

**ET+V**

# **Elektrotechnik Vertiefung**

**HSLU T&A**

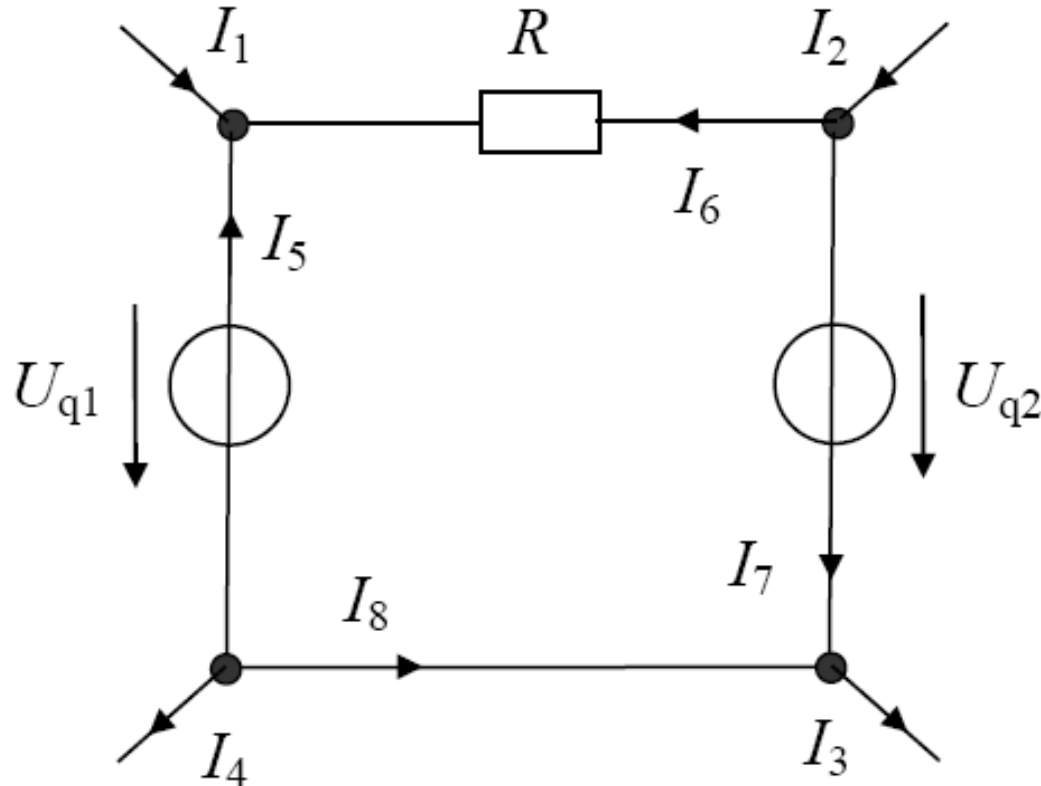
Ersatzquellen, Quellenwandlung, Superposition, Stern-  
/Dreieckwandlung, Knotenpotentialverfahren

10.9.2013, Dr. P. Bosshart

# Lernziele

- Zählpfeilsysteme
- Netzwerkanalyse
  - Stromquelle
  - Ersatzquellen – Darstellung (Thévenin/Norton)
  - Stern-Dreieck-Wandlung
  - Superpositionsverfahren
  - Knotenpotentialverfahren

# G1-1: Netzwerkgleichungen aufstellen und auflösen



Daten:

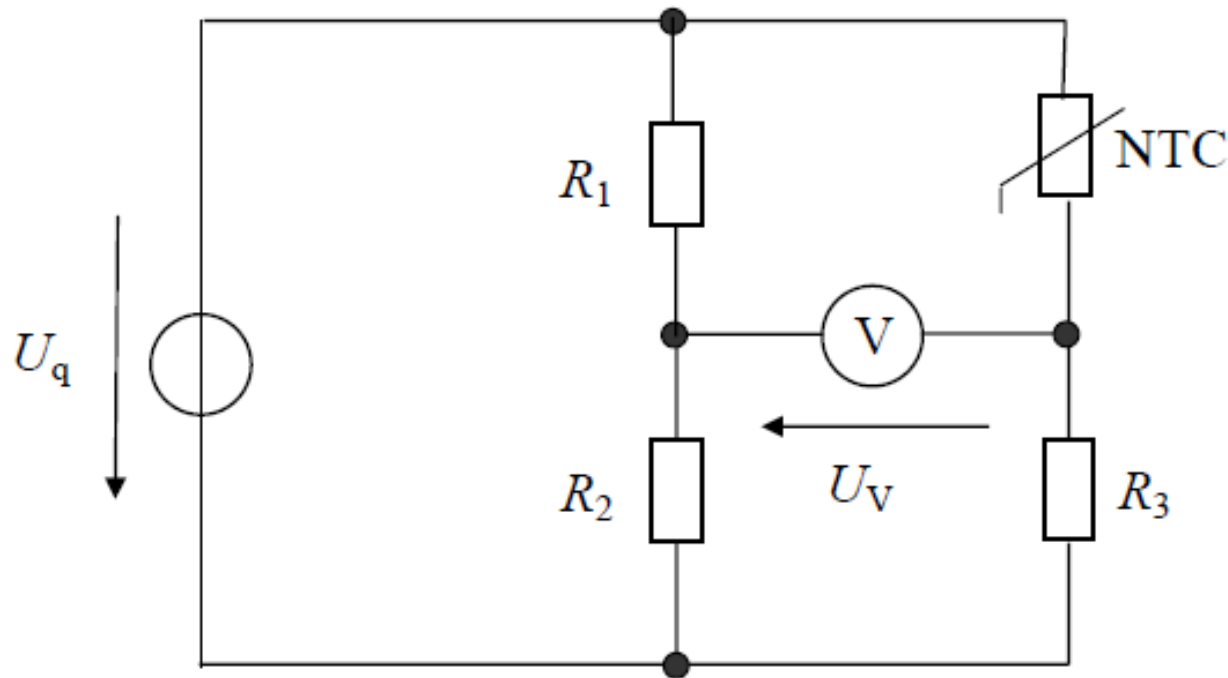
$U_{q1} = 24 \text{ V}$	$U_{q2} = 12 \text{ V}$	$R = 100 \Omega$
$I_1 = 1 \text{ A}$	$I_2 = 2 \text{ A}$	$I_3 = 3 \text{ A}$

Berechnen Sie die Ströme  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$ ,  $I_7$  und  $I_8$ .

# G3-1

$$R_T = R_N \cdot e^{b \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_N} \right)}, T \text{ in } K$$

## Aufgabe 1: Brückenschaltung mit einem NTC-Widerstand



Daten:

$$U_q = 12 \text{ V}$$

$$R_2 = 200 \, \Omega$$

NTC:

$$R_N = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = 100 \, \Omega$$

$$R_3 = 300 \, \Omega$$

$$b = 2000 \text{ K}$$

$$T_N = 293 \text{ K}$$

- Bestimmen Sie die Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$ , die am NTC herrscht, wenn das ideale Voltmeter (mit einem sehr grossen Innenwiderstand)  $U_V = 2 \text{ V}$  anzeigt.
- Bestimmen Sie die Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$ , die am NTC herrscht, wenn die Brücke abgeglichen ist.

# Repetition/Selbsttest

Fragen:

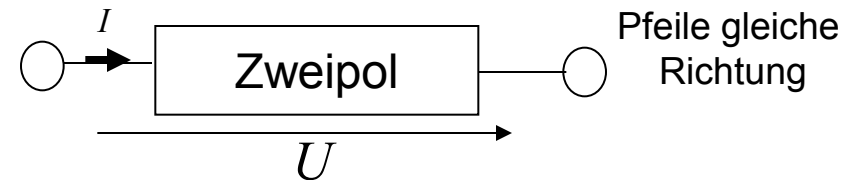
1. Was versteht man unter einem Spannungsteiler?
2. Mit welchen Gleichungen können wir Netzwerke analysieren? Zählen Sie die drei fundamentalen Beziehungen auf.

# Zählpfeilsysteme

$+ \xrightarrow{U} -$   $U > 0$ : Pfeilrichtung zeigt vom höheren zum tieferen Potential  
 $\xrightarrow{I}$   $I > 0$ : Fließrichtung pos. Ladung stimmt mit Pfeilrichtung überein

