Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Technik & Architektur

Lineare Algebra - Eine Einführung

"Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so."

(Richard Feynman, Physiker)

Modul:	Höhere Mathematik
Semester:	Frühling 2016
Dozententeam:	Josef Bürgler und Thomas Tresch
Modulverantwortung:	Thomas Tresch , thomas.tresch@hslu.ch

1 Der Vektorraum

Das wohl wichtigste Konzept für das Verständnis der linearen Algebra ist der *Vektorraum*. Die Elemente des Vektorraums werden *Vektoren* genannt. Die meisten Leser werden jetzt wohl denken, dass Vektoren gerichtete Grössen oder Pfeile in der Ebene oder dem Raum darstellen. Aber das ist nur ein Beispiel unter vielen, wie wir noch sehen werden.

Der Begriff Vektorraum verallgemeinert die *Pfeildenkweise* auf abstraktere Objekte wie Funktionen oder Matrizen. Ja genau, auch Funktionen können Vektoren sein, was zum Beispiel bei der Behandlung der Fourierreihen oder Differentialgleichungen u.v.m zum Verständnis beitragen kann. Vektoren sind also Elemente eines Vektorraums und durch diesen definiert. Was ist nun ein Vektorraum?

Ein Vektorraum V besteht aus einer Menge von Vektoren und den zwei Operationen:

1. Vektoren können addiert/subtrahiert werden

2. Vektoren können mit einem Skalar multipliziert werden.

Es muss noch gefordert werden, dass die Ergebnisse aus den beiden Operationen wieder im Vektorraum liegen müssen. Man sagt auch, die Operationen sind bezüglich des Vektorraums *abgeschlossen*.

Die beiden folgenden Bedingungen sind eher abstrakt, aber von Bedeutung, wie wir noch sehen werden.

- Es gibt einen Nullvektor $0 \in V$ mit $v + 0 = v$ für alle Vektoren $v \in V$
- Zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es einen inversen Vektor $-v \in V$ mit $v - v = 0$.

Wir beginnen mit ein paar einfachen Beispielen.

Beispiele in $\mathbb{R}^n$

i) Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ist das wohl einfachste Beispiel. Die Vektoren und die Skalare entsprechen gerade den reellen Zahlen. Addieren wir zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ so ist die Summe wieder in $\mathbb{R}$. Das gleiche gilt für die Skalarmultiplikation.

   Würde man hingegen das Intervall $\mathbb{I} = (-10, 10)$ betrachten, so ist das kein Vektorraum, da $6 + 6 = 12 \notin \mathbb{I}$

ii) Die x, y-Ebene und der x, y, z-Raum (auch als $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ bezeichnet). Als Vektoren betrachtet man hier die "gewöhnlichen" Spaltenvektoren, deren Komponenten den Koordinaten in der Ebene resp. im Raum entsprechen.

   Beispiele im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \end{pmatrix}, \ldots$$

   und im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Dabei entspricht die Vektoraddition der komponentenweise Addition, wie zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und die Skalarmultiplikation, der komponentenweise Multiplikation mit einem Skalar (aus $\mathbb{R}$). Beispiel

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 5 \\ 6 \cdot (-4) \\ 6 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

iii) Ganz allgemein kann man n-elementige Spaltenvektoren als Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ betrachten. Wir werden später sehen, dass der Raum $\mathbb{R}^n$ n-dimensional ist. Obwohl man sich einen n-dimensionalen Raum nicht vorstellen kann, ist das Arbeiten damit nicht anders, als mit einem "vorstellbaren" 3-dimensionalen Raum.

