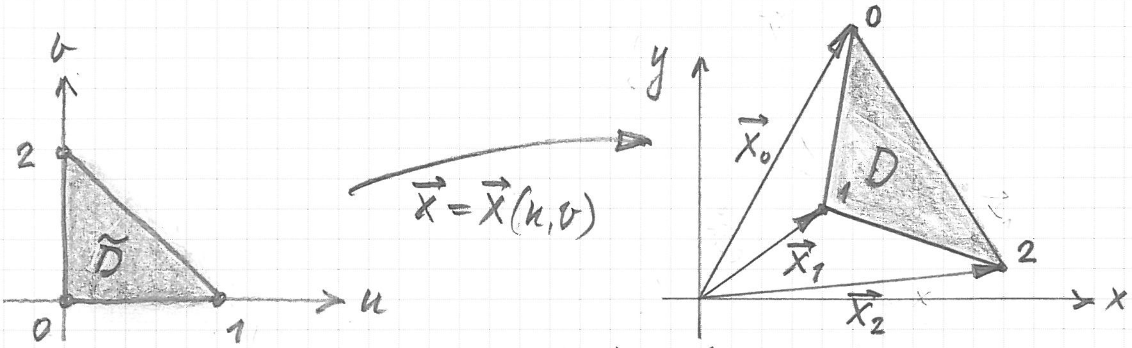
(1)



Basisfunktionen im Phantombereich $\tilde{D}$:

$$\tilde{\phi}_0(u,v) = 1 - u - v$$
$$\tilde{\phi}_1(u,v) = u$$
$$\tilde{\phi}_2(u,v) = v$$

Koord. transformation:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + u(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + v(\vec{x}_2 - \vec{x}_0)$$

ausgeschrieben

$$x = x_0 + u(x_1 - x_0) + v(x_2 - x_0)$$
$$y = y_0 + u(y_1 - y_0) + v(y_2 - y_0)$$

$$C_{ik} = \iint_D \phi_i(x,y)\,\phi_k(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{\phi}_i(u,v)\,\tilde{\phi}_k(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Jacobische:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

Betrag der Funktionaldeterminante:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \Big|\underbrace{(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}_{\underbrace{\left|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_0)\right|}_{2A_D}}\Big|$$

$2A_D$: A_D = Fläche des Dreiecks D.

Damit

$$C_{ik} = 2A_D \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv\; \tilde{\phi}_i(u,v)\,\tilde{\phi}_k(u,v)$$

Note: C_{ik} ist symmetrisch
$(C_{ik} = C_{ki})$

$$\underline{C_{00}} = 2A_D \int_0^1 du \int_0^{1-u} \underbrace{(1-u-v)(1-u-v)}_{1+u^2+v^2-2u-2v+2uv}\, dv$$

$$= 2A_D \int_0^1 du \left[v + u^2 v + \frac{v^3}{3} - 2uv - v^2 + uv^2 \right]_0^{(1-u)}$$

$$= 2A_D \int_0^1 du \Big[(1-u)(1+u^2) + \frac{(1-u)^3}{3} - 2u(1-u) - (1-u)^2 + u(1-u)^2 \Big]$$

$$= 2A_D \int_0^1 du \Big[(1+u^2)(1-u) + \frac{(1-u)^3}{3} - 2u(1-u) - (1-u)(1-u)$$

$$= 2A_D \int_0^1 du \Big[\overbrace{(1-2u+u^2)}^{(1-u)^2}(1-u) + \frac{(1-u)^3}{3} - (1-u)^3 \Big]$$

$$= 2A_D \int_0^1 du\, \frac{(1-u)^3}{3} = 2A_D\left(-\int_1^0 \frac{z^3\,dz}{3}\right) = \frac{2A_D}{3}\underbrace{\int_0^1 z^3\,dz}_{1/4}$$

$$= \frac{2A_D}{12} = \frac{A_D}{6}$$

$z = 1-u \Rightarrow dz = -du$
$u = 0 \Rightarrow z = 1$
$u = 1 \Rightarrow z = 0$

Aus Symmetriegründen (wir rechnen im Einheitsdreieck) hat man

$$C_{11} = C_{22} = A_D/6$$

Analog zeigt man

$$\underline{C_{01}} = 2A_D \int_0^1 du \int_0^{1-u} (1-u-v)\,u\, dv$$

$$= \frac{2A_D}{24} = \underline{\frac{A_D}{12}}$$

Wiederum aus Symmetriegründen gilt:

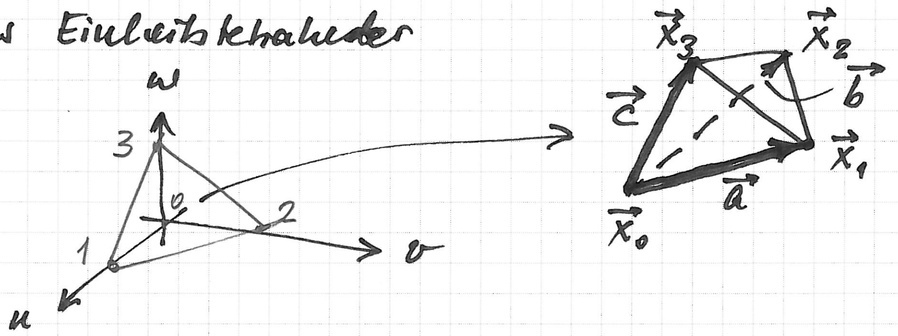
$$C_{ik} = \frac{A_D}{12}, \quad i \neq k.$$