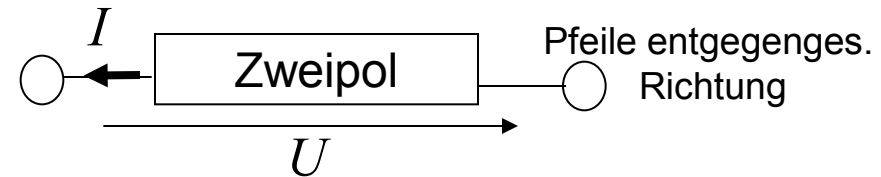
## Verbraucherpfeilsystem VZS

$P = U \cdot I \geq 0$ : Zweipol verbraucht

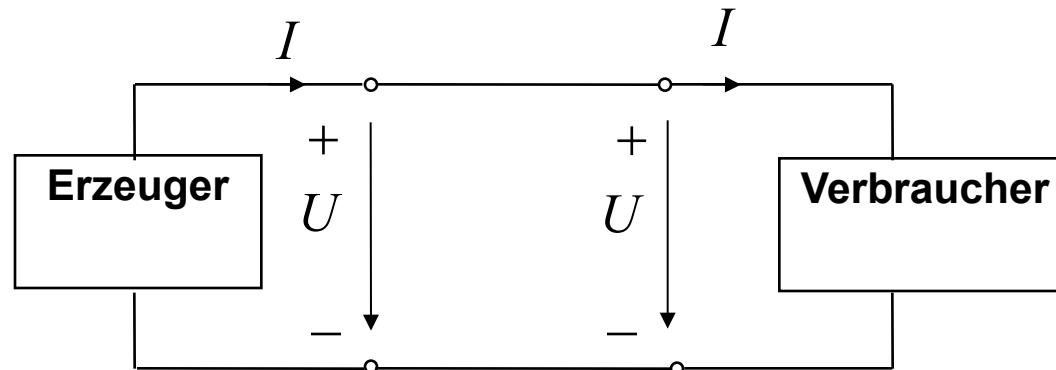


## Erzeugerpfeilsystem EZS

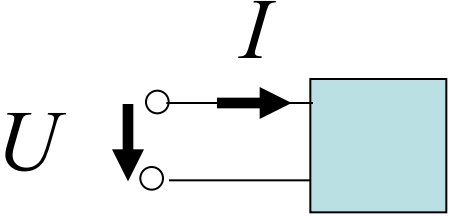
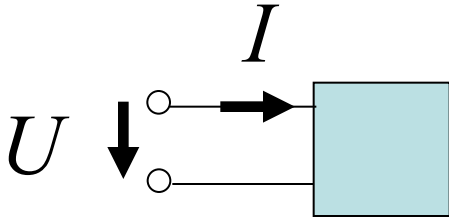
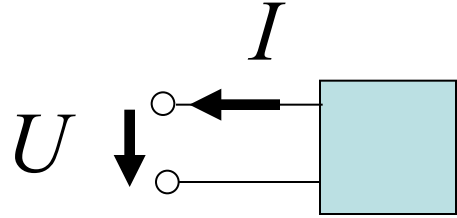
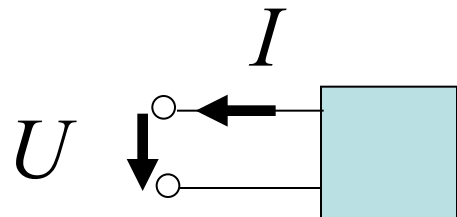
$P = U \cdot I \geq 0$ : Zweipol erzeugt



**gemischtes Pfeilsystem** (häufig angewendet):

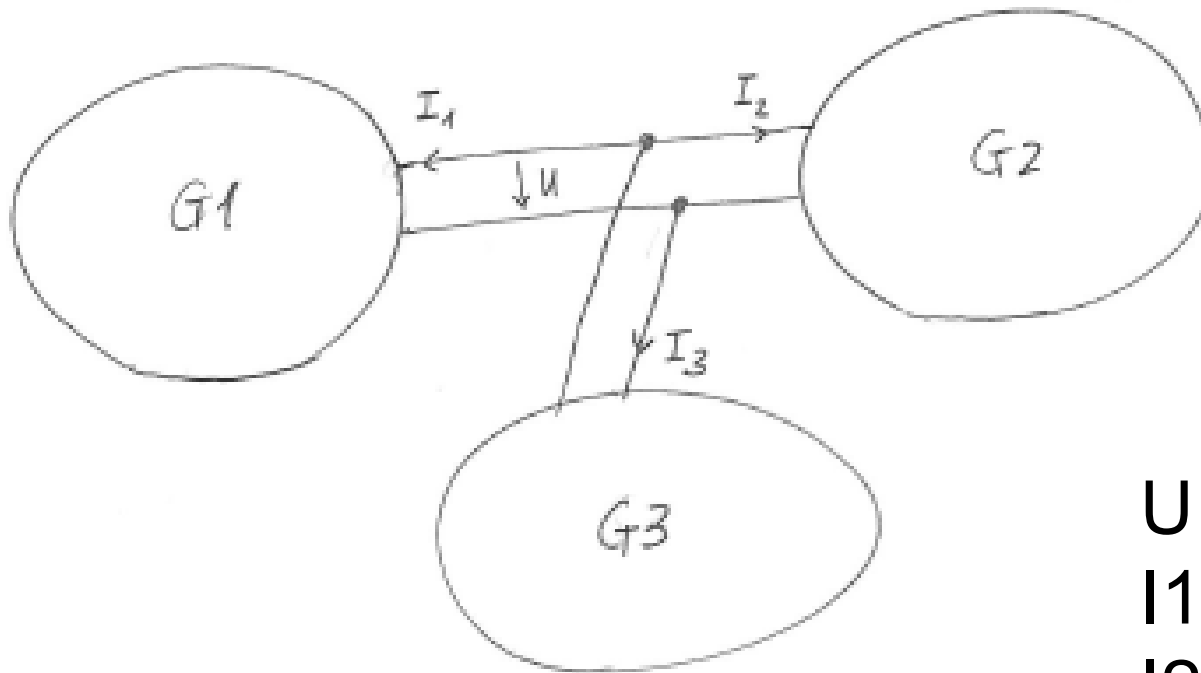


# Übung Zählpfeilsysteme

	Zählpfeilsystem	$I$	$U$	Verbraucher oder Erzeuger?
	VZS	3	3	Verbraucher
		2	-3	Erzeuger
	VZS	-3	2	Erzeuger
		-3	-2	Verbraucher
	EZS	3	3	Erzeuger
		2	-3	Verbraucher
	EZS	-3	2	Verbraucher
		-3	-2	Erzeuger

# Zählpfeilsysteme: Beispiel 1

Welches Gebiet verbraucht - erzeugt el. Leistung? Wieviel?



$$U = 750 \text{ kV}$$

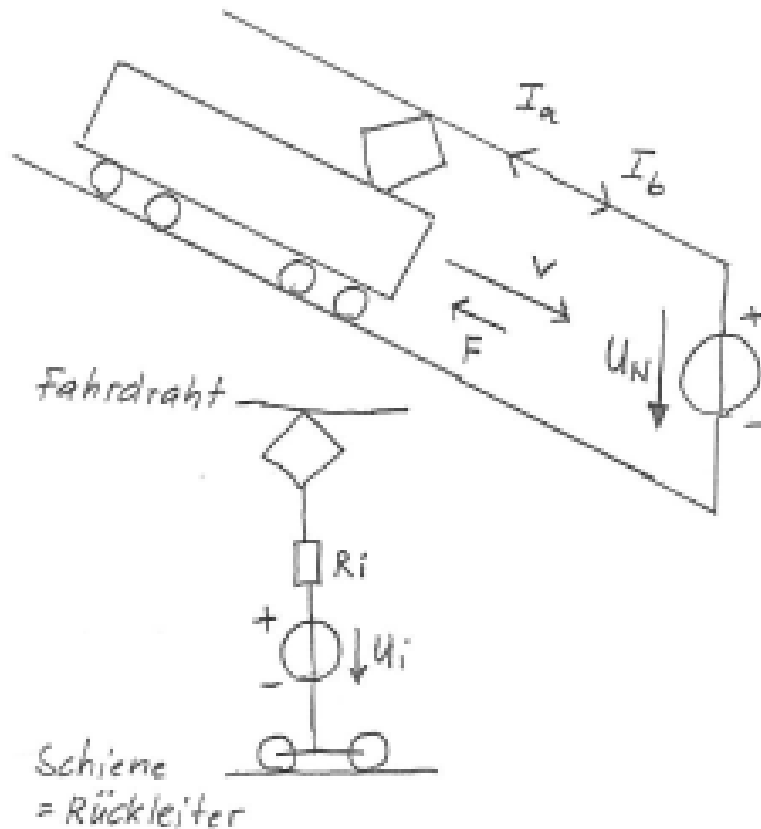
$$I_1 = 200 \text{ A}$$

$$I_2 = -100 \text{ A}$$



# Zählpfeilsysteme: Beispiel 2

## Tram auf Talfahrt



1. Das bremsende Tram wird als eine reale Spannungsquelle  $U_i$ ,  $R_i$  gemäss Skizze betrachtet. Welche Spannung  $U_i$  ist notwendig damit das Tram ( $U_i$  und  $R_i$ ) eine Bremsleistung von 200 kW erbringt?  $U_N = 550\text{V}$ ,  $R_i = 1.5\text{ Ohm}$ .
2. Welche Stromrichtung ( $I_a, I_b$ ) ist zu wählen, wenn wir das Erzeugerzählpfeilsystem wollen.
3. Welcher Stromstärke fliesst im Fahrdraht?

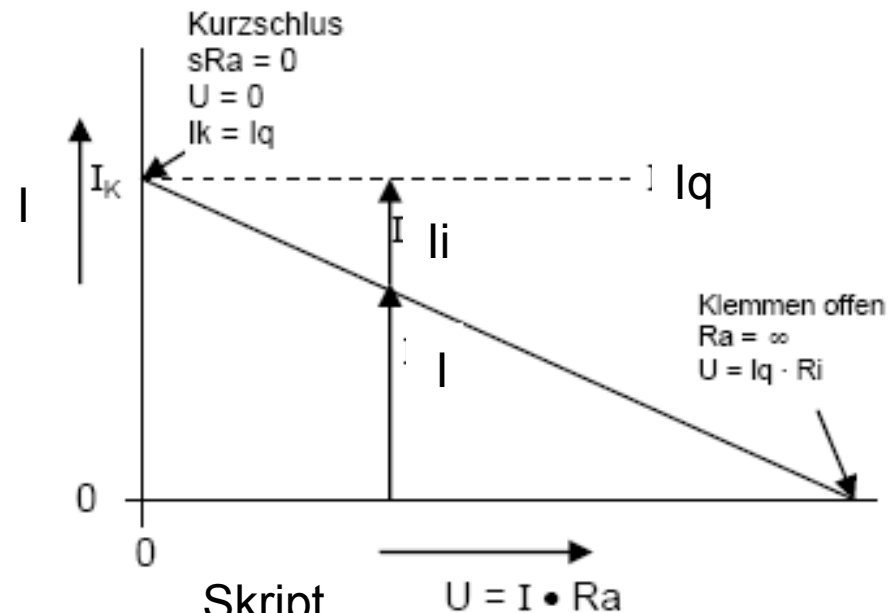
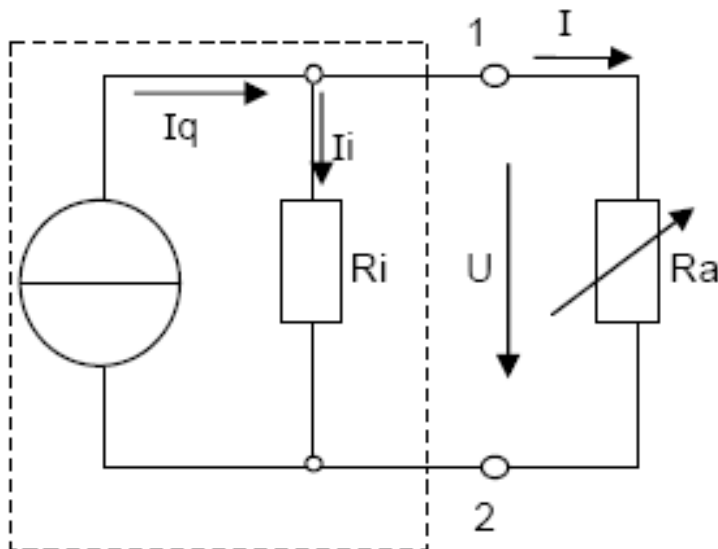
# Reale Stromquelle-1

