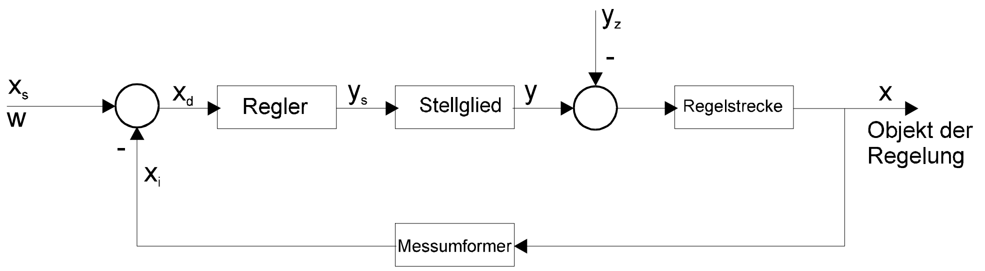
MRT + A

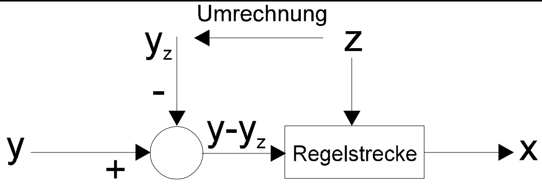
Regelungstechnik Zusammenfassung

Inhalt

1 Allgemein



Begriff	Erklärung
Zustandsgrössen	Grössen im Innern des Regelkreises; ändern sich beim Regelvorgang
Führungsgrösse	Sollwert w, x_s
Regeldifferenz	x_d=x_s - x_i
Stellbefehl	y_s; wird aus x_d erzeugt
Stellgrösse	y; leistungsstarker Stellbefehl y_s
Objekt der Regelung	Regelgrösse x
Störgrösse	z wirkt von aussen ein; kann in äquivalente Änderung der Stellgrösse y_z umgerechnet werden

Begriff	Erklärung
	
Regelstrecke	liegt zwischen y und x
Messgrössenumformer	wandelt Ist-Wert der Regelgrösse in proportionales Signal um
Regler	vergleicht Soll- und Ist-Wert => x_d und erzeugt y_s
Stellglied	erzeugt aus y_s leistungsstarkes Signal y
Rückkopplung	die Rückkopplung (Rückführung) beeinflusst das gesamte Regel-verhalten
statische Genauigkeit	Regeldifferenz in Beharrung
dynamische Genauigkeit	Abweichung der Regelgrösse x von $x_s = f(t)$ während dem Einschwingvorgang
Direktregler	Regler ohne Hilfsenergie
Steuern	open loop control
Regeln	closed loop control
MIMO	multiple input, multiple output
SISO	single input, single output
LZI	linear zeitinvariant • Superposition möglich • ist proportional • Frequenz bleibt konstant
LZV	linear zeitvariant
System mit Ausgleich	ω=0 liegt in der Ortskurve auf der reellen Achse, $x_d(\infty)=0$, z.B. PT_1
dominante Zeitkonstante	liegt am nächsten beim Ursprung
Ordnung	System n-ter Ordnung => Nennerpolynom ist n-ten Grades
Bandbreite	geht bis zur Eckfrequenz (-3dB Punkt)
P-Band	$x_P = \frac{1}{K_P}$; $K_P = \tan\alpha$
LHE	linke Halbebene (des Koordinatensystems)
RHE	rechte Halbebene (des Koordinatensystems)
BIBO	bounded input, bounded output (begrenzte Signale am Eingang, begrenzte Signale am Ausgang => Endwert)
Totzeitapproximation	Padé-Approximation („unendliche" Reihe von PT_1-Gliedern; Föllinger S.412)
Minimumphasensystem	Von allen Systemen mit derselben Betragskennlinie hat ein Minimumphasensystem die kleinste Phasenverschiebung (Totzeitglied); vgl Buch S. 194) alle Pole & Nullstellen in LHE
Nichtminimumphasensystem	Allpässe (Nullstellen in RHE, symmetrisch zu den Polen) z.B. $G(s) = \frac{1-T\cdot s}{1+T\cdot s}$; ist BIBO stabil

wenn:

- $x_s \approx$ konst: Festwertregelung
- $x_s = f(t)$: Folgeregelung, Nachlaufregelung

2 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

(Föllinger S.387-503)

