Wie kann die z-Übertragungsfunktion des Systems hergeleitet werden? Wie kann die z-Übertragungsfunktion des Reglers hergeleitet werden?

Thierry Prud'homme

Hochschule Luzern
Technik & Architektur

Outline

Outline

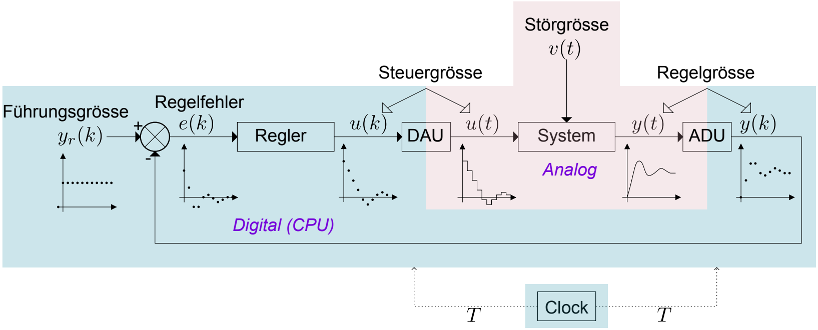
Outline

Outline

Lernziele

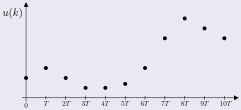
- Die Studierende können die z-Übertragungsfunktion des erweiterten Prozesses (analoger Prozess + ADU/DAU) herleiten.
- Die Studierende können die z-Übertragungsfunktion eines in der analogen Welt entworfenen Reglers direkt herleiten.
- Die Studierende können die Stabilität eines digitalen Prozesses mit den Pollstellen seiner z-Übertragungsfunktion analysieren.

Digitaler Geschlossener Regelkreis



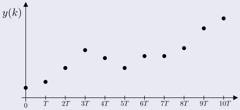
Wichtige Digitale Systeme eines Regelkreises

Digitale Regelstrecke



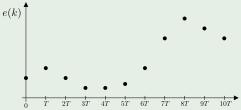
$\{u(k) : k \geq 0\}$

$\{y(k)\} = G\{u(k)\}$



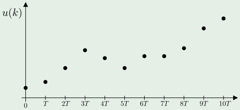
$\{y(k) : k \geq 0\}$

Digitaler Regel



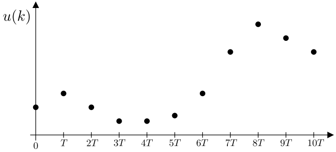
$\{e(k) : k \geq 0\}$

$\{u(k)\} = G\{e(k)\}$



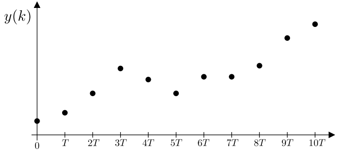
$\{u(k) : k \geq 0\}$

Differenzgleichungen



$\{u(k) : k \geq 0\}$

$\{y(k)\} = G\{u(k)\}$



$\{y(k) : k \geq 0\}$

Differenzgleichungen

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-d-j)$$

z-Transformation

z-Transformation

$$\begin{aligned} \{w(k) : k > 0\} &\rightarrow W(z) \\ W(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} w(k) z^{-k} \end{aligned}$$

Impuls-Antwort / Faltung

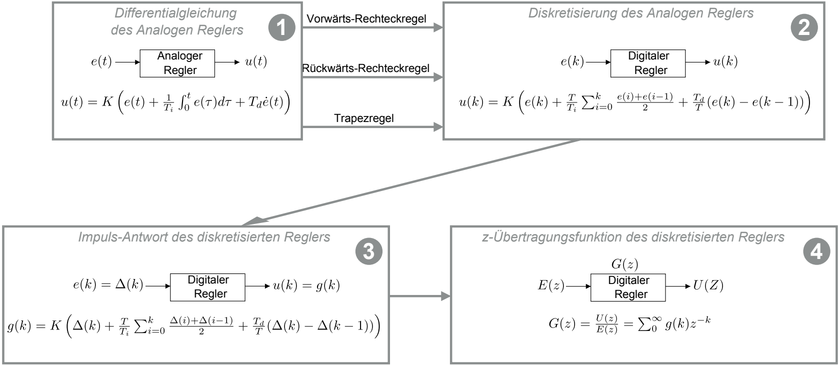
$$\begin{aligned} \{g(k)\} &= G\{\Delta(k)\} \\ y(k) &= \sum_{l=0}^{k} u(l) g(k-l) \end{aligned}$$

