

Festigkeit PR+SY

Biegedeformation

$$\rho = \frac{E \cdot I}{M_b}$$

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_b(x)}{E \cdot I}$$

$$k(x) = -\frac{w'''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

$$\varphi \approx \tan \varphi = -\frac{dw}{dx} = -w'$$





$$w'' = -\frac{M_b(x)}{E \cdot I}$$

Integrationsmethode

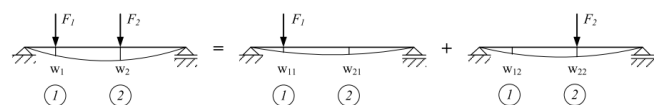
$$Q = -\int q \cdot dx \rightarrow M_b = \int Q \cdot dx$$

$$\rightarrow \varphi = \int \frac{M_b}{E \cdot I} \cdot dx \rightarrow w = -\int \varphi \cdot dx$$

Randbedingungen:

Lager		w	w'	M _b	Q
Gelenk		0	≠ 0	0	≠ 0
Parallelführung		≠ 0	0	≠ 0	0
Einspannung		0	0	≠ 0	≠ 0
Freies Ende		≠ 0	≠ 0	0	0

Überlagerung

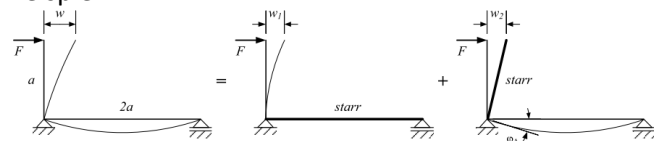


$$w_1 = w_{11} + w_{12}$$

$$w_2 = w_{21} + w_{22}$$

$$\text{Satz von Maxwell: } \frac{w_{12}}{F_2} = \frac{w_{21}}{F_1}$$

Beispiel:









Formänderungsarbeit

$$W = \frac{1}{2} \cdot M_b \cdot \varphi = \frac{M_b^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_b^2}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$\text{Sätze von Castigliano: } w = \frac{\partial W}{\partial F} \quad \varphi = \frac{\partial W}{\partial M}$$

$$w = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_i \cdot M_k \cdot dx \quad \varphi = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_i \cdot M_k \cdot dx$$

		$M_k \cdot s$					
		δ	γ	β	α	M_i	#
		$\frac{1}{2} s M_{k1} (M_{k1} + M_{k2})$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{6} s (2 M_{k1} M_{k2} + M_{k1}^2 + M_{k2}^2)$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	1
		$\frac{1}{6} s M_{k1} (M_{k1} + 2 M_{k2})$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{6} s (2 M_{k1} M_{k2} + M_{k1}^2 + M_{k2}^2)$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	2
		$\frac{1}{6} s (2 M_{k1} M_{k2} + M_{k1}^2 + M_{k2}^2)$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{6} s (2 M_{k1} M_{k2} + M_{k1}^2 + M_{k2}^2)$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{6} s M_{k1} M_{k2}$	3
		$\frac{1}{3} s M_{k1} (M_{k1} + M_{k2})$	$\frac{1}{4} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{3} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{5}{12} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{3} s M_{k1} M_{k2}$	4
		$\frac{1}{12} s M_{k1} (3 M_{k1} + 5 M_{k2})$	$\frac{1}{12} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{4} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{2}{3} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{3} s M_{k1} M_{k2}$	5
		$\frac{1}{12} s M_{k1} (M_{k1} + 3 M_{k2})$	$\frac{1}{12} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{4} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{3} s M_{k1} M_{k2}$	$\frac{1}{3} s M_{k1} M_{k2}$	6

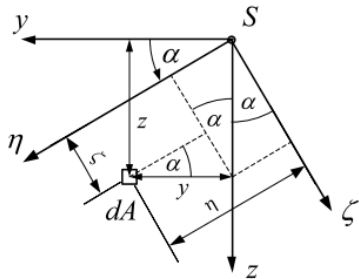
Schiefe Biegung

$$\sigma = \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z - \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y$$

$$I_{yz}^* = I_{yz} - y_s \cdot z_s \cdot A$$

Biaxiales Flächenmoment

Eine Symmetrieachse und deren Senkrechte durch den Schwerpunkt sind immer Hauptachsen.