Weitere Beispiele

i) Man kann auch sagen, dass die Menge aller Polynome $a \cdot x^2 + b \cdot x^1 + c$ vom Grad 2 einen Vektorraum ($\mathbb{P}_2$) bilden. Addiert man zwei Polynome vom Grade 2 oder multipliziert diese mit einem konstanten Faktor, so erhalten wir wieder Polynome vom Grad 2. Die Multiplikation zweier Polynome hingegen ist nicht erlaubt, da der Grad zunehmen würde. Stellen wir diese Polynome als Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

mit den jeweiligen Koeffizienten bei x^2,x und 1 dar, dann funktioniert die Addition und Skalarmultiplikation genau gleich wie im $\mathbb{R}^3$. So zum Beispiel

$$(2 \cdot x^2 - x + 5) + (x^2 - 6) = 3 \cdot x^2 - x - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii) Die Lösungen einer homogenen, linearen Differentialgleichung

$$a_n \cdot \frac{d^n}{dx^n} y(x) + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x) + \ldots + a_1 \cdot \frac{d}{dx} y(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

bilden ebenfalls einen Vektorraum (*Lösungsraum*). Bekanntlich gilt ja, dass die Summe zweier Lösungen und die Skalarmultiplikation mit einer Lösung wieder eine Lösung ist. Somit können Lösungen von linearen, homogenen Differentialgleichungen als Vektoren betrachtet werden. Das gleiche gilt übrigens auch für die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Weiter bilden folgende Mengen und Verknüpfungen Vektorräume

- Die Menge aller $n \times m$-Matrizen zusammen mit der Matrizenaddition und Skalarmultiplikation

2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

2.1 Linearkombination von Vektoren

Für n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus einem Vektorraum V und n Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ bezeichnet man die Summe

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$$

als *Linearkombination* der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Man bemerke, dass die in der Linearkombination auftretenden Operationen (Addition und Skalarmultiplikation) gerade den Operationen in einem Vektorraum entsprechen. Eine Linearkombination von Vektoren ist somit mit der Struktur des Vektorraums verträglich.

Beispiele:

i) Der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

lässt sich als Linearkombination der beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ii) Gegeben ist die lineare, homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$y''(x) + y'(x) - 2 \cdot y(x) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(x) = 0$. Die beiden Basislösungen (Lösungsvektoren) sind

$$y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-2 \cdot x}.$$

(Übung: Selbst nachrechnen!) Bekanntlich ist die allgemeine Lösung durch die Linearkombination

$$y_A(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x}$$

der Basislösungen gegeben. Die spezielle Lösung erhält man mit Hilfe der Anfangsbedingungen. Die Linearkombination der speziellen Lösung lautet dann (Übung):

$$y(x) = \frac{2}{3} \cdot e^x + \frac{1}{3} \cdot e^{-2 \cdot x}$$

2.2 Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind *linear abhängig*, wenn mindestens einer der Vektoren durch eine Linearkombination der anderen dargestellt werden kann. Andernfalls heissen die Vektoren *linear unabhängig.*

Lineare Abhängigkeit kann in der Ebene $\mathbb{R}^2$ sehr einfach visualisiert werden. Zwei Vektoren x_1 und x_2 sind linear abhängig, falls sie sich durch einen skalaren Faktor unterscheiden. D.h, falls es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = \lambda \cdot x_2$ gibt. Geometrisch bedeutet dies, dass die beiden Vektoren auf der selben Linie liegen. So zum Beispiel

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $x_2 = -2 \cdot x_1$. Durch Linearkombination $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2$ dieser beiden Vektoren können nur Punkte auf der Geraden $y = -x$ erreicht werden, wozu auch ein Vektor (x_1 oder x_2) in der Lage wäre, da beide auf der Geraden liegen. Hingegen sind die beiden Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

linear unabhängig, da für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung $e_1 = \lambda \cdot e_2$ erfüllt werden kann. Mit diesen beiden Vektoren kann jeder Punkt in der Ebene durch Linearkombination erreicht werden. Sprechweise: Diese Vektoren *spannen die Ebene auf.* Im Raum $\mathbb{R}^3$ gilt fast analog, dass zwei Vektoren linear abhängig sind falls sie auf einer Geraden liegen, oder drei Vektoren linear abhängig sind, falls sie auf einer Fläche (Ebene) liegen. Mehr als drei Vektoren im Raum sind immer linear abhängig.

Formal lautet die Bedingung für die lineare Unabhängigkeit von n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dass nur die triviale Linearkombination den Nullvektor ergibt. Das heisst, dass

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

nur mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

erfüllt werden kann. Ansonsten sind die Vektoren linear abhängig und mindestens ein Vektor lässt sich als Linearkombination der anderen darstellen.