z-Übertragungsfunktion

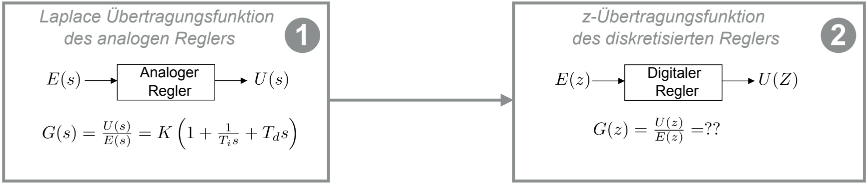
$$
\begin{aligned}
Y(z) &= Z\{y(k)\} \\
U(z) &= Z\{u(k)\} \\
G(z) &= Z\{g(k)\}
\end{aligned}
$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Diskretisierung des analogenReglers



Prinzip

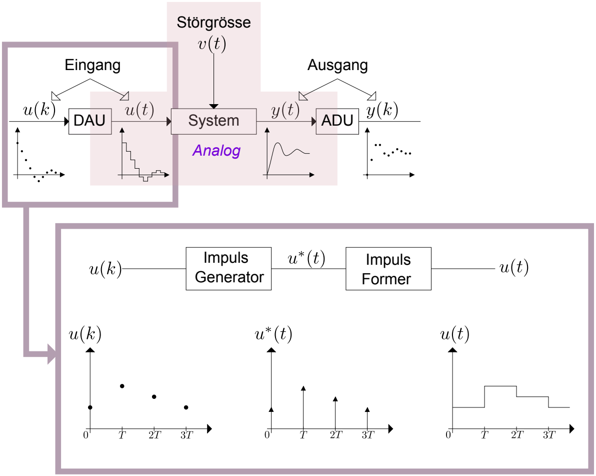

Laplace Übertragungsfunktion
des analogen Reglers
1
$E(s)$
Analoger Regler
$U(s)$
$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$
z-Übertragungsfunktion
des diskretisierten Reglers
2
$E(z)$
Digitaler Regler
$U(Z)$
$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = ??$

Transformation

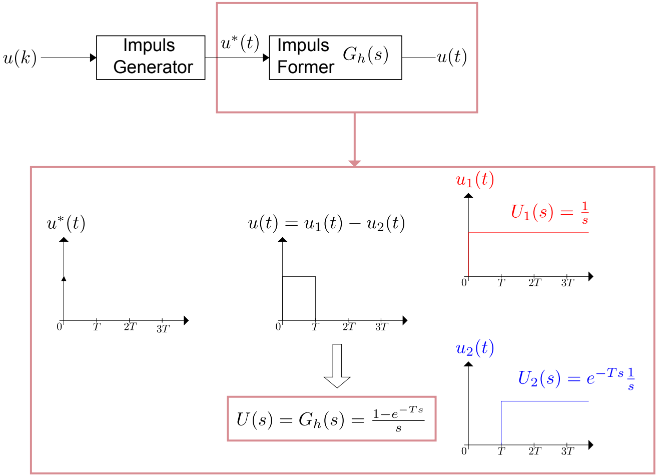
Rückwärts-Recht.	$\dot{e}(kT) = \frac{e(kT)-e(kT-T)}{T}$	$s = \frac{z-1}{Tz}$
Vorwärts-Recht.	$\dot{e}(kT) = \frac{e(kT+1)-e(kT)}{T}$	$s = \frac{z-1}{T}$
Trapezregel	$\int_0^t e(\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{k/t=kT} \frac{e(i)+e(i-1)}{2}$	$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

1. z-Transformation, Digitales System
2. z-Übertragungsfunktion des Reglers
3. Digitales Berechnungsmodell der Regelstrecke
    - Modellierung des DA-Umsetzers
    - z-Übertragungsfunktion der Regelstrecke
    - Praktische Anwendung
4. Stabilität

