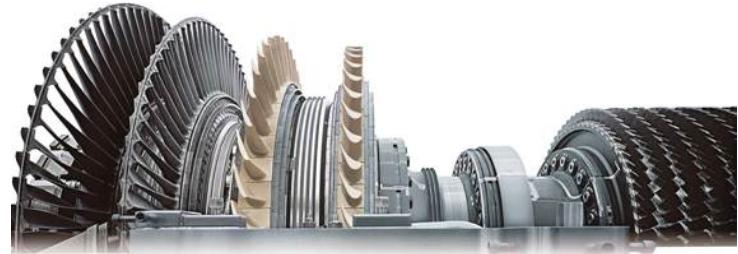


THERMO- & FLUIDDYNAMIK GRUNDLAGEN

THFL+GRU



Prof. Dr. Beat Wellig

Herbstsemester 2015

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	ix
1 Einführung	1
1.1 Was ist Thermodynamik?	1
1.2 Anwendungen der Thermodynamik	2
1.3 Energie: Formen und Umwandlung	3
1.4 Systematik der Energieumwandlungen: Begriffe	7
1.5 Beispiele von Energieumwandlungen	9
1.6 Mögliche und unmögliche Vorgänge (Prozesse)	13
1.7 Übungen	18
2 Grundlegende Begriffe	23
2.1 Das thermodynamische System	23
2.2 Zustand und Zustandsgrößen	29
2.2.1 Materiemenge als Zustandsgröße	29
2.2.2 Thermische Zustandsgrößen	30
2.2.3 Kalorische Zustandsgrößen	34
2.2.4 Klassifizierung der Zustandsgrößen	34
2.3 Das Gleichgewicht	36
2.4 Prozesse	39
2.4.1 Prozess und Zustandsänderung	39
2.5 Übungen	40

3 Stoffe und ihre Eigenschaften	49
3.1 Einleitung	49
3.2 Der isobare Verdampfungsvorgang	50
3.3 p,v,T -Fläche eines reinen Stoffes	54
3.4 Dampfdruckkurven reiner Stoffe	58
3.5 Thermische Zustandsgleichung für reine Stoffe	59
3.6 Das ideale Gas	60
3.6.1 Isotherme Zustandsänderung $T = \text{konst.}$	61
3.6.2 Isobare Zustandsänderung $p = \text{konst.}$	62
3.6.3 Allgemeine Zustandsänderung	63
3.6.4 Die thermische Zustandsgleichung der idealen Gase	64
3.7 Reale Gase	65
3.8 Festkörper	70
3.9 Flüssigkeiten	70
3.10 Übungen	71
4 Die Prozessgrößen “Arbeit” und “Wärme”	79
4.1 Zustand und Prozess (Wiederholung)	79
4.2 Die Arbeit W	81
4.2.1 Was ist Arbeit? – Ein Beispiel	81
4.2.2 Mechanische Energien	82
4.2.3 Irreversible Prozesse der Mechanik	91
4.3 Die Arbeit am geschlossenen System	92
4.3.1 Die reversible Volumenänderungsarbeit $W_{v12\text{rev}}$	92
4.3.2 Spezielle reversible Prozesse mit idealen Gasen	94
4.3.3 Nutzarbeit	99
4.3.4 Irreversible Prozesse / Dissipation	100
4.3.5 Die Gesamtarbeit	102
4.4 Die Arbeit am offenen System	103
4.4.1 Reversible Druckänderungsarbeit $W_{p12\text{rev}}$	103

4.4.2	Spezielle reversible Prozesse mit idealen Gasen	108
4.4.3	Irreversible Prozesse / Dissipation	111
4.4.4	Die technische Arbeit	112
4.5	Weitere Formen der Arbeit	113
4.5.1	Die Wellenarbeit	113
4.5.2	Die elektrische Arbeit	114
4.6	Die Wärme Q	116
4.6.1	Was ist "Wärme"?	116
4.6.2	Die Wärme Q_{12} und der Wärmestrom \dot{Q}	116
4.6.3	Arten der Wärmeübertragung	117
4.6.4	Der Wärmedurchgang	120
4.6.5	Beispiele von Wärmeübertragern	122
4.7	Übungen	126
5	Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen	131
5.1	Erhaltungssätze	131
5.2	Die allgemeine Bilanzgleichung	132
5.3	Massen- und Stoffbilanz	133
5.4	Energiebilanz / Leistungsbilanz	137
5.5	Übungen	141
6	Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik	143
6.1	Einleitung	143
6.2	Die Energie eines Systems	145
6.2.1	Zustandsgrösse Energie E	145
6.2.2	Zustandsgrösse Innere Energie U	145
6.2.3	Zustandsgrösse Enthalpie H	145
6.3	Die Energiebilanzgleichung: 1. HS der Thermodynamik	146
6.4	Die innere Energie: eine energetische Zustandsgrösse	148
6.4.1	Überblick	148
6.4.2	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v	150

6.4.3	Die innere Energie von gasförmigen Stoffen	150
6.4.4	Die innere Energie von festen und flüssigen Stoffen	154
6.5	Anwendung des 1. HS für geschlossene Systeme (Energiebilanzgleichung) . .	158
6.5.1	Überblick	158
6.5.2	1. HS für reversible Prozesse mit perfekten Gasen ($c_v = \text{konst.}$) . . .	158
6.5.3	Spezielle reversible Zustandsänderungen mit perfekten Gasen	160
6.5.4	Polytropen Zustandsänderungen mit perfekten Gasen	174
6.5.5	Die Leistungsbilanzgleichung	181
6.6	Energiebilanzgleichung für offene Systeme	185
6.6.1	Beispiele von offenen Systemen	185
6.6.2	Herleitung des 1. HS für offene Systeme	187
6.6.3	Die technische Arbeit w_{t12} (Wiederholung Kap. 4.4.4)	193
6.7	Die Leistungsbilanz - Zusammenfassung	194
6.8	Die Enthalpie (H, h, \dot{H}): Eine energetische Zustandsgrösse	195
6.8.1	Überblick	195
6.8.2	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p	196
6.8.3	Gase	197
6.8.4	Flüssigkeiten und Feststoffe	199
6.9	Anwendung des 1. HS für offene Systeme (Leistungsbilanzgleichung) . . .	203
6.9.1	Überblick	203
6.9.2	Spezielle reversible Zustandsänderungen mit perfekten Gasen	203
6.9.3	Polytropen Zustandsänderungen mit perfekten Gasen	206
6.9.4	Stationäre Fliessprozesse: Anwendungen	208
6.10	Übungen	220
7	Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik	231
7.1	Einleitung	231
7.1.1	Begründer	231
7.1.2	Was sagt uns der 2. Hauptsatz?	232
7.1.3	Beispiele von irreversiblen Prozessen	234

7.1.4	Zusammenfassung der Lehren aus den Erfahrungen	237
7.1.5	Was ist ein irreversibler Prozess? - Zusammenfassung	237
7.2	Die Entropiebilanzgleichung	238
7.2.1	Die Formulierung des 2. HS durch Entropie und thermodynamische Temperatur	238
7.2.2	Entropiebilanzgleichung für geschlossene Systeme	240
7.2.3	Umwandlung von Wärme in Arbeit: Die Wärmekraftmaschine . .	243
7.2.4	“Umkehrung” der WKM: die Wärmepumpe	248
7.2.5	Die “schädliche” Wirkung von Temperaturdifferenzen	251
7.2.6	Entropiebilanzgleichung für offene Systeme	252
7.3	Die Entropie S als Zustandsgrösse	253
7.3.1	Prozessgrössen “Arbeit W ” und “Wärme Q ”	253
7.3.2	Prozessgrösse “Dissipation J ”	254
7.3.3	Definitionsgleichungen der Entropie	255
7.3.4	Das T,s -Diagramm	257
7.4	Erste Anwendungen des 2. HS und T,s -Diagramms	260
7.4.1	Überblick	260
7.4.2	Spezielle reversible Zustandsänderungen mit perfekten Gasen . .	260
7.4.3	Polytrope Zustandsänderungen mit perfekten Gasen	265
7.4.4	Flächen im T,s -Diagramm	266
7.4.5	Zustandsänderungen mit inkompressiblen Flüssigkeiten	269
7.4.6	Ergänzung: Thermodynamische Mitteltemperatur	269
7.5	Exergie und Anergie	270
7.5.1	Quantität und Qualität der Energie	270
7.5.2	Formulierung der HS mit Exergie und Anergie	271
7.5.3	Berechnung der Exergie	273
7.5.4	Exergieverluste, Exergiebilanz und exergetische Wirkungsgrade .	276
7.5.5	Exergieverlust bei der Wärmeübertragung	278
7.6	Anwendung des 1. und 2. Hauptsatzes	280
7.7	Übungen	295

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

a	m/s^2	Beschleunigung
c	m/s	Geschwindigkeit
c_p	J/kg K	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_v	J/kg K	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
e	J/kg	Spezifische Energie
E	J	Energie
\dot{E}	W	Energiestrom
F	N	Kraft
g	m/s^2	Erdbeschleunigung ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)
h	J/kg	Spezifische Enthalpie
H	J	Enthalpie
\dot{H}	W	Enthalpiestrom
j	J/kg	Spezifische Dissipation
J	J	Dissipation
k	$\text{W/m}^2 \text{K}$	Wärmedurchgangskoeffizient
m	kg	Masse
\dot{m}	kg/s	Massenstrom
M	kg/mol	Molare Masse
n	-	Polytropenexponent
n_i	mol	Stoffmenge der Komponente i
p	Pa	Druck
P	W	Leistung
q	J/kg	Spezifische Wärme
Q	J	Wärme
\dot{Q}	W	Wärmestrom
R	J/mol K	Universelle Gaskonstante ($R = 8.3145 \text{ J/mol K}$)
R_i	J/kg K	Individuelle Gaskonstante der Komponente i ($R_i = R/M_i$)
s	m	Weg
s	J/kg K	Spezifische Entropie
S	J/K	Entropie
\dot{S}	W/K	Entropiestrom
t	s	Zeit

T	K	Absoluttemperatur
u	J/kg	Spezifische innere Energie
U	J	Innere Energie
v	m ³ /kg	Spezifisches Volumen
V	m ³	Volumen
\dot{V}	m ³ /s	Volumenstrom
w	J/kg	Spezifische Arbeit
w	-	Massenanteil
W	J	Arbeit
W_p	J	Druckänderungsarbeit
W_v	J	Volumenänderungsarbeit
x	-	Dampfgehalt
y_i	-	Stoffmengenanteil der Komponente i
z	m	Höhe, z -Achse

Griechische Buchstaben

α	1/K	Wärmeausdehnungskoeffizient
α	W/m ² K	Wärmeübergangskoeffizient
ε	-	Leistungszahl
ε	-	Verdichtungsverhältnis
η	-	Wirkungsgrad
η	kg/m s	Dynamische Viskosität
ϑ	°C	Celsius-Temperatur
κ	-	Isentropenexponent ($\kappa = c_p/c_v$)
λ	W/m K	Wärmeleitfähigkeit
λ_F	-	Füllungsgrad
λ_L	-	Liefergrad
ν	m ² /s	Kinematische Viskosität
ρ	kg/m ³	Dichte
φ	-	Einspritzverhältnis
ψ	-	Druckverhältnis

Dimensionslose Kennzahlen

Gr	Grashof-Zahl
Nu	Nusselt-Zahl
Pr	Prandtl-Zahl
Ra	Rayleigh-Zahl
Re	Reynolds-Zahl

Indizes

1, 2, ...	Zustandspunkt 1, 2, ...
12	Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$
abs	absolut
α	Anfangszustand, Eintritt
C	Carnot
el	elektrisch
Exp	Expansion / Entspannung
gef	gefördert
H	Hub
i	Komponente i
irr	irreversibel
is	isotherm
kin	kinetisch
K	Kolben
Komp	Kompression / Verdichtung
L	Luft
m	mittel
mech	mechanisch
pot	potentiell
Q	auf die Wärme bezogen
rev	reversibel
s	Isentrope Zustandsänderung
S	Schadraum
t	technisch
th	thermisch
U	Umgebung
V	Verlust
ω	Endzustand, Austritt

Abkürzungen

AR	Arbeitsraum
AV	Auslassventil
EV	Einlassventil
g	gas, gasförmig (Aggregatzustand)
HS	Hauptsatz
KA	Kälteanlage
KR	Kontrollraum
l	liquid, flüssig (Aggregatzustand)
OT	Oberer Totpunkt
s	solid, fest (Aggregatzustand)

SG	Systemgrenze
UT	Unterer Totpunkt
WKA	Wärmekraftanlage
WKM	Wärmekraftmaschine
WP	Wärmepumpe
WÜ	Wärmeübertrager
ZÄ	Zustandsänderung

Kapitel 1

Einführung

1.1 Was ist Thermodynamik?

Energie ist ein Schlüsselthema unserer Zivilisation. Eine sichere und nachhaltige Energieversorgung gehört mit zu den wichtigsten Aufgaben einer modernen Gesellschaft. Die in der Natur vorkommenden Energieformen sind nicht unmittelbar nutzbar – sie müssen in technischen Anlagen “nützlich gemacht”, sprich umgewandelt werden. **Energieumwandlungen** stehen im Zentrum der Thermodynamik.

Das Wort Thermodynamik setzt sich aus den griechischen Begriffen “therme” (= Wärme) und “dynamis” (= Kraft, Kraftentfaltung) zusammen. Thermodynamik galt früher als **Wärmelehre**. Heute ist sie die **allgemeine Energielehre**.

Die Thermodynamik lehrt die Energieformen zu unterscheiden, zeigt ihre Verknüpfung in den Energiebilanzen des 1. HS und die Grenzen des Möglichen bei Energieumwandlungen im 2. HS. **Thermodynamik als allgemeine Energielehre ist eine grundlegende Ingenieur-Wissenschaft**. Wer über Energie mitreden will, muss die grundlegenden Gesetze der Thermodynamik verstehen!

Eng verbunden mit Energieumwandlungen sind Eigenschaften und Verhalten der verwendeten Stoffe (Arbeitsmittel). Auch damit werden wir uns befassen.

1.2 Anwendungen der Thermodynamik

Die Thermodynamik hat eine besondere Bedeutung für die **Energietechnik** – aber nicht nur! In der Praxis wenden Ingenieurinnen und Ingenieure die Prinzipien aus der Thermodynamik zusammen mit anderen Ingenieur-Wissenschaften an (Mechanik, Materialwissenschaften, Fluidmechanik usw.), um Produkte und Prozesse in verschiedener Hinsicht zu verbessern:

- Erhöhung der Energieeffizienz (Wirkungsgrad)
- Sparsamer Einsatz nicht-erneuerbarer Ressourcen
- Reduktion der Umweltbelastung (Treibhausgase wie CO₂, Schadstoff-Emissionen)
- Erhöhung der Wirtschaftlichkeit

Ohne das Verständnis der Thermodynamik erreichen wir diese Ziele nicht!

Die untenstehende Aufzählung gibt einen Überblick über das weite Anwendungsfeld der Thermodynamik:

- Verbrennungsmotor (Otto, Diesel)
- Kernkraftwerk (thermische Kraftwerke)
- Kühlschrank
- Gebäudeheizung, Wärmepumpe, Gasbrenner
- Solarthermie (Solarkollektoren)
- Kühlung, z.B. bei der Zerspanung
- Klimaanlage
- Wärmedämmung bei Gebäuden
- Strahltriebwerk eines Flugzeugs
- Kaffeemaschine
- Kochen
- ...

1.3 Energie: Formen und Umwandlung

Ein Schlüsselwort der Thermodynamik heisst **Energie**. Wenn es um sinnvolle Anwendungen geht, gehört ein zweites hinzu: **Umwandlung**. Die Thermodynamik ist die Lehre der **Energieumwandlungen**.

Was bedeutet Energieumwandlung? Die Voraussetzung dafür ist, dass es mehrere verschiedene **Energieformen** gibt. Später, bei der Behandlung des 1. HS der Thermodynamik, werden wir diese genau definieren. Vorläufig wollen wir uns etwas locker, noch nicht streng wissenschaftlich, mit Energien, Energieformen und Energieumwandlungen vertraut machen.

Wir behandeln im Folgenden einige Beispiele aus dem Alltagsleben, eher nur pauschal und global, als Überblick (siehe auch Kap. 1.7 Übungen).

a) Der Mensch braucht zum Leben biochemische Energie

Er deckt sie durch die **Nahrung**. Für den ständigen Körpераufbau, Vitalität, Intelligenz benötigt er Getreide, Gemüse, Fleisch, Früchte. Diese biochemischen Energien werden quantifiziert mit der Einheit kJ/kg (früher in kcal/kg).

Der Bedarf für eine Studentin oder einen Studenten ist rund 10'000 kJ pro Tag. Dies ergibt eine durchschnittliche Leistung von

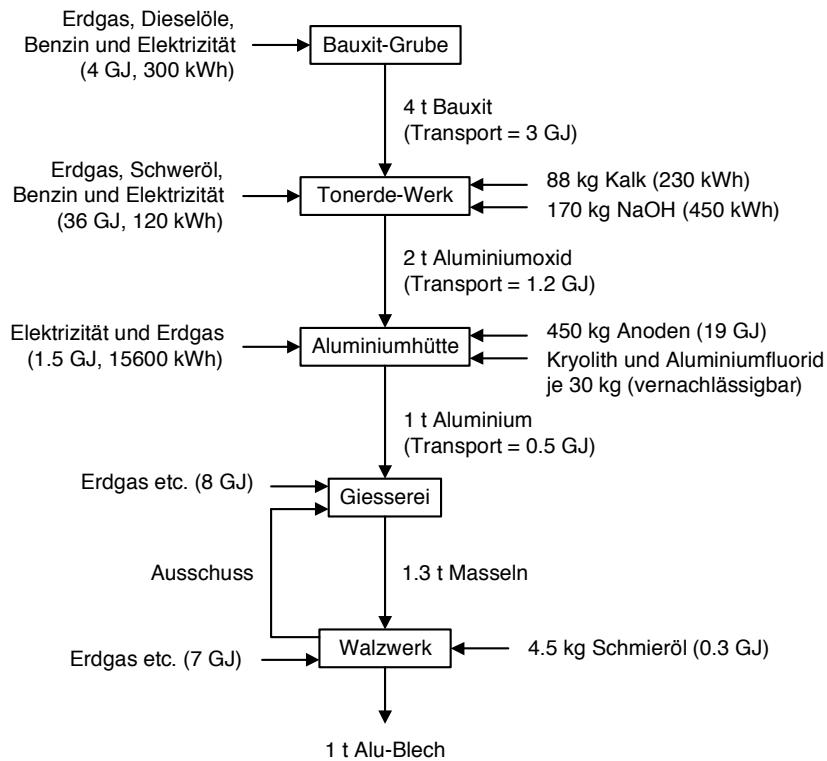
$$\bar{P} = \frac{10000 \cdot 10^3}{24 \cdot 3600} = 116 \text{ W} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \right]$$

b) Herstellung von Gütern

Bis Halbfabrikate entstanden sind, hat man dafür recht viel Energie “verbraucht”. Hier einige Beispiele dazu:

Material	Energieaufwand kWh/kg
Zement	1.4
Stahl	7.5
Aluminium	48
Flachglas	6.1
PVC	11.8
Papier (gebleicht)	22

Die nachfolgende Abbildung zeigt anhand des Beispiels der Aluminium-Produktion den Energieverbrauch für die Herstellung eines Halbfabrikates. Die Zuteilung der Energieinputs zu den einzelnen Prozessschritten ist ersichtlich.



c) Treib- und Brennstoffverbrauch

Für die Stromerzeugung in Wärmekraftwerken, zum Heizen unserer Häuser, für die Mobilität, usw. werden grosse Energiemengen benötigt. In der untenstehenden Tabelle sind Heizwerte und CO₂-Emissionskennzahlen ausgewählter Energieträger zusammengefasst:

Brennstoff	Heizwert H_u kWh/kg	CO ₂ -Emissionen kg/MWh
Benzin	11.8	252
Dieselöl	11.6	266
Heizöl EL	11.6	240
Kohle	8.1	320
Nadelholz	4.4	445
Erdgas	13.0	201

Von den fossilen Brennstoffen hat Erdgas die geringsten CO₂-Emissionen. Aber: Die CO₂-Bilanz für Biomasse (Nadelholz als Beispiel) ist beinahe neutral.

Die Umwandlungen dieser Stoffe durch Verbrennung sind *irreversible Prozesse*.

d) Stromerzeugung

Wenn man die Nachhaltigkeit der Stromerzeugung beurteilen will, muss man u.a. die CO₂-Emissionskennzahlen betrachten:

Energiekette	CO ₂ -Emissionen kg/MWh _{el}
Wasserkraft (CH)	4
Kernenergie	19
Windkraft (CH)	43
Photovoltaik (CH)	180
Erdgas (D)	528
Öl	852
Kohle	1'170
UCTE-Mix	497

Bemerkungen:

UCTE = Union for the Coordination of Transmission of Electricity (früher UCPTE).

Die UCTE koordiniert die Interessen der Übertragungsnetzbetreiber in 16 europäischen Ländern. Die Elektrizitätsproduktion der beteiligten Länder setzt sich für das Referenzjahr 1999 vereinfacht aus 47% fossilen Energien, 37% Kernenergie und 16% Wasserkraft zusammen.

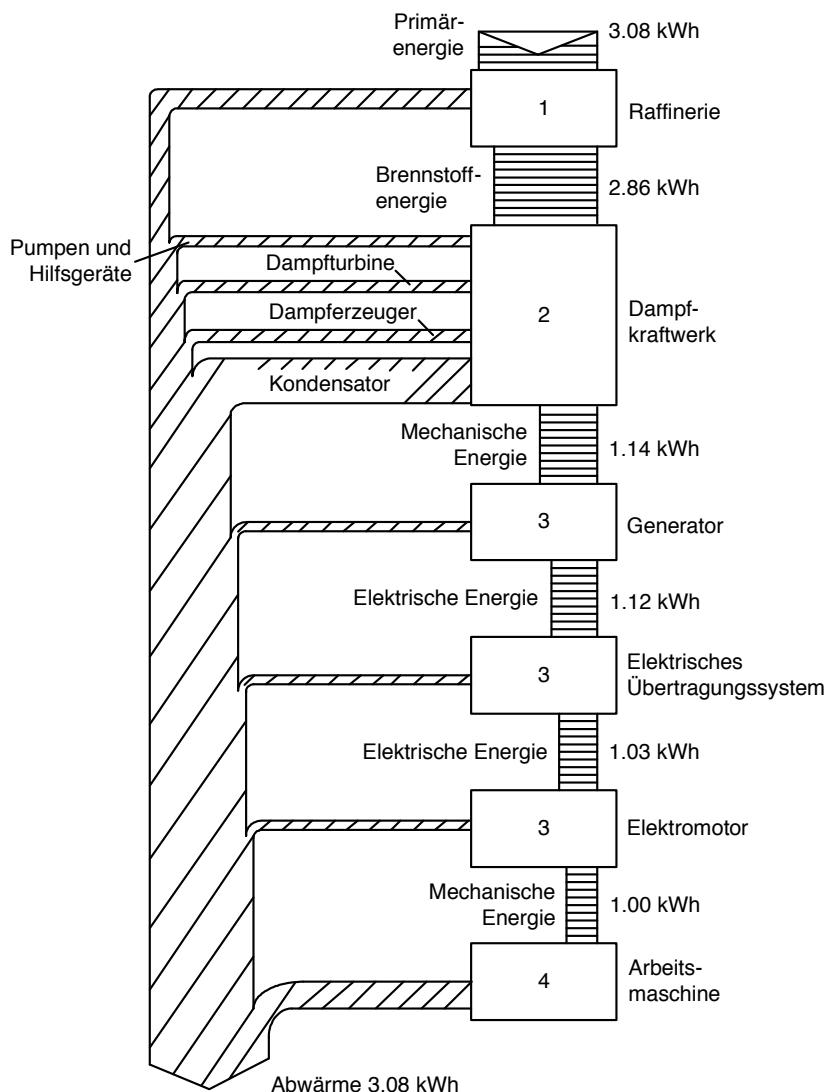
Die CO₂-Emissionen des UCTE-Mixes beträgt rund **500 kg CO₂ / MWh_{el}** oder **0.5 kg CO₂ / kWh_{el}**. Diese Zahl sollten wir uns merken.

Die Wasserkraftnutzung spielt eine wichtige Rolle für die CO₂-Bilanz der Schweiz. Stromproduktion durch Wasserkraft ist CO₂-arm und deckt einen wichtigen Anteil des Schweizer Energieverbrauchs (ca. 60% des schweizerischen Elektrizitätsbedarfs).

e) Thermisches Kraftwerk

Für eine Nutzenergie von 1 kWh benötigt man rund dreimal soviel Primärenergie, die dann schliesslich vollständig als Abwärme an die Umgebung fliesst.

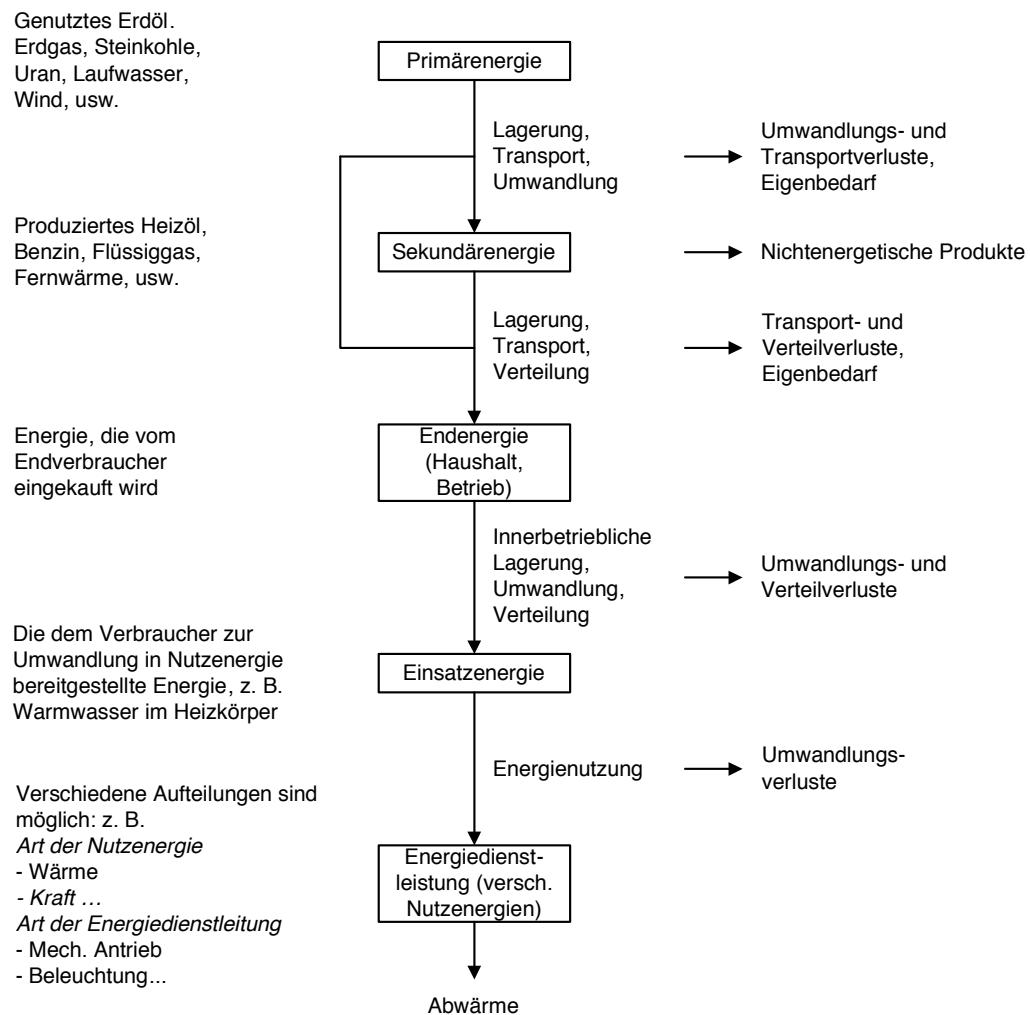
In dieser Energieumwandlungskette zeigt sich sowohl der **1. HS (Erhaltung der Quantität)** als auch der **2. HS (Abnahme der Qualität)** durch die begrenzte Umwendbarkeit der zugeführten Wärme in Arbeit.



Man kann salopp sagen: **“Am Ende ist alles Abwärme!”** Denken Sie z.B. an die Anwendungen Bügeln, Kochen, Drehen oder Autofahren - die gesamte zugeführte Energie liegt am Ende als Abwärme vor.

1.4 Systematik der Energieumwandlungen: Begriffe

Damit wir alle vom Gleichen sprechen, werden hier verschiedene Begriffe definiert: Primärenergie, Sekundärenergie, Endenergie, Einsatzenergie, Energiedienstleistung.



Primärenergie

Energieträger, die man in der Natur vorfindet und welche noch keiner Umwandlung oder Umformung unterworfen wurden, unabhängig davon, ob sie in dieser Rohform direkt verwendbar sind oder nicht; also Energie in jenem Ausgangszustand, wie er für die wirtschaftliche Nutzung zur Verfügung steht; z.B. Erdöl, Erdgas, Steinkohle, Uran, Laufwasser, Brennholz und andere Biomasse, Sonneneinstrahlung, Wind, Umgebungswärme (Umweltenergie), Erdwärme. Meist wird mit Brennstoffequivalenten gerechnet.

Endenergie

Die Energie, welche vom Endverbraucher (z.B. einem Industriebetrieb, einem Gebäude, einem Haushalt) zum Zwecke der weiteren Umwandlung und Nutzung bezogen bzw. eingekauft wird. Beispiele: Heizöl, Erdgas, Fernwärme (als Heisswasser oder Prozessdampf), die aus dem Netz bezogene Elektrizität, die vom Betrieb energetisch genutzten Industrieabfälle.

Energiedienstleistung

Unter dem Begriff der Energiedienstleistung versteht man jenen Leistungsumfang, den der Verbraucher durch den Einsatz von Energie in den verschiedenen Verbrauchseinrichtungen bekommt. Energiedienstleistung bedeutet also z.B. beleuchtete Räume, gekühlte Räume, Bereitstellung von heissem Wasser für den Küchenbetrieb, Betrieb der Bürogeräte oder der Produktionsmaschinen, etc. Zur Erstellung der nachgefragten Energiedienstleistungen muss die eingesetzte Energie zunächst in die notwendigen Nutzenergieformen (Licht, Wärme, mechanische Arbeit) umgewandelt werden.

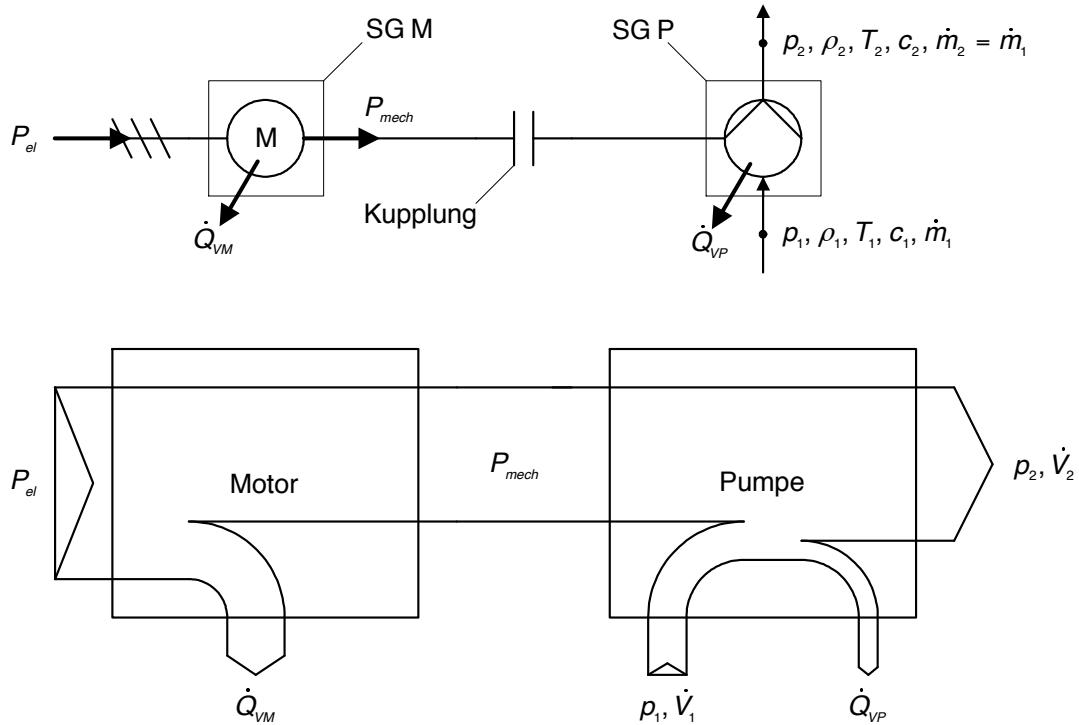
Abwärme

Die in einem energieverbrauchenden Prozess nicht nutzbare Wärme, insbesondere in Bereichen, wo Wärme erzeugt und verwendet wird. Die Abwärme wird entweder im Wege der Energieentsorgung an die Umgebung abgeführt, oder wird über Wärmerückgewinnungsanlagen einer weiteren Nutzung zugeführt. Abwärmeträger sind z.B. Raumabluft, Kühlwasser, Abdämpfe, Abgase aus Öfen und Verbrennungsmotoren. Die Abwärmeemission eines Energiesystems kann als Indikator für die Umweltbelastung durch dieses System dienen (Abwärmebilanzen).

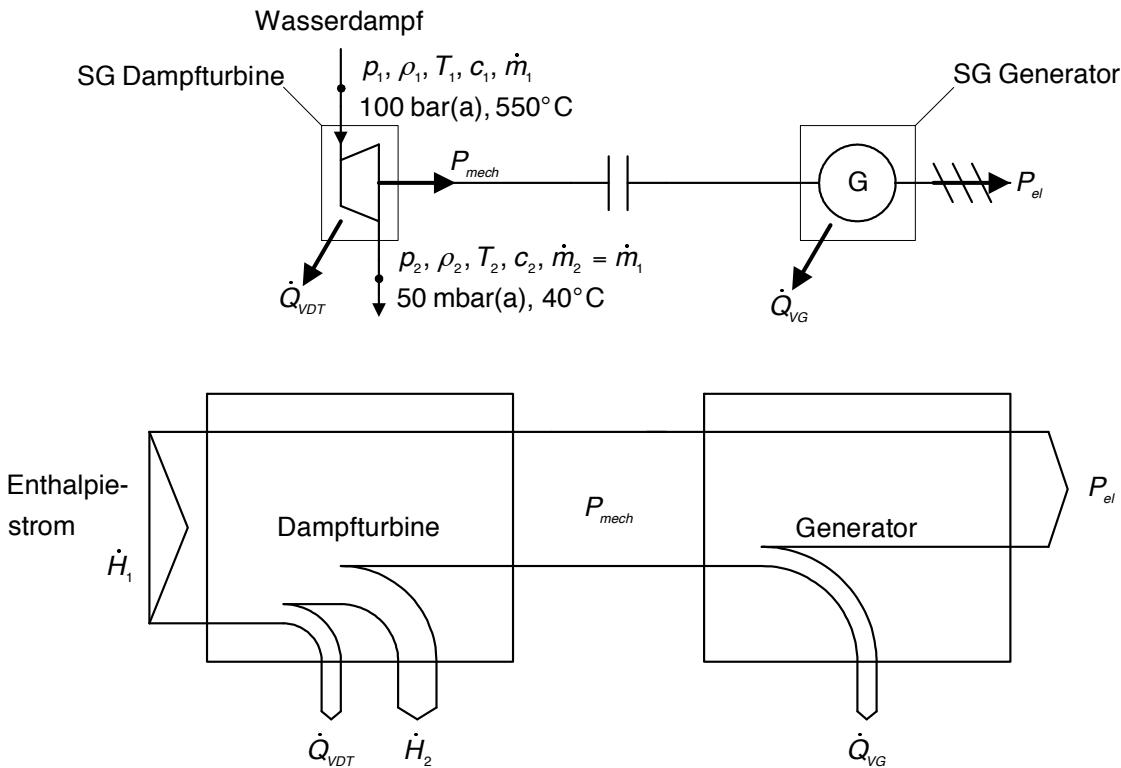
1.5 Beispiele von Energieumwandlungen

Energien werden nützlich durch Umwandlung! Nachfolgend betrachten wir Beispiele von Energieumwandlungen und zeichnen die Energieflussbilder:

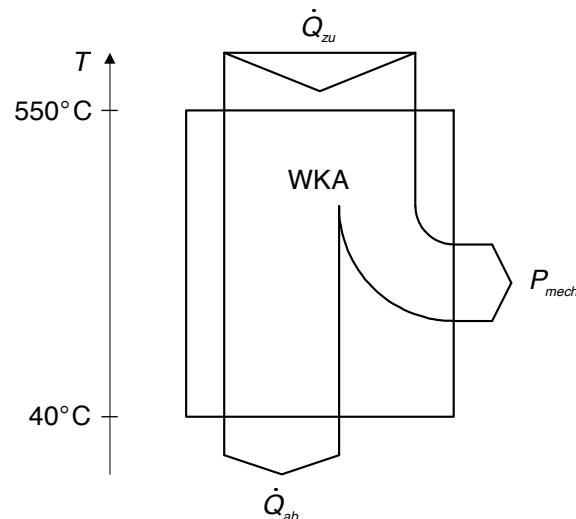
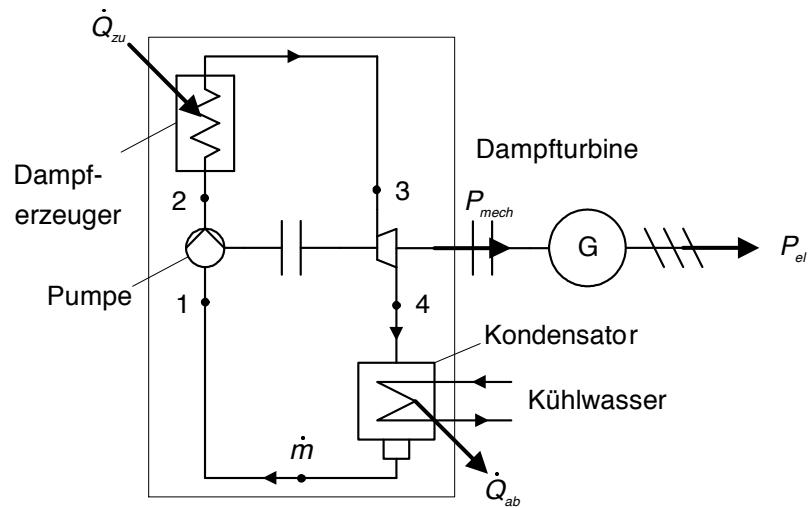
Beispiel 1.1: Elektrisch angetriebene Pumpe. In einem Elektromotor wird elektrische in mechanische Energie gewandelt und zum Antrieb einer Flüssigkeitspumpe verwendet.



Beispiel 1.2: Mit Dampfturbine angetriebener Generator. Wasserdampf mit hohem Druck und hoher Temperatur wird “abgearbeitet” auf einen niedrigeren Druck und eine niedrigere Temperatur. Mit der daraus resultierenden mechanischen Energie wird ein Generator angetrieben.



Beispiel 1.3: Wärmekraftanlage (WKA, thermisches Kraftwerk). Jetzt betrachten wir eine komplette Anlage: In einer WKA wird Wärmeenergie in mechanische Energie umgewandelt, welche wiederum in einem Generator in elektrische Energie umgewandelt wird.



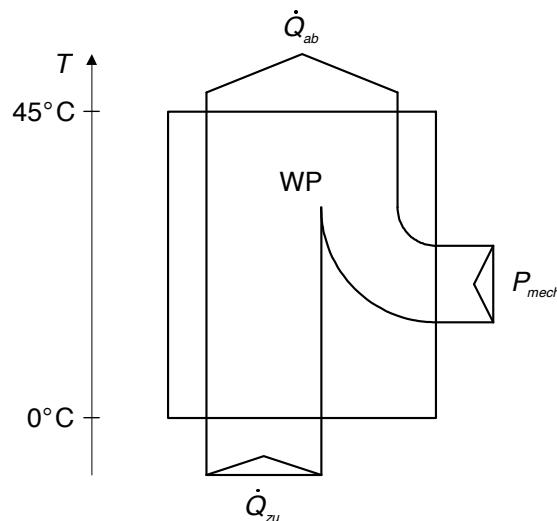
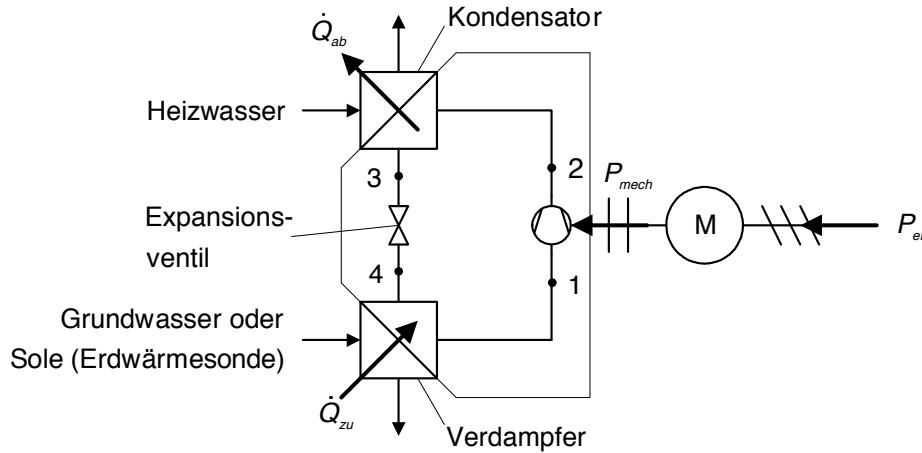
Die Energiebilanz lautet:

$$\dot{Q}_{zu} = P_{mech} + \dot{Q}_{ab}$$

Der Wirkungsgrad der WKA ist:

$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{P_{mech}}{\dot{Q}_{zu}} < 1$$

Beispiel 1.4: Die Umkehrung der Wärmekraftanlage: Wärme-Transformation. Ein Wärme-Transformator nimmt einen Wärmestrom \dot{Q}_{zu} auf und gibt einen Wärmestrom \dot{Q}_{ab} ab, was ändert ist die Temperatur. Kälteanlagen und Wärmepumpen sind Beispiele von Wärme-Transformatoren.



Die Energiebilanz der Wärmepumpe lautet:

$$\dot{Q}_{zu} + P_{mech} = \dot{Q}_{ab}$$

Der "Wirkungsgrad" ist:

$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{\dot{Q}_{ab}}{P_{mech}} > 1$$

Ein Wirkungsgrad grösser als 1 ist unüblich. Man verwendet deshalb dafür den Begriff "Leistungszahl" oder "Coefficient of Performance COP".

1.6 Mögliche und unmögliche Vorgänge (Prozesse)

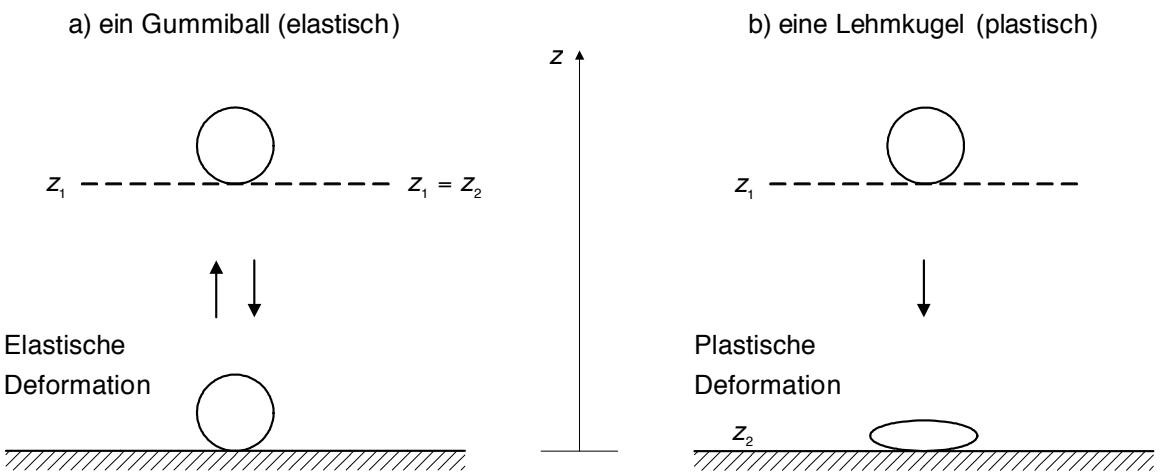
Wir haben gesehen, dass Energien durch Umwandlungen nützlich werden. In diesem Abschnitt machen wir uns über folgende Aspekte von Energieumwandlungen Gedanken:

- Möglichkeiten
- Grenzen von Energie-Umwandlungen
- “Unmöglichkeiten”

Wir betrachten einige einführende Beispiele, ohne exakte Theorie (mit 1 ist der Anfangszustand, mit 2 der Endzustand gemeint):

a) Freier Fall

Aus einer Höhe z_1 fällt ohne Luftwiderstand



Umwandlung:

$$E_{pot} \rightarrow E_{kin} \rightarrow E_{elast} \rightarrow E_{kin} \rightarrow E_{pot}$$

$$E_{pot} \rightarrow E_{kin} \rightarrow E_{plast} \rightarrow \Delta U \quad (U = \text{innere Energie})$$

Prozess-Klassifikation:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \Rightarrow U_1 = U_2 \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

symmetrischer Prozess

$$\begin{aligned} T_2 &> T_1 \Rightarrow U_2 > U_1 \\ z_2 &< z_1 \end{aligned}$$

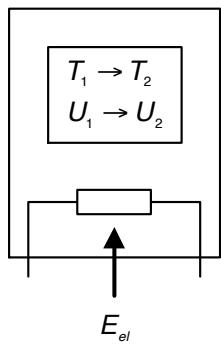
asymmetrischer Prozess

Die Lehmkugel kann infolge plastischer Deformation nicht durch *Abkühlung* wieder die Ursprungslage erreichen.

b) Umwandlung von elektrischer Energie in thermische Energie

Als Einrichtung dazu verwenden wir einen ohmschen Widerstand. Wir erwärmen z.B. Wasser von 20°C auf 70°C.

Umwandlung:



$E_{el} \rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 > 0$, die innere Energie nimmt zu.

Prozess-Klassifikation:

asymmetrischer Prozess, irreversibler Prozess

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\Delta U}{E_{el}} = 100\% \rightarrow \text{Ist der Prozess ideal?}$$

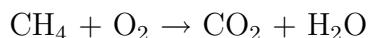
Der Prozess heisst hier *irreversibel*, weil es nicht möglich ist, das Wasser von 70°C auf 20°C wieder abzukühlen und so die elektrische Energie wieder zu gewinnen.

Diese Gesetzmässigkeit wird später als 2. HS der Thermodynamik allgemeiner formuliert, und zwar als einfache, aber abstrakte mathematische Gleichung.

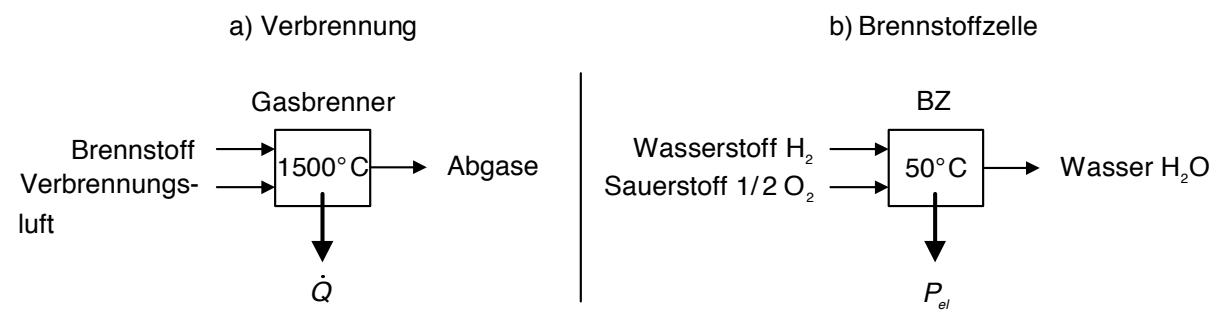
Hinweis: Wäre die Umwandlung von thermischer in elektrische Energie möglich, könnten wir den Welt-Energiebedarf durch Abkühlung unserer Meere um 10^{-5} K pro Jahr decken. Dies ist aber unmöglich, es widerspricht dem 2. HS!

c) Chemische Energien

Brennstoffe sind z.B. Träger von chemischer Energie. Man kann die chemischen Energien durch *chemische Reaktionen* in andere Energieformen umwandeln. Ein Beispiel ist die Verbrennung von Methan:



Wir betrachten hier zwei verschiedene Prozesse:



Prozess-Klassifikation:

irreversibel

reversibel (Umkehrung: Elektrolyse)

Folgerung: Bei beiden Umwandlungen können wir die gleichen *Energie-Quantitäten* erhalten, aber die *Energie-Qualitäten* können sehr verschieden sein. Wir sehen bereits, **die Energien haben zwei Aspekte:**

- Quantität
- Qualität

Vergleich: 1 kg Fleisch hat die gleiche *Quantität*, ob vom Kalb oder von einer Kuh; dagegen sind die *Qualitäten* natürlich sehr verschieden.

Kurzer Überblick über die Energie-Umwandlungen

(1) Höchste Energie-Qualität (im Grenzfall lassen sie sich 100% in eine beliebige andere Energieform umwandeln):

elektrische, chemische, mechanische (potentielle und kinetische) Energie → **Exergie**

(2) Nur teilweise in mechanische und elektrische Energien umwandelbar sind:

thermische Energie (innere Energie der Stoffe, Wärme) → **Exergie + Anergie**

(3) Schliesslich sprechen wir von Energien, welche von sich aus nicht umwandelbar sind:

Thermische Energie (“Abwärme”), wenn $T = T_U$, $p = p_U$ (Umgebungszustand) → **Anergie**

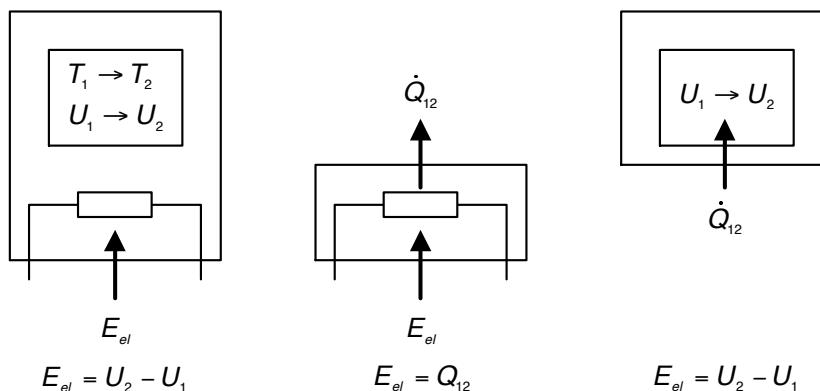
d) Die Wärme - eine spezielle Form der thermischen Energie

Was ist *Wärme*? In der Thermodynamik verstehen wir nicht das gleiche wie in unserer Alltagssprache. Wir müssen aufpassen, dass wir innerhalb der Thermodynamik kein Durcheinander machen, sonst wird es mühselig!

Im Beispiel auf Seite 14 haben wir mit elektrischer Energie über einem ohmschen Widerstand Wasser erwärmt; wir sagten, dadurch hat sich im Wasser die *innere Energie* erhöht um ΔU , oder genauer: von U_1 auf U_2 .

Erst wenn wir zu Studienzwecken die ganze Einrichtung aufteilen, sprechen wir von **Wärme**, quasi um im Einzelnen mehr Übersicht zu gewinnen. Somit im Ganzen existiert die *Wärme* gar nicht! Sie ist eigentlich ein Kniff, um an Teilen eines Ganzen einfache *Energie-Bilanzen* aufstellen zu können. Wissenschaftlich exakt behandeln wir das erst später.

Gehen wir wieder vom Beispiel auf Seite 14 aus, der Umwandlung elektrischer Energie über einen Ohmschen Widerstand, und zerlegen das Ganze in die zwei Teile: *Heizung* und *Wasser*.



Wir wollen noch einige weitere Merkmale der Wärme erkunden:

- Wärme *fliest*, aber ohne dass Materie sich dabei notwendigerweise bewegt; es ist also ein thermischer *Energiefluss*.
- Die Voraussetzung dazu ist, dass ein *Temperaturgefälle* vorhanden ist. (Das behandeln wir später ausführlich unter dem Titel *Wärmeübertragung*)

In Kap. 1.5 behandelten wir kurz die Wärmekraftanlage. Dort sahen wir bereits, dass Wärme nur teilweise umwandelbar ist in mechanische Arbeit; der andere Teil wird an die Umgebung abgeführt, nahe bei der Umgebungstemperatur.

Später werden wir beweisen, dass Wärme um so wertvoller ist, d. h. höhere Qualität hat, je höher ihre *Temperatur* oberhalb der *Umgebungstemperatur* ist. Wir sagen dann: Die Wärme besitzt mehr Exergie.

1.7 Übungen

“Thermodynamik: Ein Quiz!” Im Alltag spielt die Thermodynamik eine wichtige Rolle, obschon uns das meist nicht bewusst ist. Anhand dieses Quiz' machen wir uns vertraut mit der vielfältigen Bedeutung der Thermodynamik. Testen Sie Ihren Wissensstand und wagen Sie Ihre Ideen zu formulieren!

Übung 1.1: Was ist Thermodynamik?.

- Die Thermodynamik entstand im 19. Jahrhundert als *Lehre der Umwandlungen von Wärme* (also thermische Energie) *in Arbeit* (also mechanische Energie). Geben Sie einige Beispiele für die Umwandlung von Wärme in Arbeit.
- Heute ist die Thermodynamik eine *allgemeine Lehre der Energieumwandlungen*. Benennen Sie technische Einrichtungen für folgende **Energieumwandlungen**:

solar-thermisch:

chemisch-thermisch:

solar-chemisch:

chemisch-elektrisch:

thermisch-elektrisch:

elektrisch-elektrisch:

Übung 1.2: Mechanische - elektrische - mechanische Energie. Fast die gesamte elektrische Energie entsteht aus mechanischer Energie. Die Einrichtung dazu heisst

Mechanische Energie wird häufig aus elektrischer Energie erzeugt. Die Einrichtung für die Umwandlung heisst

Es gilt also: $E_{mech} \rightarrow E_{el} \rightarrow E_{mech}$: Welche Bedeutung hat dabei die elektrische Energie?

Übung 1.3: Die verschiedenen Energieformen. Energien existieren in verschiedenen Formen. Geben Sie jeweils einige Anwendungsbeispiele zur **Nutzung** der folgenden Energieformen:

- mechanische:

- elektrische:

- thermische:

- chemische:

- nukleare:

- solare:

Übung 1.4: Wirkungsgrade technischer Energiewandler.

Vom zugeführten Energiestrom kann nur folgender Anteil genutzt werden:

	< 25%	25...50%	50...75%	> 75%
Mechanisches Getriebe				
Benzinmotor				
Elektromotor				
Thermisches Kraftwerk (elektr. Energie aus Erdöl)				
Hydraulisches Kraftwerk				
Solarzelle (elektr. Energie aus Sonnenenergie)				
Biochemische Energie (Nahrung) in mechanische Energie beim Menschen				
Düsentrugzeug (d.h. Antrieb mit Strahltriebwerk)				
Brennstoffzelle (elektrische Energie aus H und O)				

Übung 1.5: Eier kochen. Ein Kollege von Ihnen behauptet, dass es auf dem Jungfraujoch (ca. 3500 m ü. M.) schneller geht, ein Ei dick zu kochen als in Luzern. Liegt er richtig mit seiner Behauptung? Versuchen Sie klar zu argumentieren!

Übung 1.6: Das “Kaffeerahm-Problem”. In einer kurzen Pause wollen Sie einen Kaffee trinken. Dieser ist aber noch zu heiss. Überlegen Sie sich, in welchem Fall der Kaffee schneller auf die “Trinktemperatur” abkühlt! Oder dauert es in beiden Fällen gleichlang?

- (a) Rahm sofort dazugeben, umrühren und dann abwarten oder (b) zuerst einen Weile warten, dann Rahm dazugeben und umrühren?

Übung 1.7: Umgang mit dem Kühlschrank. An einem heissen Sommertag kommt ein Kollege auf die Idee, dass man die Türe des Kühlschranks öffnen und so wenigstens die Küche abkühlen könnte. Funktioniert das auf diese Weise?

Eine Kühlschranktür zu öffnen braucht anfänglich eine starke Zugkraft. Warum ist das so? (Es liegt nicht am Magnetverschluss!)

Wissen Sie ungefähr, wie ein Kühlschrank Kälte erzeugt?

Übung 1.8: Velopumpe und Flüssigkeits-Pumpe. Die Velopumpe ist eine sehr anschauliche Einrichtung. Man verwendet sie um Luft unter Druck zu setzen. Dabei erwärmt sich die Luft. Wieso? (Merke: Der Einfluss der Reibung ist gering!)

Mit der Velopumpe kann auch Wasser unter Druck gesetzt werden. Erwärmt sich das Wasser auch?

Übung 1.9: Heizen und Kühlen. Dies sind wichtige technische Prozesse. Wir betrachten einige Anwendungen ohne exakte Theorie.

- a. In einem Haus ist es 20°C warm bei einer Außentemperatur von 0°C . Nun fällt die Heizung aus. Wegen Sie es, den zeitlichen Verlauf der Raumtemperatur in einem Diagramm aufzuzeichnen! Die Außentemperatur bleibt konstant.
- b. Obiger Vorgang passiert in einem schlechter isolierten Haus: Der k -Wert k_2 (Wärmedurchgangskoeffizient, Einheit $\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$) ist doppelt so hoch gegenüber Aufgabe a. mit k_1 . Tragen Sie den Raumtemperaturverlauf in das obige Diagramm ein! Das Diagramm enthält also zwei Verläufe, der erste mit Parameter k_1 und der zweite mit k_2 .
- c. In einem Kühlhaus fällt die Kälteanlage aus. Beim Ausfall beträgt die Innentemperatur 0°C und die Außentemperatur 20°C . Was passiert bei konstanter Außentemperatur von 20°C ? Es finde keine Beschickung oder Belüftung statt.
- d. Das Kühlhaus nebenan hängt am gleichen Kälteaggregat, hat den k -Wert $k_2 = 2k_1$; k_1 gilt für das Kühlhaus der Aufgabe c. Zeichnen Sie die Funktion mit dem Parameter k_2 in das Diagramm der Aufgabe c!

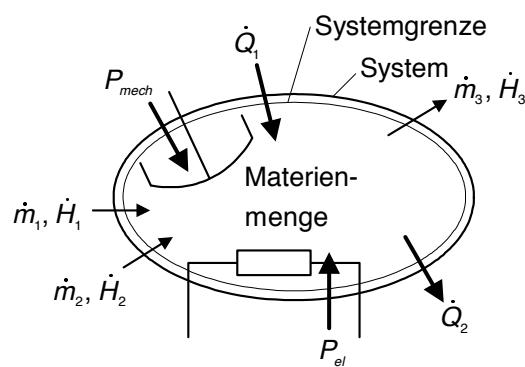
Kapitel 2

Grundlegende Begriffe

“Logisches Denken basiert auf geeigneten Begriffen” (Definitionen)

2.1 Das thermodynamische System

Das thermodynamische System ist eine Abgrenzung für thermodynamische Analysen (Berechnungen).



Thermodynamisches System (kurz: das System) = Raum mit einer bestimmten Stoffmenge, deren Verhalten untersucht wird. Die Stoffmenge wird mit einer Systemgrenze von der Umgebung getrennt. *Systemgrenze* = Bilanzhülle für Stoffströme und Energieströme. Sie kann raumfest oder beweglich sein. Das System muss vor Beginn der thermodynamischen Analyse und Berechnungen eindeutig definiert werden.

System-Klassifikation

a) Offenes System / geschlossenes System:

- offenes System: Stoffe treten über die SG (massendurchlässig)
- geschlossenes System: massenundurchlässig

b) adiabates System / nicht-adiabates System:

- adiabates System: wärmeundurchlässig (“isoliert”)
- nicht-adiabates System: Wärme tritt über die SG (wärmedurchlässig)

c) Abgeschlossenes System:

Keine Wechselwirkung mit Umgebung

Der Energietransport über die Systemgrenze kann mit oder ohne Kopplung an einen Stoffstrom erfolgen. Beispiele von Energietransporten über die Systemgrenze *ohne* Beteiligung von Stoffen:

- Mechanische Leistung P_{mech}
- Wärmeleistung \dot{Q} (wir nennen \dot{Q} “Wärmestrom”)
- Elektrische Leistung P_{el}

d) Homogenes / heterogenes System:

Man unterscheidet zwischen homogenen und heterogenen Systemen. Systeme bezeichnet man als **homogen**, wenn für jedes Volumenelement die Zusammensetzung, Dichte, Temperatur und der Druck gleich sind, bzw. stetige Funktionen der Raumkoordinaten sind.

Beispiele von homogenen Systemen:

- Luft als Gasgemisch aus N₂, O₂, CO₂, usw.
- Sirup: "Zuckerlösung", ungesättigt
- Schnaps: Lösung aus Wasser, Ethanol

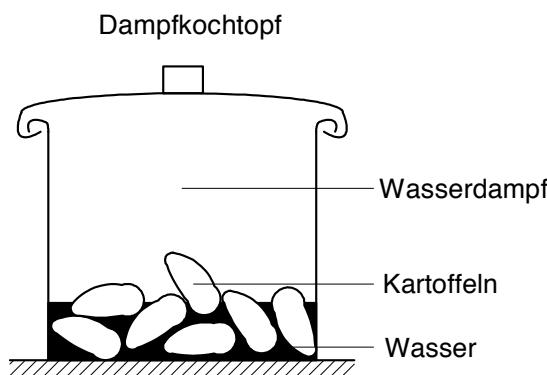
Homogene Systeme sind **einphasige Systeme**.

Treffen die Voraussetzungen bezüglich einheitlicher bzw. stetiger Änderungen der Zustandsgrößen im betrachteten Raumgebiet nicht mehr zu, so spricht man von **heterogenen Systemen** oder **Mehrphasensystemen**.

Beispiele von heterogenen Systemen:

- Italienische Salatsauce: ölartig/wässrig
- Milch: "Öl-in-Wasser-Emulsion"
- Butter: "Wasser-in-Öl-Emulsion"
- Nebel: Wassertropfen in Luft

Beispiel 2.1: Dampfkochtopf. Welche Phasen kommen in diesem System vor?



Gasphase $g = \text{gas}$
 Feste Phase $s = \text{solid}$
 Flüssigphase $l = \text{liquid}$

Begriffe *Phase* und *Komponente*

Komponente: Einheitlicher Stoff (Atom- oder Molekülart) eines Gemisches, z.B. unsere Umgebungsluft besteht aus den Komponenten N₂, O₂, usw.

Phase: Physikalisch gleichartiger homogener Bereich eines Systems, dass durch die Phasengrenzflächen begrenzt ist.

Bei Mehrphasensystemen muss oft zwischen der **kontinuierlichen und dispersen Phase** unterschieden werden (Phasenform):

Kontinuierliche Phase: Eine kontinuierliche Phase ist eine zusammenhängende Phase.

Disperse Phase: Eine disperse Phase besteht aus einzelnen, räumlich voneinander getrennten, physikalisch gleichartigen Teilchen.

Je nach Aggregatzustand und Form der Phasen bzw. Komponenten lassen sich Gemische wie folgt einteilen:

	Gas	Flüssigkeit	Feststoff
Gas in	Gasgemisch (homogen)	Blasenschwarm (heterogen)	Poröse Stoffe (heterogen)
Flüssigkeit in	Nebel (heterogen)	Lösung (homogen) Emulsion (heterogen)	Feste “Lösung” (heterogen)
Feststoff in	Staub, Aerosol (heterogen)	Suspension (heterogen)	Mischkristalle (homogen) Gemenge (heterogen)

Bei verschiedenen Phasen muss unterschieden werden, welche Phase *kontinuierlich* (k) und welche Phase *dispers* (d) verteilt ist. Einige Beispiele zu Mehrkomponenten- und Mehrphasengemischen:

- flüssig (k) - fest (d): Suspension, z.B. Schlamm
- flüssig (k) - flüssig (d): Emulsion, z.B. Milch
- flüssig (k) - gasförmig (d): Blasenbett, z.B. Blasensäule
- gasförmig (k) - flüssig (d): Aerosol, z.B. Nebel
- gasförmig (k) - fest (d): Aerosol, z.B. Staub

Konzentrationsmaße

Für die Beschreibung der Zusammensetzung eines homogenen Gemisches benötigt man die Konzentrationsmaße:

$$\text{Konzentrationsmaße} = \frac{\text{Menge der betreffenden Komponente}}{\text{Bezugsmenge}}$$

Massenanteil:

$$w_i = \frac{m_i}{\sum m_j} = \frac{m_i}{m}$$

Stoffmengenanteil:

$$x_i \text{ oder } y_i = \frac{n_i}{\sum n_j} = \frac{n_i}{n}$$

Für Zweistoffsysteme ergeben sich folgende Gleichungen:

Massenanteil w_1 (Gewichtsanteil): Beim Massenanteil bezieht man die Masse der Komponente 1 (m_1) auf die Gesamtmasse des Gemisches (m):

$$w_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad w_2 = 1 - w_1$$

Stoffmengenanteil x_1, y_1 (Molanteil, Molenbruch): Beim Stoffmengenanteil wird die Stoffmenge der Komponente 1 (n_1) auf die gesamte Stoffmenge im System bezogen (n):

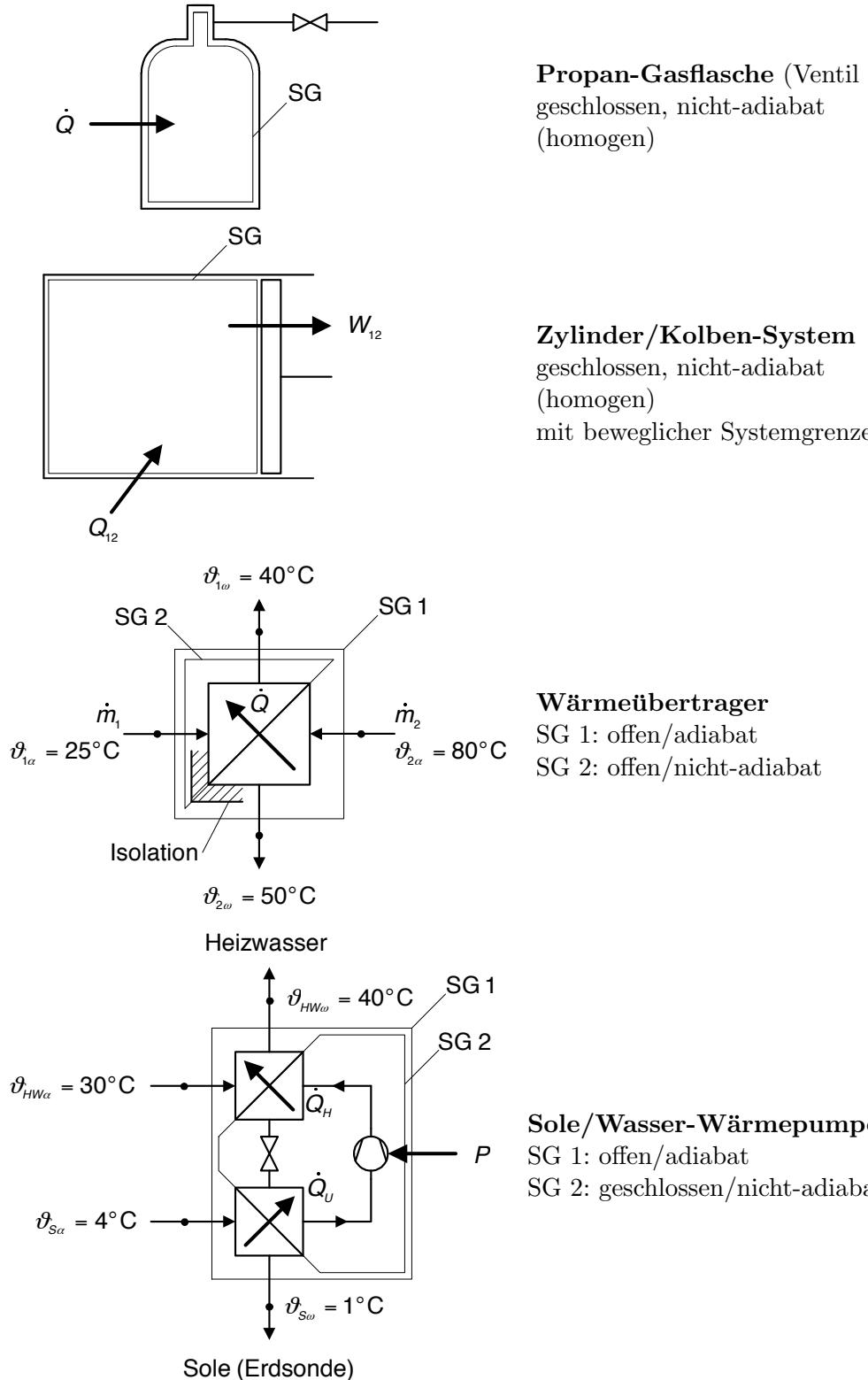
$$x_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad x_2 = 1 - x_1$$

Beispiel 2.2: Luft. Luft besteht (im Wesentlichen) aus 79 Vol.% Stickstoff N₂ und 21 Vol.% Sauerstoff O₂. Wir werden lernen, dass bei idealen Gasgemischen Vol.% und Stoffmengenanteile gleich sind. Wie gross sind die Massenanteile von Stickstoff und Sauerstoff?

