s^2+K_2s+K_1K_2} \\
&= \frac{K\omega_0^2}{s^2+2d\omega_0+\omega_0^2}
\end{aligned}$$

Die Verstärkung K ist gleich 1, somit kann die folgende Formel angewendet werden für die Berechnung des Überschwingens U:

$$U = e^{-\frac{d\pi}{\sqrt{1-d^2}}}$$

Mit $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$ lässt sich $U=0.0432$ berechnen.

3. Das übliche Vorgehen besteht darin $e(s)$ als eine Funktion von $y_s(s)$, $z_1(s)$ und $z_2(s)$ auszudrücken. Anschliessend muss der Laplace Endwertsatz für $e(s)$ gebraucht werden. In dieser Übung wurde schon $y_m(s)$ als eine Funktion von $y_s(s)$, $z_1(s)$ und $z_2(s)$ ausgedrückt:

$$y_m = \frac{K_1K_2}{s^2+K_2s+K_1K_2}y_s + \frac{K_2s}{s^2+K_2s+K_1K_2}z_1 + \frac{s^2}{s^2+K_2s+K_1K_2}z_2$$

Der Laplace Endwertsatzt kann erst für y_m gebraucht werden:

$$y_m(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} s y_m(s)$$

Wenn y_s, z_1 und z_2 einen Schritt gleichzeitig machen können die drei Eingänge $y_s(s)$, $z_1(s)$ und $z_2(s)$ durch $\frac{1}{s}$ ersetzt werden. Daraus ergibt sich:

$$y_m(s) = \frac{K_1K_2}{s^2+K_2s+K_1K_2}\frac{1}{s} + \frac{K_2s}{s^2+K_2s+K_1K_2}\frac{1}{s} + \frac{s^2}{s^2+K_2s+K_1K_2}\frac{1}{s}$$

Der Laplace Endwertsatz:

$$\begin{aligned} y_m(t\to\infty) &= \lim_{s\to 0} s y_m(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{K_1K_2}{s^2+K_2s+K_1K_2} + \frac{K_2 s}{s^2+K_2s+K_1K_2} + \frac{s^2}{s^2+K_2s+K_1K_2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da $y_m(t \to \infty) = 1$ für einen Sprung mit einer Amplitude von eins gibt es keine stationäre Ungenauigkeit ($e(t \to \infty) = 0$).

