Aufgabe 1: kern und bild einer linearen Abbildung

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen die Unterräume kern und bild und geben Sie jeweils eine Basis dieser Unterräume an. Ermitteln Sie zudem, ob die Abbildungen umkehrbar sind oder nicht.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2\,x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2\,x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 + x_2 + x_3$$

Lösung:

Es gibt mehrere Möglichkeiten diese Aufgabe zu lösen. Zum Beispiel kann der folgende Satz verwendet werden, falls bei der linearen Abbildung Vektorräume der selben Dimension auftreten (siehe f_1 und f_2):

Ist $f : V_1 \to V_2$ linear mit $\dim V_1 = \dim V_2$ und $\mathrm{kern} f = 0$, so gilt $\mathrm{bild} f = V_2$ und die Abbildung ist umkehrbar (d.h. die Matrix $\mathbf{A}$ der Abbildung ist invertierbar $\det \mathbf{A} \neq 0$)

zu f_1:

Die Matrix zu f_1 ist nicht invertierbar, da die Determinante verschwindet, somit kann $\mathrm{kern} f_1 \neq 0$ sein. Nach Funktionsvorschrift gilt $f_1(x_1, x_2) = 0$ für alle Vektoren $(0, x_2)$ mit verschwindender $x-$Komponente. Somit entspricht der kern der $y-$Achse (1dim) und als Basis geben wir zum Beispiel $(0, 1)$ an. Aus dem Dimensionssatz $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{kern} f_1 + \dim \mathrm{bild} f_1$ folgt nun, das das Bild auch eindimensional ist. Nach Abbildungsvorschrift ist das Bild die Gerade mit Steigung 2 durch den Ursprung mit Basis $(1, 2)$.

zu f_2:

Die Matrix der Abbildung ist umkehrbar (det=0) somit ist $\mathrm{kern} f_2 = 0$ und $\mathrm{bild} f_2 = \mathbb{R}^2$.

zu f_3:

Offensichtlich besteht das Bild nur aus dem Nullvektor (dim=0) und da alle Vektoren mit der Abbildung auf Null geschickt werden muss $\mathrm{kern} f_3 = \mathbb{R}^3$ gelten. Folgt auch aus dem Dimensionssatz.

zu f_4:

Der Kern besteht aus allen Vektoren (x_1, x_2, x_3) mit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Nach Aufgabe 1 von Übungsblatt 2 stellen diese Vektoren eine Ebene mit Basisvektoren $(1, -1, 0)$ und $(0, 1, -1)$ dar. Somit folgt mit dem Dimensionssatz aus $\dim \mathrm{kern} f_3 = 2$, dass $\dim \mathrm{bild} f_3 = 1$ und da das Bild in $\mathbb{R}$ liegt, muss das Bild gerade $\mathbb{R}$ sein.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie kern und bild der folgenden linearen Abbildungen zwischen Polynomräumen.

Hinweis: Bei b) wird die Integrationskonstante = 0 gesetzt.

a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} : \mathbb{P}_3 &\longrightarrow \mathbb{P}_2 \\ p(x) &\longmapsto \frac{d}{dx}\, p(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int : \mathbb{P}_3 &\longrightarrow \mathbb{P}_4 \\ p(x) &\longmapsto \int p(x)\, dx \end{aligned}$$

Lösung:

zu a):

Der Kern besteht aus allen konstanten Polynomen $p(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, dim(kern) = 1 und da $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$ ist, gilt dim(bild) = 3 $\rightarrow$ bild = $\mathbb{P}_2$.

zu b):

Der Kern besteht nur aus dem Nullpolynom $p(x) = 0$ und das Bild aus allen Polynomen $p(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \in \mathbb{P}_4$ mit $e = 0$.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

b) Für welche Werte des Parameters γ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \gamma \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & \gamma & 3 \end{pmatrix}$$

singulär?

Lösung:

a) det = 3 $\Rightarrow$ die Matrix ist regulär

b) Die Determinante ist gegeben durch das quadratische Polynom $\gamma^2 - \gamma - 2$ mit Nullstellen $\gamma_1 = 2$ und $\gamma_2 = -1$. Somit ist die Matrix für $\gamma = 2$ oder -1 singulär (nicht invertierbar).

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Determinante der $4 \times 4-$Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der kombinatorischen Berechnung, die wir in der Vorlesung für eine $2\times2-$ und eine $3\times3-$Matrix aufgestellt haben.

Lösung:

Wir betrachten alle Permutation der Zeilen und schreiben zum Beispiel P_{1243}, falls Zeile 3 und 4 vertauscht sind. Da viele Matrixeinträge Null sind, verschwinden die meisten Terme.

$\det\mathbf{A} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot P_{1234} + 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot P_{1243} + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot P_{1324} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot P_{2341}$

mit $P_{1234} = +1$, $P_{1243} = -1$, $P_{1324} = -1$ und $P_{2341} = -1$ erhalten wir $\det\mathbf{A} = 8$.

Aufgabe 5

Die Determinate eines Produktes zweier Matrizen A und B ist gegeben durch das Produkt der Einzeldeterminanten:

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Regel, dass sich die Determinante der Inversen wie folgt berechnen lässt:

$$\det \left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$$

Lösung:

Dazu verwenden wir, dass $\det(E) = 1$ gilt und folgern schrittweise

$$1 = \det(E) = \det \left(A \cdot A^{-1}\right) = \det (A) \cdot \det \left(A^{-1}\right)$$

womit die Aussage bewiesen ist.