Stoffmengenanteil: $y_{N2} = 0.79, y_{O2} = 0.21$

Massenanteil: $w_{N2} = 0.77, w_{O2} = 0.23$

Beispiel 2.3: System-Klassifikation. Zeichnen Sie die Systemgrenze ein und geben Sie eine komplette und korrekte Bezeichnung des Systems an!



2.2 Zustand und Zustandsgrößen

Der erste Schritt einer thermodynamischen Untersuchung ist die unmissverständliche Definition des Systems. Im zweiten Schritt folgt die Beschreibung der physikalischen Eigenschaften des Systems. Die Gesamtheit dieser physikalischen Eigenschaften nennt man **Zustand** des Systems. Dies geschieht in der technischen Thermodynamik durch makroskopisch erfassbare Größen, so genannte **Zustandsgrößen** wie Masse, Volumen, Druck, Temperatur, Zusammensetzung und Energie.

Für die thermodynamische Analyse sind im Allgemeinen weitere Größen notwendig, die keine Zustandsgrößen sind, z.B. Massenströme, Leistung usw. Sie heißen **Prozessgrößen**.

2.2.1 Materiemenge als Zustandsgröße

Die Materiemenge eines Systems kann auf zwei Arten angegeben werden:

- Masse m [kg]
- Stoffmenge n [mol]

Die Anzahl der Teilchen pro mol heisst Avogadro-Konstante:

$$N_A = 6.0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Zwischen der Masse m und der Stoffmenge n besteht die Beziehung:

$$m = n M, \quad M \text{ ist die molare Masse [kg/kmol]}$$

Die Verwendung der Stoffmenge ist in Systemen mit chemischen Reaktionen vorteilhaft.

Stoff	Chemisches Symbol	Molmasse [kg/kmol]
Wasserstoff	H ₂	2.01594
Sauerstoff	O ₂	31.9988
Kohlendioxid	CO ₂	44.010
Methan	CH ₄	16.043
Luft (trocken)	-	28.9647

2.2.2 Thermische Zustandsgrößen

Das **Volumen** V , der **Druck** p und die **Temperatur** T sind die thermischen Zustandsgrößen: Sie beschreiben zusammen mit der Materiemenge den Zustand eines homogenen Systems. Für einen bestimmten Zustand des Stoffes haben die thermischen Zustandsgrößen feste Werte.

a) Das Volumen / das spezifische Volumen

Das Volumen V des Systems gibt dessen räumliche Ausdehnung an und schliesst die im System enthaltene Masse ein.

- Volumen: V [m³]
- Spezifisches Volumen: $v = \frac{V}{m}$ [m³/kg]
- Dichte: $\rho = \frac{1}{v} = \frac{m}{V}$ [kg/m³]

b) Der Druck

Der Druck ist definiert als Quotient der Normalkraft F_n (senkrecht zur Fläche) und der Fläche A :

$$p = \frac{\text{Normalkraft}}{\text{Fläche}} = \frac{F_n}{A} \quad [\text{N/m}^2 = \text{Pa}]$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mbar} = 100 \text{ Pa} = 0.001 \text{ bar}$$

$$1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg} = 133.3 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr} = 1.01325 \text{ bar(a)} (\rightarrow \text{absolut})$$

Für den **Zustand** eines Stoffes ist der **Absolutdruck** massgebend.

Absolutdruck: bar(a)

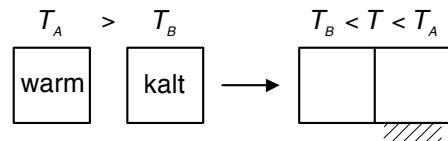
Über-/Unterdruck: bar(ü), bar(g)

Druckdifferenz: bar

c) Die Temperatur

Durch Berührung eines Körpers können wir diesen – je nach Zustand – mit den Worten “kalt”, “warm” oder “heiss” beschreiben. Diese Worte kennzeichnen die Zustandsgröße **Temperatur**.

Gedankenexperiment: Ein “warmer” und ein “kalter” Metallblock werden miteinander in Kontakt gebracht und von der Umgebung isoliert:



Was passiert?

Thermische Wechselwirkung → Temperaturausgleich: “lauwarm”

Es existiert eine Größe, die eindeutig bestimmt, wann sich die beiden Körper im thermischen Gleichgewicht befinden. **Diese Größe heisst Temperatur.**

1) Temperaturmessinstrument: Thermometer

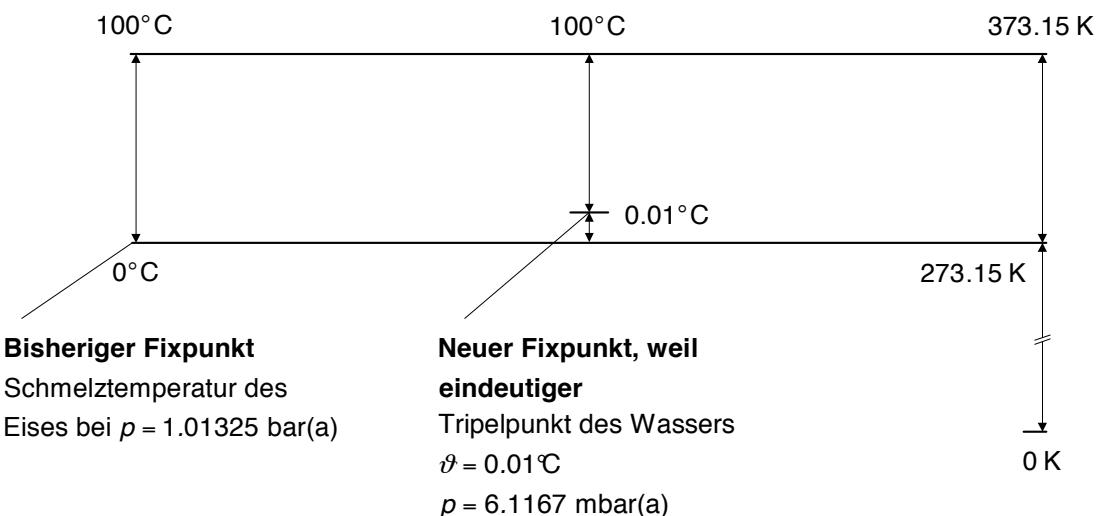
Das Thermometer ermittelt die physikalische Größen, die sich mit der Temperatur ändern, z.B. Ausdehnung der Flüssigkeiten und der Gase, Ausdehnung der Metalle (Bimetalle), Änderung des elektrischen Widerstandes, Strahlung, Thermospannung (Thermoelement) usw.

2) Temperaturfixpunkte

Als Bezugspunkte zur Definition von Temperaturskalen von Thermometern verwendet man Schmelz- und Siedetemperaturen von Stoffen (sogenannte Fixpunkte).

Siedetemperatur
(Verdampfungstemperatur)
des Wassers bei $p = 1.01325 \text{ bar(a)}$

In der Thermodynamik wird
der Zustand eines Stoffes
immer durch die absolute
Temperatur T beschrieben

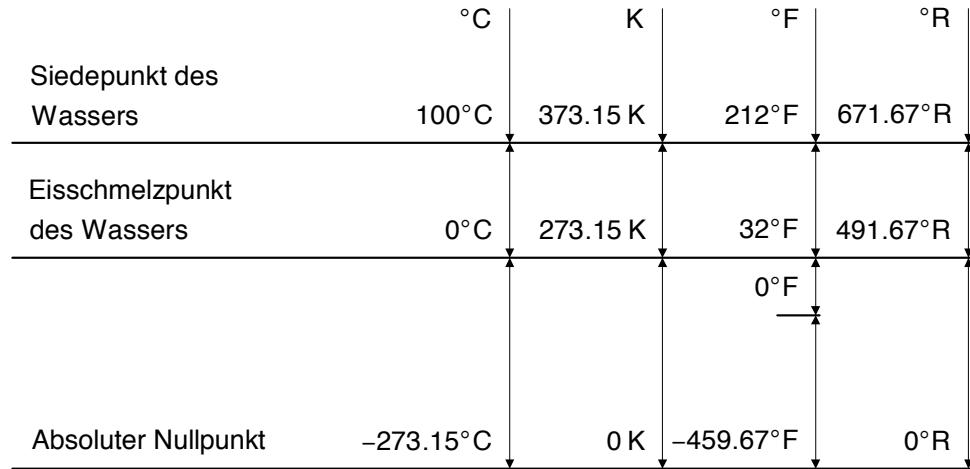


Weitere Fixpunkte bei $p_0 = 1.01325 \text{ bar(a)}$:

Fixpunkt	Temperatur	
	[°C]	[K]
Siedepunkt von Sauerstoff	-182.97	90.18
Schmelzpunkt von Eis	0.00	273.15
Siedepunkt von Wasser	100	373.15
Siedepunkt von Schwefel	444.60	717.75
Erstarrungspunkt von Antimon	630.50	903.65
Schmelzpunkt von Silber	960.80	1233.95
Schmelzpunkt von Gold	1063.00	1336.15

3) Temperaturskalen

Es existieren verschiedene Temperaturskalen (z.B. Celsius, Fahrenheit, Rankine). Die international vereinbarte Temperaturskala ist diejenige der **thermodynamischen Temperatur**. Ihre Einheit ist Kelvin [K].



Die verschiedenen Temperaturen können mit den nachfolgenden Gleichungen umgerechnet werden:

$$T_K = \vartheta_C + 273.15 \quad \vartheta_C = T_K - 273.15$$

$$T_K = \frac{5}{9} T_R \quad T_R = \frac{9}{5} T_K$$

$$\vartheta_C = \frac{5}{9} (\vartheta_F - 32) \quad \vartheta_F = \frac{9}{5} \vartheta_C + 32$$

T_K : Temperatur in Kelvin

T_R : Temperatur in Rankine

ϑ_C : Temperatur in Celsius

ϑ_F : Temperatur in Fahrenheit

2.2.3 Kalorische Zustandsgrößen

Neben der Materiemenge und den thermischen Zustandsgrößen gibt es eine weitere Klasse von Zustandsgrößen: Die **kalorischen Zustandsgrößen**. Sie beschreiben den energetischen Zustand eines Systems. Es sind dies

- Die **innere Energie** U
- Die **Enthalpie** H

Wir werden diese beiden Zustandsgrößen später ausführlich behandeln.

2.2.4 Klassifizierung der Zustandsgrößen

Die thermischen und kalorischen Zustandsgrößen können wie folgt klassifiziert werden:

1. Extensive (mengenabhängige) Zustandsgrößen

Durch “Halbierung des Systems” halbieren sich V, m, U, H

2. Intensive (mengenunabhängige) Zustandsgrößen

Zustandsgrößen: p, T, v bzw. ρ

$$\text{Spezifische kalorische Zustandsgrößen: } u = \frac{U}{m}, \quad h = \frac{H}{m}$$

3. Spezifische Zustandsgrößen

Auf die Masse bezogene Zustandsgrößen:

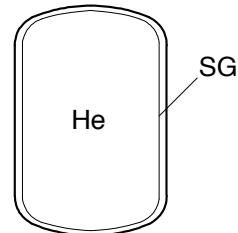
$$v = \frac{V}{m}, \quad u = \frac{U}{m} [\text{J/kg}], \quad h = \frac{H}{m} [\text{J/kg}]$$

4. Molare Zustandsgrößen

Auf die Stoffmenge bezogene Zustandsgrößen:

$$v_m = \frac{V}{n} [\text{m}^3/\text{mol}], \text{ usw.}$$

Beispiel 2.4: Helium-Gas in einem Behälter. Folgende Größen sind bekannt: Volumen $V = 10 \text{ m}^3$, Masse $m = 8 \text{ kg}$, Temperatur $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ ($T = 293 \text{ K}$), molare Masse $M_{\text{He}} = 4 \text{ g/mol}$. Diskutieren Sie die verschiedenen Zustandsgrößen!



Extensive Zustandsgrößen

$$V, m, n = \frac{m}{M_{\text{He}}} = 2 \text{ kmol}$$

Intensive Zustandsgrößen

$$T, \rho = \frac{m}{V} = 0.8 \text{ kg/m}^3, \quad v = \frac{1}{\rho} = 1.25 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$pV = m \frac{R}{M_{\text{He}}} T \quad \rightarrow \quad p = 4.87 \text{ bar(a)}$$

Abgeleitete Zustandsgrößen

$$U, H$$

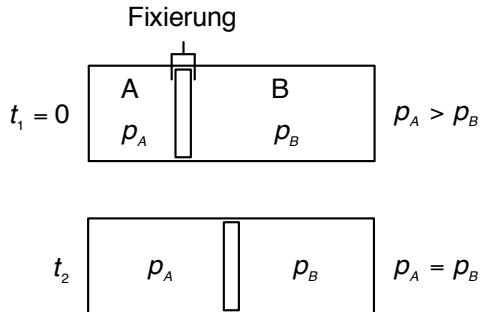
2.3 Das Gleichgewicht

Als Gleichgewicht bezeichnet man den Zustand, bei dem keine zeitlichen sowie räumlichen Veränderungen der Eigenschaften des Systems (d.h. der Zustandsgrößen) feststellbar sind. Der Begriff des Gleichgewichtes ist in der Thermodynamik weiter gefasst als in der Mechanik. Thermodynamische Systeme sind im Gleichgewicht, wenn gleichzeitig

- mechanisches Gleichgewicht,
- thermisches Gleichgewicht und
- chemisches Gleichgewicht

vorliegt. Wir betrachten nachfolgend die drei Gleichgewichtsarten.

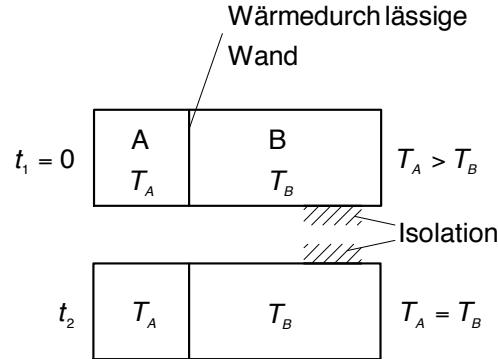
1. Mechanisches Gleichgewicht



Mechanisches Gleichgewicht:

Druckausgleich: $p_A = p_B$

2. Thermisches Gleichgewicht



Thermisches Gleichgewicht:

Temperaturausgleich: $T_A = T_B$

Die Erkenntnisse aus diesem Experiment werden als **Nullter Hauptsatz der Thermo-dynamik** bezeichnet:

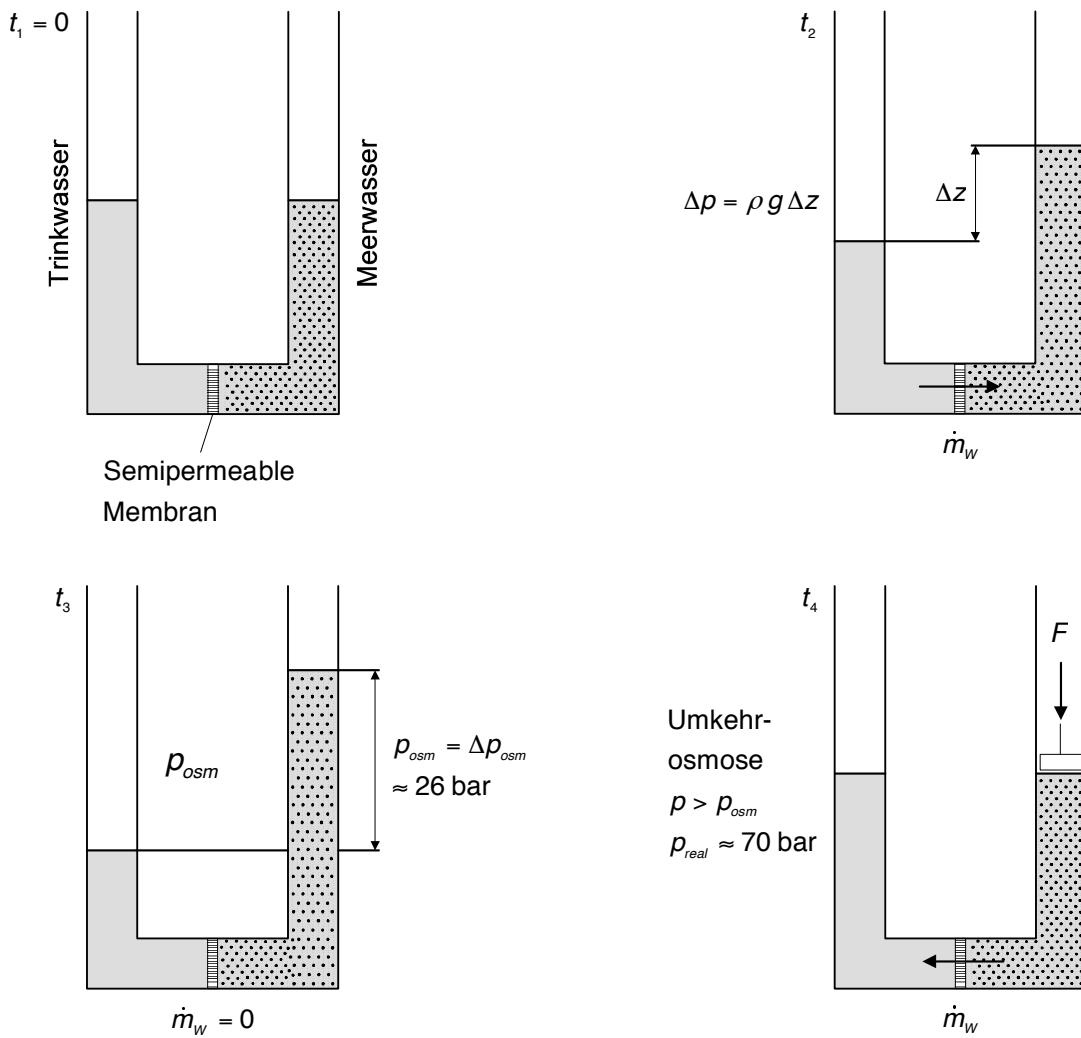
“Systeme in thermischem Gleichgewicht haben dieselbe Temperatur. Kommen zwei Systeme unterschiedlicher Temperatur miteinander in Berührung, so fliesst so lange Wärme vom wärmeren System zum kälteren, bis beide die gleiche Temperatur haben.”

(Physikalische Grundlage der Temperaturmessung mit Berührungsthermometern)

3. Chemisches (stoffliches) Gleichgewicht

Man könnte meinen: Ein System ist im chemischen Gleichgewicht, wenn in seinem Innern und an seinen Grenzen keine Stoffumwandlungen durch chemische Reaktionen stattfinden. Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 2.5: Die Osmose (stofflich-mechanisches Gleichgewicht). Wir betrachten ein "U-Rohr" mit einer semipermeablen Membran (d.h. nur für Wasser durchlässig). Auf einer Seite wird Meerwasser, auf der anderen Seite Süßwasser eingefüllt. Was passiert?



Die Natur will "ausgleichen", d.h. das Meerwasser verdünnen. Es strömt solange Trinkwasser ins Meerwasser, bis der osmotische Druck p_{osm} erreicht ist (Osmose). Drückt man mit einem Druck $p > p_{osm}$ auf die Meerwassersäule, kann das Meerwasser entsalzt werden (Umkehrosmose).

2.4 Prozesse

2.4.1 Prozess und Zustandsänderung

Wir betrachten ein System, das in Wechselwirkung mit seiner Umgebung steht, z.B. das Volumen des Systems wird vergrössert oder Energie in Form von Wärme oder Arbeit wird zu- oder abgeführt.

Folge: Der Zustand des Systems ändert sich; es durchläuft einen Prozess. Bei jedem Prozess ändert sich der Zustand des Systems, es durchläuft eine Zustandsänderung.

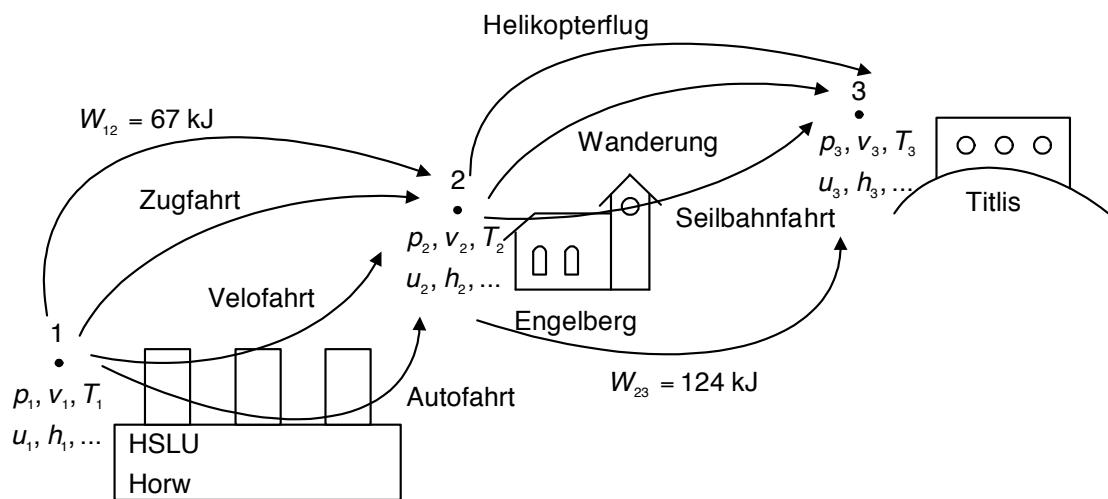
Man unterscheide:

- **Prozess** = zeitlicher Ablauf der Änderung des Zustands (der Weg und das bei der Zustandsänderung angewendete Verfahren)
- **Zustandsänderung** = Ergebnis des Prozesses (bezieht sich auf das System selber)

In anderen Worten:

Eine bestimmte Zustandsänderung eines Systems kann auf verschiedenen Wegen, d.h. mit verschiedenen Prozessen, erreicht werden.

Beispiel 2.6: Eine Analogie zur Unterscheidung von Zustand, Prozess und Zustandsänderung. Wir machen einen Klassenausflug von Horw auf den Titlis via Engelberg:



Stationäre Prozesse: Ein Prozess wird als stationär (steady state) bezeichnet, wenn Zustands- und Prozessgrößen keine zeitlichen Änderungen erfahren.

2.5 Übungen

Übung 2.1: Thermodynamische Systeme.

- a. Ordnen Sie die folgenden Begriffe und finden sie weitere Systeme: *Thermosflasche, Velo-pumpe, Dampfkochtopf, isolierter Wärmeübertrager*.

	adiabat	nicht-adiabat (diabat)
offen		
geschlossen		

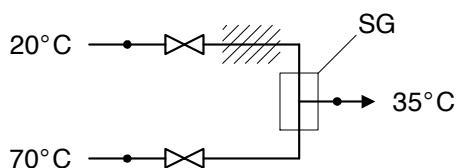
- b. Mit der Systemgrenze eines thermodynamischen Systems kann man verschiedene Eigenschaften zuordnen in Bezug auf Stoff- und Energietransport. Ergänzen Sie die untenstehende Tabelle mit der exakten Bezeichnung des Systems!

Stofftransport durch Systemgrenze möglich	Stofftransport durch Systemgrenze möglich, Wärmefluss durch Systemgrenze nicht möglich	Stofftransport und Wärmefluss durch Systemgrenze nicht möglich

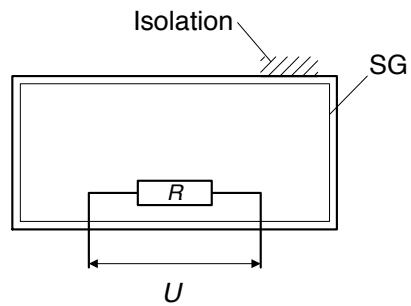
Übung 2.2: System-Klassifikation.

Benennen Sie die nachfolgenden Systeme! (offen/geschlossen, adiabat/nicht-adiabat)

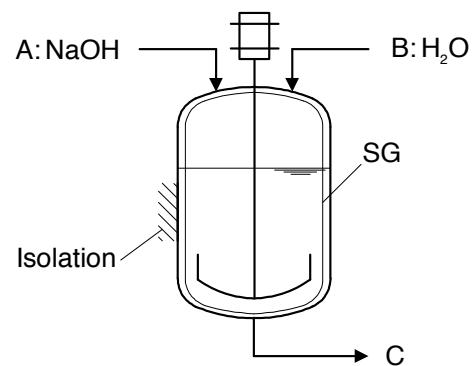
- a. Heisses und kaltes Wasser mischen. Die Rohrleitungen sind isoliert.



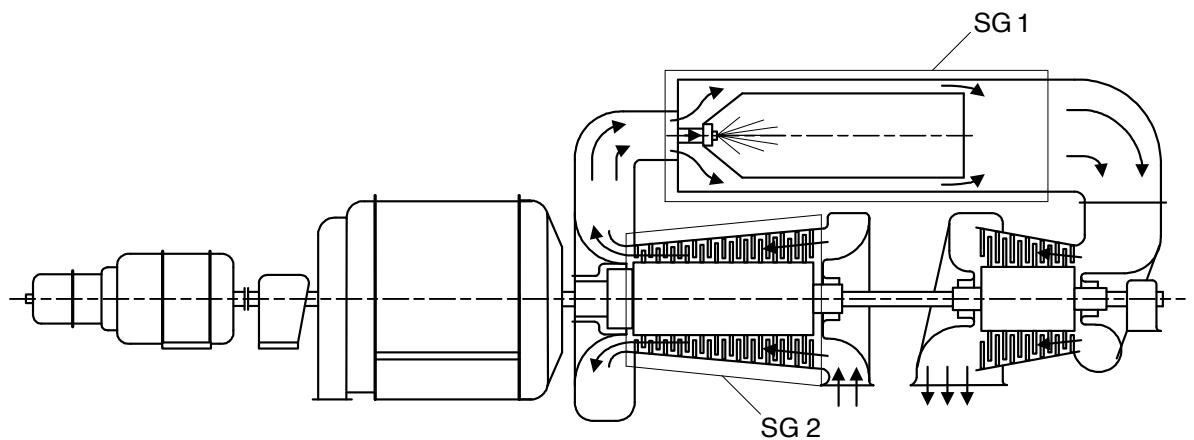
- b. Raum mit einem ohmschen Widerstand aufheizen.



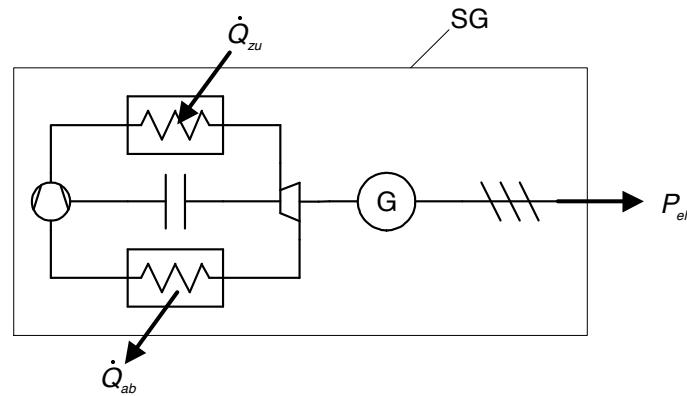
- c. Natronlauge mit Wasser verdünnen ($\vartheta_A = 40^\circ\text{C}$, $\vartheta_B = 20^\circ\text{C}$, $\vartheta_C = 85^\circ\text{C}$).



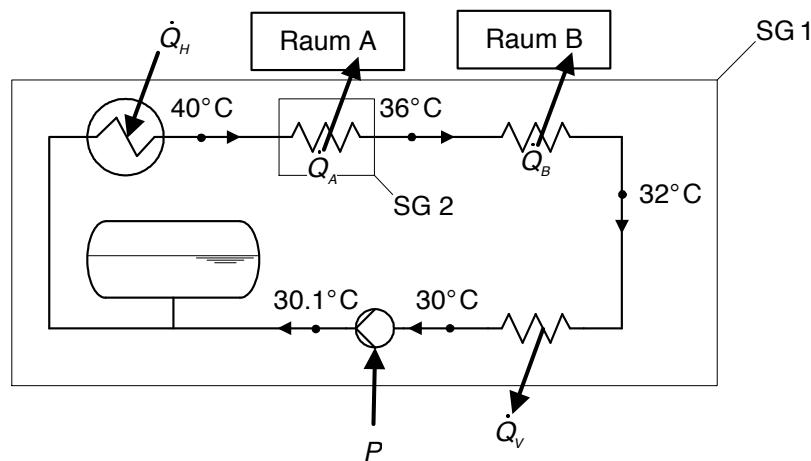
- d. Brennkammer (SG1) und Verdichter (SG2) einer Gasturbinenanlage.



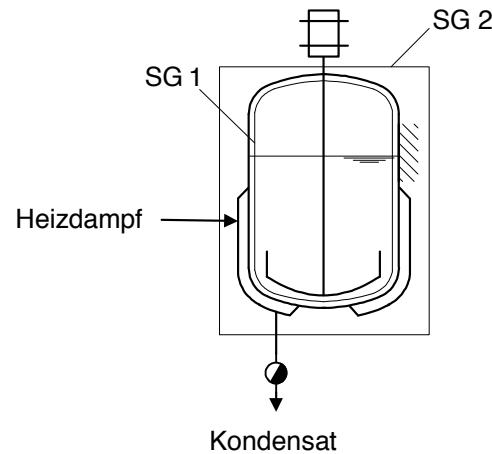
e. Gasturbinenanlage gemäss untenstehendem Ersatzschaltbild.



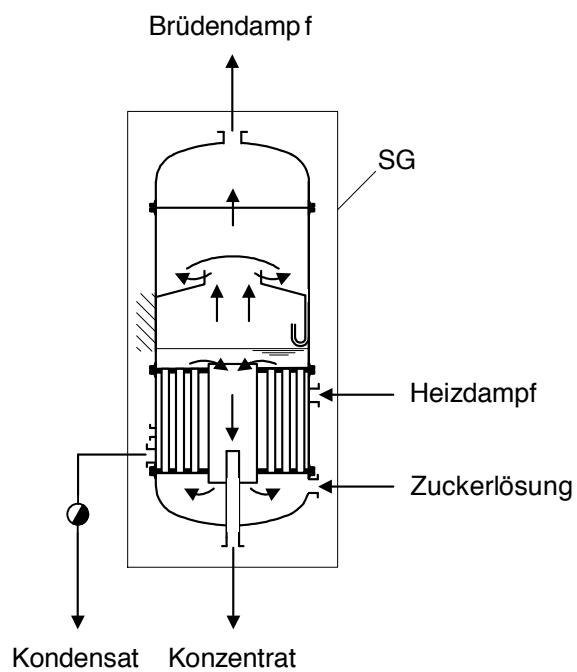
f. Zentrale Heizungsanlage (Gesamtsystem SG1) und Heizkörper A (SG2).



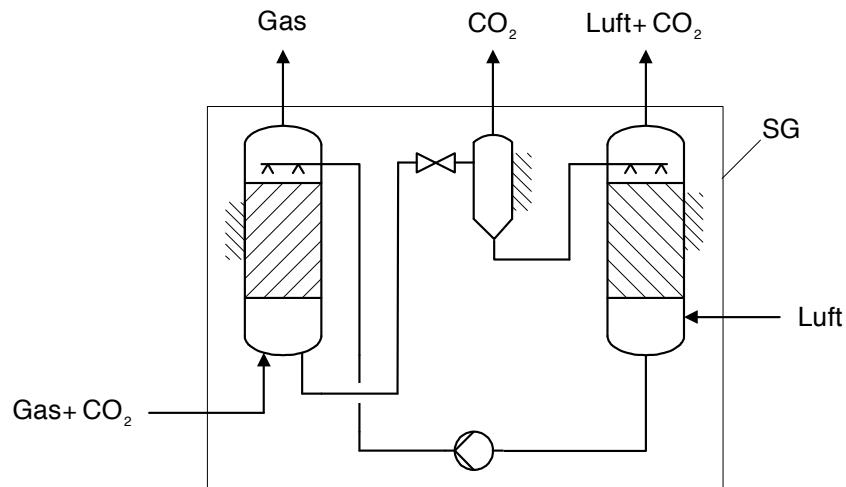
g. Aufheizen einer Lösung in einem isolierten Rührkessel (SG1 und SG2).



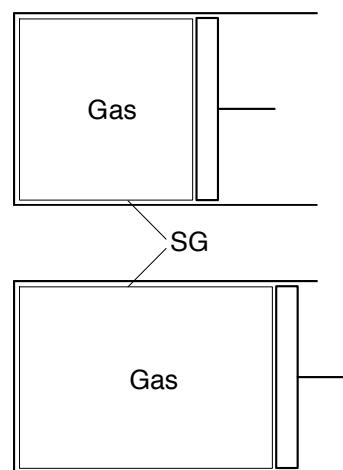
h. Kontinuierliche Eindampfung einer Zuckerlösung in einem sogenannten Robert-Verdampfer. Der Apparat ist isoliert.



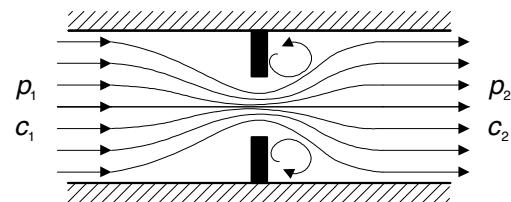
i. Abtrennung von CO₂ aus einem Gasstrom mittels Absorption/Desorption.



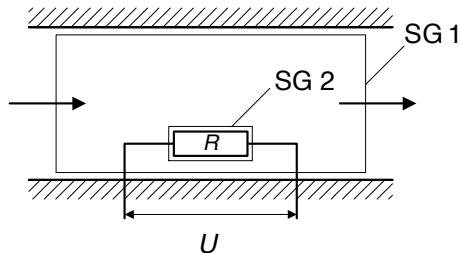
j. Zylinder/Kolben-System mit idealem Gas.



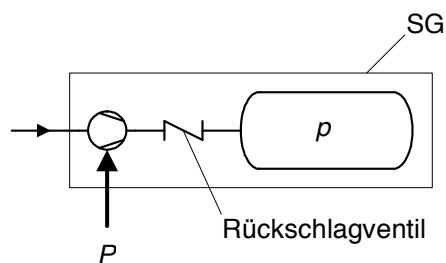
k. Blende zur Drosselung eines Gas- oder Flüssigkeitsstroms.



1. Erwärmung eines Gasstroms mit elektrischem Widerstand (SG1 und SG2).



- m. Luft wird aus der Umgebung in einem Kompressor verdichtet und in einen Speicherbehälter gefördert, bis der Druck von 2 bar(a) auf 12 bar(a) gestiegen ist. Der Kompressor arbeitet adiabat und der Speicherbehälter ist nicht isoliert.



Übung 2.3: Offene Systeme. Durch welche Eigenschaften ist ein offenes System gekennzeichnet?

- a. durch Arbeitsaufnahme oder -abgabe
- b. durch einen Massendurchsatz
- c. durch eine drehende Welle
- d. durch keine dieser Eigenschaften

Übung 2.4: Unterscheidung von thermodynamischen Systemen. Zeichnen Sie zu den zwei vorgegebenen Systemen je ein Beispiel einer Maschine, eines Apparates oder einer Anlage (wenn möglich andere als vorne bereits betrachtet).

- a. Offenes, adiabates System mit starrer Systemgrenze
- b. Geschlossenes System mit beweglicher Systemgrenze

Übung 2.5: Homogene/heterogene Systeme.

- a. Was ist das Unterscheidungsmerkmal zwischen homogenen und heterogenen Systemen? Geben Sie je ein Beispiel eines homogenen und heterogenen Systems an!
- b. In System (Übung 2.2k) wird ein Luftstrom gedrosselt. Luft besteht bekanntlich aus Stickstoff, Sauerstoff, Wasserdampf, Kohlendioxid und Spuren von Edelgasen. Handelt es sich um ein homogenes oder ein heterogenes System? Geben Sie eine kurze Begründung an!

Übung 2.6: Zustand und Prozesse.

- a. Prozessgrößen sind physikalische Größen, die nur während dem Ablauf eines Prozesses existieren.
 - Ist die Wärme eine Zustands- oder eine Prozessgröße?
 - Ist die Temperatur eine Zustands- oder eine Prozessgröße? Begründen Sie!
- b. In der Thermodynamik unterscheiden wir genau zwischen Wärme und Temperatur. Wie lautet der Unterschied zwischen diesen zwei Begriffen und welcher Zusammenhang existiert?
- c. Beschreiben Sie den thermischen Vorgang, wenn Sie eine Flasche Milch in den Kühlschrank stellen und ebenso, wenn Sie die Flasche wieder aus dem Kühlschrank nehmen. Achten Sie auf die richtigen Begriffe!

Übung 2.7: Zustandsgrößen. (Multiple Choice)

- a. Wir betrachten ein homogenes geschlossenes System. Welche Art von Zustandsgrößen ändert bei der Teilung eines solchen Systems ihren Wert?
 - intensive,
 - molare,
 - extensive,
 - spezifische Zustandgrößen oder
 - keine der genannten Zustandsgrößen.
- b. Was sind spezifische Zustandsgrößen?
 - thermische,
 - intensive,
 - extensive,
 - auf die Masse bezogene oder
 - auf die Stoffmenge bezogene Zustandsgrößen.

- c. Welche der folgenden Grössen kann nicht zur Beschreibung der Menge eines Stoffes verwendet werden?
- Stoffmenge
 - Masse
 - Dichte
 - Teilchenzahl
- d. Welche Grösse hat für 1 kmol Wasser und 1 kmol Ethanol (Alkohol) den gleichen Wert?
- Anzahl der Atome
 - Anzahl der Moleküle
 - Molare Masse
 - Volumen
- e. Man unterscheidet in der Thermodynamik zwischen intensiven und extensiven Zustandsgrössen. Nennen Sie den Unterschied zwischen diesen Grössen und je ein Beispiel!

Übung 2.8: Wasserstoffbehälter. In einem Behälter von 100 m^3 sind 49.60 kmol Wasserstoff H_2 ; die Temperatur steht mit jener der Umgebung im “thermischen Gleichgewicht”.

- a. Ist der Zustand dieses Systems “Wasserstoff” eindeutig bestimmt?
- b. Wie gross sind die Dichte und das spezifisches Volumen des Wasserstoffs? ($\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$; $v = 1.0 \text{ m}^3/\text{kg}$)

Übung 2.9: Überdruck in einem Behälter. Ein Behälter ist 30 m hoch mit Natronlauge ($\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$) gefüllt. Darüber ist ein Gaspolster, das einen Druck von 2.5 bar(a) hat. Für welchen Überdruck muss der Behälter dimensioniert werden, wenn der minimale Aussendruck 700 Torr ist? ($p = 4.95 \text{ bar(g)}$)

Übung 2.10: Leistung und spezifische Arbeit einer Pumpe. Eine Pumpe fördert einen Volumenstrom vom Druck p_1 auf den Druck p_2 . Der Volumenstrom \dot{V} und der Massenstrom \dot{m} sind zueinander proportional (analog zu Masse und Volumen) über die Dichte ρ :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\dot{m}}{\dot{V}}$$

Den reziproken Wert der Dichte nennen wir das *spezifische Volumen*:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

Statt der Pumpenleistung P geben wir häufig die *spezifische Arbeit* (technische Arbeit) an, d.h. bezogen auf $\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$:

$$w_t = \frac{P}{\dot{m}}$$

- a. Welche Einheit hat w_t ?
- b. Wie heisst die Formel zur Berechnung der spezifischen Arbeit für eine Pumpe, welche eine Flüssigkeit mit dem spezifischen Volumen v von p_1 auf p_2 fördert?
- c. Stellen Sie w_t qualitativ in einem p,v -Diagramm dar!

Übung 2.11: Kompressor als thermodynamisches System. Mit einem Kompressor können Gase komprimiert werden. Es gibt viele Bauweisen, wir wollen hier einen “Verdrängungsverdichter” oder statischen Verdichter behandeln.

Ihre Aufgabe ist, einen idealen Hubkolben-Verdichter zu skizzieren: Er besteht aus einem Zylinder, darin ist ein Kolben mit Pleuelstange und Kurbelwelle für die Arbeitszufuhr. Das Gas strömt periodisch über eine Saugleitung ein, und über eine Druckleitung aus. Dazu sind jeweils noch Ventile erforderlich; einfache, Sie brauchen keine Steuerung.

- a. Zeichnen Sie eine einfache Prinzipskizze mit Kolben und Kurbel in beliebiger Lage.
- b. Wieviele Kurbelumdrehungen sind ein Arbeitstakt?
- c. Ein Arbeitstakt besteht aus drei Teilprozessen:
 1. Einschieben
 - 2.
 3. Ausschieben
- d. Stellen Sie den Prozess mit den drei Teilprozessen in einem p,V -Diagramm dar. Unser *ideal*er Verdichter habe keinen so genannten Schadraum, d.h. bei jedem Arbeitstakt werde das gesamte Gas vollständig ausgestossen.

Kapitel 3

Stoffe und ihre Eigenschaften

3.1 Einleitung

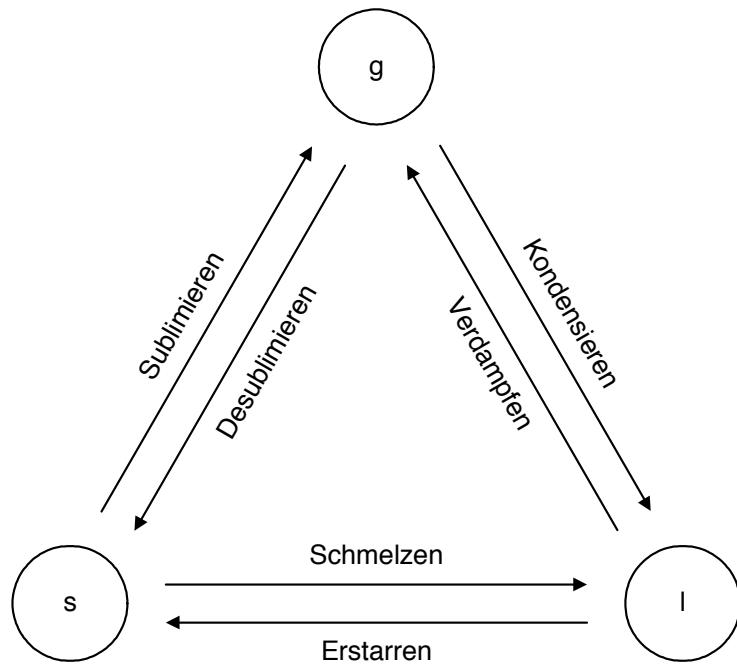
Damit man die allgemeinen Beziehungen der Thermodynamik in der Praxis anwenden kann, muss man die physikalischen Eigenschaften der Stoffe (Arbeitsmittel) kennen. Diese werden durch die Zustandsgrößen beschrieben. Nachfolgend werden die Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen erläutert. Wir beschränken uns vorerst auf die **thermischen Zustandsgrößen**.

Die in der technischen Thermodynamik betrachteten Stoffe existieren in den drei Aggregatzuständen:

- fest ($s = \text{solid}$): Stein, Stahl, Eis
- flüssig ($l = \text{liquid}$): Wasser, Stahlschmelze, Säuren
- gasförmig ($g = \text{gas}$): Luft, Edelgase, Dämpfe

Bemerkung: Wir verwenden die Indizes s, l und g, damit die Bezeichnungen eindeutig sind (f könnte ja für fest oder flüssig stehen).

Umwandlung zwischen den Aggregatzuständen



Was ist die “Ursache” für die Umwandlung (bei einem bestimmten Druck)?

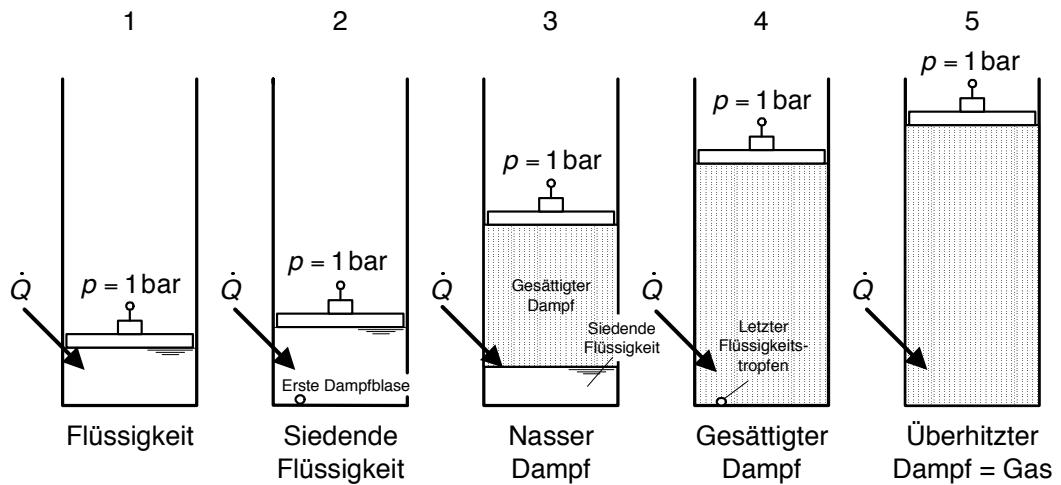
Wärmezufuhr oder -abfuhr!

Die Umwandlung zwischen den Aggregatzuständen folgt einem Stoffgesetz. So verdampft beispielsweise eine reine Flüssigkeit bei einem bestimmten Druck bei einer bestimmten Temperatur. Wir werden diesen Zusammenhang Dampfdruckkurve nennen.

3.2 Der isobare Verdampfungsvorgang

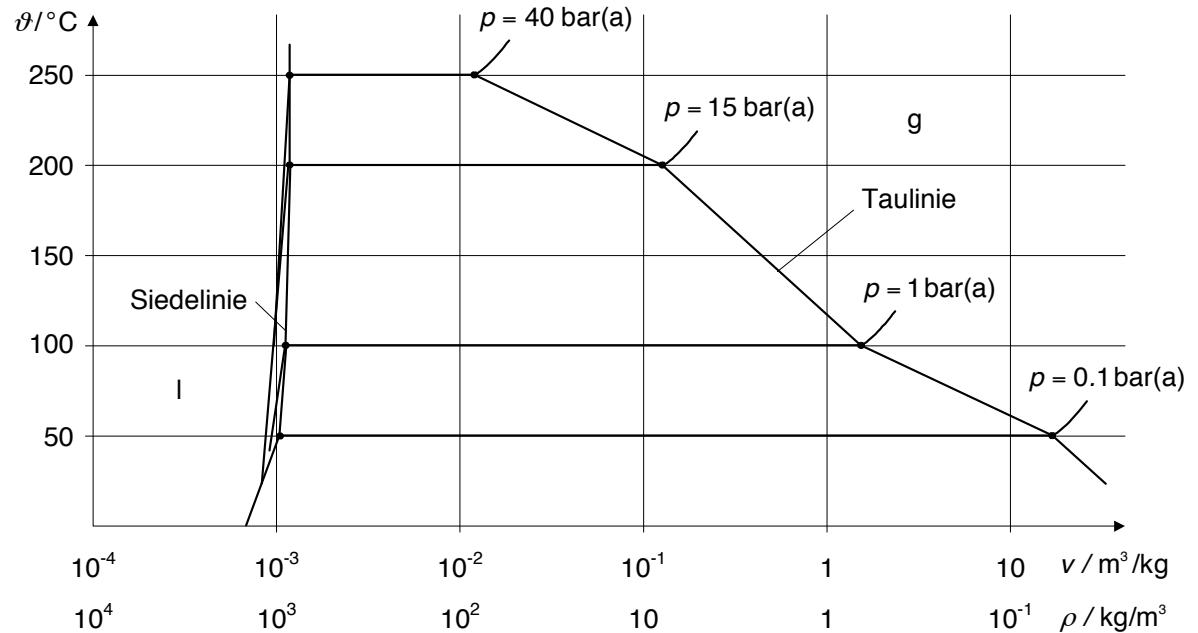
Wir betrachten den isobaren Verdampfungsvorgang am Beispiel von Wasser im T,v -, p,v - und p,T -Diagramm (mit Hilfe der Wasserdampftafeln).

In einem Zylinder wird bei Umgebungsbedingungen (1 bar(a), 20°C) 1 kg Wasser eingefüllt. Der massenlose Kolben, der auf das Wasser gesetzt wird, kann sich reibungsfrei bewegen. Nun führen wir Wärme zu. Was passiert?

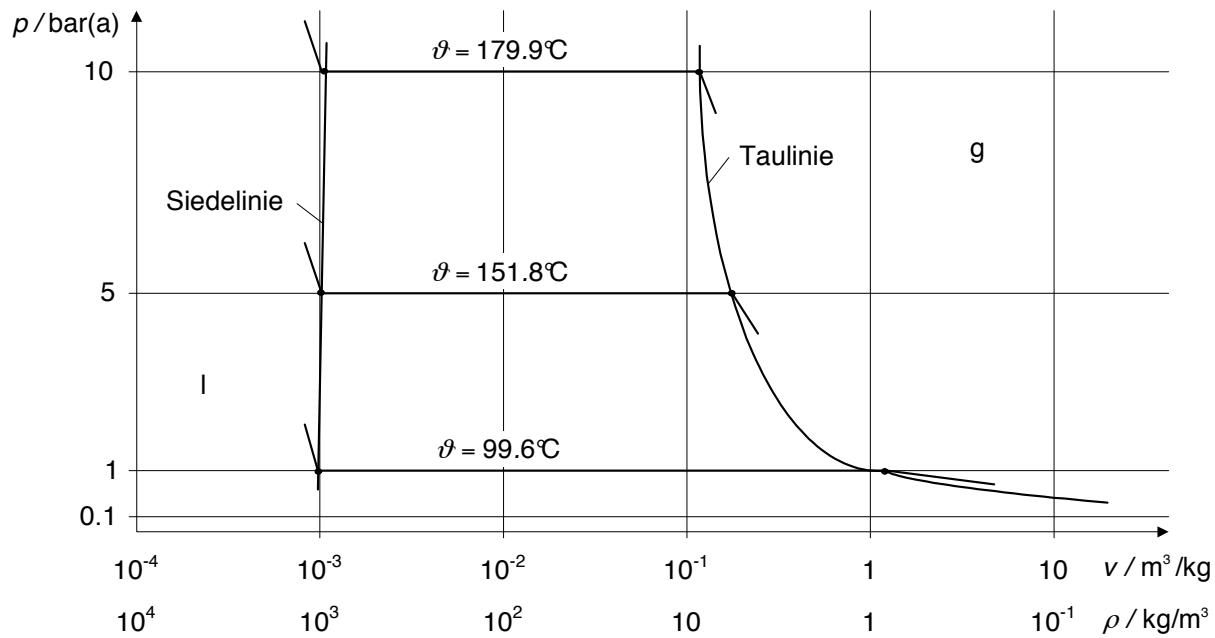


$p =$	1	1	1	1	1	bar(a)
$\vartheta =$	20	99.61	99.61	99.61	150	°C
$\rho =$	1000	958.8	-	0.59	0.53	kg/m^3
$v =$	0.001	0.00104	-	1.694	1.937	m^3/kg

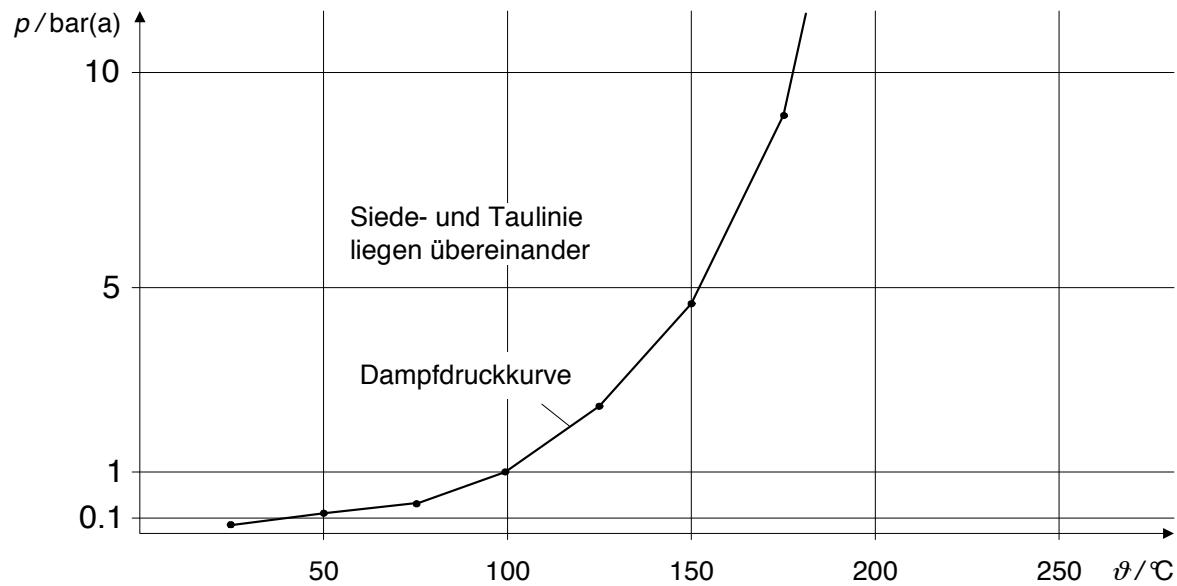
Der isobare Verdampfungsvorgang im ϑ, v -Diagramm



Der isobare Verdampfungsvorgang im p, v -Diagramm



Der isobare Verdampfungsvorgang im p, ϑ -Diagramm



Wasserdampftafel (v' : Siedelinie, v'' : Taulinie)

p [bar(a)]	t [°C]	v' [m³/kg]	v'' [m³/kg]
0,01	6,97	0,001000	129,183
0,02	17,50	0,001001	66,990
0,03	24,08	0,001003	45,655
0,04	28,96	0,001004	34,792
0,05	32,88	0,001005	28,186
0,06	36,16	0,001006	23,734
0,07	39,00	0,001007	20,525
0,08	41,51	0,001008	18,099
0,09	43,76	0,001009	16,200
0,10	45,81	0,001010	14,671
0,20	60,06	0,001017	7,648
0,30	69,10	0,001022	5,229
0,40	75,86	0,001026	3,993
0,50	81,32	0,001030	3,240
0,60	85,93	0,001033	2,732
0,70	89,93	0,001036	2,365
0,80	93,49	0,001038	2,087
0,90	96,69	0,001041	1,869
1,00	99,61	0,001043	1,694
1,10	102,29	0,001045	1,550
1,20	104,78	0,001047	1,428
1,30	107,11	0,001049	1,325
1,40	109,29	0,001051	1,237
1,50	111,35	0,001053	1,1594
2,00	120,21	0,001061	0,8857
3,00	133,53	0,001073	0,6058
4,00	143,61	0,001084	0,4624
5,00	151,84	0,001093	0,3748
6,00	158,83	0,001101	0,3156
8,00	170,41	0,001115	0,240328
10	179,89	0,001127	0,194349
15	198,30	0,001154	0,131702
20	212,38	0,001177	0,099581
30	233,86	0,001217	0,066664
40	250,36	0,001253	0,049777
50	263,94	0,001286	0,039446
60	275,59	0,001319	0,032449
70	285,83	0,001352	0,027380
80	295,01	0,001385	0,023528
90	303,35	0,001418	0,020493
100	311,00	0,001453	0,018034
110	318,08	0,001489	0,015994
120	324,68	0,001526	0,014269
130	330,86	0,001566	0,012785
140	336,67	0,001610	0,011489
150	342,16	0,001657	0,010340
160	347,36	0,001710	0,009308
170	352,29	0,001769	0,008370
180	357,00	0,001839	0,007499
190	361,48	0,001925	0,006673
200	365,76	0,002039	0,005859
210	369,83	0,002212	0,004989
220	373,71	0,002750	0,003609
220,64	373,95		0,003106

Wasser

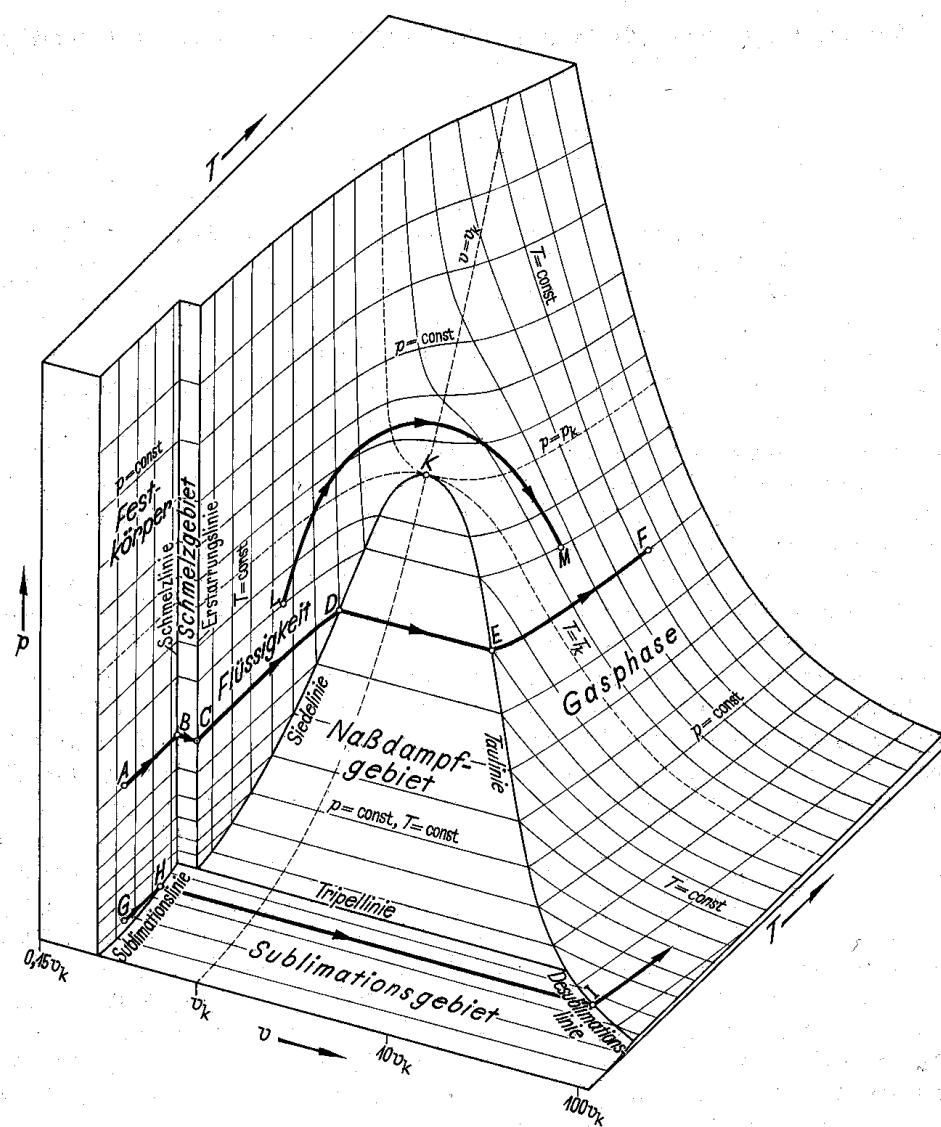
3.3 p,v,T -Fläche eines reinen Stoffes

Der Zustand eines reinen Stoffes wird durch die thermischen Zustandgrößen Druck p , spezifisches Volumen v und die Temperatur T festgelegt. Diese sind durch die Funktion

$$F(p, v, T) = 0$$

verknüpft. Man nennt diese Funktion **Zustandsgleichung**.

In der untenstehenden Abbildung ist die p,v,T -Fläche eines reinen Stoffes dargestellt. Man beachte, dass das spezifische Volumen v logarithmisch aufgetragen ist.



Auf der p,v,T -Fläche kann man verscheidene Gebiete unterscheiden:

- **Einphasengebiete:** Festkörper (solid = s), Flüssigkeit (liquid = l) und Gasphase (gas = g)
- **Schmelzgebiet:** Übergangsbereich Festkörper \rightleftharpoons Flüssigkeit; wird durch die *Schmelzlinie* und die *Erstarrungslinie* begrenzt. Die zum Schmelzen eines Stoffes benötigte Energie wird *Schmelzenthalpie* Δh_S genannt (bei $p = \text{konst.}$ und $T = \text{konst.}$). Hier einige Beispiele bei $p = 1.01325 \text{ bar(a)}$:

Stoff		Schmelztemp. ϑ [°C]	Schmelzenthalpie Δh_S [kJ/kg]
Aluminium	Al	658	356
Eisen	Fe	1530	207
Kupfer	Cu	1083	209
Wasser	H ₂ O	0.0	333
Ethanol	C ₂ H ₆ O	-114.1	107
Ammoniak	NH ₃	-77.8	339

- **Nassdampfgebiet:** Übergangsbereich Flüssig \rightleftharpoons Gas; wird durch die *Siedeline* und *Taulinie* begrenzt. Die zum Verdampfen eines Stoffes benötigte Energie wird *Verdampfungsenthalpie* Δh_V genannt (bei $p = \text{konst.}$ und $T = \text{konst.}$).

Stoff		Druck p [bar(a)]	Siedetemperatur ϑ [°C]	Verd.enth. Δh_V [kJ/kg]
Wasser	H ₂ O	0.1	45.8	2393
		1	99.6	2258
		10	179.9	2014
		100	310.0	1320
Ethanol	C ₂ H ₆ O	1.013	78.3	839
Ammoniak	NH ₃	1.013	-33.4	1369

- **Sublimationsgebiet:** Übergangsbereich Festkörper \rightleftharpoons Gas; wird begrenzt durch die *Sublimationslinie* und *Desublimationslinie*. Die zum Sublimieren benötigte Energie wird *Sublimationsenthalpie* genannt (bei $p = \text{konst.}$ und $T = \text{konst.}$). Sie ist gleich der Summe von Schmelz- und Verdampfungsenthalpie.

Stoff		Druck p [bar(a)]	Subl.temp. ϑ [°C]	Subl.enth. [kJ/kg]
Wasser	H ₂ O	0.004	-5	3168

- **Trielpunkt:** In diesem Punkt sind die feste, flüssige und gasförmige Phase eines Stoffes miteinander im Gleichgewicht.

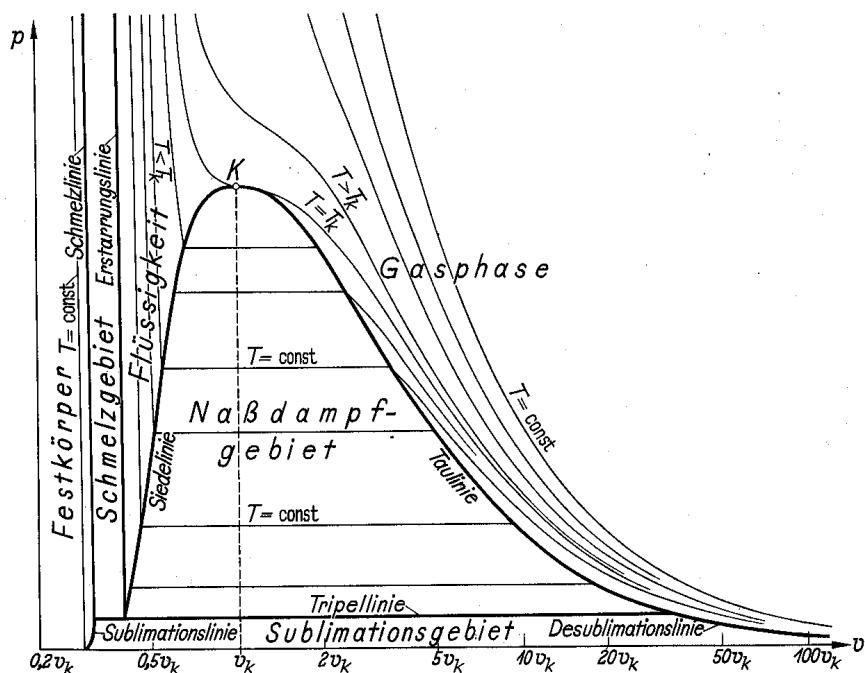
Stoff		Druck p_{Tr} [bar(a)]	spez. Volumen v_{Tr} [m^3/kg]	Temperatur ϑ_{Tr} [°C]
Wasser	H_2O	$6 \cdot 10^{-3}$	0.0010	0.01
Ethanol	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	$4.3 \cdot 10^{-9}$		-123.0
Ammoniak	NH_3	$6 \cdot 10^{-2}$	0.0012	-77.7

- **Kritischer Punkt:** In diesem Punkt vereinigen sich die Siedeline und Taulinie. Über diesem Punkt gibt es keinen "sichtbaren" Übergang zwischen Flüssigphase und Gasphase.

Stoff		Druck p_{Kr} [bar(a)]	spez. Volumen v_{Kr} [m^3/kg]	Temperatur ϑ_{Kr} [°C]
Wasser	H_2O	220.6	0.0031	374.0
Ethanol	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	61.5	0.0036	24.1
Ammoniak	NH_3	113.4	0.0044	132.3

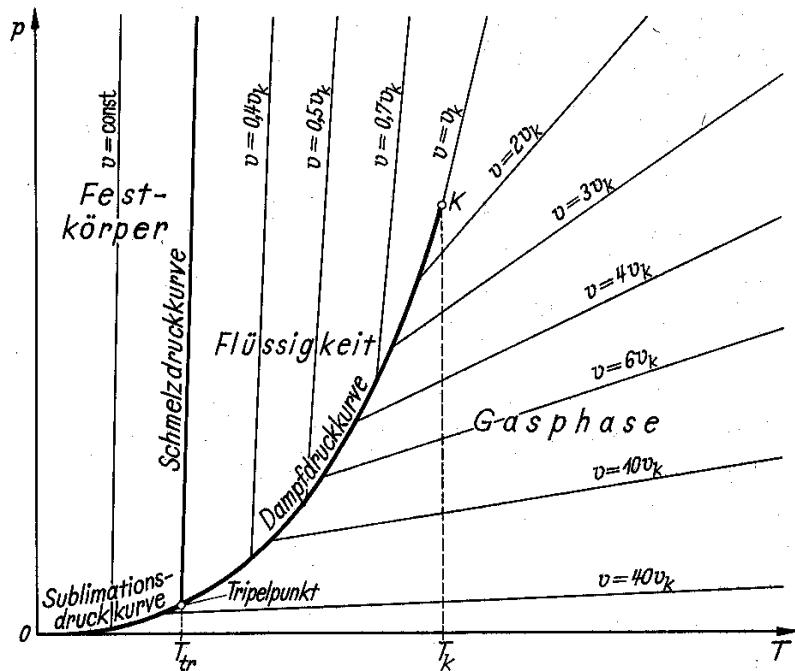
p,v -Projektion der Zustandsfläche

p,v -Diagramm mit Isothermen $T = \text{konst.}$ und den Grenzkurven der Zweiphasengebiete:



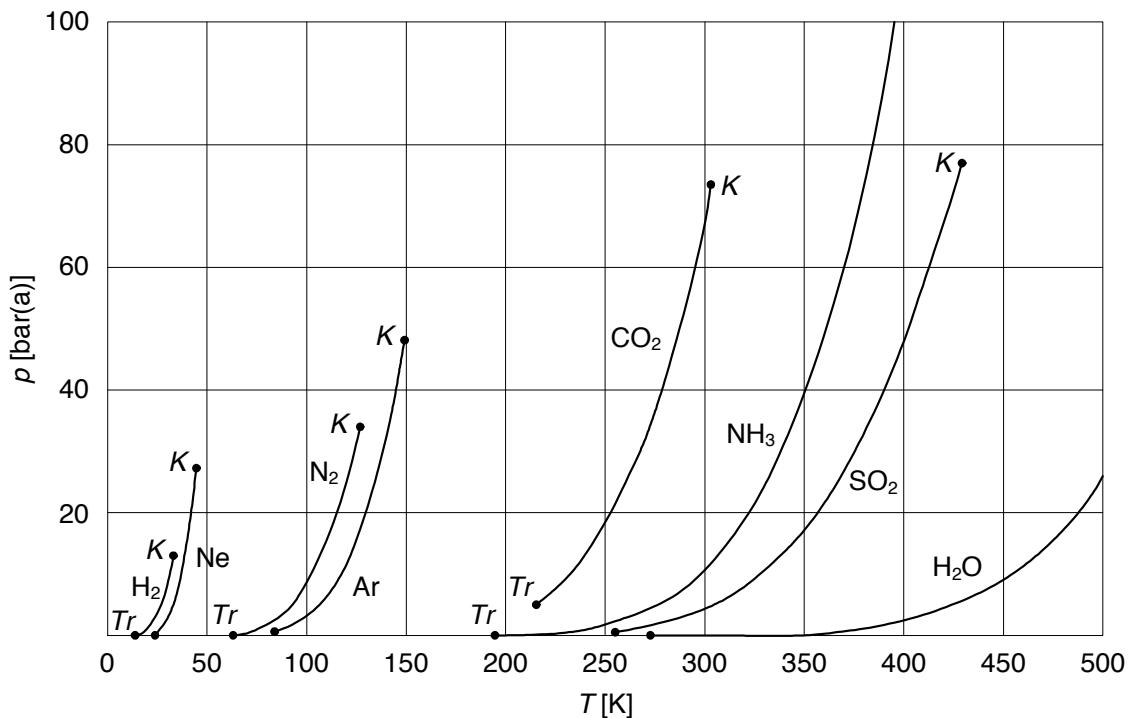
p,T -Projektion der Zustandsfläche

p,T -Diagramm mit Isochoren $v = \text{konst.}$ und den drei Grenzkurven der Phasen:



3.4 Dampfdruckkurven reiner Stoffe

Bereits im einführenden Thermodynamik-Quiz haben wir gesehen, dass für jeden *reinen* Stoff ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Siedetemperatur und Dampfdruck besteht. Diesen Zusammenhang nennen wir **Dampfdruckkurve**.