4. Das asymptotische Bode-Diagramm und echte Bode-Diagramm vom G_{y_m,y_s} können im Bild 20 gesehen werden.

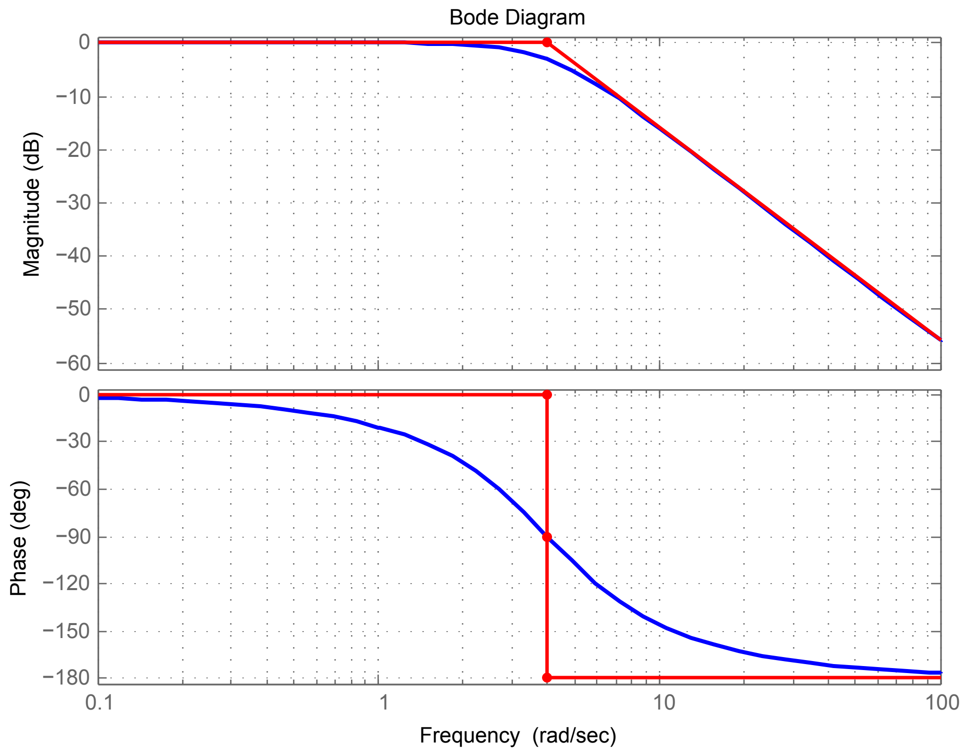
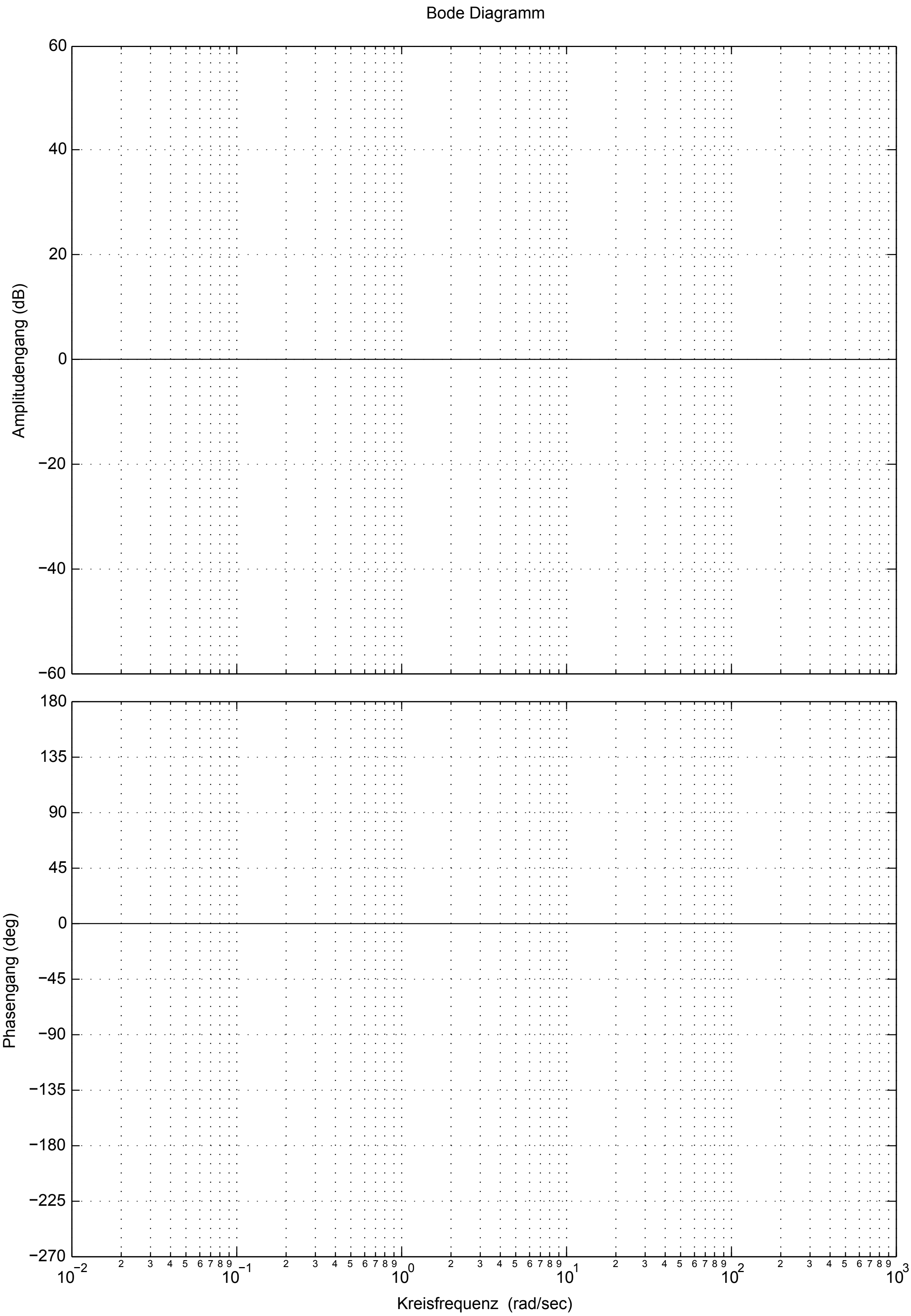