2.1 Allgemein

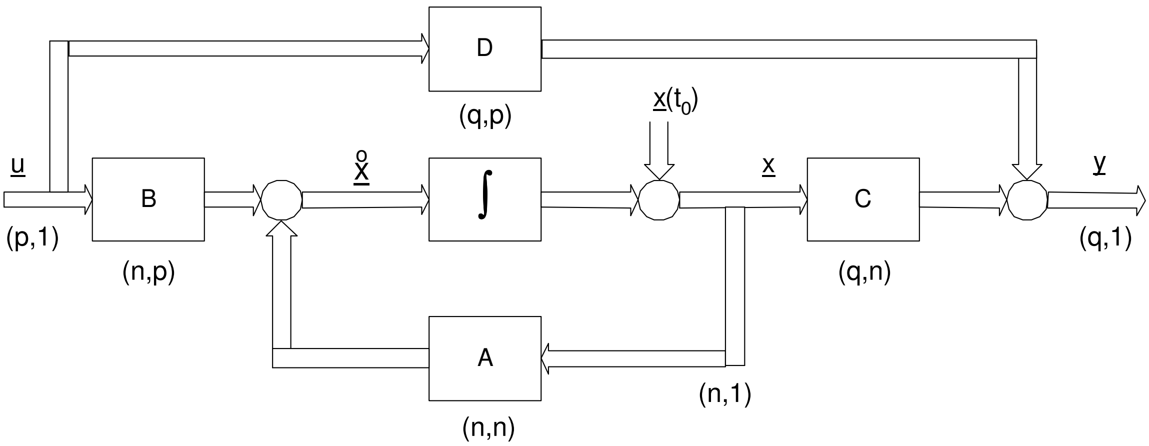
- Mit der ZRD ist es möglich, nichtlineare und zeitvariante Systeme nachzubilden.
- Es kommen nie höhere Ableitungen als 1. Ordnung vor.
- aus einer DGL n. Ordnung werden n DGLs 1. Ordnung gebildet.
- Es dürfen keine Ableitungen von Eingangsgrössen enthalten sein.
- Totzeitglieder können nicht direkt dargestellt werden (nur mit Approximation).
- Anfangswerte der Speicher (Integratoren) $\underline{x}(t_0)$ müssen beachtet werden.
- Hauptgleichungen:

$$\text{MIMO: } \boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\cdot\underline{x} + B\cdot\underline{u}\\ \underline{y} &= C\cdot\underline{x} + D\cdot\underline{u}\end{aligned}} \qquad \text{SISO: } \boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\cdot\underline{x} + \underline{b}\cdot u\\ y &= c^T\cdot\underline{x} + d\cdot u\end{aligned}}$$

$\underline{x}$: Zustandsgrössen (Vektor); y: Ausgangsgrössen

- $x_1 = y;\quad x_2 = \dot{x}_1;\quad x_3 = \dot{x}_2;\quad \ldots;\quad x_n = \dot{x}_{n-1}$

  $X_1 = Y;\quad X_2 = s\cdot X_1;\quad X_3 = s\cdot X_2;\quad X_n = s\cdot X_{n-1}$
- Strukturbild des offenen Systems



A: Systemmatrix, Dynamikmatrix (beinhaltet die Pole des Systems)
B: Eingangsmatrix
C: Ausgangsmatrix
D: Durchgangsmatrix (häufig = 0, z.B. wenn Zählergrad < Nennergrad von G(s))

2.2 Normalformen

2.2.1 Regelungsnormalform (Taschenbuch S. 644)

Grundlegende Form (SISO):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & .. & .. & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} b_0 - \frac{b_n a_0}{a_n} & b_1 - \frac{b_n a_1}{a_n} & .. & b_{n-1} - \frac{b_n a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}$$

Meistens gilt:

$a_n = 1$

$b_n = 0$

2.2.2 Beobachtungsnormalform (Taschenbuch S. 648)

Grundlegende Form (SISO):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & .. & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & .. & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} \\ b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} \\ .. \\ b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & .. & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}$$

Meistens gilt:

$a_n = 1$

$b_n = 0$

2.2.3 Jordansche Normalform (Diagonalform)

- Bevorzugte Verwendung, wenn Pole von System bekannt sind
- System ist vollständig entkoppelt, wenn alle Pole reell und einfach vorkommen
- A ist Diagonalmatrix mit λ_i: Pole

Grundlegende Form (SISO):

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & .. \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ .. \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} r_1 & .. & r_n \end{bmatrix} \qquad d = r_0$$

2.3 Transformationen

2.3.1 Transformation auf Regelungsnormalform (Taschenbuch S.660)

$$A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1}$$
$$b_R = T_R \cdot b$$
$$c_R^T = c^T \cdot T_R^{-1}$$
$$d_R = d$$

Ein Übertragungssystem $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ wird mit der Transformation $z = T_R \cdot x$ in die Regelungsnormalform $\dot{x}_R = A_R \cdot x_R + b_R \cdot u$ überführt.
Wobei die Transformationsmatrix T_R mit der Systemmatrix A und der letzten Zeile q_{sn}^T der inversen Steuerbarkeitsmatrix Qs^{-1} gebildet wird.