Die Dampfdruckkurve hat bei vielen technischen Anwendungen eine herausragende Bedeutung! Ohne die Kenntnis der Dampfdruckkurve können wir Prozesse wie Dampfkraftwerke, Wärmepumpen, Kälteanlagen, Destillation ("Schnapsbrennen") usw. nicht verstehen.

3.5 Thermische Zustandsgleichung für reine Stoffe

Mathematische Modellierung der Stoffeigenschaften: Bei allen reinen Stoffen besteht zwischen Druck p , spezifischem Volumen v und Temperatur T ein mathematischer Zusammenhang

$$F(p, v, T) = 0$$

Diese mathematische Verknüpfung von p , v und T heisst **thermische Zustandsgleichung**. Aus der Gleichung $F(p, v, T) = 0$ folgt:

$$p = p(v, T)$$

$$v = v(p, T)$$

$$T = T(p, v)$$

Durch zwei thermische Zustandsgrößen ist die dritte Grösse festgelegt.

Wir haben vorne gesehen: Die Zustandsfläche ist eine sehr komplizierte Fläche; sie kann nicht durch eine einzige mathematische Funktion $F(p, v, T) = 0$ beschrieben werden. Wir können jedoch die einzelnen Einphasengebiete mit einfachen Beziehungen genügend genau beschreiben.

3.6 Das ideale Gas

Zustandsänderungen mit idealen Gasen - Definitionen:



Was ist die Ursache für die Zustandsänderung?

- Wärmezufuhr oder -abfuhr
- Arbeitszufuhr oder -abfuhr

⇒ während des Prozesses

Index α oder 1: Anfangszustand, Index ω oder 2: Endzustand

$m_1 = m_2 = m$: geschlossenes System

Klassifikation der Zustandsänderungen:

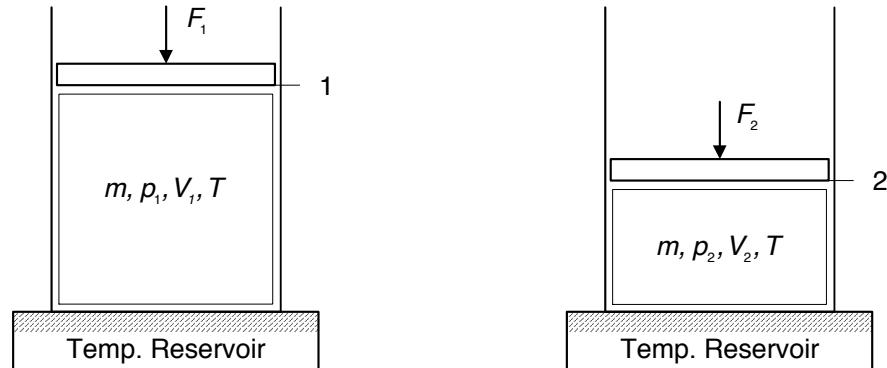
Allgemeine Zustandsänderungen: p, v, T ändern

Spezielle Zustandsänderungen:

- **Isotherme** Zustandsänderung: $T = \text{konst.}, dT = 0$
- **Isobare** Zustandsänderung: $p = \text{konst.}, dp = 0$
- **Isochore** Zustandsänderung: $V = \text{konst.}, dV = 0$
- **Isentrope** Zustandsänderung: $S = \text{konst.}, dS = 0$
- **Polytropie** Zustandsänderung: “allgemeine Zustandsänderung”

S bezeichnet die Entropie; wir werden sie bei der Behandlung des 2. HS kennenlernen.

3.6.1 Isotherme Zustandsänderung $T = \text{konst.}$



Experiment: Gas in Zylinder, Temperatur konstant gehalten.

Resultat $V_2 = \frac{1}{2} V_1 \rightarrow p_2 = 2 p_1$

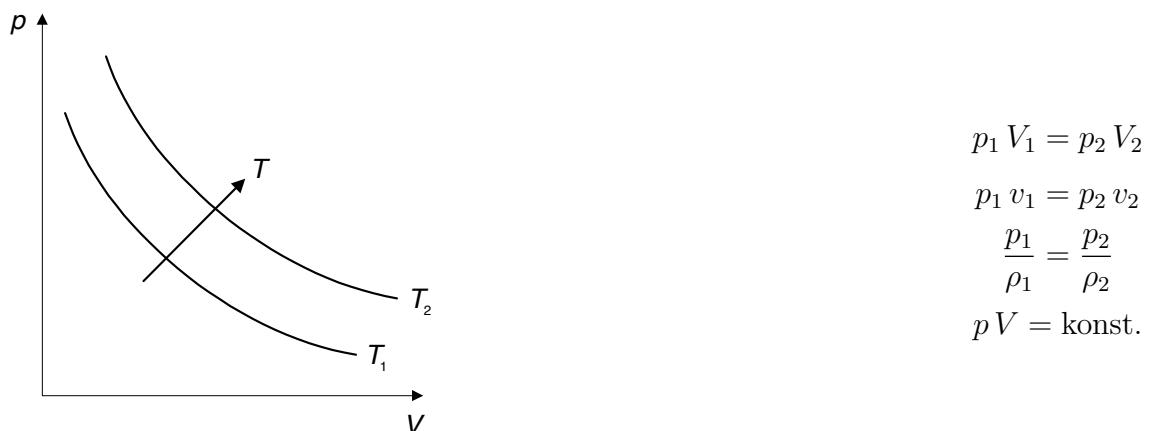
$$V_2 = \frac{1}{3} V_1 \rightarrow p_2 = 3 p_1$$

$$V_2 = 2 V_1 \rightarrow p_2 = \frac{1}{2} p_1$$

p und V reziprok

Gesetz von Boyle-Mariotte (ca. 1670)

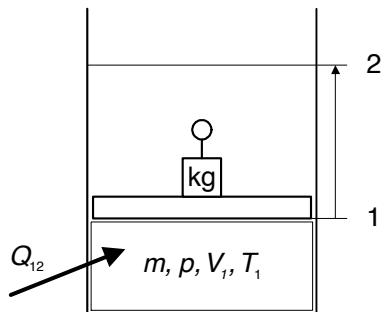
Temperatur $T = \text{konst.}$



Es gilt: $V \rightarrow 0 \Rightarrow p \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow \infty$

Die Isothermen sind im p, v -Diagramm eine Hyperbelschar mit T als Parameter.

3.6.2 Isobare Zustandsänderung $p = \text{konst.}$



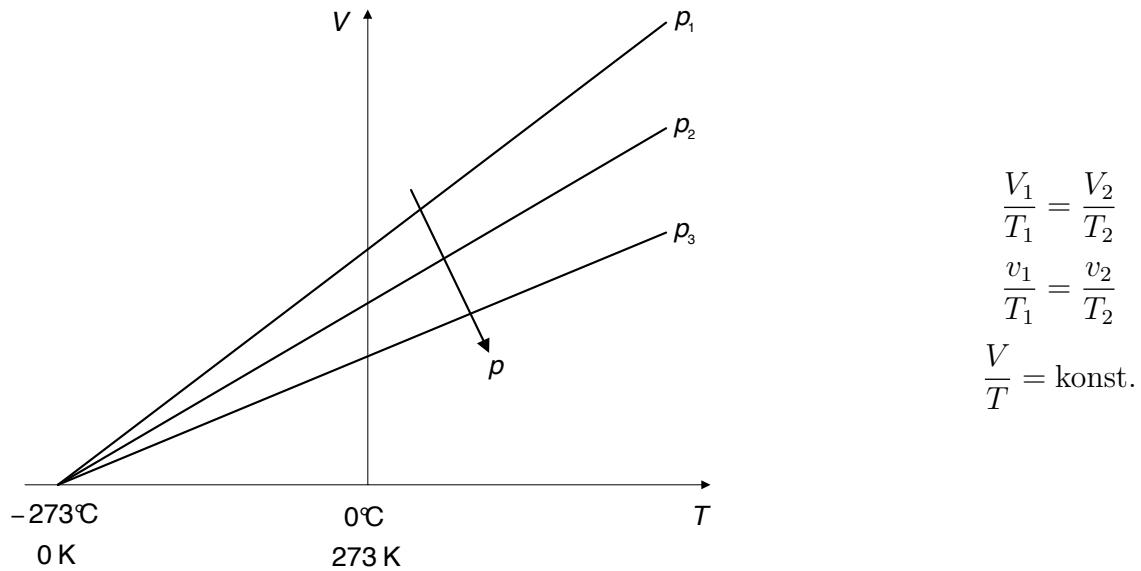
Experiment: Gas in Zylinder, Kolben mit konstanter Kraft belastet, d.h. $p = \text{konst.}$

Resultat $V_2 > V_1$ wegen Wärmezufuhr

$V_2 < V_1$ wegen Wärmeabfuhr

Gesetz von Gay-Lussac (ca. 1800)

Druck $p = \text{konst.}$: V steigt linear mit T an: $\frac{\Delta V}{\Delta T} = \text{konst.}$



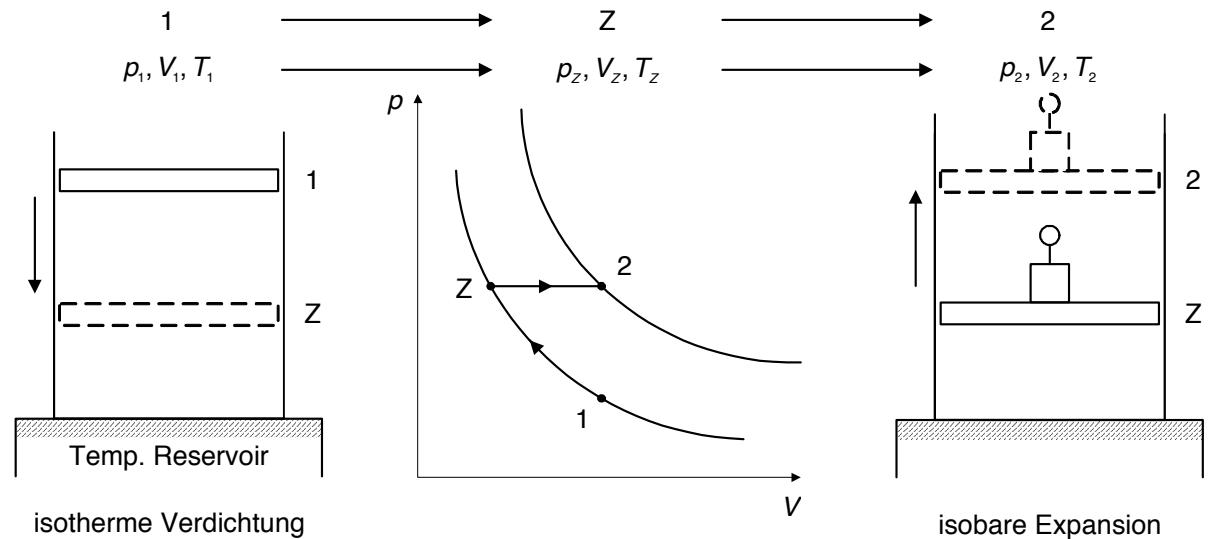
Die Isobaren sind im V, T -Diagramm eine Geradenschar mit p als Parameter.

3.6.3 Allgemeine Zustandsänderung

Zustand 1: $p_1, V_1, T_1 \rightarrow$ Zustand 2: p_2, V_2, T_2

Wie lautet der mathematische Zusammenhang zwischen p_1, V_1, T_1 und p_2, V_2, T_2 ?

Herleitung: Die allgemeine Zustandsänderung setzt sich aus zwei speziellen Zustandsänderungen zusammen:



$$T_1 = T_z$$

$$p_z = p_2$$

$$1 \rightarrow z$$

$$\text{Zwischenzustand}$$

$$z \rightarrow 2$$

$$T = \text{konst.}$$

$$p = \text{konst.}$$

$$p_1 V_1 = p_z V_z$$

$$\frac{V_z}{T_z} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\frac{p_1 V_1}{p_z} = V_z = \frac{V_2 T_z}{T_2}$$

$$\frac{p_1 V_1}{p_2} = V_z = \frac{V_2 T_1}{T_2}$$

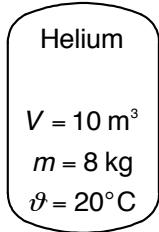
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\rightarrow \frac{pV}{T} = \text{konst.}$$

3.6.4 Die thermische Zustandsgleichung der idealen Gase

In einem Behälter mit dem Volumen 10 m^3 befinden sich 8 kg Helium; die Temperatur beträgt 20°C .

Vermutung:



$$p \sim T$$

$$p \sim \frac{1}{V}$$

$$p \sim m$$

$$p \sim \text{Stoffart}$$

Die experimentelle Überprüfung ergibt:

$$p = \frac{m T R_i}{V}$$

R_i = individuelle Gaskonstante [J/kg K]

Schreibweisen für die thermische Zustandsgleichung der idealen Gase:

$$p V = m R_i T$$

$$p V = n R T$$

R : universelle Gaskonstante

$$R = 8.314 \text{ J/mol K}$$

$$R_i = \frac{R}{M_i} \rightarrow M_i : \text{Molare Masse des Gases}$$

$$p V = m R_i T$$

$$[\text{N/m}^2 \text{ m}^3] = [\text{Nm}] = [\text{J}]$$

$$p \dot{V} = \dot{m} R_i T \quad [\text{W}]$$

Bemerkung: Die thermische Zustandsgleichung der idealen Gase wird nachfolgend kurz "Gasgleichung" genannt.

3.7 Reale Gase

Was ist der Unterschied zwischen “Gas” und “Dampf”?

Gas und Dampf bezeichnen dieselbe Phase ($\text{gas} = \text{g}$). Von *Dampf* spricht man, wenn es sich um einen Zustand nahe oder auf der Taulinie bzw. Desublimationslinie handelt. Ist der Zustand genügend weit weg von diesen Phasengrenzen, spricht man von einem *Gas*. Für Gase gilt meistens mit ausreichender Genauigkeit die thermische Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$p v = R_i T$$

Je niedriger der Druck und je höher die Temperatur, umso genauer gilt diese Gleichung.

Wie beschreibt man reale Gase?

In manchen Fällen reicht die Genauigkeit der Zustandsgleichung für ideale Gase nicht aus. Ein Mass für die Abweichung von diesem “idealen Verhalten” ist der Realgasfaktor:

$$Z = \frac{p v}{R_i T}$$

Der Realgasfaktor kann Werte grösser oder kleiner 1 annehmen.

Thermische Zustandsgleichung nach Van der Waals

Van der Waals hat die Gasgleichung erweitert, um das reale Verhalten von Gasen (bzw. Fluiden) genauer beschreiben zu können:

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = R_i T$$

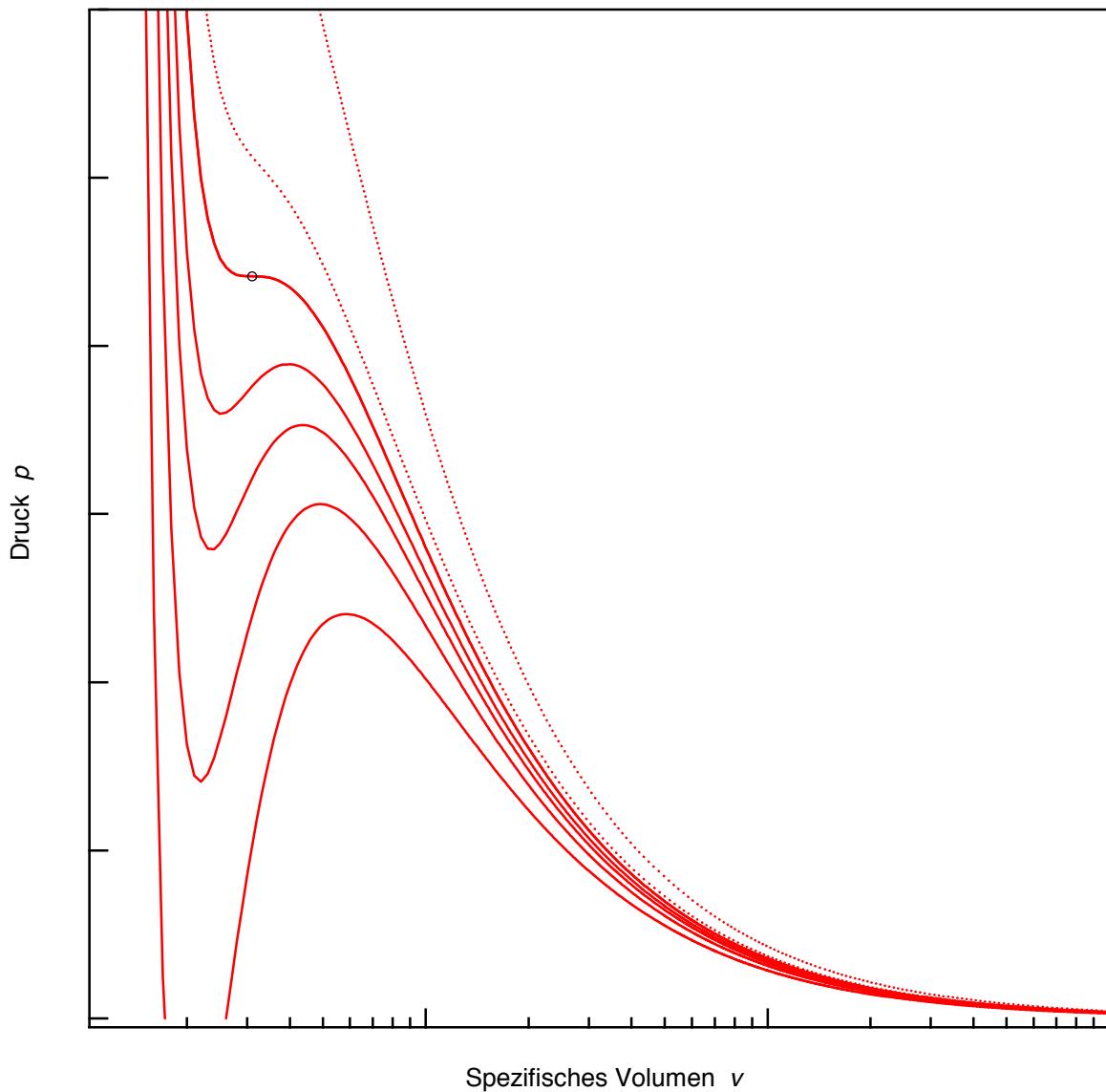
oder

$$p = \frac{R_i T}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

Mit den zwei zusätzlichen Termen wird die Anziehungskraft zwischen den Molekülen (a) und das Eigenvolumen (b) berücksichtigt. Die Konstanten a , b und R_i können wie folgt aus den kritischen Daten berechnet werden:

$$a = 3 p_{Kr} v_{Kr}^2, \quad b = \frac{v_{Kr}}{3}, \quad R_i = \frac{8 p_{Kr} v_{Kr}}{3 T_{Kr}}$$

Für Wasser ergeben sich folgende Isothermen im p,v -Diagramm ($a = 638.401 \text{ N m}^4/\text{kg}^2$, $b = 0.001035 \text{ m}^3/\text{kg}$, $R_i = 282.414 \text{ J/kg K}$).



Virialgleichungen

Neben der Van der Waals-Gleichung gibt es verschiedene weitere Gleichungen zur Beschreibung des Verhaltens von realen Gasen, z.B. mit Virialgleichungen:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{B(T)}{v^2} + \frac{C(T)}{v^3} + \frac{D(T)}{v^4} + \dots$$

Mit der Anzahl der Korrekturglieder steigt die Genauigkeit der Gleichung.

Experiment: Isotherme eines realen Gases (Fluides)

Das Experiment erlaubt eine quantitative und demonstrative Untersuchung der wichtigsten Erscheinungen die bei realen Gasen auftreten. Die thermodynamischen Größen Druck p , Temperatur T und Volumen V lassen sich vorgeben. Es ermöglicht insbesondere die experimentelle Bestimmung der Isothermen.

In einer hochdruckfesten Glaskapillare wird das zu untersuchende Gas aus einer mit Quecksilber gefüllten Druckkammer durch hydraulische Druckübertragung komprimiert. Mit Hilfe eines thermostatisierten Wasserkreislaufs wird die Messkapillare auf konstanter Temperatur gehalten.



Das Gas wird allmählich isotherm komprimiert. Ab dem Sättigungspunkt (Sättigungsdampfdruck) bleibt der Druck bei weiterer Volumenverringerung konstant. Im Nassdampfgebiet ist bei zunehmender Kompression eine zunehmende Verflüssigung des Gases zu beobachten. Die Phasenübergänge zwischen Gas und Flüssigkeit sind aufgrund der transparenten Messanordnung sichtbar. Beim Erreichen der Siedelinie ist das Gas vollständig verflüssigt. Bei weiterer Volumenverringerung steigt der Druck, wegen der Inkompressibilität von Flüssigkeiten, stark an.

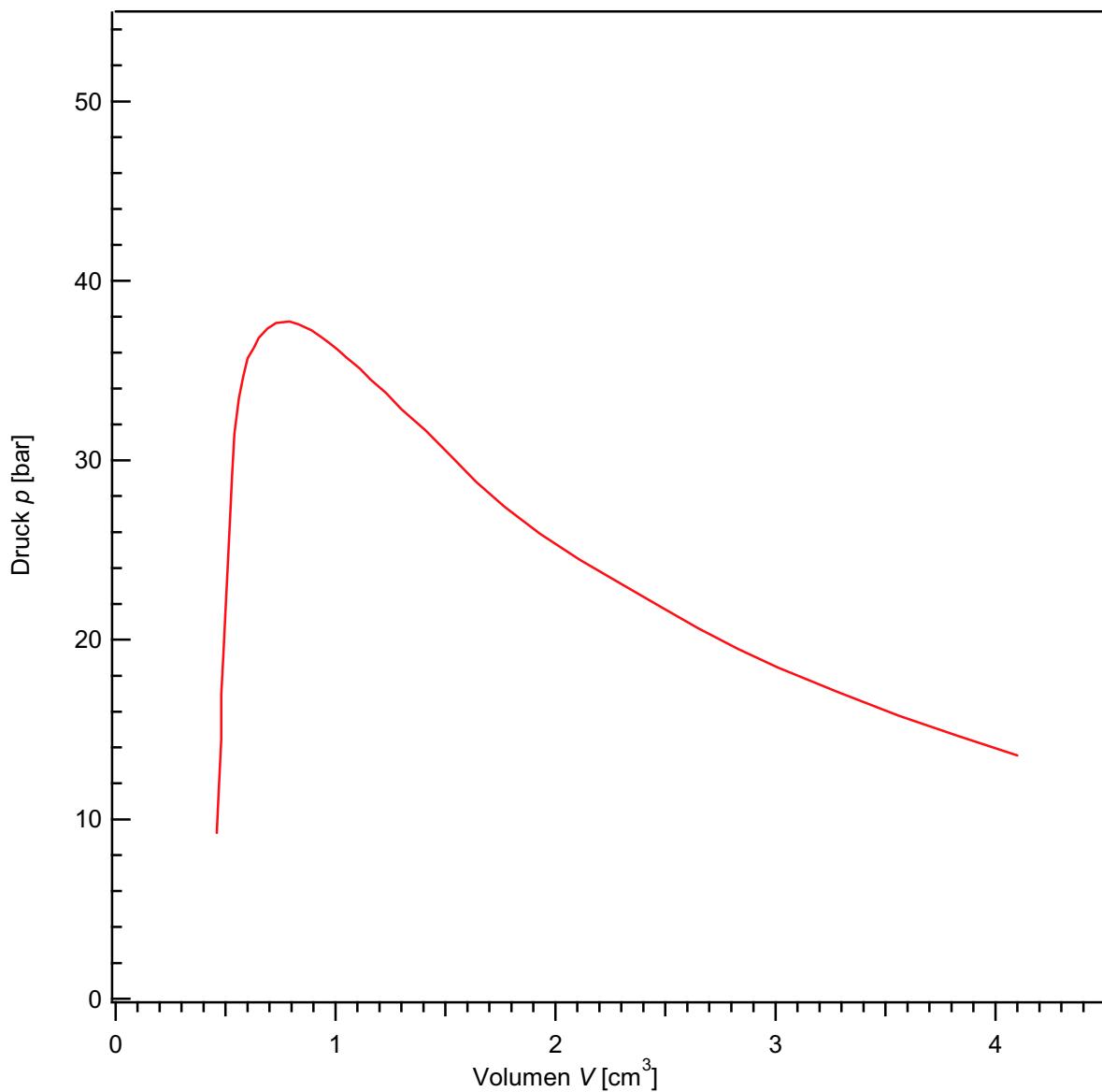
Zur Volumenbestimmung ist die Kapillare mit einer Skala versehen. Der korrespondierende Druck wird am Manometer abgelesen, die Temperatur an dem im Plexiglaszyylinder befindlichen Thermometer.

Das Experiment wird mit dem Gas Schwefelhexafluorid SF_6 durchgeführt. SF_6 ist ein farbloses Gas. Aus der Literatur können folgende Angaben zu Schwefelhexafluorid entnommen werden:

Molare Masse	M	146.06 kg/kmol
Kritische Temperatur	ϑ_{K_r}	45.573°C
Kritischer Druck	p_{K_r}	37.55 bar(a)
Kritisches Volumen	v_{K_r}	0.00134 m ³ /kg

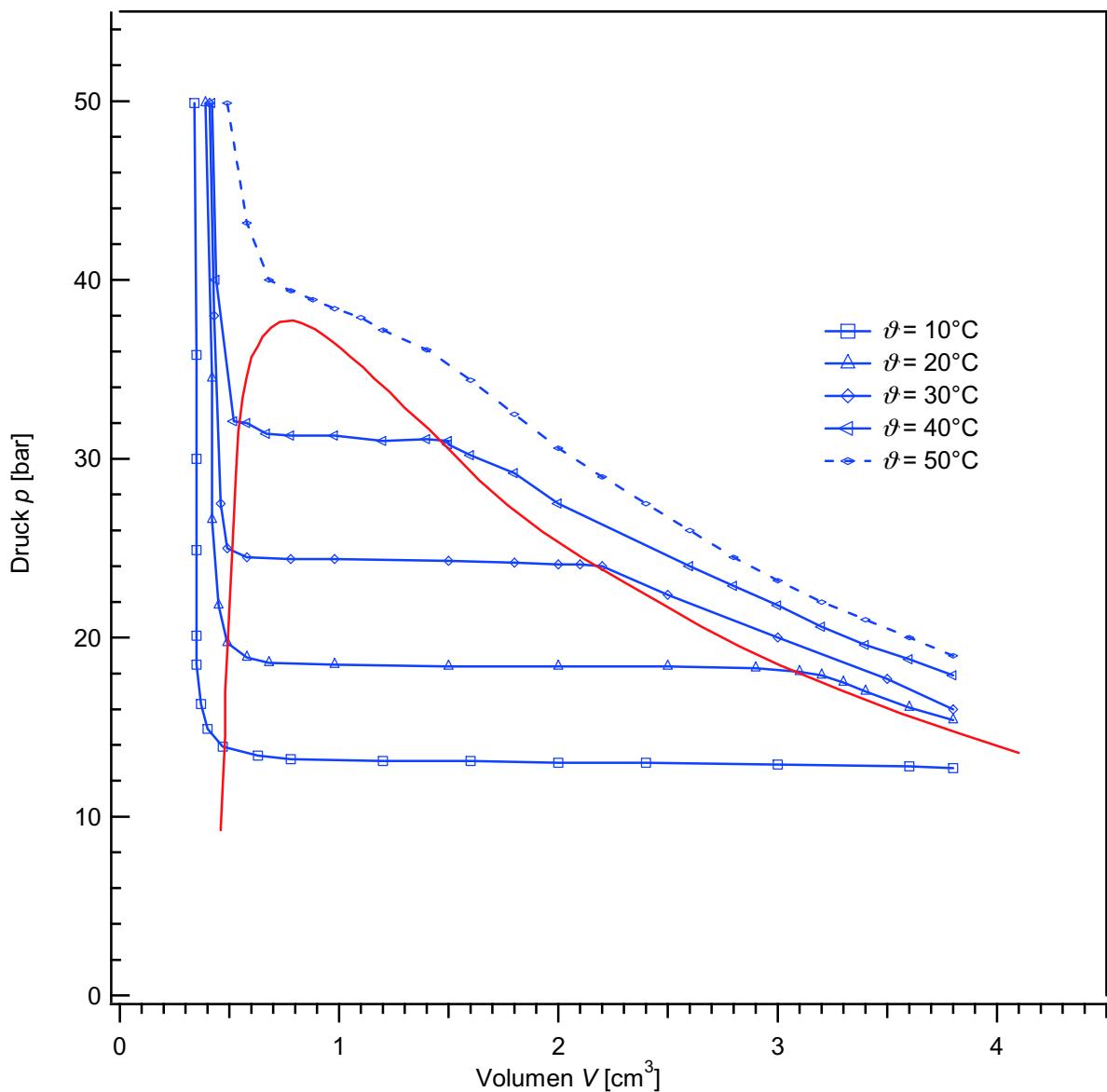
Aufgaben:

- a. Zeichnen Sie den kritischen Punkt ein.
- b. Zeichnen Sie die während dem Experiment gemessenen Punkte in das unten stehende p, v -Diagramm ein.



Lösung:

- Der kritische Punkt befindet sich dort, wo die Siedelinie und die Taulinie aufeinander treffen.
- Das Experiment wurde unter isothermen Bedingungen durchgeführt. Im p, v -Diagramm sind die Isothermen für die Temperaturen $\vartheta = 10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}, 40^\circ\text{C}$ und 50°C eingezeichnet.



3.8 Festkörper

Das Volumen von Festkörpern ändert unter Einwirkung hoher Drücke kaum (siehe entsprechender Bereich auf der p,v,T -Fläche). Der Zustand kann deshalb in der Regeln ausreichend genau mit der Funktion

$$v = v(T)$$

beschrieben werden. Dieser Zusammenhang wird mit der thermischen Ausdehnung beschrieben. Der Wärmeausdehnungskoeffizient ist

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \left(\frac{dL}{d\vartheta} \right)$$

Thermische Längendehnung: $L = L_0 (1 + \alpha \Delta \vartheta)$

Thermische Flächendehnung: $A \approx A_0 (1 + 2 \alpha \Delta \vartheta)$

Thermische Volumendehnung: $V \approx V_0 (1 + 3 \alpha \Delta \vartheta)$

3.9 Flüssigkeiten

Das Volumen ändert sich (wie bei Festkörpern) bei steigenden Drücken kaum.

Wir betrachten als Beispiel flüssiges Wasser bei 20°C:

p [bar(a)]	v [m^3/kg]	ρ [kg/m^3]
0.1	0.0010017	998.3
1	0.0010017	998.3
10	0.0010013	998.7
100	0.0009972	1002.8
1000	0.0009616	1039.9

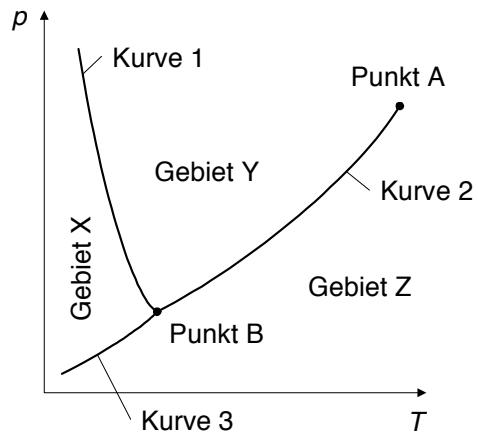
Flüssiges Wasser muss man z.B. auf rund 100 bar(a) komprimieren, um das Volumen um 0.5% zu verkleinern. Fluide, deren Volumen sich unter Druckbelastung nicht ändert, heißen *inkompressibel*.

3.10 Übungen

Übung 3.1: Kontrollfragen. Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen im Sinne einer Selbstkontrolle ohne Unterlagen.

- a. Skizzieren Sie das p, T -Diagramm eines reinen Stoffes und bezeichnen Sie die Einphasengebiete, die Grenzkurven und die charakteristischen Punkte eindeutig!
- b. Wie ist eine Nassdampf-Isotherme in einem p, T -Diagramm erkennbar?
 - als waagrechte Gerade
 - als Punkt
 - als ansteigende Kurve
 - als abfallende Kurve
- c. Welche Eigenschaft hat die kritische Isotherme im p, v -Diagramm eines reinen Stoffes im kritischen Punkt? Sie hat:
 - einen Knick,
 - eine unendlich grosse Steigung (d.h. senkrecht),
 - einen Wendepunkt oder
 - keine dieser Eigenschaften
- d. Die Gasgleichung kann für eine Gasmenge mit der Stoffmenge n (in mol) formuliert werden. Wie lautet die Gasgleichung in diesem Fall? Bezeichnen Sie die einzelnen Terme der Gasgleichung. (P)
- e. In einer Gasflasche befindet sich einmal Helium und einmal Propan bei gleichem Druck und gleicher Temperatur.
 - In welchem Fall befindet sich mehr Masse in der Gasflasche?
 - In welchem Fall befindet sich die grössere Stoffmenge in der Gasflasche?Sie brauchen nicht zu rechnen – eine qualitative Antwort genügt.
- f. Eine Propan-Gasflasche eines Grills liegt in der Sonne, das Ventil ist geschlossen. Welcher speziellen Zustandsänderung entspricht der ablaufende Vorgang?
- g. Wir betrachten eine Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ eines idealen Gases (z.B. Luft) bei *konstantem Druck*. Gegeben ist der Zustand 1 (p_1 , V_1 , und T_1). Vom Zustand 2 kennt man das Volumen V_2 . Wie berechnet man die Temperatur T_2 ? (P)
- h. Betrachten Sie die Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ eines idealen Gases bei *konstantem Volumen*. Gegeben ist der Zustand 1 (p_1 , V_1 , und T_1). Vom Zustand 2 kennt man den Druck p_2 . Wie berechnet man die Temperatur T_2 ? (P)

Übung 3.2: p, T -Diagramm. Im untenstehenden Diagramm ist das p, T -Diagramm des reinen Stoffes "Wasser" skizziert. Geben Sie die Namen der drei Gebiete, der drei Kurven sowie beider charakteristischen Punkte (A und B) an. (P)



Gebiet X:

Gebiet Y:

Gebiet Z:

Kurve 1:

Kurve 2:

Kurve 3:

Punkt A:

Punkt B:

Übung 3.3: Montageort für Gasdetektoren. In einer Maschinenhalle hat man einen Heizkessel und zwei Kälteanlagen. Die erste Kälteanlage wird mit R22 (ein halogenierter Kohlenwasserstoff) und die zweite mit Ammoniak als Arbeitsmittel (d.h. Kältemittel) betrieben. Um die in der Halle tätigen Personen zu schützen, will man die möglichen Leckagen von den Verbrennungsgasen [können hier einfachheitshalber als Kohlendioxid (CO_2) angenommen werden], von R22 und von Ammoniak (NH_3) mit Gasdetektoren erfassen und rote Warnlampen betätigen. Auf welcher Höhe (z.B. Bodennähe, Menschenhöhe, Decke) würden Sie diese Detektoren montieren lassen? Warum? Eine nachvollziehbare Erklärung wird verlangt! (P)

Angaben für diese Aufgabe:

$$\begin{array}{ll} \text{Spezielle Gaskonstante des Kohlendioxids} & R_{\text{CO}_2} = 188.9 \text{ J/kg K} \\ \text{Spezielle Gaskonstante des Kältemittels R22} & R_{\text{R22}} = 96.2 \text{ J/kg K} \\ \text{Spezielle Gaskonstante des Ammoniaks} & R_{\text{NH}_3} = 488.2 \text{ J/kg K} \\ \text{Spezielle Gaskonstante der Luft} & R_{\text{Luft}} = 287.2 \text{ J/kg K} \end{array}$$

Übung 3.4: Gaskonstante von Luft. Eine Luftmasse von $m = 1.6 \text{ kg}$ nimmt bei einem Druck von $p = 1 \text{ bar(a)}$, einer Temperatur von $T = 293 \text{ K}$ ein Volumen von $V = 1.3 \text{ m}^3$ ein. Es soll die individuelle Gaskonstante berechnet werden. ($R_L = 277.3 \text{ J/kg K}$)

Übung 3.5: Schweissarbeiten an Stahltank. Ein Stahltank enthält $V_1 = 17.84 \text{ m}^3$ Stickstoff ($M_{\text{N}_2} = 28 \text{ g/mol}$) bei einem Druck von $p_1 = 2.7 \text{ bar(a)}$ und einer Temperatur von $\vartheta_1 = 19.5^\circ\text{C}$. Bedingt durch Schweissarbeiten an der Aussenhaut steigt die Temperatur auf $\vartheta_2 = 48^\circ\text{C}$. Es sollen berechnet werden:

- a. die Stickstoffmasse ($m = 55.5 \text{ kg}$)
- b. die Stoffmenge ($n = 1.98 \text{ kmol}$)
- c. der Druck p_2 nach dem Erwärmen ($p_2 = 2.96 \text{ bar(a)}$)

Übung 3.6: Isobare Erwärmung von Helium. Helium wird isobar von $\vartheta_1 = -5^\circ\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 84^\circ\text{C}$ erwärmt. Man berechne die prozentuale Volumenzunahme ΔV . ($\Delta V / V_1 = 33.2\%$)

Übung 3.7: Isotherme Kompression von Luft. Ein Luftvolumen von $V_1 = 10.47 \text{ m}^3$ wird isotherm komprimiert. Dabei steigt der Druck von $p_1 = 1.06 \text{ bar(a)}$ auf $p_2 = 8.72 \text{ bar(a)}$. Welches Volumen V_2 nimmt die Luft nach der Verdichtung ein? ($V_2 = 1.27 \text{ m}^3$)

Übung 3.8: Isotherme Kompression und isobare Expansion. Ein ideales Gas, Anfangsvolumen $V_1 = 24.3 \text{ m}^3$, wird bei konstanter Temperatur $\vartheta_1 = 19.85^\circ\text{C}$ von $p_1 = 1.7 \text{ bar(a)}$ auf $p_2 = 11.04 \text{ bar(a)}$ verdichtet. An die Kompression schliesst sich eine isobare Expansion auf das Anfangsvolumen an. Zu berechnen sind:

- a. das Verdichtungsendvolumen V_2 ($V_2 = 3.74 \text{ m}^3$)
- b. die Temperatur T_3 am Ende der Expansion ($T_3 = 1903 \text{ K}$)

Übung 3.9: Sauerstoffbehälter. Ein Kugelbehälter mit einem Innendurchmesser von 6.0 m enthält $N = 9 \cdot 10^{27}$ Sauerstoffmoleküle ($M_{O_2} = 32 \text{ g/mol}$). Die Temperatur im Behälter ist 27°C . Bestimmen Sie

- a. die Stoffmenge, ($n = 14.95 \text{ kmol}$)
- b. das Molvolumen, ($v_m = 7.57 \text{ m}^3/\text{kmol}$)
- c. die Gaskonstante ($R_{O_2} = 259.8 \text{ J/kg K}$) und
- d. den Gasdruck. ($p = 3.3 \text{ bar(a)}$)

Übung 3.10: Auftrieb eines Heissluftballons. Ein Heissluftballon soll beim Start eine Auftriebskraft von $F_A = 2000 \text{ N}$ erreichen. Die Ballonhülle hat ein Volumen von $V_B = 1000 \text{ m}^3$. Das Volumen ist konstant und die Hülle kann vernachlässigt werden. Die Umgebungsluft hat eine Temperatur von $\vartheta_U = 20^\circ\text{C}$ und einen Druck von $p_U = 1 \text{ bar(a)}$ ($R_L = 287 \text{ J/kg K}$).

- a. Wie heiss muss die Luft im Ballon ϑ_{HL} beim Start sein? ($\vartheta_{HL} = 80.45^\circ\text{C}$)
- b. Wie gross ist die Luftmasse m_L im Ballon beim Start? ($m_L = 985 \text{ kg}$)

Übung 3.11: Gasbehälter. Das Manometer eines Gasbehälters zeigt einen Überdruck von 20 bar(g) an. Der Luftdruck ist 950 mbar(a) , die Umgebungstemperatur $\vartheta_U = 20^\circ\text{C}$.

- a. Wie hoch ist der absolute Druck im Gasbehälter? ($p_{1a} = 20.95 \text{ bar(a)}$)
- b. Was zeigt das Manometer bei $\vartheta_U = -30^\circ\text{C}$ an? ($p_{2a} = 17.38 \text{ bar(a)}$)

Übung 3.12: Mess-Ballon. Ein meteorologischer Beobachtungs- und Mess-Ballon wird auf der Meereshöhe bei einem Druck $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ und einer Temperatur von $\vartheta = 15^\circ\text{C}$ mit einer Masse von $m \text{ kg}$ Helium gefüllt. Molare Masse von Helium: $M_{He} = 4.00 \text{ kg/kmol}$

- Unter der Annahme, dass sich der Ballon ohne Widerstand dehnen kann, wie gross ist die Volumenänderung, wenn sich der Ballon in der Höhe bei einem Druck von $p = 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ und einer Temperatur von $\vartheta = -10^\circ\text{C}$ befindet? ($V_2/V_1 = 1.52$)
- Wie gross ist dabei die Radiusänderung des kugelförmigen Ballons, wenn die Heliumfüllung 45 kg beträgt? ($\Delta r = 0.6 \text{ m}$)

Übung 3.13: Campinggasflasche. In einer Campinggasflasche befindet sich 2 l Methan bei einer Temperatur von 20°C und einem Druck von 110 bar(a). Man kocht Spaghettis und der Flaschendruck sinkt auf 105 bar(a).

- Welche Methanmasse wurde entnommen? ($\Delta m = 0.00659 \text{ kg}$)
- Welches Volumen entspricht dieser Menge bei 0.96 bar(a) und 30°C ? ($V = 0.0108 \text{ m}^3$)

Molare Masse von Methan: $M_{CH_4} = 16.04 \text{ kg/kmol}$

Übung 3.14: Dichte von Luft. Wie gross sind Volumen, spezifisches Volumen und Dichte von 15 kg Luft bei einem Druck von 7 bar(g) und einer Temperatur von 77°C ($p_U = 1000 \text{ mbar(a)}$, $M_L = 28.95 \text{ kg/kmol}$)? ($R_L = 287.17 \text{ J/kg K}$; $V_L = 1.885 \text{ m}^3$; $v_L = 0.126 \text{ m}^3/\text{kg}$; $\rho_L = 7.96 \text{ kg/m}^3$)

Übung 3.15: Verdichter. Ein Verdichter fördert 50 kg/h Druckluft in den Kessel eines Druckluftnetzes. Das Volumen des Kessels beträgt 5 m^3 . Die Temperatur im Kessel bleibt konstant bei $\vartheta = 18^\circ\text{C}$.

Der Verdichter wird in Abhängigkeit des Kesseldruckes ein- und ausgeschaltet: Die Einschaltung erfolgt bei einem Überdruck von 3 bar(g) und die Ausschaltung bei einem Überdruck von 6 bar(g). Der Umgebungsdruck beträgt $p_U = 0.95 \text{ bar(a)}$.

Ein Abnehmer verbraucht $4 \text{ m}^3/\text{h}$ bei einem Druck von 2.5 bar(a) und einer Temperatur von 22°C . Diese Erwärmung findet in der Leitung statt, die durch den Heizkesselraum verlegt ist.

Wie lange sind die Stillstandzeit und die Laufzeit des Verdichters ($R_L = 287.2 \text{ J/kg K}$)? ($t_{Lauf} = 0.47 \text{ h}$; $t_{Still} = 1.53 \text{ h}$)

Übung 3.16: Druckverteilung in der Atmosphäre. Die Druckverteilung in der Atmosphäre ist zu ermitteln, mit der Annahme, dass sich die Lufttemperatur innerhalb der gesamten Atmosphäre nicht ändert, d.h. unabhängig von der Höhe z ist.

- Ermittlung als Formel, d.h. $p = f(z)$
- Rechenbeispiel mit $\vartheta = \text{konst.} = 15^\circ\text{C}$

Übung 3.17: Kolben in vertikalem, nicht-adiabatem Zylinder belasten. Ein vertikaler, nicht-adiabater Zylinder enthält Gas mit der Höhe H_1 bis hinauf zum Kolben, der ein Gewicht F_G und den Querschnitt A_K hat. Der Kolben wird mit einer Kraft F (vertikal) belastet. Der Umgebungsdruck p_U bleibt konstant.

Welche Höhe H_2 hat das Gas, nachdem es wieder die ursprüngliche Umgebungstemperatur angenommen hat?

Numerisch: $A_K = 0.1 \text{ m}^2$, $F_G = 1000 \text{ N}$, $H_1 = 1 \text{ m}$, $p_U = 1 \text{ bar(a)}$, $F = 20'000 \text{ N}$ ($H_2 = 0.355 \text{ m}$)

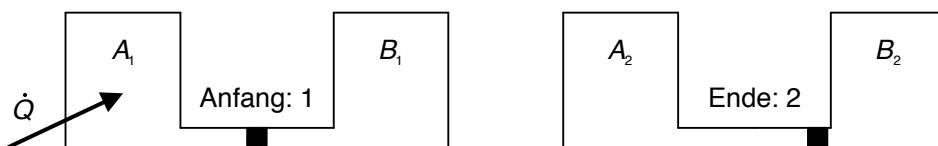
Übung 3.18: Bestimmung des Atmosphärendrucks mit einem Überdruckmanometer. In einer Werkstatt soll man den Atmosphärendruck bestimmen, man hat jedoch nur ein Überdruckmanometer zur Verfügung. Ein Praktikant will diese Aufgabe mit einem einfachen Experiment bewerkstelligen: Er nimmt ein einseitig geschlossenes dünnes Kupferrohr, steckt im Abstand von 1 m einen dichten Kolben darüber und schiebt diesen sehr langsam um 250 mm hinein. Nun zeigt das Manometer 0.312 bar an.

Bestimmen Sie mit diesen Angaben den Atmosphärendruck! ($p_U = 0.936 \text{ bar(a)}$)

Übung 3.19: Zwei miteinander verbundene Gasbehälter. Zwei Gasbehälter sind durch einen Kolben voneinander getrennt; seine Achse ist horizontal. Der Kolben ist reibungsfrei beweglich und schliesse die beiden Gasbehälter dicht voneinander ab. Die Gasvolumen in den zwei Behältern (bis zum Kolben) sind anfänglich 1.2 m^3 und haben 17°C Temperatur. Nun wird das eine Gas um 50 K erwärmt, das andere bleibt bei 17°C .

Um wieviel ändern die beiden Gasvolumen? ($\Delta V = 0.095 \text{ m}^3$)

Skizze:



Übung 3.20: Luft in einem Zylinder mit beweglichem Kolben. Ein Zylinder ist mit Luft von 200 bar(a) auf ein Volumen von 0.5 m^3 gefüllt, die Temperatur ist 26.85°C . Der nicht-adiabate Zylinder wird langsam expandiert, so dass die Temperatur konstant bleibt, bis der Druck auf 100 bar(a) abgesunken ist.

Stoffdaten von Luft: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $M_L = 28.9 \text{ g/mol}$

- a. Wie gross ist jetzt das Luftvolumen im Zylinder? ($V_2 = 1 \text{ m}^3$)
- b. Wie tief ist die Luft abzukühlen, wenn vom anfänglichen Zustand aus, ohne Kolbenverschiebung der Druck auf 100 bar(a) abnimmt? ($T_2 = 150 \text{ K}$)
- c. Wie gross sind Temperatur und Volumen der Luft, wenn sie vom Anfangszustand isotherm auf 150 bar(a) entspannt und dann isochor auf 100 bar(a) abgekühlt wird? ($V_2 = 0.667 \text{ m}^3$; $T_3 = 200 \text{ K}$)
- d. Und wie gross sind die Temperaturen und Volumen der Luft, wenn sie vom Anfangszustand zuerst isochor 150 bar(a) abgekühlt und dann auf 100 bar(a) isotherm entspannt wird? ($T_2 = 225 \text{ K}$; $V_3 = 0.75 \text{ m}^3$)
- e. Welche Masse in kg und Stoffmenge in kmol befindet sich im Zylinder? ($m = 116.1 \text{ kg}$; $n = 4.02 \text{ kmol}$)
- f. Man zeichne die drei Prozesse (b, c und d) im p,V -Diagramm und p,T -Diagramm!

Kapitel 4

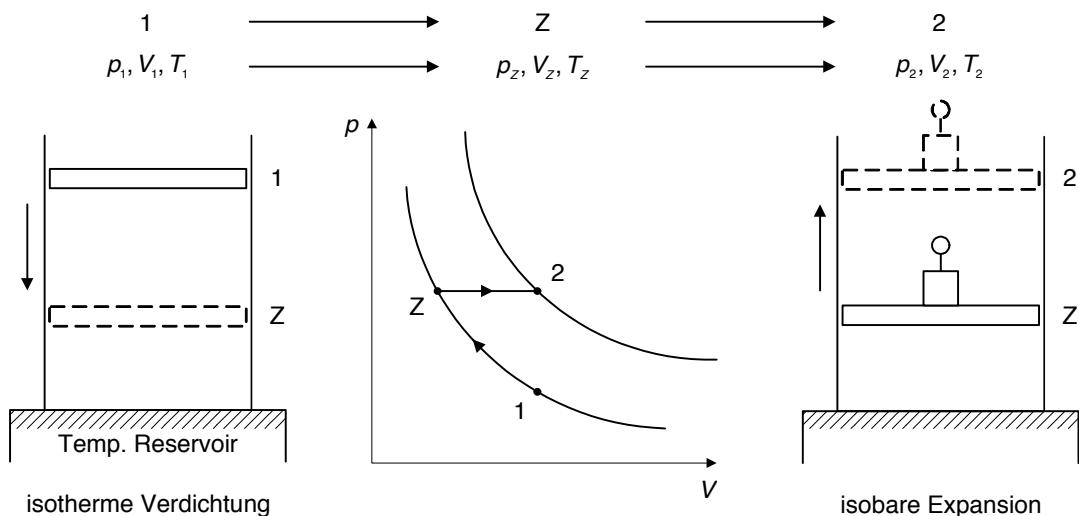
Die Prozessgrößen “Arbeit” und “Wärme”

Wir müssen in der Thermodynamik klar zwischen **Zustand** und **Prozess** unterscheiden! Mit den Zustandsgrößen beschreibt man die Eigenschaften des betrachteten Stoffes. Der Zustand ändert, wenn ein Prozess stattfindet, d.h. Arbeit und/oder Wärme zu- oder abgeführt wird. Wir betrachten in diesem Kapitel die **Prozessgrößen “Arbeit” und “Wärme”**.

4.1 Zustand und Prozess (Wiederholung)

In der Thermodynamik sind die Begriffe *Zustand* und *Prozess* klar auseinander zu halten!

Wir betrachten die in Kapitel 3.6.3 diskutierte isotherme Verdichtung und anschliessende isobare Expansion eines idealen Gases:



Zustand:

Welche Eigenschaften (Zustandsgrößen) hat der Stoff?

→ $z, c, p, V, T, E_{pot}, E_{kin}, U, H, S$

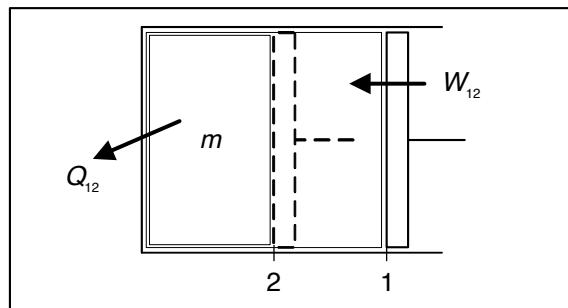
Prozess:

Wie / Wodurch ändert sich ein Zustand?

→ Im System durch Wirkung eines Prozesses.

→ Der Prozess wirkt an der Systemgrenze.

Welche **Prozessgrößen** wirken an der Systemgrenze?



Es sind dies

- die Arbeit W
- die Wärme Q

In diesem und im nächsten Kapitel wollen wir uns mit diesen beiden Prozessgrößen befassen.

Wir nehmen hier folgende Konvention vorweg:

- **Die dem System zugeführte Arbeit und Wärme ist positiv.**
- **Die aus dem System abgeführte Arbeit und Wärme ist negativ.**

Verwechseln Sie niemals Zustand und Prozess! Vielleicht hilft Ihnen das Beispiel 2.6, unser Klassenausflug von Horw auf den Titlis via Engelberg.

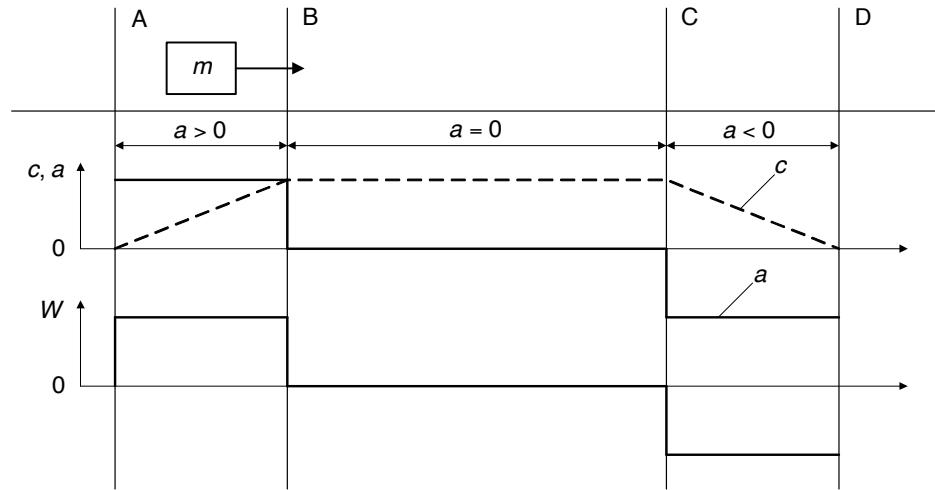
4.2 Die Arbeit W

In diesem Abschnitt geht es um die mechanische Arbeit W . Es handelt sich um eine Wiederholung und ist zum Selbststudium gedacht. Um was geht es?

- Was ist mechanische Arbeit?
- Mechanische Energien: E_{pot} , E_{kin}
- Energieerhaltung in der Mechanik
- Verlust an mechanischer Energie: Dissipation

4.2.1 Was ist Arbeit? – Ein Beispiel

Wir betrachten die reibungsfreie Verschiebung einer Masse m auf einer horizontalen Ebene:



Experimentelle Ergebnisse:

$$a \leftrightarrow F; a \sim F; a \sim \frac{1}{m}$$

$$a = \frac{F}{m}; F = m a$$

Masse (Kraft) verschieben von A nach B: $W_{AB} = F s_{AB} = E_{kin} = \frac{1}{2} m c^2$

Masse verschieben von B nach C: $F = 0$, d.h. $W_{BC} = 0$. Normalkräfte verschieben ist keine Arbeitsverrichtung!

Masse verschieben von C nach D: $-W_{CD} = E_{kin}$.

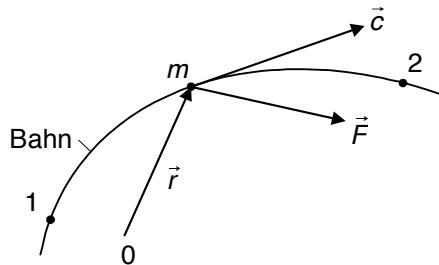
Woher kommt die Arbeit? Wohin geht die Arbeit? Zum Beispiel verschieben von A nach B: Dem System wird Arbeit zugeführt; diese verwandelt sich in kinetische Energie.

4.2.2 Mechanische Energien

a) Arbeit und kinetische Energie

Wir betrachten als einfaches Beispiel die Bewegung eines Massenpunkts in einem Kraftfeld. Der Impuls ist bekanntlich:

$$\vec{I} = m \vec{c} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Nach dem **2. Newton'schen Gesetz** ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{c}) = \vec{F}$$

Dies ist ein wichtiges Grundgesetz der Mechanik. Die Multiplikation beider Seiten mit der Geschwindigkeit ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \frac{d\vec{I}}{dt} &= F \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{c} \cdot d\vec{I} &= m \vec{c} \cdot d\vec{c} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Wenn man diese Beziehung längs der Bahnkurve (Zustand 1 → 2) integriert, erhält man:

$$\begin{aligned} m \int_1^2 \vec{c} \cdot d\vec{c} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \frac{m}{2} (c_2^2 - c_1^2) &= W_{12} \end{aligned}$$

Das Integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ bezeichnet man als die **Arbeit** W_{12} (eine skalare Grösse). Als die **kinetische Energie** definiert man:

$$E_{kin} := m \frac{c^2}{2} + E_{kin,0}$$

Die Arbeit, welche die Kraft \vec{F} zwischen Zustand 1 und 2 verrichtet, ist gleich der Änderung der kinetischen Energie zwischen diesen Zuständen:

$$E_{kin\ 2} - E_{kin\ 1} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{12}$$

Man kann also sagen: *Die kinetische Energie ändert sich durch Zufuhr oder Abgabe von Arbeit.*

b) Potentielle Energie

Die Arbeit W_{12} ist eine Prozessgrösse: Sie hängt von der Gestalt der Bahn und der Richtung des Kraftvektors zwischen Zustand 1 und 2 ab. Für den Sonderfall eines konservativen Kraftfeldes (z.B. Schwerkraftfeld der Erde) gilt für die Kraft \vec{F} :

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{pot}(\vec{r}) = -\frac{dE_{pot}}{d\vec{r}}$$

Das Arbeitsintegral hängt nun nicht mehr von der Gestalt der Bahnkurve, sondern nur von der Differenz zwischen Zustand 1 und 2 ab:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \frac{dE_{pot}}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r} = -(E_{pot\ 2} - E_{pot\ 1})$$

Man kann also sagen: *Für ein konservatives Kraftfeld ist die Arbeit gleich der Differenz der potentiellen Energie zwischen Zustand 1 und 2.*

c) Energieerhaltungssatz der Mechanik

Damit gilt für ein konservatives Kraftfeld:

$$W_{12} = E_{kin\ 2} - E_{kin\ 1} = -(E_{pot\ 2} - E_{pot\ 1})$$

oder

$$E_{kin\ 2} + E_{pot\ 2} = E_{kin\ 1} + E_{pot\ 1}$$

Die Summe aus der kinetischen und potentiellen Energie bleibt konstant - sie ist unabhängig von den Einzelheiten der Bewegung (z.B. von der Gestalt der Bahnkurve).

Energieerhaltungssatz aus der Mechanik:

$$E_{kin\ 2} - E_{kin\ 1} + E_{pot\ 2} - E_{pot\ 1} = W_{12}^*$$

wobei W_{12}^* die Arbeit derjenigen Kräfte bedeutet, die sich nicht aus einem Potential herleiten lassen.

d) Zusammenfassung

Arbeit W

Arbeit ist Energieübertragung auf ein System an der Systemgrenze durch Verschiebung von Kräften, die an der Systemgrenze angreifen. \vec{F} wird finit verschoben:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Die Einheit der Arbeit ist somit $Nm = J$ (Joule, James Joule 1818 – 1889). Das Vorzeichen ist bestimmt durch das Skalarprodukt $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Die Leistung P

Wird eine Arbeit dW in der Zeit dt verrichtet, so erhält man folgende Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \vec{F} \cdot \vec{c}$$

Die Einheit der Leistung ist also $J/s = W$ (Watt, James Watt 1736 – 1817).

Kinetische Energie E_{kin}

$$E_{kin} = m \frac{c^2}{2} + E_{kin0}$$

$$W_{12} = E_{kin2} - E_{kin1} = \frac{m}{2} (c_2^2 - c_1^2)$$

Für den Massenpunkt oben gilt: Die Arbeit, welche die Kraft \vec{F} zwischen Zustand 1 und 2 verrichtet, ist gleich der Änderung der kinetischen Energie.

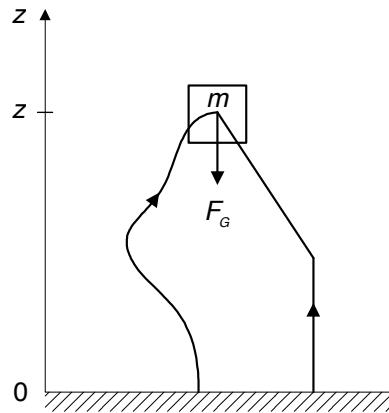
Potentielle Energie E_{pot}

$$W_{12} = -(E_{pot2} - E_{pot1}) = -m g (z_2 - z_1)$$

Für ein konservatives Kraftfeld (z.B. Schwerefeld) ist die Arbeit gleich der Differenz der potentiellen Energie zwischen Zustand 1 und 2.

Beispiel 4.1: Potentielle Energie. Ein Körper mit der Masse m befindet sich in erhöhter Lage (z.B. Stausee, Rammbär oder Bergbahn).

Gravitationsfeld:



E_{pot} ist die verlustfreie (reversible) Arbeit, um die Masse (Kraft F_G) in die Höhenlage z zu bringen.

$$E_{pot} = W_{0z} = \int_0^z F \, ds = m g \int_0^z dz = m g z$$

Extensive potentielle Energie:

$$E_{pot} = m g z \quad [\text{J} = \text{N m} = \text{Ws}]$$

Spezifische potentielle Energie:

$$e_{pot} = g z \quad [\text{J/kg} = \text{m}^2/\text{s}^2]$$

Um die Masse m verlustfrei von z_1 auf z_2 zu heben und senken, ist die folgende minimale (reversible) Arbeit erforderlich:

Heben:

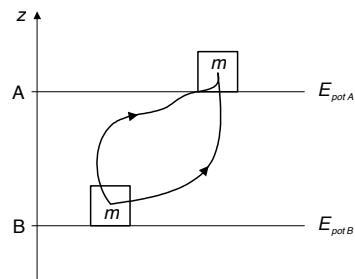
$$W_{BA\ rev} = E_{pot\ A} - E_{pot\ B} =$$

$$m g (z_A - z_B) > 0$$

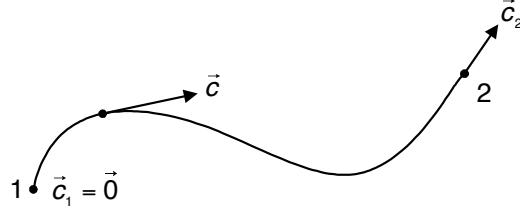
Senken:

$$W_{AB\ rev} = E_{pot\ B} - E_{pot\ A} =$$

$$m g (z_B - z_A) < 0$$



Beispiel 4.2: Kinetische Energie. Ein Fahrzeug mit der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit c auf einer kurvenreichen Strasse:



E_{kin} ist die verlustfreie (reversible) Arbeit, um die ruhende Masse auf die Geschwindigkeit c zu beschleunigen.

Masse m von c auf dc beschleunigen:

$$dE_{kin} = dW_{rev} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

$$dE_{kin} = m \frac{d\vec{c}}{dt} \vec{c} \cdot dt = m \vec{c} \cdot d\vec{c}$$

$$E_{kin} = \int_0^c dE_{kin} = \int_0^c m \vec{c} \cdot d\vec{c} = m \int_0^c \vec{c} \cdot d\vec{c} = \frac{1}{2} m c^2$$

Extensive kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m c^2 \quad [\text{J} = \text{N m} = \text{Ws}]$$

Spezifische kinetische Energie:

$$e_{kin} = \frac{c^2}{2} \quad [\text{J/kg} = \text{m}^2/\text{s}^2]$$

Um die Masse m von c_1 auf c_2 zu beschleunigen, ist die folgende minimale (reversible) Arbeit erforderlich:

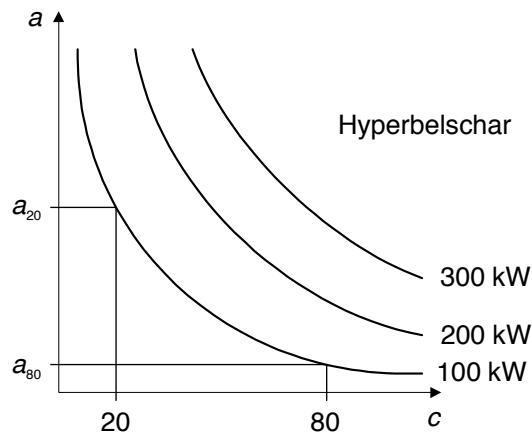
$$W_{12\ rev} = \frac{1}{2} m (c_2^2 - c_1^2)$$

Beispiel 4.3: Leistung. Die (reversible) Leistung zur Beschleunigung einer Masse m mit der Geschwindigkeit c ist:

$$P_{rev} = \frac{dW_{rev}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{c} \cdot d\vec{c})$$

$$P_{rev} = m \vec{c} \frac{d\vec{c}}{dt} = m \vec{c} \cdot \vec{a}$$

Zeichnen Sie den Verlauf der $P_{rev} = \text{konst.}$ -Kurven in ein Beschleunigungs-Geschwindigkeits-Diagramm:



$$P_{rev} = m c a = \text{konst.} = 100 \text{ kW}$$

Zwei Spezialfälle:

a) Geschwindigkeit und Beschleunigung sind parallel: $\vec{c} \parallel \vec{a}$

$$P = m c a$$

b) Geschwindigkeit und Beschleunigung sind rechtwinklig: $\vec{c} \perp \vec{a}$

$$P = m \vec{c} \cdot \vec{a}$$

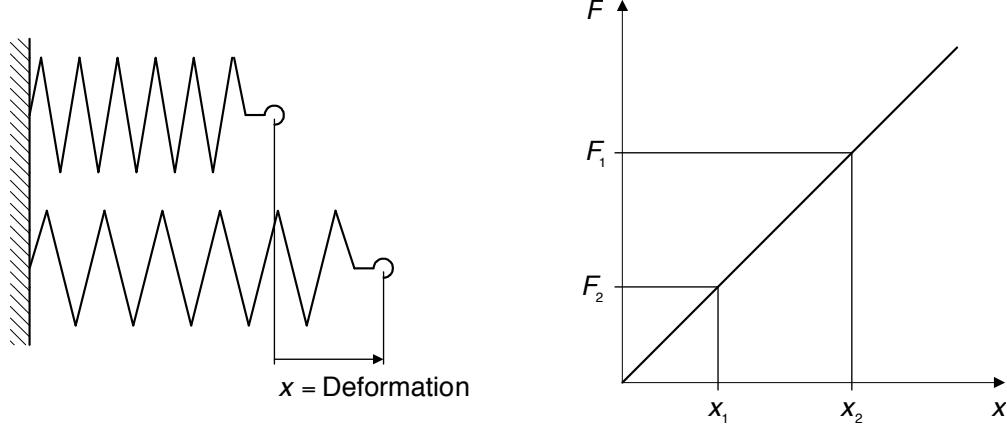
$$P = m c a \underbrace{\cos \varphi}_0$$

$$P = 0$$

Zentripetalkräfte sind keiner Arbeit bzw. Leistung unterworfen.

Beispiel 4.4: Linear-elastische Federenergie. Elastische Körper “federn”, d.h. unter Einwirkung einer Kraft F verformen sie sich elastisch.