Beispiele:

i) Wir betrachten die beiden Vektoren aus (**??**) und schreiben

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier sind unendlich viele, nichttriviale Linearkombinationen möglich. So zum Beispiel $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Somit sind die Vektoren linear abhängig.

ii) Die Vektoren aus (**??**) hingegen sind linear unabhängig, da nur die triviale Linearkombination mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Die zwei Beispiele können auch als Gleichungssytem mit den Unbekannten λ_1 und λ_2 formuliert werden. Für das erste Beispiel erhalten wir das homogene System

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2 \cdot \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

oder in Matrizenschreibweise $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Spalten der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ gerade den Vektoren entsprechen, die auf lineare Unabhängigkeit überprüft werden sollen. Die Vektoren sind also genau dann linear unabhängig, falls das Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzt, was für dieses Beispiel nicht zutrifft.

Beispiel: Wir betrachten drei beliebige Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix},$$

in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Diese Vektoren können nie linear unabhängig sein, da das dazugehörige Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mehr Unbekannten (drei) als Gleichungen (zwei) besitzt.

Die Verallgemeinerung dazu:

n Vektoren in $\mathbb{R}^m$ sind linear abhängig, falls $n > m$.

2.3 Basis, Dimension und Koordinaten

Unter einer *Basis* eines Vektorraums versteht man eine Menge von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (*Basisvektoren*) die

1. linear unabhängig sind

2. und den gesamten Vektorraum durch Linearkombination erzeugen.

Ein Vektorraum V kann verschiedene Basen besitzen. Jedoch hat jede Basis desselben Vektorraums gleich viele Elemente. Diese Anzahl wird als *Dimension* $\dim V$ des Vektorraums V bezeichnet.

Meistens werden wir mit den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ arbeiten. Am einfachsten sind dabei die sogenannten *Einheitsbasen*:

$\mathbb{R}^1$: $e = 1$

$\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\mathbb{R}^n$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Somit folgt:

Die Dimension des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist gerade n.

Für diese Vektorräume können unendlich viele Basen gefunden werden. Dazu ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Beispiel:

Alternative Basen für $\mathbb{R}^2$ sind

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots$$

Übung: Prüfen Sie nach, ob diese Vektoren tatsächlich linear unabhängig sind

Was ändert sich eigentlich durch die Wahl einer neuen Basis?

Möchte man als Beispiel den Vektor $(10, 4)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ erreichen, so hängen die Koeffizienten λ_1 und λ_2 der Linearkombination $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$ von der Wahl der Basis $\{v_1, v_2\}$ ab. Diese Koeffizienten nennt man die *Koordinaten* bezüglich der gewählten Basis. Mit der Einheitsbasis erhalten wir die Linearkombination

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten } (10, 4)$$

und bezüglich der obigen drei Basen erhält man

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten } (5, 2)$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten } (-2, 6)$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 14 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten } (-4, 14)$$

Beispiel:

Als zweites Beispiel betrachten wir nochmals den Vektorraum $\mathbb{P}_2$ der Polynome $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ von Grad 2. Die einfachste Basis, die man wählen kann, besteht aus den Potenzen von x.

$$\left\{x^2, x, 1\right\}$$

Bilden diese drei Vektoren tatsächlich eine Basis? Dazu müssen wir prüfen, ob sie i) linear unabhängig sind und ii) den Raum erzeugen.

i) Die Vektoren sind linear unabhängig, falls die Linearkombination

$$\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot 1 = 0$$

für alle x nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ erfüllt werden kann, was hier der Fall ist. Überlegen Sie sich das mal!

ii) Es ist offensichtlich, dass mit den drei Vektoren alle Polynome vom Grad 2 durch Linearkombination erzeugt werden können.

Somit bilden die Vektoren $\left\{x^2, x, 1\right\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$. Es gilt weiter, da die Anzahl der Basiselemente 3 beträgt, dass der Vektorraum $\mathbb{P}_2$ die Dimension 3 besitzt ($\dim \mathbb{P}_2 = 3$).