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{sn}^T \\ q_{sn}^T \cdot A \\ .. \\ q_{sn}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \qquad Q_s^{-1} = \begin{bmatrix} q_{s1}^T \\ q_{s2}^T \\ .. \\ q_{sn}^T \end{bmatrix}$$

2.3.2 Transformation auf Beobachtungsnormalform (Taschenbuch S.662)

$$A_B = T_B \cdot A \cdot T_B^{-1}$$
$$b_B = T_B \cdot b$$
$$c_B^T = c^T \cdot T_B^{-1}$$
$$d_B = d$$

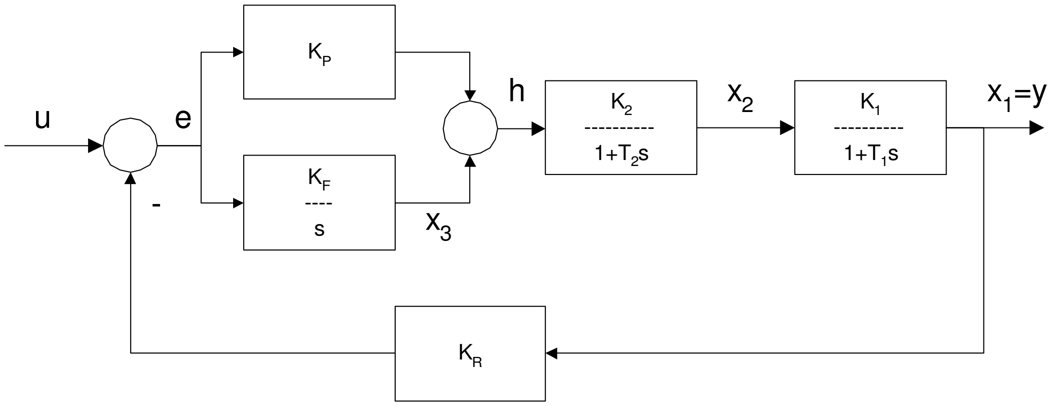
Ein Übertragungssystem $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ wird mit der Transformation $z = T_B \cdot x$ in die Beobachtungsnormalform $\dot{x}_B = A_B \cdot x_B + b_B \cdot u$ überführt.
Wobei die Transformationsmatrix T_B mit der Systemmatrix A und der letzten Spalte q_{Bn} der inversen Steuerbarkeitsmatrix Q_B^{-1} gebildet wird.

$$T_R = \begin{bmatrix} q_{Bn} & A \cdot q_{Bn} & .. & A^{n-1} \cdot q_{Bn} \end{bmatrix} \qquad Q_B^{-1} = \begin{bmatrix} q_{B1} & q_{B2} & .. & q_{Bn} \end{bmatrix}$$

2.3.3 Strukturbild => ZRD

- es dürfen nur I-Glieder (Integratoren) und PT_1-Glieder vorkommen.
- Glieder höherer Ordnung als 1 müssen zerlegt werden (PT_2-Glieder müssen also zerlegt werden).
- x_i = Ausgänge der I- und PT_1-Glieder; DGL 1. Ordnung

Beispiel:



Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$X_1 = \frac{K_1}{1+T_1 s} X_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sX_1 = -\frac{1}{T_1} X_1 + \frac{K_1}{T_1} X_2}$$

$$e = u - K_R x_1$$

$$h = eK_P + x_3$$

$$X_2 = \frac{K_2}{1+T_2 s} h \quad \Rightarrow \quad \text{ineinander eingesetzt und umgeformt} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{sX_2 = -\frac{K_2 K_R K_P}{T_2} X_1 - \frac{1}{T_2} X_2 + \frac{K_2}{T_2} X_3 + \frac{K_2 K_P}{T_2} U(s)}$$

$$\mathbf{sX_3 = -K_F K_R X_1 + K_F U(s)}$$

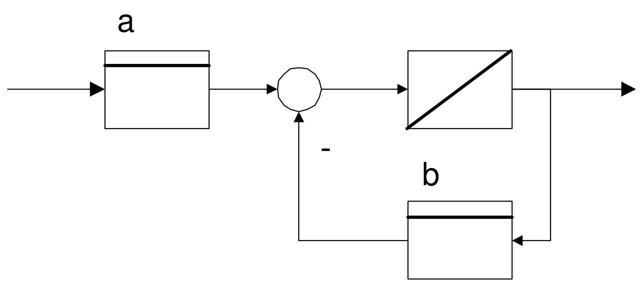
$$\text{mit} \quad \dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot u \xrightarrow{L} s\underline{X} = A \cdot \underline{X} + \underline{b} \cdot U$$

$$\text{und} \quad \underline{y} = c^T \cdot \underline{x} + \underline{d} \cdot u$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{K_1}{T_1} & 0 \\ -\frac{K_2 K_R K_P}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -K_F K_R & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_2 K_P}{T_2} \\ K_F \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