Deformation einer Feder:



Aus der Mechanik wissen wir: $F \sim x$, $F = c_F x$, wobei c_F die Federkonstante ist [N/m].

$$E_F = W_{0zrev} = \int_0^x F dx = \int_0^x c_F x dx$$

$$E_F = \frac{1}{2} c_F x^2$$

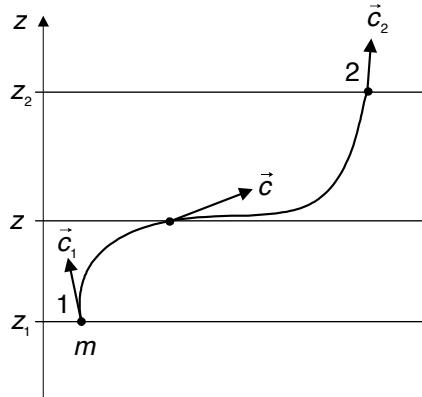
Die minimale (reversible) Arbeit zum Spannen einer Feder von x_1 auf x_2 beträgt:

$$W_{12rev} = \int_{x_1}^{x_2} c_F x dx = \frac{1}{2} c_F (x_2^2 - x_1^2) = E_{F2} - E_{F1}$$

Beispiel 4.5: Energieerhaltung bei reversiblen mechanischen Prozessen.

a) *Bewegung einer Kraft:*

Mit der reversiblen Arbeit W_{rev} wird die Höhenlage z und die Geschwindigkeit c der Masse m verändert:



Extensive reversible Arbeit:

$$W_{12\ rev} = E_2 - E_1 = (E_{pot\ 2} + E_{kin\ 2}) - (E_{pot\ 1} + E_{kin\ 1}) = (E_{pot\ 2} - E_{pot\ 1}) + (E_{kin\ 2} - E_{kin\ 1})$$

Spezifische reversible Arbeit:

$$w_{12\ rev} = \frac{W_{12\ rev}}{m} = \left(g z_2 + \frac{c_2^2}{2} \right) - \left(g z_1 + \frac{c_1^2}{2} \right)$$

b) *Freie (reversible) Bewegung:*

Es wirkt keine Kraft am System, d.h. $W_{12\ rev} = 0$, $E_2 = E_1 = E$

$$E_{pot\ 1} + E_{kin\ 1} = E_{pot\ 2} + E_{kin\ 2}$$

$$E_{kin\ 2} - E_{kin\ 1} = E_{pot\ 1} - E_{pot\ 2}$$

d.h. Zunahme der kinetischen Energie = Abnahme der potentiellen Energie.

Spezifisch dargestellt:

$$g z_2 + \frac{c_2^2}{2} = g z_1 + \frac{c_1^2}{2}$$

4.2.3 Irreversible Prozesse der Mechanik

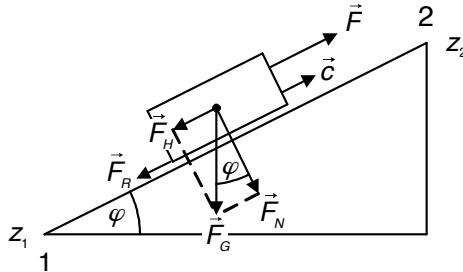
Wir betrachten eine mechanische Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$. Was ist der Grund für die auftretenden Irreversibilitäten?

- Reibungseffekte (z.B. in Lagern, Bremsen)
- Strömungswiderstände (z.B. Luftwiderstand)

Wir nennen dies **Dissipation** J_{12} (Dissipationsarbeit). Dissipation bedeutet:

- Zerstreuung, Entwertung
- “Verlust” an mechanischer Energie, die in thermische Energie übergeht.

Beispiel 4.6: Bewegung auf schiefer Ebene.



Zugfahrt nach oben

$$F = F_H + F_R = F_G \sin \varphi + \mu F_G \cos \varphi$$

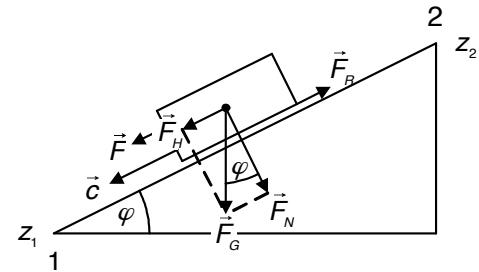
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = F s \cos(0)$$

$$W_{12} = (F_G \sin \varphi + \mu F_G \cos \varphi) s$$

$$W_{12} = F_G(z_2 - z_1) + \mu F_G \cos \varphi s$$

$$W_{12} = (E_{pot\ 2} - E_{pot\ 1}) + J_{12}$$

$$W_{12} = W_{12\ rev} + J_{12}$$



Zugfahrt nach unten

$$F = F_H - F_R = F_G \sin \varphi - \mu F_G \cos \varphi$$

$$W_{21} = \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} = F s \cos(\pi)$$

$$W_{21} = -(F_G \sin \varphi - \mu F_G \cos \varphi) s$$

$$W_{21} = -F_G(z_2 - z_1) + \mu F_G \cos \varphi s$$

$$W_{21} = -(E_{pot\ 2} - E_{pot\ 1}) + J_{12}$$

$$W_{21} = -W_{12\ rev} + J_{12}$$

Zahlenbeispiel $W_{12} = 10 + 3 = 13$

Zahlenbeispiel $W_{12} = -10 + 3 = -7$

Die Dissipation ist immer positiv!

4.3 Die Arbeit am geschlossenen System

Wir betrachten ein **ruhendes geschlossenes System**, d.h. die Masse m im System ist konstant ($m = \text{konst.}$). Die kinetische und potentielle Energie bleiben ebenfalls konstant ($dE_{kin} = 0$, $dE_{pot} = 0$).

Auf welche Arten kann Energie in Form von Arbeit an das System übertragen werden?

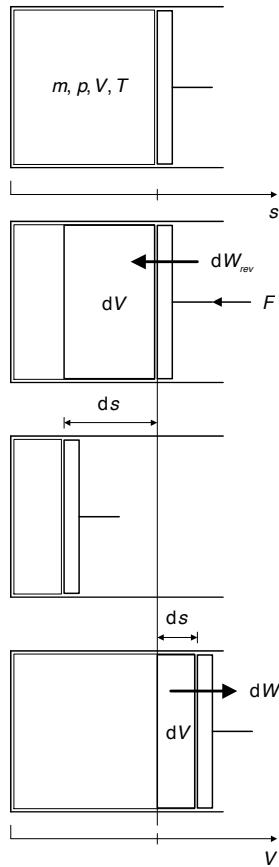
1. Volumenänderungsarbeit
2. Wellenarbeit
3. Elektrische Arbeit

4.3.1 Die reversible Volumenänderungsarbeit W_{v12rev}

Wir betrachten ein Fluid in einem Zylinder/Kolben-System, das einer idealen, reibungsfreien Kompression oder Expansion unterworfen wird:

a) *Infinite reversible Volumenänderung:*

Bezeichnungen: p = Gasdruck, F = Kolbendruck auf Systemgrenze
 $F = p A$: Kolbenkraft auf Systemgrenze (A = Kolbenfläche)



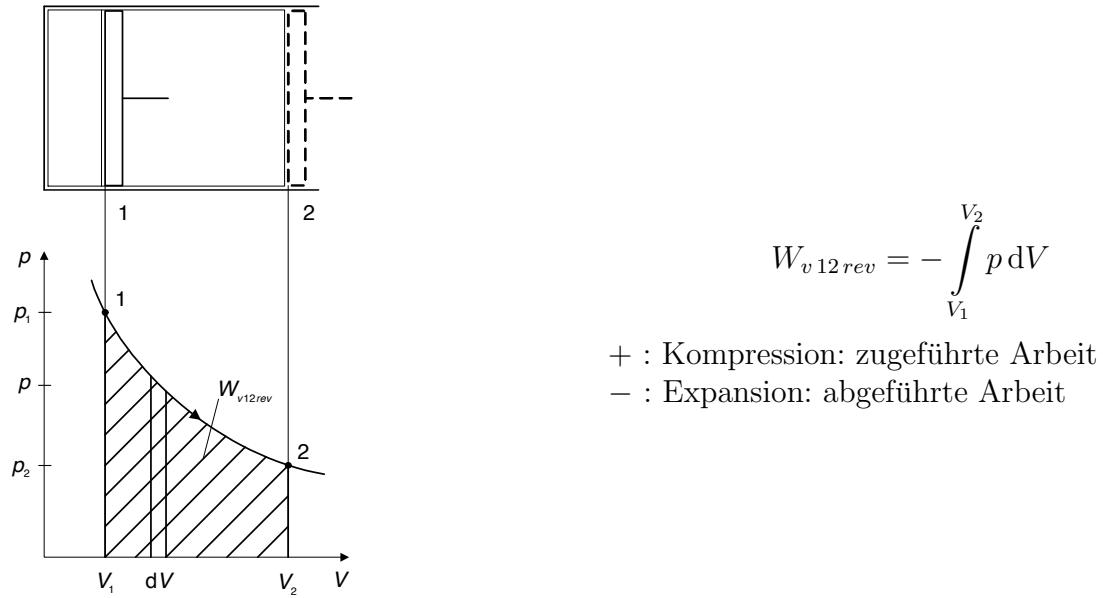
Arbeitszufuhr (Kompression):

$$\begin{aligned} dW_{vrev} &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = -F ds \\ &= -p A ds = -p dV \\ dW_{vrev} &= -p dV > 0 \end{aligned}$$

Arbeitsabfuhr (Expansion):

$$dW_{vrev} = -p dV < 0$$

b) Endliche reversible Volumenänderung:



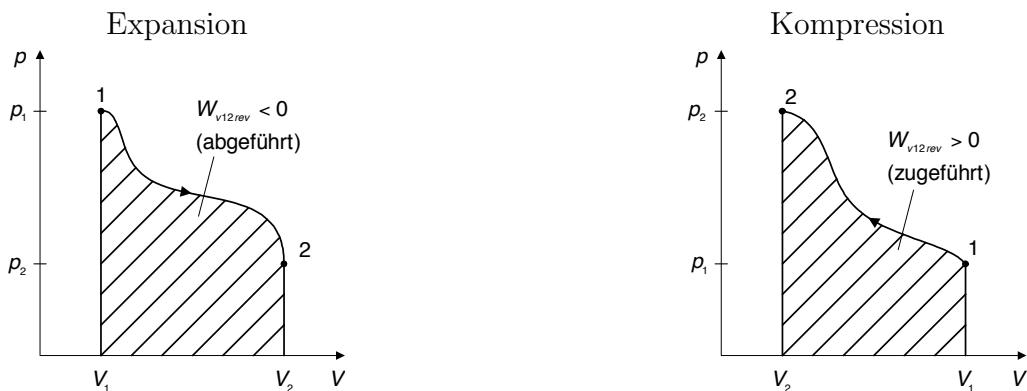
Extensive reversible Volumenänderungsarbeit:

$$W_{v12\text{rev}} = - \int_1^2 p \, dV$$

Spezifische reversible Volumenänderungsarbeit:

$$w_{v12\text{rev}} = \frac{W_{v12\text{rev}}}{m} = - \int_1^2 p \, dv$$

Im p,V - bzw. p,v - Diagramm:



Die Arbeit ist vom Prozessverlauf $p(V)$ abhängig!

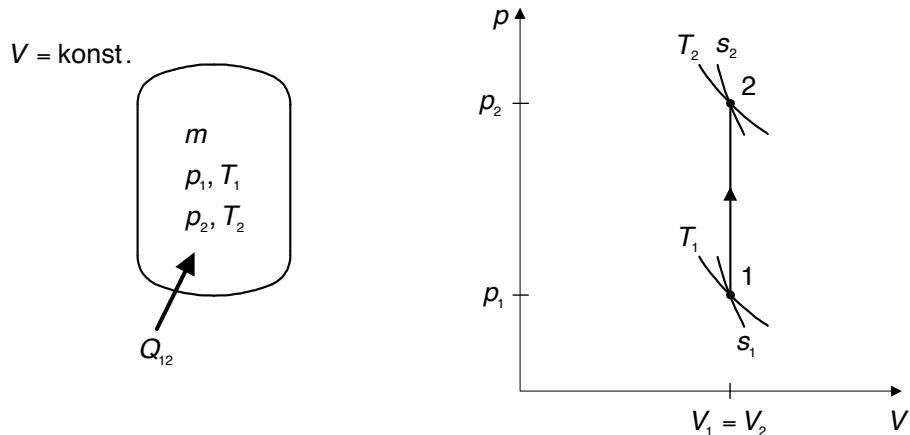
4.3.2 Spezielle reversible Prozesse mit idealen Gasen

Wir betrachten vorerst nur die folgenden drei speziellen Zustandsänderungen:

1. Isochore Zustandsänderung: $V = \text{konst.}$, $dV = 0$
2. Isobare Zustandsänderung: $p = \text{konst.}$, $dp = 0$
3. Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{konst.}$, $dT = 0$

Später lernen wir noch weitere Zustandsänderungen kennen, nämlich die isentrope ($S = \text{konst.}$, $dS = 0$) und die polytrope ($n = \text{konst.}$) Zustandsänderung.

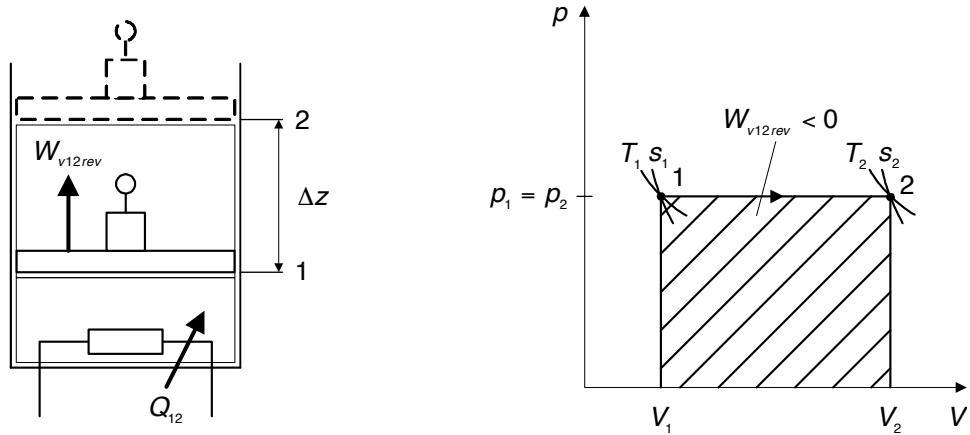
a) Isochore Zustandsänderung



Reversible Volumenänderungsarbeit $W_{v12\,rev}$:

$$W_{v12\,rev} = - \int_1^2 p \, dV = 0, \quad \text{da } dV = 0$$

Eine isochore Zustandsänderung bedeutet, dass das Fluid inkompressibel ist.

b) Isobare Zustandsänderung

Reversible Volumenänderungsarbeit $W_{v12\text{rev}}$:

$$W_{v12\text{rev}} = - \int_1^2 p \, dV = -p(V_2 - V_1)$$

Spezifische reversible Volumenänderungsarbeit $w_{v12\text{rev}}$:

$$w_{v12\text{rev}} = -p(v_2 - v_1)$$

Mit der Gasgleichung $pV = R_i T$ erhält man:

$$w_{v12\text{rev}} = -R_i(T_2 - T_1)$$

Beispiel 4.7: Isobare Zustandsänderung. In einem Zylinder/Kolben-System befindet sich ein ideales Gas bei folgendem Zustand: $p_1 = 10 \text{ bar(a)}$, $V_1 = 1 \text{ m}^3$, $T_1 = 600 \text{ K}$. Das ideale Gas wird isobar auf $T_2 = 300 \text{ K}$ abgekühlt. Berechnen Sie die reversible Volumenänderungsarbeit W_{v12rev} .

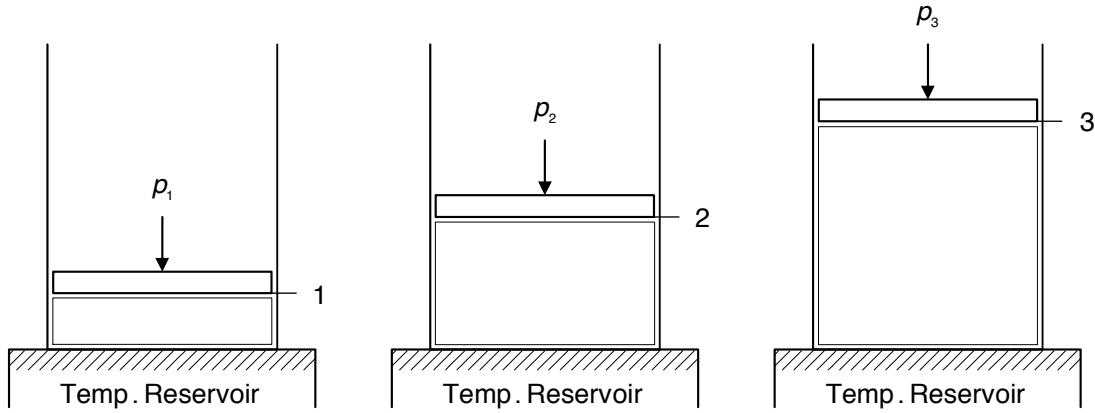
$$W_{v12rev} = - \int_1^2 p \, dV = -p(V_2 - V_1)$$

Isobare Zustandsänderung:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$W_{v12rev} = -p V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = 500 \text{ kJ}$$

c) Isotherme Zustandsänderung



Reversible Volumenänderungsarbeit W_{v12rev} :

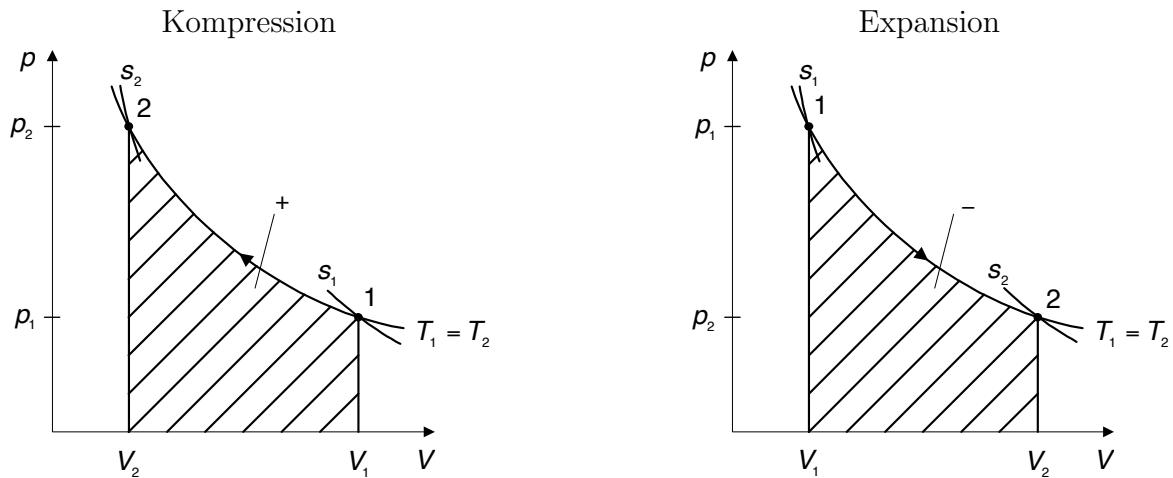
Isotherme Zustandsänderung: $p_1 V_1 = p_2 V_2 = p V = \text{konst.}$

$$W_{v12rev} = - \int_1^2 p dV = -p_1 V_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{v12rev} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -m R_i T \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

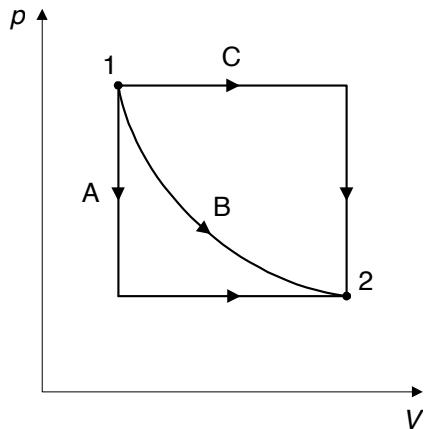
$$w_{v12rev} = -p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = -R_i T \ln \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Im p,V -Diagramm:



Beispiel 4.8: Isotherme Kompression. Luft mit einer Temperatur von 27°C soll isotherm von $p_1 = 1 \text{ bar(a)}$ auf $p_2 = 10 \text{ bar(a)}$ verdichtet werden ($R_L = 287 \text{ J/kgK}$). Wie gross ist die spezifische reversible Volumenänderungsarbeit $w_{v12\text{rev}}$? ($w_{v12\text{rev}} = 198.25 \text{ kJ/kg}$)

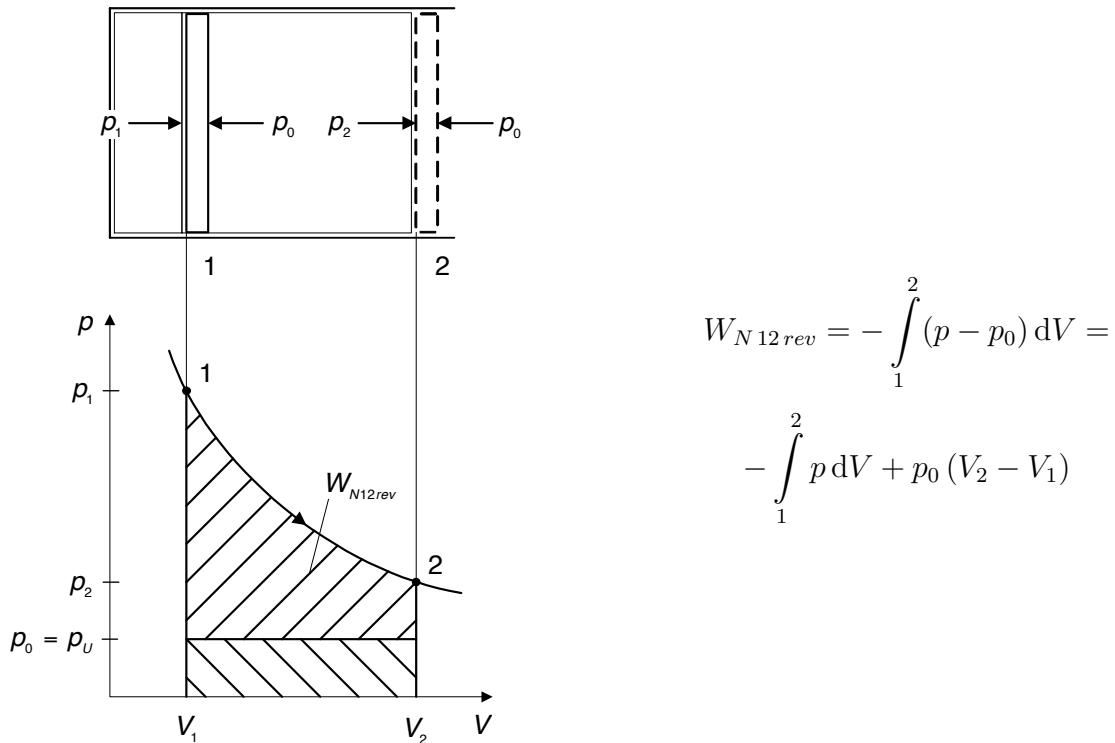
Beispiel 4.9: Verschiedene Prozessverläufe. Wir betrachten die Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ auf verschiedenen Wegen (A, B, C). Bei welchem Prozess kann man am meisten Arbeit gewinnen?



$W_{v12\text{rev}}$ ist vom Weg abhängig!

4.3.3 Nutzarbeit

Die Nutzarbeit eines expandierenden Kolbens bei konstantem Gegendruck beträgt:



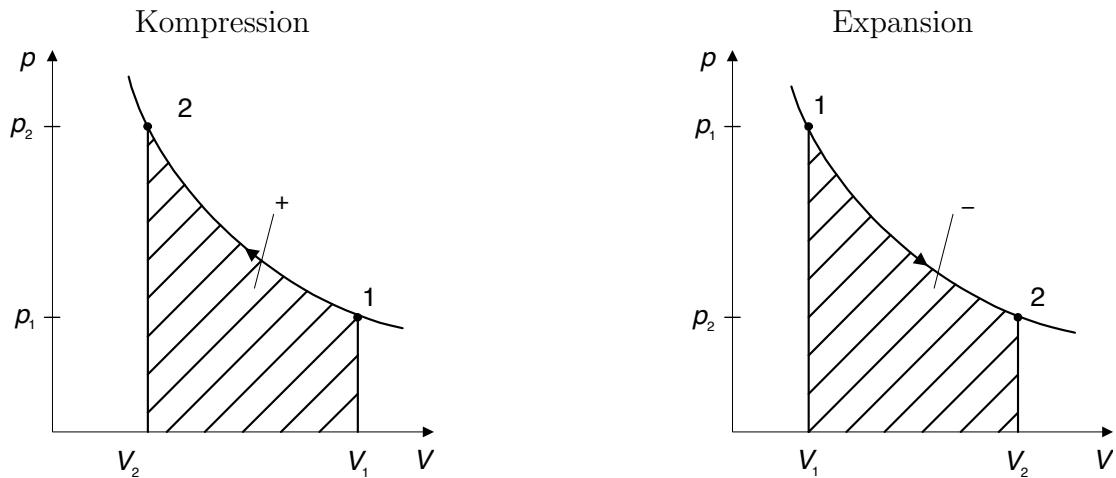
Beispiel 4.10: Kolben bei konstantem Gegendruck. Ein Zylinder mit dem Volumen $V_1 = 0.25 \text{ dm}^3$ enthält Luft, deren Druck $p_1 = 1 \text{ bar(a)}$ mit der Druck p_U der umgebenden Atmosphäre übereinstimmt. Durch Verschieben des reibungsfrei beweglichen Kolbens wird das Volumen der Luft auf $V_2 = 1.50 \text{ dm}^3$ isotherm vergrössert. Die Zustandsänderung der Luft werde als quasistatisch angenommen. Man berechne den Enddruck p_2 , die Volumenänderungsarbeit W_{v12rev} und die Nutzarbeit W_{N12} . ($W_{N12} = 80.2 \text{ J}$)

4.3.4 Irreversible Prozesse / Dissipation

Wir haben gelernt: Die Volumenänderungsarbeit hängt vom Verlauf der Zustandsänderung ab, also von der Prozessführung. Sie ist eine Prozessgröße, keine Zustandsgröße. Bei einem innerlich irreversiblen Prozess treten im Fluid lokale Geschwindigkeits- und Druckunterschiede sowie Reibungsspannungen auf. Diese Irreversibilitäten führen dazu, dass der Druck p' bei der Kompression grösser als p ist. Es muss also mehr Arbeit als bei der reversiblen Kompression zugeführt werden. Bei der Expansion ist $p' < p$ und es wird weniger Arbeit abgeführt. Die Gleichung

$$W_{v12} = - \int_1^2 p \, dV$$

ist im allgemeinen trotzdem eine gute Näherung bei der irreversiblen Kompression und Expansion.



Reversibler Prozess

$$\begin{array}{ccc} W_{v12\,rev} & = & -W_{v12\,rev} \\ \text{Arbeitsaufwand} & = & \text{Arbeitsgewinn} \end{array}$$

Irreversibler Prozess

$$\begin{array}{ll} W_{v12} = W_{v12\,rev} + J_{12} & W_{v12} = W_{v12\,rev} + J_{12} \\ 13 = 10 + 3 & -7 = -10 + 3 \\ \eta_K = \frac{W_{v12\,rev}}{W_{v12}} < 1 & \eta_E = \frac{-W_{v12}}{-W_{v12\,rev}} < 1 \end{array}$$

Die Dissipation ist immer positiv!

Durch Reibung und andere irreversible Vorgänge im System wird Energie *entwertet*. Man bezeichnet den entwerteten Anteil der Energie als **Dissipationsenergie** (manchmal auch als Dissipationsarbeit bezeichnet) oder kurz als **Dissipation** J_{12} . Die Reibungsarbeit hat den grössten Anteil an der Dissipation.

Beispiel 4.11: Isotherme Expansion. Luft wird von $p_1 = 10 \text{ bar(a)}$ auf $p_2 = 1 \text{ bar(a)}$ bei 300 K isotherm entspannt ($R_L = 287 \text{ J/kg K}$). Aus Messungen weiss man, dass der Wirkungsgrad $\eta_E = 0.80$ beträgt. Welche spezifische Volumenänderungsarbeit w_{v12} kann gewonnen werden und wie gross ist die spezifische Dissipation j_{12} ?

$$w_{v12\ rev} = R_i T \ln \frac{p_2}{p_1} = -198.3 \text{ kJ/kg}$$

$$\eta_E = \frac{-w_{v12}}{-w_{v12\ rev}} = 0.8$$

$$w_{v12} = -158.6 \text{ kJ/kg}$$

$$w_{v12} = w_{v12\ rev} + j_{12}$$

$$-158.6 = -198.3 + j_{12}$$

$$j_{12} = 39.6 \text{ kJ/kg}$$

4.3.5 Die Gesamtarbeit

Wir haben bis hierher gelernt, dass an einem ruhenden geschlossenen System Volumenänderungsarbeit verrichtet werden kann. In Kapitel 4.5 kommen die Wellenarbeit und elektrische Arbeit hinzu.

In Kapitel 4.3.4 haben wir den Einfluss der Dissipation kennengelernt. Die Dissipation führt dazu, dass

- bei einer Kompression $1 \rightarrow 2$ *mehr Arbeit* als W_{v12rev} benötigt und
- bei einer Expansion $1 \rightarrow 2$ *weniger Arbeit* als W_{v12rev} abgeführt

wird. Dissipation ist also “schädlich”!

Die **Gesamtarbeit** W_{12} am geschlossenen System setzt sich aus der reversiblen Volumenänderungsarbeit und der Dissipation zusammen:

$$\begin{aligned} W_{12} &= W_{v12rev} + J_{12} \\ W_{12} &= - \int_1^2 p \, dV + J_{12} \end{aligned}$$

Nochmals: Die Dissipation J_{12} ist immer positiv!

4.4 Die Arbeit am offenen System

Wir betrachten nun ein offenes System und leiten die grundlegende Beziehung zur Berechnung der Arbeit her.

Auf welche Arten kann Energie in Form von Arbeit an das System übertragen werden?

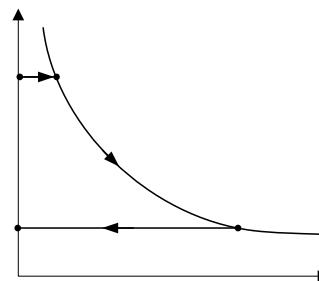
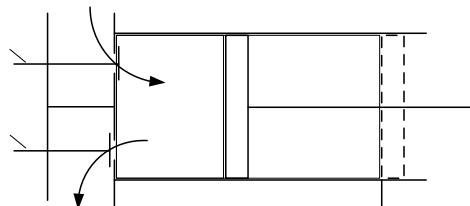
1. Druckänderungsarbeit
2. Wellenarbeit
3. Elektrische Arbeit

4.4.1 Reversible Druckänderungsarbeit $W_{p12\text{rev}}$

Die Zustandsänderungen verlaufen vorerst reversibel; die Änderungen der kinetischen und potenziellen Energie sind vernachlässigbar.

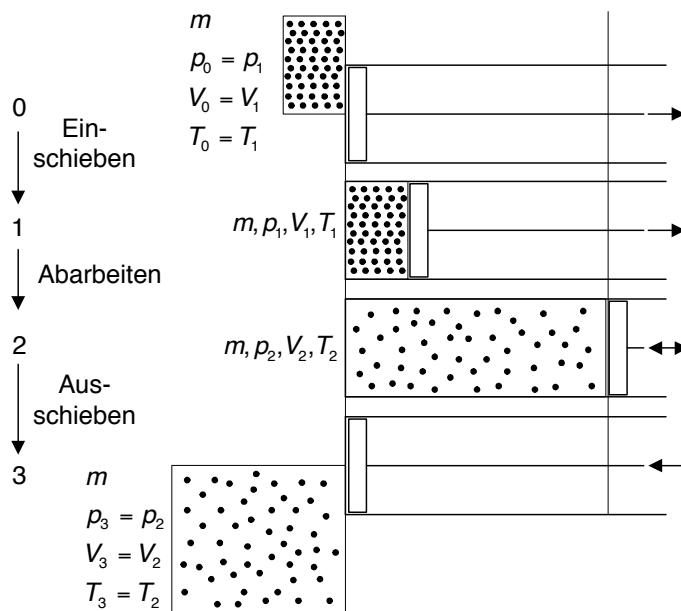
a) Expansions-Kolbenmaschine

Wir betrachten das System Zylinder/Kolben mit Ein- und Auslassventilen (Voraussetzung: ideale Kolbenmaschine ohne Reibung, keine Strömungsverluste, kein “Schadraum”):



Beschreibung der einzelnen Arbeitstakte:

m : pro Arbeitsspiel abgearbeitete Masse



Arbeit des Fluids am Kolben:

$0 \rightarrow 1$: Einschieben:

$$-W_{01} = p_1 V_1$$

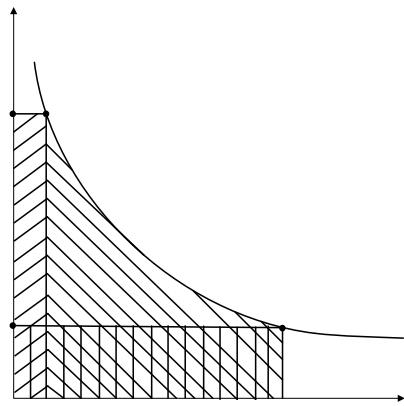
$1 \rightarrow 2$: Abarbeiten:

$$-W_{v12} = \int_1^2 p \, dV$$

$2 \rightarrow 3$: Ausschieben:

$$W_{23} = p_2 V_2$$

Die Nettoarbeit wird als **Druckänderungsarbeit** bezeichnet:



$$-W_{0123\ rev} = -W_{p\ 12\ rev} = -W_{01} + (-W_{V\ 12}) - W_{23}$$

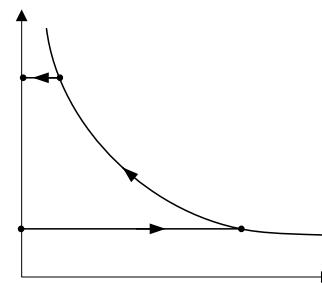
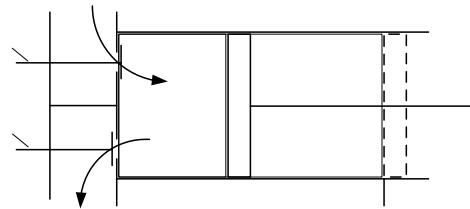
Reversible Druckänderungsarbeit

$$W_{p\ 12\ rev} = \int_{p_1}^{p_2} V \, dp$$

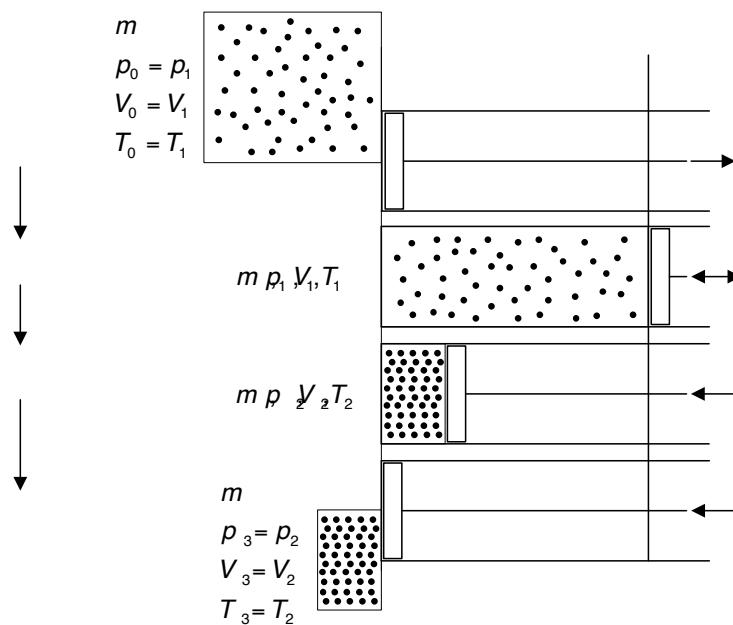
Expansion: $dp < 0$: $W_{p\ 12} < 0$

Kompression: $dp > 0$: $W_{p\ 12} > 0$

b) Kompressions-Kolbenmaschine



Beschreibung der einzelnen Arbeitstakte:



Arbeit des Fluids am Kolben:

$0 \rightarrow 1$: Ansaugen:

$$-W_{01} = p_1 V_1$$

$1 \rightarrow 2$: Komprimieren:

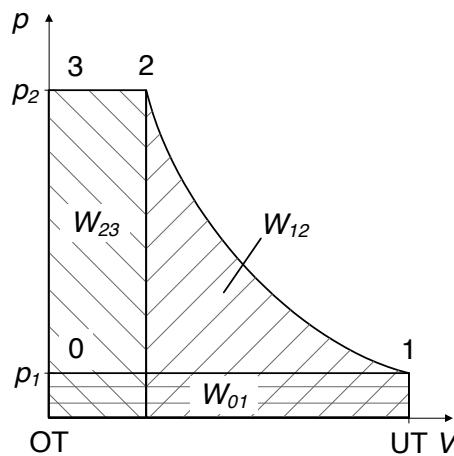
$$W_{v12} = - \int_1^2 p \, dV$$

$2 \rightarrow 3$: Ausschieben:

$$W_{23} = p_2 V_2$$

Die Nettoarbeit beträgt:

$$W_{p12\text{rev}} = + \int_1^2 V \, dp$$



Für die Expansion und Kompression gilt also:

$$W_{p12\text{rev}} = \int_{p_1}^{p_2} V \, dp$$

Es sei hier nochmals betont, dass diese Arbeit für reversible Zustandsänderungen (d.h. Dissipation gleich null) und ohne Änderung der kinetischen und potentiellen Energie gilt!
Die mittlere Leistung ist:

$$P_{\text{rev}} = \frac{W_{p12\text{rev}}}{t_3 - t_0}$$

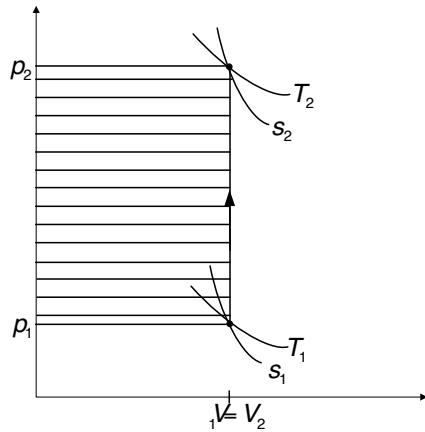
4.4.2 Spezielle reversible Prozesse mit idealen Gasen

Wir betrachten die folgenden speziellen reversiblen Prozesse (Druckänderung 1 → 2):

1. Isochore Zustandsänderung: $V = \text{konst.}$, $dV = 0$
2. Isobare Zustandsänderung: $p = \text{konst.}$, $dp = 0$
3. Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{konst.}$, $dT = 0$

Später lernen wir noch weitere Zustandsänderungen kennen, nämlich die isentrope ($S = \text{konst.}$, $dS = 0$) und die polytrope ($n = \text{konst.}$) Zustandsänderung.

a) Isochore Zustandsänderung



Die Druckänderung von p_1 auf p_2 erfolgt isochor, d.h. das Fluid wird nicht komprimiert.

Reversible Druckänderungsarbeit $W_{p12\,rev}$:

$$W_{p12\,rev} = V(p_2 - p_1) = m R_i (T_2 - T_1)$$

Spezifische reversible Druckänderungsarbeit $w_{p12\,rev}$:

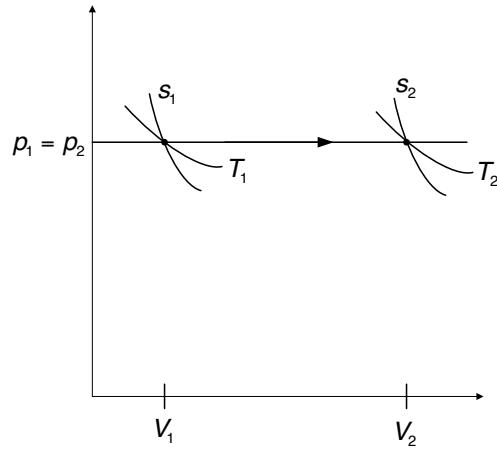
$$w_{p12\,rev} = \frac{W_{p12\,rev}}{m} = v(p_2 - p_1) = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = R_i (T_2 - T_1)$$

Die mittlere Leistung beträgt:

$$P_{rev} = \dot{m} v (p_2 - p_1) = \frac{\dot{m}}{\rho} (p_2 - p_1) = \dot{V} (p_2 - p_1) = \dot{m} w_{p12\,rev}$$

Welche Prozesse verlaufen isochor? (Beispiele)

inkompressible Strömungen: Pumpen, Ventilatoren, Wasserturbinen

b) Isobare Zustandsänderung

Reversible Druckänderungsarbeit $W_{p12\text{rev}}$:

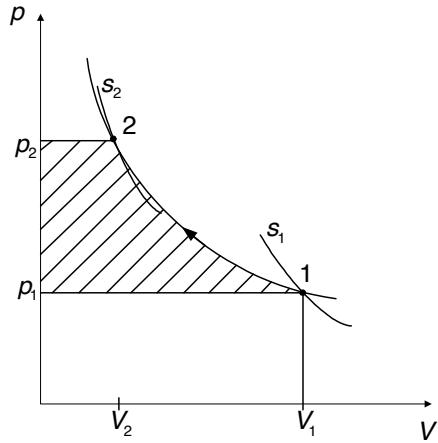
$$W_{p12\text{rev}} = \int_1^2 V \, dp = 0, \quad \text{da Druck konstant: } dp = 0$$

Spezifische reversible Druckänderungsarbeit $w_{p12\text{rev}}$:

$$w_{p12\text{rev}} = 0$$

Ein isobares offenes System verrichtet keine Druckänderungsarbeit, z.B.

c) Isotherme Zustandsänderung



Reversible Druckänderungsarbeit W_{p12rev} :

$$W_{p12rev} = \int_1^2 V dp = p_1 V_1 \int_1^2 \frac{dp}{p} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\begin{aligned} W_{p12rev} &= p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = m R_i T \ln \frac{p_2}{p_1} \\ W_{p12rev} &= W_{v12rev} \end{aligned}$$

Spezifische reversible Druckänderungsarbeit w_{p12rev} :

$$w_{p12rev} = p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = -p_1 v_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = R_i T \ln \frac{p_2}{p_1}$$

In der infinitesimalen Schreibweise lautet die Gasgleichung:

$$pv = R_i T \Rightarrow v dp + p dv = R_i dT = 0, \quad \text{da } dT = 0$$

$$v dp = -p dv$$

$$dw_{p\,rev} = dw_{v\,rev}$$

Hinweis: Isotherme Maschinen sind technisch äusserst schwierig zu realisieren!

4.4.3 Irreversible Prozesse / Dissipation

Auch bei offenen Systemen treten Irreversibilitäten auf – im Wesentlichen Reibungseffekte. Uns fehlen noch verschiedene Grundlagen zur exakten Herleitung der Gesetzmäßigkeiten. Aus diesem Grund argumentieren wir analog zum geschlossenen System.

Wir haben gelernt: Ohne Änderung der kinetischen und potenziellen Energie sowie ohne Dissipation ist die am offenen System verrichtete Arbeit gleich der reversiblen Druckänderungsarbeit $W_{p12\text{rev}}$.

Dissipation führt nun dazu, dass:

- bei einer Kompression $1 \rightarrow 2$ *mehr Arbeit* als $W_{p12\text{rev}}$ benötigt und
- bei einer Expansion $1 \rightarrow 2$ *weniger Arbeit* als $W_{p12\text{rev}}$ abgeführt

wird. Dissipation ist natürlich auch hier “schädlich”!

Die mathematische Formulierung mit Berücksichtigung der kinetischen und potenziellen Energie folgt im nächsten Abschnitt.

4.4.4 Die technische Arbeit

Was beim geschlossenen System die **Gesamtarbeit** ist, ist beim offenen System die **technische Arbeit**.

Die technische Arbeit ist diejenige Arbeit, die über die Systemgrenze fliesst – d.h. sie ist “technisch relevant”. Die technische Arbeit muss aufgewendet bzw. kann abgeführt werden.

Wie berechnet man diese Arbeit? – Für eine saubere Herleitung fehlen uns noch wichtige Erkenntnisse und Zusammenhänge des 1. und 2. Hauptsatzes. An dieser Stelle diskutieren wir lediglich das Resultat für die (spezifische) **technische Arbeit**:

$$w_{t12} = \underbrace{\int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)}_{\text{reversibler Anteil}} + \underbrace{j_{12}}_{\text{Dissipation}}$$

“Arbeit” = reversibler Anteil + $\underbrace{\text{Dissipation}}_{(\text{immer positiv})}$

Man beachte, dass diese Gleichung keine “kalorischen” Größen (Wärme, innere Energie, Enthalpie) enthält. Sie verknüpft rein mechanische Größen (v, p, c, z) mit Ausnahme der Dissipation $j_{12} \geq 0$. Wir werden später sehen, dass im Auftreten der Dissipation der 2. HS zum Ausdruck kommt.

Das vom Verlauf der Zustandsänderung abhängige Integral

$$w_{p12\,rev} = \int_1^2 v \, dp$$

ist wie w_{t12} und j_{12} eine Prozessgröße. Sie wird **spezifische Druckänderungsarbeit**, **spezifische Stutzenarbeit** (y_{12}) oder **spezifische Strömungsarbeit** genannt.

Die **technische Leistung** (kurz “Leistung”) ist diejenige Leistung, die in der Leistungsbilanzgleichung eingesetzt wird. Sie berechnet sich aus der technischen Arbeit wie folgt:

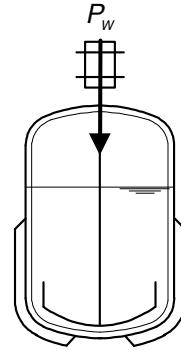
$$P_{t12} = P_{12} = \dot{m} w_{t12} = \dot{m} \left(\int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12} \right)$$

Auf diese Leistung “kommt es an”!

4.5 Weitere Formen der Arbeit

4.5.1 Die Wellenarbeit

In einem geschlossenen Behälter ragt eine Welle hinein (z.B. Rührer in einem Behälter).



Durch das Drehen der Welle wird dem System Arbeit bzw. Leistung zugeführt. Die Wellenleistung berechnet sich bekanntlich aus Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit:

$$P_W = M \omega$$

Mit der Drehzahl $n = \omega / 2 \pi$ erhält man für die Wellenleistung:

$$P_W = M 2 \pi n$$

Durch die Integration über die Zeit ergibt sich die Wellenarbeit:

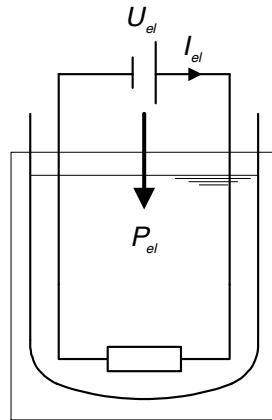
$$W_{W12} = 2 \pi \int_{t_1}^{t_2} M(t) n(t) dt$$

Für über die Zeit konstante Werte von Drehzahl und Drehmoment gilt:

$$W_{W12} = \underbrace{2 \pi M n}_{P_W} (t_2 - t_1)$$

4.5.2 Die elektrische Arbeit

Ein Energietransport über die Systemgrenze ist auch durch elektrischen Strom möglich.



Für die elektrische Arbeit gilt:

$$P_{el}(t) = U_{el}(t) I_{el}(t)$$

Im allgemeinen Fall sind die elektrische Spannung und Stromstärke zeitabhängig. Für die zwischen t_1 und t_2 verrichtete elektrische Arbeit erhält man:

$$W_{el\,12} \int_{t_1}^{t_2} P_{el}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} U_{el}(t) I_{el}(t) dt$$

Für über die Zeit konstante Werte von Spannung und Strom gilt:

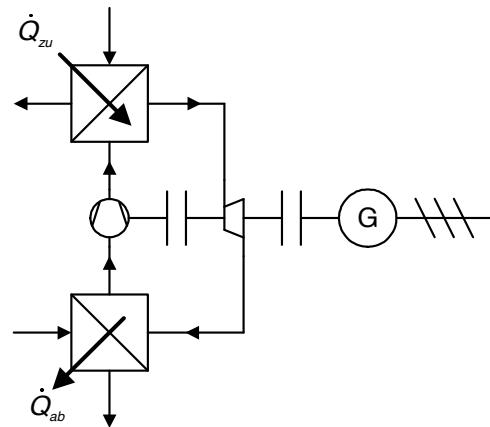
$$W_{el\,12} = P_{el}(t_2 - t_1) = U_{el} I_{el}(t_2 - t_1)$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz $U_{el} = R I_{el}$ erhält man:

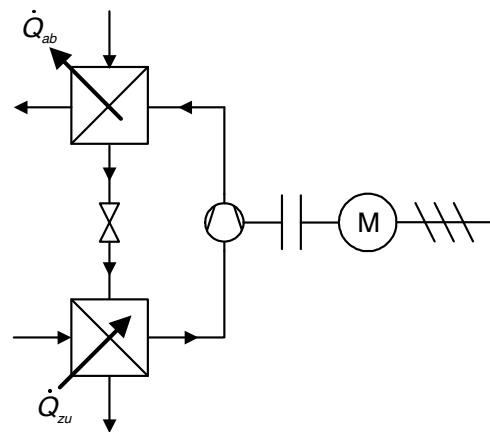
$$W_{el\,12} = \frac{U_{el}^2}{R} (t_2 - t_1) = I_{el}^2 R (t_2 - t_1)$$

Beispiel 4.12: Arbeit am geschlossenen System. Wir betrachten vereinfachte Schemas eines Dampfkraftwerkes und einer Wärmepumpe. Zeichnen Sie die Systemgrenzen jeweils so ein, dass einmal Wellenarbeit und einmal elektrische Leistung ab- bzw. zugeführt wird.

Dampfkraftwerk:



Wärmepumpe:



4.6 Die Wärme Q

4.6.1 Was ist “Wärme”?

Neben dem Verrichten von Arbeit gibt es eine weitere Möglichkeit, Energie über die Systemgrenze zu transportieren: **das Übertragen von Wärme**.

Die Übertragung von Wärme über die (nicht-adiabate) Systemgrenze kommt durch unterschiedliche Temperaturen des Systems und seiner Umgebung zustande. Die Erfahrung zeigt, dass Wärme von selbst stets in Richtung abnehmender Temperatur fliesst. Diese Aussage ist eine Form des 2. HS der Thermodynamik.

Definition der Prozessgröße Wärme:

Wärme ist Energie, die allein auf Grund eines Temperaturunterschiedes zwischen einem System und seiner Umgebung (oder zwischen zwei Systemen) über die gemeinsame Systemgrenze übertragen wird.

Nennen Sie einige Beispiele (Technik, Alltag), wo Wärme übertragen wird!

-
-
-
-
-

4.6.2 Die Wärme Q_{12} und der Wärmestrom \dot{Q}

Die Bezeichnung Q_{12} bedeutet die bei einem Prozess zwischen den Zuständen 1 und 2 über die Systemgrenze übertragene Energie in Form von Wärme.

Wir treffen dieselbe **Vorzeichenkonvention** wie für die Arbeit:

- **positiv**, wenn die Wärme Q_{12} dem System zugeführt wird,
- **negativ**, wenn das System die Wärme Q_{12} an die Umgebung abgibt.

Bei einem *adiabaten Prozess* findet per definitionem keine Wärmeübertragung statt.

Wie die übertragene Arbeit W_{12} ist die übertragene Wärme Q_{12} eine **Prozessgrösse**, die von der Art des Prozesses abhängt. Analog ist:

$$Q_{12} = \int_1^2 dQ$$

$\dot{Q}(t)$ ist der **Wärmestrom** (heat transfer rate), die pro Zeiteinheit übertragene Wärme. Die im Zeitintervall t_1 bis t_2 übertragene Wärme ist:

$$Q_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}(t) dt$$

Oft wird der auf die Flächeneinheit bezogene Wärmestrom, die **Wärmestromdichte** (heat flux), verwendet:

$$\dot{q} = \frac{\delta \dot{Q}}{dA} \quad \text{bzw.} \quad \dot{Q} = \int_A \dot{q} dA$$

Dabei bedeutet A die an der Systemgrenze für die Wärmeübertragung verfügbare Fläche. Das Integral ist nur auswertbar, wenn die Details des Wärmeübertragungsprozesses bekannt sind.

4.6.3 Arten der Wärmeübertragung

Grundsätzlich kann Wärme auf zwei Arten übertragen werden, durch

- Kontakt und durch
- Strahlung

Im Falle des Kontaktes unterscheidet man zwischen der Übertragung durch Leitung und durch Konvektion. Folgende Gleichungen beschreiben die drei unterschiedlichen Übertragungsmöglichkeiten. Dies soll lediglich als Überblick dienen, wir werden uns im Modul THFL+SY intensiv mit Wärmeübertragung beschäftigen.

1. Wärmeleitung:

Sie findet bei festen Stoffen und bei Fluiden ohne Bewegung statt, z.B. in einem Metallstab mit einem kalten und warmen Ende.

Stationäre Wärmeleitung (1. Fourier'sches Gesetz):

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Die Gleichung besagt, dass der Wärmestrom in die entgegengesetzte Richtung des Temperaturgradienten fliesst. λ bezeichnet die Wärmeleitfähigkeit in [W/m K].

2. Konvektive Wärmeübertragung:

Sie tritt in bewegten Fluiden auf, z.B. zwischen strömenden Wasser und einer heißen oder kalten Rohroberfläche. Es wird zwischen freier (d.h. ohne Pumpe oder Gebläse) und erzwungener Konvektion unterschieden.

Ansatz nach Newton:

$$\dot{q} = \alpha (T_1 - T_2)$$

Die Gleichung von Newton gilt als Definitionsgleichung für den sogenannten Wärmeübergangskoeffizienten α in [W/m² K]. Dieser ist vom Ort, der Temperatur, dem Strömungsverhalten und damit der Flächenausbildung abhängig. T_1 ist z.B. die Fluidtemperatur im Kern einer Rohrströmung, T_2 ist die Fluidtemperatur an der Rohrwand.

3. Strahlung:

Wärmestrahlung tritt in der Natur bei Sonne, Mond und UV-Licht auf. In der Technik ist sie z.B. in Brennkammern wichtig.

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma_s T^4$$

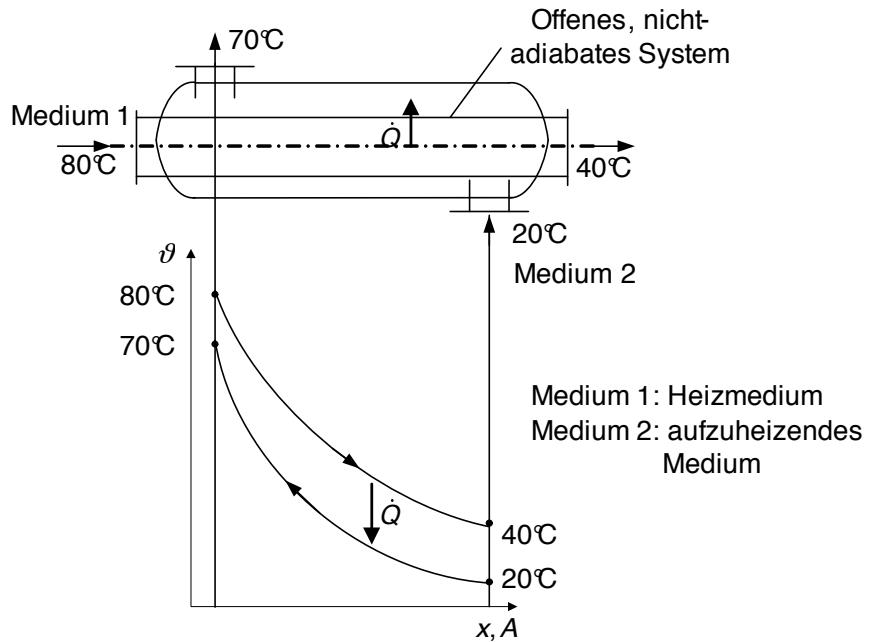
σ_s bezeichnet den Strahlungskoeffizienten und ε das Emissionsverhältnis.

Zur Berechnung des Wärmestromes \dot{Q} , welcher von einem System A mit der Temperatur T_A über eine Systemgrenze mit der Fläche A auf ein System B mit der Temperatur $T_B < T_A$ übertragen wird, macht man den folgenden Ansatz:

$$\dot{Q} = k A (T_A - T_B)$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient k [W/m² K] hängt von zahlreichen Größen ab, welche den Transportprozess kennzeichnen. Wir werden uns später intensiv mit den Gesetzen der Wärmeübertragung befassen.

Beispiel 4.13: Doppelrohr-Wärmeübertrager. Soll Energie über eine Systemgrenze transportiert werden, muss ein Temperaturunterschied zu beiden Seiten der Systemgrenze bestehen. Wärme fliesst einzig und alleine aufgrund eines Temperaturgefälles! Wir betrachten als einfaches Beispiel einen Doppelrohr-Wärmeübertrager, in welchem mit Hilfe eines warmen Mediums ein kälteres Medium erwärmt wird:



Wärmestrom:

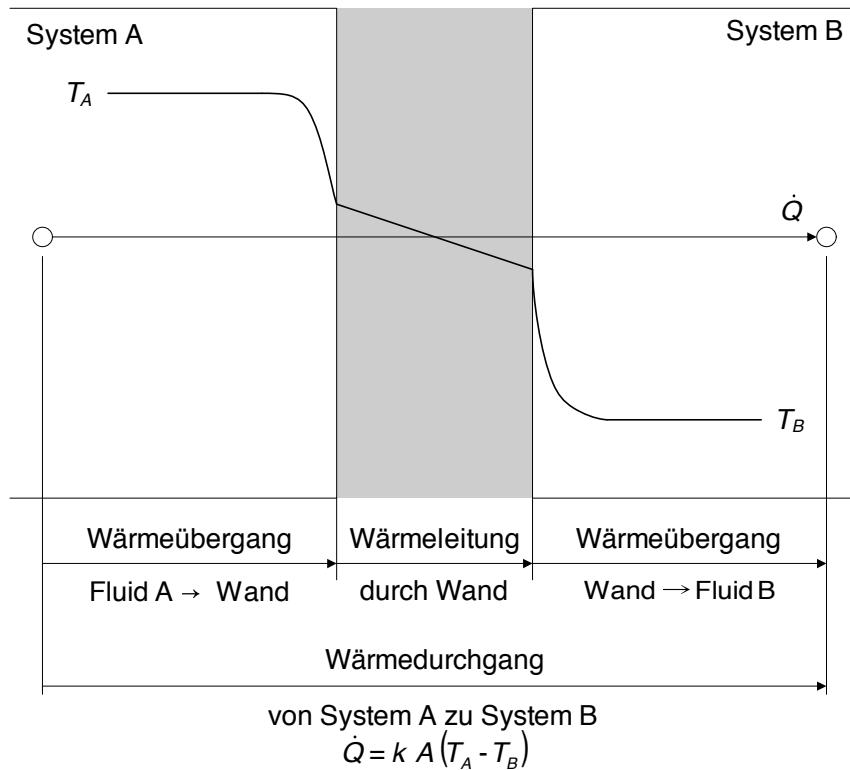
$$\dot{Q} = kA\Delta T_m$$

mittlere logarithmische Temperaturdifferenz:

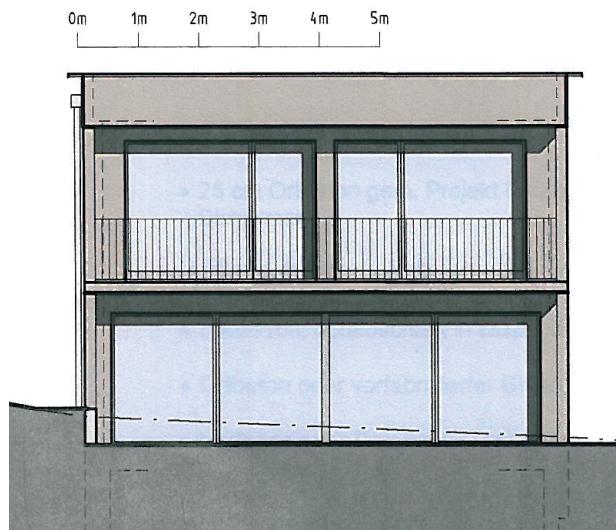
$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}}$$

4.6.4 Der Wärmedurchgang

Wir betrachten den Wärmedurchgang von einem System A durch eine ebene Wand an ein System B.



Beispiel 4.14: Gebäude. Unten ist die Westfassade des EFH Ihres Thermodynamik-Dozenten B. Wellig dargestellt. Bei den grossflächigen Fenstern handelt es sich um 3-fach-Verglasungen mit einem U-Wert von $0.7 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ (in der Architektur, Bauphysik und Gebäudetechnik spricht man von U-Wert für den Wärmedurchgangskoeffizienten). Schätzen Sie den Wärmeverlust durch diese Fenster an einem sehr kalten Wintertag mit -10°C Aussentemperatur ab!



Fensterfläche:

$$A \approx 26 \text{ m}^2$$

Wärmeverlust:

$$\dot{Q} = kA\Delta T$$

$$\dot{Q} = 0.7 \cdot 26 \cdot 3$$

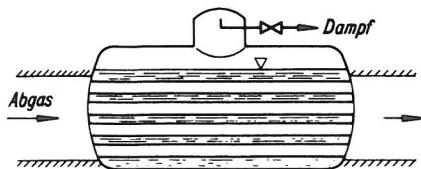
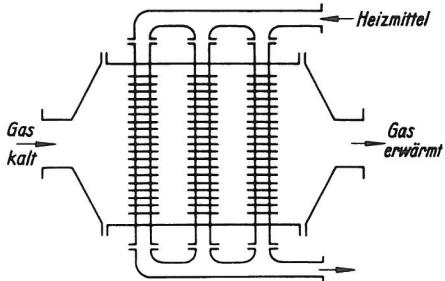
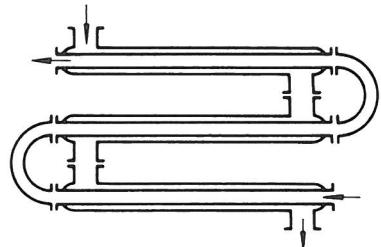
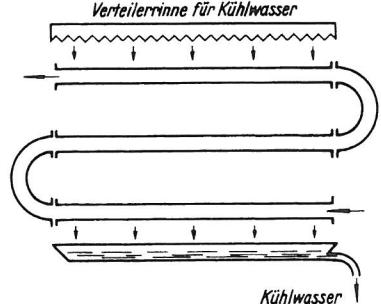
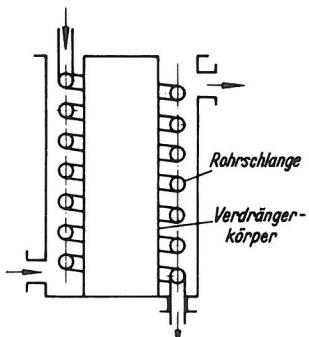
$$\dot{Q} \approx 600 \text{ W}$$

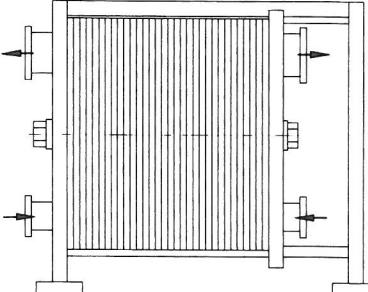
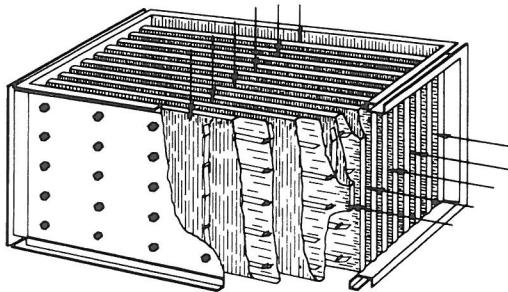
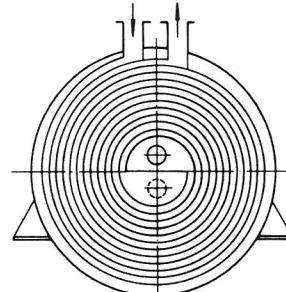
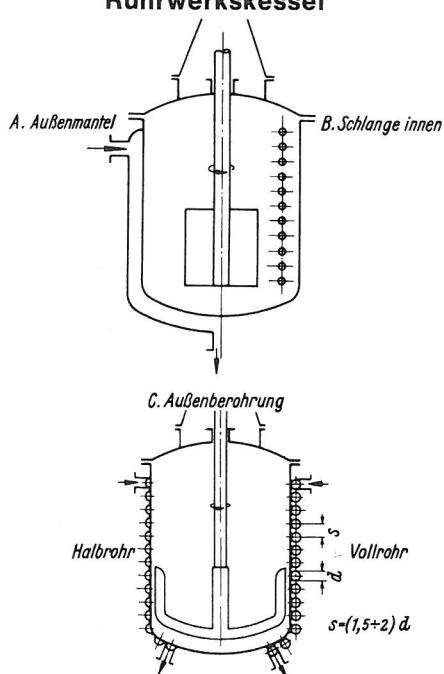
4.6.5 Beispiele von Wärmeübertragern

Für die Auslegung von Wärmeübertragern ist die korrekte Bestimmung des k -Wertes von entscheidender Bedeutung. Auf den folgenden Seiten ist eine Zusammenstellung von überschlägigen Wärmedurchgangskoeffizienten für verschiedene Wärmeübertragerbauarten zusammengestellt (aus VDI-Wärmeatlas).

Die im folgenden zusammengestellten Erfahrungswerte sollen zur überschlägigen Berechnung von Wärmeübertragnern dienen. Die kleineren Werte gelten für verhältnismäßig unvorteilhafte Bedingungen (z. B. bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, zähen Flüssigkeiten, freier Konvektion und bei der Neigung zu Verschmutzungen), die großen Werte sind bei besonders geeigneten Bedingungen (z. B. bei großer Strömungsgeschwindigkeit, dünnen Flüssigkeitsschichten, optimalen Mengenverhältnissen der beiden Stoffe zueinander und bei sauberen Oberflächen) einzusetzen. Die angegebenen Werte können in Sonderfällen nach oben oder unten überschritten werden; sie sind deshalb mit der nötigen Kritik und Vorsicht zu verwenden. In diesen k -Werten sind die Wärmeleitwiderstände von Isolier- und Schutzschichten nicht berücksichtigt.

Bauart	Übertragungsbedingungen	überschlägiger k -Wert W/m ² K
Rohrbündel-Wärmeübertrager	Gas (≈ 1 bar) innerhalb und Gas (≈ 1 bar) außerhalb der Rohre	5 bis 35
	Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) außerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb der Rohre	150 bis 500
	Flüssigkeit außerhalb (innerhalb) und Gas (≈ 1 bar) innerhalb (außerhalb) der Rohre	15 bis 70
	Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Flüssigkeit außerhalb der Rohre	200 bis 400
	Flüssigkeit innerhalb und außerhalb der Rohre	150 bis 1200
	Heizdampf außerhalb und Flüssigkeit innerhalb der Rohre	300 bis 1200
	als Verdampfer und Kondensator siehe unten	
Verdampfer	Heizdampf außerhalb der Rohre 1. mit natürlichem Umlauf a) zähe Flüssigkeiten b) dünne Flüssigkeiten 2. mit Zwangsumlauf	300 bis 900 600 bis 1700 900 bis 3000
	Ammoniak-Verdampfer, mit Sole geheizt	200 bis 800
Kondensator	Kühlwasser innerhalb und organische Dämpfe oder Ammoniak außerhalb der Rohre	300 bis 1200
	Dampfturbinenkondensator (reiner Wasserdampf; dünne Messingrohre)	1500 bis 4000
	k -Wert nimmt mit wachsendem Inertgas-Anteil stark ab.	