Modellierung des DA-Umsetzers

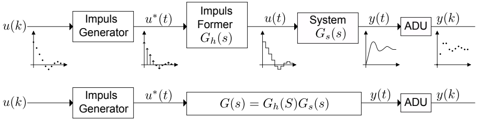


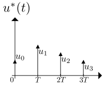
Modellierung des DA-Umsetzers

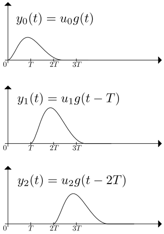


$$U(s) = G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

z-Übertragungsfunktion der Regelstrecke

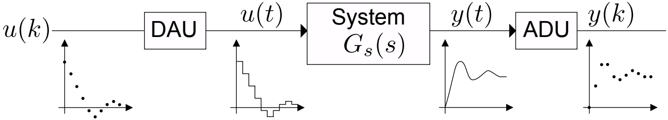






$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i g(t - iT) \\
y(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i g(kT - iT) \\
Y(z) &= Z\{g(kT)\}U(z) \\
H(z) = Z\{g(kT)\} &= Z\{L^{-1}\{G_h(s)G_s(s)\}|_{t=kT}\} \\
&= (1 - z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\}|_{t=kT}\right\}
\end{aligned}
$$

Praktische Anwendung



1

$$\frac{G_s(s)}{s} = \frac{\sum_{i=1}^{q}(s+b_q)^{n_q}}{\sum_{j=1}^{r}(s+a_r)^{n_r}} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n_r}\frac{c_{j,l}}{(s+a_r)^l}$$

Partialbruchzerlegung von $\frac{G_s(s)}{s}$

2

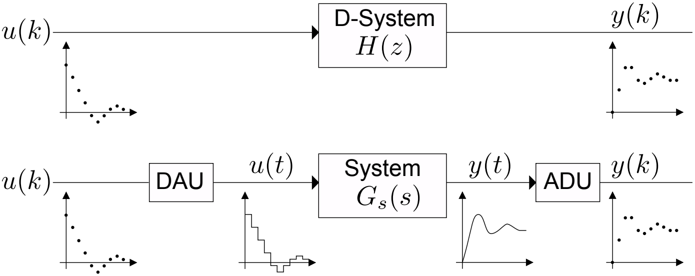
$$\frac{c_{j,1}}{(s+a_r)} \rightarrow \frac{c_{j,1}z}{z-e^{-a_rT}}$$

$$\frac{c_{j,2}}{(s+a_r)^2} \rightarrow \frac{c_{j,2}Te^{-a_rh}z}{(z-e^{-a_rT})^2}$$

$$\cdots \rightarrow \cdots$$

z-Transformation von jedem Komponent

Praktische Anwendung



3

Berechnung der z-Übertragungsfunktion
der Regelstrecke

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \left(\sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_r} Z \left\{ L^{-1} \left[\frac{c_{j,l}}{(s+a_r)^l} \right] \right\} \right)$$

Stabilität

Partialbruchzerlegung von $Y(z) = H(z)U(z)$

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= H(z)U(z) \\
Y(z) &= \sum_{i=0}^{q} \frac{d_i}{z^i} \\
&+ \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_r} \frac{c_j z}{(z - p_j)^l}
\end{aligned}
$$

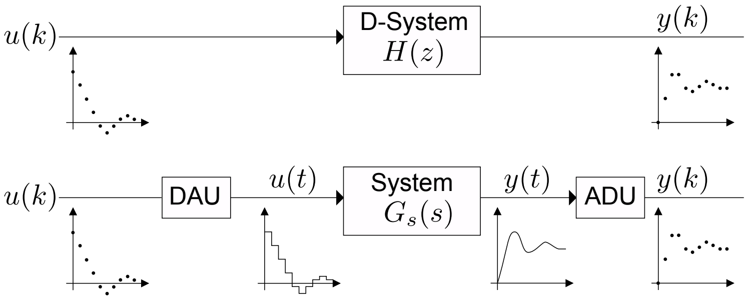
Stabilität

Berechnung von $y(k)$

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \sum_{i=0}^{q} d_i \Delta(k-i) \\
&+ \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_r} c_j \frac{1}{(l-1)!} \prod_{m=0}^{l-2} (k-m) p_j^{k-l+1}
\end{aligned}
$$

Stabilität

Theorem



Stabilität

Ein digitales LZI-Glied ist stabil wenn die Pole seiner z-Übertragungsfunktion $H(z)$ im Einheitskreis liegen.