2.3.3.1 PT_1 mit Integrator und P-Glied

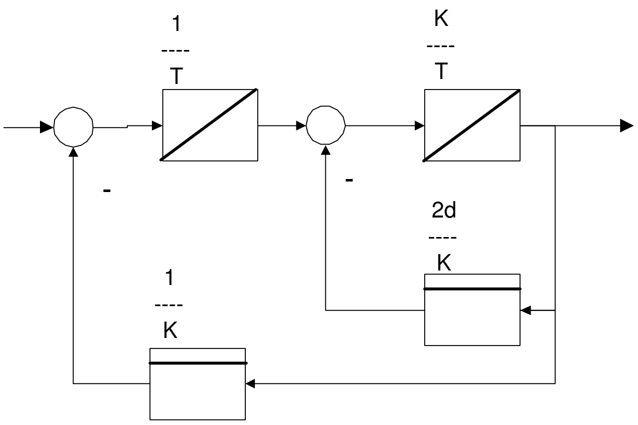


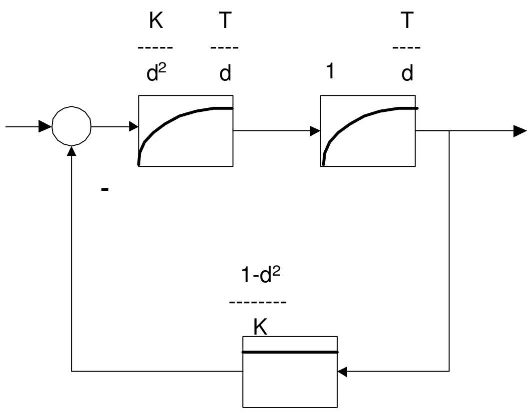
$$G(s) = \frac{a}{s+b} = \frac{a}{b}\frac{1}{1+\frac{1}{b}s}$$

2.3.3.2 PT_2 zerlegen

$$G(s) = \frac{K}{1+2dTs+T^2s^2}$$

Es gibt 2 Möglichkeiten, ein PT_2-Glied zu zerlegen:





2.3.4 DGL => ZRD

Differentialgleichungen so umformen, dass die Ableitungen alleine stehen:

Beispiel 1:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_3 + pu_2$$
$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + ex_3 + qu_1$$
$$\dot{x}_3 = fx_2$$
$$y = x_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & f & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{u}}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} \qquad d = 0$$

Beispiel 2:

$a \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = K \cdot u$; DGL 2. Ordnung

$\Rightarrow \quad x_1 = y \quad ; \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$

$a \cdot \dot{x}_2 + b \cdot x_2 + c \cdot x_1 = K \cdot u \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = -\frac{c}{a} \cdot x_1 - \frac{b}{a} \cdot x_2 + \frac{K}{a} \cdot u$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{a} \end{bmatrix}}_{b} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + 0$$

Die „1“ in der c^T-Matrix und der Faktor „K/a“ in der b-Matrix können beliebig vertauscht werden.

2.3.5 Übertragungsfunktion G(s) => Regelungsnormalform

gegeben: $G(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \ldots + b_n \cdot s^n}{a_0 + a_1 \cdot s + \ldots a_n \cdot s^n}$; SISO

gesucht: A, B, C, D

Lösung:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & .. & .. & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \left[b_0 - \frac{a_0}{a_n} \cdot b_n; \quad b_1 - \frac{a_1}{a_n} \cdot b_n; \quad ..; \quad b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot b_n \right] \qquad d = \frac{b_n}{a_n}$$

wenn b_n=0 und a_n=1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & .. & .. & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & .. & b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

2.3.6 Regelungsnormalform ⇔ Beobachtungsnormalform

$$A_{RNF} = A_{BNF}^T; \quad b_{RNF} = c_{BNF}$$
$$c_{RNF} = b_{BNF}; \quad d_{RNF} = d_{BNF}$$

X_{RNF}: Regelungsnormalform

Y_{BNF}: Beobachtungsnormalform

2.3.7 Übertragungsfunktions G(s) ⇔ Jordansche Normalform

gegeben: $G(s) = \dfrac{b_0 + b_1 \cdot s + \ldots + b_n \cdot s^n}{a_0 + a_1 \cdot s + \ldots a_n \cdot s^n}$; SISO

gesucht: A, B, C, D

Lösung: Partialbruchzerlegung

=> bei **einfachen** Polen: (System vollständig entkoppelt)

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s-\lambda_i} + r_0 = \frac{r_1}{s-\lambda_1} + \frac{r_2}{s-\lambda_2} + \ldots + \frac{r_n}{s-\lambda_n} + r_0$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & .. \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ .. \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} r_1 & .. & r_n \end{bmatrix} \qquad d = r_0$$