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
www.hslu.ch

2 Die Transf.

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + u(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + v(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) + w(\vec{x}_3 - \vec{x}_0)$$

bildet das Einheitstetraeder



ab auf ein Tetraeder mit den Ecken $\vec{x}_0$ bis $\vec{x}_3$.
Die Jacobische dieser Transf. ist

$$J_f = \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right) = \Big(\underbrace{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}_{\vec{a}}, \underbrace{\vec{x}_2 - \vec{x}_0}_{\vec{b}}, \underbrace{\vec{x}_3 - \vec{x}_0}_{\vec{c}}\Big)$$

Die Determinante $\det(J_f)$ ist gleich dem Volumen (bis aufs Vorzeichen) des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats. Ist V_T das Volumen des Tetraeders, so hat man

$$|\det(J_f)| = 6\,V_T$$

Die Hutfunktionen lauten im Einheitstetraeder:

$$\varphi_0(u,v,w) = 1 - u - v - w$$
$$\varphi_1(u,v,w) = u$$
$$\varphi_2(u,v,w) = v$$
$$\varphi_3(u,v,w) = w$$

Dann hat man beispielsweise

$$C_{01} = 6V_T \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \underbrace{\int_0^{1-u-v} dw\,(1-u-v-w)\,u}_{\underbrace{\Big[(1-u-v)uw - w^2u/2\Big]_0^{1-u-v}}_{\frac{(1-u-v)^2 u}{2}}}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{120}\,6V_T = \frac{V_T}{20}$$

FH Zentralschweiz

Aus Symmetriegründen (das Einheits-tetraeder betrachten!) gilt

$$C_{ik} = \frac{V_T}{20} \qquad i \neq k$$

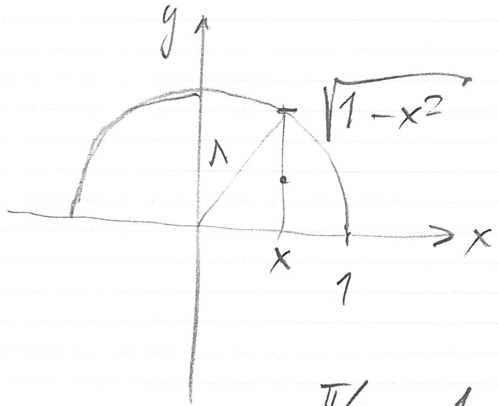
und

$$C_{ii} = \frac{V_T}{10}$$

Bem: verwenden Sie MAPLE (Ausnahmewerte!)

3

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \; \frac{1}{1-x^2-y^2+z^2}$$



Kugel im 1. Oktanten mit Radius 1 und Zentrum in $(0,0,0)$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} dz \; \frac{1}{\underbrace{1-r^2}_{a^2}+z^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r\,dr \left[\frac{\arctan(z/a)}{a}\right]_0^{\sqrt{1-r^2}}$$

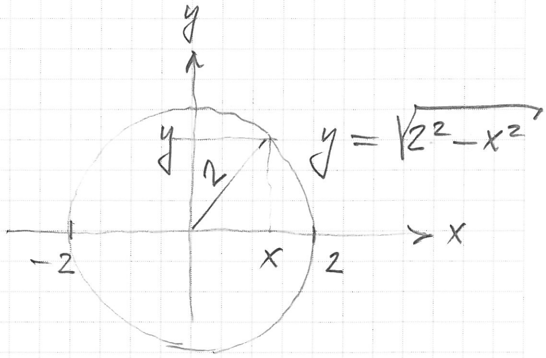
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\,d(r^2)}{\sqrt{1-r^2}} \Bigg(\underbrace{\arctan \underbrace{\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}}_{1}}_{\pi/4} - \underbrace{\arctan 0}_{0} \Bigg)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{\pi^2}{16} \left[-2\sqrt{1-u}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \cdot 2\,(1-0) = \frac{\pi^2}{8}$$

4

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)^2}^{16} x^2 \, dz$$



$$\|$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr \int_{r^4}^{16} r^2 \cos^2\theta \, dz$$

$$\|$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos^2\theta \int_0^2 r^3 dr \Big[z \Big]_{r^4}^{16} = \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2\theta \int_0^2 (16r^3 - r^7)\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2\theta \underbrace{\Big[4r^4 - r^8/8 \Big]_0^2}_{2^6 - 2^8/2^3 = 2^6 - 2^5 = 64-32 = 32 = 2^5} = 2^5 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 2^5 \left[\frac{\cos\theta \sin\theta}{2} + \frac{1}{2}\theta \right]_0^{2\pi} = 2^5 \pi$$

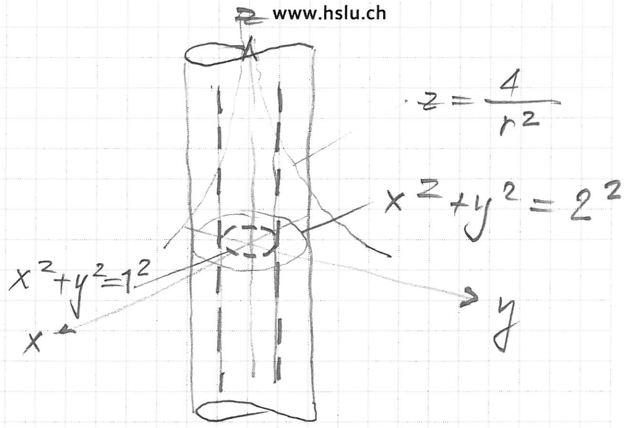
somit

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)^2}^{16} x^2 dz = 2^5 \pi = 32\pi$$

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
www.hslu.ch

(5) In Zylinderkoordinaten:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r\,dr \int_0^{4/r^2} dz$$



$$= 2\pi \int_1^2 r\,dr \left[z\right]_0^{4/r^2}$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{4r}{r^2}\,dr$$

$$= 8\pi \left[\ln|r|\right]_1^2$$

$$\underline{V = 8\pi \ln 2}$$