Verallgemeinert man dieses Resultat auf Polynome vom Grad n, so gilt

$$\text{Basis von } \mathbb{P}_n\colon \left\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \dim \mathbb{P}_n = n + 1$$

2.4 Untervektorräume

Wir haben bereits verschiedene Vektorräume kennengelernt. Nun könnte man sich die Frage stellen: Ist es möglich, aus einem gegebenen Vektorraum V weitere Vektorräume zu konstruieren?

Betrachten wir zum Beispiel den Vektor

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^2$, so kann w alleine die Ebene nicht aufspannen (keine Basis), da $\mathbb{R}^2$ zweidimensional ist. Stattdessen kann mit w eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ aufgespannt werden. Betrachtet man alle Linearkombinationen von w

$$\lambda \cdot w \qquad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

so kann damit jeder Punkt auf der Geraden $y(x) = 2 \cdot x$ erreicht werden. Zudem gilt, dass jede Linearkombination von Vektoren, die auf der Geraden liegen, wieder in der Geraden zu liegen kommen. Also folgt, dass die Gerade auch ein Vektorraum ist, der die Dimension 1 besitzt. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem *Untervektorraum* oder kurz *Unterraum*.

Definition Unterraum: Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst einen Vektorraum bildet.

Beispiele:

$\mathbb{R}^2$: Die eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind Geraden durch den Ursprung.

$\mathbb{R}^3$: Die zweidimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind Ebenen durch den Ursprung und die eindimensionalen die Geraden durch den Ursprung.

$\mathbb{P}_2$: Unterräume sind Polynome mit Grad 1 (dim$=2$) und vom Grad 0 (dim$=1$).

Was bei den obigen Beispielen nicht aufgeführt wurde, ist der *triviale Unterraum*, der nur aus dem Nullvektor besteht und die Dimension 0 besitzt.

Satz:

Ist V ein Vektorraum mit Dimension n, so gibt es für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ einen Unterraum der Dimension k.

3 Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen

3.1 Definition

Unter einer linearen Abbildung zwischen Vektorräumen, versteht man eine Abbildung, die mit der Struktur des Vektorraumes *verträglich* ist. Das heisst, es dürfen keine Operationen verwendet werden, die in einem Vektorraum nicht erlaubt sind. Erst lineare Abbildungen ermöglichen es, verschiedene Vektorräume wirklich miteinander zu vergleichen. Zudem helfen sie uns, Unterräume zu konstruieren und zu analysieren.

Wir wissen aus dem letzten Kapitel, dass man Vektoren entweder addieren / subtrahieren oder mit Skalaren multiplizieren darf. Würde man die Abbildung[1]

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

betrachten, die jedes $x \in \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ quadrieren würde, so wäre das nicht erlaubt, da das Quadrat eines Vektors in einem Vektorraum nicht definiert ist. Die Strukturen eines Vektorraumes übertragen sich wie folgt auf die lineare Abbildungen:

Eine Abbildung

$$f : V_1 \longrightarrow V_2$$

zwischen Vektorräumen V_1 und V_2 ist *linear*, falls

1. $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ für jeden Vektor $v \in V_1$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $f(v + w) = f(v) + f(w)$ für alle Vektoren $v, w \in V_1$

Beispiel: Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot x$. Wir zeigen nun, dass f linear ist. Für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $f(\lambda \cdot x) = 3 \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (3 \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
2. $f(x + y) = 3 \cdot (x + y) = 3 \cdot x + 3 \cdot y = f(x) + f(y)$

Somit ist $f(x) = 3\,x$ eine lineare Abbildung.

Beispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht linear, da $f(2+2) = 16$ nicht gleich $f(2) + f(2) = 4 + 4 = 8$ ist.