=> bei **m-fachen** Polen (System gekoppelt):

$$G(s) = \frac{r_1}{s-\lambda_1} + \frac{r_2}{(s-\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{r_m}{(s-\lambda_1)^m} + \frac{r_{m+1}}{s-\lambda_{m+1}} + \ldots + \frac{r_n}{s-\lambda_n} + r_0$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & .. & .. & .. \\ 1 & \lambda_1 & 0 & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & .. & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 1 & \lambda_1 & 0 & .. & .. \\ \hline .. & .. & .. & .. & \lambda_{m+1} & 0 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & \lambda_n \end{array}\right] \qquad \underline{b} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ \hline 1 \\ .. \\ 1 \end{array}\right]$$

$$\underline{c}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} r_1 & .. & r_m & r_{m+1} & .. & r_n \end{array}\right] \qquad d = r_0$$

=> bei **konjugiert-komplexen** Polen (System gekoppelt):
Pole aufteilen in Real- und Imaginärteil und getrennt lösen!

2.3.8 Matrix ⇔ Jordansche Normalform

Folgende Gleichungen stehen zur Verfügung:

$$\underline{x} = V\underline{z}$$

$$\text{wobei } V = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ .. & .. & .. \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \qquad ;\text{V ist die gesuchte Matrix}$$

$$\dot{\underline{z}} = V^{-1}AV\underline{z} + V^{-1}B\underline{u} \qquad ;\text{ eingesetzt in die 2 Hauptgleichungen der ZRD}$$

$$\underline{y} = CV\underline{z} + D\underline{u}$$

Ablauf:

1.) $\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i$

2.) $(\lambda_k I - A) \cdot \underline{v}_k = 0 \qquad ; k = 1..n \qquad \Rightarrow \quad n^2$ Gleichungen

3.) aus Gleichungen v_{ik} bestimmen und in Hauptgleichungen einsetzen

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_k I - A) \cdot \underline{v}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_k + 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda_k + 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ v_{3k} \end{bmatrix} \quad ;\ k = 1..3 \ \Rightarrow \ 9 \text{ Gleichungen}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 v_{11} - v_{21} = 0 \ ; \quad (\lambda_1 + 1)v_{21} - v_{31} = 0 \ ; \quad (\lambda_1 + 2)v_{31} = 0$$

$$\lambda_2 v_{12} - v_{22} = 0 \ ; \quad (\lambda_2 + 1)v_{22} - v_{32} = 0 \ ; \quad (\lambda_2 + 2)v_{32} = 0$$

$$\lambda_3 v_{13} - v_{23} = 0 \ ; \quad (\lambda_3 + 1)v_{23} - v_{33} = 0 \ ; \quad (\lambda_3 + 2)v_{33} = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_{1..3}$ eingesetzt ergibt:

v_{11} beliebig ; $\quad v_{21} = 0 ; \quad v_{31} = 0$

$v_{32} = 0 ; \quad v_{22} = -v_{12}$

$v_{33} = -v_{23} ; \quad v_{23} = -2v_{13}$

$\Rightarrow \quad v_{11} = 1; \quad v_{12} = 1; \quad v_{13} = 1$ beliebig wählbar, da linear voneinander abhängig!

$$\text{Somit:} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ;\text{ V wird nun in Hauptgleichungen eingesetzt}$$

2.4 Steuerbarkeit (Taschenbuch S.653)

Sagt aus, ob ich Einfluss auf Ausgang eines Systems ausüben kann (mittels Eingang).

$$Q_S = \left[\underline{b},\ A \cdot \underline{b},\ A^2 \cdot \underline{b},\ \dots,\ A^{n-1} \cdot \underline{b}\right]$$

Q_S: Steuerbarkeitsmatrix
n: Anzahl Zeilen von A

Steuerbarkeit ist erfüllt, wenn linear unabhängig:

$$\boxed{\det(Q_S) \neq 0 \quad \text{oder} \quad \text{Rang}(Q_S) = n}$$

2.5 Beobachtbarkeit (Taschenbuch S.655)

Sagt aus, ob ich Zugriff auf Ausgang eines Systems habe.

$$Q_B = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \cdot A \\ \underline{c}^T \cdot A^2 \\ \dots \\ \underline{c}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Q_B: Beobachbarkeitsmatrix
(hier für SISO)
n: Anzahl Zeilen von A

Beobachtbarkeit ist erfüllt, wenn linear unabhängig:

$$\boxed{\det(Q_B) \neq 0 \quad \text{oder} \quad \text{Rang}(Q_B) = n}$$

2.6 Bilden der Übertragungsfunktion im Zustandsraum

2.6.1 MIMO-System

Zeitbereich:

$$\underline{x}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \ + e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)$$

partikuläre Lösung; Faltung von Impulsantwort und Eingangssignal	homogene Lösung; transiente Lösung (flüchtig). $e^{A(t-t_0)}$ =Überführungsmatrix $\Phi(t,t_0)$ (Transitionsmatrix) (Föllinger S.426)