Der Laststrom  $I$  sinkt, wenn  $U$  ansteigt. Ideal wäre gleichbleibender Strom.  
Innenwiderstand  $R_i$ , Ideale Stromquelle  $I_q$

Leerlauf:  $U = R_i \cdot I_q = U_0 = \text{max. Spannung}$

Kurzschluss: Der ganze Quellenstrom fließt durch den Kurzschluss,  $I_k = I_q$

Betrieb: 
$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$



# Reale Stromquelle-2

Berechnungsmöglichkeiten für  $R_i$

$$R_i = \frac{U_0}{I_q} = \frac{\text{Leerlaufspannung}}{\text{Quellenstrom}}$$

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{\text{Klemmenspannungsänderung}}{\text{Laststromänderung}}$$

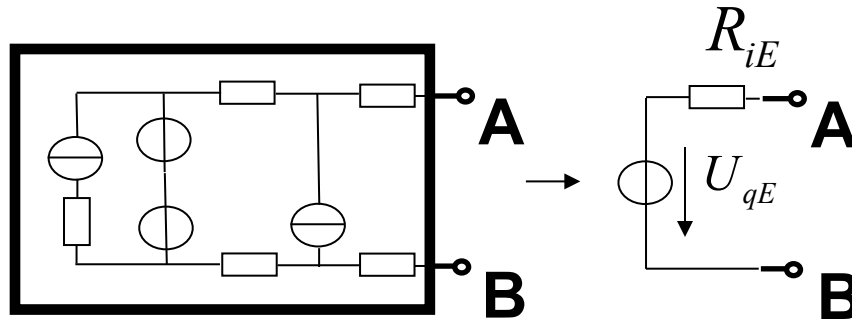
Nichtlineare Stromquelle:

$R_i$  ist abhängig von Belastung

Realisation: Spannungsquelle mit hoher Spannung  
und Stromregelung (Begrenzung)

# Ersatzspannungsquelle-1 (G15)

## (Thévenin-Äquivalent)



Zwei Unbekannte

$R_{iE}$  und  $U_{qE}$

### Bestimmung der Ersatzquellen-Grössen:

Ausgangsspannung  $U_{AB}$  bei offenen Klemmen bestimmen:  $U_{qE} = U_{AB}$

Drei Methoden um  $R_{iE}$  zu bestimmen:

1. Ersatzwiderstand  $R$  bezüglich Klemmen A-B berechnen. Dazu Spannungsquellen kurzschliessen, Stromquellen durch Unterbrüche ersetzen.  $R_{iE} = R$

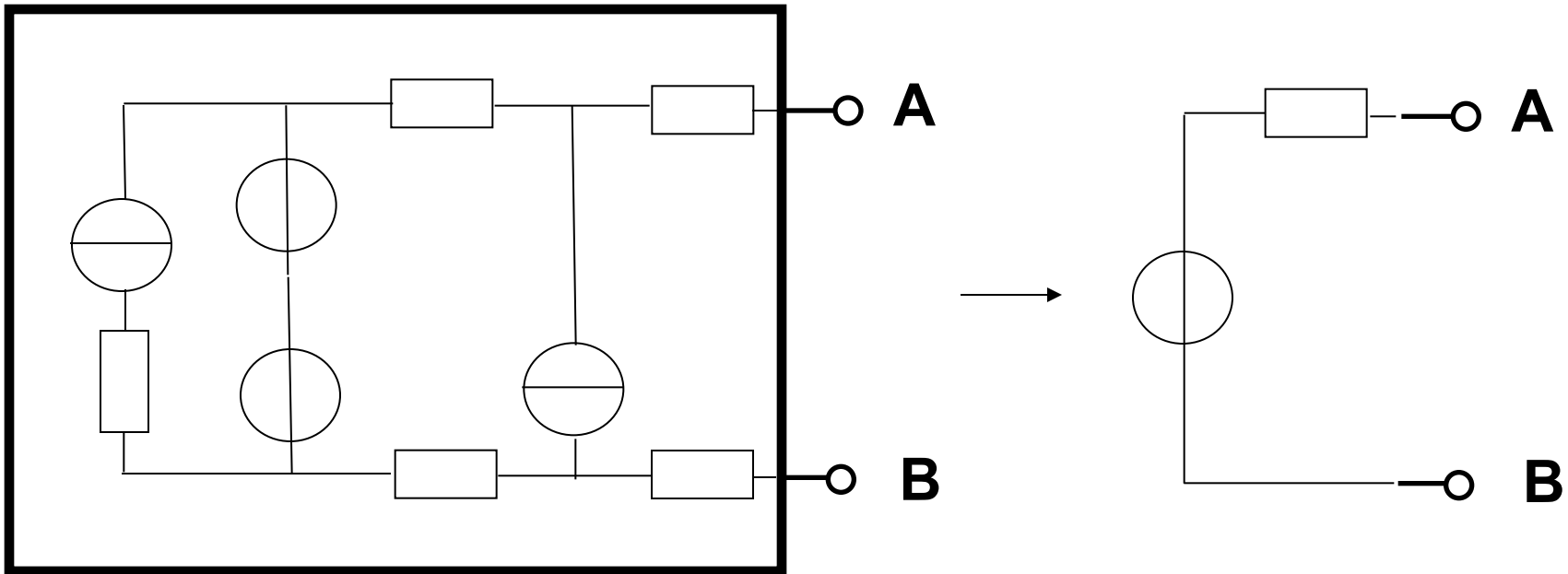
2. Kennt man den Kurzschlussstrom  $I_K$ , so ist  $R_{iE} = \frac{U_{qE}}{I_K}$

3. Belastung mit bekanntem Widerstand  $R_L$ . Ausgangsspannung  $U_{AB} = U_L$

$$R_{iE} = \frac{R_L U_{qE} - U_L R_L}{U_L}$$

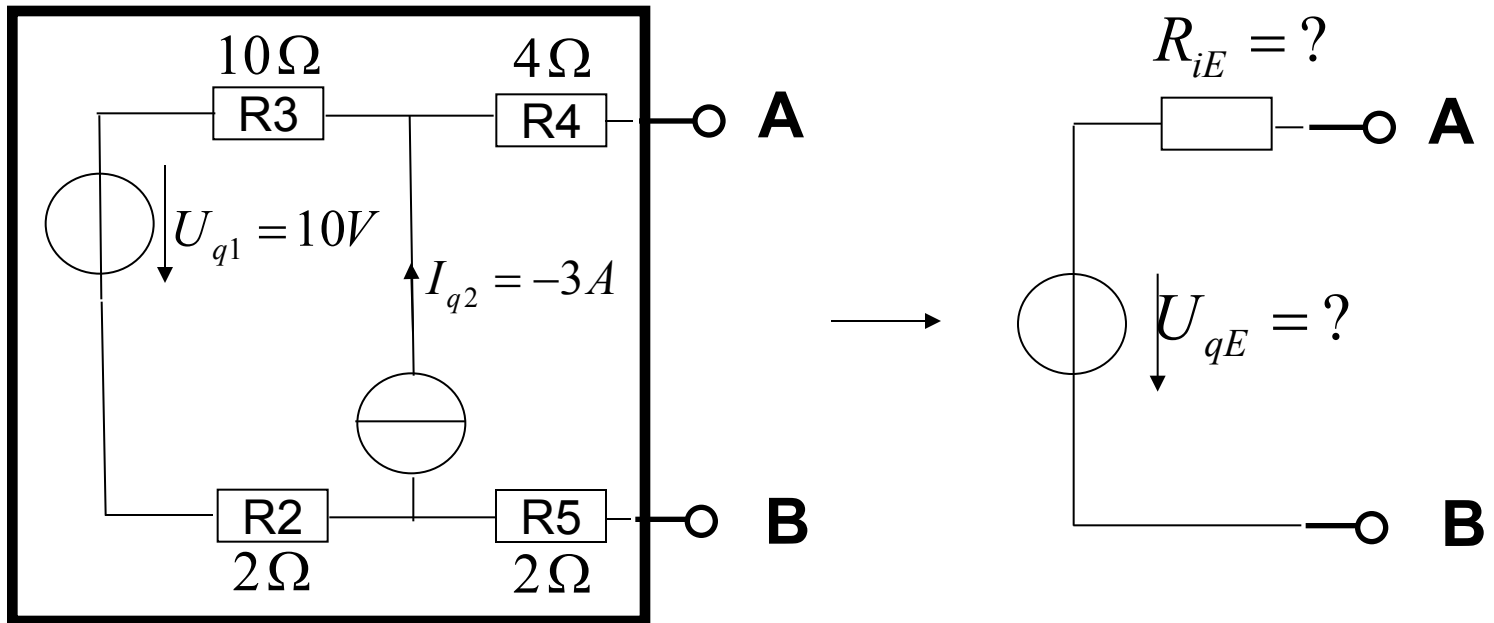
# Ersatzspannungsquelle-2 (Thévenin-Äquivalent)

Skript  
G15, S.1



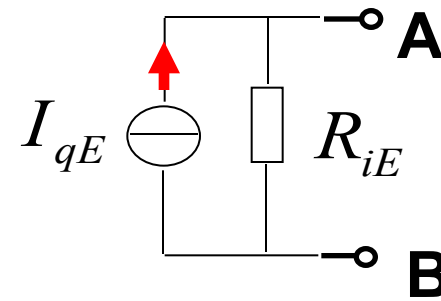
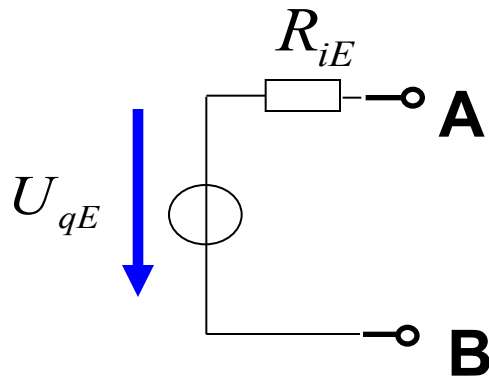
Jede mögliche Kombination von linearen Spannungs- und Stromquellen und Widerständen bezüglich zweier Klemmen ist elektrisch äquivalent zu einer Serieschaltung aus einer Spannungsquelle und einem Widerstand.