Eine wichtige Folgerung aus der Definition der linearen Abbildungen ist:

Ist $f : V_1 \mapsto V_2$ eine lineare Abbildung, so bleibt der Nullpunkt (Nullvektor) fest:

$$f(0) = 0$$

[1] mit "$\to$" bezeichnen wir jeweils die Abbildungsrichtung zwischen den Räumen und mit " $\mapsto$ " die Operationen auf den Vektoren

Beweis: $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2 \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Betrachten wir zum Beispiel die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 1$, so gilt $f(0) = 1 \neq 0$ und somit ist die Abbildung nicht linear, da der Nullpunkt nicht festbleibt.

Achtung: Der umgekehrte Schluss gilt nicht. D.h. aus $f(0) = 0$ muss nicht folgen, dass f linear ist, wie das Beispiel $f(x) = x^2$ zeigt.

3.2 Die Matrix einer linearen Abbildung

Gegeben sei eine beliebige lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwischen den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. In $\mathbb{R}^n$ wählen wir die n Standardvektoren $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\mathbf{T}, e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^\mathbf{T}, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^\mathbf{T}$ als Basisvektoren. Damit kann jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ durch die Linearkombination

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n$$

dargestellt werden. Nun wenden wir die Abbildung f auf den Vektor x an und verwenden die Eigenschaften der linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n) = f(x_1 \cdot e_1) + f(x_2 \cdot e_2) + \ldots + f(x_n \cdot e_n) \\ &= x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \ldots + x_n \cdot f(e_n) \end{aligned}$$

Das Resultat zeigt, dass es genügt, die Abbildungen auf den Basisvektoren $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ zu betrachten. Wir definieren die Abbildungen als

$$v_1 := f(e_1),\ v_2 := f(e_2),\ \ldots, v_n := f(e_n)$$

Nun bringen wir die Matrizen ins Spiel. Die Aufgabe lautet nun, eine Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A} \cdot e_i = v_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ zu finden. Diese Matrix erfüllt dann auch $f(x) = \mathbf{A} \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Da $x \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \cdot x \in \mathbb{R}^m$ muss nach der Multiplikationsregel die Matrix $\mathbf{A}$ n-Spalten und m-Zeilen besitzen (also eine $m \times n$-Matrix). Angenommen wir kennen die Ergebnisse der Multiplikation $\mathbf{A} \cdot e_i$ für alle Basisvektoren, so kennen wir auch die Matrix selbst. Aus

$$\mathbf{A} \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

folgt sofort, dass $\mathbf{A} \cdot e_i$ gerade die i^{te} Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ ergibt. Somit befinden sich in den Spalten von $\mathbf{A}$ gerade die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

In den Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Bilder $(\mathbf{A} \cdot e_i)$ der Einheitsvektoren.

Beispiel:

Gesucht ist die Matrix $\mathbf{A}$ zu der Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2\,x_2 \\ 5\,x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{A} \cdot x = f(x)$

Jetzt betrachten wir die Bilder der Einheitsvektoren e_1, e_2 und e_3:

$$\begin{aligned} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \longmapsto f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse tragen wir in den Spalten von $\mathbf{A}$ ein

$$\mathbf{A} = (f(e_1)|f(e_1)|f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und machen zum Schluss den Test, ob die Matrix $\mathbf{A}$ tatsächlich die gewünschte Abbildung beschreibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2\,x_2 \\ 5\,x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Das ist hier der Fall und somit gilt $\mathbf{A} \cdot x = f(x)$

Wir fassen die wichtigen Ergebnisse zusammen:

Satz:

a) Jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann auf eindeutige Weise eine $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ zugeordnet werden, wobei deren Spalten der Reihe nach die Bilder $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ sind.

b) Ist umgekehrt eine $m \times n$-Matrix mit Spalten $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, so ist die zugehörige lineare Abbildung durch die Vorschrift

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

gegeben

Folgerung:

Eine Abbildung ist genau dann linear, falls sie sich durch eine Matrix darstellen lässt.

3.3 Die wichtigen Unterräume kern und bild

Zwei bei linearen Abbildungen auftretende, wichtige Mengen sind das **Bild** und der **Kern** einer linearen Abbildung

$$f : V_1 \quad \longrightarrow \quad V_2$$

Der *Kern* der Abbildung f besteht aus der Menge der Vektoren in V_1 die durch f auf den Nullvektor in V_2 abgebildet werden:

$$ker(f) := \{x \in V_1 | f(x) = 0\}$$

Der Nullvektor selbst befindet sich natürlich auch im Kern, da die Abbildung linear ist.

