Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

### Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren

Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 2: Elementare Abbildungen

Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der folgenden elementaren Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ ohne Rechnen, indem Sie sich die Lösungen geometrisch überlegen:

a) Projektion auf die $x$-Achse

b) Spiegelung an der $y$-Achse

Hinweis: Beide Abbildungen besitzen je zwei verschiedene Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

### Aufgabe 3: Differentiation

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{F}$ der beliebig oft differentierbaren Funktionen $f(x)$ zusammen mit der Ableitungsabbildung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} : \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ f(x) &\longmapsto \frac{d}{dx} f(x) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie *alle* Eigenvektoren $f(x) \in \mathbb{F}$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ dieser Abbildung. *Hinweis:* Mit Matrizen können Sie hier nicht arbeiten, da dieser Vektorraum unendlich dimensional ist!

### Aufgabe 4: Grenzwert von Matrizenpotenzen

Für welche Werte von $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 4: Formel für die Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge mit Startwerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ wird rekursiv durch

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{für}\, n \geq 1 \tag{1}$$

definiert. Oder als Matrizenmultiplikation geschrieben:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Führen Sie analog zum Beispiel aus der Vorlesung eine Diagonalisierung durch, mit dem Ziel, eine geschlossene Formel für die n-te Fibonacci-Zahl $a_n$ zu erhalten.

**Aufgabe 6: lineare, homogene Differentialgleichung**

Gegeben ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) + y'(x) - 20\,y(x) = 0$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 5$ und $y'(0) = -1$. Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Hilfe der Eigenwertmethode aus der Vorlesung:

a) Formulieren Sie die Gleichung zuerst als Matrizengleichung $\vec{y}' = \mathbf{A} \cdot \vec{y}$ erster Ordnung

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$

c) Geben Sie die allgemeine und spezielle Lösung der Differentialgleichung an

## Viel Spass!