# Ersatzspannungsquelle-3 (Thévenin-Äquivalent), Zahlenbeispiel



Berechnen Sie die Ersatzquellen-Größen

# Umwandlung von Ersatzquellen



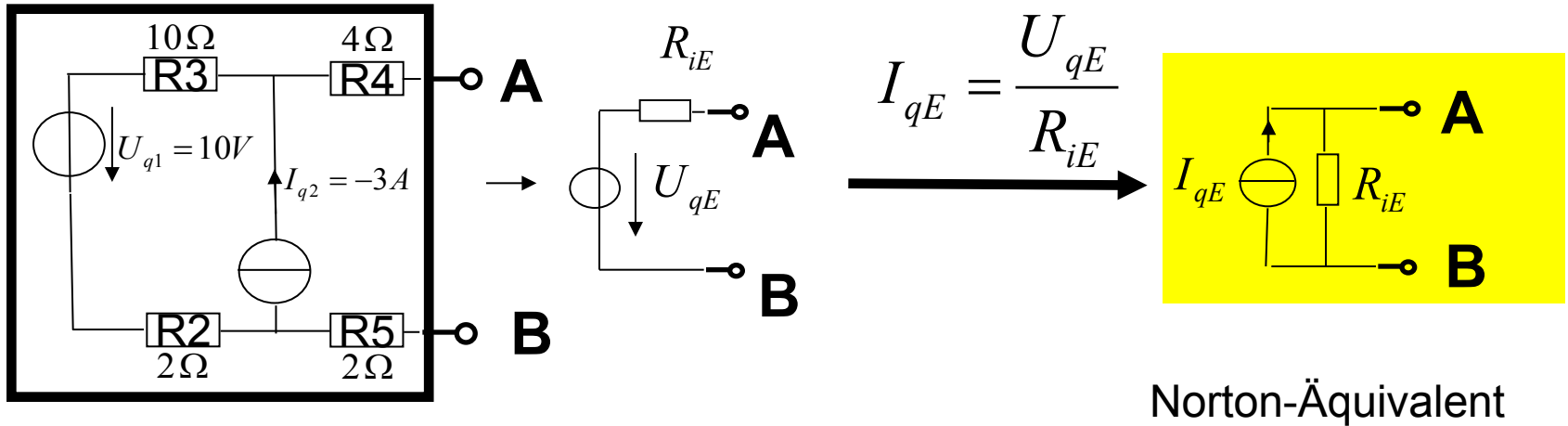
$$U_{qE} = R_{iE} \cdot I_{qE} \quad \longleftrightarrow \quad I_{qE} = \frac{U_{qE}}{R_{iE}}$$

Thévenin

Norton

Skript  
G7, S.4

# Ersatzstromquelle-7 (Norton-Äquivalent)



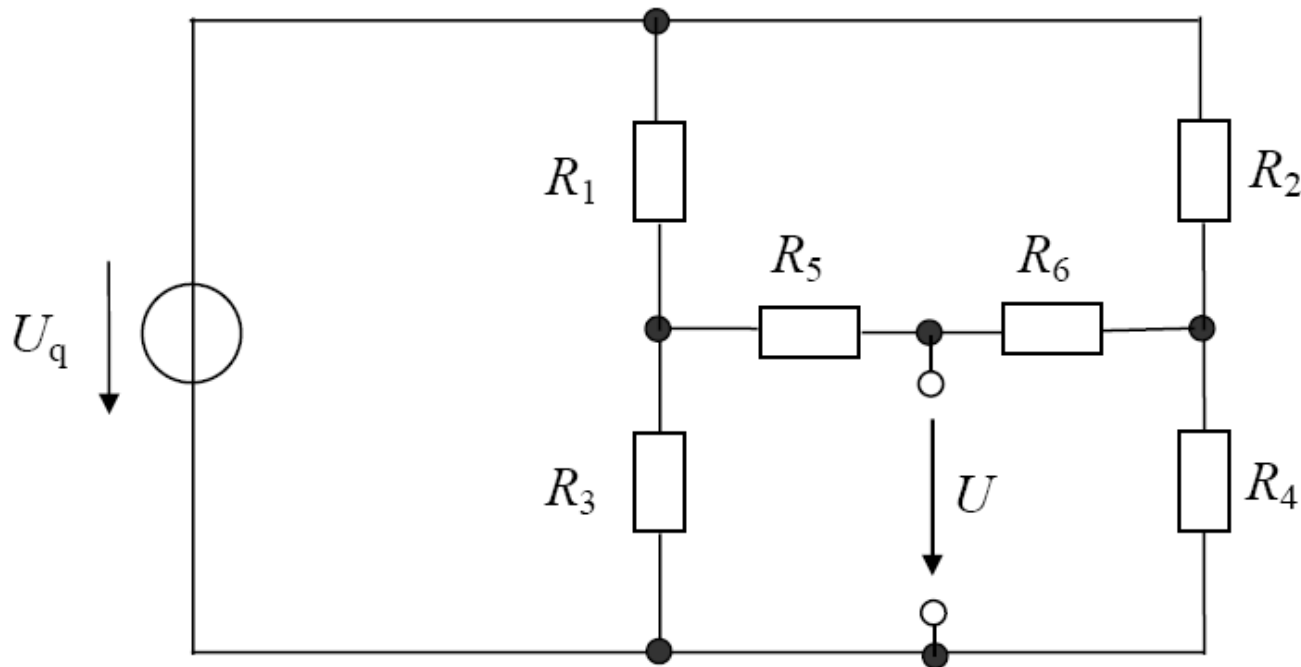
Berechnen Sie die Ersatzelemente  
vom Norton-Äquivalent



# Ersatzspannungsquelle-9

## Anwendung

Berechnen Sie mit Hilfe der Ersatzquellen die Spannung  $U$



Daten:

$$U_q = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 110 \, \Omega$$

$$R_4 = 430 \, \Omega$$

$$R_2 = 220 \, \Omega$$

$$R_5 = 220 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_6 = 330 \, \Omega$$

Quelle:  
Übung G4-2  
D.Salathé

# Repetition

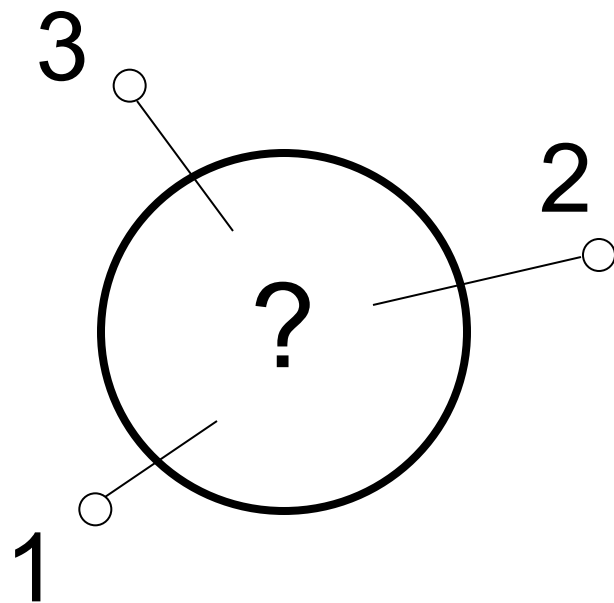
- Ein Photovoltaik-Anlage hat bei Standardbedingungen (Sonnen-Einstrahlung  $1000 \text{ W/m}^2$  und  $25^\circ\text{C}$ ) auf der Gleichspannungsseite folgende Eigenschaften:
  - Leerlaufspannung  $375 \text{ V}$
  - Kurzschlussstrom  $5.5 \text{ A}$

Bestimmen Sie die zu dieser  
Sonneneinstrahlung passende

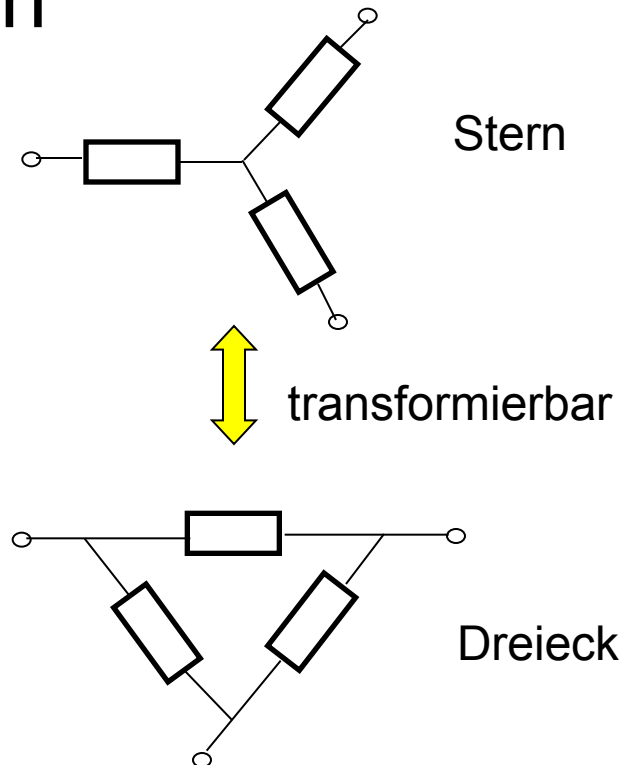
1. Thévenin – Ersatzspannungsquelle
2. Norton – Ersatzstromquelle