Das *Bild* der Abbildung f ist die Menge der möglichen (durch die Abbildung f erreichbaren) Bildvektoren in V_2:

$$im(f) := \{y \in V_2 | \text{es gibt ein } x \in V_1 \text{ mit } f(x) = y\}$$

Sowohl der Kern als auch das Bild von f sind Untervektorräume von V_1 resp. V_2. Das heisst, dass die Mengen selbst auch Vektorräume sind. Übung: Weisen Sie das selbst nach!

Beispiel:

Wir betrachten die lineare Abbildung (Projektion auf die $y = x$ Gerade)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \quad & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto f(x) = \begin{pmatrix} 1/2\, x_1 + 1/2\, x_2 \\ 1/2\, x_1 + 1/2\, x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der **Kern** besteht aus den Vektoren, die auf den Nullpunkt $(0, 0)$ projeziert werden, daher kommen für den Kern nur die Vektoren in Frage, die senkrecht auf der Geraden $y = x$ stehen. So zum Beispiel $(1, -1)$, $(2, -2)$ und $(-5, 5)$ (alle auf der Geraden $y = -x$). Veranschaulichen Sie sich das mit Hilfe einer Skizze. Der Kern ist somit 1-dimensional mit Basis $(1, -1)$.

Da jeder Punkt auf der Geraden $y = x$ durch Projektion erreichbar ist, entspricht das **Bild** somit der Menge $y = -x$ und besitzt auch die Dimension 1 mit Basis $(1, 1)$

Dimensionssatz: Das Bild und der Kern einer linearen Abbildung $f : V_1 \longrightarrow V_2$ stehen über den Dimensionssatz in Beziehung. Dieser sagt aus, dass die Dimension von V_1 gleich der Summe der Dimensionen des Bildes und des Kerns ist:

$$dim(V_1) = dim(ker(f)) + dim(im(f))$$

Umkehrbarkeit von linearen Abbildungen: Falls die Dimensionen der betrachten Räume V_1 und V_2 einer linearen Abbildung $f : V_1 \longrightarrow V_2$ identisch sind, können die folgenden äquivaleten Aussagen zur **Umkehrbarkeit** von f gemacht werden:

i) Die Abbildung f ist umkehrbar

ii) $dim(ker(f)) = 0$

iii) $dim(im(f)) = dim(V_2)$

Umkehrbar heisst, dass die zugehörige Matrix der Abbildung invertierbar (regulär) ist.

Abbildungen zwischen Räumen mit *unterschiedlichen* Dimensionen sind nicht umkehrbar.

3.4 Lineare Gleichungssysteme als lineare Abbildungen

Mit Hilfe der Konzepte aus dem letzten Kapitel lassen sich lineare Gleichungssysteme und deren Lösbarkeit einfach erklären. Dazu betrachten wir ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Form

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots x_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots x_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots x_{nn}\,x_n &= b_n \end{aligned}$$

das wir in Matrizenform als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$\mathbf{A} \cdot x = b$$

schreiben können. **A** ist die *Koeffizientenmatrix* und b die *rechte Seite*. Ist $b = 0$ so nennt man das Gleichungssystem *homogen*, sonst *inhomogen*.

Aus Kapitel **??** wissen wir, dass jeder Matrix eine lineare Abbildung zugeordnet werden kann. Also können wir die $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ als Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ interpretieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: \quad \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \mathbf{A} \cdot x = b \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung umkehrbar, d.h. ist $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ (siehe Kap. **??**), so erhält die eindeutige Lösung x des Gleichungssystems durch Umkehrung der Abbildungsrichtung (Inversenbildung):

$$x = \mathbf{A}^{-1} \cdot b$$

Falls $\mathbf{A}$ nicht invertierbar ist ($\det \mathbf{A} = 0$), so müssen zwei Fälle unterschieden werden. Dazu betrachten wir ein konkretes Beispiel.