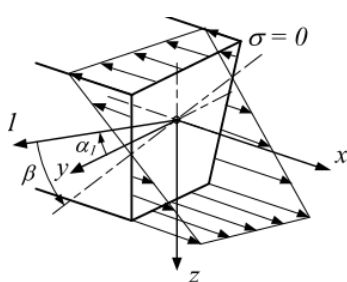
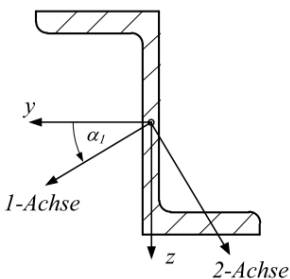
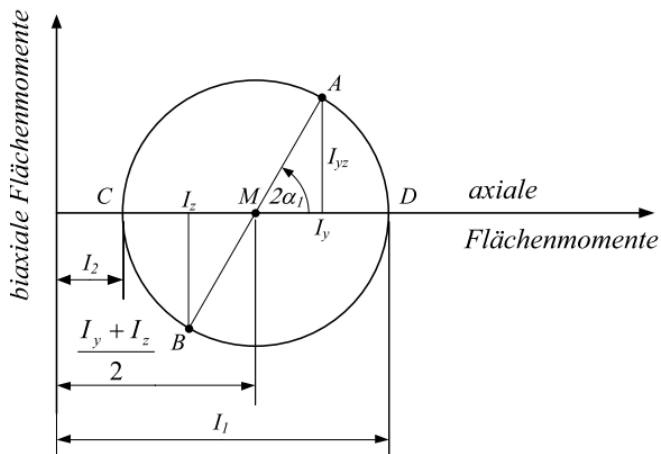


$$\eta = y \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha$$

$$\zeta = z \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{yz}}{I_1 - I_z}$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$



$$M_1 = M_y \cdot \cos \alpha_1 + M_z \cdot \sin \alpha_1$$

$$M_2 = M_z \cdot \cos \alpha_1 - M_y \cdot \sin \alpha_1$$

$$\sigma = \frac{M_1}{I_1} \cdot \zeta - \frac{M_2}{I_2} \cdot \eta \quad \tan \beta = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{M_2 \cdot I_1}{M_1 \cdot I_2}$$

$$\eta = y \cdot \cos \alpha_1 + z \cdot \sin \alpha_1$$

$$\zeta = z \cdot \cos \alpha_1 - y \cdot \sin \alpha_1$$

Allg. Vorgehen:

1. I_{\max} und I_{\min} berechnen
2. Lage der Hauptachsen ($\zeta - \eta$ Koordinaten)
3. Biegemoment zerlegen $\Rightarrow M_1, M_2$
4. $\zeta - \eta$ Koordinaten der Extrempunkte
5. Spannungsberechnung in den Hauptachsen

Schub

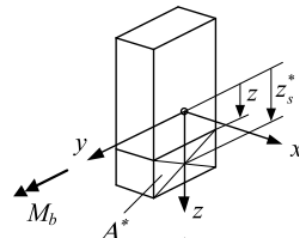
Scherung

$$\tau_a = \frac{Q}{A}$$

Schub bei Querkraftbiegung

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I_y \cdot b}$$

$$S = \int_{A^*} z \cdot dA = z_s^* \cdot A^*$$



$$\text{Schubfluss: } q = \tau \cdot t \quad q = \frac{Q \cdot S}{I_y}$$

Faustregel: $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{10} \rightarrow \tau$ vernachlässigbar

Knickung

Elastische Knickung (EULER)