Bildbereich:

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \ + (sI - A)^{-1} \cdot \underline{x}_0$$

$$s \cdot \underline{X}(s) - \underline{x}_0 = A \cdot \underline{X}(s) \ + B \cdot U(s)$$; mit Anfangsbedingungen

$$(sI - A) \cdot X(s) = I$$

2.7 Transitionsmatrix

Ist die Lösung des homogenen Systems:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A \cdot \Phi(t, t_o)$$

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

$$\Phi(s) = L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

$\det(sI - A) = 0$
- ⇨ charakteristisches Polynom (Gleichung) => Wurzeln, Pole des Systems
- ⇨ Eigenwerte von A
- ⇨ System ist stabil, wenn Pole von charakteristischem Polynom in linker Halbebene liegen.

2.8 Bestimmen der Ausgangsgrösse y

Zeitbereich:

$$\underline{y} = C \cdot \underline{x} = \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \ + D \cdot u(t) \ + C \cdot e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)$$

ohne Durchgangsmatrix und ohne homogenen Anteil ergibt sich mit $F(t) = C \cdot e^{At} \cdot B$:

$$\underline{y}(t) = \int_{t_o}^{t} F(t-\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau \ = F(t) * \underline{u}(t) \qquad \text{(Faltung)}$$

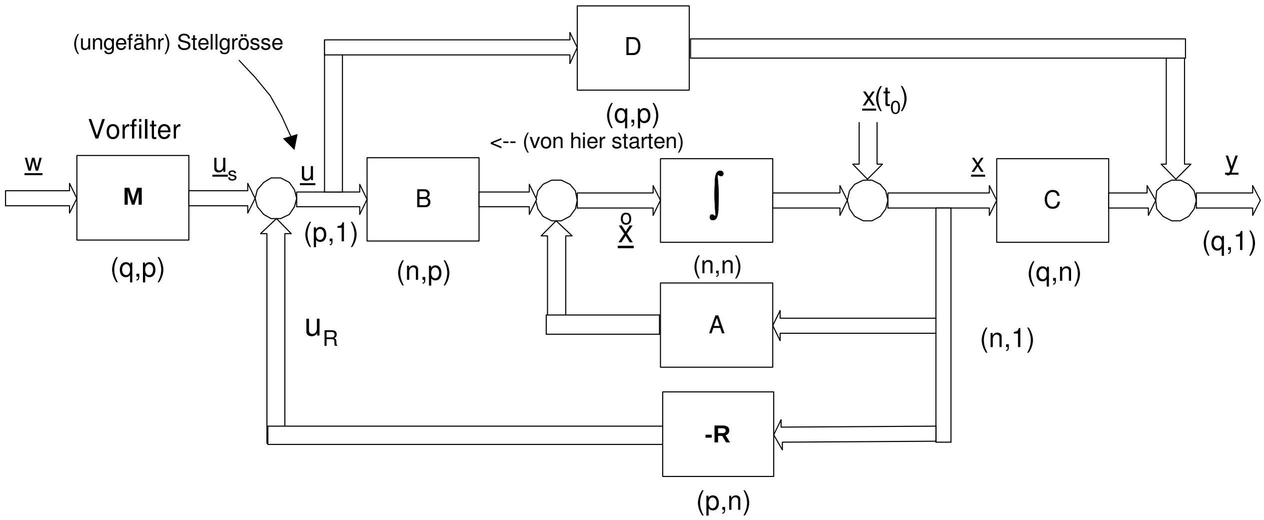
Bildbereich:

$$\underline{Y}(s) = \left[C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B \ + D\right] \cdot U(s) \ + C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot x_0 \qquad \text{; Allgemein}$$

=> $G(s) = c^T \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b \ + d$; für SISO

2.9 Reglerentwurf im Zustandsraum (Föllinger S. 664)

2.9.1 Allgemein



- -R = Zustandsregler, Rückführungsmatrix; muss so gewählt werden, dass System stabil ist.
- Alle Zustandsgrössen führen über den Regler
- Systemmatrix des offenen Systems: A
- Systemmatrix des geschl. Systems (mit Vorfilter): $A - B \cdot R$ (MIMO) ; $A - \underline{b} \cdot \underline{r}^T$ (SISO)
- keine Rückführung der Ausgangsgrössen $\underline{y}$
- kein Soll/Ist-Vergleich

2.9.2 Vorfilter

$$F(s) = C \cdot (sI + B \cdot R - A)^{-1} \cdot B$$
$$\underline{Y}(s) = F(s) \cdot M \cdot \underline{W}(s)$$

$$\mathbf{M = F(0)^{-1} = \left[C \cdot (B \cdot R - A)^{-1} \cdot B\right]^{-1}}$$

2.9.3 Regler

Man kann wie folgt vorgehen:

1. Möglichkeit:

1.) Pole des offenen Systems (Regelstrecke) ermitteln mit **det(sI-A)=0** => Polynom; λ_i

2.) Pole des geschlossenen Systems vorgeben =>λ_{Ri}.