Beispiel:

Gegeben sei das 2×2-Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 1\,x_2 &= b_1 \\ -4\,x_1 + 2\,x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

mit beliebiger rechter Seite. Die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ist $2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-1) = 0$, somit nicht eindeutig lösbar. Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss für ein $x \in \mathbb{R}^2$ $\mathbf{A} \cdot x = b$ gelten. Ausgedrückt mit dem Begriff des Bildes aus Kap. **??** heisst das, dass die rechte Seite b im Bild von $\mathbf{A}$ liegen muss ($b \in \text{bild}\mathbf{A}$). Wir konstruieren dieses Bild, indem wir die Matrix $\mathbf{A}$ mit einen beliebigen Vektor $(x_1, x_2)^\mathbf{T} \in \mathbb{R}^2$ multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 - x_2 \\ -4\,x_1 + 2\,x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rechts bleibt eine Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$. Offensichtlich sind diese Spalten linear abhängig, da $-2 \cdot (2, -4)^\mathbf{T} = (-1, 2)^\mathbf{T}$. Somit kann für $\mathbf{A} \cdot x$ auch

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 2\,x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (x_1 - 2\,x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

geschrieben werden. Dies zeigt, dass das Bild von $\mathbf{A}$ nur vom Vektor $(2, -4)^\mathbf{T}$ erzeugt wird und somit eindimensional ist. Geometrisch betrachtet ist das Bild die Nullpunktsgerade mit Steigung $-4/2 = -2$ ($y(x) = -2\,x$).

Nun betrachten wir zwei verschiedene rechte Seiten b der ursprünglichen Gleichung $\mathbf{A} \cdot x = b$:

a) $b = (1, 1)^\mathbf{T}$ Keine Lösung, da nach (**??**) für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllbar ist.

b) $b = (-1,2)^{\mathbf{T}}$ Mit $\lambda = -1/2$ gilt nach (**??**)

$$-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zudem können wir aus (**??**) die Lösungen für x_1 und x_2 rauslesen. Mit $\lambda = -\frac{1}{2} = x_1 - 2 \cdot x_2$ folgt zudem, dass es unendlich viele Lösungen gibt. So zum Beispiel: $(x_1 = 1, x_2 = 3/4)$ oder $(x_1 = 2, x_2 = 5/4)$

Bei einem homogenen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \cdot x = 0$$

sind immer entweden genau eine, oder unendlich viele Lösungen möglich, da der Nullpunkt 0 immer im Bild einer linearen Abbildung liegt.

Lösbarkeit linearer Gleichungssystemen

Für die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot x = b$ gilt:

Fall 1: Ist $\det\mathbf{A} \neq 0$ so ist x eindeutig durch $\mathbf{A}^{-1} \cdot b$ gegeben.

Fall 2: Ist $\det\mathbf{A} = 0$ so hat man entweder

i) keine Lösung, falls $b \notin \text{bild}\mathbf{A}$
ii) unendlich viele Lösung, falls $b \in \text{bild}\mathbf{A}$

4 Eigenwertprobleme

4.1 Definitionen

Unter einem Eigenwertproblem versteht man die folgende Aufgabe:

Gegeben sei eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$. Finde einen Vektor $x \neq 0$ und einen Skalar λ so dass

$$\mathbf{A} \cdot x = \lambda \cdot x$$

Das heisst, dass der Vektor x nur gestreckt wird (Faktor λ) und nicht gedreht.

Sprechweise: x ist *Eigenvektor* zum *Eigenwert* λ.

Eine erste Folgerung aus dieser Definition ist, dass ein Eigenvektor x zu einem Eigenwert λ nicht eindeutig ist. Betrachten wir anstelle von x den Vektor $\alpha \cdot x$, so gilt $\mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot x = \alpha \cdot \lambda \cdot x$. Dies zeigt, dass $\alpha \cdot x$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha \cdot \lambda$ ist.