# Dreieck-Stern-Transformation (G12) - 1

- **Zweck:** Reduktion von Netzwerken auf einfache Grundschaltungen



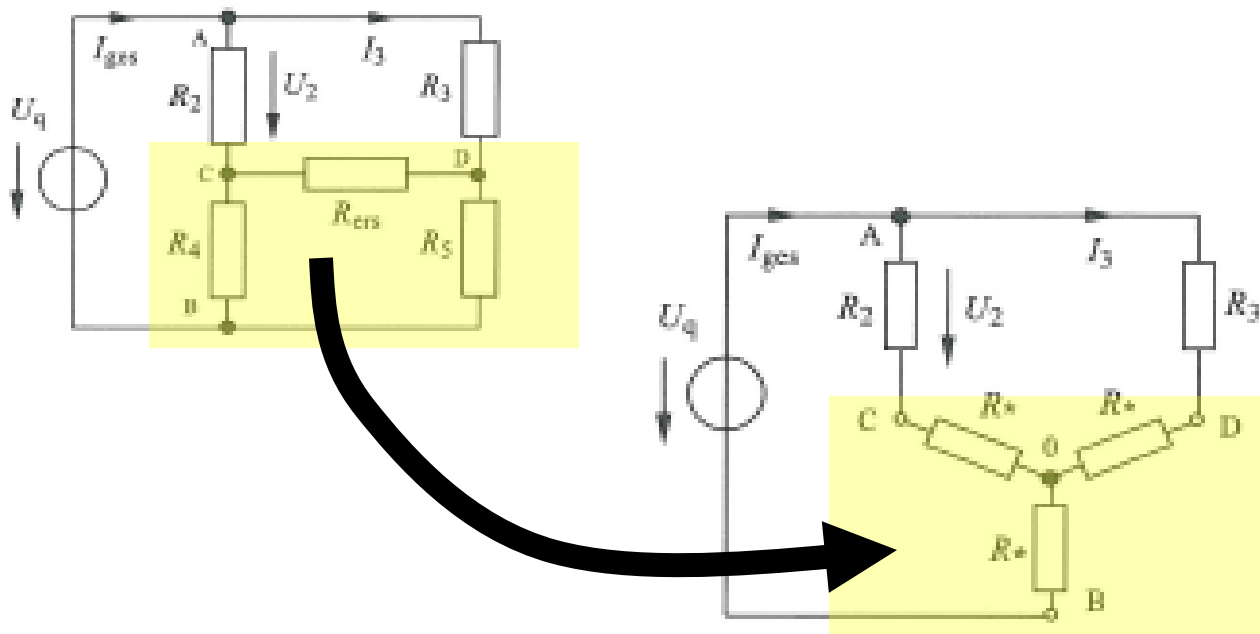
Netzwerk mit drei Anschlüssen  
ohne Quellen



Zwei mögliche Darstellungen  
von Schaltungen mit  
drei Anschlüssen ohne Quellen

# Dreieck-Stern-Transformation - 2

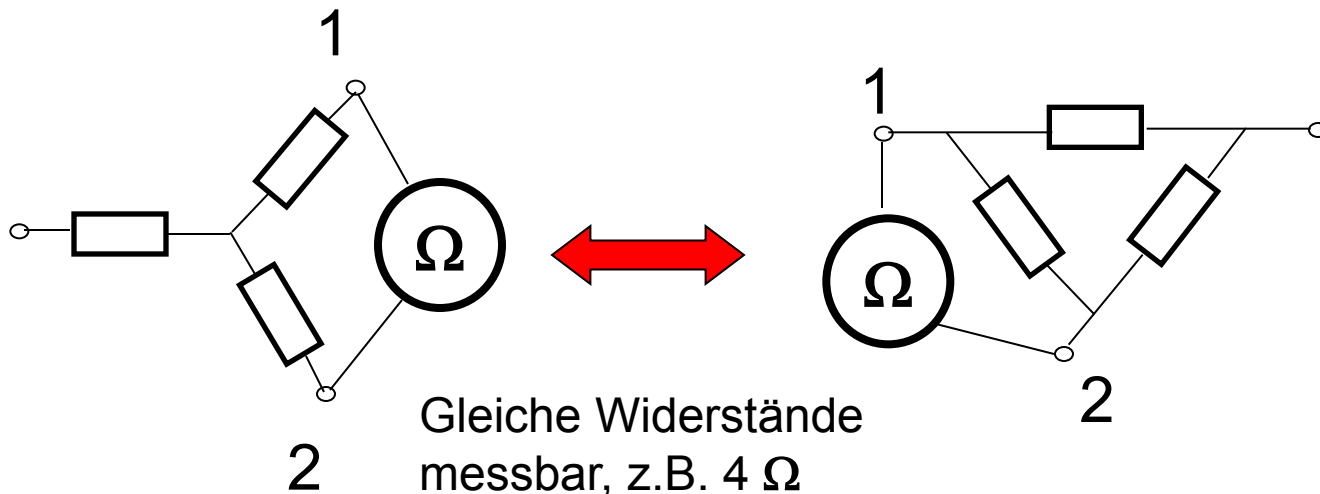
## • Beispiel:



Vorteil der Dreieck-Stern-Transformation:  
Die Zweige mit  $R_2$  und  $R_3$  lassen sich als  
Parallelschaltung zusammenfassen

# Dreieck-Stern-Transformation - 3

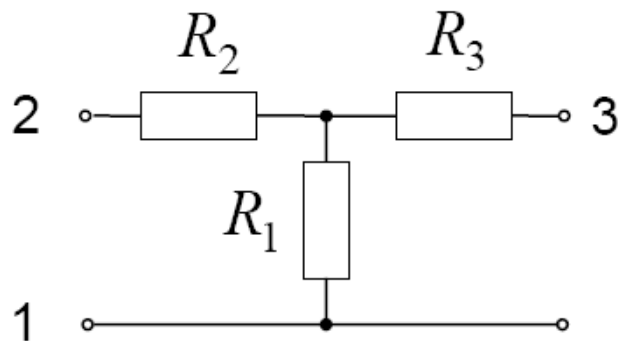
- **Prinzip:** Umwandlung der beiden Schaltungstypen, so dass von „ausen“ d.h. von gleichen Anschlüssen aus gesehen kein Unterschied feststellbar ist. Dazu müssen die beteiligten Widerstände umgerechnet werden.



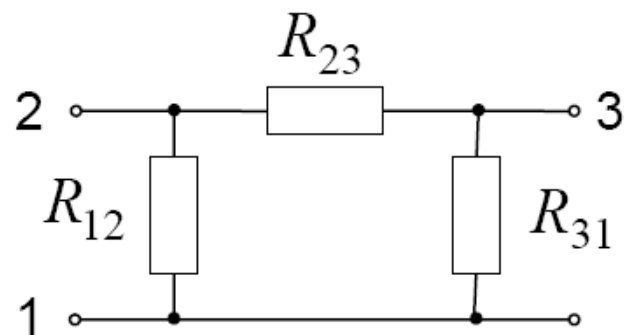
# Dreieck-Stern-Transformation - 4

- Umwandlungsformeln für Widerstände von Stern- auf Dreieck und umgekehrt:

*Sternschaltung:*



*Dreieckschaltung:*



**Stern → Dreieck:** mit  $S = R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1$

$$R_{12} = S/R_3$$

$$R_{23} = S/R_1$$

$$R_{31} = S/R_2$$

**Dreieck → Stern:** mit  $D = R_{12} + R_{23} + R_{31}$

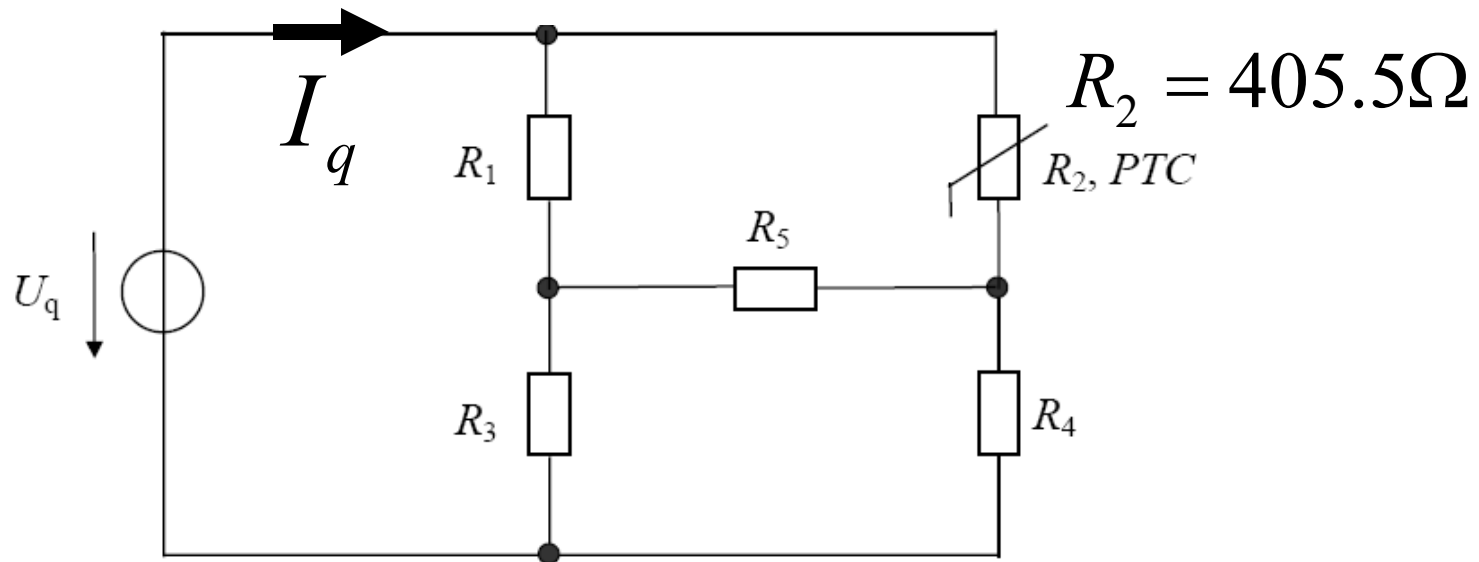
$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{D}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{D}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{D}$$

# Dreieck-Stern-Transformation Beispiel - 5

Berechnen Sie mit Hilfe der Dreieck-Stern-Transformation der Zweige mit  $R_3, R_4, R_5$  den Quellenstrom  $I_q$ .