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2}$$

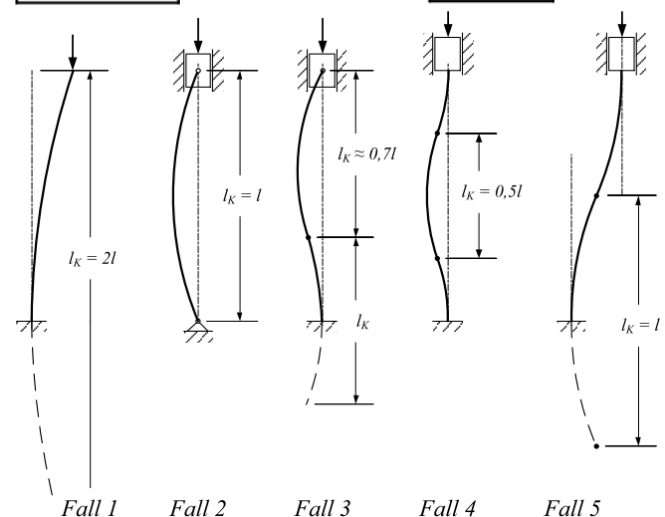
Schlankheitsgrad

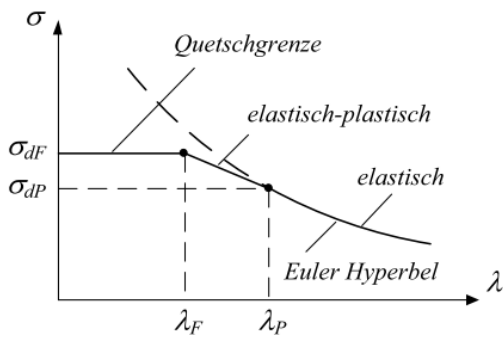
$$\lambda = \frac{l_K}{i} = l_K \cdot \sqrt{\frac{A}{I}}$$

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Trägheitsradius

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$





$$I_{\min} = \frac{F \cdot l_K^2 \cdot S_K}{\pi^2 \cdot E} \quad S_K = \frac{F_K}{F}$$

Elastisch-plastische Knickung (TETMAJER)

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda \quad \text{für } \lambda_F < \lambda < \lambda_P$$

Werkstoff	E [N/mm ²]	λ _F	λ _P	a [N/mm ²]	b [N/mm ²]
S235	210'000	65	104	310	1,14
E295 / E335	210'000	-	89	335	0,62
5%-Ni-Stahl	210'000	-	86	470	2,30
Nadelholz	10'000	-	100	29,3	0,194
Grauguss	100'000	-	80	σ _K = 776 - 12 · λ + 0,053 · λ ²	

Mit der Tetmajer-Gleichung können keine Stäbe ausgelegt werden, sondern nur nachgerechnet!

$$S_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{vorh}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{vorh} = \frac{F}{A}$$

Vorgehen:

1. EULER (I_{min} berechnen) → Querschnitt
2. Schlankheitsgrad λ
 λ > λ_P → OK
 λ < λ_P → σ_K(λ)
3. S_K = σ_K(λ) / σ_{vorh}
 S_K > S_{soll} → OK
 S_K < S_{soll} → neuer Querschnitt

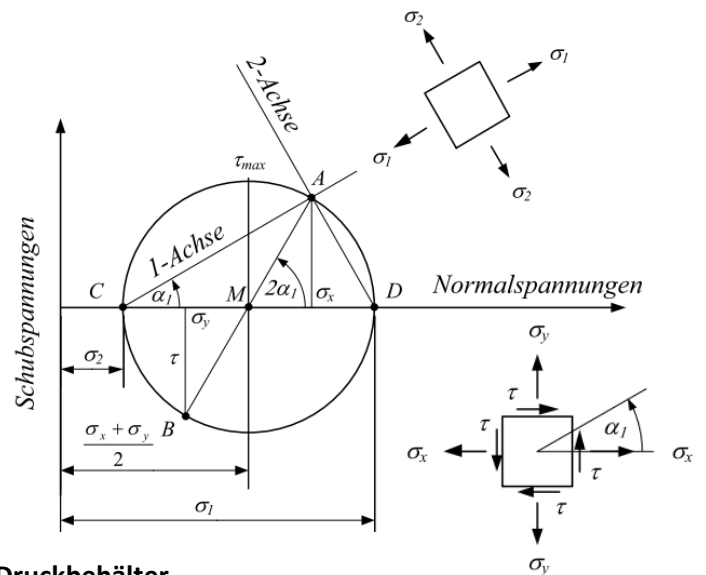
Ebener Spannungszustand

Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1 - \sigma_y} \quad \sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



Druckbehälter

Zylindrischer Kessel: $\sigma_t \cong \frac{\Delta p \cdot d}{2 \cdot t} \quad d \approx d_i \approx d_a$

$$\sigma_a \cong \frac{\Delta p \cdot d}{4 \cdot t}$$

Kugelförmiger Kessel: $\sigma \cong \frac{\Delta p \cdot d}{4 \cdot t} \quad d \approx d_i \approx d_a$

Zusammengesetzte Beanspruchung

Biegung & Normalkraft

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_b}{I_y} \cdot z$$

z: Abstand vom Schwerpunkt

=> $\sigma_z = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \quad \sigma_b = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$

Biegung & Torsion (duktilen Material vorausgesetzt!)