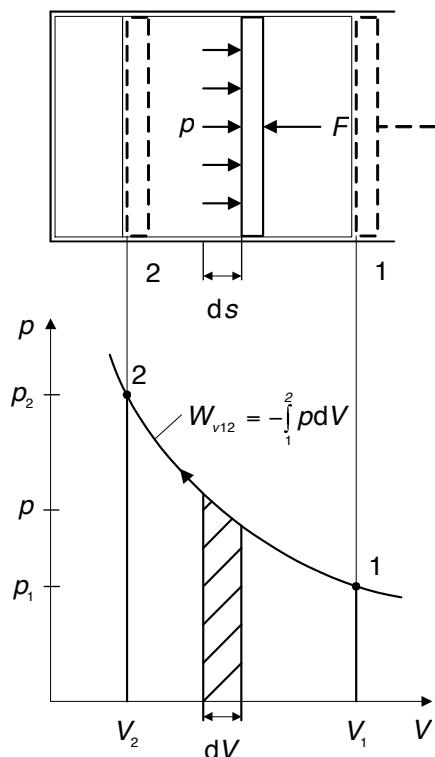
Bauart	Übertragungsbedingungen	überschlägiger <i>k</i> -Wert W/m ² K
Abhitzekessel 	heisse Gase innerhalb der Rohre und siedendes Wasser außerhalb der Rohre	15 bis 50
Gaserhitzer 	Wasserdampf oder Heißwasser innerhalb der Rippenrohre und Gas außerhalb der Rippenrohre a) freie Strömung (Heizkörper) b) erzwungene Strömung	5 bis 12 12 bis 50
Doppelrohr-Wärmeübertrager 	Gas (≈ 1 bar) innerhalb und Gas (≈ 1 bar) außerhalb der Rohre Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Gas (≈ 1 bar) außerhalb der Rohre Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) außerhalb der Rohre Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Flüssigkeit außerhalb der Rohre Flüssigkeiten innerhalb und außerhalb der Rohre	10 bis 35 20 bis 60 150 bis 500 200 bis 600 300 bis 1400
Riesenfilmkühler  <i>Kühlwasser</i>	Kühlwasser außerhalb und Gas (≈ 1 bar) innerhalb der Rohre Kühlwasser außerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb der Rohre Kühlwasser außerhalb und Flüssigkeit innerhalb der Rohre Berieselungskondensator, z. B. für Kältemittel: Kühlwasser außerhalb und kondensierender Dampf innerhalb der Rohre	20 bis 60 150 bis 350 300 bis 900 300 bis 1200
Schlängenkühler 	Kühlwasser oder Sole außerhalb und Gas (≈ 1 bar) innerhalb der Rohrschlange Kühlwasser außerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb der Rohrschlange Kühlwasser oder Sole außerhalb und Flüssigkeit innerhalb der Rohrschlange Kühlwasser oder Sole außerhalb und kondensierender Dampf innerhalb der Rohrschlange	20 bis 60 150 bis 500 200 bis 700 350 bis 900

Bauart	Übertragungsbedingungen	überschlägiger k-Wert W/m ² K
Platten-Wärmeübertrager 	ebene Kanäle, Gas an Wasser ebene Kanäle, Flüssigkeit an Wasser Profilplatten, Flüssigkeit an Flüssigkeit	20 bis 60 350 bis 1200 1000 bis 4000
Taschen-Wärmeübertrager 	Gas an Gas (≈ 1 bar) Gas an Flüssigkeit	10 bis 35 20 bis 60
Spiral-Wärmeübertrager 	Flüssigkeit an Flüssigkeit kondensierender Dampf an Flüssigkeit	700 bis 2500 900 bis 3500
Rührwerkskessel 	A. Außenmantel kondensierender Dampf außerhalb und Flüssigkeit innerhalb des Kessels kondensierender Dampf außerhalb und siedende Flüssigkeit innerhalb des Kessels Kühlwasser oder Sole außerhalb und Flüssigkeit innerhalb des Kessels B. Schlaue innen kondensierender Dampf innerhalb der Schlaue und Flüssigkeit innerhalb des Kessels kondensierender Dampf innerhalb der Schlaue und siedende Flüssigkeit innerhalb des Kessels Kühlwasser oder Sole innerhalb der Schlaue und Flüssigkeit innerhalb des Kessels C. Außenbohrung auf Mantel aufgeschweißt kondensierender Dampf innerhalb der Heizkanäle und Flüssigkeit innerhalb des Kessels kondensierender Dampf innerhalb der Heizkanäle und siedende Flüssigkeit innerhalb des Kessels Kühlwasser oder Sole innerhalb der Kühlkanäle und Flüssigkeit innerhalb des Kessels	500 bis 1500 700 bis 1700 150 bis 350 700 bis 2500 1200 bis 3500 500 bis 1200 500 bis 1700 700 bis 2300 350 bis 900

4.7 Übungen

Versuchen Sie im Sinne einer Selbstkontrolle die Übungen 4.1 bis 4.4 ohne Unterlagen zu lösen.

Übung 4.1: Isotherme Zustandsänderung. Ein ideales Gas der Masse m wird bei konstanter Temperatur vom Zustand 1 (p_1 , V_1 , und T_1) reversibel auf den Zustand 2 (p_2 , V_2 , und $T_2 = T_1$) verdichtet. Wie berechnet man die Volumenänderungsarbeit? Leiten Sie die Gleichung her!



Übung 4.2: Isochore Zustandsänderung. Betrachten Sie die Zustandsänderung 1 → 2 des idealen Gases bei konstantem Volumen. Gegeben ist der Zustand 1 (p_1 , V_1 , und T_1). Vom Zustand 2 kennt man den Druck p_2 . Wie berechnet man die Temperatur T_2 und die Volumenänderungsarbeit?

Ihre Lösung soll die Darstellung der Zustandsänderung in einem p, V -Diagramm sowie eine kurze aber präzise Beschreibung der Berechnungsschritte enthalten!

Übung 4.3: Isobare Zustandsänderung. Wir betrachten ein System bestehend aus Kolben und Zylinder mit konstantem Druck p , welches mit einem idealen Gas gefüllt ist. Gegeben ist der Zustand 1 mit p_1 , V_1 , und T_1 . Vom Zustand 2 kennt man das Volumen V_2 . Wie berechnet man die Temperatur T_2 und die Volumenänderungsarbeit?

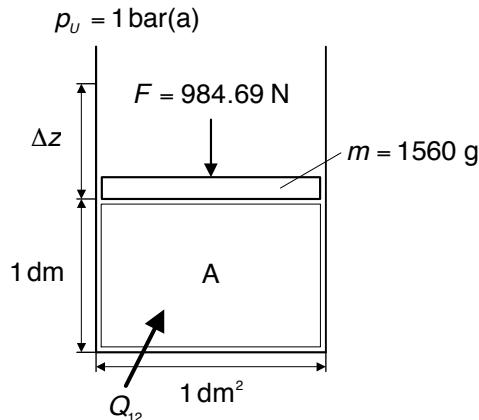
Ihre Lösung soll die Darstellung der Zustandsänderung in einem p, V -Diagramm sowie eine kurze aber präzise Beschreibung der Berechnungsschritte enthalten!

Übung 4.4: Volumenänderungsarbeit.

- Geben Sie die Gleichung für die Berechnung der spezifischen Volumenänderungsarbeit in ihrer allgemeinen Form an.
- Stellen Sie eine isobare Zustandsänderung eines idealen Gases in einem p, V -Diagramm dar und markieren Sie die spezifische Volumenänderungsarbeit.
- Skizzieren Sie schematisch das System, in welchem die unter Teilaufgabe b. dargestellte isobare Zustandsänderung stattfindet, mit den dabei wirkenden Energien "Arbeit" und "Wärme" (bitte Energien in Form von Pfeilen mit klarer Richtungsangabe darstellen).
- Formulieren Sie für die von Ihnen betrachtete Zustandsänderung den 1. HS der Thermodynamik und leiten Sie die Formel zur Berechnung der spezifischen Volumenänderungsarbeit her. Ist die Volumenänderungsarbeit positiv oder negativ? (**P**)

Übung 4.5: Gewichtsbelasteter Kolben. In einem Zylinder von 50 cm Durchmesser befindet sich 0.2 m^3 Gas bei einer Temperatur von 18°C und unter einem Druck von 2 bar(a). Um wieviel hebt sich der gewichtsbelastete, reibungsfrei bewegliche Kolben, wenn die Temperatur auf 200°C steigt? Wie gross ist die Kolbenbelastung, wenn der Luftdruck 1000 mbar(a) beträgt? Wie gross ist die abgegebene Arbeit? ($W_{v12rev} = -25020 \text{ J}$)

Übung 4.6: Durch Wärmezufuhr einen Kolben heben. Das im Zylinder und Kolben eingeschlossene Gas A hat eine Temperatur $\vartheta_A = 27^\circ\text{C}$. Durch Wärmezufuhr an das Gas A wird der Kolben (unter konstanter Belastung $F + F_{Kolben}$) um $\Delta z = 1 \text{ dm}$ gehoben.



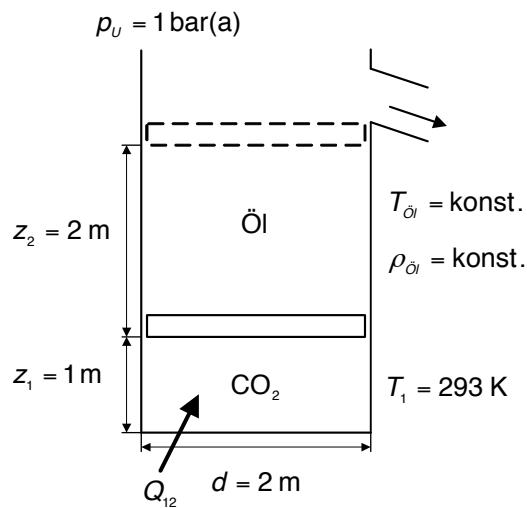
- Welche Arbeit verrichtet dabei das Gas A? ($W_{Ausschiebe} = -200 \text{ J}$)
- Welche resultierende Arbeit verrichtet der Kolben? ($W_{N12} = -100 \text{ J}$)
- Wie gross ist die Endtemperatur des Gases A? ($T_2 = 600 \text{ K}$)
- Stellen Sie die Gasarbeit von A und die Kolbenarbeit in einem p, V -Diagramm dar!

Übung 4.7: Gas expandieren. Ein horizontaler Zylinder mit Kolben enthält 1 dm³ ideales Gas bei 1 bar(a); auf der Gegenseite des Kolbens wirkt der Umgebungsdruck ebenfalls mit 1 bar(a). Das Gas wird nun isotherm und reversibel auf das 5-fache Volumen expandiert. Berechnen Sie:

- a. die Volumenänderungsarbeit des Gases, ($W_{v12rev} = -161 \text{ J}$)
- b. die Gegendruckarbeit am Atmosphärendruck, ($W_{GD\ 12} = 400 \text{ J}$)
- c. die Nutzarbeit des Kolbens, ($W_{N12} = 239 \text{ J}$)
- d. Stellen Sie die drei Arbeiten im p, V -Diagramm dar!

Hinweis: Auf Vorzeichen achten! Unterscheiden Sie die Systeme: Eingeschlossenes Gas, umgebende Atmosphäre, Kolben.

Übung 4.8: Zweifach beaufschlagter Kolben. Im unteren Teil des Zylinder/Kolben-Systems befindet sich CO₂-Gas anfänglich bis zur Höhe z_1 . Der obere Teil ist mit Öl bis zum Überlauf gefüllt. Dort wirkt der Umgebungsdruck p_U . Durch Wärmezufuhr an das CO₂-Gas verschiebt sich der Kolben auf die Höhe z_2 , so dass kein Öl mehr im Zylinder ist. Das Kolbengewicht sei vernachlässigbar.



- Auf welche Endtemperatur muss das CO₂ erwärmt werden? ($T_2 = 753 \text{ K}$)
- Welche Volumenänderungsarbeit verrichtet bei diesem Prozess das CO₂? ($W_{v12} = -681 \text{ kJ}$)
- Stellen Sie den Prozess im p, V -Diagramm dar!

Stoffdaten: $\rho_{Oel} = 854 \text{ kg/m}^3$, $R_{CO2} = 189 \text{ J/kg K}$

Übung 4.9: Isotherme Expansion in einem offenen System. Luft mit einer Temperatur von 27°C soll isotherm von $p_1 = 10 \text{ bar(a)}$ auf $p_2 = 1 \text{ bar(a)}$ entspannt werden ($R_L = 287 \text{ J/kg K}$). Wie gross ist die spezifische reversible Druckänderungsarbeit $w_{p12\text{rev}}$? ($w_{p12\text{rev}} = -198.35 \text{ kJ/kg}$)

Kapitel 5

Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen

5.1 Erhaltungssätze

Erhaltungssätze sind in der Naturwissenschaft und Technik von grosser Bedeutung. Sie kennen beispielsweise bereits den Energieerhaltungssatz aus der Mechanik, wonach die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant bleibt ($E_{pot} + E_{kin} = \text{konst.}$). Wir werden bald den 1. Hauptsatz der Thermodynamik als allgemeinen Energieerhaltungssatz kennen lernen.

Allgemein gelten folgende Erhaltungssätze:

- Erhaltung der **Materie (Masse)**
- Erhaltung der **Energie (1. HS)**
- Erhaltung der **elektrischen Ladung** (Ladungen sind nur verschiebbar)

Unter gewissen Voraussetzungen gelten ebenfalls:

- Erhaltung der **Entropie** bei reversiblen Prozessen
- Erhaltung des **Impulses**, wenn keine äusseren Kräfte wirken

5.2 Die allgemeine Bilanzgleichung

Jeder der oben aufgeführten Erhaltungssätze führt für ein bestimmtes Bilanzgebiet zu einer Bilanzgleichung folgender Form:



$$\boxed{\text{Zeitliche Änderung der Menge im System} = \text{Zugeführte Menge} - \text{Abgeführte Menge}}$$

Im stationären Zustand gilt:

$$\boxed{\text{Zugeführte Menge} = \text{Abgeführte Menge}}$$

Beispiel 5.1: Allgemeine Bilanzgleichung. Zur Verdeutlichung der allgemeinen Bilanzgleichung betrachten wir das Konto eines Studenten der HSLU. Überlegen Sie sich, wie Sie die allgemeine Bilanzgleichung für Ihr Konto formulieren könnten (Sie müssen keine Zahlen nennen, die Formeln reichen).

Lösung: Wir bezeichnen die Geldmenge mit G . Es ist:

Geldmenge *im* System zur Zeit t : $G(t)$ in CHF

Zugeführte Geldmenge: \dot{G}_{zu} in CHF/Monat

Abgeführte Geldmenge: \dot{G}_{ab} in CHF/Monat

Die Bilanzgleichung lautet:

$$\frac{dG}{dt} = \sum \dot{G}_{zu} - \sum \dot{G}_{ab}$$

Oder als konkretes Beispiel

$$\frac{dG}{dt} = \dot{G}_{Stipendium} + \dot{G}_{Job} - \dot{G}_{Miete} - \dot{G}_{Verpflegung} - \dot{G}_{Ausgang}$$

dG/dt ist die zeitliche Änderung der Geldmenge im System, d.h. Ihr Kontostand. Für einen typischen Studenten der HSLU ist die abgeführte Menge grösser als die zugeführte Menge, d.h. der Kontostand sinkt über die Zeit.

5.3 Massen- und Stoffbilanz

Die allgemeine Bilanzgleichung auf die Erhaltung der Gesamtmasse angewendet ergibt die **Massenbilanz**:

$$\frac{dm}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} - \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega}$$

dm/dt = zeitliche Änderung der Masse im System
 $(dm/dt > 0$: Zunahme, $dm/dt < 0$: Abnahme)

\dot{m}_{α} = eintretender Massenstrom [kg/s]

\dot{m}_{ω} = austretender Massenstrom [kg/s]

Im stationären Fall gilt:

Eintretende Massenströme = Austretende Massenströme

$$\sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} = \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega}$$

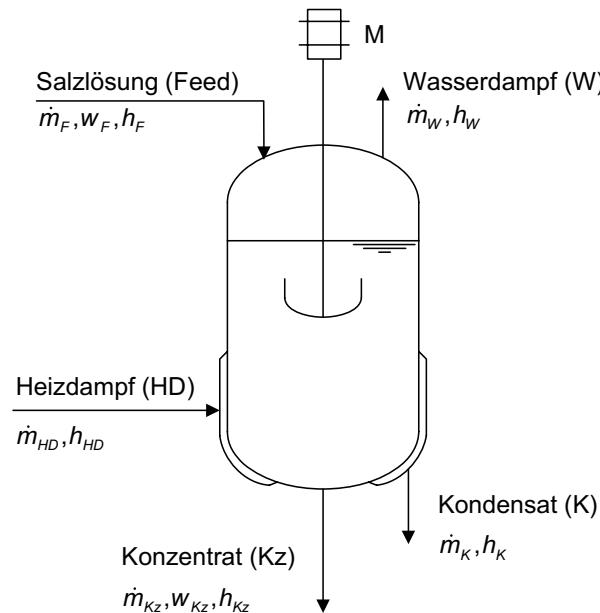
Setzen sich die Massenströme aus mehreren Komponenten (Stoffen) zusammen, so muss die Erhaltung der Masse jeder Komponente zutreffen. Somit erhält man für jede Komponente i mit dem Massenanteil w_i eine **Stoffbilanz** folgender Art:

$$\frac{d(m w_i)}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} w_{i\alpha} - \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} w_{i\omega}$$

Im stationären Fall gilt:

$$\sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} w_{i\alpha} = \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} w_{i\omega}$$

Beispiel 5.2: Massen- und Stoffbilanz. In einem Rührkessel wird eine Salzlösung (z.B. Meerwasser) aufkonzentriert, indem ein Teil des Wassers ausgedampft wird. Die Wärmezufuhr erfolgt mittels Heizdampf, welcher im Mantelraum kondensiert wird. Wählen Sie eine geeignete Bilanzgrenze und bilanzieren Sie den Kessel bezüglich der Gesamtmasse sowie der Komponente Salz im stationären Zustand.



Massenbilanz:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_F - (\dot{m}_{Kz} + \dot{m}_W)$$

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{HD} - \dot{m}_K$$

Stoffbilanz:

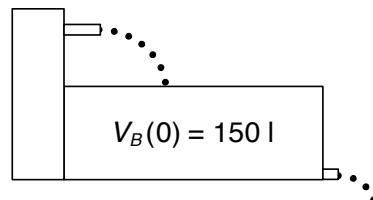
$$\frac{d(m w)}{dt} = \dot{m}_F w_F - \dot{m}_{Kz} w_{Kz}$$

stationär:

$$\dot{m}_F = \dot{m}_{Kz} + \dot{m}_W$$

$$\dot{m}_F w_F = \dot{m}_{Kz} w_{Kz}$$

Beispiel 5.3: Brunnen. Ein Brunnen ($V_B = 150 \text{ l}$) habe einen konstanten Zulauf von 500 l/h und einen konstanten Ablauf von 360 l/h. Dichte von Wasser: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Zur Zeit $t = 0$ ist der Brunnen halb gefüllt. Wie lange dauert es, bis der Brunnen überläuft?



Lösung: Die Massenbilanzgleichung für dieses System lautet:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_\alpha - \dot{m}_\omega$$

Die Masse des Wassers bzw. der Massenstrom kann berechnet werden mit:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho (\dot{V}_\alpha - \dot{V}_\omega)$$

Für eine konstante Dichte des Wassers folgt:

$$\int_{V_0}^{V_B} dV = (\dot{V}_\alpha - \dot{V}_\omega) \int_0^t dt$$

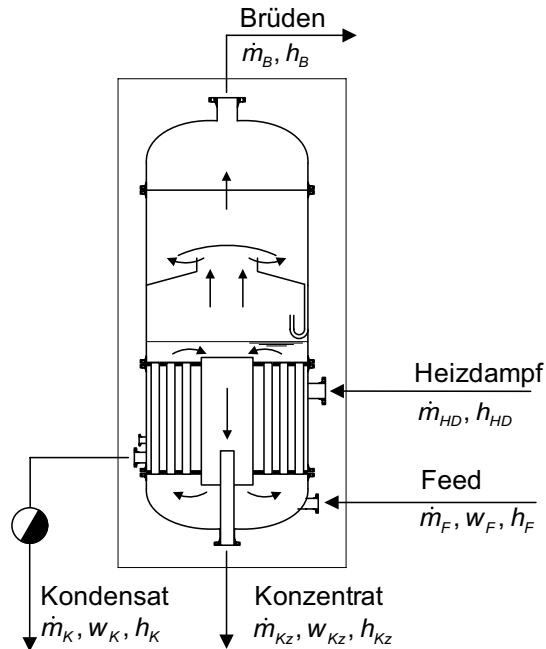
Durch Integrieren erhält man:

$$V_B - V_0 = (\dot{V}_\alpha - \dot{V}_\omega) t$$

Durch Umstellen folgt für die Fülldauer t :

$$t = \frac{V_B - V_0}{\dot{V}_\alpha - \dot{V}_\omega} = \frac{150 - 75}{500 - 360} = 0.54 \text{ h} = 32 \text{ min}$$

Beispiel 5.4: Kontinuierliche Eindampfung einer Zuckerlösung. Wir betrachten einen Verdampfer zur Aufkonzentrierung einer Zuckerlösung. Dem Verdampfer werden $\dot{m}_F = 1200 \text{ kg/h}$ Zuckerlösung mit der Zusammensetzung $w_F = 0.1$ (kg Zucker / kg Lösung) zugeführt. Durch Wärmezufuhr verdampfen $\dot{m}_B = 300 \text{ kg/h}$ Wasser. Wie gross ist der austretende Massenstrom \dot{m}_{Kz} der aufkonzentrierten Zuckerlösung und welche Zusammensetzung w_{Kz} weist er auf?



Lösung:

Für den stationären Betrieb gilt:

Massenbilanz:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{m}_F + \dot{m}_{HD} - \dot{m}_{Kz} - \dot{m}_B - \dot{m}_K \\ \Rightarrow \dot{m}_F &= \dot{m}_{Kz} + \dot{m}_B \end{aligned}$$

Stoffbilanzen:

Wasser:

$$\dot{m}_F (1 - w_F) = \dot{m}_{Kz} (1 - w_{Kz}) + \dot{m}_B$$

Zucker:

$$\dot{m}_F w_F = \dot{m}_{Kz} w_{Kz}$$

Durch die Addition der beiden Stoffbilanzgleichungen erhält man die Massenbilanz (einfache Möglichkeit zur Kontrolle). Aus den Massen- und Stoffbilanzen folgt:

Konzentratstrom:

$$\dot{m}_{Kz} = \dot{m}_F - \dot{m}_B = 900 \text{ kg/h}$$

Massenanteil Zucker im Konzentrat:

$$w_{Kz} = w_F \frac{\dot{m}_F}{\dot{m}_{Kz}} = w_F \frac{\dot{m}_F}{\dot{m}_F - \dot{m}_B} = 0.133$$

5.4 Energiebilanz / Leistungsbilanz

Die Erhaltung der Energie führt zu folgender allgemeiner Bilanzgleichung (**Energiebilanzgleichung**):

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{E}_{\alpha} - \sum_{\omega} \dot{E}_{\omega}$$

Analog zur Massen- und Stoffbilanz gilt: Ist die Veränderung im Bilanzgebiet $dE/dt \neq 0$, handelt es sich um einen instationären Vorgang (z.B. Aufheizen, Abkühlen). Für stationäre Prozesse gilt:

$$\text{Zugeführte Energieströme} = \text{Abgeführte Energieströme}$$

$$\sum_{\alpha} \dot{E}_{\alpha} = \sum_{\omega} \dot{E}_{\omega}$$

Die in ein Bilanzgebiet ein- und austretenden Energieströme \dot{E} setzen sich zusammen aus:

- mit den ein- und austretenden Massenströmen transportierte Energie: $\dot{H} = \dot{m} h$
- kinetische und potentielle Energie: $\dot{E}_{kin} = \dot{m} c^2/2$, $\dot{E}_{pot} = \dot{m} g z$
- mechanische Leistung (z.B. Kolben, rotierende Wellen, Rührer): P_{mech}
- elektrische Leistung (z.B. elektrische Heizung): P_{el}
- Wärmestrom (z.B. Heizung, Kühlung, Wärmeverluste): \dot{Q}

Somit lautet die **Leistungsbilanzgleichung für instationäre Systeme ohne chemische Reaktionen** in der allgemeinen Form:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = & \sum_{\alpha} P_{\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \left(h_{\alpha} + \frac{c_{\alpha}^2}{2} + g z_{\alpha} \right) \\ & - \left[\sum_{\omega} P_{\omega} + \sum_{\omega} \dot{Q}_{\omega} + \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} \left(h_{\omega} + \frac{c_{\omega}^2}{2} + g z_{\omega} \right) \right]\end{aligned}$$

Die Bezugstemperaturen (Nullpunkt) der spezifischen Enthalpien h der einzelnen Stoffe sind in geeigneter Weise aufeinander abzustimmen. Häufig setzt man $h = 0$ J/kg bei 0°C an. **Achtung:** In dieser Form sind die eingesetzten *Zahlenwerte* für die Leistungen P und Wärmeströme \dot{Q} *positiv*.

In der Praxis ist die folgende Form der Leistungsbilanzgleichung verbreitet:

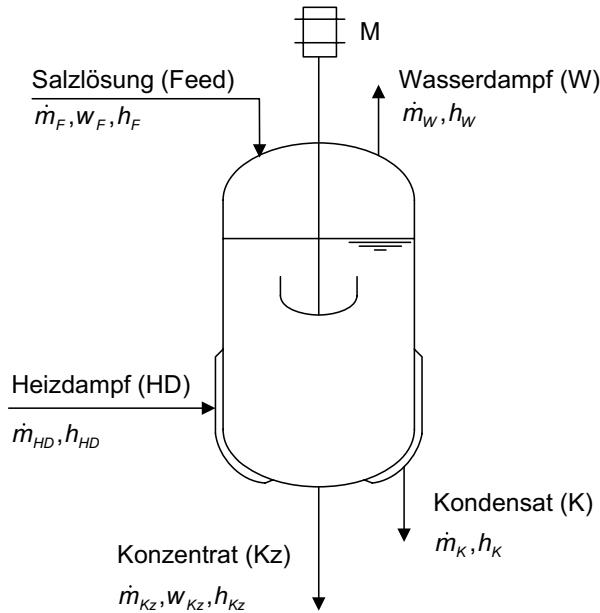
$$\frac{dE}{dt} = \sum P + \sum \dot{Q} + \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \left(h_{\alpha} + \frac{c_{\alpha}^2}{2} + g z_{\alpha} \right) - \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} \left(h_{\omega} + \frac{c_{\omega}^2}{2} + g z_{\omega} \right)$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als der 1. HS der Thermodynamik in der allgemeinen Form, welchen wir im nächsten Kapitel eingehend behandeln werden. **Achtung:** Es ist darauf zu achten, dass in dieser Form alle zugeführten Energieströme *positiv* und alle abgeführten Energieströme *negativ* eingesetzt werden.

Diese Form lässt sich einfach in den 1. HS für stationäre Systeme überführen, d.h. $dE/dt = 0$:

$$\sum P + \sum \dot{Q} = \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} \left(h_{\omega} + \frac{c_{\omega}^2}{2} + g z_{\omega} \right) - \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \left(h_{\alpha} + \frac{c_{\alpha}^2}{2} + g z_{\alpha} \right)$$

Beispiel 5.5: Energiebilanz. Wir betrachten nochmals den Rührkessel aus Beispiel 5.2. Wie lautet die Energiebilanzgleichung des Rührkessels mit der von Ihnen gewählten Bilanzgrenze? Überlegen Sie sich genau, welche Energieströme die Bilanzgrenze durchqueren!



stationäre Bedingungen:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha} = \sum_{\omega} P_{\omega}$$

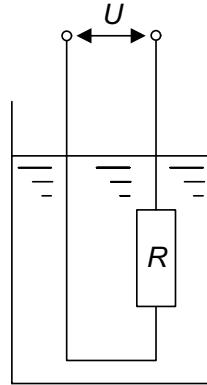
$$\sum_{\alpha} P_{\alpha} + \sum_{\alpha} Q_{\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \left(h_{\alpha} + \frac{c_{\alpha}^2}{2} + g z_{\alpha} \right) = \sum_{\omega} P_{\omega} + \sum_{\omega} Q_{\omega} + \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} \left(h_{\omega} + \frac{c_{\omega}^2}{2} + g z_{\omega} \right)$$

$$\text{SG1: } \dot{m}_F h_F + \dot{m}_{HD} h_{HD} + P_{mech} = \dot{m}_W h_W + \dot{m}_{Kz} h_{Kz} + \dot{m}_K h_K + \dot{Q}_{Verlust}$$

$$\text{SG2: } \dot{m}_F h_F + P_{mech} + \dot{Q}_{HD} = \dot{m}_W h_W + \dot{m}_{Kz} h_{Kz} + \dot{Q}_{Verlust}$$

Beispiel 5.6: Wasser erwärmen. Obwohl wir den 1. HS noch nicht kennen, “wagen” wir uns an ein konkretes Beispiel.

In einer Pfanne befindet sich 1 Liter Wasser ($c_p = 4.2 \text{ kJ/kg K}$) bei einer Temperatur von 20°C . Mit einem Tauchsieder mit einer elektrischen Leistung von 1 kW wird das Wasser erwärmt. Wie lange dauert es, bis das Wasser 80°C warm ist? Die Erwärmung des Behälters kann vernachlässigt werden.



Die Energiebilanz lautet:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{E}_{\alpha} - \sum_{\omega} \dot{E}_{\omega}$$

Aus der Berufsschule erinnern Sie sich vielleicht noch, dass der Energieinhalt eines solchen Systems mit der Masse, spezifischen Wärmekapazität und Temperatur beschrieben wird:

$$E(t) = m c_p \vartheta(t)$$

Der zugeführte Energiestrom ist die elektrische Leistung P_{el} . Es wird kein Energiestrom abgeführt.

Die Energiebilanz ist also:

$$\frac{d}{dt} (m c_p \vartheta) = P_{el}$$

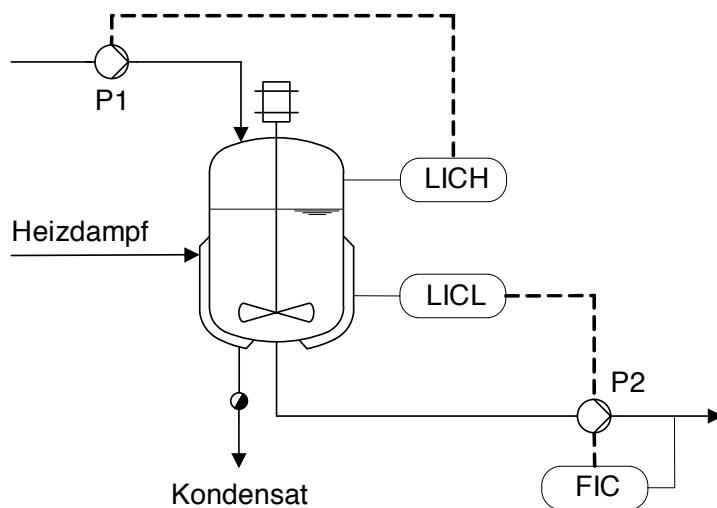
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{P_{el}}{m c_p}$$

Daraus kann die Zeit für die Erwärmung einfach berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta &= \frac{P_{el}}{m c_p} \int_0^t dt \\ t &= \frac{m c_p (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{P_{el}} = 252 \text{ s} \end{aligned}$$

5.5 Übungen

Übung 5.1: Befüllen eines Rührkessels. Ein Rührkessel mit einem Fassungsvermögen von 3000 l (bis LICH = Level Indication Control High) soll mit Ethanol (Dichte 790 kg/m³) befüllt werden. Zu Beginn des Prozesses befinden sich 800 l im Rührkessel. Die beiden Pumpen fördern konstante Volumenströme: P1 1'250 l/h und P2 720 l/h. Wie lange dauert es, bis die Pumpe P1 ausschaltet, d.h. bis "Level High" erreicht ist?



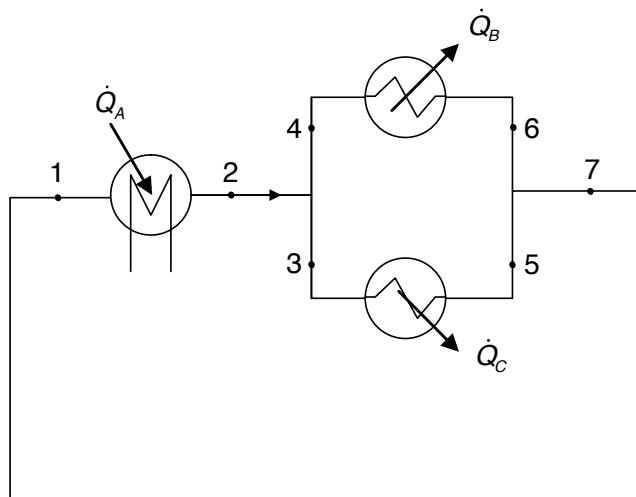
Übung 5.2: Evakuieren eines Behälters. Ein unter Vakuum arbeitender Verdampfer wird bei Inbetriebnahme durch eine volumetrisch fördernde Vakuum-Pumpe evakuiert. Das Behältervolumen V_B sei 2 m³. Der Förderstrom (Volumenstrom \dot{V}) der Pumpe beträgt $10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$. Die Anfangsdichte beträgt $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$. Die Temperatur sei konstant.

- Wie ändert sich die Dichte ρ der Luft im Behälter mit der Zeit? $\left(\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\dot{V}}{V_B} t} \right)$
- Wie lange dauert es, bis die Dichte der Luft im Behälter 50% des Anfangswertes beträgt?
($t = 139 \text{ s}$)

Hinweis: "Volumetrisch fördernd" heisst, dass der geförderte Volumenstrom trotz veränderlichem Druckverhältnis konstant ist.

Übung 5.3: Heizsystem mit flüssiger Salzlösung. Im skizzierten Heizsystem wird dem Salzlösungskreislauf mit einer Ölfeuerung der Wärmestrom $\dot{Q}_A = 40 \text{ MW}$ zugeführt und in den zwei Teilströmen mit dem Massenstromverhältnis $\dot{m}_3/\dot{m}_4 = 1$ die Wärmeströme \dot{Q}_B und \dot{Q}_C abgeführt. Die Rohrleitungen sind gut isoliert. Die spezifische Wärmekapazität der Salzlösung beträgt $c_p = 4.0 \text{ kJ/kg K}$.

Ergänzen Sie die Tabelle und bestimmen Sie die Wärmeströme \dot{Q}_B und \dot{Q}_C . ($\dot{Q}_B = -30 \text{ MW}$, $\dot{Q}_C = -10 \text{ MW}$)



Punkt	1	2	3	4	5	6	7
$\vartheta [^\circ\text{C}]$		250			200		
$\dot{m} [\text{kg/s}]$		100					

Numerische Lösung

Punkt	1	2	3	4	5	6	7
$\vartheta [^\circ\text{C}]$	150	250	250	250	200	100	150
$\dot{m} [\text{kg/s}]$	100	100	50	50	50	50	100

Kapitel 6

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

6.1 Einleitung

Die **Energie** ist eine fundamentale Grösse der Thermodynamik. Der 1. Hauptsatz (1. HS) der Thermodynamik bringt das Prinzip der Erhaltung der Energie zum Ausdruck.

Wir kennen den Energieerhaltungssatz aus der Mechanik. In der Thermodynamik müssen wir diesen erweitern, indem neue Energieformen definiert werden – nämlich **innere Energie** und **Wärme**.

Der 1. Hauptsatz (HS) der Thermodynamik ist ein “Postulat” der allgemeinen *Energie-Erhaltung* als *Energie-Quantität* (nicht als Qualität).

Wir führen den 1. HS durch Postulate ein. Der 1. HS ist ein Fundamentalsatz; er kann nicht aus anderen grundlegenden Sätzen hergeleitet werden.

Der 1. HS macht zwei wesentliche Aussagen über

- die Existenz einer Zustandsgrösse Energie und
- den allgemeinen Erhaltungssatz.

Wir formulieren den 1. HS gemäss Baehr durch die folgenden Postulate:

1. Jedes System besitzt eine extensive Zustandsgrösse Energie E .
2. Die Energie eines Systems kann sich nur durch Energietransport über die Systemgrenze ändern: Für Energien gilt ein Erhaltungssatz.
3. Kinetische und potentielle Energien der Mechanik sind besondere Formen der Energie. Das Verrichten von mechanischer Arbeit ist eine mögliche Form des Energietransports über die Systemgrenze.

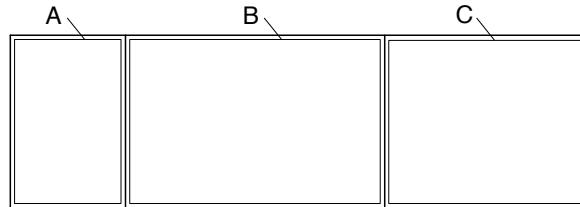
Nachfolgend erläutern wir diese Postulate.

6.2 Die Energie eines Systems

6.2.1 Zustandsgrösse Energie E

Jedes System besitzt eine **extensive Zustandsgrösse Energie E** . Für ein System mit mehreren Teilsystemen A, B, C, ... mit den jeweiligen Energien E_A , E_B , E_C , ... gilt:

$$E = E_A + E_B + E_C + \dots \quad [\text{J}]$$



Bezieht man die Energie auf die im System enthaltene Masse, so erhält man die **spezifische Energie**:

$$e := \frac{E}{m} \quad [\text{J/kg}]$$

6.2.2 Zustandsgrösse Innere Energie U

Wenn sich ein System in einem konservativen Kraftfeld bewegt, besitzt es kinetische Energie E_{kin} und potentielle Energie E_{pot} (extensive Zustandsgrößen). Aber auch ein ruhendes System hat eine Energie – man bezeichnet sie als **innere Energie U** :

$$U := E - E_{kin} - E_{pot} \quad [\text{J}]$$

Die innere Energie U ist ebenfalls eine extensive Zustandsgrösse. Die **spezifische innere Energie u** ist

$$u := \frac{U}{m} \quad [\text{J/kg}]$$

6.2.3 Zustandsgrösse Enthalpie H

Wenn Energie mit einem Massenstrom über die Systemgrenze transportiert wird, so wird diese mit der Enthalpie H (extensive Zustandsgrösse) beschrieben.

$$H := U + pV \quad [\text{J}]$$

Die Enthalpie setzt sich zusammen aus der inneren Energie U und dem Produkt pV . Die spezifische Enthalpie h ist definiert durch:

$$h := \frac{H}{m} = u + pV \quad [\text{J/kg}]$$

6.3 Die Energiebilanzgleichung: 1. HS der Thermo-dynamik

Der 1. HS postuliert für die Energie einen Erhaltungssatz. Die Energie ändert sich nur dadurch, dass Energie während eines Prozesses ($1 \rightarrow 2$) über die Systemgrenze zu- oder abgeführt wird. Wir unterscheiden drei Arten des Energietransports:

1. das Verrichten von Arbeit W_{12}
2. das Übertragen von Wärme Q_{12} und
3. den an einen Materiefluss über die Systemgrenze gekoppelten Energietransport.

Die drittgenannte Art kann nur bei offenen Systemen auftreten.

Arbeit (W_{12}) und Wärme (Q_{12}) sind Bezeichnungen für Energien, die während eines Prozesses die Systemgrenze überschreiten. Arbeit und Wärme treten nur im Laufe des Prozesses auf – sie sind keine Zustandsgrößen, sondern Prozessgrößen.

1. HS für geschlossene Systeme

$$Q_{12} + W_{12} = E_2 - E_1$$

Die (zeitliche) Energieänderung, die ein geschlossenes System während des Prozesses erfährt, ist gleich der Energie, die während des Prozesses die Systemgrenze als Wärme und als Arbeit überschreitet.

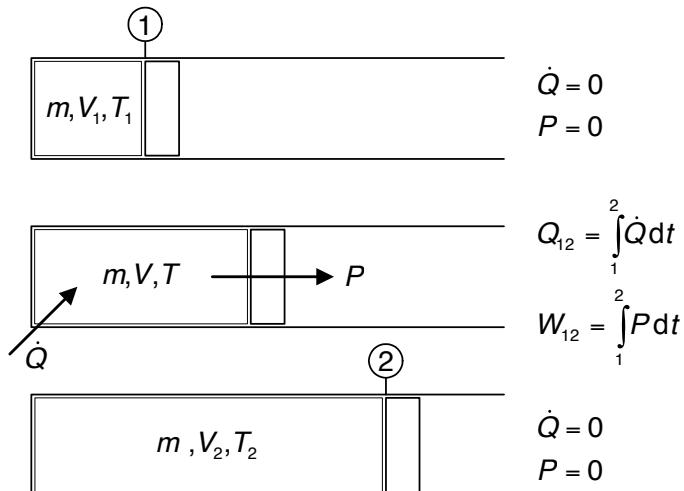
Diese Gleichung ist ein Postulat, d.h. sie ist mathematisch nicht beweisbar. Die Energiebilanzgleichung ist eine empirische Erfahrungstatsache (sie ist nie durch ein Experiment widerlegt worden). Meistens betrachten wir ruhende geschlossene Systeme - ihre kinetische und potentielle Energie ändert sich nicht. Der 1. HS lautet also

$$Q_{12} + W_{12} = U_2 - U_1$$

Bezieht man die Prozessgrößen Wärme Q_{12} und Arbeit W_{12} sowie die Zustandsgrößen U_1 und U_2 auf die Masse m des Systems, so lautet der 1. HS:

$$q_{12} + w_{12} = u_2 - u_1$$

Die Energieerhaltung für das ruhende geschlossene System: Zusammenfassung



Postulat der Energieerhaltung:

- Der Stoff m im System besitzt die **innere Energie U** .
- U ist eindeutig bestimmt durch die Masse m im System und die thermischen Zustandsgrößen. U ist eine **energetische Zustandsgröße**.
- U kann nur durch Energietransport über die Systemgrenze verändert werden, d.h.
 - Wärme $dQ_{12} = T dS_Q$
 - Arbeit $dW_{12} = \vec{F} \cdot d\vec{s}$
- Die Energiebilanzgleichung lautet:

$$Q_{12} + W_{12} = U_2 - U_1$$

Vorzeichen und Einheiten

$W_{12} > 0$: Arbeitszufuhr [J]

$W_{12} < 0$: Arbeitsabfuhr [J]

$Q_{12} > 0$: Wärmezufuhr [J]

$Q_{12} < 0$: Wärmeabfuhr [J]

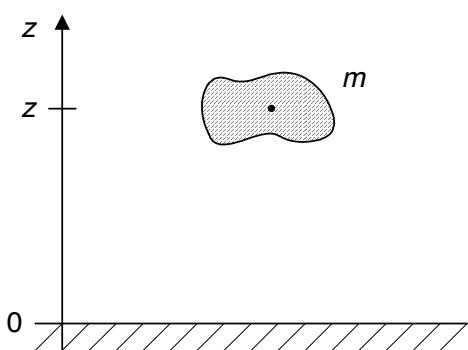
$U_2 - U_1 > 0$: Innere Energie nimmt durch Prozess $1 \rightarrow 2$ zu

$U_2 - U_1 < 0$: Innere Energie nimmt durch Prozess $1 \rightarrow 2$ ab

6.4 Die innere Energie: eine energetische Zustandsgrösse

6.4.1 Überblick

Mechanisches System



$$E_{pot} = f(m, g, z)$$

$$E_{pot} = m g z \text{ [J]}$$

$$e_{pot} = g z \text{ [J/kg]}$$

Innere Energie eines Stoffes:

$$U = U(m, V, T)$$

Spezifische innere Energie eines Stoffes:

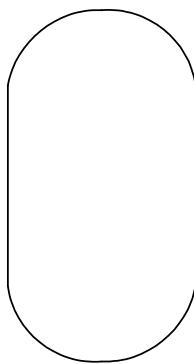
$$u = u(v, T)$$

Die innere Energie ist eine **Zustandsgrösse**; sie ist durch den thermischen Zustand bestimmt. u ist für eine Vielzahl von Stoffen experimentell ermittelt und in Diagrammen bzw. Tabellen dargestellt.

Wir müssen dabei zwischen

- a) Gasen (reale, ideale und perfekte Gase),
- b) Flüssigkeiten und
- c) Feststoffen

unterscheiden.



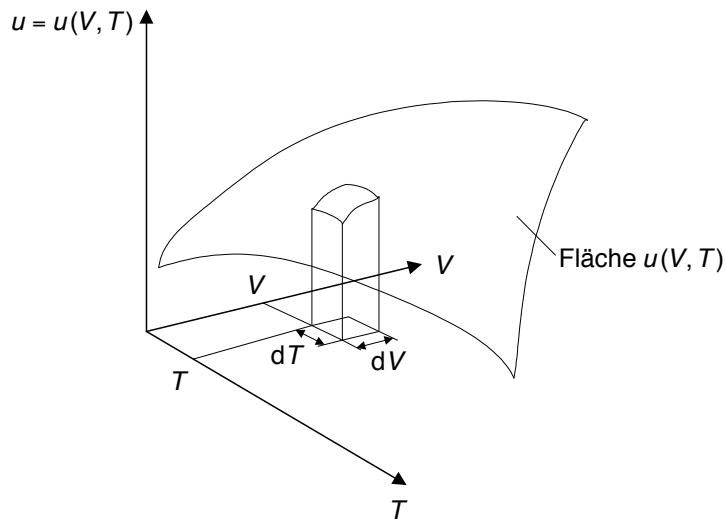
$$U = f(m, V, T)$$

$$U = \dots \text{ [J]}$$

$$u = \frac{U}{m} \text{ [J/kg]}$$

Allgemeine Darstellung

Die Funktion $u = u(V, T)$ kann als Fläche dargestellt werden:



Wenn T um dT ändert und V um dV ändert, so ändert sich u um:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T dV$$

Allgemein gilt:

$$du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T dV$$

Ideale Gase:

$$du = c_v dT \quad u(T) = \int_{T_0}^T c_v(T) dT$$

Perfekte Gase:

$$du = c_v dT \quad u(T) = c_v \int_{T_0}^T dT = c_v (T - T_0) + u_0$$

6.4.2 Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v

Die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v bezeichnet die Änderung der spezifischen inneren Energie bei konstantem Volumen ($dV = 0$).

In diesem Fall ist:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT = c_v dT$$

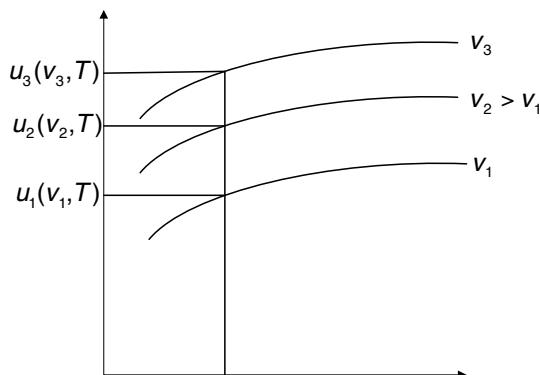
und

$$c_v(v, T) = \frac{du}{dT} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$$

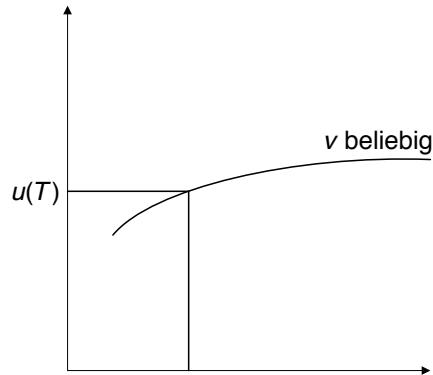
c_v ist die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

6.4.3 Die innere Energie von gasförmigen Stoffen

Reale Gase

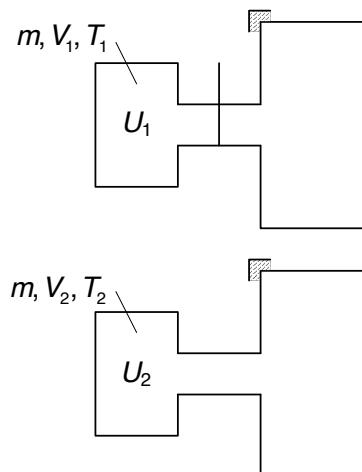


$u(v, T)$ aus Experimenten mit änderndem spezifischen Volumen v und mit ändernder Temperatur T .

Ideale Gase

$u = u(T)$, $u \neq u(v)$, $u \neq u(p) \rightarrow u$ ist nur eine Funktion der Temperatur

Der Überstrom-Versuch von Joule



Schieber entfernen
System abgeschlossen

$$\text{1. HS: } W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

$$W_{12} = 0, Q_{12} = 0 \Rightarrow U_1(m, T_1, V_1) = U_2(m, T_2, V_2)$$

$$\text{Ideales Gas: } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\text{Aus Experimenten: } T_2 = T_1, \quad p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$U_2(m, T_2 = T_1, V_2) = U_1(m, T_1, V_1)$$

Das bedeutet, die innere Energie U ist nicht vom Volumen V abhängig!

In den nachfolgenden Tabellen sind Stoffwerte von Gasen sowie die molaren und spezifischen Wärmekapazitäten beim Normzustand aufgeführt. Quelle: Cerbe/Hoffmann, 1994

T 2.1 Stoffwerte von Gasen*

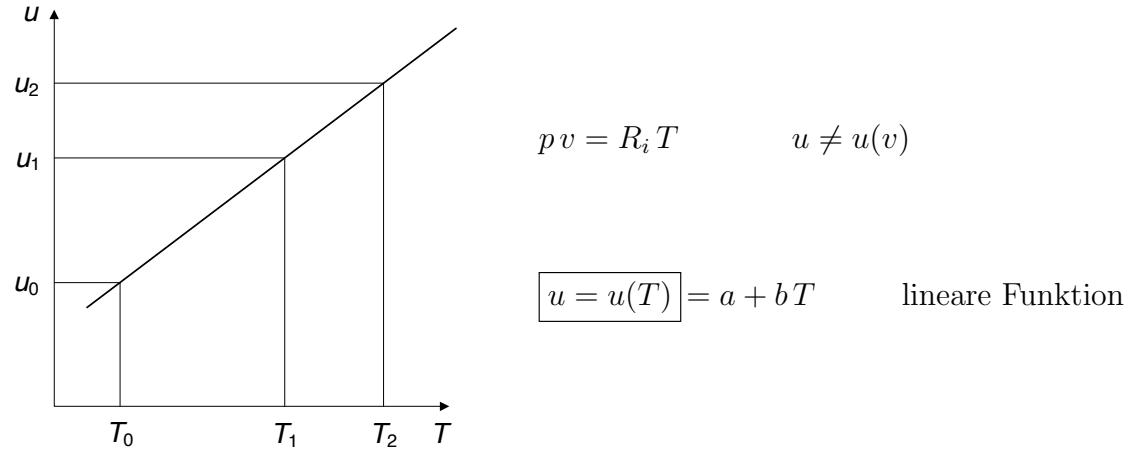
* M , R_i , C_{m_p} und c_p nach Stephan/Mayinger [6].

Gas	Chemisches Symbol	Molares Normvolumen V_{mn} bei 0°C, 1,01325 bar	Molare Masse M	Spezielle Gaskonstante R_i
		$\frac{m^3}{kmol}$	$\frac{kg}{kmol}$	$\frac{J}{kg K}$
Helium	He	22,426	4,0026	2077,3
Argon	Ar	22,392	39,948	208,1
Wasserstoff	H ₂	22,428	2,0159	4124,5
Stickstoff	N ₂	22,403	28,0134	296,8
Sauerstoff	O ₂	22,392	31,9988	259,8
Luft (trocken)	—	22,400	28,953	287,2
Kohlenmonoxid	CO	22,400	28,0104	296,8
Kohlendioxid	CO ₂	22,261	44,0098	188,9
Schwefeldioxid	SO ₂	21,856	64,059	129,8
Ammoniak	NH ₃	22,065	17,0305	488,2
Methan	CH ₄	22,360	16,043	518,3
Ethin (Acetylen)	C ₂ H ₂	22,226	26,038	319,3
Ethen (Ethylen)	C ₂ H ₄	22,245	28,053	296,4
Ethan	C ₂ H ₆	22,191	30,070	276,5

V_{mn} und ϱ_n nach DIN 1871 (5.80), C_{m_p} , c_v und α nach Gl. 2.21 und Gl. 2.22 berechnet.

Dichte im Normzustand ϱ_n bei 0°C, 1,01325 bar	Molare und spezifische Wärmekapazität bei 0°C und idealem Gaszustand				$\alpha = \frac{c_p}{c_v}$ bei 0°C und idealem Gaszustand	Gas
	C_{m_p} kJ kmol K	c_p kJ kg K	C_{m_p} kJ kmol K	c_v kJ kg K		
0,17848	20,9644	5,2377	12,6499	3,1604	1,657	Helium
1,7840	20,7858	0,5203	12,4713	0,3122	1,667	Argon
0,08988	28,6228	14,2003	20,3083	10,0758	1,409	Wasserstoff
1,2504	29,0967	1,0389	20,7823	0,7421	1,400	Stickstoff
1,4290	29,2722	0,9150	20,9578	0,6552	1,397	Sauerstoff
1,2930	29,0743	1,0043	20,7598	0,7171	1,401	Luft
1,2505	29,1242	1,0403	20,8097	0,7435	1,399	Kohlenmonoxid
1,9770	35,9336	0,8169	27,6191	0,6280	1,301	Kohlendioxid
2,9310	38,9666	0,6092	30,6521	0,4794	1,271	Schwefeldioxid
0,7718	35,0018	2,0557	26,6873	1,5675	1,312	Ammoniak
0,7175	34,5667	2,1562	26,2522	1,6379	1,316	Methan
1,1715	39,3536	1,5127	31,0391	1,1934	1,268	Ethin(Acetylen)
1,2611	45,1842	1,6119	36,8697	1,3155	1,225	Ethen(Ethylen)
1,3550	51,9556	1,7291	43,6411	1,4526	1,190	Ethan

Perfekte Gase



$u_0, T_0 =$ Normierung

Innere Energie:

$$u_1 = u_0 + c_v (T_1 - T_0)$$

$$\text{spezifisch} \quad u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

$$u_2 = u_0 + c_v (T_2 - T_0)$$

$$\text{extensiv} \quad U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1)$$

$$u = u_0 + c_v (T - T_0)$$

$$\text{analog} \quad E_{pot\ 2} - E_{pot\ 1} = m g (z_2 - z_1)$$

$c_v =$ spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen

$$c_v = \frac{u_2 - u_1}{T_2 - T_1} \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$$

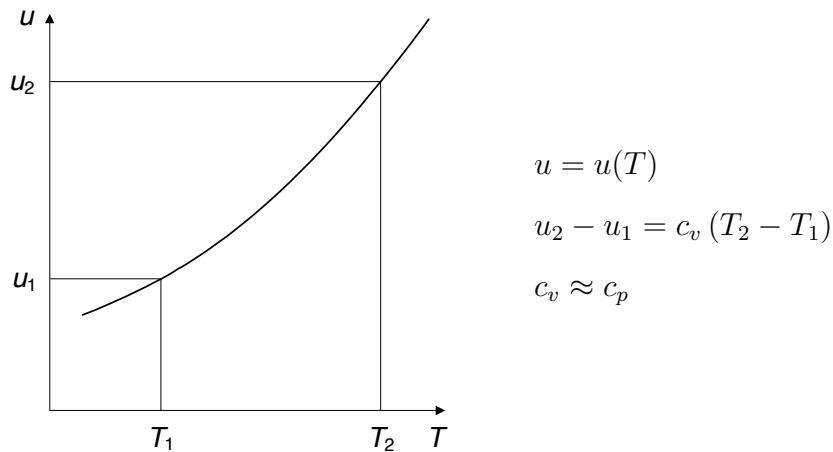
$c_v \hat{=} \text{Zunahme der inneren Energie pro kg Masse bei einer Erwärmung um 1 K.}$

c_v für verschiedene Gase

Gas	H ₂	He	Luft	Ar
c_v [J/kg K]	10'074	3160	717	312
M [g/mol]	2	4	29	40

6.4.4 Die innere Energie von festen und flüssigen Stoffen

Flüssigkeiten und Feststoffe können in guter Näherung als inkompressibel betrachtet werden ($v \approx \text{konst.}$), d.h. die innere Energie ist nur eine Funktion der Temperatur:

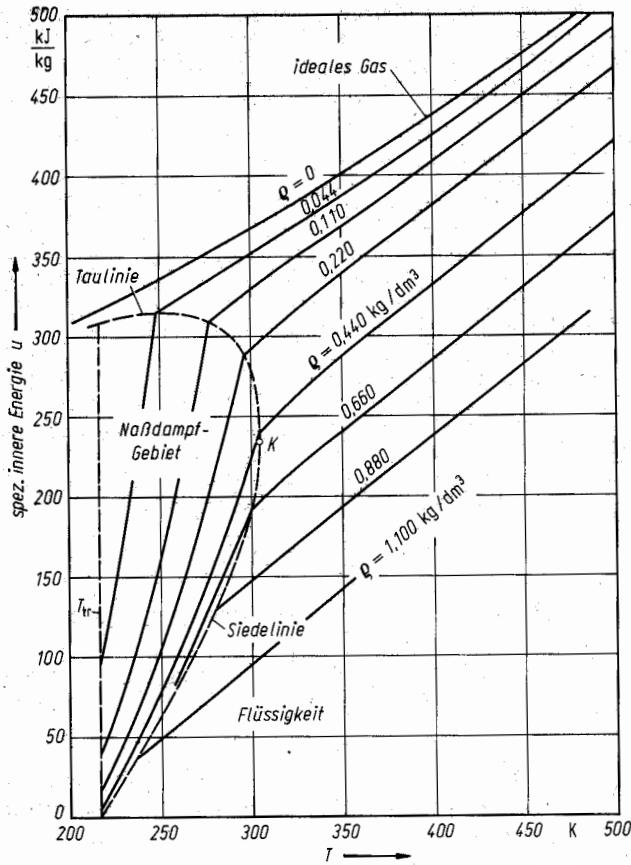


c_v für verschiedene Flüssigkeiten und Feststoffe:

Stoff	H ₂ O (l)	H ₂ O (s)	Öl	Al	St	Cu
$c_v \approx c_p$ [kJ/kg K]	4.2	2.1	1.67	0.91	0.45	0.39

c_v von flüssigem Wasser bei 1 bar(a):

ϑ [°C]	0	10	20	50	80	100
$c_v \approx c_p$ [kJ/kg K]	4.22	4.19	4.18	4.18	4.196	4.22

Beispiel 6.1: Energie-Bilanzierung für geschlossene Systeme mit Kohlendioxid-Gas.

Darstellung der energetischen Zustandsgleichung $u = u(T, v)$ von CO_2 . Die spezifische innere Energie von flüssigem CO_2 am Tripelpunkt ($T = T_{Tr}$) wurde willkürlich gleich null gesetzt.
 Quelle: Baehr, Thermodynamik 1996.

Teil 1: In einem Druckbehälter von 2 m^3 Inhalt befindet sich 880 kg CO_2 -Gas mit einer Temperatur von 250 K .

- Auf welche Zustandsgrößen kann anhand des oben abgebildeten u, T -Diagrammes für CO_2 geschlossen werden?
- Wie gross ist die zu zuführende Wärmemenge, um das Gas auf 450 K zu erwärmen?

Teil 2: CO_2 -Gas mit einer Masse von 44 kg wird in einem Zylinder mit Kolben vom Anfangszustand (Volumen: 0.2 m^3 , Temperatur: 450 K) auf ein Endvolumen von 1 m^3 adiabat entspannt; dabei wird eine Temperatur von 300 K gemessen.

- Wie ändert sich die innere Energie?
- Welche Volumenänderungsarbeit hat das System abgegeben?

Lösungen:

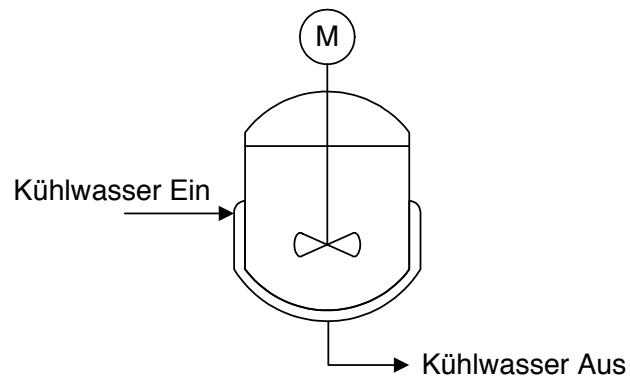
1 a. $\rho = 440 \text{ kg/m}^3$, $v = \frac{1}{\rho}$

b. $Q_{12} = m(u_2 - u_1) = 260 \text{ MJ}$

2 a. $U_2 - U_1 = -3120 \text{ kJ/kg}$

b. 1. HS: $W_{12} = W_{v12} = -3120 \text{ kJ/kg}$

Beispiel 6.2: Kühlung einer Flüssigkeit in einem Rührkessel. In einem Rührkessel wird ein heisses Fluid abgekühlt und gleichzeitig mit einem Propeller gerührt. Die innere Energie des Fluides ist anfänglich 800 kJ. Während des Abkühlens wird eine Wärme von 500 kJ abgegeben und vom Propeller eine Arbeit von 100 kJ verrichtet. Wie gross ist die innere Energie des Fluides am Ende des Vorganges?



6.5 Anwendung des 1. HS für geschlossene Systeme (Energiebilanzgleichung)

6.5.1 Überblick

Wir betrachten im folgenden Kapitel den 1. Hauptsatz der Thermodynamik (nachfolgend 1. HS genannt) für geschlossene Systeme mit perfekten Gasen bei folgenden Zustandsänderungen:

- Isochore Zustandsänderung: $V = \text{konst.}$
- Isobare Zustandsänderung: $p = \text{konst.}$
- Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{konst.}$
- Isentrope Zustandsänderung: $s = \text{konst.}$

6.5.2 1. HS für reversible Prozesse mit perfekten Gasen ($c_v = \text{konst.}$)

Wir wollen nun den 1. HS für ruhende geschlossene Systeme anwenden. Zunächst beschränken wir uns auf perfekte Gase, d.h. Gase mit $c_v = \text{konst.}$

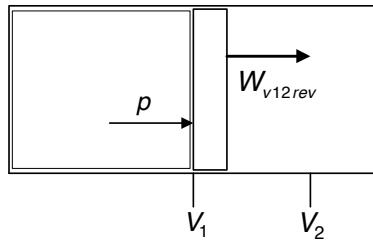
Die thermische Zustandsgleichung für perfekte (und ideale) Gase lautet:

$$pV = mR_iT \quad \text{oder} \quad pv = R_iT$$

Die differentielle Form ist:

$$p dv + v dp = R_i dT \quad | : (R_i T)$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}$$



Der 1. HS für geschlossene Systeme lautet:

$$Q_{12} + W_{12} = U_2 - U_1$$

Für die Gesamtarbeit W_{12} unter Vernachlässigung z.B. von elektrischer oder mechanischer Arbeit gilt:

$$W_{12} = W_{v12\text{rev}} + J_{12}$$

Für reversible Prozesse mit homogener Druckverteilung gilt:

$$W_{12} = W_{v12\text{rev}} = - \int_1^2 p dV$$

Damit lautet der 1. HS:

$$Q_{12} - \int_1^2 p dV = m c_v (T_2 - T_1)$$

und spezifisch

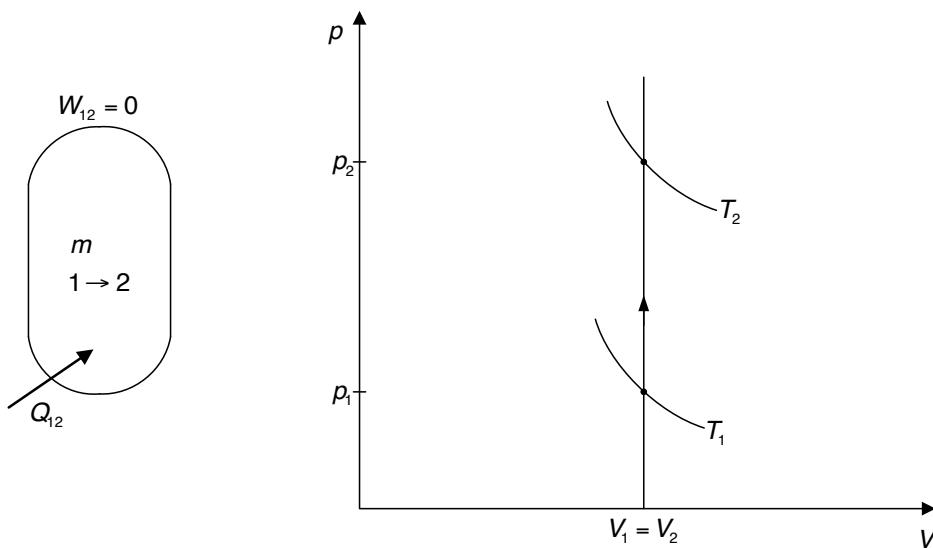
$$q_{12} - \int_1^2 p dv = c_v (T_2 - T_1)$$

bzw.

$$q_{12} = c_v (T_2 - T_1) + \int_1^2 p dv$$

6.5.3 Spezielle reversible Zustandsänderungen mit perfekten Gasen

a) Isochore Zustandsänderung



1. HS für geschlossene Systeme:

$$\begin{aligned}
 q_{12} + w_{12} &= u_2 - u_1 \\
 q_{12} - \underbrace{\int_1^2 p \, dv}_{dv=0} &= c_v (T_2 - T_1) \\
 q_{12} &= u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) \\
 c_v &= \frac{q_{12}}{T_2 - T_1} \\
 Q_{12} &= U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1)
 \end{aligned}$$

Fazit:

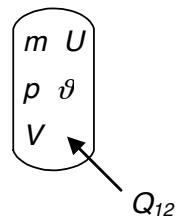
- Die zugeführte Wärme führt zu einer Erhöhung der inneren Energie.
- c_v ist die Wärmezufuhr um 1 kg Stoff bei konstantem Volumen um 1 K zu erwärmen.

Beispiel 6.3: Veloreifen. In einem Veloreifen, dessen Volumen V konstant ist ($V = 0.002 \text{ m}^3$), befindet sich Luft bei einem Überdruck von 3.2 bar(g) und einer Temperatur von 25°C. Der Barometerstand beträgt 0.95 bar(a). Der Luft im Reifen wird durch Sonnenbestrahlung die Wärmeenergie 100 J zugeführt. Wir können annehmen, dass die Zustandsänderung reversibel abläuft ($R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_v = 717 \text{ J/kg K}$).

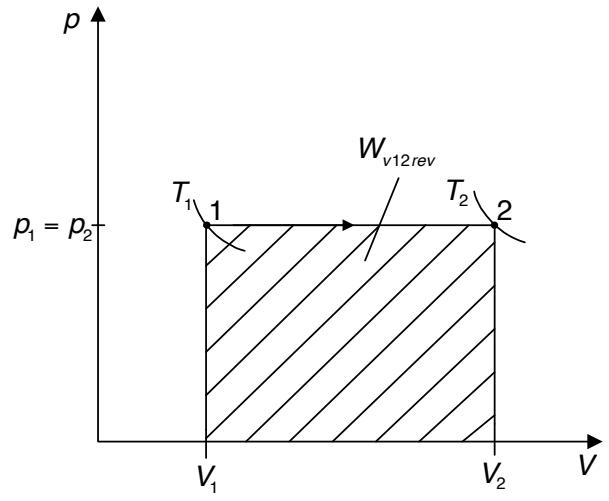
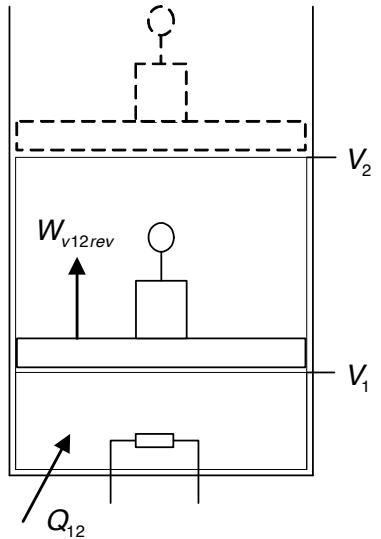
- a. Welche Temperatur und welcher Überdruck stellt sich im Reifen ein?
- b. Wie gross ist die Änderung der inneren Energie?

Beispiel 6.4: Aufheizen von Luft. In einem geschlossenen Behälter sollen 1.8 kg Luft bei einem Druck von $p_1 = 1.7 \text{ bar(a)}$ von der Temperatur $\vartheta_1 = 10^\circ\text{C}$ auf einen Wert $\vartheta_2 = 98^\circ\text{C}$ aufgeheizt werden ($c_v = 719 \text{ J/kg K}$ und $R_L = 287 \text{ J/kg K}$). Zu berechnen sind:

- a. die zuzuführende Wärmemenge Q_{12} ,
- b. der Druck p_2 nach Abschluss des Prozesses,
- c. das Luftvolumen V ,
- d. die Änderung der inneren Energie $U_2 - U_1$.



b) Isobare Zustandsänderung



1. HS für geschlossene Systeme:

$$q_{12} + w_{12} = u_2 - u_1$$

$$q_{12} - p(v_2 - v_1) = c_v(T_2 - T_1)$$

$$q_{12} = c_v(T_2 - T_1) + \underbrace{p(v_2 - v_1)}_{R_i(T_2 - T_1)}$$

$$q_{12} = (c_v + R_i)(T_2 - T_1)$$

$$q_{12} = c_p(T_2 - T_1)$$

$$c_p = \frac{q_{12}}{T_2 - T_1}$$

$$Q_{12} = m c_p(T_2 - T_1)$$

Fazit:

- Die zugeführte Wärme führt zu einer Arbeitsabfuhr und Erhöhung der inneren Energie.
- c_p ist die Wärmezufuhr um 1 kg Stoff bei konstantem Druck um 1 K zu erwärmen.