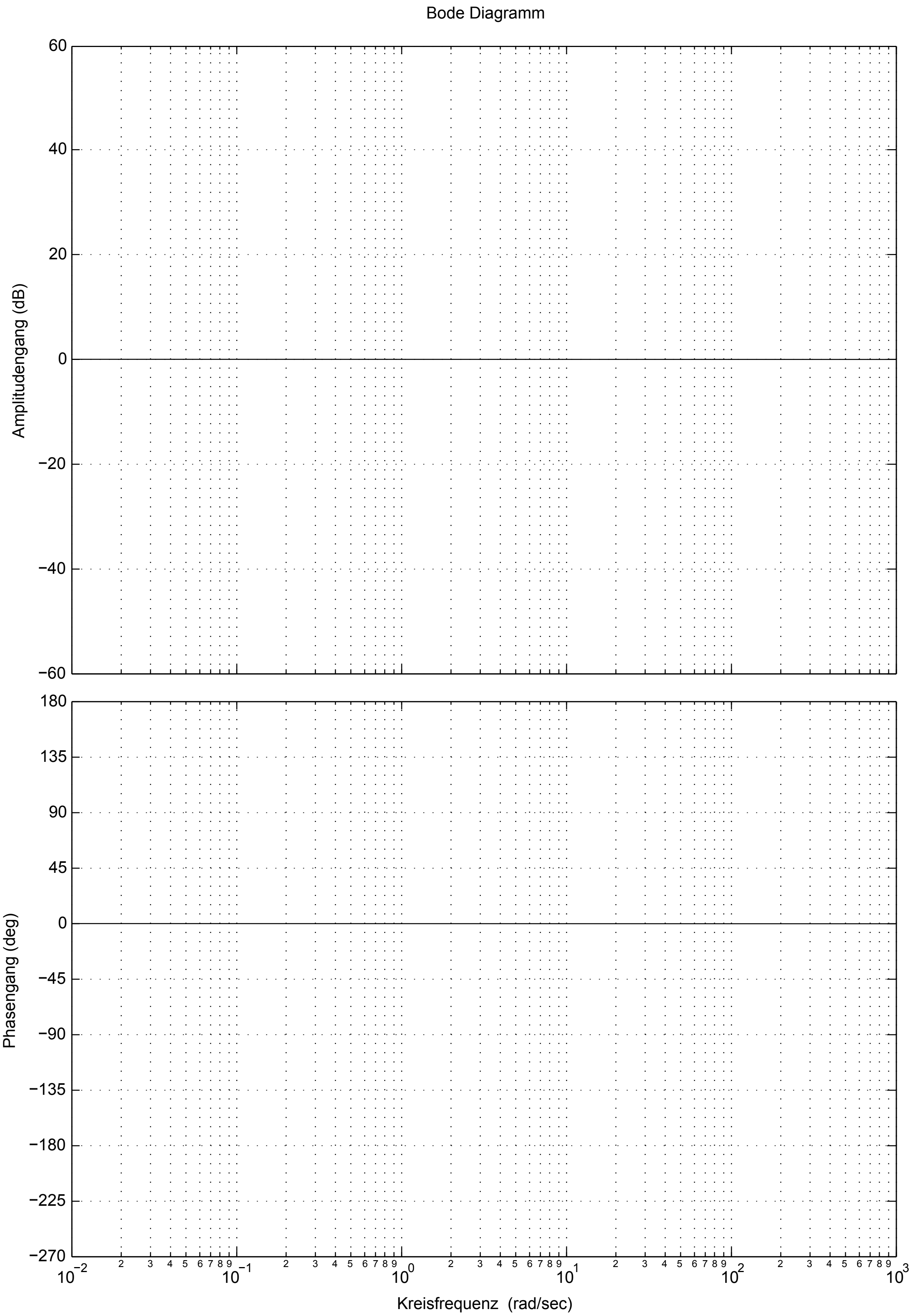
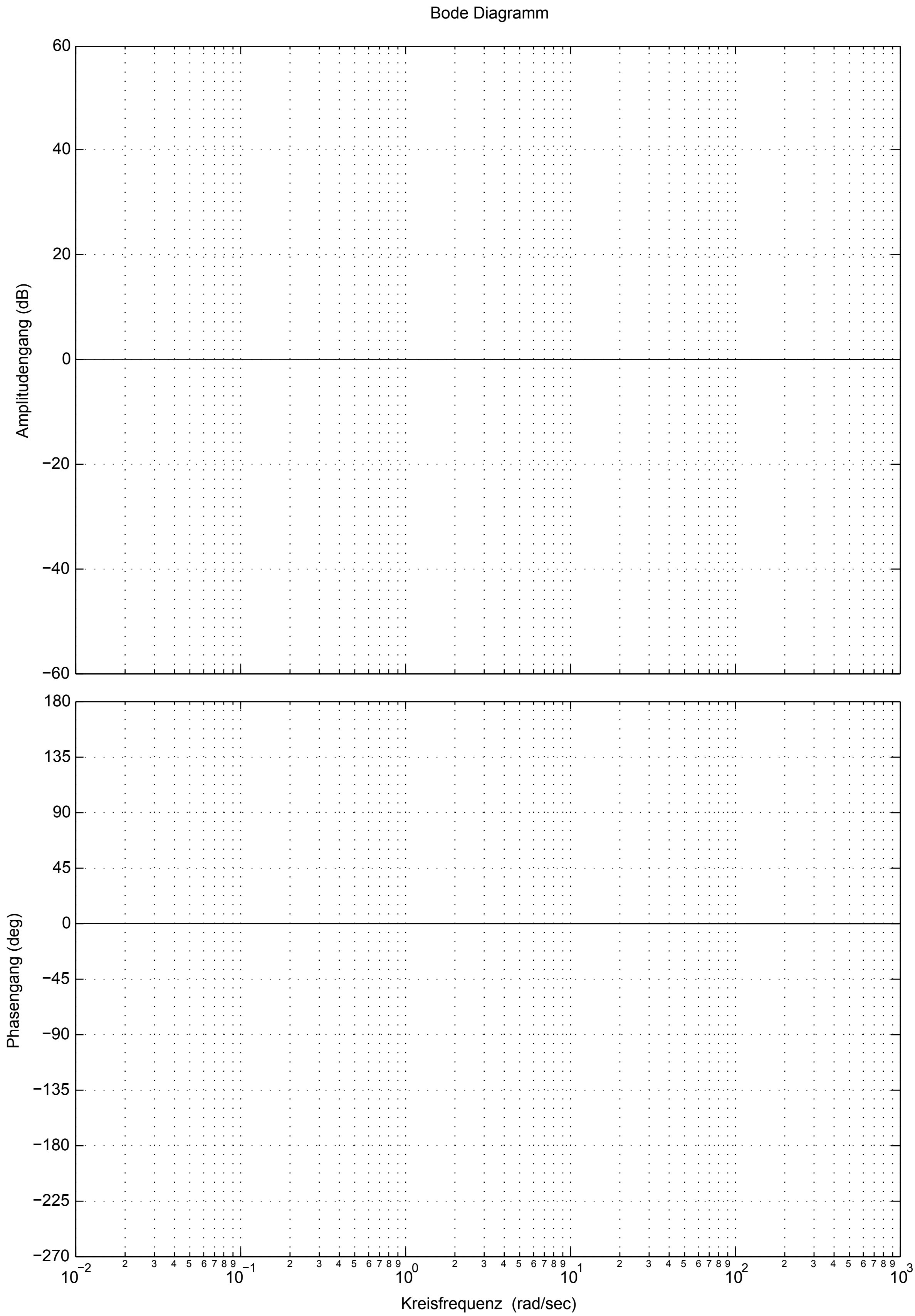