$$\sigma_v = \frac{M_v}{W_b} \leq \sigma_{zul} \quad M_v = \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} \cdot (\alpha_0 \cdot M_t)^2}$$

→ Für Kreisquerschnitte:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_v}{\pi \cdot \sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot \sigma_{zul}} \cdot \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} \cdot (\alpha_0 \cdot M_t)^2}}$$

Biegung & Querkraft

- elementare Querschnittsformen i.d.R. Spannungen bei ihren Maxima getrennt nachweisen => σ_{max} ≤ σ_{zul}, τ_{max} ≤ τ_{zul}

- l > 10 h => nur Biegespannungen massgebend

- l < h => nur Schubspannungen massgebend

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{b,max}^2 + 3 \cdot \tau_m^2}$$

- Stahlbau:

Festigkeitshypothesen

NH:

$$\sigma_v = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

spröde WS, Schweissnähte, stossartige Bel. zäher WS

SH:

$$\sigma_v = 2 \cdot \tau_{max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sigma_1 - \sigma_2$$

spröde Werkstoffe auf Druck

GEH: zähe Werkstoffe (statisch & dynamisch)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2}$$

Spannungsnachweis:

Hypothesen gelten alle nur, wenn jeweils alle Spannungskomponenten den selben Spannungs-Zeit-Verlauf haben!

Ansonsten: Anstrengungsverhältnis nach BACH

$$\alpha_0 = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\sigma_{Probe \text{ beim Lastfall von } \sigma}}{\tau_{Probe \text{ beim Lastfall von } \tau}} \quad \text{mit } \varphi = \begin{cases} 1 & \text{NH} \\ 2 & \text{SH} \\ \sqrt{3} & \text{GEH} \end{cases}$$

In NH, SH & GEH $\tau = \alpha_0 \cdot \tau$ einsetzen (falls Belastungen gleich: $\alpha_0 = 1$)

$$\begin{aligned} \tau_F &= 0,58 \cdot R_e \\ \tau_B &= 0,58 \cdot R_m \end{aligned} \quad \text{für Stahl}$$

Spezialfall: eine Normal & eine Schubspannung

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (\alpha_0 \cdot \tau)^2} & \text{NH} \\ \sigma_v &= \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau)^2} & \text{SH} \\ \sigma_v &= \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau)^2} & \text{GEH} \end{aligned}$$

$$\sigma_v \leq \sigma_{zul}$$

Falls Werkstoff nicht bekannt: 2 Möglichkeiten

- WS annehmen
- für α_0 einen Wert annehmen, da α_0 i.d.R. zwischen 0.5 und 0.8 liegt

Dimensionierung:

1. Näherung \Rightarrow Querschnitt
(Dauerfestigkeiten pauschal durch $S = 3 \dots 4$ dividieren $\Rightarrow \sigma_{zul}$)
2. Nachrechnung \Rightarrow ev. neuer Querschnitt
3. Ev. erneut nachrechnen, etc.

Festigkeitsnachweis

Statischer Festigkeitsnachweis

$$\begin{aligned} R_p &= K_t \cdot R_{pN} \\ R_m &= K_t \cdot R_{mN} \end{aligned} \quad K_t \text{ nach TB 3-11}$$

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{R_{p,max}}{R_p}} \leq \alpha_p \quad \rightarrow \text{Kerbeeinfluss}$$

\rightarrow nur für Biegung & Torsion; für Z/D $n_{pl} = 1$

$$R_{p,max} = 1050 \text{ N/mm}^2 \text{ (Stahl und GS)}$$

$$R_{p,max} = 320 \text{ N/mm}^2 \text{ (GJS)}$$

$\rightarrow R_{p,max} = 250 \text{ N/mm}^2 \text{ (Aluminium Knetlegierungen)}$

$$\begin{aligned} \sigma_F &= f_\sigma \cdot n_{pl} \cdot R_p \\ \sigma_B &= f_\sigma \cdot n_{pl} \cdot R_m \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \tau_F &= f_\tau \cdot n_{pl} \cdot R_p \\ \tau_B &= f_\tau \cdot n_{pl} \cdot R_m \end{aligned}$$

\rightarrow falls $n_{pl} > \alpha_p$, dann α_0 anstelle n_{pl} einsetzen

$$\text{Plastisch:} \quad \alpha_p = \frac{M_{vpl}}{M_{el}} \quad n_{pl} = \frac{M_{pl}}{M_{el}}$$

$$\text{mit } M_{el} = R_p \cdot W_b$$

Zähe Werkstoffe:

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{\sigma_F}{\sigma_n} \geq S_{F,min} \\ S_B &= \frac{\sigma_B}{\sigma_n} \geq S_{B,min} \end{aligned} \quad \text{resp. das Selbe mit } \tau_F \text{ \& } \tau_B$$

Für zusammengesetzte Beanspruchung:

$$S_F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zd} + \sigma_b}{\sigma_{zdF} + \sigma_{bF}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_s + \tau_t}{\tau_{sF} + \tau_{tF}}\right)^2}} \geq S_{F,min}$$

Spröde Werkstoffe:

$$S_F = \frac{\sigma_B}{\sigma_{max}} \geq S_{B,min}$$

Dauerfestigkeitsnachweis

1. Vorhandene Spannungen σ , τ
2. Werkstoffkennwerte

$$\begin{aligned}\sigma_W &= K_t \cdot \sigma_{WN} \\ \tau_W &= K_t \cdot \tau_{WN}\end{aligned}$$

3. Bezogenes Spannungsgefälle $G' \rightarrow$ Stützzahl n
4. Kerbwirkung

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n}$$

falls experimentelle β_k -Werte verwendet werden:

$$\beta_k = \beta_{k,Probe} \cdot \frac{K_{\alpha,Probe}}{K_{\alpha}}$$

5. - Geom. Grösseneinfluss K_g
- Oberflächenrauheit $K_{O\sigma/\tau}$
- Randschicht K_v
 \rightarrow Konstruktionsfaktor:

$$K_D = \left(\frac{\beta_k}{K_g} + \frac{1}{K_O} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$$

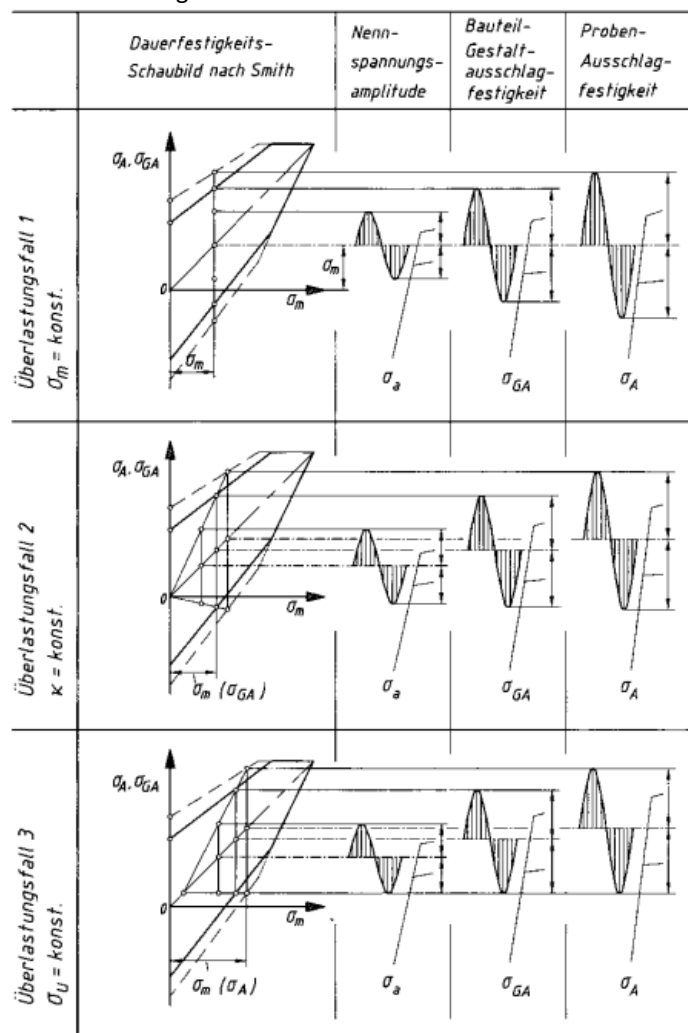
6. Gestaltwechselfestigkeit

$$\sigma_{GW} = \frac{\sigma_W}{K_D} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{GW} = \frac{\tau_W}{K_D}$$

7. Vergleichsmittelspannung:

$$\begin{aligned}\sigma_{mv} &= \sqrt{(\sigma_{zdm} + \sigma_{bm})^2 + 3 \cdot \tau_{tm}^2} \\ \tau_{mv} &= f_{\tau} \cdot \sigma_{mv}\end{aligned} \quad (\text{für GEH})$$