Definition: $c_p = \text{spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck}$

$$c_p = c_v + R_i \quad [\text{J/kg K}]$$

z.B. für Luft gilt:

$$R_L = \frac{R}{M_L} = 287 \text{ J/kg K}$$

$$c_v = 717 \text{ J/kg K}$$

$$c_p = c_v + R_L = 1004 \text{ J/kg K}$$

Vergleich der isochoren und isobaren Wärmezufuhr bzw. Wärmeabfuhr zu einem System:

Isobare

$$q_{12} = u_2 - u_1 + \int_1^2 p \, dv$$

$$q_{12} = u_2 - u_1 + p_2 v_2 - p_1 v_1$$

$$q_{12} = (u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1)$$

$$q_{12} = h_2 - h_1$$

$$h = u + p v = \text{spezifische Enthalpie} \quad [\text{J/kg}]$$

Vorbemerkung zum Zusammenhang zwischen c_v und c_p :

Isochore

$$q_{12} = u_2 - u_1$$

$$q_{12} = c_v (T_2 - T_1)$$

Isobare

$$q_{12} = h_2 - h_1$$

$$q_{12} = \underbrace{c_p}_{c_v+R_i} (T_2 - T_1)$$

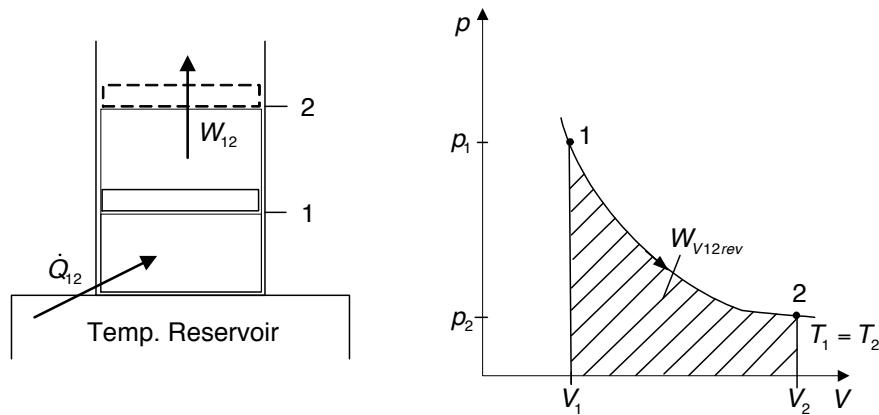
$$\boxed{w_{12} + q_{12} = u_2 - u_1}$$

Beispiel 6.5: Isobare Expansion. Luft expandiert bei konstantem Druck $p_1 = 2.7 \text{ bar(a)}$ durch Wärmezufuhr vom Volumen $V_1 = 3.8 \text{ m}^3$ bei der Temperatur $\vartheta_1 = 13^\circ\text{C}$ auf das Volumen $V_2 = 8.8 \text{ m}^3$. Die Gaskonstante der Luft ist $R_L = 287 \text{ J/kg K}$ und die spezifische Wärmekapazität $c_p = 1029.2 \text{ J/kg K}$. Man berechne:

- a. die Masse m der Luft,
- b. die Temperatur T_2 ,
- c. die erforderliche Wärmemenge Q_{12} ,
- d. die reversible Volumenänderungsarbeit $W_{v12\,rev}$,
- e. die Änderung der inneren Energie $U_2 - U_1$.

c) Isotherme Zustandsänderung

Wir betrachten die Wärmezufuhr zum Zylinder/Kolben-System bei einer konstanten Temperatur T (realisierbar durch eine sehr langsame Zustandsänderung).



Die thermischen Zustandsgrößen verändern sich im Laufe des Prozesses nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$T = \text{konstant}, \quad dT = 0 \Rightarrow p_1 v_1 = p_2 v_2$$

1. HS für geschlossene Systeme:

$$\begin{aligned} q_{12} + w_{12} &= u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) = 0 \\ q_{12} = -w_{12} &= p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = -p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = R_i T \ln \frac{v_2}{v_1} \\ Q_{12} &= m q_{12} \end{aligned}$$

Fazit:

- Die innere Energie bleibt konstant, da die Temperatur sich nicht ändert.
- Bei der isothermen Kompression wird die gesamte zugeführte Volumenänderungsarbeit in Form von Wärme aus dem System abgeführt.
- Bei der isothermen Expansion wird die gesamte abgegebene Volumenänderungsarbeit durch die zugeführte Wärme gedeckt.

Beispiel 6.6: Isotherme Kompression. Luft soll bei konstanter Temperatur $\vartheta_1 = 25^\circ\text{C}$ vom Volumen $V_1 = 0.8 \text{ m}^3$ und dem Druck $p_1 = 3 \text{ bar(a)}$ auf $V_2 = 0.4 \text{ m}^3$ reversibel komprimiert werden. Zu berechnen sind:

- die Masse m der Luft
- der Druck p_2
- die reversible Volumenänderungsarbeit W_{v12rev}
- die über die Systemgrenze transferierte Wärmemenge Q_{12}
- die Änderung der inneren Energie $U_2 - U_1$

Stoffdaten von Luft: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_v = 717 \text{ J/kg K}$, $c_p = 1004 \text{ J/kg K}$

- Luftmasse aus der allgemeinen Gasgleichung

$$m = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = 2.8 \text{ kg}$$

- Isotherme Zustandsänderung

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 6 \text{ bar(a)}$$

- Volumenänderungsarbeit für eine isotherme Volumenänderung

$$W_{v12} = - \int_1^2 p dV = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 166.4 \text{ kJ}$$

1. HS für reversible isotherme Kompression

$$Q_{12} + W_{v12} = U_2 - U_1 = 0$$

$$Q_{12} = -W_{12} = -166.4 \text{ kJ}$$

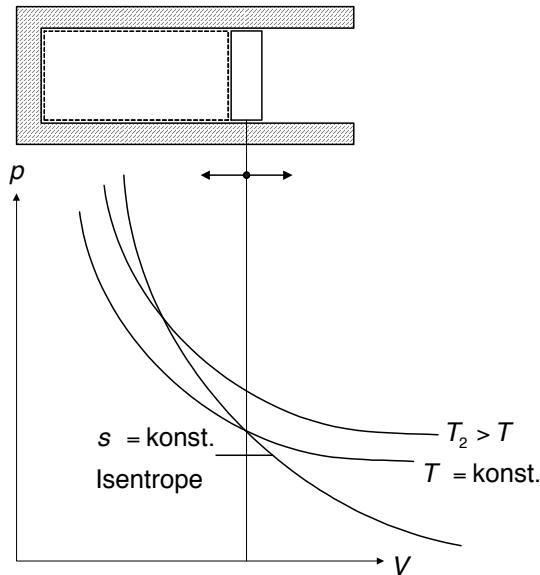
- Bei einer isothermen Zustandsänderung bleibt die innere Energie konstant

$$U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1) = 0$$

d) Reversible, adiabate Zustandsänderung (isentrope Zustandsänderung)

Reversible Prozesse in adiabaten Systemen spielen als Vergleichsprozesse für viele technische Prozesse eine wichtige Rolle. Ein reversibler adiabater Prozess – so zeigen wir später – verläuft bei **konstanter Entropie** und heisst daher **isentrop**.

Wir betrachten einen isentropen Prozess mit einem perfekten Gas in einem Zylinder mit Kolben:



Wir gehen vom Zustand 1 aus und überlegen den isentropen Verlauf im p, V -Diagramm vergleichend mit dem isothermen Verlauf. Nun wollen wir die Gleichung für die isentrope Zustandsänderung bestimmen: Gegeben ist der Zustand 1 mit p_1, V_1 und T_1 . Wie berechnet sich p_2 und T_2 , wenn man das Volumen isentrop von V_1 auf V_2 verändert?

Die Gasgleichung lautet:

$$p v = R_i T \quad \text{bzw.} \quad p dv + v dp = R_i dT \quad (6.1)$$

1. HS für geschlossene Systeme:

$$q_{12} + w_{12} = u_2 - u_1$$

Für eine reversible, adiabate Zustandsgleichung eines perfekten Gases gilt:

$$w_{v12\,rev} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

$$dw_{rev} = du = c_v dT = -p dv \quad (6.2)$$

Wir wollen in (6.2) dT mit Hilfe von (6.1) eliminieren:

$$dT = \frac{1}{R_i} (p dv + v dp) \quad (6.3)$$

(6.3) in (6.2) einsetzen ergibt:

$$\frac{c_v}{R_i} (p dv + v dp) = -p dv$$

Trennen der Variablen führt zu:

$$\frac{c_v}{R_i} v dp = - \left(\frac{c_v}{R_i} + 1 \right) p dv = - \left(\frac{c_v + R_i}{R_i} \right) p dv = -\frac{c_p}{R_i} p dv$$

Es gilt also

$$v dp = -\frac{c_p}{c_v} p dv$$

Mit dem Isentropenexponent κ

$$\kappa = c_p/c_v$$

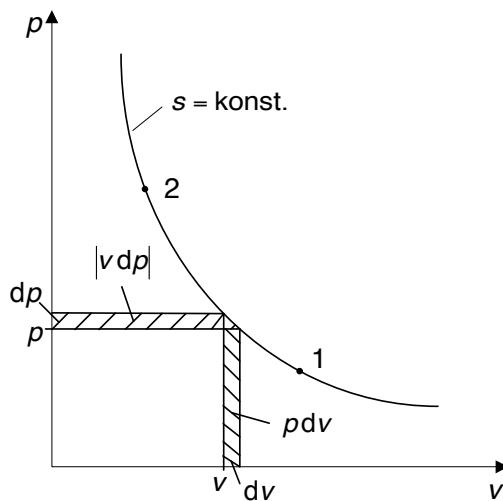
erhalten wir:

$$v dp = -\kappa p dv \quad (6.4)$$

Aus (6.4) erhalten wir die Änderung von dp , wenn v um dv ändert:

$$dp = -\kappa \frac{p}{v} dv$$

Beispiel 6.7: Isentrope Zustandsänderung. Interpretieren Sie die Gleichung (6.4) in einem p, v -Diagramm:



Fläche $v dp$ ist κ -mal grösser als $p dv$.

Wir wollen nun zur endlichen Zustandsgleichung gelangen: Durch Separieren der Variablen in Gleichung (6.4) erhält man

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\kappa \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v}$$

Die Integration ergibt:

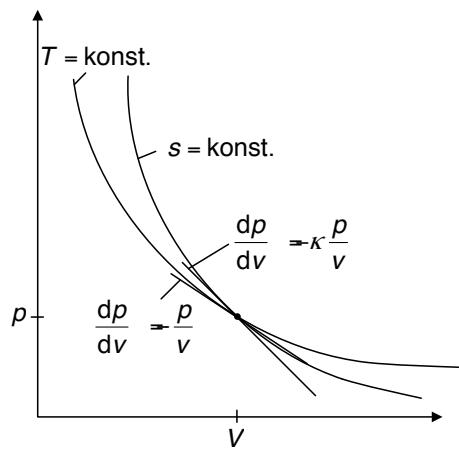
$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\kappa \ln \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa$$

Somit erhalten wir die **Poisson-Gleichung**:

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa = p v^\kappa$$

$\kappa = c_p/c_v$ heisst **Isentropenexponent**; er ist eine Stoffgrösse.

Beispiel 6.8: Steigung im p, v -Diagramm. Vergleichen Sie die Steigung einer isothermen und isentropen Zustandsgleichung! Hinweis: Gehen Sie von der Gasgleichung in differentieller Form bzw. von Gleichung (6.4) aus.



Isotherm:

$$p dv + v dp = R_i dT$$

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v}$$

Isentrop:

$$v dp = -\kappa p dv$$

$$\frac{dp}{dv} = -\kappa \frac{p}{v}$$

Die Isentrope verläuft steiler als die Isotherme!

Der **Isentropenexponent** κ von idealen Gasen ist nur davon abhängig, ob sie 1-, 2- oder mehratomig sind:

- einatomige ideale Gase: He, Ar, Ne $\kappa = \frac{5}{3} \cong 1.67$
- zweiatomige ideale Gase: O₂, H₂, N₂ $\kappa = \frac{7}{5} \cong 1.40$
- mehratomige ideale Gase: CO₂, NH₃, SO₂ $\kappa = \frac{8}{6} \cong 1.33$

Die einfachen Zahlenverhältnisse können für κ mit der kinetischen Gastheorie begründet werden (auf eine Herleitung wird im Rahmen dieser Vorlesung verzichtet).

Zusammenstellung der isentropen Zustandsgleichungen:

Die Poissons-Gleichung ergibt erst den Zusammenhang zwischen p und v bei einer isentropen Zustandsänderung. Wir müssen jetzt noch den Zusammenhang mit der Temperatur T herleiten. Dazu verwenden wir die Gasgleichung.

$$p_1 v_1 = R_i T_1 \quad \text{bzw.} \quad p_2 v_2 = R_i T_2$$

Nach dem Druck p_1 bzw. p_2 aufgelöst:

$$p_1 = \frac{R_i T_1}{v_1} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = \frac{R_i T_2}{v_2}$$

Die Poissons-Gleichung lautet:

$$\boxed{p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa}$$

Dividiert man p_2 durch p_1 erhält man:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2 v_1}{T_1 v_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa$$

Umgeformt nach T_2/T_1 ergibt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa \frac{v_2}{v_1}$$

Mathematisch umgestellt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1}$$

Zusammenstellung:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \end{aligned}$$

Die spezifische isentrope Volumenänderungsarbeit w_{v12rev} kann aus dem 1. HS berechnet werden:

$$w_{v12rev} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

Die spezifische isentrope Volumenänderungsarbeit kann aber auch aus der Grundgleichung berechnet werden:

$$w_{v12rev} = - \int_1^2 p \, dv = -p_1 v_1^\kappa \int_1^2 \frac{dv}{v^\kappa}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert (ohne Herleitung, eine gute Übung für Sie):

$$\begin{aligned} w_{v12rev} &= \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \\ w_{v12rev} &= \frac{R_i T_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen für die isentrope Zustandsgleichung erhält man:

$$\begin{aligned} w_{v12rev} &= \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \\ w_{v12rev} &= \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \\ w_{v12rev} &= \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich mit der Gasgleichung:

$$w_{v12rev} = \frac{R_i}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) = c_v (T_2 - T_1) = u_2 - u_1$$

Zur Erinnerung:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{R_i + c_v}{c_v}, \quad c_v = \frac{R_i}{\kappa - 1}$$

Beispiel 6.9: Isentrope Verdichtung. 10 m³ Luft mit einem Druck von $p_1 = 4 \text{ bar(a)}$ und einer Temperatur von $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ wird isentrop bis zu einem Volumen von 2 m³ verdichtet. Die Gaskonstante der Luft ist $R_L = 287 \text{ J/kg K}$ und der Isentropenexponent $\kappa = 1.4$.

- a. Wie gross ist die Volumenänderungsarbeit W_{v12} ?
- b. Wie hoch sind der Druck und die Temperatur nach der Verdichtung?

- a. Berechnung der Masse m aus der Gasgleichung:

$$m = \frac{p_1 V_1}{R_L T_1} = 47.5 \text{ kg}$$

Für die Volumenänderungsarbeit W_{v12} gilt:

$$W_{v12} = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] = 9.0 \text{ MJ}$$

- b. Die Temperatur T_2 berechnet man:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = 558.1 \text{ K} = 284.9^\circ\text{C}$$

und der Druck p_2 :

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa = 38.1 \text{ bar(a)}$$

6.5.4 Polytrope Zustandsänderungen mit perfekten Gasen

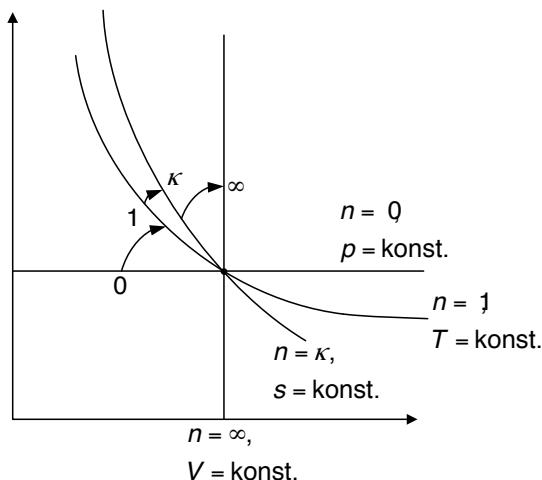
Die bisher behandelten speziellen Zustandsänderungen eines perfekten Gases können durch folgende Funktion beschrieben werden ("polytrope Zustandsänderung"):

$$pV^n = \text{konst.}$$

Diese Gleichung ist mathematisch eine allgemeine Potenzfunktion. In der Thermodynamik nennen wir sie die **Polytropengleichung**. Der Exponent n heisst **Polytropenexponent**. Der Wertebereich von n ist $-\infty$ bis $+\infty$.

Alle bisher betrachteten Zustandsänderungen kann man durch Einsetzen verschiedener Werte für n ausdrücken:

- Isochore Zustandsänderung: $V = \text{konst.}$, $pV^\infty = \text{konst.}$, $n = \infty$
- Isobare Zustandsänderung: $p = \text{konst.}$, $pV^0 = \text{konst.}$, $n = 0$
- Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{konst.}$, $pV^1 = \text{konst.}$, $n = 1$
- Isentrope Zustandsänderung: $s = \text{konst.}$, $pV^\kappa = \text{konst.}$, $n = \kappa$



Polytropen Prozesse können sein:

- reversibel oder
- irreversibel
- adiabat oder
- nicht-adiabat

Viele reale Prozesse können als polytropen Prozesse approximiert werden.

Wenn man den Anfangs- und Endzustand einer polytropen Zustandsänderung kennt, kann der Polytropenexponent n aus der Polytropengleichung berechnet werden. Durch Logarithmieren von

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^n$$

erhält man

$$n = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{V_1}{V_2}}$$

Bei idealen Gasen erhält man die Beziehungen zwischen den thermischen Zustandsgrößen für die polytropen Zustandsänderungen, indem in den Gleichungen für die isentropen Zustandsänderungen (siehe S. 171) der Isentropenexponent κ durch den Polytropenexponent n ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^n = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^n \\ \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad n \neq 1 \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad n \neq 1 \end{aligned}$$

Volumenänderungsarbeit

Um die bei polytroper Zustandsänderung für $n \neq 1$ am System verrichtete Volumenänderungsarbeit zu berechnen, bilden wir zunächst das Differential von $pV^n = \text{konst.}$:

$$d(pV^n) = dpV^n + p n V^{n-1} dV = 0$$

Division durch V^{n-1} und Addition von $p dV - p dV$ bringt:

$$dpV + p dV + (n-1)p dV = d(pV) + (n-1)p dV = 0$$

Daraus erhält man für das (negative) Differential der polytropen Volumenänderungsarbeit

$$p dV = -\frac{d(pV)}{n-1}, \quad \text{für } n \neq 1 \quad (6.5)$$

Für konstantes n , $n \neq 1$, ergibt sich die zwischen den Zuständen 1 und 2 geleistete Volumenänderungsarbeit zu

$$W_{v12} = - \int_1^2 p dV = \frac{1}{n-1} \int_1^2 d(pV) = \frac{1}{n-1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

Weitere Umformungen ergeben für $n \neq 1$

$$\begin{aligned} W_{v12} &= \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right] \\ W_{v12} &= \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \\ W_{v12} &= \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Diese Beziehungen gelten unter der Voraussetzung quasistatischer Zustandsänderung mit konstantem Polytropenexponent n für ideale und reale Gase ebenso wie für Zustandsänderungen ohne und mit Dissipation, denn in ihre Herleitung sind keine Einschränkungen hinsichtlich reibungsfreier Zustandsänderungen oder der Eigenschaften der Gase eingeflossen.

Wärme

Die zwischen dem System und seiner Umgebung bei polytropen Zustandsänderung und reversiblen Prozess ausgetauschte Wärme ermitteln wir aus der Differentialform des 1. HS

$$\begin{aligned} dQ + dW_{v\ rev} &= dU \\ dQ &= dU + p \, dV \end{aligned}$$

indem wir darin das Differential der polytropen Volumenänderungsarbeit nach (6.5) einsetzen. Wir erhalten zunächst

$$dQ = dU - \frac{d(pV)}{n-1}, \quad n \neq 1$$

und bei Beschränkung auf ideale Gase mit $d(pV) = m R_i dT$ und $dU = m c_v dT$ schliesslich

$$dQ = m c_v \frac{n-\kappa}{n-1} dT, \quad n \neq 1$$

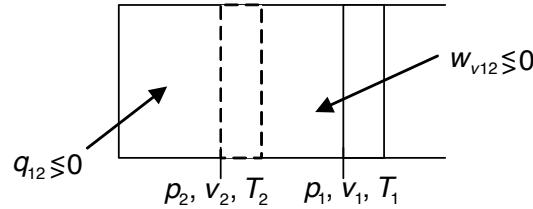
Die zwischen den Zuständen 1 und 2 umgesetzte Wärme ist somit

$$\begin{aligned} Q_{12} &= m c_v \frac{n-\kappa}{n-1} [T_2 - T_1] \\ &= m R_i T_1 \frac{n-\kappa}{(\kappa-1)(n-1)} \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Weiter erhält man:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{n-\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[\frac{T_2}{T_1} - 1 \right], \quad n \neq 1 \\ Q_{12} &= \frac{n-\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right], \quad n \neq 1 \\ Q_{12} &= \frac{n-\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right], \quad n \neq 1 \end{aligned}$$

Arbeit und Wärme bei der polytropen Zustandsänderung: Zusammenfassung



1. HS:

$$q_{12} + \underbrace{w_{12}}_{w_{v12\text{ rev}}+j_{12}} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

Für eine reversible Zustandsänderung gilt:

$$q_{12} + w_{v12\text{ rev}} = u_2 - u_1$$

Die spezifische Volumenänderungsarbeit berechnet sich mit:

$$w_{v12} = - \int_1^2 p \, dv$$

$$w_{v12} = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} - 1 \right]$$

Setzt man die Beziehungen aus der Gasgleichung ein, erhält man:

$$w_{v12} = \frac{R_i T_1}{n-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

Die übertragene spezifische Wärmeenergie lässt sich aus dem 1. HS berechnen:

$$q_{12} = u_2 - u_1 - \underbrace{w_{12}}_{w_{v12\text{ rev}}+j_{12}}$$

Setzt man die bekannten Gleichungen für die Änderung der inneren Energie $u_2 - u_1$ und der reversiblen Volumenänderungsarbeit $w_{v12\text{ rev}}$ ein und setzt die Dissipation $j_{12} = 0$, erhält man:

$$q_{12} = c_v (T_2 - T_1) - \frac{R_i T_1}{n-1} \left[\frac{T_2}{T_1} - 1 \right]$$

$$q_{12} = \left(c_v - \frac{R_i}{n-1} \right) (T_2 - T_1)$$

Ersetzt man die Gaskonstante R_i durch $c_v (\kappa - 1)$ und formt um, ergibt sich für die übertragene spezifische Wärmeenergie q_{12} :

$$q_{12} = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} (T_2 - T_1)$$

Wärmeverhältnis q_{12}/w_{12} :

a) Isochore Zustandsänderung:

$$\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1}$$

mit: $n = \infty$

folgt: $\frac{q_{12}}{w_{12}} = \infty$

weil $w_v{}_{12} = 0$ ist.

b) Isobare Zustandsänderung:

$$\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1}$$

mit: $n = 0$

folgt: $\frac{q_{12}}{w_{12}} = -\frac{\kappa}{\kappa - 1}$

c) Isotherme Zustandsänderung:

$$\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1}$$

mit: $n = 1$

folgt: $\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{1 - \kappa}{\kappa - 1} = -1$

weil $U_2 - U_1 = 0$ ist.

d) Isentrope Zustandsänderung:

$$\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1}$$

mit: $n = \kappa$

folgt: $\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{\kappa - \kappa}{\kappa - 1} = 0$

weil $q_{12} = 0$ ist.

e) Polytrope Zustandsänderung:

$$\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1}$$

mit: $n = n$

folgt: $\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1}$

Polytropic Kompression und Expansion

Bei Kompressions- und Expansionsprozessen ist der Bereich der Polytropen von besonderer Bedeutung. Dieser liegt *zwischen* der Isothermen und der Isentropen.

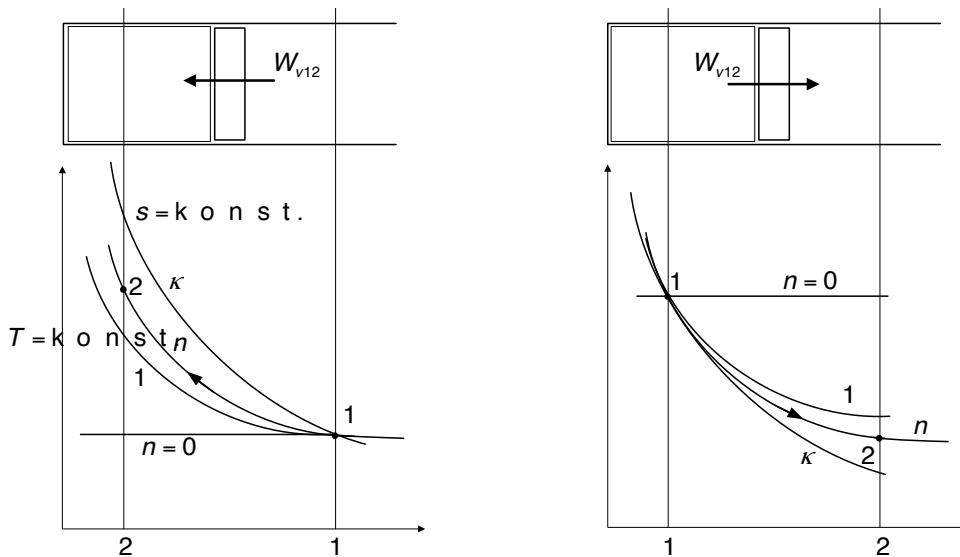
Der Grenzfall der Isothermen tritt nur ein, wenn die gesamte verrichtete Arbeit in Form von Wärme über die Systemgrenze ab- oder zugeführt wird. Dies ist theoretisch bei sehr langsam ablaufenden Vorgängen möglich.

Für den Grenzfall der Isentropen ist eine völlig adiabate Systemgrenze vorausgesetzt, was ebenfalls bei sehr schnell ablaufenden Vorgängen angenähert erreicht wird.

Bei reversiblen Prozessen, d.h. bei Vernachlässigung der Dissipation, verlaufen die Kompression und Expansion zwischen der Isothermen und Isentropen mit dem Polytropenexponenten

$$1 < n < \kappa$$

In der Praxis nähert sich die Zustandsänderung der Isentropen umso mehr, je schneller die Maschine läuft.



6.5.5 Die Leistungsbilanzgleichung

In diesem Kapitel haben wir den 1. HS für ruhende geschlossene Systeme kennengelernt:

$$Q_{12} + W_{12} = U_2 - U_1$$

Der Prozess eines geschlossenen Systems läuft in der Zeitspanne t_1 bis t_2 ab (1 = Prozessbeginn, 2 = Prozessende). Für ein Zeitintervall dt des Prozessablaufs lautet die Energiebilanz

$$dQ + dW = dU$$

dQ ist die Wärme und dW ist die Arbeit, die während der Zeit dt die Systemgrenze überschreiten. Zur weiteren Untersuchung führen wir mit

$$dQ = \dot{Q}(t) dt$$

und

$$dW = P(t) dt$$

zwei von der Zeit abhängige Prozessgrößen ein:

- Wärmestrom $\dot{Q}(t)$ [W]
- Leistung $P(t)$ [W]

Damit erhält man die Leistungsbilanz

$$\dot{Q}(t) + P(t) = \frac{dU}{dt}$$

Für den wichtigen Sonderfall eines **stationären Prozesses** ist $dU/dt = 0$ und es gilt für die **Leistungsbilanz**:

$$\dot{Q} + P = 0$$

Wenn mehrere Wärmeströme \dot{Q}_i und mehrere Leistungen P_j die Systemgrenze überschreiten, lautet die **Leistungsbilanz**:

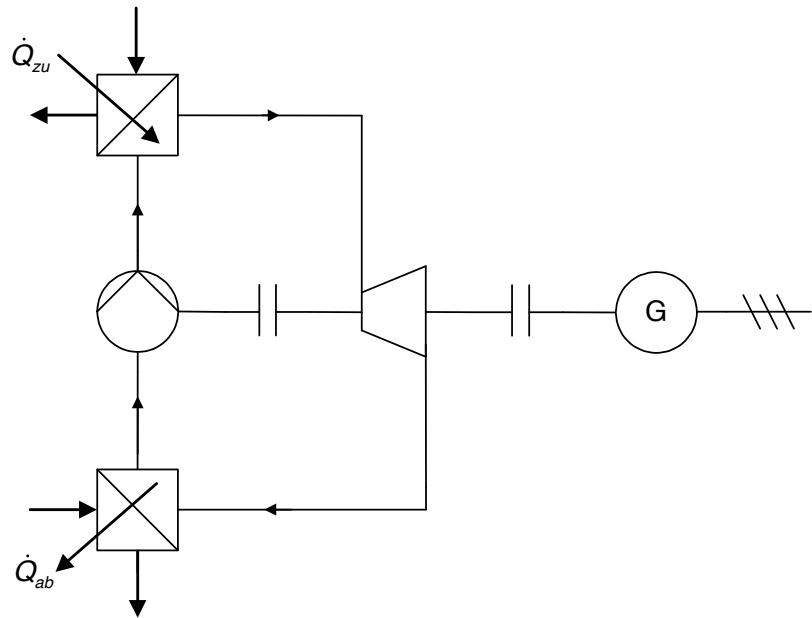
$$\sum \dot{Q}_i + \sum P = 0$$

In Worten:

Die Summe aller zugeführten und abgeführten Energieströme muss bei einem stationären Prozess eines geschlossenen Systems null ergeben. Zugeführte Energieströme sind positiv, abgeführte Energieströme sind negativ einzusetzen.

Beispiel 6.10: Leistungsbilanz einer Wärmekraftanlage (WKA). Ein Dampfkraftwerk produziert eine elektrische Leistung P_{el} von 1 GW. Die zugeführte Heizleistung \dot{Q}_{zu} beträgt dabei 2 GW. Berechnen Sie

- den abgeführten Wärmestrom \dot{Q}_{ab} im Kühlturn
- und den Wirkungsgrad η_{WKA} der Wärmekraftanlage.



a. Leistungsbilanz

$$\sum \dot{Q}_i + \sum P_i = 0$$

$$\dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} - P_{el} = 0$$

$$\dot{Q}_{ab} = \dot{Q}_{zu} - P_{el} = 2 - 1 = 1 \text{ GW}$$

oder

$$\dot{Q}_{zu} + \dot{Q}_{ab} + P_{el} = 0$$

$$\dot{Q}_{ab} = -\dot{Q}_{zu} - P_{el} = -2 - (-1) = -1 \text{ GW}$$

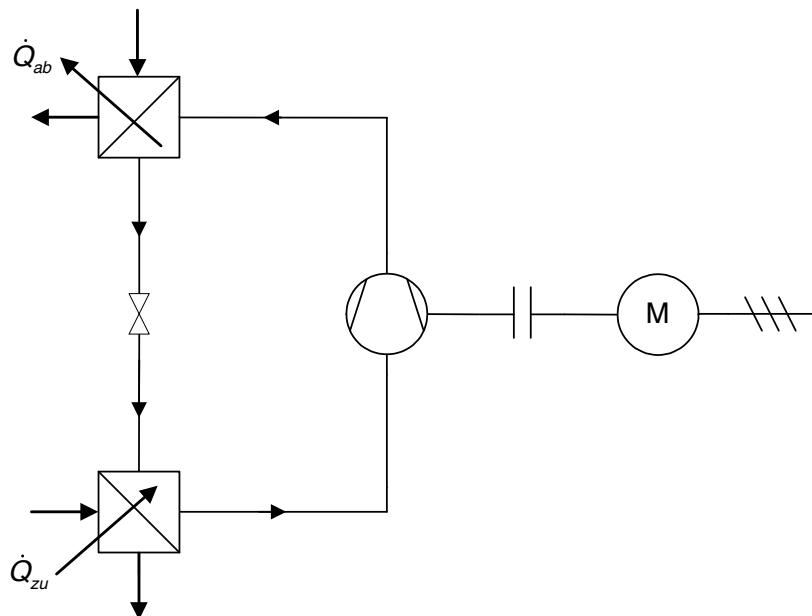
b. Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{P_{el}}{\dot{Q}_{zu}} = 50\%$$

Beispiel 6.11: Leistungsbilanz einer Wärmepumpe (WP). Im Kondensator einer Wärmepumpe wird eine Heizleistung \dot{Q}_{ab} von 12 kW abgeführt. Der Elektromotor des Verdichters benötigt eine elektrische Leistung P_{el} von 3.5 kW. Berechnen Sie

- den zugeführten Wärmestrom \dot{Q}_{zu} im Verdampfer
- und die Leistungszahl ε_{WP} der Wärmepumpe.

$$\varepsilon_{WP} = \frac{\dot{Q}_{ab}}{P_{Verdichter}}$$



- Leistungsbilanz

$$\begin{aligned}\sum \dot{Q} + \sum P &= 0 \\ \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} - P_{el} &= 0 \\ \dot{Q}_{zu} &= \dot{Q}_{ab} - P_{el} = 12 - 3.5 = 8.5 \text{ kW}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{zu} + \dot{Q}_{ab} + P_{el} &= 0 \\ \dot{Q}_{zu} &= -\dot{Q}_{ab} - P_{el} = -(-12) - 3.5 = 8.5 \text{ kW}\end{aligned}$$

- Leistungszahl

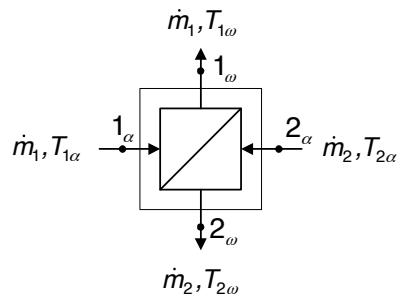
$$\varepsilon_{WP} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{\dot{Q}_{ab}}{P_{el}} = \frac{12}{3.5} = 3.43$$

6.6 Energiebilanzgleichung für offene Systeme

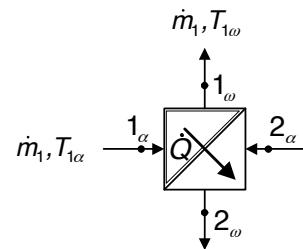
6.6.1 Beispiele von offenen Systemen

Die bis anhin betrachteten Prozesse laufen in geschlossenen Systemen ab (d.h. masseun-durchlässige Systemgrenze). In der Technik sind jedoch offene Systeme von ebenso grosser Bedeutung, weil viele Prozesse mit Stoffdurchfluss verlaufen. Hier einige Beispiele:

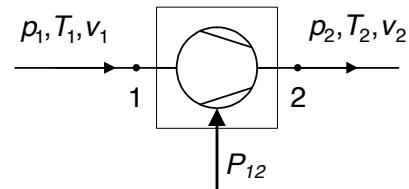
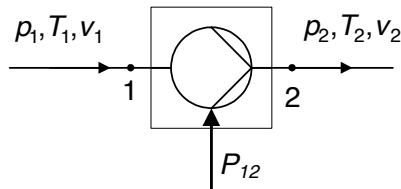
Wärmeübertrager



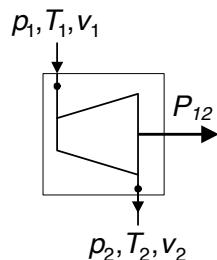
Pumpe



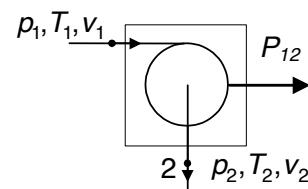
Verdichter (Kompressor)



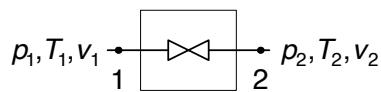
Dampfturbine



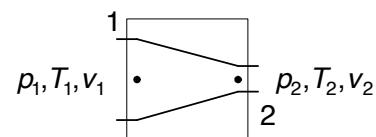
Wasserturbine



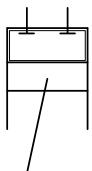
Drossel



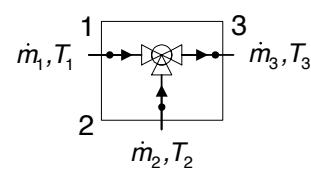
Düse



Verbrennungsmotor



Mischen



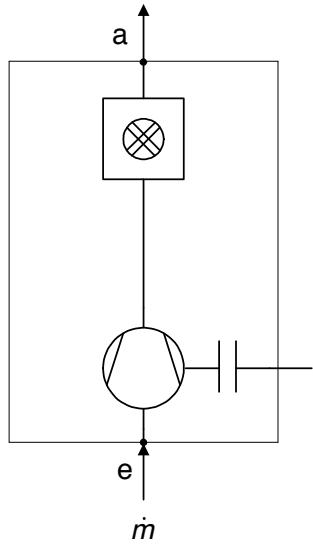
6.6.2 Herleitung des 1. HS für offene Systeme

In einem offenen System kann Energie

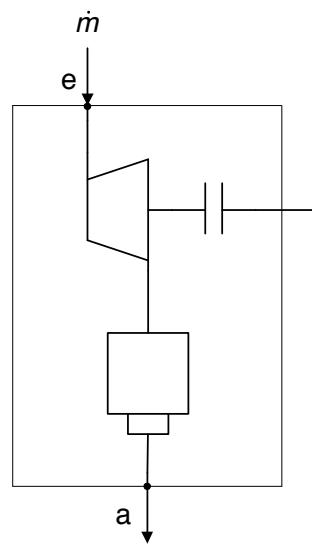
- als Wärme
- als Arbeit und
- mit Materie

durch die Systemgrenze fliessen. Die untenstehende Abbildung zeigt zwei Beispiele von technischen Anwendungen.

Verdichter und Brennkammer
einer Gasturbine



Dampfturbine und Kondensator
einer WKA



Man beachte: In beiden Prozessen strömen Wärme, Wellenarbeit und Materie über die Systemgrenze (e bezeichnet den Eintrittsquerschnitt und a den Austrittsquerschnitt).

Die **Massenbilanzgleichung** für diese Kontrollräume lautet:

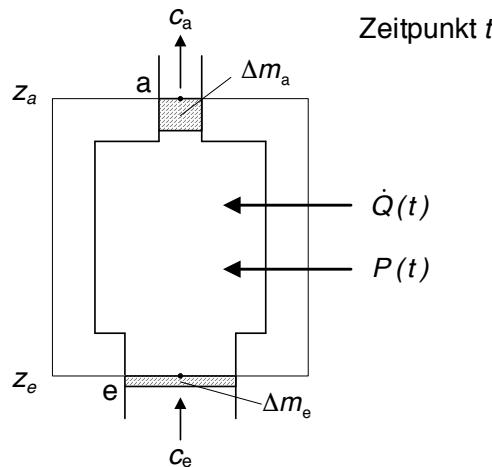
$$\frac{dm}{dt} = \sum_{ein} \dot{m}_{ein} - \sum_{aus} \dot{m}_{aus}$$

Energiebilanzgleichung für einen Kontrollraum

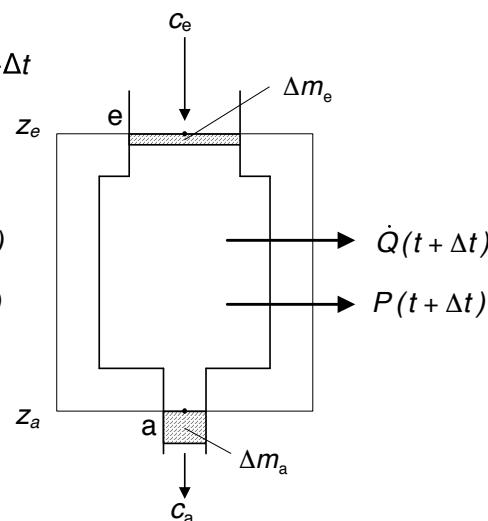
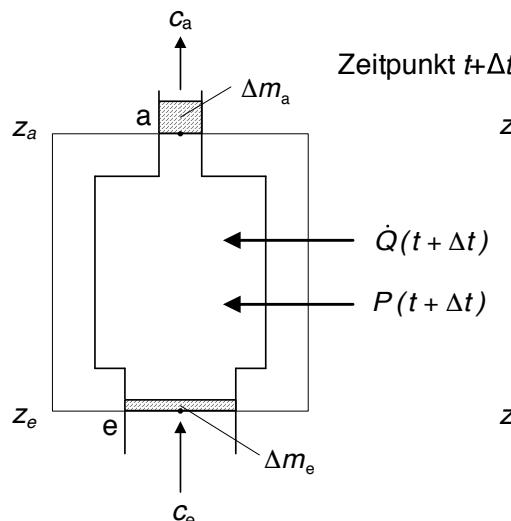
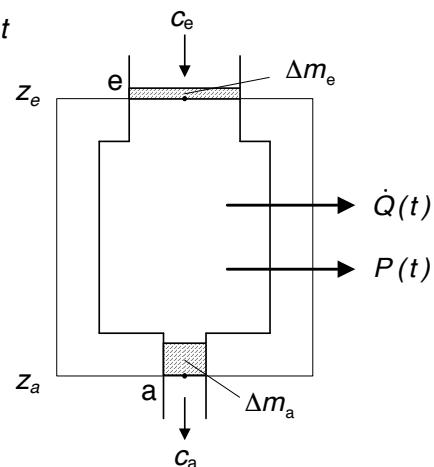
Wir leiten die Energiebilanzgleichung anhand der vorne dargestellten Anwendungen her. Dazu grenzen wir ein geschlossenes, bewegtes System ab.

- Zeitpunkt t : Inhalt des Kontrollraums und eine kleine Menge Δm_{ein} des Fluids, welches gerade hineinströmt.
- Zeitpunkt $t + \Delta t$: Im Zeitintervall Δt strömt die Menge Δm_{ein} gerade vollständig in den Kontrollraum, während die Fluidmenge Δm_{aus} den Kontrollraum verlässt.

Verdichter und Brennkammer



Dampfturbine und Kondensator



Für das bewegte, geschlossene System lautet der 1. HS:

$$Q_{12} + W_{12} = E_2 - E_1$$

Für das Zeitintervall zwischen t und Δt gilt:

$$Q_{\Delta t} + W_{\Delta t} = E_{gS}(t + \Delta t) - E_{gS}(t) \quad (6.6)$$

wobei $Q_{\Delta t}$ die Wärme und $W_{\Delta t}$ die Arbeit ist, welche im Zeitintervall Δt die Systemgrenze überschreiten. Der Energieinhalt des geschlossenen Systems setzt sich aus dem Energieinhalt des Kontrollraums und der zusätzlichen Fluidmenge zusammen, die sich gerade am Eintritts- bzw. Austrittsquerschnitt ausserhalb des Kontrollraums befindet:

$$\begin{aligned} E_{gS}(t) &= E(t) + \Delta m_{ein} e_{ein} \\ E_{gS}(t + \Delta t) &= E(t + \Delta t) + \Delta m_{aus} e_{aus} \end{aligned}$$

Für kleine Werte von Δt , Δm_{ein} und Δm_{aus} sind die spezifischen Energien

$$\begin{aligned} e_{ein} &= u_{ein} + \frac{c_{ein}^2}{2} + g z_{ein} \\ e_{aus} &= u_{aus} + \frac{c_{aus}^2}{2} + g z_{aus} \end{aligned}$$

die Querschnittsmittelwerte über dem Eintritts- bzw. Austrittsquerschnitt.

Die im Zeitraum Δt übertragene Wärme und Arbeit ist:

$$\begin{aligned} Q_{\Delta t} &= \int_t^{t+\Delta t} \dot{Q}(t) dt \\ W_{\Delta t} &= \int_t^{t+\Delta t} P(t) dt + p_{ein} \Delta V_{ein} - p_{aus} \Delta V_{aus} \end{aligned}$$

Die Arbeit besteht aus der Wellenarbeit und der Volumenänderungsarbeit. Mit $\Delta V_{ein} = \Delta m_{ein} v_{ein}$ und $\Delta V_{aus} = \Delta m_{aus} v_{aus}$ erhält man:

$$W_{\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} P(t) dt + \Delta m_{ein} p_{ein} v_{ein} - \Delta m_{aus} p_{aus} v_{aus}$$

Durch Einsetzen in die Energiebilanzgleichung (6.6) erhält man:

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{Q}(t) dt + \int_t^{t+\Delta t} P(t) dt = E(t + \Delta t) - E(t) + \Delta m_{aus} \left(u_{aus} + p_{aus} v_{aus} + \frac{c_{aus}^2}{2} + g z_{aus} \right) - \Delta m_{ein} \left(u_{ein} + p_{ein} v_{ein} + \frac{c_{ein}^2}{2} + g z_{ein} \right)$$

Wir dividieren diese Gleichung durch Δt , führen den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ aus, ersetzen $u + p v$ durch die spezifische Enthalpie h und erhalten:

$$\dot{Q} + P = \frac{dE}{dt} + \dot{m}_{aus} \left(h_{aus} + \frac{c_{aus}^2}{2} + g z_{aus} \right) - \dot{m}_{ein} \left(h_{ein} + \frac{c_{ein}^2}{2} + g z_{ein} \right)$$

Im allgemeinen Fall können mehrere Wärmeströme \dot{Q}_i und Leistungen P_j die Grenze überschreiten. Da die Systemgrenze starr ist, kommen als Leistung nur Wellenarbeit und elektrische Leistung in Frage.

Die **Leistungsbilanz** lautet in Form einer allgemeinen Bilanzgleichung:

$$\frac{dE}{dt} = \sum \dot{Q} + \sum P + \sum_{ein} \dot{m}_{ein} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{ein} - \sum_{aus} \dot{m}_{aus} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{aus}$$

Die zeitliche Änderung des Energieinhaltes im System ist gleich der Summe aller zu- und abgeführten Energieströme.

Für **stationäre Prozesse** sind die zeitlichen Änderungen gleich null ($d/dt = 0$). In technischen Anwendungen werden Maschinen und Apparate häufig von Stoffströmen zeitlich stationär durchflossen. Die Massen- und Energiebilanzgleichungen vereinfachen sich dadurch erheblich.

Die Massenbilanzgleichung ist für stationäre Prozesse:

$$\sum_{ein} \dot{m}_{ein} = \sum_{aus} \dot{m}_{aus}$$

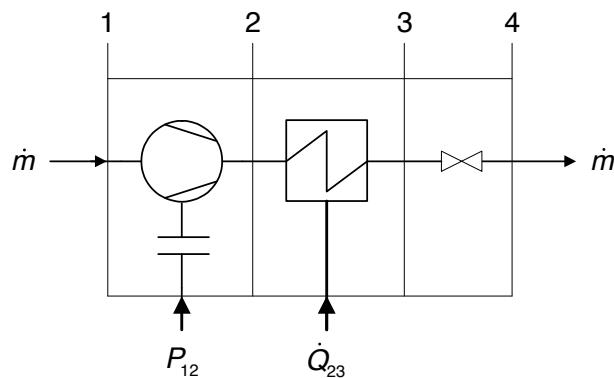
Die Leistungsbilanzgleichung lautet für stationäre Prozesse:

$$\sum \dot{Q} + \sum P = \sum_{aus} \dot{m}_{aus} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{aus} - \sum_{ein} \dot{m}_{ein} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{ein}$$

Für den häufigen Sonderfall, dass nur ein Fluidstrom zeitlich stationär durch den Kontrollraum fliesst, d.h. $\dot{m}_e = \dot{m}_a = \dot{m}$, ergibt sich für die Leistungsbilanzgleichung:

$$\sum \dot{Q} + \sum P = \dot{m} \left[\left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{aus} - \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{ein} \right]$$

Bei der Anwendung der Leistungsbilanz auf einen Fluidstrom, der nacheinander mehrere Kontrollräume durchströmt, bezeichnen wir die Strömungsquerschnitte (Zustände) an den Grenzen der Kontrollräume durch Ziffern 1, 2, 3,



Die Leistungsbilanzgleichung für den ersten Kontrollraum ($1 \rightarrow 2$) lautet dann:

$$\dot{Q}_{12} + P_{12} = \dot{m} \left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1) \right] \quad [\text{W}]$$

Man kann nun (analog zum geschlossenen System) die Leistungsbilanz auf die Masse des strömenden Fluids beziehen, indem man die obige Gleichung durch den Massenstrom \dot{m} dividiert:

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1) \quad [\text{J/kg}]$$

Diese Gleichung enthält nur spezifische Energien. Die Quotienten nennt man:

$$q_{12} = \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{m}} = \text{spezifische Wärme}$$

$$w_{t12} = \frac{P}{\dot{m}} = \text{spezifische technische Arbeit}$$

Die *technische Arbeit* w_{t12} umfasst die spezifische Energie, die als Wellenarbeit und elektrische Arbeit über die Systemgrenze transportiert wird.

Diese Energiebilanzgleichung ist von enormer Bedeutung: Sie verknüpft die über die Systemgrenze übertragene Energie in Form von Wärme und Arbeit mit der Änderung des Zustandes des Fluids (Enthalpie, kinetische und potentielle Energie). Sie gilt für jeden stationären Prozess, also auch für irreversible Prozesse.

6.6.3 Die technische Arbeit w_{t12} (Wiederholung Kap. 4.4.4)

Der 1. HS für einen stationären Fliessprozess lautet gemäss letztem Abschnitt:

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

Die technische Arbeit ist diejenige Arbeit, die über die Systemgrenzen fliest - d.h. sie ist "technisch relevant". Die technische Arbeit muss aufgewendet bzw. kann abgeführt werden.

Wie berechnet man diese Arbeit? - Für eine saubere Herleitung fehlen uns noch einige wichtige Erkenntnisse und Zusammenhänge des 2. Hauptsatzes (2. HS). An dieser Stelle diskutieren wir lediglich das Resultat für die **technische Arbeit**:

$$w_{t12} = \underbrace{\int_1^2 v \, dp}_{\text{reversibler Anteil}} + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + \underbrace{j_{12}}_{\text{Dissipation}}$$

"Arbeit" = reversibler Anteil + Dissipation (immer positiv)

Man beachte, dass diese Gleichung keine "kalorischen" Grössen ($q_{12}, h_2 - h_1$) enthält. Sie verknüpft rein mechanische Grössen (v, p, c, z) mit Ausnahme der Dissipation $j_{12} \geq 0$. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass im Auftreten der Dissipation der 2. HS zum Ausdruck kommt.

Das vom Verlauf der Zustandsänderung abhängige Integral

$$w_{p12} = \int_1^2 v \, dp$$

ist wie w_{t12} und j_{12} eine Prozessgrösse. Sie wird **spezifische Druckänderungsarbeit** (w_{p12} , siehe Kap. 4.4), **spezifische Stutzenarbeit** (y_{12}) oder **spezifische Strömungsarbeit** genannt.

Die **technische Leistung** (kurz "Leistung") ist diejenige Leistung, die in der Leistungsbilanzgleichung eingesetzt wird. Sie berechnet sich aus der technischen Arbeit wie folgt:

$$P_{t12} = P_{12} = \dot{m} w_{t12} = \dot{m} \left(\int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12} \right)$$

Auf diese Leistung "kommt es an"!

6.7 Die Leistungsbilanz - Zusammenfassung

Nun ist der 1. HS der Thermodynamik “komplett”. Die **Leistungsbilanzgleichung** gehört sicherlich zu den wichtigsten Gleichungen des Ingenieurwesens. Sie lautet in der allgemeinen Form:

$$\frac{dE}{dt} = \sum \dot{Q} + \sum P + \sum_{ein} \dot{m}_{ein} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{ein} - \sum_{aus} \dot{m}_{aus} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{aus}$$

In dieser Form ist sie für alle Arten von Systemen gültig. Für **geschlossene Systeme** lautet sie

$$\frac{dE}{dt} = \sum \dot{Q} + \sum P$$

bzw. für eine Zustandsänderung (1 → 2) in der integrierten Form

$$U_2 - U_1 = \sum \dot{Q} + \sum P$$

Wir betrachten meistens **stationäre Prozesse**, d.h. die zeitlichen Änderungen sind gleich null. die allgemeine Leistungsbilanz lautet dann:

$$\sum \dot{Q} + \sum P = \sum_{aus} \dot{m}_{aus} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{aus} - \sum_{ein} \dot{m}_{ein} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)_{ein}$$

Für geschlossene Systeme reduziert sich die Gleichung zu:

$$\sum \dot{Q} + \sum P = 0$$

Für eine Zustandsänderung (1 → 2) eines stationär strömenden Fluids gilt:

$$\dot{Q}_{12} + P_{12} = \dot{m} \left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1) \right] \quad [\text{W}]$$

6.8 Die Enthalpie (H , h , \dot{H}): Eine energetische Zustandsgrösse

6.8.1 Überblick

In der Leistungsbilanzgleichung sehen wir, dass mit dem Fluid der Energiestrom

$$\dot{m} \left(h + \frac{c^2}{2} + g z \right)$$

über die Systemgrenze fliesst. Dabei ist

$$h = u + p v = u + \frac{p}{\rho} \quad [\text{J/kg}]$$

die **spezifische Enthalpie** des Fluids (intensive Zustandsgrösse). Die spezifische Enthalpie ist also die Summe aus der spezifischen inneren Energie u und dem Produkt $p v$, welches auch als spezifische Strömungsenergie oder spezifische Verschiebearbeit bezeichnet wird.

Die **Enthalpie** hingegen ist eine extensive Zustandsgrösse:

$$H = U + p V = m h \quad [\text{J}]$$

Schliesslich ist der **Enthalpiestrom** (d.h. Energiestrom) eines Fluidstromes

$$\dot{H} = \dot{U} + p \dot{V} = \dot{m} (u + p v) = \dot{m} h \quad [\text{J/s}] = [\text{W}]$$

Die Enthalpie ist eine energetische Zustandsgrösse, sie kann als Funktion von zwei Zustandsgrössen dargestellt werden. Der funktionale Zusammenhang

$$h = f(p, T)$$

bezeichnet man wie $u = u(v, T)$ als **kalorische Zustandsgleichung**.

Die untenstehende Abbildung zeigt als Beispiel die spezifische Enthalpie von Wasser in Funktion der Temperatur für verschiedene Drücke.

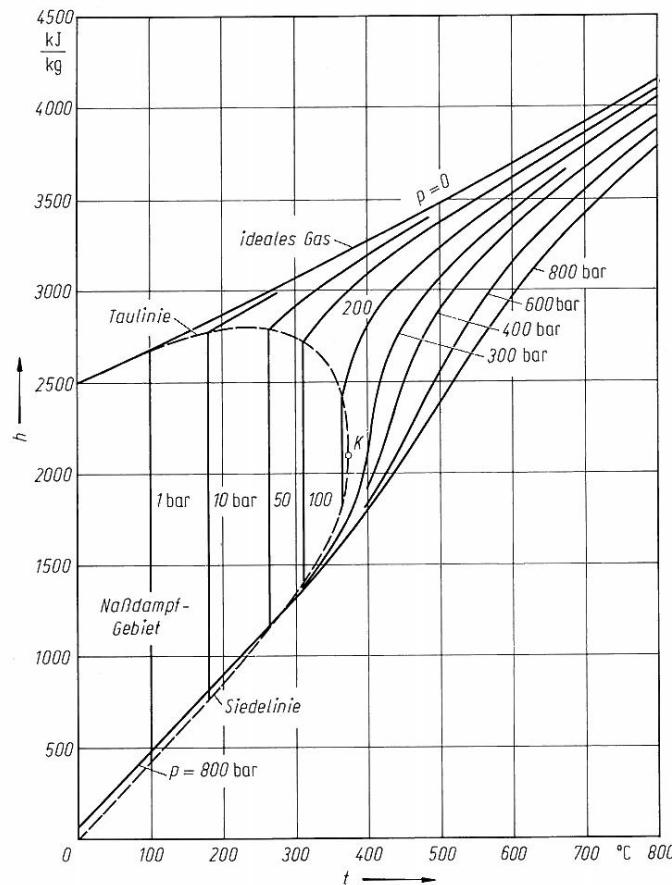


Abb. 6.1: Darstellung der kalorischen Zustandsgleichung $h = h(T, p)$ von H_2O durch Isobaren $p = \text{konst.}$ im h, T -Diagramm

6.8.2 Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p

h kann in Funktion von p und T als Fläche im Raum dargestellt werden. Das totale Differential ist

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp$$

Die partielle Ableitung

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

ist die **spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck**.

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

Nachfolgend sind einige wichtige Punkte zur Enthalpie zusammengefasst:

- h ist eine energetische Zustandsgröße
- h ist bestimmt durch den thermodynamischen Zustand: p, T oder v, T
 $h = h(T, p) = h(T, v) = h(p, v)$
- mit h werden die Energiebilanzierungen für offene Systeme einfach (meist sind T und p bekannt)
- h ist für alle wichtigen Stoffe experimentell ermittelt und in Tabellen, Diagrammen und in mathematischen Funktionen dargestellt
- h ist beliebig normierbar

Nachfolgend diskutieren wir die Enthalpie von realen, idealen und perfekten Gasen sowie von Flüssigkeiten und Festkörpern.

6.8.3 Gase

Reale Gase

$$p v \neq R_i T; \quad u = u(v, T)$$

$$\begin{aligned} h &= u(v, T) + p v \\ h &= h(p, T) \end{aligned}$$

Ideale Gase

$$p v = R_i T; \quad u = u(T)$$

$$\begin{aligned} h &= u(T) + p v = u(T) + R_i T = h(T) \\ h &= h(T) \quad h \text{ ist in idealen Gasen durch } T \text{ bestimmt.} \\ h &\neq h(v) \quad h \text{ ist bezüglich } p \text{ unabhängig.} \\ h &\neq h(p) \end{aligned}$$

Perfekte Gase

$$\begin{aligned}
 p v &= R_i T \\
 u = u(T) &= c_v (T - T_0) + u_0 \\
 h - h_0 &= u + p v - (u_0 + p_0 v_0) \\
 &= u - u_0 + p v - p_0 v_0 \\
 &= c_v (T - T_0) + R_i (T - T_0) \\
 &= (c_v + R_i)(T - T_0) = c_p (T - T_0)
 \end{aligned}$$

$$h = c_p (T - T_0) + h_0$$

Normierung:

$$h_0 = 0 \text{ kJ/kg K bei } \vartheta_0 = 0^\circ\text{C} \rightarrow h = c_p \vartheta$$

Zustand 1:

$$T_1 \rightarrow h_1 = c_p (T_1 - T_0) + h_0$$

Zustand 2:

$$T_2 \rightarrow h_2 = c_p (T_2 - T_0) + h_0$$

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

$$c_p = \frac{h_2 - h_1}{T_2 - T_1} = \frac{\Delta h}{\Delta T}$$

$$c_p = c_v + R_i$$

6.8.4 Flüssigkeiten und Feststoffe

Eine wichtige Eigenschaft von vielen Flüssigkeiten und Feststoffen ist, dass man sie in sehr guter Näherung als **inkompressibel** betrachten kann. "Inkompressibel" heisst, das spezifische Volumen (bzw. die Dichte) ist konstant. Damit folgt sofort

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= (u_2 - u_1) + (p_2 v_2 - p_1 v_1) & v_1 = v = v_2 \\ &= u_2 - u_1 + v(p_2 - p_1) & p_2 = p_1 \end{aligned}$$

$$h_2 - h_1 = u_2 - u_1$$

Die Änderung der Enthalpie ist gleich der Änderung der inneren Energie, d.h. $c_p = c_v$.

Beispiel 6.12: Isobare Erwärmung von Wasser. Ein Wassermassenstrom von $\dot{m} = 0.5 \text{ kg/s}$ wird in einem elektrischen Durchlauferhitzer bei 10 bar(a) einmal von 20°C auf 150°C und ein anderes Mal von 20°C auf 500°C erwärmt. Die Änderungen von kinetischer und potentieller Energie sowie Wärmeverluste können vernachlässigt werden. Welche Wärmeleistungen sind notwendig? Hinweis: Verwenden Sie für $h = h(p, T)$ das Diagramm auf S. 196.

A:

$$\dot{Q}_{12} = 275 \text{ kW}$$

$$h_1 = 85 \text{ kJ/kg}$$

$$h_2 = 632 \text{ kJ/kg}$$

B:

$$\dot{Q}_{12} = 1697 \text{ kW}$$

$$h_1 = 85 \text{ kJ/kg}$$

$$h_2 = 3479.1 \text{ kJ/kg}$$

Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p von verschiedenen idealen Gasen

Die nachfolgenden Tabellen stammen aus dem Buch "Einführung in die Thermodynamik" von Cerbe/Hoffmann, 10. Auflage, 1994.

Temp. in °C	H ₂		N ₂		O ₂		CO	
	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K
0	28,62	14,20	29,10	1,039	29,27	0,9150	29,12	1,040
100	28,94	14,36	29,12	1,039	29,53	0,9227	29,16	1,041
200	29,07	14,42	29,20	1,042	29,92	0,9351	29,29	1,046
300	29,14	14,45	29,35	1,048	30,39	0,9496	29,50	1,053
400	29,19	14,48	29,56	1,055	30,87	0,9646	29,77	1,063
600	29,32	14,54	30,11	1,075	31,75	0,9922	30,41	1,086
800	29,52	14,64	30,69	1,096	32,49	1,0154	31,05	1,109
1000	29,79	14,78	31,25	1,116	33,11	1,0347	31,65	1,130
1200	30,12	14,94	31,77	1,134	33,62	1,0508	32,17	1,149
1400	30,47	15,12	32,22	1,150	34,07	1,0648	32,63	1,165
1600	30,84	15,30	32,62	1,164	34,47	1,0772	33,03	1,179
1800	31,21	15,48	32,97	1,177	34,83	1,0885	33,38	1,192
2000	31,58	15,66	33,28	1,188	35,17	1,0990	33,69	1,203
2200	31,93	15,84	33,55	1,198	35,48	1,1089	33,96	1,212
2500	32,44	16,09	33,91	1,210	35,93	1,1229	34,31	1,225
3000	33,22	16,48	34,40	1,228	36,62	1,1443	34,79	1,242
M in $\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$		2,0159	28,0135		31,9988		28,010	
ρ_n in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$		0,0899	1,2504		1,4290		1,2506	

Temp. in °C	H ₂ O		CO ₂		SO ₂		Luft	
	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K	$C_{mp} _{0^\circ C}^t$ kJ kmol K	$c_{pm} _{0^\circ C}^t$ kJ kg K
0	33,47	1,859	35,93	0,8169	38,97	0,6092	29,07	1,004
100	33,71	1,871	38,17	0,8673	40,71	0,6355	29,15	1,007
200	34,08	1,892	40,13	0,9118	42,43	0,6624	29,30	1,012
300	34,54	1,917	41,83	0,9505	43,99	0,6868	29,52	1,019
400	35,05	1,945	43,33	0,9846	45,35	0,7079	29,79	1,029
600	36,15	2,007	45,85	1,0417	47,55	0,7423	30,41	1,050
800	37,34	2,073	47,86	1,0875	49,20	0,7680	31,03	1,071
1000	38,56	2,140	49,50	1,1248	50,47	0,7879	31,60	1,091
1200	39,76	2,207	50,85	1,1555	51,49	0,8038	32,11	1,109
1400	40,91	2,271	51,98	1,1811	52,31	0,8167	32,57	1,124
1600	42,00	2,332	52,93	1,2027	53,00	0,8273	32,97	1,138
1800	43,03	2,388	53,74	1,2211	53,59	0,8365	33,32	1,150
2000	43,97	2,441	54,44	1,2370	54,09	0,8444	33,64	1,161
2200	44,86	2,490	55,06	1,2510	54,54	0,8514	33,93	1,171
2500	46,07	2,557	55,85	1,2690	55,13	0,8606	34,31	1,185
3000	47,82	2,654	56,91	1,2932	55,95	0,8734	34,84	1,203
M in $\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$		18,0153	44,010		64,065		28,9626	
ρ_n in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$		0,8038	1,9767		2,9285		1,2929	

Eine Tabelle mit spezifischen Wärmekapazitäten verschiedener Gase bei 0°C ist auf S. 152 zu finden.

Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazitäten und des Isentropenexponenten von idealen Gasen

Die energetischen Zustandsgrößen innere Energie u und Enthalpie h von idealen Gasen sind nur von der Temperatur abhängig:

$$\begin{aligned} h - u &= p v = R_i T \\ dh - du &= c_p dT - c_v dT = R_i dT \\ c_p - c_v &= R_i \end{aligned}$$

Die Differenz von c_p und c_v von idealen Gasen ist gleich R_i und somit unabhängig von T .

In der Tabelle vorne sind die mittleren spezifischen Wärmekapazitäten von 0°C bis zu einer bestimmten Temperatur aufgelistet. Für die mittlere Wärmekapazität c_{pm} zwischen T_1 und T_2 gilt (für c_{vm} gilt die analoge Formel):

$$c_{pm}|_{T_1}^{T_2} = \frac{c_{pm}|_{T_0}^{T_2} (T_2 - T_0) - c_{pm}|_{T_0}^{T_1} (T_1 - T_0)}{T_2 - T_1}$$

Für den Isentropenexponent gilt:

$$\kappa_m|_{T_1}^{T_2} = \frac{c_{pm}|_{T_1}^{T_2}}{c_{vm}|_{T_1}^{T_2}} = \frac{c_{pm}|_{T_1}^{T_2}}{c_{pm}|_{T_1}^{T_2} - R_i}$$

Beispiel 6.13: Isentropenexponent von Luft. Das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten ist für Luft von 0°C und für Luft in den Temperaturbereichen 0°C-500°C und 1000°C-2000°C aus den Werten der Tabelle auf S. 201 zu berechnen. Näherungsweise sollen Luft als ideales Gas angenommen und Zwischenwerte aus der Tabelle linear interpoliert werden.

$$\kappa_m|_{0^\circ\text{C}}^{500^\circ\text{C}} = \frac{c_{pm}|_{0^\circ\text{C}}^{500^\circ\text{C}}}{c_{vm}|_{0^\circ\text{C}}^{500^\circ\text{C}}} = \frac{c_{pm}|_{0^\circ\text{C}}^{500^\circ\text{C}}}{c_{pm}|_{0^\circ\text{C}}^{500^\circ\text{C}} - R_i} = 1.38$$

$$\kappa_m|_{1000^\circ\text{C}}^{2000^\circ\text{C}} = \frac{c_{pm}|_{1000^\circ\text{C}}^{2000^\circ\text{C}}}{c_{vm}|_{1000^\circ\text{C}}^{2000^\circ\text{C}}} = \frac{c_{pm}|_{1000^\circ\text{C}}^{2000^\circ\text{C}}}{c_{pm}|_{1000^\circ\text{C}}^{2000^\circ\text{C}} - R_i} = 1.30$$

6.9 Anwendung des 1. HS für offene Systeme (Leistungsbilanzgleichung)

6.9.1 Überblick

Die Anwendung der Leistungsblanzgleichung für offene Systeme ist sehr breit und vielfältig. In diesem Abschnitt betrachten wir zuerst spezielle reversible Zustandsänderungen mit perfekten Gasen und anschliessend einige technische Anwendungen.

6.9.2 Spezielle reversible Zustandsänderungen mit perfekten Gasen

Wir betrachten die folgenden speziellen *reversiblen* Zustandsänderungen $1 \rightarrow 2$ mit Vernachlässigung der Änderungen von kinetischer und potentieller Energie:

1. Isobare Zustandsänderung: $p = \text{konst.}, dp = 0$
2. Isochore Zustandsänderung: $V = \text{konst.}, dV = 0$
3. Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{konst.}, dT = 0$
4. Isentrope Zustandsänderung: $s = \text{konst.}, ds = 0$

Unter den oben getroffenen Annahmen lautet der 1. HS für offene Systeme

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1$$

und die technische Arbeit ist gleich der Druckänderungsarbeit

$$w_{t12} = w_{p12\,rev} = \int_1^2 v \, dp$$

a) Isobare Zustandsänderung

Es ist $p_1 = p_2$ bzw. $dp = 0$:

$$1. \text{ HS: } q_{12} + \int_1^2 v \, dp = h_2 - h_1 \quad \text{bzw. } dq + v \, dp = dh$$

$$\int_1^2 v \, dp = 0$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{m} c_p (T_2 - T_1)$$

analog im geschlossenen System: $Q_{12} = m (h_2 - h_1) = m c_p (T_2 - T_1)$

b) Isochore Zustandsänderung

Es ist $v_1 = v_2$ bzw. $dv = 0$ (inkompressibles Fluid):

$$1. \text{ HS: } q_{12} + \int_1^2 v \, dp = h_2 - h_1 \quad \text{bzw. } dq + v \, dp = dh$$

$$q_{12} = (h_2 - p_2 v_2) - (h_1 p_1 v_1)$$

$$q_{12} = u_2 - u_1$$

analog im geschlossenen System: $q_{12} = u_2 - u_1$

$$q_{12} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

c) Isotherme Zustandsänderung

Es ist $T_1 = T_2$ bzw. $dT = 0$:

$$1. \text{ HS: } q_{12} + \int_1^2 v \, dp = h_2 - h_1 \quad \text{bzw. } dq + v \, dp = dh$$

$$q_{12} = -w_{p12rev}$$

$$\text{analog im geschlossenen System: } q_{12} = -R_i T \ln \frac{p_2}{p_1} \dots$$

d) Isentrope Zustandsänderung

Eine isentrope Zustandsänderung ist adiabat und reversibel. Es gilt $s_1 = s_2$ bzw. $ds = 0$:

$$1. \text{ HS: } q_{12} + \int_1^2 v \, dp = h_2 - h_1 \quad \text{bzw. } dq + v \, dp = dh$$

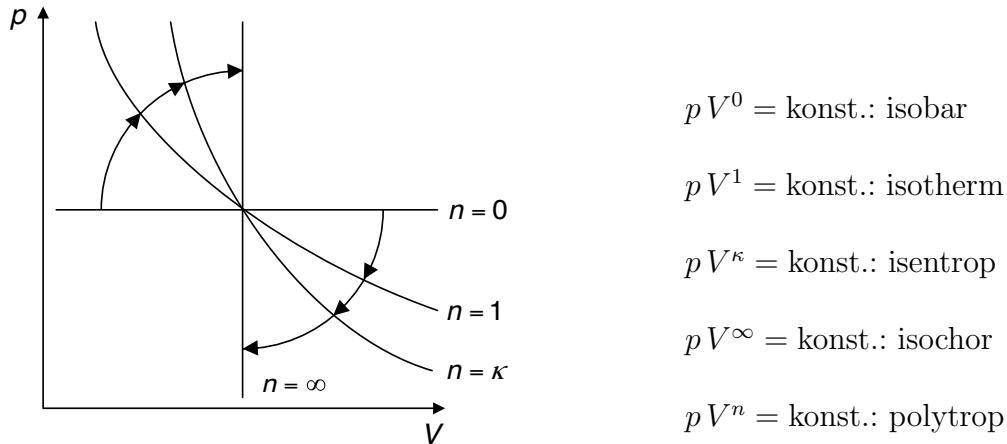
$$w_{p12rev} = h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

$$\text{analog im geschlossenen System: } w_{v12rev} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

$$w_{p21rev} = \kappa w_{v12rev}$$

6.9.3 Polytrope Zustandsänderungen mit perfekten Gasen

Polytrope Zustandsänderungen können reversibel oder irreversibel sowie adiabat oder nicht-adiabat sein. Wir vernachlässigen nachfolgend die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie.