Abbildung 20: Bode-Diagramme vom G_{y_m,y_s}

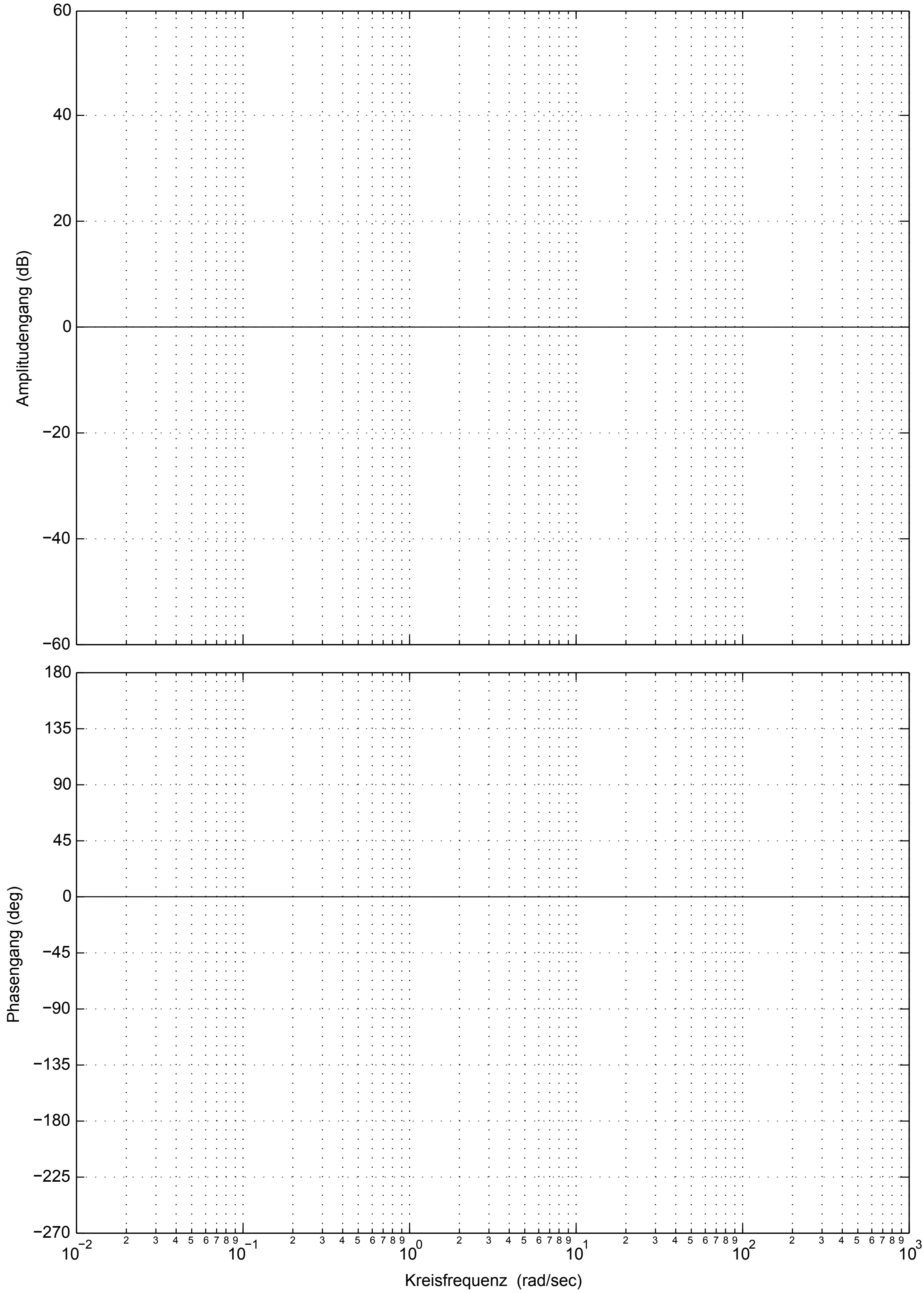
Wegen dem s im Zähler vom G_{y_m,z_1} müssen für sein Bode-Diagramm im ganzen Frequenzbereich 20 (dB/dek) im obigen Bode-Diagramm addiert werden (es bedeutet +20 (dB/dek) im $[0,\omega_0]$ (rad/s) und -20 (dB/dek) im $[\omega_0,\infty]$ (rad/s)).
Wegen dem s^2 im Zähler vom G_{y_m,z_2} müssen für sein Bode-Diagramm im ganzen Frequenzbereich 40 (dB/dek) im obigen Bode-Diagramm hinzugefügt werden (es bedeutet +40 (dB/dek) im $[0,\omega_0]$ (rad/s) und 0 (dB/dek) im $[\omega_0,\infty]$ (rad/s)).

