

# Mehrfach-Integrale - Übung III

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Semesterwoche 3

Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungsweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein. **Abgabetermin: Am Ende der Semesterwoche 4 (z.B. in meinen Briefkasten).**

## Aufgabe 1: Kugelkoordinaten

Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \rho(x, y, z) dz dy dx$$

falls  $\rho(x, y, z) = (1 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$ . Skizzieren Sie das Integrationsgebiet. Was stellt das Resultat dar, wenn  $\rho$  die Dichte ist?

## Aufgabe 2: Kugelkoordinaten

Verwenden Sie sphärische Koordinaten um das Dreifachintegral

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx$$

zu berechnen. Beschreiben und skizzieren Sie zuerst das Integrationsgebiet. Überlegen Sie sich dann, wie man die Integration in sphärischen Koordinaten (Kugelkoordinaten) durchführen kann. Schätzen Sie am Schluss das Resultat mit einer *Kopfrechnung* ab.

**Lösung:**  $64/9\pi$

### Aufgabe 3: Schwerpunkt

Bestimme den Schwerpunkt des Körpers  $G$  beschränkt durch  $y = x^2$ ,  $y = 4$ ,  $z = 0$  und  $y + z = 4$ . Skizzieren Sie zuerst den Körper und verwenden Sie dann geeignete Koordinaten.

**Lösung:**  $(x_S, y_S, z_S) = (0, 12/7, 8/7)$

### Aufgabe 4: Trägheitsmoment

Ein Körper ist durch die Ungleichungen  $x^2 + y^2 \leq a$ ,  $x + y + z \leq \sqrt{2}a$ ,  $x, y, z \geq 0$  bestimmt. Skizzieren Sie diesen Körper. Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der  $z$ -Achse unter der Annahme  $\rho = 1$ . Tipp: verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

**Lösung:** ....

### Aufgabe 5: Trägheitstensor

Berechnen Sie den Trägheitstensor eines Quaders mit den Kantenlängen  $a$  (in  $x$ -Richtung),  $b$  (in  $y$ -Richtung) und  $c$  (in  $z$ -Richtung) und zwar bezüglich des Schwerpunktes (bei konstanter Dichte  $\rho$ ).

**Lösung:** ... (steht im Formelbuch).

**Viel Spass!**