Für die Druckänderungsarbeit w_{p12} haben wir folgendes Resultat gefunden:

$$w_{p12} = n \frac{p_1 v_1}{n - 1} \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right) - 1 \right]$$

Mit der Gasgleichung $p v = R_i T$ erhält man:

$$w_{p12} = \frac{n}{n - 1} R_i (T_2 - T_1)$$

Einsetzen in den 1. HS führt zu:

$$q_{12} + \frac{n}{n - 1} R_i (T_2 - T_1) = c_p (T_2 - T_1)$$

Mit $c_p = \kappa R_i / (\kappa - 1)$ ergibt sich:

$$q_{12} = \left(\frac{\kappa R_i}{\kappa - 1} - \frac{n R_i}{n - 1} \right) (T_2 - T_1) = \frac{n - \kappa}{(\kappa - 1)(n - 1)} R_i (T_2 - T_1)$$

Und mit $R_i = c_v (\kappa - 1)$ ist:

$$q_{12} = \frac{n - \kappa}{n - 1} c_v (T_2 - T_1)$$

Zusammenfassung

$n = 0$: $p v^0 = \text{konst.}$, d. h. isobare ZÄ

$n = 1$: $p v^1 = \text{konst.}$, d. h. isotherme ZÄ

$n = \kappa$: $p v^\kappa = \text{konst.}$, d. h. isentrope ZÄ

$n = \infty$: $p v^\infty = \text{konst.}$, d. h. isochore ZÄ

6.9.4 Stationäre Fliessprozesse: Anwendungen

Nun genug der Theorie! - Wir wollen den 1. HS für offene Systeme für verschiedene technische Systeme anwenden. Zur Wiederholung nochmals die wichtigsten Gleichungen:

$$\dot{Q}_{12} + P_{12} = \dot{m} \left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) \right]$$

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

Wir betrachten folgende Prozesse:

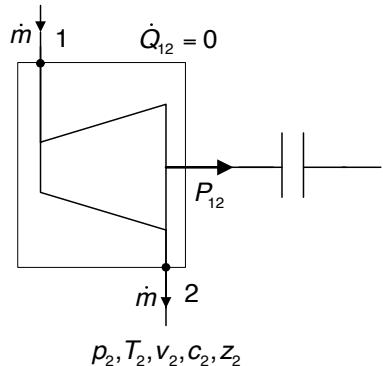
1. Adiabate Turbine
2. Adiabater Verdichter
3. Isothermer Verdichter
4. Wasserkraftwerk
5. Hydraulische Pumpe
6. Gas strömt durch eine adiabate Düse
7. Gas strömt durch eine adiabate Blende (Drossel)
8. Gas strömt durch einen adiabaten Diffusor
9. Flüssigkeit strömt durch ein Rohr
10. Der Föhn (Fallwind)
11. Wärmeübertrager

Diese Prozesse verlaufen vorerst **dissipationsfrei**. Mit der Dissipation werden wir uns im nächsten Kapitel (2. HS) beschäftigen.

1. Adiabate Turbine

In einer adiabaten Turbine wird Dampf oder Gas "abgearbeitet". Dabei wird thermische Energie in mechanische Energie umgewandelt. Die Dissipation sei null. Gesucht ist die Leistung P_{12} und die Eintrittstemperatur T_1 .

$$p_1, T_1, v_1, c_1, z_1$$



$$\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$$

$$p_1 = 10 \text{ bar(a)}, T_1 = ?$$

$$p_2 = 1 \text{ bar(a)}, T_2 = 300 \text{ K}$$

$$c_1 = c_2, z_1 = z_2$$

$$c_p = 1.0 \text{ kJ/kg K}, \kappa = 1.4$$

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

$$w_{t12} = h_2 - h_1 = \int_1^2 v \, dp + j_{12}$$

$$P_{12} = \dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{H}_2 - \dot{H}_1$$

Perfektes Gas:

$$w_{t12} = c_p (T_2 - T_1), \quad P_{12} = \dot{m} c_p (T_2 - T_1)$$

Keine Dissipation ($j_{12} = 0$), d.h. isentrope Zustandsänderung:

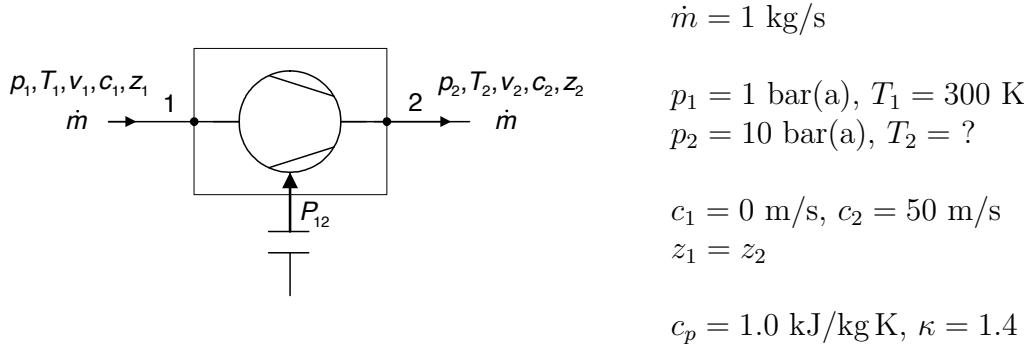
$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$P_{12} = \dot{m} \underbrace{w_{t12}}_{w_{p12\,rev}} = \dot{m} c_p T_1 \underbrace{\left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]}_{w_{p12\,rev}}$$

$$T_1 = 579 \text{ K}, \quad P_{12\,rev} = -279 \text{ kW}$$

2. Adiabater Verdichter

In einem Verdichter wird dem Gas technische Arbeit zugeführt. Viele reale Verdichtungsprozesse können in guter Näherung als adiabat betrachtet werden. Wir betrachten die dissipationsfreie Verdichtung $1 \rightarrow 2$. Gesucht ist die Leistung P_{12} und die Austrittstemperatur T_2 .



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

$$w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{c^2}{2} = \int_1^2 v dp + j_{12}$$

Perfektes Gas und keine Dissipation ($j_{12} = 0$), d.h. isentrope Zustandsänderung:

$$w_{t12\ rev} = c_p (T_2 - T_1) + \frac{c^2}{2} = c_p T_1 \underbrace{\left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]}_{w_{p12\ rev}} + \frac{c^2}{2}$$

$$w_{t12\ rev} = (279.21 + 1.25) \text{ kJ/kg} = 280.46 \text{ kJ/kg}$$

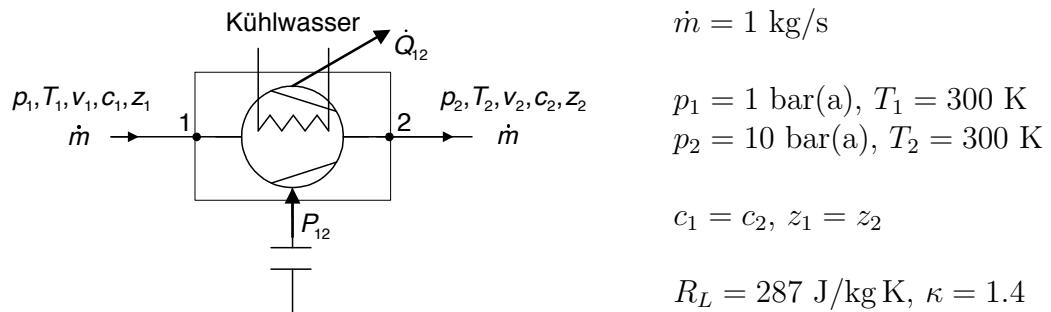
$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 579.2 \text{ K}$$

$$P_{12\ rev} = \dot{m} w_{t12\ rev} = 280.5 \text{ kW}$$

Im Vergleich dazu nimmt die reversible Pumpe bei gleichem Massenstrom und Drücken lediglich eine Leistung von $P_{12\ rev} = 0.90 \text{ kW}$ auf (siehe Hydraulische Pumpe).

3. Isothermer Verdichter

Wir haben bereits mehrmals erwähnt: Isotherme Maschinen sind technisch schwierig zu realisieren. Trotzdem betrachten wir hier den isothermen Verdichtungsprozess, weil er als Vergleichsprozess dienen kann. Gesucht sind die Leistung P_{12} und der Wärmestrom \dot{Q}_{12} für die dissipationsfreie Verdichtung.



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

$$w_{t12} = -q_{12} = \int_1^2 v \, dp + j_{12}$$

Perfektes Gas und keine Dissipation ($j_{12} = 0$):

$$w_{t12\,rev} = w_{p12\,rev} = R_L T \ln \frac{p_2}{p_1}$$

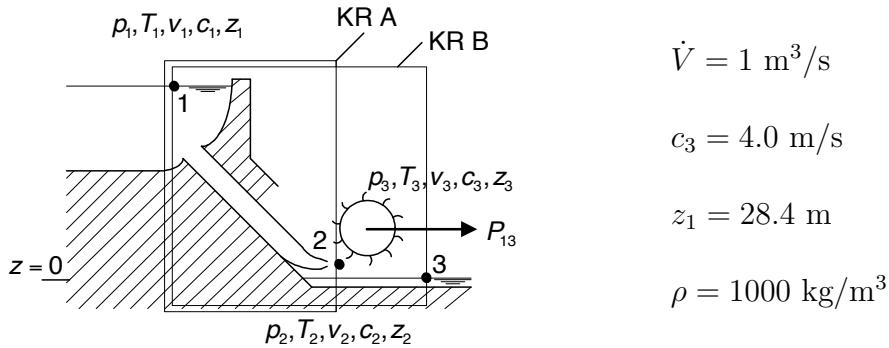
$$P_{12\,rev} = \dot{m} R_L T \ln \frac{p_2}{p_1} = 198.3 \text{ kW}$$

$$\dot{Q}_{12\,rev} = -P_{12\,rev} = -198.3 \text{ kW}$$

Der isotherme Verdichter benötigt wesentlich weniger Leistung als der adiabate Verdichter ($P_{12\,rev} = 280.5 \text{ kW}$)

4. Wasserkraftwerk

Wir betrachten das unten dargestellte Wasserkraftwerk. Welche Leistung P_{13} kann ohne Dissipation gewonnen werden?



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

Systemgrenze A: aus der Gleichung für die technische Arbeit folgt mit

$$c_1 = 0$$

:

$$w_{t12} = v(p_2 - p_1) + \frac{c^2}{2} - g z_1 + j_{12} = 0$$

$$\frac{c^2}{2} = g z_1 - j_{12}$$

Systemgrenze B mit $z_3 = 0, c_1 = 0, q_{13} = 0$ und $p_1 = p_3$ folgt:

$$w_{t13} = v(p_3 - p_1) + \frac{c_3^2}{2} - g z_1 + j_{13}$$

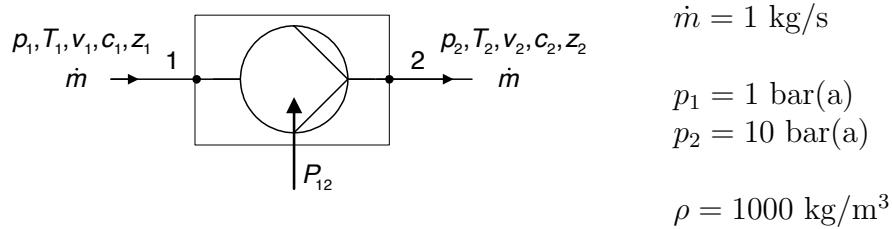
$$w_{t13} = \underbrace{-g z_1 + \frac{c_3^2}{2}}_{\text{reversibler Anteil}} + \underbrace{j_{13}}_{\text{Dissipation}}$$

Keine Dissipation ($j_{12} = 0$):

$$P_{13rev} = \dot{m} w_{t13rev} = -270.6 \text{ kW}$$

5. Hydraulische Pumpe

Mit einer Pumpe wird der Druck einer strömenden Flüssigkeit erhöht. Flüssigkeiten können in sehr guter Näherung als inkompressibel betrachtet werden. Wie gross ist die Pumpenleistung P_{12} , wenn die Dissipation vernachlässigbar ist?



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

Aus dem 1.HS folgt:

$$w_{t12} = h_2 - h_1$$

Aus der Gleichung für die TA folgt:

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + j_{12}$$

$$w_{t12} = v(p_2 - p_1) + j_{12} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + j_{12}$$

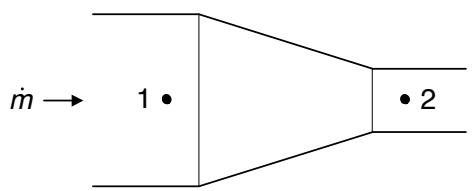
$$P_{12} = \dot{m} w_{t12} = \underbrace{\frac{\dot{m}}{\rho}}_{\dot{V}} (p_2 - p_1) + \dot{m} j_{12}$$

Ohne Dissipation ($j_{12} = 0$) erhält man folgende Leistung:

$$P_{12rev} = \dot{m} w_{t12rev} = \dot{V} (p_2 - p_1) = 0.90 \text{ kW}$$

6. Gas strömt durch eine adiabate Düse

In einer konvergenten Düse wird ein perfektes Gas beschleunigt. Es wird keine Wärme übertragen (d.h. adiabate Zustandsänderung).



$$\begin{aligned} p_1 &= 10 \text{ bar(a)} \\ p_2 &= 1 \text{ bar(a)} \end{aligned}$$

$$T_1 = 300 \text{ K}$$

$$\begin{aligned} p_1, T_1, v_1, c_1, z_1 \\ p_2, T_2, v_2, c_2, z_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} c_p &= 1.0 \text{ kJ/kg K} \\ \kappa &= 1.4 \end{aligned}$$

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

$$\underbrace{h_1 + \frac{c_1^2}{2}}_{h_1^0} = \underbrace{h_2 + \frac{c_2^2}{2}}_{h_2^0} = \text{konst.}$$

$$h_1^0 = h_2^0 : \quad \text{Die "Totalenthalpie" bleibt konstant.}$$

Im Allgemeinen Fall kann die Geschwindigkeit c_2 wie folgt berechnet werden:

$$c_2 = \sqrt{c_1^2 + 2(h_1 - h_2)}$$

Perfektes Gas und keine Dissipation ($j_{12} = 0$), d.h. isentrope Zustandsänderung:

$$c_2 = \sqrt{c_1^2 + 2 c_p (T_2 - T_1)} = \sqrt{c_1^2 + 2 c_p T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

Ein Zahlenbeispiel:

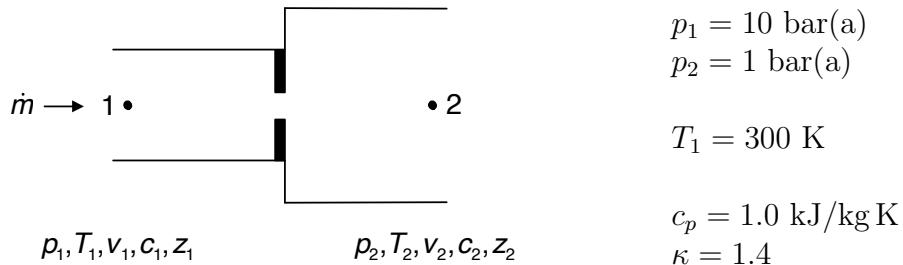
$$c_1 = 0 : \quad c_2 = 539 \text{ m/s}$$

$T_2 = 155.5 \text{ K} = -117.6 \text{ }^\circ\text{C} \rightarrow$ Kälterzeugung (z.B. Luftzerlegung)

$$j_{12} = -\frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) - \int_1^2 v dp > 0$$

7. Gas strömt durch eine adiabate Blende (Drossel)

Die Aufgabe eines Drosselorgans ist, den Druck des durchströmenden Fluids zu reduzieren (Blende, Expansionsventil).



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

Aus dem 1. HS folgt unmittelbar:

$$h_2 - h_1 = 0, \text{ d. h. } h_1 = h_2$$

“isenthalpe” Zustandsänderung, d.h. die Enthalpie bleibt konstant!

Für den Spezialfall perfektes Gas ist:

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 0, \text{ d. h.}$$

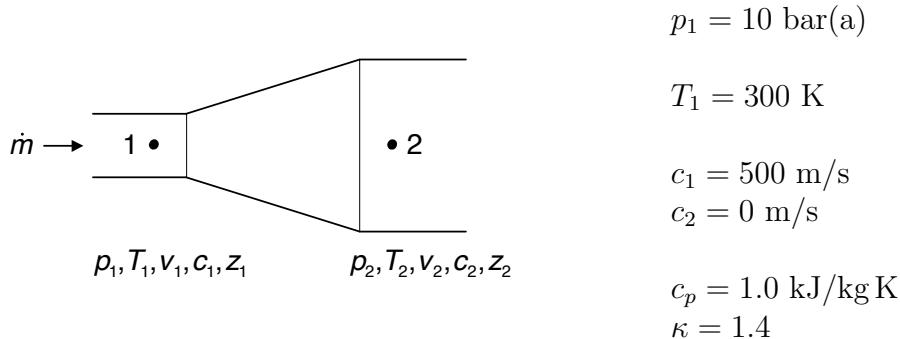
$$T_1 = T_2$$

Aus der Gleichung für die TA kann die Dissipation berechnet werden:

$$j_{12} = - \int_1^2 v \, dp$$

8. Gas strömt durch einen adiabaten Diffusor

Ein Diffusor ist eine divergente Düse. In ihm wird ein Fluid verzögert.



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

$$\underbrace{h_1 + \frac{c_1^2}{2}}_{h_1^0} = \underbrace{h_2 + \frac{c_2^2}{2}}_{h_2^0} = \text{konst.}$$

Wie bei der Düse bleibt die Totalenthalpie konstant. für ein perfektes Gas gilt:

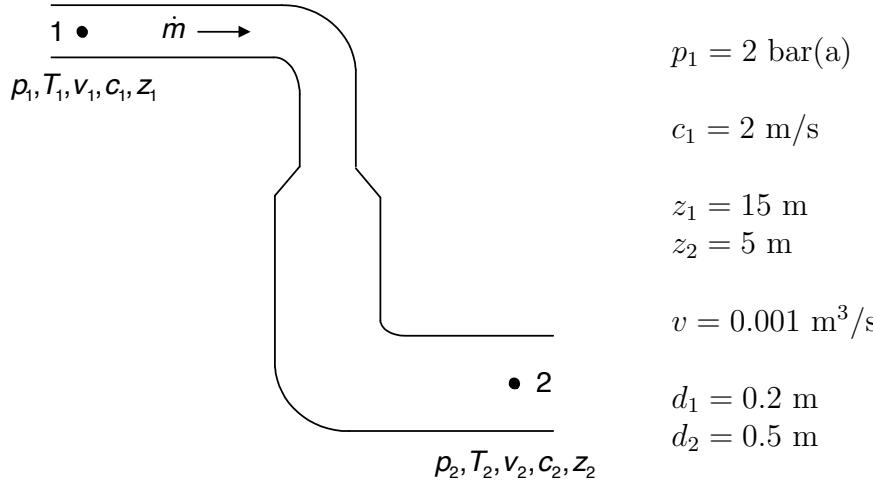
$$\begin{aligned} c_p T_1 + \frac{c_1^2}{2} &= c_p T_2 \\ \frac{c_1^2}{2} &= c_p (T_2 - T_1) \\ \Delta T = \frac{c_1^2}{2 c_p} &= 125 \text{ K, d.h. } T_2 = 425 \text{ K (152 °C)} \end{aligned}$$

Durch die Verzögerung wird das Gas erwärmt. Für den Fall ohne Dissipation ($j_{12} = 0$) können wir auch den Druck p_2 berechnen:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow p_2 = 33.7 \text{ bar(a)}$$

9. Flüssigkeit strömt durch ein Rohr

Im Teil “Fluidmechanik” des Moduls THFL+GRU befassen Sie sich intensiv mit Rohrströmungen. Wir wollen unsere Kenntnisse aus der Thermodynamik auf dieses Problem anwenden.



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

Aus der Gleichung für die TA folgt:

$$v(p_2 - p_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12} = 0$$

Gleichung von Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2} + g z_2 + j_{12}$$

Durch Einsetzen der TA in den 1.HS erhält man:

$$\underbrace{q_{12}}_{=0} + \int_1^2 v dp + j_{12} = h_2 - h_1$$

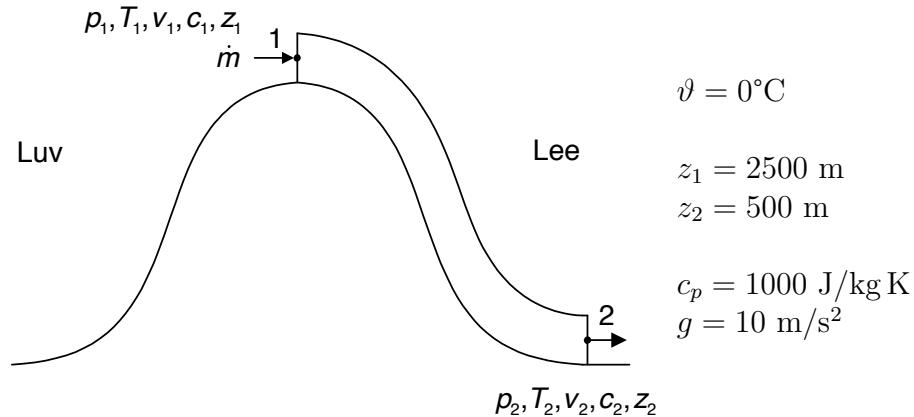
$$v(p_2 - p_1) + j_{12} = h_2 - h_1$$

Die Dissipation führt also zu einer Erhöhung der inneren Energie, d.h. zu einem Temperaturanstieg.

$$j_{12} = (h_2 - p_2 v) - (h_1 - p_1 v) = u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1)$$

10. Der Föhn

Die Urner kennen ihn bestens - den Föhn.



$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{t12} = \int_1^2 v dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

Aus dem 1. HS folgt:

$$h_2 - h_1 = g(z_1 - z_2)$$

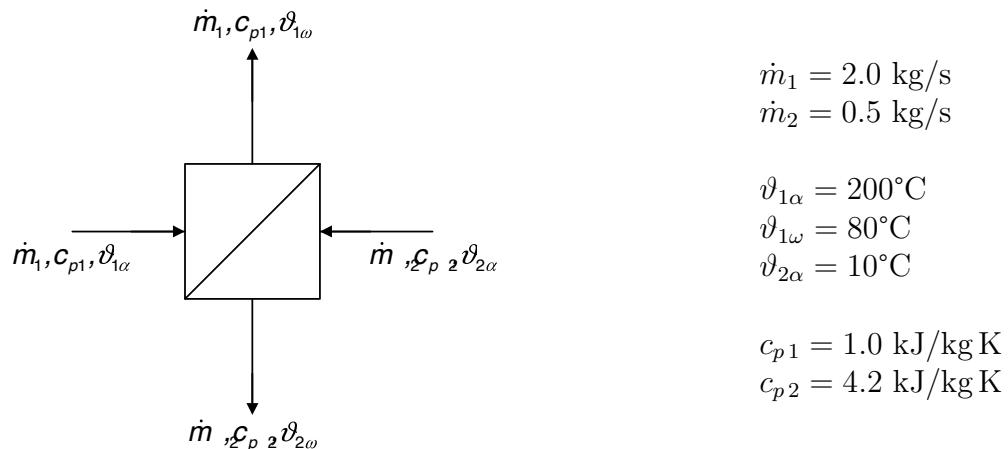
$$c_p(T_2 - T_1) = g(z_1 - z_2)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{g}{c_p} \approx 1 \frac{\text{K}}{100 \text{ m}}$$

bei $\Delta z = 2000 \text{ m}$: $\Delta T = 20 \text{ K}$

11. Wärmeübertrager

Wir betrachten einen gut isolierten Wärmeübertrager. Die Änderung der potentiellen und kinetischen Energie sowie die Druckverluste seien vernachlässigbar. Wie hoch ist die Austrittstemperatur $\vartheta_{2\omega}$?



6.10 Übungen

Übung 6.1: Verdichtung von idealem Gas. Luft der Masse m wird in einem Zylinder/Kolben-System vom Zustand 1 (p_1 , V_1 , und T_1) auf den Zustand 2 (mit Volumen V_2) verdichtet. Die Verdichtung geschieht einmal *isotherm* ($T = \text{konst.}$) und einmal *isentrop* (adiabat und reversibel, $s = \text{konst.}$). In welchem Fall ist die Volumenänderungsarbeit grösser? Eine qualitative Betrachtung im p, V -Diagramm genügt! (P)

Hinweise:

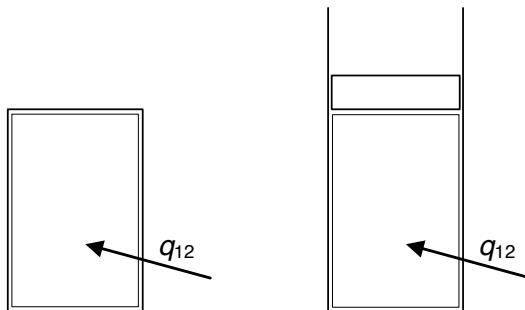
$$T = \text{konst.} \rightarrow pV = \text{konst.}$$

$$s = \text{konst.} \rightarrow pV^\kappa = \text{konst.}$$

Übung 6.2: Innere Energie von idealem Gas.

- Wie hängt die spezifische innere Energie des idealen Gases von der Temperatur und vom Druck ab?
- Welche Beziehung existiert zwischen der spezifischen inneren Energie und der spezifischen Enthalpie?

Übung 6.3: Ideales Gas unterschiedlich erwärmen. Die untenstehende Abbildung zeigt zwei Fälle, wie 1 kg eines idealen Gases um 100 K erwärmt wird. Ist die zugeführte Wärmeenergie in beiden Fällen gleich gross? Geben Sie eine klare Begründung an! (Hinweis: Sie können den 1. HS anwenden.) (P)



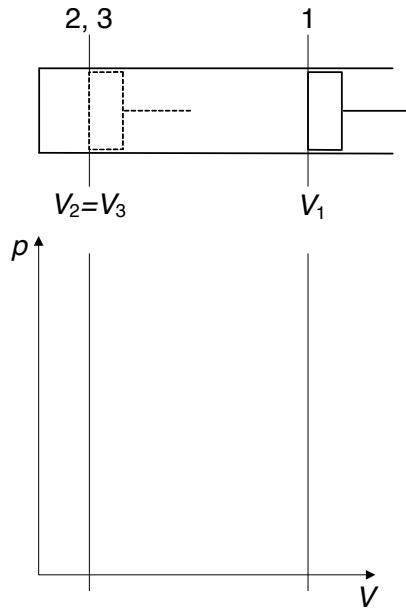
Übung 6.4: System mit 3 Teilprozessen. In einem Zylinder ist ein ideales Gas eingeschlossen. Es werden drei Teilprozesse nacheinander durchgeführt.

$1 \rightarrow 2$: In der Anfangslage hat das Gas 1 bar(a) und 25°C . Das Gas wird langsam verdichtet bis zur Position 2, und zwar so, dass durch Kühlung die Temperatur konstant bleibt.

$2 \rightarrow 3$: In der Position 2 (d.h. $V_2 = V_3$) wird das Gas durch Wärmezufuhr von aussen erwärmt.

$3 \rightarrow 1$: Die Erwärmung $2 \rightarrow 3$ erfolgt so weit, dass nach der adiabaten und reibungsfreien Expansion $3 \rightarrow 1$ wieder der Anfangszustand erreicht wird. (**P**)

- Zeichnen Sie diese Prozesse im p, V -Diagramm ein. Bezeichnen Sie jeweils klar und eindeutig die Zustandsgrößen p , V , T , s .
- Zeichnen Sie die Netto-Arbeit für einen Arbeitstakt ($1 \rightarrow 3$) in das p, V -Diagramm ein. Ist die Netto-Arbeit positiv oder negativ?



Übung 6.5: Isotherme Verdichtung. In einem Zylinder mit reibungsfrei beweglichem und gasdicht eingepasstem Kolben sind $V_1 = 2.5 \text{ m}^3$ Luft bei der Temperatur $T_1 = 273 \text{ K}$ und dem Druck von $p_1 = 2.8 \text{ bar(a)}$ eingeschlossen. Der Innendurchmesser des Zylinders ist $D = 920 \text{ mm}$.

Stoffdaten von Luft: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_v = 717 \text{ J/kg K}$

- Wie gross ist die extensive und spezifische reversible Volumenänderungsarbeit, wenn durch eine Kolbenbewegung von $\Delta x = 32 \text{ cm}$ die Luft isotherm verdichtet wird? ($w_{v12\text{rev}} = 6968 \text{ J/kg}$, $W_{v12\text{rev}} = 62250 \text{ J}$)
- Welche Wärmeenergie wird während dem Prozess aus dem System abgeführt? ($Q_{12} = -62250 \text{ J}$)
- Wie gross ist die Änderung der inneren Energie? ($U_2 - U_1 = 0$)

Übung 6.6: Rührwerk. In einem zylindrischen Gefäss befindet sich Stickstoff, der durch einen gewichtsbelasteten Kolben auf einem konstanten Druck von $p = 2 \text{ bar(a)}$ gehalten wird. Der Kolben kann sich reibungsfrei bewegen. Das Gasvolumen ist $V_1 = 0.6 \text{ m}^3$ bei einer Temperatur von $T_1 = 293 \text{ K}$. In die Gasmenge ragt ein Rührwerk hinein, dessen Antriebsleistung $P = 135 \text{ W}$ beträgt. Das Rührwerk wird für 10 min eingeschaltet. Danach wird eine Gastemperatur von $T_2 = 354 \text{ K}$ gemessen. Die Isolation des Gefäßes stellt sicher, dass die gesamte Arbeit des Rührwerks an das Gas übergeht. Die Gaskonstante von Stickstoff ist 296.8 J/kg K .

Es sollen ermittelt werden:

- die extensive und spezifische Rührerarbeit W_{R12} bzw. w_{R12} (was ist das für eine Arbeit?), ($W_{R12} = 81.0 \text{ kJ}$, $w_{R12} = 58.7 \text{ kJ/kg}$)
- das Volumen V_2 nach dem Abschalten des Rührwerks, ($V_2 = 0.72 \text{ m}^3$)
- die extensive und spezifische Volumenänderungsarbeit (W_{v12} , w_{v12}), ($W_{v12} = -25.0 \text{ kJ}$; $w_{v12} = -18.1 \text{ kJ/kg}$)
- die Änderung der inneren Energie $U_2 - U_1$. ($U_2 - U_1 = 56.0 \text{ kJ}$)

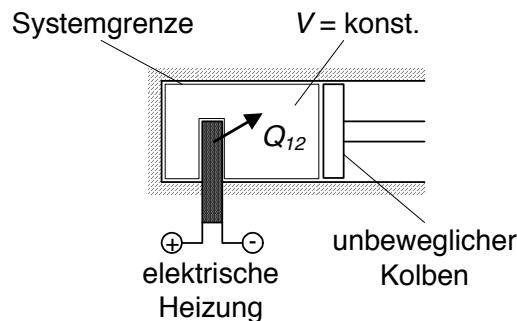
Übung 6.7: Rührkessel mit adiabater Systemgrenze. In einem wärmeundurchlässigen Zylinder befinden sich $V_1 = 0.1 \text{ m}^3$ Gas, dessen Druck durch einen konstant belasteten Kolben auf $p_1 = 4 \text{ bar(a)}$ gehalten wird. Dem Gas wird durch einen Rührer eine Energie von $W_R = 0.05 \text{ kWh}$ zugeführt, wobei sich die Temperatur von $\vartheta_1 = 15^\circ\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 303^\circ\text{C}$ erhöht. Der Umgebungsdruck beträgt $p_U = 0.95 \text{ bar(a)}$.

- Wie gross ist die Volumenänderungsarbeit? Wird sie bezogen auf das System Gas zu- oder abgeführt? ($W_{v12\text{rev}} = -40'000 \text{ J}$)
- Um welchen Wert ändert sich die innere Energie des Systems? ($U_2 - U_1 = 140'000 \text{ J}$)
- Wie gross ist die Nutzarbeit? ($W_{N12} = -30'500 \text{ J}$)

Übung 6.8: Rührkessel mit wärmedurchlässiger Systemgrenze. Es wird ein System wie in der Übung 6.6, jedoch mit wärmedurchlässigem (nicht-adiabatem) Zylinder betrachtet. Dem Gas wird wieder durch den Rührer die Energie von $W_R = 0.05 \text{ kWh}$ zugeführt. Ein Teil dieser Energie (Teil $B = 0.4$) erhöht die innere Energie des Systems, gleichzeitig steigt die Temperatur von $\vartheta_1 = 15^\circ\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 159^\circ\text{C}$.

- Wie gross ist die Volumenänderungsarbeit? Wird sie bezogen auf das System Gas zu- oder abgeführt? ($W_{v12\text{rev}} = -60.0 \text{ kJ}$)
- Wie gross ist die von dem System Gas an die Umgebung abgegebene Wärmeenergie? ($Q_{12} = -48.0 \text{ kJ}$)

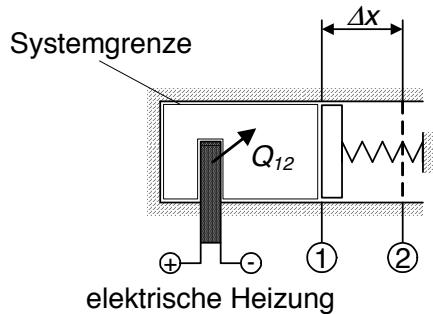
Übung 6.9: Zylinder/Kolben-System mit elektrischer Heizung. Dem Zylinder/Kolben-System mit einem bestimmten Gasinhalt führt man mittels einer elektrischen Widerstandsheizung Wärmeenergie zu. Die äussere Zylinderwand und der Kolben seien ideal wärmeisoliert.



- Die Zustandsänderung des Gases ist in einem p, V -Diagramm darzustellen.
- Wie ändert sich die innere Energie des Systems, wenn während der Zeit $t = 30 \text{ s}$ bei einer Spannung von $U_{el} = 125 \text{ V}$ ein Gleichstrom von $I_{el} = 2.5 \text{ A}$ durch den Heizstab fliesst? ($U_2 - U_1 = 9'375 \text{ J}$)

Übung 6.10: Zylinder/Kolben-System mit elektrischer Heizung und Feder. Das Gas im Zylinder nimmt vor dem Prozess ein Volumen von $V_1 = 0.02 \text{ m}^3$ bei einem Druck von $p_1 = 1 \text{ bar(a)}$ ein, der dem Umgebungsdruck p_U das Gleichgewicht hält. Infolge Wärmezufuhr an das Gas mit der elektrischen Heizung wird der als (reibungsfrei) beweglich vorausgesetzte Kolben gegen eine Feder so weit nach aussen gedrückt, bis sich das Gasvolumen verdoppelt hat. Es stellt sich hierbei ein Enddruck von $p_2 = 2 \text{ bar(a)}$ ein. Es wird die gleiche Wärmemenge wie in Übung 6.9 zugeführt.

Während des gesamten Vorganges mit quasistatischer Zustandsänderung ist die von der Feder auf den Kolben ausgeübte Kraft F stets dem Kolbenweg x proportional ($F = Cx$). Die äussere Zylinderwand und der Kolben seien wiederum ideal wärmeisoliert.



- Die Zustandsänderung des Gases ist in einem p, V -Diagramm darzustellen.
- Wie gross ist die Volumenänderungsarbeit? Wird sie bezogen auf das System Gas zu- oder abgeführt? ($W_{V12\text{rev}} = -3.0 \text{ kJ}$)
- Welcher Teil der Volumenänderungsarbeit wird zur Verdrängung der Umgebungsluft benötigt, und welcher Teil wird in der Feder gespeichert? ($W_{N12} = -1.0 \text{ kJ}$, $W_{GD12} = 2.0 \text{ kJ}$)
- Wie gross ist die Änderung der inneren Energie des Gases? ($U_2 - U_1 = 6.4 \text{ kJ}$)
- Welcher Anteil der zugeführten Wärme findet sich in der Volumenänderungsarbeit wieder, und welcher Anteil steht zur Erhöhung der inneren Energie zur Verfügung?

$$\left(\frac{|W_{V12\text{rev}}|}{Q_{12}} = 0.32, \frac{U_2 - U_1}{Q_{12}} = 0.68 \right)$$

Übung 6.11: Durch Wärmeabfuhr einen Kolben senken. In einem Zylinder mit Kolben von 0.1 m^2 Querschnitt ist Luft von 1 m Höhe eingeschlossen; der Kolben mit einer konstanten Last übt eine Kraft von 15'000 N aus. Der Umgebungsdruck ist 1 bar(a). Die eingeschlossene Luft hat anfangs eine Temperatur von 100°C und kühlt sich auf 10°C ab. Wieviel Wärme Q_{12} wird die eingeschlossene Luft abgeben? ($Q_{12} = -21.09 \text{ kJ}$)

Stoffdaten von Luft: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_v = 717 \text{ J/kg K}$

Übung 6.12: Luft reversibel entspannen. Luft von 11 bar(a) und 168°C wird reversibel auf 0.95 bar(a) entspannt. Sie erhält dabei eine Endtemperatur von 20°C . Für den Prozessverlauf gilt: $p v^n = \text{konst}$. Die Stoffdaten von Luft sind: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_v = 717 \text{ J/kg K}$, $\kappa = 1.4$

- a. Wie gross ist der Polytropenexponent? ($n = 1.2$)
- b. Welche spezifische Arbeit gibt das System dabei ab? ($w_{v12} = -212.4 \text{ kJ/kg}$)
- c. Wieviel Wärme wird dabei (pro kg) ausgetauscht? Leiten Sie eine geschlossene Formel her (q_{12} zu berechnen aus $T_2 - T_1$)! ($q_{12} = 106.1 \text{ kJ/kg}$)

Übung 6.13: Luft komprimieren und expandieren. In einem Zylinder mit Kolben befindet sich Luft von 0.1 m^3 , 1 bar(a) und 300 K im Grundzustand. Diese Luft wird von 0.01 m^3 auf 0.001 m^3 reversibel komprimiert. In einem anderen Experiment wird die gleiche Ausgangsluft von 1 m^3 auf 10 m^3 reversibel expandiert. Füllen Sie die untenstehende Tabelle aus.

- Wie gross ist je die Endtemperatur und die spezifische Volumenänderungsarbeit?
- Vergleichen Sie für diese Fälle die spezifische isentrope Volumenänderungsarbeit w_{v12s} mit der spezifischen isothermen Volumenänderungsarbeit w_{v12T} , d.h. bilden Sie das Verhältnis:

$$\gamma = \frac{w_{v12s}}{w_{v12T}}$$

Stoffdaten von Luft: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_v = 717 \text{ J/kg K}$, $\kappa = 1.4$

Zustand	$V_2 [\text{m}^3]$	$T_2 [\text{K}]$	$w_{v12s} [\text{kJ/kg}]$	$w_{v12T} [\text{kJ/kg}]$	$\gamma [-]$
0 (Grundzustand)	0.1	300	-	-	-
1	0.01				
2	0.001				
3	1				
4	10				

Numerische Lösung

Zustand	$V_2 [\text{m}^3]$	$T_2 [\text{K}]$	$w_{v12s} [\text{kJ/kg}]$	$w_{v12T} [\text{kJ/kg}]$	$\gamma [-]$
0 (Grundzustand)	0.1	300	-	-	-
1	0.01	753.6	325.7	198.4	1.6
2	0.001	1892.9	1143.7	396.8	2.9
3	1	119.4	-129.7	-198.4	0.65
4	10	47.5	-181.3	-396.8	0.46

Versuchen Sie die Übungen 6.14 bis 6.18 im Sinne einer Selbstkontrolle ohne Hilfe der Unterlagen zu lösen.

Übung 6.14: Zustandsänderung eines perfekten Gases. Ein perfektes Gas wird über ein Handventil von 4 bar(a) auf den Umgebungsdruck von 1 bar(a) adiabat gedrosselt. Die kinetische Energie ändert sich nicht. Wie ändert sich die Temperatur bei der Druckreduktion? Nimmt sie zu, ab oder bleibt sie konstant? (P)

Übung 6.15: Das ideale Gas.

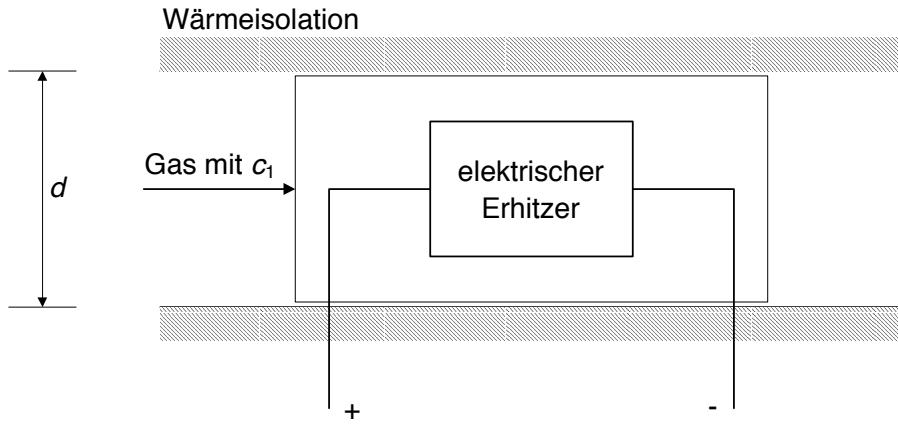
- a. Wie hängen die spezifische innere Energie und die spezifische Enthalpie eines idealen Gases von der Temperatur und vom Druck ab?
- b. Welche Beziehung existiert zwischen der spezifischen inneren Energie und der spezifischen Enthalpie? (P)

Übung 6.16: 1. HS für offene Systeme. Wie lautet der 1. HS für offene Systeme mit Berücksichtigung der Änderungen der kinetischen und potentiellen Energien? Geben Sie die Bedeutung der Symbole deutlich an, falls nötig mit Angabe der entsprechenden Berechnungsgleichung (z.B. für die Arbeit)! (P)

Übung 6.17: Isentrope Zustandsänderung.

- a. Wie lautet die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases?
- b. Wie lautet die Beziehung zwischen den Zustandsgrößen Druck p und spezifisches Volumen v während einer isentropen Zustandsänderung des idealen Gases?
- c. Leiten Sie ausgehend aus diesen zwei Gleichungen (analytisch klar nachvollziehbar) die folgenden Beziehungen her: (P)
 1. $T_2/T_1 = f(p)$
 2. $T_2/T_1 = f(v)$

Übung 6.18: Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität eines Gases.



Die dargestellte Anordnung dient zur Ermittlung der mittleren spezifischen Wärmekapazität eines unbekannten Gases (Annahme: ideales Gas). Der elektrische Erhitzer besteht aus einer Widerstandsheizung mit Gleichstrom. (**P**)

- Geben Sie zuerst den 1. HS in seiner allgemeinen Form an.
- Welche Glieder des 1. HS können in dem hier geschilderten Fall vernachlässigt werden (jede Vernachlässigung muss begründet werden)?
- Welche Größen müssen erfasst bzw. gemessen werden, um die gesuchte spezifische Wärmekapazität zu ermitteln? Um welche spezifische Wärmekapazität handelt es sich dabei?

Übung 6.19: Turboverdichter. In einem Turboverdichter wird Luft von $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$ auf $p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ verdichtet ($R_L = 287.2 \text{ J/kg K}$). Die effektiv geförderten Volumenströme sind $\dot{V}_1 = 1200 \text{ m}^3/\text{h}$ am Eintritt und $\dot{V}_2 = 360 \text{ m}^3/\text{h}$ am Austritt.

- Wie gross ist die Temperatur ϑ_1 , wenn die Temperatur der verdichteten Luft $\vartheta_2 = 87^\circ\text{C}$ beträgt? ($\vartheta_1 = 27^\circ\text{C}$)
- Wie gross muss der Ansaugstutzen sein, wenn die Luftgeschwindigkeit $c_1 = 25 \text{ m/s}$ betragen soll? ($d_1 = 0.130 \text{ m}$)

Übung 6.20: Zweistufige Kompression von Luft. Ein Luftstrom mit einem Volumenstrom $\dot{V}_1 = 1200 \text{ m}^3/\text{h}$ wird von 1 bar(a) und 15°C zunächst auf 10 bar(a), anschliessend auf 100 bar(a) reversibel verdichtet. Die Verdichtung erfolgt wahlweise:

- in einem nicht-adiabaten Kompressor bei konstanter Temperatur
- in einem adiabaten Kompressor
- in einem nicht-adiabaten Kompressor mit dem Polytropenexponent $n = 1.2$

Die Luft wird als perfektes Gas betrachtet; kinetische und potentielle Energien ändern sich nicht. Für die Teilverdichtungen sind in den Fällen a. bis c. zu ermitteln:

- die technische Leistung
- der zu- oder abgeführte Wärmestrom
- die Änderung der spezifischen inneren Energie und der spezifischen Enthalpie
- der qualitative Verlauf im p, V -Diagramm mit Kennzeichnung der Flächen für die spezifische Druckänderungsarbeit

Stoffdaten: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_p = 1004 \text{ J/kg K}$, $\kappa = 1.4$

Numerische Lösung

	P_{12} [kW]	P_{23} [kW]	\dot{Q}_{12} [kW]	\dot{Q}_{23} [kW]	$h_2 - h_1$ [kJ/kg]	$h_3 - h_2$ [kJ/kg]	$u_2 - u_1$ [kJ/kg]	$u_3 - u_2$ [kJ/kg]
a.	76.74	76.74	-76.74	-76.74	0	0	0	0
b.	108.53	209.53	0	0	269.25	519.85	192.28	371.25
c.	93.54	137.31	-39.10	-57.23	135.11	198.54	96.49	141.79

Übung 6.21: Expansion eines Verbrennungsgases. In einer adiabaten Turbine expandieren stündlich 14000 m^3 , 980°C heißes Verbrennungsgas von 19 bar(a) reversibel auf 1 bar(a). Der Strömungsquerschnitt im Eintrittsbereich der Turbine beträgt 0.020 m^2 , im Austritt 0.430 m^2 . Die Höhendifferenz zwischen Turbineneintritt und -austritt ist vernachlässigbar klein. Das Verbrennungsgas verhalte sich wie ein perfektes Gas mit $R_V = 287 \text{ J/kg K}$ und $\kappa = 1.34$.

- Wie gross ist die spezifische technische Arbeit w_{t12} ? ($w_{t12} = -762.1 \text{ kJ/kg}$)
- Wie gross ist die abgegebene Wellenleistung P_{12} ? ($P_{12} = -15661 \text{ kW}$)

Übung 6.22: Expansionsmaschine für CO₂-Gas. In einem Chemiebetrieb entsteht CO₂. Der Massenstrom ist 0.5 kg/s, der Druck 4.5 bar(a) und die Temperatur 122°C. Das Gas soll in einer Expansionsmaschine auf den Atmosphärendruck von 1 bar(a) entspannt werden. Die Maschine arbeite isentrop. Das CO₂-Gas verhalte sich wie ein perfektes Gas mit $R_{CO_2} = 189 \text{ J/kg K}$ und $\kappa = 1.30$.

- a. Welche Leistung kann die Maschine verlustfrei abgeben? ($P_{12} = -47.5 \text{ kW}$)
- b. Wie gross muss die Drehzahl der Maschine sein, wenn sie 4 Zylinder mit je 85 mm Bohrung und 105 mm Hub hat? ($n = 110.73 \text{ s}^{-1}$)
- c. In welcher Position muss das Einlassventil schliessen? ($x_1 = 0.033 \text{ m}$)
- d. Stellen Sie den Prozess qualitativ im p, V -Diagramm dar!
- e. Mit welcher Temperatur tritt das Gas aus der Maschine aus? ($T_2 = 279.28 \text{ K}$)

Kapitel 7

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

7.1 Einleitung

Der 1. HS ist der Energieerhaltungssatz, d.h. er gibt Auskunft über die *Quantität* der Energie. Er macht keine Aussagen zur *Qualität*. Der 2. HS ist “**die Herrin der Natur-Geschehen**”, denn sie “**regiert**” darüber, was zulässig ist und was unzulässig ist.

Der 2. HS ist eine Erfahrungstatsache wie der 1. HS auch.

7.1.1 Begründer

1. **S. Carnot** (1796-1832, mit 17 Jahren Ing.-Diplom in Paris):

Carnot-Prozess = Bestmögliche Wärmekraftanlage und Wärmepumpe

2. **R. Clausius** (1822-1888), aus Berlin, ab 1855 an der ETH Zürich:

“Die Energie des Universums bleibt konstant, aber seine Entropie (Mass der Unordnung) strebt einem Maximum zu.”

3. **W. Thomson** (1824-1907), Glasgow, 1892 Lord Kelvin:

“Durch Dissipation wird die Arbeitsfähigkeit gemindert.”

7.1.2 Was sagt uns der 2. Hauptsatz?

Der **1. HS** sagt: Es gibt verschiedene Energieformen. Die Quantität der Energie bleibt bei allen Umwandlungen erhalten (Energieerhaltung).

- Geschlossene Systeme:

$$q_{12} + w_{12} = u_2 - u_1$$

- Offene Systeme:

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

Anwendung des 1. HS:

- Bilanzierung von Energieumwandlungen, Prozessen, ...
- Auslegung von Anlagen, Apparaten, Komponenten, ...

Der **2. HS** sagt: Wärme ist nur teilweise in Arbeit umwandelbar.

Energien haben allgemein zwei Anteile bezüglich Qualität: Energie = Exergie + Anergie

Bei reversiblen Prozessen : Die Exergie bleibt erhalten

Bei irreversiblen Prozessen : Die Exergie geht verloren → Exergieverlust

Andere Formulierungen des 2. HS

Clausius: "Wärme kann nie von selbst von einem System niedriger Temperatur auf ein System höherer Temperatur übergehen."

Planck: "Alle Prozesse bei denen Reibung auftritt, sind irreversibel."

Baehr: "Alle natürlichen Prozesse sind irreversibel."

Falk und Ruppel: "Entropie kann niemals vernichtetet, wohl aber erzeugt werden. Die Entropie eines Systems ist niemals negativ, sie hat einen absoluten Nullpunkt."

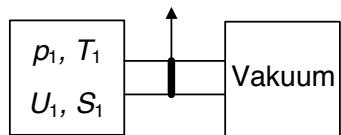
Formulierung über die Exergie: "Bei allen natürlichen Prozessen wird Exergie in Anergie umgewandelt."

Anwendung des 2. HS:

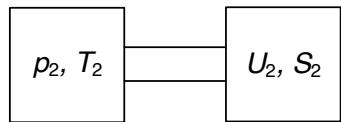
- Unmögliche Prozesse aufdecken/erkennen
- Optimale Prozesse beschreiben
- Reale Prozesse bewerten
- Reale Prozesse optimieren

7.1.3 Beispiele von irreversiblen Prozessen

a) Druckausgleich



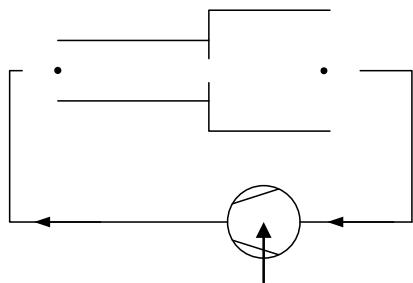
1. HS $U_2 = U_1$ (ideales Gas) $\rightarrow T_2 = T_1$
 $p_2 < p_1$



2. HS $S_2 - S_1 = S_{irr} > 0$
Umkehrung: Verdichtung

b) Adiabate Drosselung

$$c_2 \approx c_1, z_2 \approx z_1$$

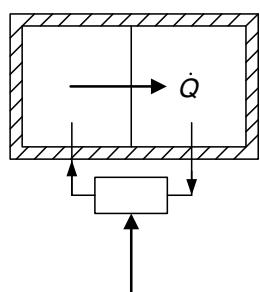


1. HS $\dot{H}_2 = \dot{H}_1 \rightarrow h_2 = h_1$

2. HS $S_2 - S_1 = S_{irr} > 0$
Umkehrung: Verdichtung

c) Temperaturausgleich

$$T_{1A} > T_{1B}$$

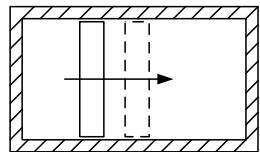


1. HS $U_2 = U_1$
 $T_{2A} = T_{2B}$

2. HS $S_2 - S_1 = S_{irr} > 0$
 Umkehrung: Wärmepumpe

d) Energieaustausch über eine bewegliche Wand

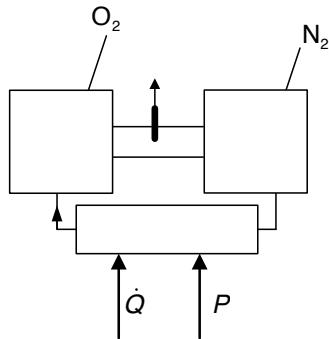
$$p_{1A} > p_{1B}, \quad T_{1A} > T_{1B}$$



1. HS $U_2 = U_1$
 $p_{2A} = p_{2B}$
 $T_{2A} = T_{2B}$

2. HS $S_2 - S_1 = S_{irr} > 0$

e) Konzentrationsausgleich



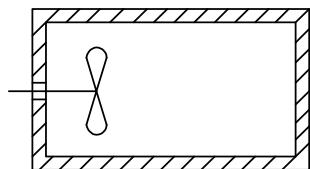
$$p_A = p_B, T_A = T_B$$

$$1. \text{ HS} \quad U_2 = U_1$$

$$2. \text{ HS} \quad S_2 - S_1 = S_{irr} > 0$$

“Perfekte” Durchmischung=
grösste Unordnung
Umkehrung: Trennprozess

f) Dissipation



$$1. \text{ HS} \quad W_{12} = U_2 - U_1$$

$$2. \text{ HS} \quad S_2 - S_1 = S_{irr} > 0$$

Was haben diese Prozesse gemeinsam?

Durch natürliche Vorgänge können sie nicht rückgängig gemacht werden. Es braucht einen Eingriff von aussen.

7.1.4 Zusammenfassung der Lehren aus den Erfahrungen

Alle in der Natur ablaufenden Vorgänge:

- verlaufen von selbst nur in einer Richtung (Entropie nimmt zu).
- verursachen eine Energieentwertung (Exergieverlust).
- können nur dann wieder rückgängig gemacht werden, wenn von aussen in das System eingegriffen wird.

7.1.5 Was ist ein irreversibler Prozess? - Zusammenfassung

Ein Prozess ist irreversibel, wenn er nicht wieder vollständig rückgängig gemacht werden kann. Das betrachtete System kann zwar seinen Anfangszustand erreichen, es bleiben aber Veränderungen in der Umgebung zurück. Die Ursachen der zurückbleibenden Veränderungen sind

- dissipative Effekte (Reibung)
- Ausgleichsvorgänge (Druck-, Temperatur- und Konzentrationsausgleich)
- Notwendigkeit einer Temperaturdifferenz für die Wärmeübertragung

In jeder irreversiblen Zustandsänderung kommt eine Entwertung der Energie vor: Die Summe der Energien bleibt zwar nach dem 1. HS konstant, nach der Umwandlung hat man jedoch Energien mit kleinerer Wertigkeit.

7.2 Die Entropiebilanzgleichung

7.2.1 Die Formulierung des 2. HS durch Entropie und thermodynamische Temperatur

Wir führen die Entropie S zur quantitativen Formulierung des 2. HS durch die folgenden Postulate ein:

1. Jedes System besitzt eine extensive Zustandsgrösse Entropie S .
2. Die Entropie S eines Systems ändert sich
 - durch Wärmetransport über die SG: dS_Q
 - durch Stofftransport über die SG: mit Massenstrom transportierte Entropie $\dot{m} S$
 - durch irreversible Prozesse im Inneren des Systems: dS_{irr}
3. Die mit der Wärme dQ über die Systemgrenze transportierte Entropie ist

$$dS_Q = \frac{dQ}{T}$$

wobei T die thermodynamische Temperatur an der Stelle der Systemgrenze ist, an der dQ übergeht. Die thermodynamische Temperatur ist eine universelle, nicht negative Temperatur (T in Kelvin).

4. Die durch irreversible Prozesse im Innern des Systems erzeugt Entropie ist niemals negativ; sie verschwindet nur für reversible Prozesse des Systems:

$$dS_{irr} \geq 0$$

Erläuterungen:

Die Entropie hat die Einheit

$$dS_Q = \frac{dQ}{T} \quad [\text{J/K}]$$

Die Entropie ist eine extensive Zustandsgrösse. Die *spezifische Entropie* ist

$$s = \frac{S}{m} \quad [\text{J/kg K}]$$

Die mit einem Massenstrom \dot{m} transportierte Entropie (= Entropiestrom) ist

$$\dot{S} = \dot{m} s \quad [\text{W/K}]$$

Die Aussagen des 2. HS über die Änderung der Entropie ermöglichen es, für jeden Prozess in einem geschlossenen System eine *Entropiebilanzgleichung* aufzustellen (offene Systeme folgen später):

$$dS = dS_Q + dS_{irr}$$

Die Wärme dQ und die mit ihr über die Systemgrenze transportierte Entropie dS_Q sind über eine Zustandsgrösse des Systems verknüpft, nämlich die *thermodynamische Temperatur*:

$$dQ = T dS_Q, \quad dq = T ds$$

Die thermodynamische Temperatur ist keine empirische Temperatur, denn sie wird nicht durch die Eigenschaften eines Thermometers, sondern durch den universell gültigen Zusammenhang

$$dS_Q = \underbrace{\frac{dQ}{T}}_{\text{immer } > 0}$$

festgelegt, d.h. T wird niemals negativ.

7.2.2 Entropiebilanzgleichung für geschlossene Systeme

Die Aussagen des 2. HS über die Änderung der Entropie erlauben es, für jeden Prozess eine *Entropiebilanzgleichung* aufzustellen. Die Entropieänderung dS eines geschlossenen Systems besteht aus zwei Anteilen:

$$dS = dS_Q + dS_{irr}$$

Die Entropieänderung in einem geschlossenen System erfolgt nur

- 1) durch **Wärmeübertragung** über die Systemgrenze:

$$dS_Q = \dot{S}_Q dt = \frac{dQ}{T} dt$$

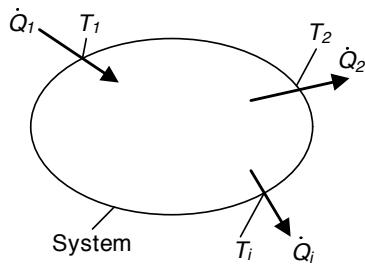
- 2) durch **irreversible Vorgänge** im Innern des Systems:

$$dS_{irr} = \dot{S}_{irr} dt$$

Damit haben wir zwei zeitabhängige Transportgrößen:

- 1) *Entropietransportstrom* \dot{S}_Q
- 2) *Entropieproduktionsstrom* \dot{S}_{irr}

Beispiel 7.1: Entropiebilanzgleichung. Über die Systemgrenze eines geschlossenen Systems werden mehrere Wärmeströme bei jeweils konstanter Temperatur übertragen. Wie gross ist der Entropietransportstrom \dot{S}_Q ?



Jeder Wärmestrom wird von einem Entropiestrom begleitet. Damit erhält man für den gesamten Entropietransportstrom, wenn alle Wärmeströme \dot{Q}_i bei einer jeweils *konstanten* Temperatur T_i übertragen werden:

$$\dot{S}_Q = \sum \dot{S}_{Qi} = \frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \frac{\dot{Q}_2}{T_2} + \dots + \frac{\dot{Q}_j}{T_j} + \dots + \frac{\dot{Q}_n}{T_n} = \sum \frac{\dot{Q}_i}{T_i} \quad [\text{W/K}]$$

Entropie kann nur mit Wärme über die Grenze eines geschlossenen Systems transportiert werden. Arbeit wird niemals von Entropie oder einem Entropiestrom begleitet.

Der *Entropietransportstrom* kann abhängig vom Vorzeichen von \dot{Q} grösser, kleiner oder gleich null (adiabates System) sein.

Für die im Innern des Systems erzeugte Entropie, d.h. den *Entropieproduktionsstrom*, gilt:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{irr}(t): &> 0 \text{ für irreversible Prozesse} \\ &= 0 \text{ für reversible Prozesse} \\ &< 0 \text{ unmöglich}\end{aligned}$$

Bei allen irreversiblen (natürlichen) Prozessen wird Entropie erzeugt; nur im Grenzfall des reversiblen Prozesses verschwindet die Entropieerzeugung. Eine Vernichtung oder Beseitigung von Entropie ist unmöglich.

Damit lautet die **Entropiebilanzgleichung** für ein geschlossenes System:

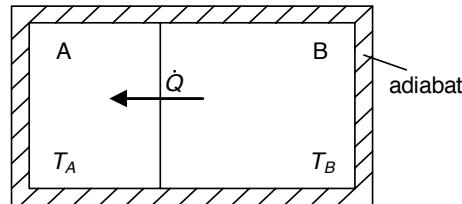
$$\frac{dS}{dt} = \sum \dot{S}_{Qi} + \dot{S}_{irr} \quad \text{mit} \quad \dot{S}_{irr} \geq 0$$

Im **stationären** Fall gilt:

$$\dot{S}_{irr} = - \sum \dot{S}_{Qi} \geq 0 \quad \text{wobei} \quad \dot{S}_{Qi} = \int_0^{\dot{Q}_i} \frac{d\dot{Q}_i}{T_i} \quad \text{und für} \quad T_i = \text{konst.} \quad \dot{S}_{Qi} = \frac{\dot{Q}_i}{T_i}$$

Es gibt keinen allgemeinen Entropie-Erhaltungssatz, weil in obiger Gleichung ein Produktionsterm auftritt, der die Irreversibilität des Prozesses kennzeichnet. Nur im reversiblen Grenzfall bleibt die Entropie erhalten.

Beispiel 7.2: Die Irreversibilität der Wärmeübertragung. Wir betrachten die Systeme A und B, die zusammen ein adiabates System bilden:



Jedes der beiden Systeme durchläuft einen *innerlich reversiblen Prozess*.

Für den Wärmestrom gilt:

$$\dot{Q}(t) = \dot{Q}_A(t) = -\dot{Q}_B(t)$$

Für die Entropieänderung des adiabaten Gesamtsystems gilt:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_A}{dt} + \frac{dS_B}{dt} = \dot{S}_{irr}(t) \geq 0$$

Man beachte, dass keine Wärme, also auch keine Entropie transportiert wird.

Für Entropieänderungen der beiden Teilsysteme gilt (beide Teilsysteme durchlaufen für sich einen reversiblen Teilprozess, d.h. $\dot{S}_{A,irr} = 0$ und $\dot{S}_{B,irr} = 0$):

$$\frac{dS_A}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T_A}$$

$$\frac{dS_B}{dt} = -\frac{\dot{Q}}{T_B}$$

$$(T_A \neq T_B)$$

Die Entropieänderung des Gesamtsystems beträgt damit:

$$\dot{S}_{irr} = \frac{\dot{Q}}{T_A} - \frac{\dot{Q}}{T_B} = \frac{T_B - T_A}{T_A T_B} \dot{Q} \geq 0$$

d.h. T_B muss grösser sein als T_A .

Nach dem 2. HS ist \dot{S}_{irr} nie negativ. Wir haben damit mit dem 2. HS hergeleitet, dass Wärme stets vom System mit höherer Temperatur zum System mit tieferer Temperatur fliesst.

7.2.3 Umwandlung von Wärme in Arbeit: Die Wärmekraftmaschine

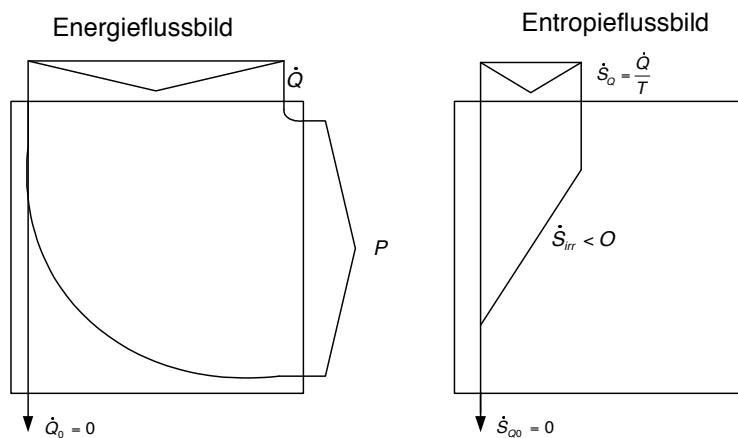
Wir wollen nun den 2. HS zum ersten Mal anwenden, nämlich für die Wärmekraftmaschine (WKM). Eine WKM ist eine stationär arbeitende Einrichtung, die Wärme aufnimmt und Arbeit abgibt (Umwandlung von Wärme in Arbeit). Das Arbeitsmedium durchläuft dabei einen Kreisprozess. Für die folgenden Betrachtungen brauchen wir die Details nicht zu kennen.

Nochmals: Für einen *stationären Prozess* in einem geschlossenen System lautet die Entropiebilanzgleichung:

$$\dot{S}_{irr} = - \sum_{i=1}^n \dot{S}_{Qi} \geq 0, \quad \text{wobei} \quad \dot{S}_{Qi} = \int_0^{\dot{Q}} \frac{d\dot{Q}_i}{T_i}$$

Damit die Entropie des Systems konstant bleibt, muss die in das System mit Wärme einströmende und die im System durch irreversible Prozesse erzeugte Entropie mit Wärme über die Systemgrenze abgeführt werden.

Beispiel 7.3: Perpetuum Mobile 2. Art. Wir betrachten ein stationär arbeitendes System, das einen Wärmestrom \dot{Q} bei einer Temperatur T aufnimmt und eine betragsmäßig gleich grosse mechanische Leistung abgibt.



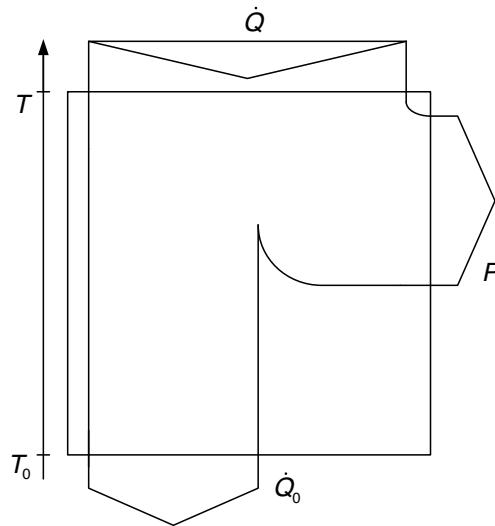
Man sagt auch, ein Perpetuum Mobile 2. Art wandle einen Wärmestrom vollständig in eine mechanische Leistung um. Dies widerspricht nicht dem 1. HS:

$$P = -\dot{Q}$$

Das Perpetuum Mobile 2. Art ist jedoch nach dem 2. HS nicht möglich, denn es müsste den mit dem zugeführten Wärmestrom zufließenden Entropietransportstrom vernichten:

$$\dot{S}_{irr} = - \sum_{i=1}^n \dot{S}_{Qi} = -\frac{\dot{Q}}{T} < 0 \rightarrow \text{unmöglich}$$

Was lernen wir aus diesem Beispiel: Der 2. HS verbietet die vollständige Umwandlung von Wärme in Arbeit! Es muss stets ein Abwärmestrom vorhanden sein, der die zugeführte Entropie und die in der WKM erzeugte Entropie abführt.