Daten:

$$U_q = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 110 \Omega$$

$$R_3 = 330 \Omega$$

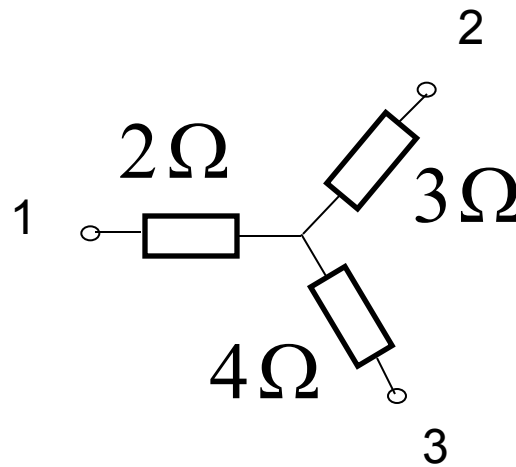
$$R_4 = 330 \Omega$$

$$R_5 = 330 \Omega$$

Quelle:  
Übung G4-1  
D.Salathé

# Stern-Dreieck-Transformation Beispiel - 8

Wandeln Sie die Schaltung in eine äquivalente Dreieckschaltung um.





# Superposition-1 (G14)

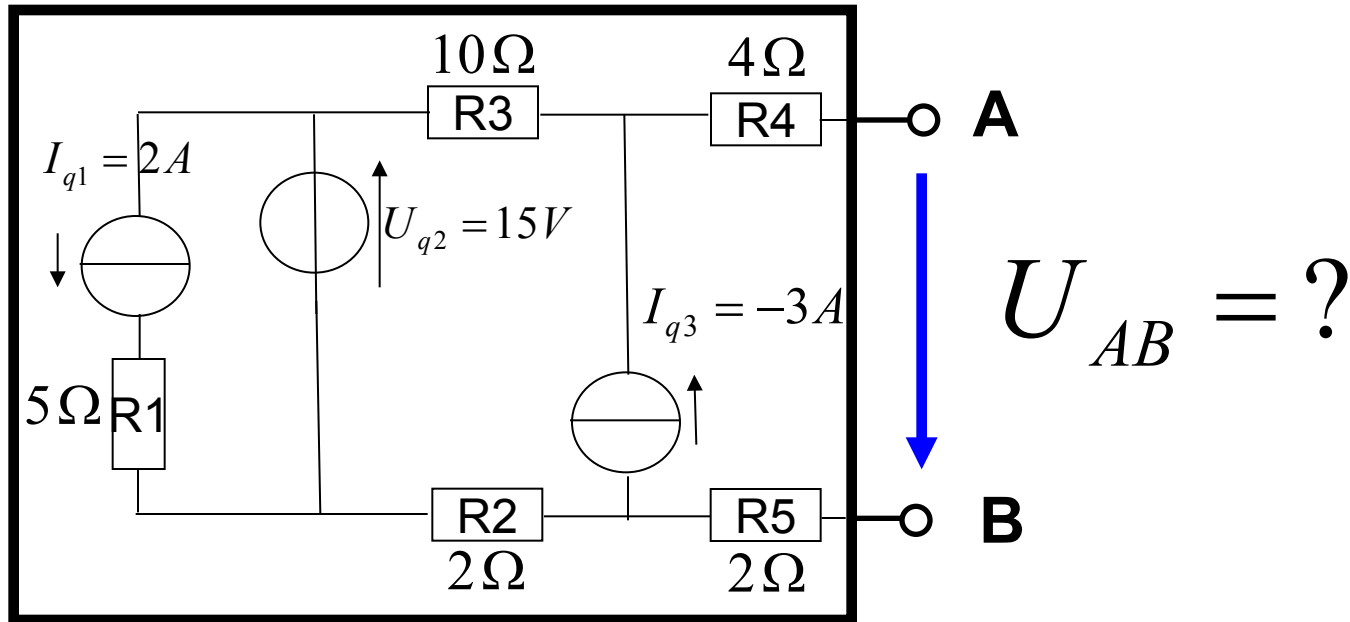
**Voraussetzung:** Lineare Elemente (Strom proportional zu Spannung)

**Prinzip:** In einem **linearen** physikalischen System, auf das mehrere Ursachen (Spannungs- und Stromquellen) einwirken, ergibt sich die Gesamtwirkung durch Superposition, d.h. Überlagerung der Wirkungen der einzelnen Ursachen.

## Vorgehen

1. Die Wirkung (z.b. Strom oder Spannung) nur einer Quelle berechnen
  - alle anderen idealen Spannungsquellen werden nicht beachtet: **kurzgeschlossen**,
  - alle anderen idealen Stromquellen werden offen gelassen: **unterbrochen**,
  - Innenwiderstände berücksichtigen
2. Für diese Situation werden die interessierenden Teilspannungen und -ströme in den Zweigen des Netzwerkes berechnet.
3. Mit allen Quellen wird der Reihe nach gleich vorgegangen.
4. Die gesuchten Grössen ergeben sich durch **Addition** der Teilspannungen bzw. Teilströme, wobei der **Richtungssinn** berücksichtigt werden muss.

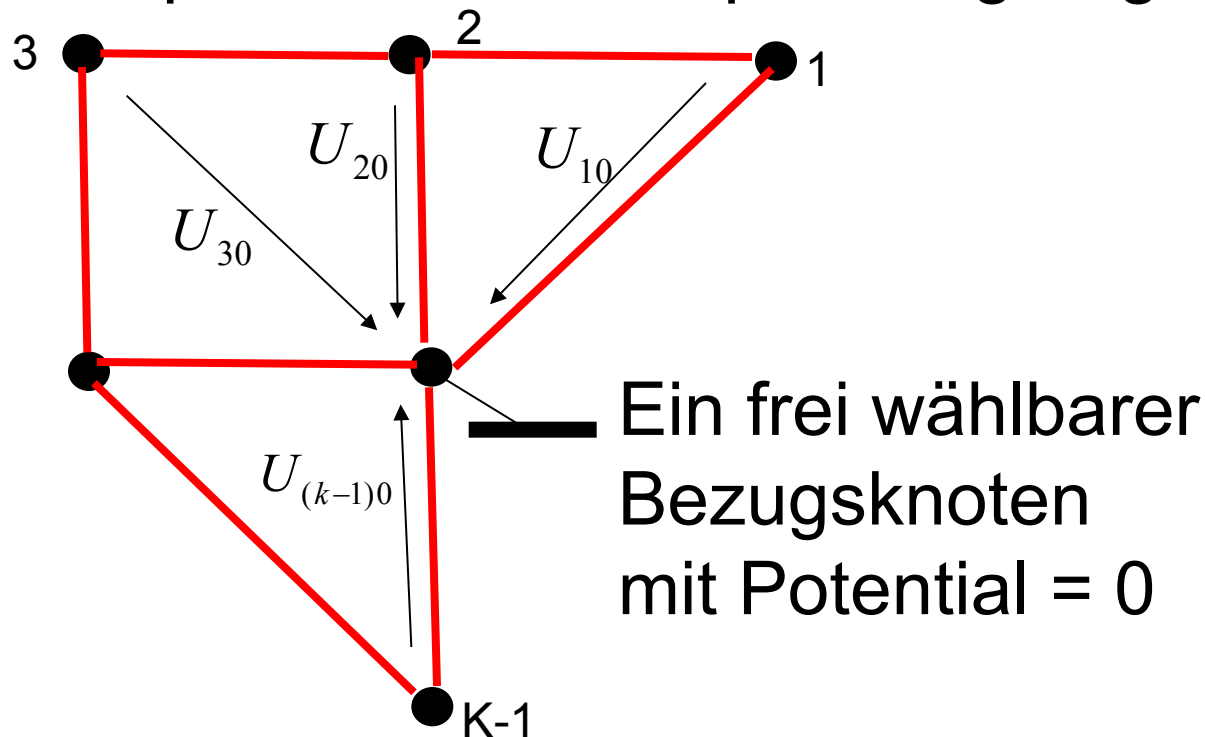
# Superposition-5 Zahlenbeispiel



Berechnen Sie mit Hilfe des Superpositionsprinzips die Leerlaufspannung  $U_{AB}$

# Knotenpotential-Verfahren (G19)-1

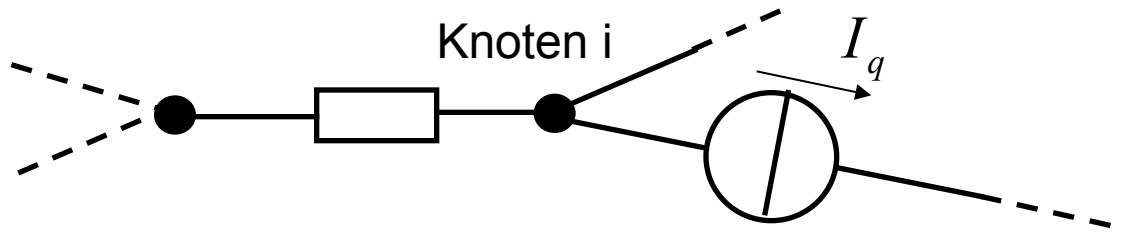
Verfahren zielt auf minimale Anzahl Gleichungen ab. **Prinzip:** Netz mit  $k$  Knoten.  $k-1$  unbekannte Knotenpotentiale, d.h. Spannungen gegen 0.