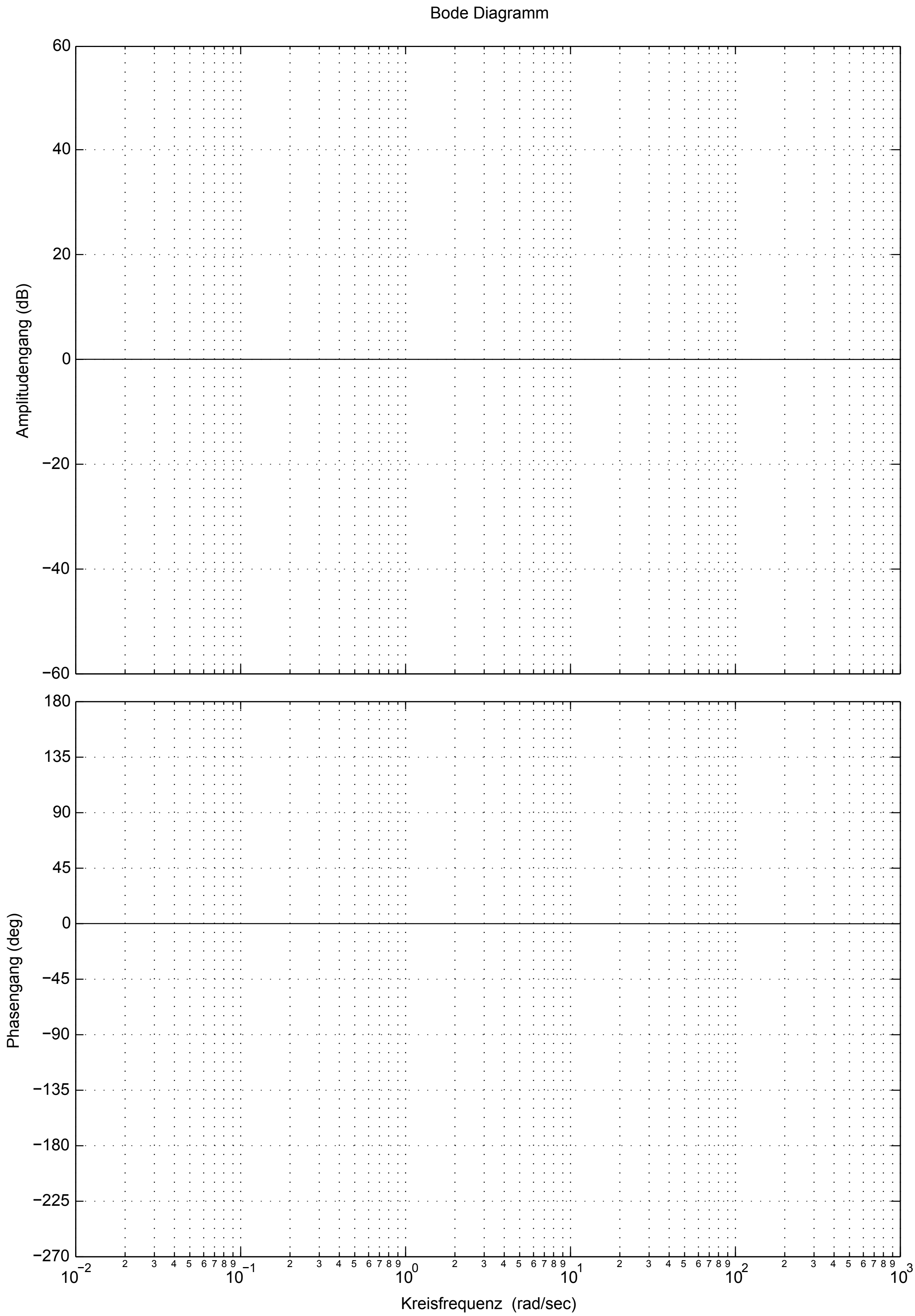

Bode Diagramm
Amplitudengang (dB)
60
40
20
0
−20
−40
−60
Phasengang (deg)
180
135
90
45
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Kreisfrequenz (rad/sec)


Bode Diagramm
Amplitudengang (dB)
60
40
20
0
−20
−40
−60
Phasengang (deg)
180
135
90
45
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Kreisfrequenz (rad/sec)

