Wenig Zerfälle – Poisson Statistik

Der radioaktive Zerfall eines Kerns ist **echt zufällig**. Diese Zufälligkeit, respektive die Schwankung der Zerfallshäufigkeit um den Mittelwert wird mittels der **Poissonverteilung** wiedergegeben. Ein Alltagsbeispiel soll dies erläutern: Ein Eimer steht draussen im Regen. Wir zählen die Anzahl Tropfen, die in den Eimer fallen. So können wir präzise den Mittelwert bestimmen: 1469 Tropfen in 15 Minuten, d.h. 16.32 Tropfen pro $10.0\,\mathrm{s}$. Die Wahrscheinlichkeit, in den nächsten $10.0\,\mathrm{s}$ 14 Tropfen zu zählen ist:

Diskrete Poisson Verteilung

$$p(14) = \frac{16.32^{14}}{14!} \cdot e^{-16.32} = 0.089 = 8.9\%$$

1. Ist die Wahrscheinlichkeit, 7 Tropfen in $5.00\,\mathrm{s}$ zu zählen ebenfalls $8.9\,\%$?

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in $10.0\,\mathrm{s}$ 16 Tropfen zu zählen.

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in $10.0\,\mathrm{s}$ maximal 14 Tropfen zu zählen.

Kontinuierliche Poisson Verteilung

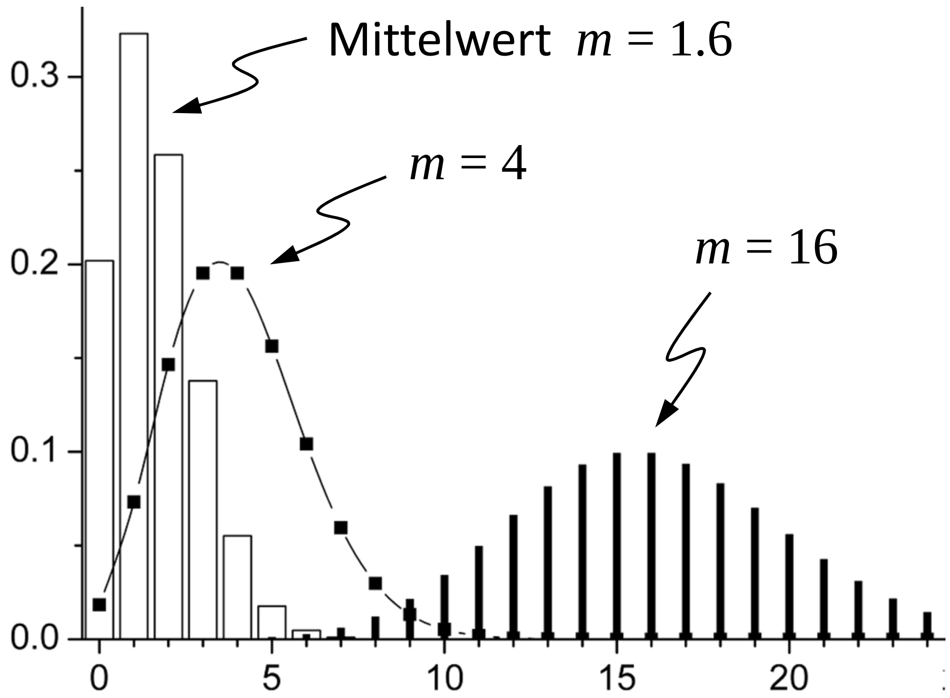
$p(x)$ ist die **Wahrscheinlichkeitsdichte** für den Wert x bei einem Mittelwert von m. #)

$$p(x) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!} = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{\int_0^\infty t^x e^{-t} dt}$$

Die Funktion $\mathrm{x}! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1)$ heisst Gammafunktion. #)

Viele Zerfälle – Gauss Statistik

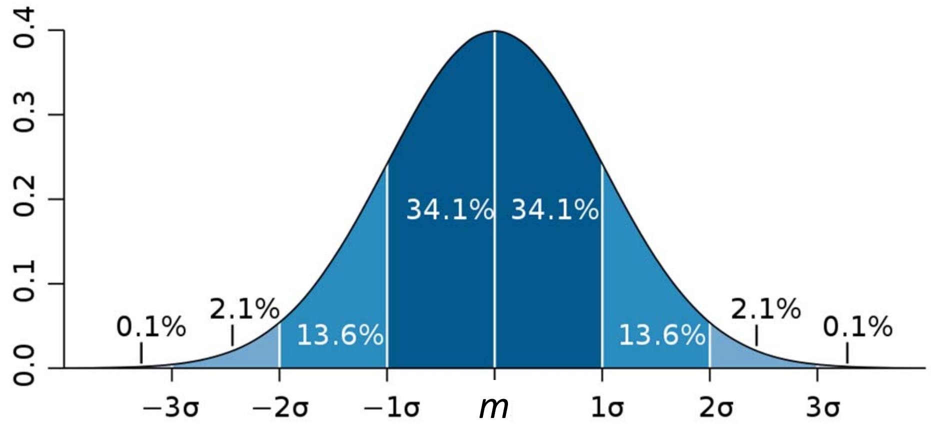
Die Figur rechts zeigt drei diskrete Poisson Verteilungen für verschiedene Messzeiten, aber äquivalente Mittelwerte, nämlich 1.6 pro Sekunde, 4 in $2.5\,\mathrm{s}$, respektive 16 in $10.0\,\mathrm{s}$. Die Verteilungen sind asymmetrisch.



Für lange Messzeiten, d.h. grosse Mittelwerte geht die Poisson Verteilung in die **Gaussverteilung** über:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma = \sqrt{m}$: Die Standard Abweichung wächst mit Wurzel des Mittelwertes !



Wegen $\sigma = \sqrt{m}$ für grosse Mittelwerte wird die <u>relative</u> Verteilbreite immer kleiner. Der Quotient Breite / Mittelwert $\sigma/m = 1/\sqrt{m}$ nimmt mit zunehmendem Mittelwert ab. Die Dosis wird statistisch schärfer.

Messaufträge

4. Messen Sie im Unterrichtsraum 50 Mal die Hintergrundstrahlung während einer Zähldauer von $10\,\mathrm{s}$. Tragen Sie auf die x-Achse den Anzeigewert und auf die y-Achse die Häufigkeit dieses Wertes auf (ev. EXCEL Vorlage benutzen). Sie erhalten so ein $p(x)_{\mathrm{exp}}$ - Histogramm. Vergleichen Sie die Messungen mit der theoretischen Kurve $p(x)_{\mathrm{theo}}$. Wiederholen Sie die Messungen (5 Mal) für einer Zähldauer von $300\,\mathrm{s}$.

5. Messen Sie eine aktive Probe in unterschiedlichem Abstand. Tragen Sie die Zählraten als Funktion des Abstandes ein. Welchen funktionalen Zusammenhang erwarten Sie? Versuchen Sie, ihr Kurve entsprechend zu fitten.

6. Testen Sie verschiedene Abschirmungen: Zählraten als Funktion des Abschirmmaterials und Abschirmdicke.

Testat pro Gruppe (2 Studenten): Senden Sie mir bitte bis am Mi 16.11.2016 Ihre Messungen in EXCEL zu.