# Knotenpotential-Verfahren-2

Vorbereitung:

1. Spannungsquellen durch Stromquellen ersetzen. Ziel: Knoten haben Verbindungen zu Widerständen und/oder Stromquellen:



2. Bezugsknoten wählen (im Prinzip beliebig, idealerweise einen zentral gelegenen Knoten)
3. Restliche Knoten nummerieren

# Knotenpotential-Verfahren-3

*Aufstellen des Koeffizientenschemas: G-Matrix*

Grundlage:  $[G] \cdot [U] = [I]$

Spannungen	$U_{10}$	$U_{20}$	$U_{30}$	...	$U_{n0}$	rechte Seite
Knoten 1						
Knoten 2						
Knoten 3						
...						
Knoten n						

 = Hauptdiagonale der G-Matrix

# Knotenpotential-Verfahren -4

1. Hauptdiagonale  $G_{ii}$  : Summe der Leitwerte des Knotens  $i$ ,  $i=1..n$
2. Andere Elemente  $G_{ik}$ : Negativer Leitwert des Verbindungszweiges zwischen Knoten  $i$  und Knoten  $k$ . Falls keine Verbindung  $G_{ik}=0$
3. Rechte Seite, d.h. Vektor  $[I_i]$ ,  $i=1..n$ :
  - $I_i$  = Summe aller Stromquellen am Knoten  $i$ .
  - $I_i > 0$ : Strompfeil in Knoten  $i$
  - $I_i < 0$ : Strompfeil aus Knoten  $i$  heraus

# Knotenpotential-Verfahren - 5

4. Berechnung der unbekannten Spannungen  $U_{i0}$   
= Knotenpotential gegenüber Bezugsknoten 0  
Die Zählpfeile der Potentiale sind positiv vom Knoten  $i$  zum Bezugsknoten 0.

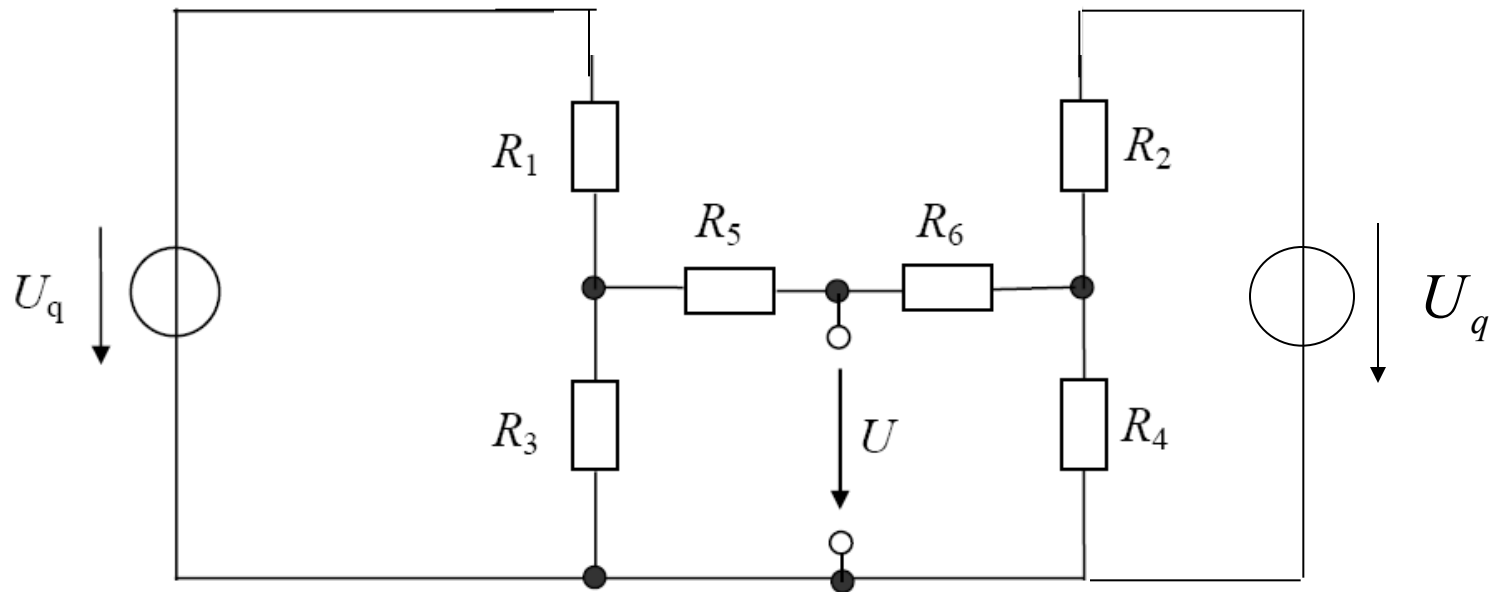
Mathematik

$$[\mathbf{G}] \cdot [U] = [I] \Rightarrow [U] = [\mathbf{G}]^{-1} \cdot [I]$$

Lösung auf Taschenrechner oder Computer

# Knotenpotential-Verfahren -6

## Beispiel



Daten:

$$U_q = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 110 \, \Omega$$

$$R_4 = 430 \, \Omega$$

$$R_2 = 220 \, \Omega$$

$$R_5 = 220 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

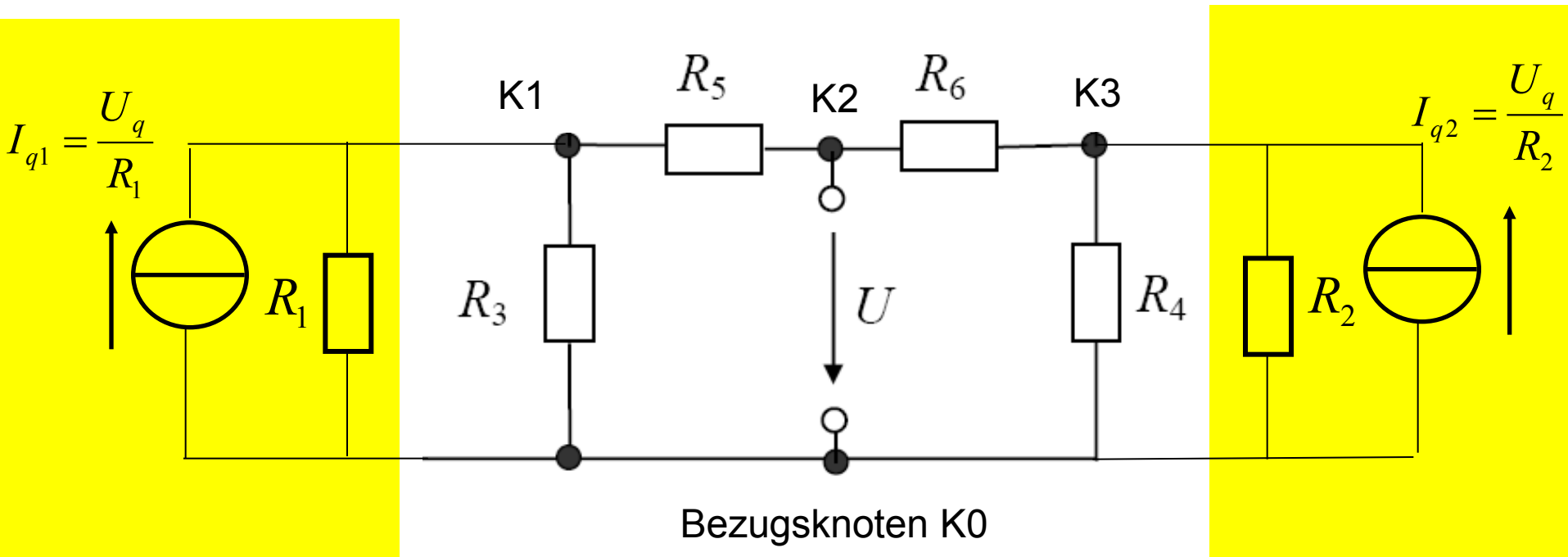
$$R_6 = 330 \, \Omega$$

Quelle:  
Übung G4-2  
D.Salathé



# Knotenpotential-Verfahren -7

Aufbereitung: 1. Spannungsquellen durch Stromquellen ersetzen, 2. Knoten nummerieren und 3. Bezugsknoten wählen.



# Knotenpotential-Verfahren-8

## Aufstellen des Koeffizientenschemas

Spannungen	$U_{10}$	$U_{20}$	$U_{30}$	Rechte Seite [I]
Knoten 1	$G_{11}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$I_1$
Knoten 2	$G_{21}$	$G_{22}$	$G_{23}$	$I_2$
Knoten 3	$G_{31}$	$G_{32}$	$G_{33}$	$I_3$

Geben Sie die Koeffizienten der Leitwertmatrix  $G$  und der rechten Seite, d.h. des Quellenstromvektors zunächst in algebraischer Form an.

# Knotenpotential-Verfahren -9

## Koeffizientenschema in algebraischer Form

Spannungen	$U_{10}$	$U_{20}$	$U_{30}$	Rechte Seite [I]
Knoten 1	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}$	$-\frac{1}{R_5}$	0	$\frac{U_q}{R_1}$
Knoten 2	$-\frac{1}{R_5}$	$\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$	$-\frac{1}{R_6}$	0
Knoten 3	0	$-\frac{1}{R_6}$	$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}$	$\frac{U_q}{R_2}$

# Knotenpotential-Verfahren-10

Setzen Sie die Zahlenwerte im Koeffizientenschema ein

$$U_q = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 110 \, \Omega$$

$$R_2 = 220 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_4 = 430 \, \Omega$$

$$R_5 = 220 \, \Omega$$

$$R_6 = 330 \, \Omega$$

und lösen Sie das Gleichungssystem  $[\mathbf{G}] \cdot [\mathbf{U}] = [\mathbf{I}]$   
nach  $[\mathbf{U}]$  auf Ihrem Taschenrechner auf.