3.) Polynom berechnen: $\mathbf{\det[sI - (A - B \cdot R)] = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{Ri})}$

4.) $\underbrace{s^n + a_{n-1} \cdot R \cdot s^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot R}_{\text{unbekannt}} = \underbrace{s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + p_0}_{\text{bekannt}}$

Polynom aus Determinate	Polynom aus λ_{Ri}

5.) Parametervergleich ergibt: $\mathbf{a_0 R = p_0; \ \ldots; \ a_{n-1} R = p_{n-1}}$

2. Möglichkeit (wenn A in Regelungsnormalform):

1.) Aus A wird Polynom gebildet:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & 1 \\ -a_0 & .. & .. & .. & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

2.) im geschlossenen Kreis sieht Polynom wie folgt aus:

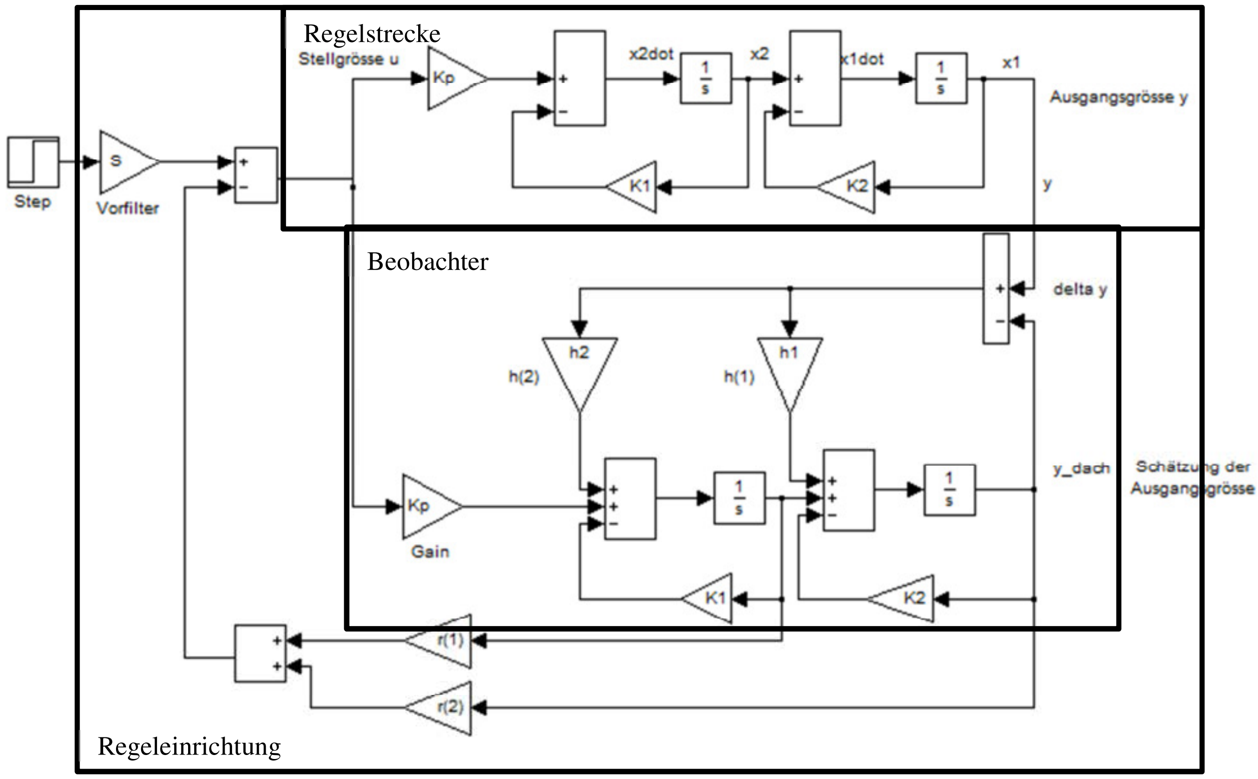
$$s^n + (a_{n-1} + r_{Rn}) \cdot s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

3.) mit den vorgegebenen Polen aus dem Polynom $s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + p_0 = 0$ kann durch Parametervergleich auf die Reglermatrix geschlossen werden.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} r_{Ri} = p_{i-1} - a_{i-1} \qquad ; i = 1..n \\ \underline{r}_R^T = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \ldots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

2.10 Zustandsbeobachter (Taschenbuch S.674)

Beobachter werden eingesetzt, wenn innere Zustandsvariablen nicht messbar sind.