8. Gestaltausschlagfestigkeit:
- Smith-Diagramm:



- oder Formeln:

$$\begin{aligned}\sigma_{GA} &= \sigma_{GW} - \psi_{\sigma} \cdot \sigma_{mv} \\ \tau_{GA} &= \tau_{GW} - \psi_{\tau} \cdot \tau_{mv}\end{aligned} \quad \text{für } \sigma_m = \text{konst.}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{GA} &= \frac{\sigma_{GW}}{1 + \psi_{\sigma} \cdot (\sigma_{mv} / \sigma_a)} \\ \tau_{GA} &= \frac{\tau_{GW}}{1 + \psi_{\tau} \cdot (\tau_{mv} / \tau_a)}\end{aligned} \quad \text{für } \kappa = \text{konst.}$$

$$\begin{aligned}\psi_{\sigma} &= a_M \cdot R_m + b_M \\ \psi_{\tau} &= f_{\tau} \cdot \psi_{\sigma}\end{aligned}$$

Mit

a_M und b_M nach TB 3-13 und f_{τ} nach TB 3-2

9. Vergleichsmittelspannung:

$$\begin{aligned}\sigma_{mv} &= \sqrt{(\sigma_{zdm} + \sigma_{bm})^2 + 3 \cdot \tau_{tm}^2} \\ \tau_{mv} &= f_{\tau} \cdot \sigma_{mv}\end{aligned}$$

10. Sicherheiten:

- nur eine dynamisch wirkende Beanspruchung:

$$S_D = \frac{\sigma_{GA}}{\sigma_a} \geq S_{D,min} \quad \text{bzw.} \quad S_D = \frac{\tau_{GA}}{\tau_a} \geq S_{D,min}$$

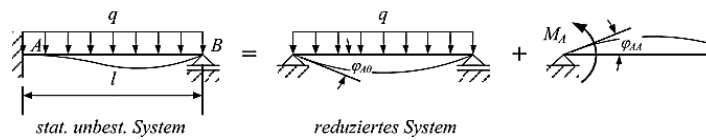
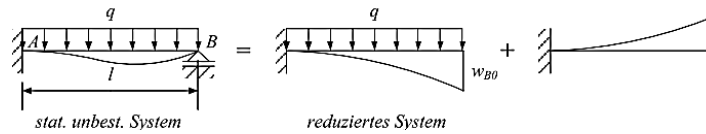
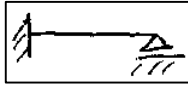
- mehrere dyn. wirkende Beanspruchungen (GEH):

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zda} + \sigma_{ba}}{\sigma_{zdaGA} + \sigma_{baGA}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{sa} + \tau_{ta}}{\tau_{saGA} + \tau_{taGA}} \right)^2}} \geq S_{D,min}$$

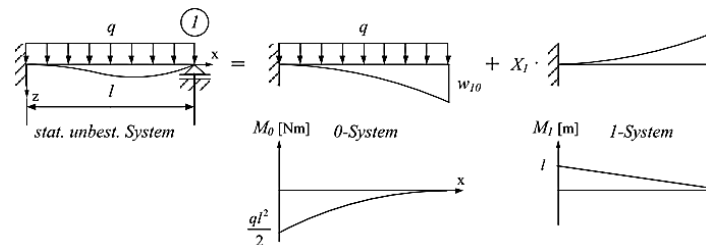
Statisch unbestimmte Systeme

Überlagerung / Superposition (Standardlastfälle)

Beispiel:



Formänderungsarbeit



1. Statisch Unbestimmte X_1 wählen
→ Lager wegnehmen/reduzieren
2. M_b im 0-System → M_0
3. M_b im 1-System → M_1

$$4. \quad w_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l M_0 \cdot M_1 \cdot dx$$

$$w_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l M_1 \cdot M_1 \cdot dx$$

$$5. \quad w_{10} + X_1 \cdot w_{11} = 0$$

$$\text{mit } X_1 = -\frac{w_{10}}{w_{11}}$$

$$6. \quad M_{ges} = M_0 + X_1 \cdot M_1$$

Deformation eines stat. unbestimmt gelagerten Trägers:

$$w = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l M_{ges} \cdot \bar{M}_1 \cdot dx$$

Integrationsmethode

Aufwändig und umständlich...