# Knotenpotential-Verfahren-11

## Werte des Koeffizientenschemas

Spannungen	$U_{10}$	$U_{20}$	$U_{30}$	Rechte Seite [I]
Knoten 1	0.0167	-0.00455	0	0.10909
Knoten 2	-0.00455	0.00758	-0.00303	0
Knoten 3	0	-0.00303	0.00990	0.05455

# Knotenpotential-Verfahren -12

Gleichungssystem mit Taschenrechner TI-89  
lösen:

```
rref([0.0167, -0.00455, 0, 0.10909;  
      -0.00455, 0.00758, -0.00303, 0;  
      0, -0.00303, 0.00990, 0.05455]) Enter
```

# Knotenpotential-Verfahren -13

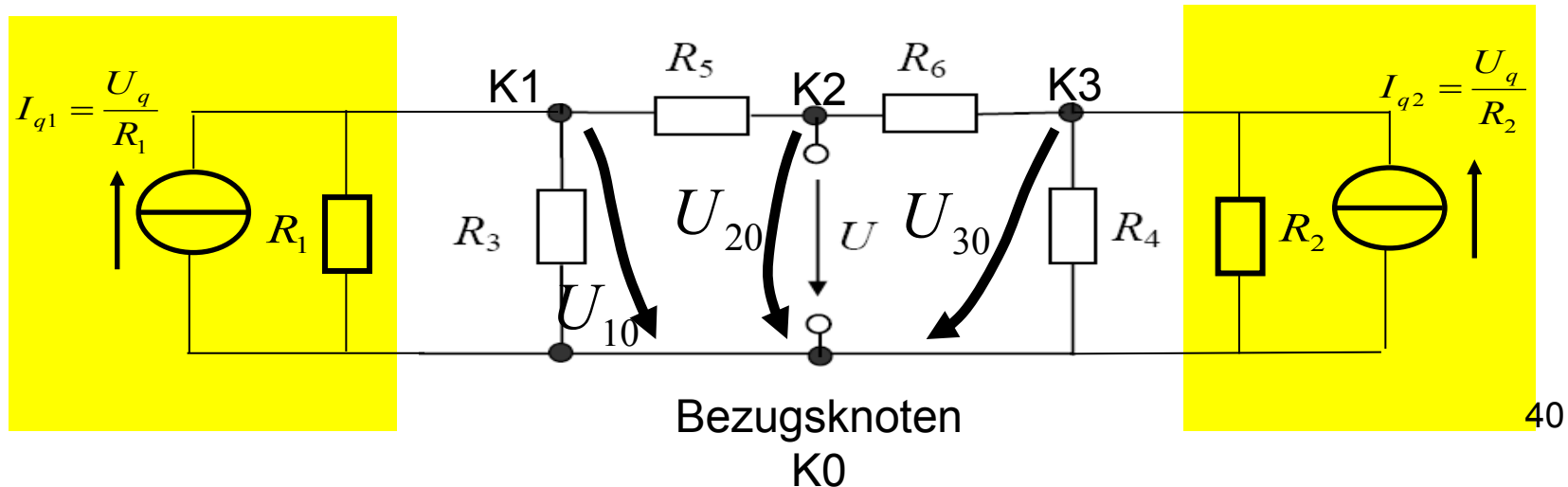
Gleichungssystem mit Taschenrechner TI-89  
lösen:

$$\begin{bmatrix} 1.E0 & 0.E0 & 0.E0 & 8.86872E0 \\ 0.E0 & 1.E0 & 0.E0 & 8.57529E0 \\ 0.E0 & 0.E0 & 1.E0 & 8.13466E0 \end{bmatrix}$$

# Knotenpotential-Verfahren-14

## Interpretation der Ergebnisse

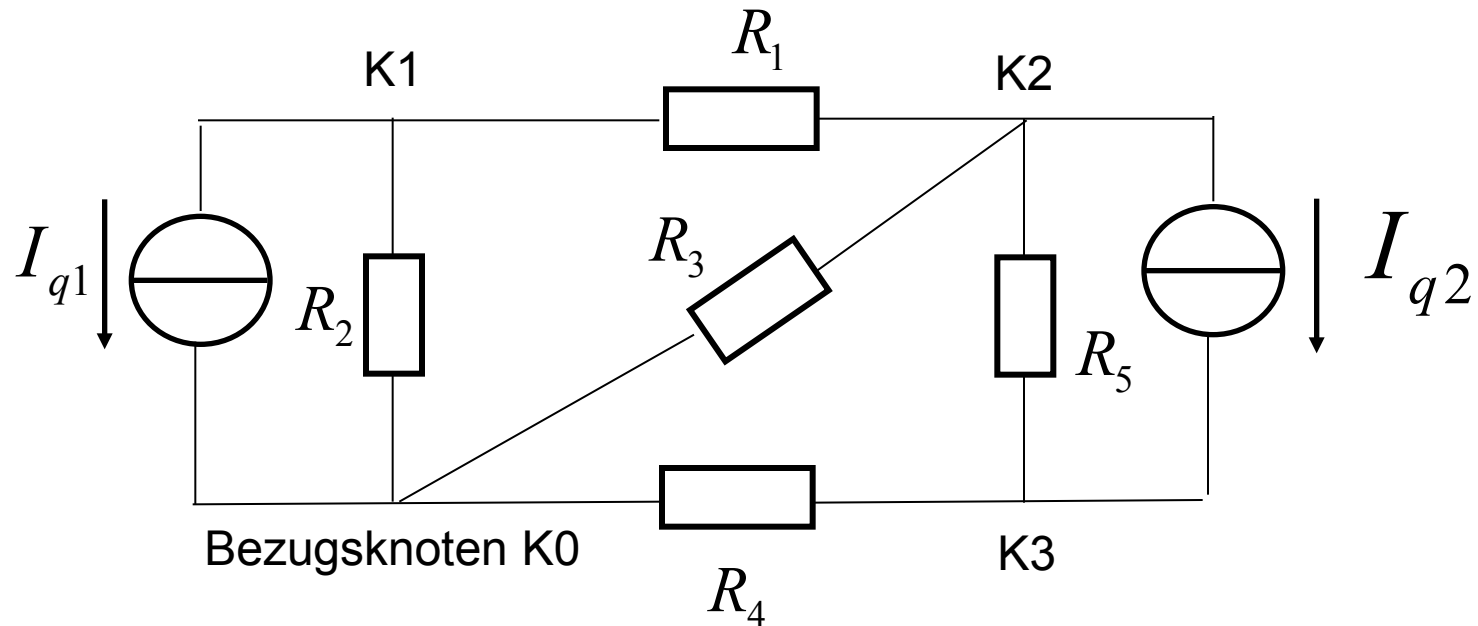
$$\begin{bmatrix} 1.E0 & 0.E0 & 0.E0 \\ 0.E0 & 1.E0 & 0.E0 \\ 0.E0 & 0.E0 & 1.E0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.86872E0 \\ 8.57529E0 \\ 8.13466E0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix}$$



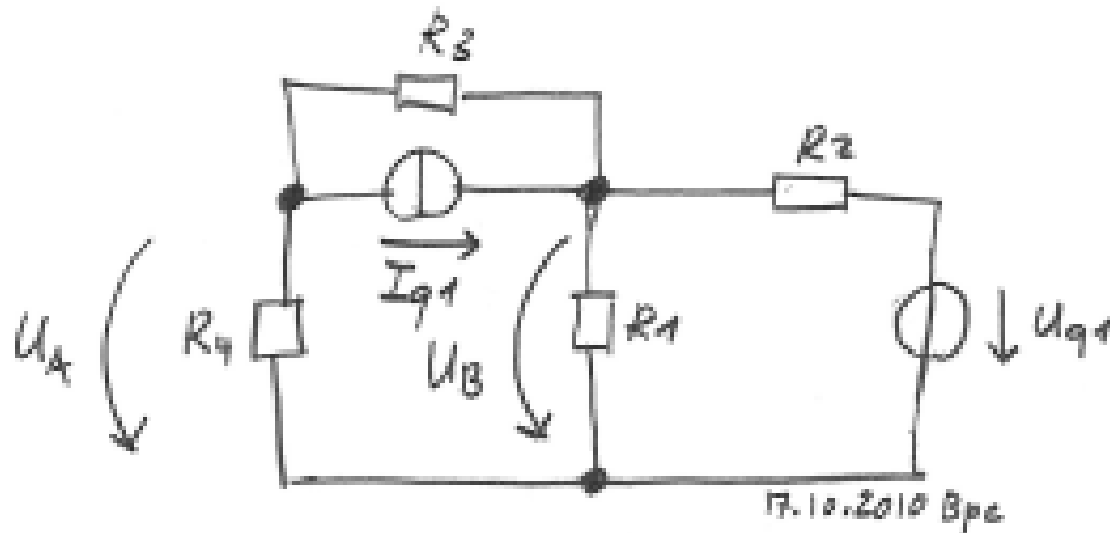


# Knotenpotential-Verfahren Aufgabe

1. Geben Sie das passende Koeffizientenschema
2. Welche Grössen errechnet das Verfahren?



# Hausaufgabe Knotenpotentialverfahren



Daten :  $R_1 = 100 \, \Omega$

Gesucht :  $U_A, U_B$

$R_2 = 470 \, \Omega$

$R_3 = 47 \, \Omega$

$R_4 = 270 \, \Omega, U_{q1} = -6 \, \text{V}, I_{q1} = 3 \, \text{A}$

$(U_A = -96.02 \, \text{V}, U_B = 28.27 \, \text{V})$

# **Aufgaben – Phase der Studierenden**

## **Dozent hilft nach Möglichkeit individuell**

Aufgabe G2-1 : Netzwerkanalyse, Anwenden  
Thévenin/Norton

Aufgabe Hausaufgabe Knotenpotentialverfahren