Diese Definition lässt sich natürlich auch auf lineare Abbildung anwenden. Sei $f : V_1 \to V_2$, so heisst $v \in V_1$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls $f(v) = \lambda \cdot v$.

4.2 Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte

Zur Berechnung stellen wir die Definition der Eigenwerte und Eigenvektoren um:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot x &= \lambda \cdot x \\
\mathbf{A} \cdot x - \lambda \cdot x &= 0 \\
(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot x &= 0 \qquad \text{wobei } \mathbf{E} \text{ die Einheitsmatrix darstellt.} \\
\tilde{\mathbf{A}} \cdot x &= 0
\end{aligned}$$

mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$. Somit reduziert sich das Problem auf das Lösen des homogenen, linearen Gleichungssystems $\tilde{\mathbf{A}} \cdot x = 0$. Aus dem Kapitel **??** wissen wir, dass eine eindeutige Lösung gegeben ist, falls $\det\tilde{\mathbf{A}} \neq 0$. Die Lösung wäre unter dieser Bedingung $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot 0 = 0$, was aber nicht zulässig ist, da Eigenvektoren x per Definition nicht gleich Null sein dürfen. Also muss zur Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte

$$\det\tilde{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0 \tag{5}$$

gelten. Die Gleichung (**??**) dient dazu die Eigenwerte λ der Matrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen. Die Beispiele aus der Vorlesung oder den Übungsblätter zeigen, dass der Ausdruck $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E})$ gleich einem Polynom (*das charakteristische Polynom*) mit Variable λ. Ist $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix, so ist der Grad des Polynoms gerade n.

Definition und Satz

Das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist definiert als

$$P(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E})$$

und die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ entsprechen gerade den Nullstellen von $P(\lambda)$.

Sind diese Eigenwerte mal gefunden, so sind noch die zugehörigen Eigenvektoren zu bestimmen. Angenommen, die Matrix $\mathbf{A}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so muss nach der Gleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot x = 0$$

für jedes λ_i ein Vektor $x_i \neq 0$ mit

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot x_i = 0$$

gefunden werden. Nach Kapitel **??** ist der Eigenvektor x_i zum Eigenwert λ_i nicht anderes als der Kern der Abbildung

$$\tilde{\mathbf{A}}_i := (\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{E})$$

4.3 Interessante Sätze zu Eigenwerten / -Vektoren

Im Folgenden sein $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix.

Satz 1: $\mathbf{A}$ kann höchstens n Eigenwerte haben.

Satz 2: Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist gleich dem Produkt all ihrer Eigenwerte.

$$\det\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Folge daraus: Ist ein Eigenwert $= 0$, so ist die Matrix singulär (nicht invertierbar)

Satz 3: Unter welcher Bedingung existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$ für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$? Am einfachsten sieht man das am Beispiel einer beliebigen $n \times n$-Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

dabei gilt (Übung!)

$$\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & & \\ & d_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^n \end{pmatrix}$$

Da die Diagonaleinträge $d_1, d_2, \ldots, d_n$ gerade den Eigenwerten entsprechen folgt sofort, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^n$ existiert und gleich 0 ist, falls für alle Eigenwerte

$$-1 < d_i < 1 \quad \text{resp.}\, |d_i| < 1$$

gilt. Dieses Ergebnis lässt sich auf beliebige, quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ verallgemeinern:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A} = 0 \quad \text{falls für alle Eigenwerte } \lambda_i \text{ gilt } |\lambda_i| < 1$$

Satz 4: Hat man eine Diagnonalmatrix (i), obere Dreiecksmatrix (ii) oder untere Dreiecksmatrix (iii) gegeben, so sind die Diagonaleinträge gerade die Eigenwerte der Matrix. Beispiele:

(i) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Mit Eigenwerten $5, -1$ und 2 und Determinante $5 \cdot (-1) \cdot 2 = -10$

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 3 \\ 0 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Mit Eigenwerten $2, -1$ und 2 und Determinante $2 \cdot (-1) \cdot 2 = -4$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ Mit Eigenwerten $2, 0$ und 3 und Determinante $2 \cdot (0) \cdot 3 = 0$