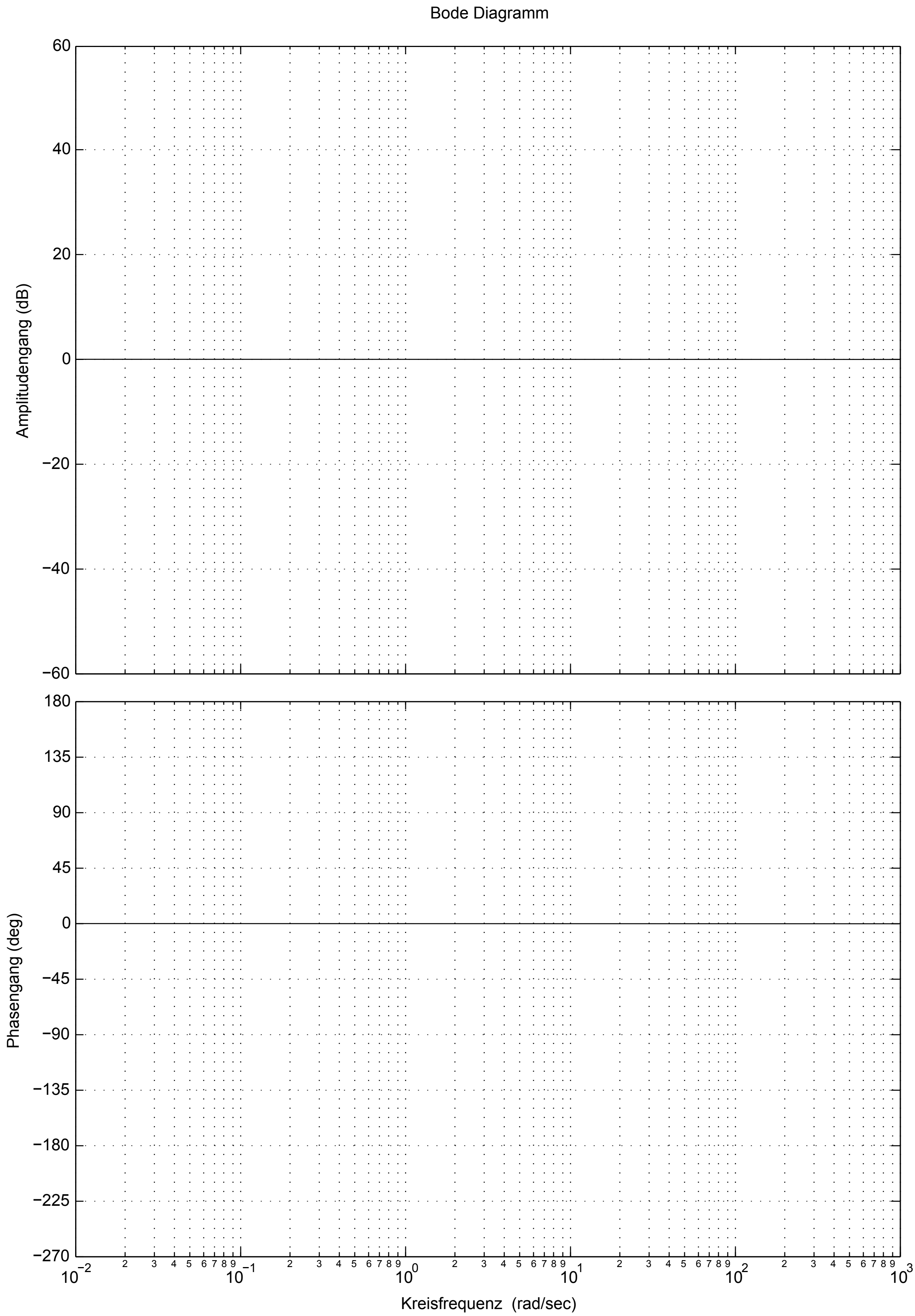

Bode Diagramm
Amplitudengang (dB)
60
40
20
0
−20
−40
−60
Phasengang (deg)
180
135
90
45
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Kreisfrequenz (rad/sec)

Bode Diagramm





Bode Diagramm
Amplitudengang (dB)
Phasengang (deg)
Kreisfrequenz (rad/sec)



Bode Diagramm
Amplitudengang (dB)
60
40
20
0
−20
−40
−60
Phasengang (deg)
180
135
90
45
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Kreisfrequenz (rad/sec)