Aufgabe 1:

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{rot}\vec{F})_z = 0 \Rightarrow$ konservativ und Gebiet einfach zushgd.

Potential:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + f(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 \Rightarrow \phi(x,y) = y + g(x) \end{array}\right\} \phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + y$$

b) $\vec{F} = \frac{1}{xy}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, Gebiet nicht einfach zusammenhnd.

$$(\mathrm{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xy}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{y^2} \neq 0 \Rightarrow \text{nicht konservativ}$$

c) $\vec{F} = \frac{1}{x+y+z}\begin{pmatrix} 3x \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}$, Gebiet einfach zusammenhängend (da in 3d)

da $\mathrm{rot}\vec{F} \neq 0 \Rightarrow$ nicht konservativ

d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + z^2 \\ xe^{xy} \\ 2z \end{pmatrix}$, Gebiet einfach zusammenhängend

da $\mathrm{rot}\vec{F} \neq 0 \Rightarrow$ nicht konservativ

Aufgabe 2:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y + \sin z \\ y\cdot\cos z \end{pmatrix}$$

a) $$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos z - \cos z \\ 0 - 0 \\ \cos y - \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ konservativ

b) $$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y \Rightarrow \phi(x,y,z) = x\cdot\sin(y) + f_1(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x\cos y + \sin z \Rightarrow \phi(x,y,z) = x\cdot\sin(y) + y\cdot\sin(z) + \overset{0}{f_2(x,z)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = y\cdot\cos z \Rightarrow \phi(x,y,z) = y\cdot\sin(z) + f_3(x,y)$$

Koeffizientenvergleich liefert: $f_1(y,z) = y\cdot\sin(z)$
$f_2(x,z) = 0$
$f_3(x,y) = x\cdot\sin(y)$

$\Rightarrow$ Potential: $\underline{\underline{\phi(x,y,z) = x\cdot\sin(y) + y\cdot\sin(z)}}$

c) $$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\text{Ende}) - \phi(\text{Anfang})$$

$$= \phi(5,\tfrac{\pi}{2},\pi) - \phi(0,0,0)$$

$$= \left(5\cdot 1 + \tfrac{\pi}{2}\cdot 0\right) - 0 = \underline{\underline{5}}$$

Aufgabe 3: Gravitationspotential

$C := -GMm$

$\vec{F} = \frac{C}{r^3} \cdot \vec{r}$

Falls man ein Potential ϕ zu $\vec{F}$ konstruieren kann, so muss $\vec{F}$ konservativ sein! Also können wir uns die Berechnung der Rotation sparen.

Bestimmung des Potentials:

Wir nutzen aus, das $\vec{F}$ radialsymmetrisch ist und betrachten nur den Betrag:

$$\vec{F} = \frac{C}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{C}{r^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\text{Einheitsvektor } \vec{e}_r \ (|\vec{e}_r| = 1)}$$

$$\Rightarrow F(r) = |\vec{F}(r)| = \frac{C}{r^2}$$

Gesucht ist nun ein $\phi = \phi(r)$ mit $d\phi/dr = F(r)$

$$\Rightarrow \phi(r) = -\frac{C}{r}$$

Also: $$\phi(r) = \frac{GMm}{r}$$

Das ist ein radialsymmetrisches Feld, dessen Äquipotentiallinien konzentrische Kreise sind.

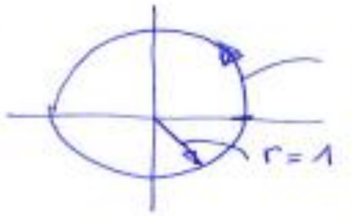
Aufgabe 4:

a) $\operatorname{rot}\vec{F}_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right\} \operatorname{rot}\vec{F} = 0$$

aber das Gebiet ist <u>nicht einfach</u> zushd.

b)



$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \oint_\gamma \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1} \underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t \right)}_{=1} dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

$\Rightarrow$ Somit gibt es rotationsfreie Felder, die nicht konservativ sind!

c) $\oint_\gamma \vec{F}_{konserv.} \circ d\vec{r} = \underline{\underline{0}}$