$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ .. \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 \\ p_1 - a_1 \\ .. \\ p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

2.11 PI-Zustandsregler (Taschenbuch S.696)

PI-Zustandsregler werden eingesetzt zur Kompensation einer permanenten Last(Störung) oder bei Parameterunsicherheiten der Strecke.

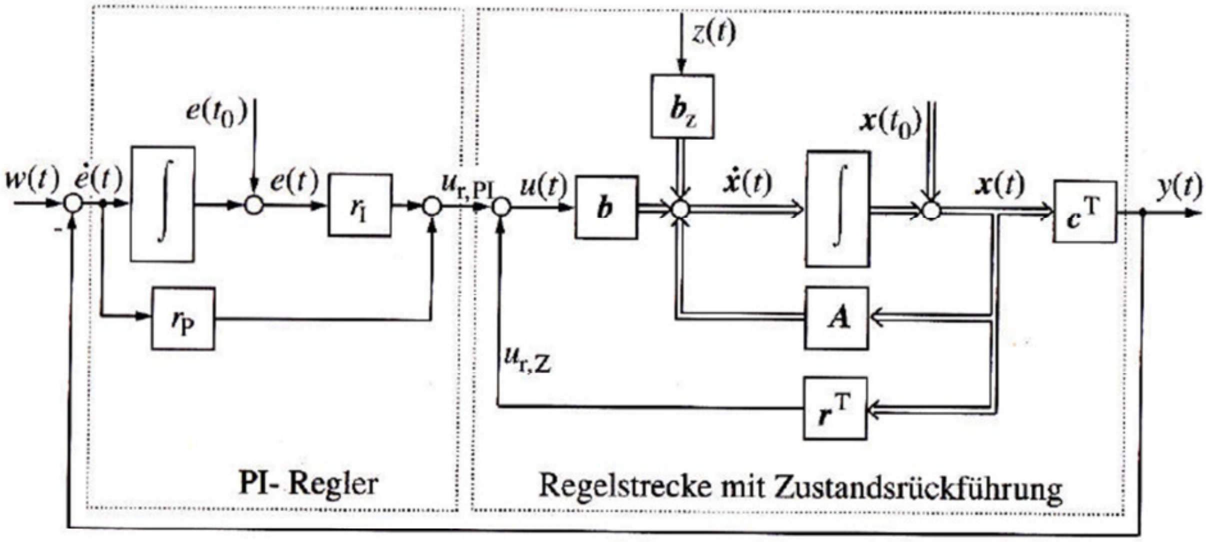


Bild 12.4-10: Allgemeines Signalflussbild einer Zustandsregelung mit überlagertem PI-Regler

Regelstrecke:

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b} \cdot u(t) + \boldsymbol{b}_z \cdot z(t),$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{x}(t),$$

Zustandsrückführung:

$$u_{r,Z}(t) = \boldsymbol{r}^T \cdot \boldsymbol{x}(t).$$

3 Matrizen

3.1 Matrizenmultiplikation

Gegeben: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{bmatrix}$

$$A * B = \begin{bmatrix} a*k+b*n+c*q & a*l+b*o+c*r & a*m+b*p+c*s \\ d*k+e*n+f*q & d*l+e*o+f*r & d*m+e*p+f*s \\ g*k+h*n+i*q & g*l+h*o+i*r & g*m+h*p+i*s \end{bmatrix}$$

3.2 Bilden der Adjunkte

Beispiel für 3x3 Matrix:

Gegeben: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Gesucht: Adjunkte von A

Lösung: $\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} +(ei-hf) & -(bi-hc) & +(bf-ec) \\ -(di-gf) & +(ai-gc) & -(af-dc) \\ +(dh-eg) & -(ah-gb) & +(ae-bd) \end{bmatrix}$

3.3 Bilden der Determinanten

Für eine nur aus einem Koeffizienten bestehende 1×1-Matrix A ist

$$\det A = \det\left(a_{11}\right) = a_{11}.$$

Ist A eine 2×2-Matrix, dann ist

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Für eine 3×3-Matrix A gilt die Formel

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

3.4 Inversion einer Matrix

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det(A)}$$

3.5 Exp(Matrix)

$$e^{At} \cdot e^{-At} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A \qquad \text{(kommutativ)}$$

e^A => jedes Element der Matrix A wird „e hoch“ genommen.

3.6 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix gibt die Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren, ergibt beides das gleiche.

Bsp.

Gegeben: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

$a_1 = [3 \quad 1 \quad 3]$
$a_2 = [2 \quad 4 \quad 1]$
$a_3 = [5 \quad 5 \quad 4]$

Durch umformen mit dem Gaussschen Eliminationsverfahren erhält man:

$a_2 = -2a_1 + 3a_2$
$a_3 = -5a_1 + 3a_3$

Also ist $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix}$

Durch erneutes umformen erhält man:

$a_3 = -a_2 + a_3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} => rg(A) = 2$$