1. HS:

$$\begin{aligned}\dot{Q} + \dot{Q}_0 + P &= 0 \\ -P &= \dot{Q} + \dot{Q}_0 = \dot{Q} - |\dot{Q}_0|\end{aligned}$$

Thermischer Wirkungsgrad:

$$\eta_{th} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{-P}{\dot{Q}} = 1 - \frac{|\dot{Q}_0|}{\dot{Q}}$$

\dot{Q}_0 kann nicht gleich null sein, damit kann η_{th} den Wert eins nie erreichen. Die Entropiebilanz für dieses geschlossene System lautet im stationären Zustand:

$$\dot{S}_{irr} = - \sum_{i=1}^n \dot{S}_{Qi} = -\frac{\dot{Q}}{T} - \frac{\dot{Q}_0}{T_0} \geq 0$$

Damit erhalten wir für den Abwärmestrom:

$$-\dot{Q}_0 = T_0 \left(\frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_{irr} \right)$$

In der Klammer steht der Entropietransportstrom, der den Wärmestrom \dot{Q} begleitet, und der Entropieproduktionsstrom, der die Irreversibilitäten innerhalb des geschlossenen Systems WKM kennzeichnet.

Durch Einsetzen in die Energiebilanz erhält man für die gewonnene Leistung

$$-P = \dot{Q} - T_0 \left(\frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_{irr} \right)$$

$$-P = \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \dot{Q} - T_0 \dot{S}_{irr}$$

und für den thermischen Wirkungsgrad der WKM

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_0}{T} - \frac{T_0 \dot{S}_{irr}}{\dot{Q}}$$

Die Höchstwerte von $-P$ und η_{th} ergeben sich für eine reversibel arbeitende WKM mit $\dot{S}_{irr} = 0$:

$$\begin{aligned} -P_{max} &= -P_{rev} = \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \dot{Q} \\ \eta_{th, max} &= \eta_C = 1 - \frac{T_0}{T} \end{aligned}$$

Jede Irreversibilität verringert die gewonnene Leistung und den thermischen Wirkungsgrad gegenüber diesen Höchstwerten.

Den thermischen Wirkungsgrad $\eta_{th, rev}$ der reversibel arbeitenden WKM nennt man **Carnot-Faktor** η_C :

$$\eta_C = \eta_C(T, T_0) = 1 - \frac{T_0}{T}$$

Der Carnot-Faktor η_C hängt nicht vom Aufbau der WKM und vom verwendeten Arbeitsmedium ab, sondern ist eine universelle Funktion der thermodynamischen Temperaturen T der Wärmezufuhr und T_0 der Wärmeabgabe.

Beispiel 7.4: Carnot-Faktor. Wir nehmen an, dass bei einer WKM die Abwärme an die Umgebung mit einer Temperatur $T_U = 300\text{K}$ abgegeben wird. Wie verläuft der Carnot-Faktor in Abhängigkeit von der Temperatur, bei der die Wärme zugeführt wird?

Beispiel 7.5: Reversible Wärmekraftmaschine (WKM). Einer stationär abreitenden reversiblen WKM wird ein Wärmestrom von $\dot{Q} = 1000 \text{ MW}$ bei 1200 K zugeführt. Die Abwärme \dot{Q}_0 wird an Flusswasser mit einer Temperatur von 14°C abgegeben.

- Wie gross ist die zu gewinnende Leistung?
- Wie hoch ist der thermische Wirkungsgrad der WKM?
- Wie gross ist der Wärmestrom, der an die Umgebung abgeführt werden muss?
- Zeichnen Sie das Energie- und Entropieflussbild!

a.

$$-P_{max} = -P_{rev} = \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \dot{Q} = 761 \text{ MW}$$

b.

$$\eta_C = 1 - \frac{T_0}{T} = 76 \text{ \%}$$

c.

$$\dot{Q}_0 = -\dot{Q} - P_{rev} = -239 \text{ MW}$$

Beispiel 7.6: Beurteilung eines Patents. Als junger Maschineningenieur arbeiten Sie beim Patentamt. Sie erhalten die Eingabe eines Erfinders zur Überprüfung: Dieser möchte eine Wärmekraftmaschine patentieren, welche einen bei 600°C zugeführten Wärmestrom von 500 kW in eine mechanische Leistung von 360 kW umwandelt. Die Abwärme wird an Flusswasser mit einer Temperatur von 15°C abgegeben.

a. Ist diese WKM patentierbar? Geben Sie Ihre Beurteilung ab! Versuchen Sie sowohl mittels Entropiebilanz als auch mittels Carnit-Faktor zu argumentieren.

b. Zeichnen Sie das Energie- und Entropieflussbild!

a. 2.HS:

$$\dot{S}_{irr} = - \sum \frac{\dot{Q}_i}{T_i} \geq 0$$

$$\dot{S}_{irr} = -\frac{\dot{Q}}{T} - \frac{\dot{Q}_0}{T_0} = -87 \text{ W/K} \rightarrow \text{unmöglich!!}$$

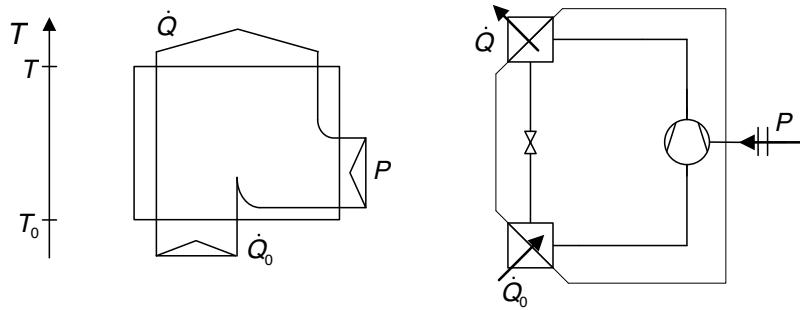
Der Carnot-Wirkungsgrad kann nicht übertroffen werden:

$$\eta_C(T, T_0) = 1 - \frac{T_0}{T} = 67\%$$

$$\eta_{WKM} = \frac{-P}{\dot{Q}} = 72\% > \eta_C \rightarrow \text{unmöglich!!}$$

7.2.4 “Umkehrung” der WKM: die Wärmepumpe

Eine Wärmepumpe bzw. Kälteanlage ist eine stationär arbeitende Einrichtung, die Wärme auf tiefem Temperaturniveau aufnimmt und diese durch Arbeitszufuhr auf ein höheres Temperaturniveau “transformiert”. Das Arbeitsmedium durchläuft dabei einen Kreisprozess. Für die folgenden Betrachtungen brauchen wir die Details nicht zu kennen.



1. HS:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_0 + P + \dot{Q} &= 0 \\ -\dot{Q} &= \dot{Q}_0 + P\end{aligned}$$

Thermischer Wirkungsgrad:

$$\eta_{th} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \varepsilon_{WP} = \frac{-\dot{Q}}{P} > 1$$

Der Wirkungsgrad der Wärmepumpe (WP) ist grösser als 1; er wird als Leistungszahl ε_{WP} bezeichnet.

Die Entropiebilanz lautet:

$$\dot{S}_{irr} = - \sum \frac{\dot{Q}_i}{T_i} = -\frac{\dot{Q}_0}{T_0} - \frac{\dot{Q}}{T} \geq 0$$

Für die reversible WP ist $\dot{S}_{irr} = 0$. Damit erhalten wir für den Wärmestrom \dot{Q} :

$$-\dot{Q} = \dot{Q}_0 \frac{T}{T_0}$$

Die Leistungszahl der reversiblen WP wird damit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{WP\,rev} &= \frac{-\dot{Q}}{-\dot{Q} - \dot{Q}_0} = \frac{\dot{Q}_0 \frac{T}{T_0}}{\dot{Q}_0 \frac{T}{T_0} - \dot{Q}_0} = \frac{\frac{T}{T_0}}{\frac{T - T_0}{T_0}} \\ \varepsilon_{WP\,rev} &= \frac{T}{T - T_0} = \frac{1}{\eta_C}\end{aligned}$$

Die Leistungszahl entspricht also dem Kehrwert des Carnot-Faktors $\eta_C(T, T_0)$.

Beispiel 7.7: Reversible Wärmepumpe. Ein Mehrfamilienhaus benötigt eine Heizleistung \dot{Q} von 20 kW bei einer Raumtemperatur von 21°C. Eine reversible Wärmepumpe entzieht dem Erdreich, das eine mittlere Temperatur von 10°C aufweist, den Wärmestrom \dot{Q}_0 .

- a. Wie gross ist die benötigte Leistung?
- b. Wie hoch ist der “Wirkungsgrad”, d.h. die Leistungszahl?
- c. Wie gross ist der Wärmestrom, der dem Erdreich entzogen wird?
- d. Zeichnen Sie das Energie- und Entropieflussbild!

Beispiel 7.8: Beurteilung einer neuartigen Technologie. „Die E³ Gravitherme - ein CO₂-freies Wärmeerzeugungssystem, das keine belastenden Emissionen erzeugt.“ Als Beilage erhalten Sie eine System- und Funktionsbeschreibung des so genannten Gravitherme-Systems. Dieses soll einen COP-Wert von > 50 aufweisen. Geben Sie eine Beurteilung ab!

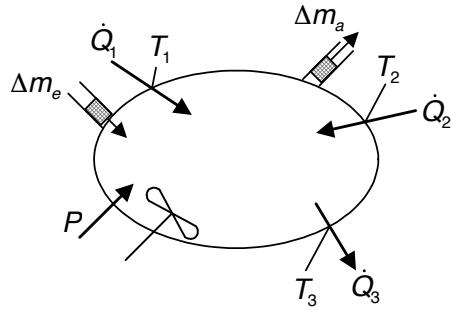
7.2.5 Die “schädliche” Wirkung von Temperaturdifferenzen

In den vorangegangenen Beispielen der WKM und WP wurde die Temperaturdifferenz zur Übertragung der Wärmeströme nicht berücksichtigt. Bei der Wärmepumpe haben wir z.B. gesagt, dass diese zwischen Erdreich- und Raumtemperatur arbeitet. Dies ist in Realität nicht möglich! Auf der Quellenseite muss die Temperatur in der WP tiefer sein als die Erdreichtemperatur und auf der Senkenseite muss die Temperatur in der WP höher sein als die Raumtemperatur. Die analogen Überlegungen gelten auch für die WKM!

Wir wollen nun die schädliche Wirkung der Temperaturdifferenzen für die Wärmeübertragung untersuchen!

7.2.6 Entropiebilanzgleichung für offene Systeme

Bis hierher haben wir Entropiebilanzen für geschlossene Systeme betrachtet. Wir erweitern nun die Entropiebilanz auf offene Systeme, berücksichtigen also auch den Entropietransport, der durch einen Stofftransport über die Systemgrenze bewirkt wird.



Die **Entropiebilanzgleichung für offene Systeme** lautet (ohne Herleitung):

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{ein} \dot{m}_e s_e - \sum_{aus} \dot{m}_a s_a + \sum \dot{S}_Q(t) + \dot{S}_{irr}(t)$$

Sie unterscheidet sich von der Entropiebilanz eines geschlossenen Systems durch die beiden Summen (Entropietransport der mit der Materie einströmenden Entropie und der mit der Materie ausströmenden Entropie).

Für **stationäre Fliessprozesse** gilt:

$$\dot{S}_{irr} = \sum_{aus} \dot{m}_a s_a - \sum_{ein} \dot{m}_e s_e - \sum \dot{S}_Q \geq 0$$

Für **stationäre und adiabate Fliessprozess** gilt:

$$\dot{S}_{irr} = \sum_{aus} \dot{m}_a s_a - \sum_{ein} \dot{m}_e s_e \geq 0$$

Doch wie berechnet man die mit dem Massenstrom transportierte spezifische Entropie s ? Der nächste Abschnitt wird die Antwort liefern.

7.3 Die Entropie S als Zustandsgrösse

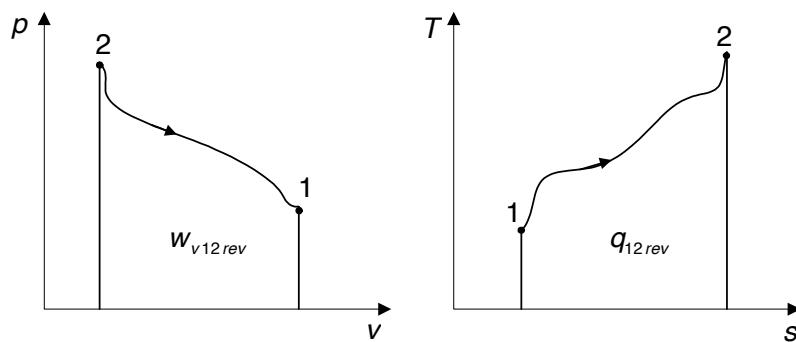
7.3.1 Prozessgrössen “Arbeit W ” und “Wärme Q ”

Zur rechnerischen Erfassung der Irreversibilität verwenden wir die kalorische Zustandsgrösse *Entropie*. Sie ist nicht anschaulich vorstellbar, ermöglicht aber die quantitative Erfassung der Irreversibilität und die Darstellung der in einem Prozess auftretenden Wärme- und Dissipationsenergie.

Bei einem reversiblen Prozess in einem geschlossenen System gilt:

$$dW_{v\text{rev}} = -p dV \quad dQ_{\text{rev}} = T dS$$

Die Volumenänderungsarbeit kann man in einem p, v -Diagramm als Fläche darstellen. Analog dazu kann man die Wärme in einem T, s -Diagramm als Fläche darstellen:



7.3.2 Prozessgrösse “Dissipation J ”

Bei einem *reversiblen* Prozess in einem geschlossenen System gilt:

$$dq_{rev} + dw_{v\ rev} = du$$

$$dq_{rev} = T ds, \quad dw_{v\ rev} = -p dv$$

$$T ds - p dv = du$$

Bei einem *irreversiblen* Prozess kommt die Entropieänderung nicht nur durch die übertragene Wärme ($ds_Q = dq/T$), sondern auch durch dissipative Vorgänge (“Reibung”) im Inneren des System ($ds_{irr} > 0$) zustande:

$$T ds = dq + T ds_{irr}$$

Für die Arbeit erhalten wir:

$$dq + dw_v = du$$

$$dw_v = du - dq = -p dv + T ds_{irr}$$

Die Arbeit dw ist um $T ds_{irr}$ grösser als die reversible Volumenänderungsarbeit. $T ds_{irr}$ ist die Dissipation!

$$dj = T ds_{irr}$$

$$j_{12} = \int_1^2 T ds_{irr} \geq 0$$

Die Dissipation ist wie die Wärme und Arbeit eine Prozessgrösse und nach dem 2. HS positiv. Sie ist bei einem reversiblen Prozess gleich null. Es ist:

$$du = dq - p dv + dj$$

Die Dissipation dj bewirkt eine Zunahme der inneren Energie! Für die Zustandsänderung 1 \Rightarrow 2 gilt:

$$u_2 - u_1 = q_{12} - \int_1^2 p dv + j_{12}$$

$$T ds = dq + \underbrace{T ds_{irr}}_{dj} = dq + dj$$

$$\int_1^2 T ds = q_{12} + j_{12}$$

7.3.3 Definitionsgleichungen der Entropie

1. Definitionsgleichung der Entropie:

Für reversible Prozesse ist die Entropieänderung eines Systems:

$$ds = ds_Q + \underbrace{ds_{irr}}_0 = \frac{dq}{T} + \underbrace{ds_{irr}}_0$$

1. HS:

$$\begin{aligned} dq_{rev} + dw_{v\ rev} &= du \\ T \, ds - p \, dv &= du \\ ds &= \frac{du + p \, dv}{T} = \frac{1}{T} \, du + \frac{p}{T} \, dv \\ ds &= ds_Q + \underbrace{ds_{irr}}_0 = \frac{dq}{T} + \underbrace{ds_{irr}}_0 \end{aligned}$$

Die Entropie S ist eine Zustandsgrösse: $S = S(U, V)$ bzw. $s = s(u, v)$

Für **perfekte Gase** ($c_v = \text{konst.}$, $c_p = \text{konst.}$) gilt:

$$\begin{aligned} du &= c_v \, dT \Rightarrow \frac{du}{T} = \frac{c_v \, dT}{T} \\ p \, v &= R_i \, T \Rightarrow \frac{p \, dv}{T} = \frac{R_i \, dv}{v} \\ \int_1^2 ds &= c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + R_i \int_1^2 \frac{dv}{v} \\ s_2 - s_1 &= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R_i \ln \frac{v_2}{v_1} \end{aligned}$$

Merke: Da die Entropie eine Zustandsgrösse ist, ist $s_2 - s_1$ nur vom Anfangs- und Endzustand (und nicht vom Weg) abhängig!

2. Definitionsgleichung der Entropie:

Für die spezifische Enthalpie und spezifische innere Energie gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} h &= u + p v \\ h = u + p v \Rightarrow dh &= du + p dv + v dp \\ T ds &= du + p dv \\ T ds &= dh - v dp \\ ds &= \frac{dh - v dp}{T} = \frac{1}{T} dh - \frac{v}{T} dp \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang kann auch aus dem 1. HS für reversible offene Systeme hergeleitet werden: $dq + v dp = dh$.

Die Entropie S ist eine Zustandsgrösse: $S = S(U, V)$ bzw. $s = s(u, v)$

Für **perfekte Gase** ($c_v = \text{konst.}$, $c_p = \text{konst.}$) gilt:

$$\begin{aligned} dh &= c_p dT \Rightarrow \frac{dh}{T} = \frac{c_p dT}{T} \\ p v &= R_i T \Rightarrow \frac{v dp}{T} = \frac{R_i dp}{p} \\ \int_1^2 ds &= c_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - R_i \int_1^2 \frac{dp}{p} \\ s_2 - s_1 &= c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R_i \ln \frac{p_2}{p_1} \end{aligned}$$

Merke: Da die Entropie eine Zustandsgrösse ist, ist $s_2 - s_1$ nur vom Anfangs- und Endzustand (und nicht vom Weg) abhängig!

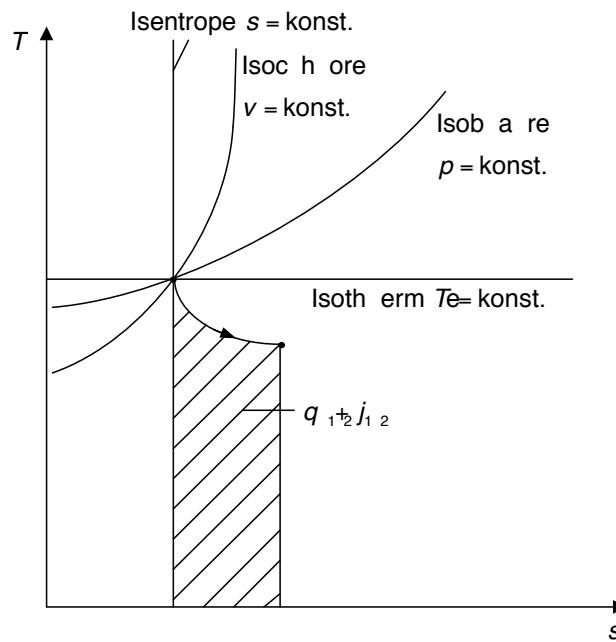
7.3.4 Das T,s -Diagramm

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Fläche im T,s -Diagramm die Summe aus Wärme und Dissipation darstellt:

$$\int_1^2 T \, ds = q_{12} + j_{12}$$

Wir wollen nun das T,s -Diagramm näher betrachten. Es ist von grosser Bedeutung für uns Ingenieurinnen und Ingenieure! Es dient

- als Zustandsdiagramm für Stoffe und
- zur Darstellung von Prozessen.



Punkt: Zustand(spunkt)

Linien: Zustandsänderung (Prozess)

Flächen: Wärme + Dissipation

Beispiel 7.9: Isochoren und Isobaren im T, s -Diagramm. Untersuchen Sie den Verlauf der Isochoren ($v = \text{konst.}$) und Isobaren ($p = \text{konst.}$) eines idealen Gases im T, s -Diagramm. Wie gross ist die Steigung der Isochoren und Isobaren im T, s -Diagramm?

Isochoren:

$$s(T_1, v) - s_0(T_0, v_0) = c_v \ln \frac{T}{T_0} + \underbrace{R_i \ln \frac{v}{v_0}}_0$$

$$v = \text{konst.}:$$

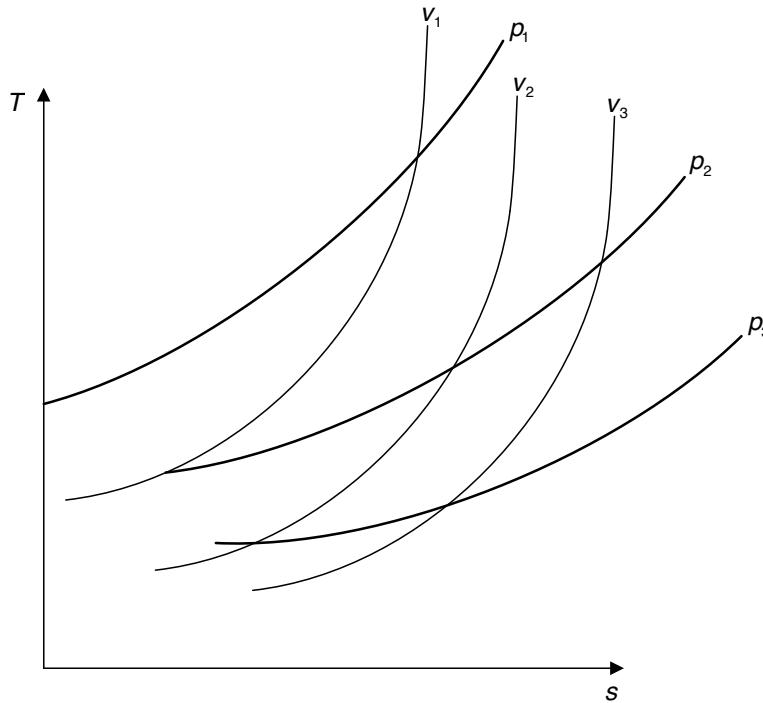
$$s = c_v \ln T - c_v \ln T_0 + s_0$$

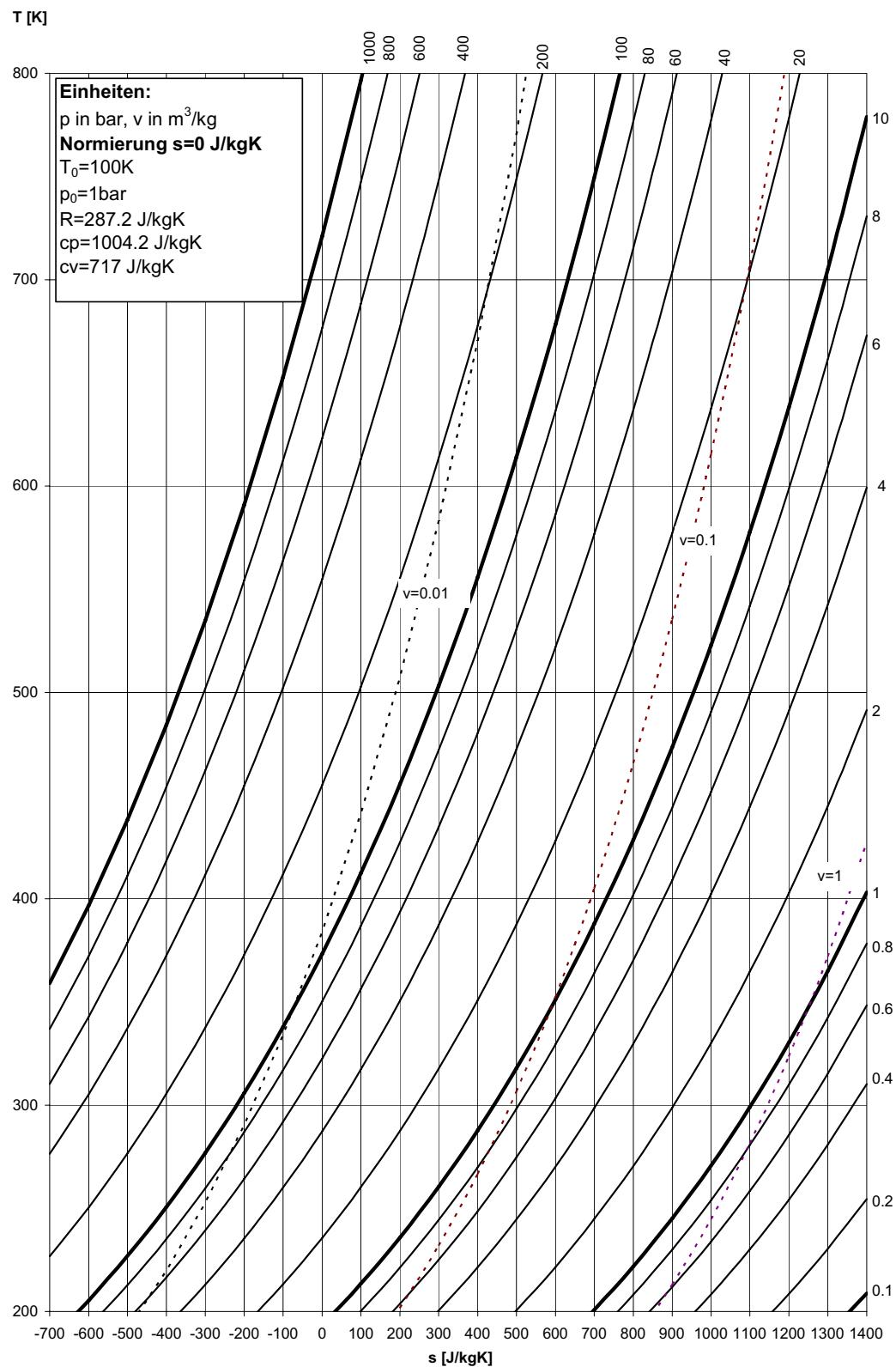
$$s(T) = c_v \ln T + K$$

$$\text{1. HS: } T ds = c_v dT + \underbrace{p dv}_0 \Rightarrow \left(\frac{\delta s}{\delta T} \right)_v = \frac{c_v}{T}$$

Isobaren: analoge Überlegung:

$$\text{1. HS: } T ds = c_p dT - \underbrace{v dp}_0 \Rightarrow \left(\frac{\delta s}{\delta T} \right)_p = \frac{c_p}{T}$$



T, s -Diagramm für Luft als perfektes Gas

7.4 Erste Anwendungen des 2. HS und T,s -Diagramms

7.4.1 Überblick

Wir wollen nun den 2. HS und das T,s -Diagramm für einfache Zustandsänderungen anwenden. Wir betrachten vorerst nur die speziellen reversiblen sowie die polytropen Zustandsänderungen mit perfekten Gasen.

7.4.2 Spezielle reversible Zustandsänderungen mit perfekten Gasen

Wir betrachten die folgenden speziellen *reversiblen* Zustandsänderungen $1 \rightarrow 2$ mit Vernachlässigung der Änderungen von kinetischer und potentieller Energie:

1. Isobare Zustandsänderung: $p = \text{konst.}, dp = 0$
2. Isochore Zustandsänderung: $V = \text{konst.}, dV = 0$
3. Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{konst.}, dT = 0$
4. Isentrope Zustandsänderung: $s = \text{konst.}, ds = 0$

Der 1. HS lautet unter den getroffenen Annahmen in differentieller Form

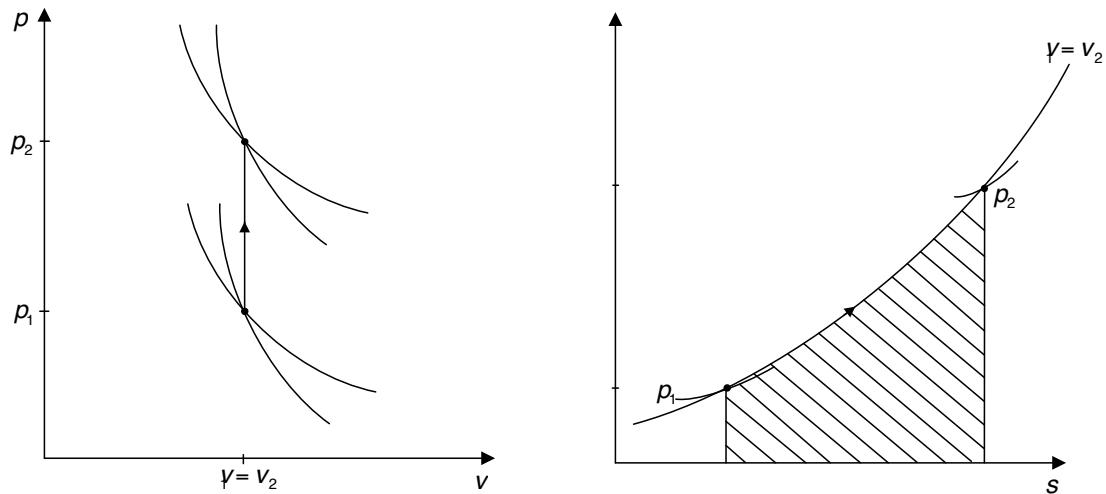
$$\begin{aligned} dq + dw_{v\ rev} &= du & dw_{v\ rev} &= -p\ dv \\ dq + dw_{p\ rev} &= dh & dw_{p\ rev} &= v\ dp \end{aligned}$$

Der 2. HS ist in differenzierter Form

$$T\ ds = dq + dj = du + p\ dv = dh - v\ dp$$

Die Gleichungen wenden wir nun für die speziellen reversiblen Zustandsänderungen an.

1. Isochore Zustandsänderung ($v = \text{konst.}$)



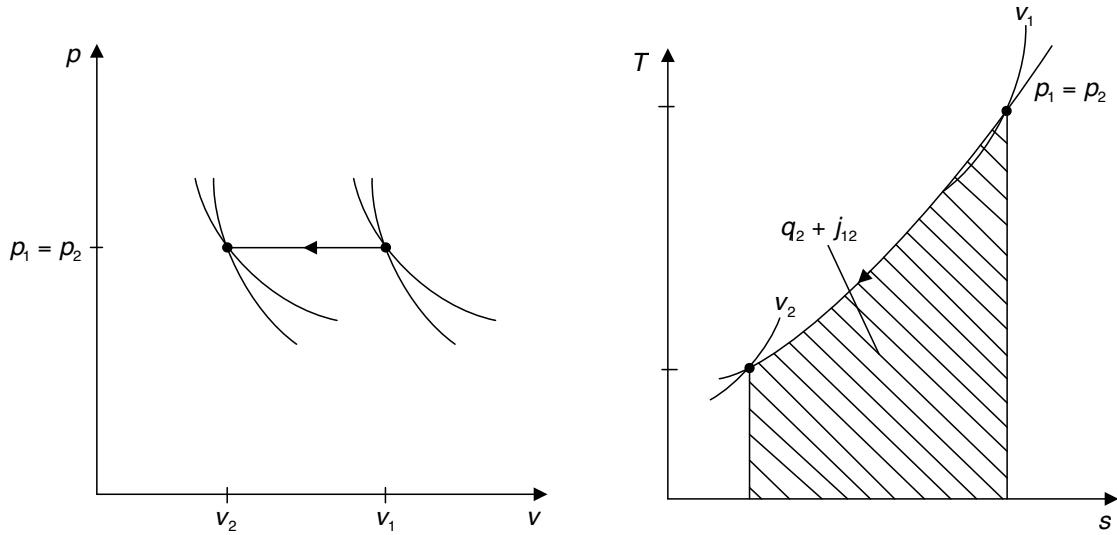
$$ds = \frac{dq + dj}{T} = \frac{du + p dv}{T} = \frac{dh - v dp}{T}$$

$$ds = \frac{du}{T} = \frac{c_v dT}{T}$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} \quad [\text{J/kg K}]$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \underbrace{R_i \ln \frac{v_2}{v_1}}_0$$

2. Isobare Zustandsänderung ($p = \text{konst.}$)



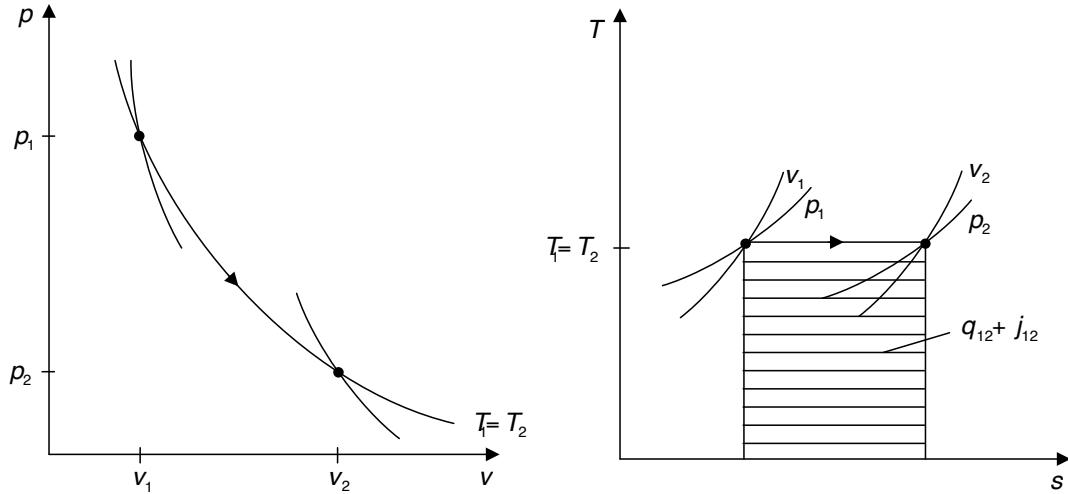
$$ds = \frac{dq + dj}{T} = \frac{du + p dv}{T} = \frac{dh - v dp}{T}$$

$$ds = \frac{dh}{T} = \frac{c_p dT}{T}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \underbrace{R_i \ln \frac{p_2}{p_1}}_0$$

3. Isotherme Zustandsänderung ($T = \text{konst.}$)



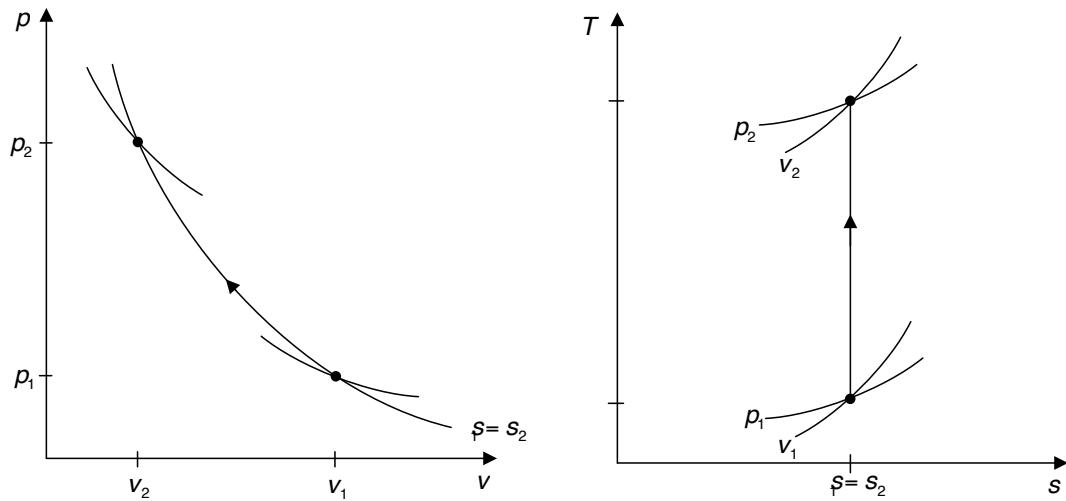
$$ds = \frac{dq + dj}{T} = \frac{du + p dv}{T} = \frac{dh - v dp}{T}$$

$$\begin{aligned} ds &= \underbrace{\frac{c_v dT + p dv}{T}}_0 = \underbrace{\frac{c_p dT - v dp}{T}}_0 \\ ds &= \frac{p}{T} dv = -\frac{v}{T} dp \\ ds &= R_i \frac{dv}{v} = -R_i \frac{dp}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= R_i \ln \frac{v_2}{v_1} = -R_i \ln \frac{p_2}{p_1} = R_i \ln \frac{p_1}{p_2} \\ \ln \frac{v_2}{v_1} &= -\ln \frac{p_2}{p_1} \\ \frac{v_2}{v_1} &= \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

$p_1 v_1 = p_2 v_2 \rightarrow \text{Isotherme!}$

4. Isentrope Zustandsänderung ($s = \text{konst.}$)



$$ds = \frac{dq + dj}{T} = \frac{du + p dv}{T} = \frac{dh - v dp}{T}$$

$$ds = 0$$

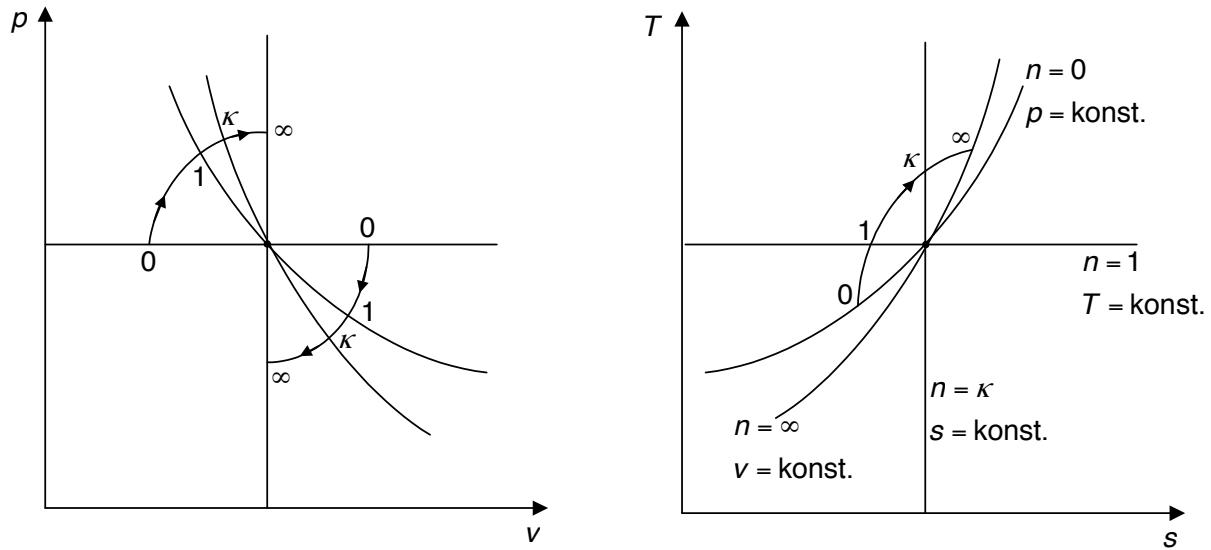
$$s_2 - s_1 = 0$$

Isentrop = adiabat + reversibel

$$\underbrace{q_{12}}_0 + \underbrace{j_{12}}_0 = 0$$

7.4.3 Polytrope Zustandsänderungen mit perfekten Gasen

Polytrope Zustandsänderungen können reversibel oder irreversibel sowie adiabat oder nicht-adiabat sein. Wir vernachlässigen auch hier die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie.



Der 2. HS in differentieller Form lautet:

$$T \, ds = dq + dj = du + p \, dv = dh - v \, dp$$

Für die differentielle Volumenänderungsarbeit haben wir erhalten:

$$dw_v = c_v \frac{\kappa - 1}{n - 1} dT$$

Eingesetzt in den 2. HS erhält man:

$$\begin{aligned} T \, ds &= dq + dj = c_v \, dT - c_v \frac{\kappa - 1}{n - 1} \, dT \\ T \, ds &= dq + dj = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \, dT \\ ds &= c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \frac{dT}{T} \end{aligned}$$

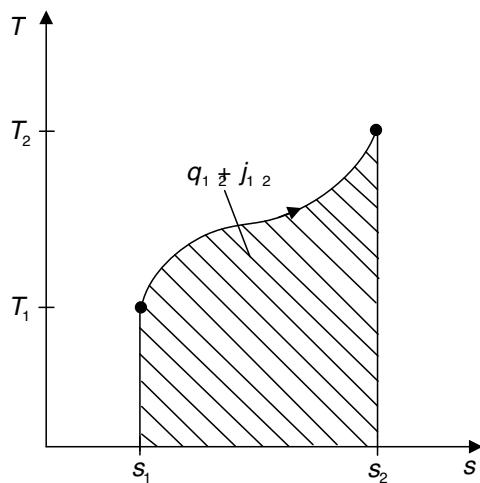
Für die Entropieänderung der polytropen Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ gilt also

$$s_2 - s_1 = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad n \neq 1$$

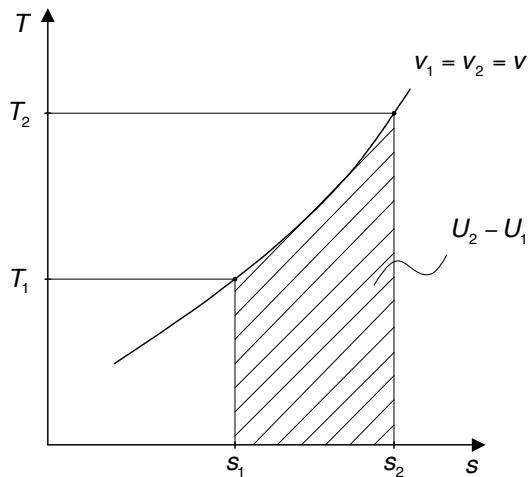
7.4.4 Flächen im T,s -Diagramm

In Kapitel 7.3 haben wir gesehen, dass die Fläche unter einer Isochoren der inneren Energie und die Fläche unter einer Isobaren der Enthalpie entspricht. Im T, s -Diagramm kann man jedoch auch Prozessgrößen als Fläche darstellen:

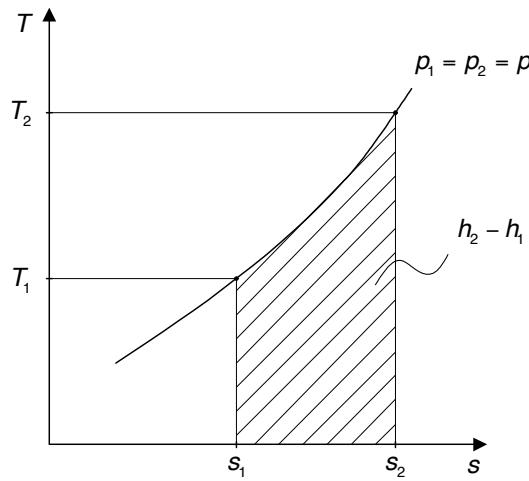
1. Wärme und Dissipation



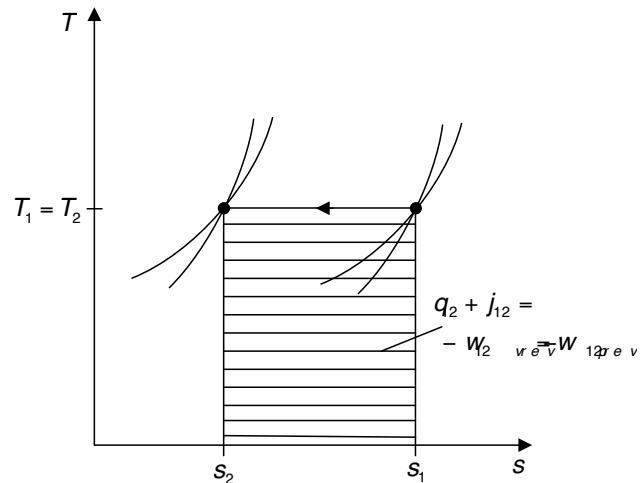
2. Innere Energie



3. Enthalpie

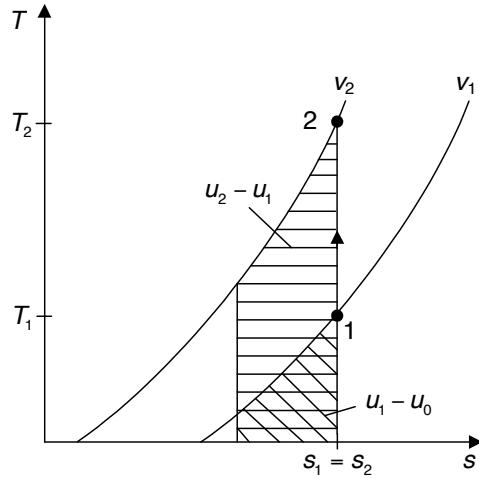


4. Reversible isotherme Volumenänderungs- und Druckänderungsarbeit



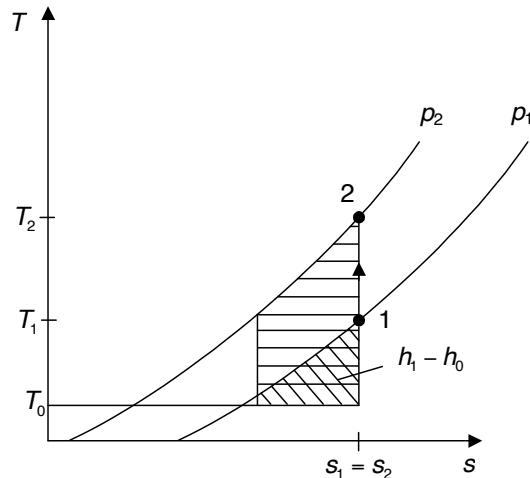
$$q_{12} + w_{v,12,rev} = u_2 - u_1 \Rightarrow w_{v,12,rev} = -q_{12} \quad \text{analog: } w_{p,12,rev} = q_{12}$$

5. Isentrope Volumenänderungsarbeit



$$1. \text{ HS: } \underbrace{q_{12}}_0 + w_{v12\ rev} = u_2 - u_1$$

6. Isentrope Druckänderungsarbeit



$$1. \text{ HS: } \underbrace{q_{12}}_0 + w_{v12\ rev} = h_2 - h_1$$

7.4.5 Zustandsänderungen mit inkompressiblen Flüssigkeiten

Für Zustandsänderungen mit inkompressiblen Flüssigkeiten lässt sich die Entropieänderung einfach berechnen. Es gilt $\rho = \text{konst.}$ bzw. $v = \text{konst.}$ und $dv = 0$:

$$ds = \frac{dq + dj}{T} = \frac{du + p dv}{T} = \frac{dh - v dp}{T}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{du}{T} = \frac{c_v dT}{T} \\ s_2 - s_1 &= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

7.4.6 Ergänzung: Thermodynamische Mitteltemperatur

Oft wird die Wärme nicht bei einer konstanten Temperatur aufgenommen, sondern innerhalb eines Temperaturintervalls. Der damit verbundene Entropietransportstrom ist:

$$\dot{S}_Q = \int_1^2 \frac{d\dot{Q}}{T} = \frac{\dot{Q}}{T_m}$$

Mit dieser Gleichung wird die thermodynamische Mitteltemperatur definiert:

$$T_m = \frac{\dot{Q}}{\dot{S}_Q} = \frac{\dot{Q}}{\int_1^2 \frac{d\dot{Q}}{T}}$$

Carnot-Faktor: $\eta_C(T_0/T_m) = 1 - \frac{T_0}{T_m}$

7.5 Exergie und Anergie

7.5.1 Quantität und Qualität der Energie

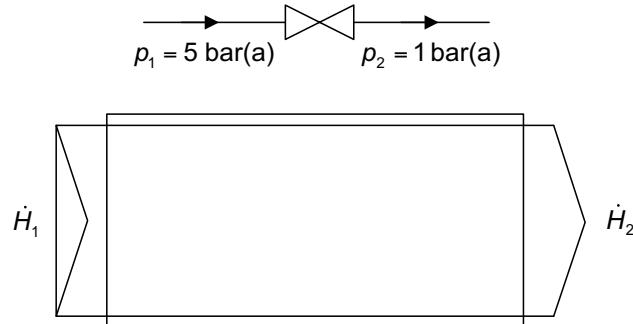
Der 1. HS der Thermodynamik sagt uns, dass Energie nicht erzeugt oder vernichtet werden kann – sie bleibt erhalten. Nur die **Quantität** bleibt erhalten, aber nicht die **Qualität**.

Der 2. HS der Thermodynamik gibt Auskunft über die **Richtung**, in die thermodynamische Prozesse ablaufen: Es sind nur Prozesse möglich, bei denen keine **Entropie** vernichtet wird.

Anhand verschiedener Beispiele haben wir gesehen, dass nicht jede Energieform beliebig in eine andere Energieform umgewandelt werden kann. So wird z.B. die Lehmkugel durch Abkühlung nicht wieder “hoch springen”. Die Energieformen haben eine unterschiedliche **Qualität**.

Wir analysieren anhand eines Beispiels die Qualität und Quantität der Energie.

Adiabate Drosselung



$$\text{1. HS: } \underbrace{\dot{Q}_{12}}_0 + \underbrace{\dot{P}_{12}}_0 = \dot{H}_2 - \dot{H}_1 \Rightarrow \dot{H}_2 = \dot{H}_1$$

7.5.2 Formulierung der HS mit Exergie und Anergie

Wir haben Mühe, das Beispiel der adiabaten Drosselung mit dem 1. HS zu verstehen. Zudem ist die Entropie keine "greifbare" Grösse – die Aussagen des 1. und 2. HS können viel anschaulicher mit Hilfe der Begriffe Exergie und Anergie erklärt werden.

Wir können nach dem Grad der Umwandelbarkeit die Energien in drei Gruppen einteilen:

1. *Unbeschränkt umwandelbare Energie (Exergie)*: mechanische, elektrische, potenzielle, kinetische Energie
2. *Beschränkt umwandelbare Energie*: Wärmeenergie, Enthalpie, innere Energie
3. *Nicht umwandelbare Energie (Anergie)*: innere Energie der Umgebung

Jede Energie besteht aus Exergie und Anergie, wobei einer der beiden Anteile auch null sein kann. Es gilt also für jede Energieform:

$$\text{Energie} = \text{Exergie} + \text{Anergie}$$

Der 1. HS (Energieerhaltung) kann damit wie folgt formuliert werden:

Bei allen Prozessen bleibt die Summe aus Exergie und Anergie konstant.

Die Aussagen des 2. HS lauten:

- I. Bei allen irreversiblen Prozessen verwandelt sich Exergie in Anergie.
- II. Nur bei reversiblen Prozessen bleibt die Exergie konstant.
- III. Es ist unmöglich, Anergie in Exergie zu verwandeln.

Man erkennt hier die Unsymmetrie in der Richtung der Energieumwandlungen.

Da alle natürlichen Prozesse irreversibel sind, vermindert sich der Vorrat an unbeschränkt umwandelbarer Energie (Exergie), indem sie sich in Anergie verwandelt.

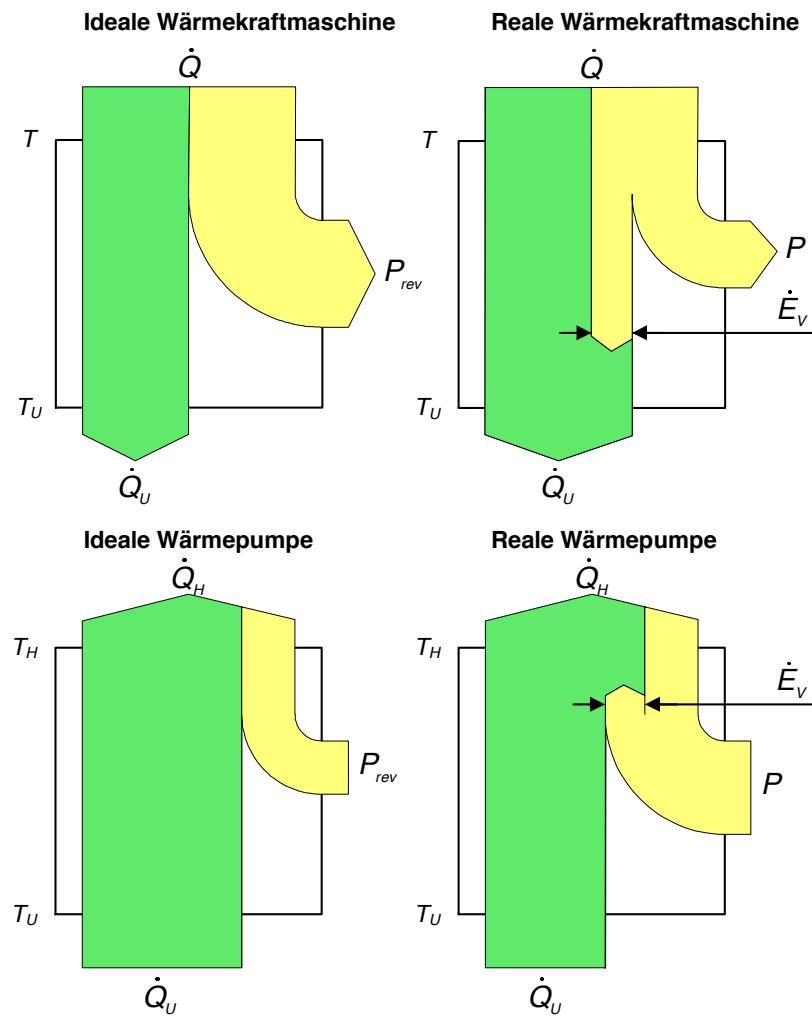
Der **Exergieverlust** ist der bei einem irreversiblen Prozess in Anergie umgewandelte Teil der Exergie.

Die technische Bedeutung der Exergie ist weitreichend. Alle technischen Prozesse benötigen zu ihrer Ausführung Nutzarbeit, also Exergie, die aus Primärenergiequellen geschöpft wird. Wenn man Primärenergie sparen will, muss man exergetisch günstige Prozesse einsetzen. Exergie ist also derjenige Teil der Energie, „auf den es ankommt“. Es gibt keinen Erhaltungssatz für die Exergie, sie ist technisch und ökonomisch wertvoll. Sämtliche Energieumwandlungen sollten - soweit es das Kriterium der Wirtschaftlichkeit erlaubt - einem reversiblen Prozess angeglichen werden. Mit anderen Worten: Das Ausmass der unvermeidlichen Exergieverluste sollte minimiert bzw. optimiert werden.

7.5.3 Berechnung der Exergie

Um die Größen Exergie und Anergie anwenden zu können, müssen wir die Exergie- und Anergie-Anteile der verschiedenen Energieformen kennen. Wir beschränken uns hier auf die Exergie der Wärme und die Exergie eines Stoffstromes.

“Exergie” ist die Arbeitsfähigkeit der Energie: Eine Energie hat so viel Exergie, wie daraus unter Mitwirkung der Umgebung Arbeit gewonnen werden kann. Mechanische und elektrische Energien bestehen vollständig aus Exergie. Dies trifft approximativ auch für chemische Energien wie die Brennstoffe zu. Diese drei gelten als hochwertige Energieformen: Verlustfrei lassen sie sich ganz in Arbeit bzw. hundertprozentig ineinander umwandeln.



Anders verhält es sich mit der Wärme und der Energie der Stoffe: Nur ein Anteil davon ist Exergie, nämlich deren Arbeitsfähigkeit bezüglich dem Umgebungszustand; der andere Anteil wird als “Anergie” bezeichnet. Wärme bei Umgebungstemperatur und Fluide bei Umgebungstemperatur und -druck haben also keine Exergie. Bei Stoffgemischen hängt die Exergie zusätzlich zu Temperatur und Druck von der Zusammensetzung ab.

a) Exergie der Wärme

Die Exergie der Wärme kann in Abhängigkeit der Temperatur der Wärme sowie der Umgebungstemperatur berechnet werden und gibt an, wie viel Nutzarbeit in der idealen (reversiblen) Wärmekraftmaschine (WKM) nach Carnot gewonnen werden kann. Der Anergie-Anteil der zugeführten Wärme muss an die Umgebung abgeführt werden. In Leistungen ausgedrückt gilt für den Exergiestrom \dot{E}_Q des Wärmestroms \dot{Q} :

$$\dot{E}_Q = P_{rev} = \left(1 - \frac{T_U}{T}\right) \dot{Q} = \eta_C \dot{Q}$$

$\eta_C = 1 - \frac{T_U}{T}$ ist der **Carnot-Faktor**. Keine WKM, die zwischen T und T_U arbeitet, kann einen höheren thermischen Wirkungsgrad als η_C erreichen.

Für den “umgekehrten” Prozess, die ideale Wärmepumpe (WP), gilt: Der minimale Exergiebedarf für eine Heizaufgabe entspricht der Exergie der Heizwärme bei der gewünschten Temperatur. Man sieht sofort: Je grösser der Temperaturhub ist, umso grösser ist der Exergiebedarf.

b) Exergie von Stoffströmen (ohne Gemische)

Stoffe und Stoffströme mit der Temperatur T und dem Druck p haben Exergie, weil aus ihnen Arbeit gewonnen werden kann bis zum Erreichen des Umgebungszustandes (T_U und p_U). Der Exergiestrom eines Stoffstromes wird über die Enthalpie h und Entropie s bei den Zuständen T und p sowie T_U und p_U bestimmt:

$$\dot{E} = \dot{m} e = \dot{m} [h - h_U - T_U (s - s_U)]$$

Für die Spezialfälle inkompressible Flüssigkeiten und perfekte Gase, die ohne Druckverluste und ohne Änderung der kin. und pot. Energie durch einen Apparat strömen, kann die Exergiedifferenz wie folgt berechnet werden:

$$\dot{E}_2 - \dot{E}_1 = \dot{m} \left[c_p (T_2 - T_1) - T_U c_p \ln \frac{T_2}{T_1} \right]$$

Der Exergie- und Anergieinhalt der Energie, die von einem stationär strömenden Fluid mitgeführt wird, beträgt:

Exergie des Stoffstromes:

$$e = h - h_U - T_U (s - s_U) + \underbrace{\frac{c^2}{2} + g z}_{\text{oft vernachlässigbar}} = -w_{rev}$$

Anergie des Stoffstromes:

$$b = h_U + T_U (s - s_U)$$

Exergiedifferenz:

$$e_2 - e_1 = h_2 - h_1 - T_U (s_2 - s_1)$$

Ideales Gas / Perfektes Gas:

$$\begin{aligned} e &= c_p (T - T_U) - T_U \left(c_p \ln \frac{T}{T_U} - R_i \ln \frac{p}{p_U} \right) \\ e &= c_p \left(T - T_U - T_U \ln \frac{T}{T_U} \right) + R_i T_U \ln \frac{p}{p_U} \end{aligned}$$

Flüssigkeiten (inkompressibel):

$$e = c_p \left(T - T_U - T_U \ln \frac{T}{T_U} \right) + v (p - p_U)$$

7.5.4 Exergieverluste, Exergiebilanz und exergetische Wirkungsgrade

Reale technische Prozesse sind mit Entwertung der Energie, sprich Exergieverlusten behaftet. Was ist die Folge von Exergieverlusten? Bei einer realen WKM bedeuten sie: Die erzeugte Nutzleistung ist im Vergleich zur idealen Anlage exakt um die Summe aller Exergieverluste kleiner. Bei der realen WP hingegen bedeuten Exergieverluste: Die elektrische Antriebsleistung ist exakt um die Summe aller auftretenden Exergieverluste grösser als die Antriebsleistung der idealen Anlage.

Die Exergieverluste können durch die **Exergiebilanzgleichung** bestimmt werden:

$$\dot{E}_V = \sum_{ein} \dot{E}_e - \sum_{aus} |\dot{E}_a| = \sum P + \sum \dot{E}_Q + \sum_{ein} \dot{m}_e e_e - \sum_{aus} \dot{m}_a e_a = T_U \dot{S}_{irr}$$

Der Exergieverluststrom \dot{E}_V ist gleich der Differenz zwischen allen eintretenden und austretenden Exergiestromen.

Das Hauptziel von Exergie-Analysen ist die Ermittlung von Exergieverlusten. Die Summe der Exergieverluste gibt eine Information über die Güte des Prozesses. Je weniger Exergie verloren geht, umso besser ist der Prozess. Für Optimierungen setzt man üblicherweise dort an, wo die grössten Exergieverluste auftreten.

Beim thermischen Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine (η_{th}) und bei der Leistungszahl einer Wärmepumpe (Coefficient of Performance, COP) werden “Äpfel mit Birne” verglichen:

$$\eta_{th} = \frac{P}{\dot{Q}} \quad \text{und} \quad COP = \frac{\dot{Q}_H}{P}$$

Arbeit und Wärme haben nicht die gleiche Qualität! Sowohl η_{th} als auch der COP sind *kein* Mass für die Prozessgüte. Der exergetische Wirkungsgrad hingegen erlaubt die thermodynamisch einwandfreie Bewertung. Für die WKM ist er das Verhältnis der gewonnenen Leistung und der aufgewendeten Exergie des zugeführten Wärmestroms. Bei WP ist er das Verhältnis der Exergie der abgegebenen Heizleistung und der aufgewendeten Leistung.

Exergetischer Wirkungsgrad einer WKM:

$$\eta_{ex\ WKM} = \frac{P}{\dot{E}_Q} = 1 - \frac{\sum \dot{E}_V}{\dot{E}_Q} = 0...1$$

Exergetischer Wirkungsgrad einer WP:

$$\eta_{ex\ WP} = \frac{\dot{E}_{QH}}{P} = 1 - \frac{\sum \dot{E}_V}{P} = 0...1$$

Exergie-Analysen sind ein hervorragendes Werkzeug zur Analyse von Prozessen. Im Gegensatz zur rein energetischen Betrachtungsweise können Verlustherde eruiert und quantifiziert werden. Sie zeigen unmissverständlich auf, wo der Hebel für Effizienzsteigerungen angesetzt werden muss. Prozesse sollten, soweit es das Kriterium der Wirtschaftlichkeit erlaubt, einem reversiblen Prozess angepasst werden. In anderen Worten: Das Ausmass der unvermeidlichen Exergieverluste sollte minimiert bzw. optimiert werden.

7.5.5 Exergieverlust bei der Wärmeübertragung

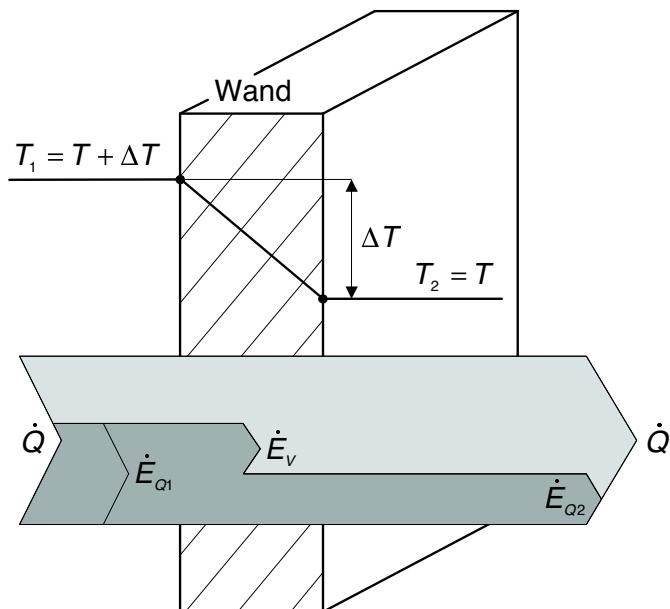
Für die Übertragung eines Wärmestroms \dot{Q} durch eine Wand mit der Fläche A ist ein Temperaturgefälle ΔT erforderlich. Durch das ΔT entsteht ein Exergieverluststrom \dot{E}_V , der von der Temperatur T , dem Temperaturgefälle ΔT und der Umgebungstemperatur T_U abhängt:

$$\begin{aligned} d\dot{E}_V &= T_U \frac{dT}{T^2} d\dot{Q} \\ \dot{E}_V &= \dot{E}_{Q1} - \dot{E}_{Q2} = T_U \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \dot{Q} \end{aligned}$$

oder als Näherung:

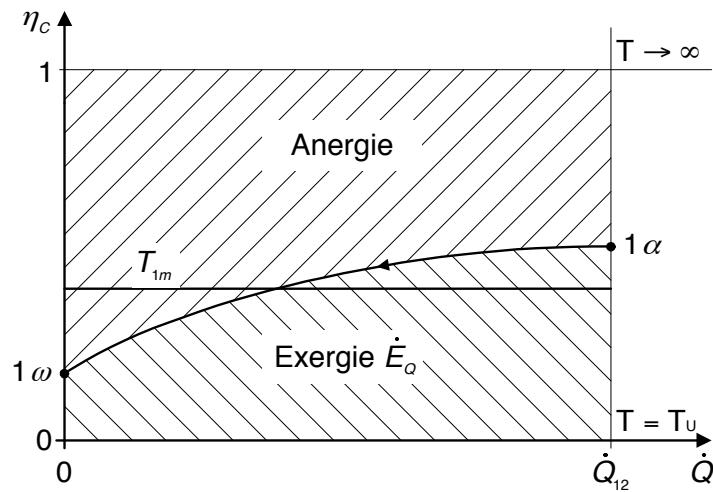
$$\dot{E}_V \approx T_U \frac{\Delta T}{T^2} \dot{Q}$$

Diese Gleichung ergibt das wichtige Ergebnis, dass der Exergieverluststrom der Wärmeübertragung proportional zum Temperaturgefälle ΔT ist und approximativ umgekehrt proportional zum Quadrat der Temperatur T (wenn ΔT klein gegenüber T). In anderen Worten: Ein bestimmtes ΔT ist bei hohen Temperaturen (z.B. Verbrennungsprozess) wesentlich weniger schädlich als bei tiefen Temperaturen (z.B. Kälteanlage).



In einem WÜ findet die Wärmeübertragung von Fluid 1 auf Fluid 2 meistens nicht bei konstanten Temperaturen statt. Für die Temperaturverläufe $T_{1\alpha} \rightarrow T_{1\omega}$ und $T_{2\alpha} \rightarrow T_{2\omega}$ können dann die thermodynamischen Mitteltemperaturen eingesetzt werden. Zum Beispiel für ein Fluid 1, dass von $T_{1\alpha}$ auf $T_{1\omega}$ abgekühlt wird, ist die thermodynamische Mitteltemperatur der Wärmeabgabe:

$$T_{m1} = \frac{T_{1\alpha} - T_{1\omega}}{\ln \frac{T_{1\alpha}}{T_{1\omega}}}$$



Sehr anschaulich ist auch die Darstellung im η_C, \dot{Q} -Diagramm. Aus der Grundformel zur Berechnung des Exergieverlusts des Wärmestroms sieht man unmittelbar, dass die Fläche unter der Kurve dem übertragenen Exergiestrom und die Fläche oberhalb dem Anergiestrom entspricht. In der Praxis hat man oft geringe Temperaturspreizungen und thermodynamische Mitteltemperatur liegt sehr nahe an der arithmetischen Mitteltemperatur.

7.6 Anwendung des 1. und 2. Hauptsatzes

Ein intensives Semester mit dem anspruchsvollen Modul THFL+GRU neigt sich dem Ende zu. Wir haben viel gelernt – und das wollen wir nun anwenden!

Wir haben gelernt,

- dass man zwischen verschiedenen thermodynamischen Systemen exakt unterscheiden muss: geschlossen/offen, adiabat/nicht-adiabat, usw.
- wie sich Fluide – insbesondere das ideale Gas – verhalten.
- zwischen Prozess und Zustand klar zu unterscheiden.
- die Prozessgrößen “Arbeit” und “Wärme” zu berechnen und zu benutzen.
- den 1. HS (Energieerhaltungssatz) für geschlossene und offene Systeme anzuwenden.
- dass der 2. HS der Herr des Naturgeschehens ist und sagt, was zulässig ist und was nicht.
- ...

In diesem Kapitel wollen wir nun das angeeignete Wissen anwenden. Auf der nächsten Seite sind die wichtigsten Zusammenhänge nochmals zusammengefasst.

1. HS:

$$\begin{aligned} q_{12} + w_{12} &= u_2 - u_1 \\ q_{12} + w_{t12} &= h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Technische Arbeit:

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) + j_{12}$$

2. HS/Entropie als Zustandsgrösse:

$$ds = \frac{dq + dj}{T} = \frac{du + p \, dv}{T} = \frac{dh - v \, dp}{T}$$

Perfektes Gas:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R_i \ln \frac{v_2}{v_1} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R_i \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Inkompressible Flüssigkeit:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (c_p = c_v)$$

Entropiebilanzgleichung für stationäre Prozesse:

$$\dot{S}_{irr} = \sum_{aus} \dot{m}_a s_a - \sum_{ein} \dot{m}_e s_e - \sum \dot{S}_Q \geq 0, \quad d\dot{S}_Q = \frac{d\dot{Q}}{T}$$

Exergie und Anergie

Exergie der Wärme ($T = \text{konst.}$): $\dot{E}_Q = \left(1 - \frac{T_U}{T}\right) \dot{Q} = \eta_C \dot{Q} = -P_{rev}$

Exergie eines Stoffstromes: $e = h - h_U - T_U (s - s_U) + \frac{c^2}{2} + g z$

Perfektes Gas: $e = c_p \left[T - T_U - T_U \ln \frac{T}{T_U} \right] + R_i T_U \ln \frac{p}{p_U}$

Inkompressible Flüssigkeit: $e = c_p \left[T - T_U - T_U \ln \frac{T}{T_U} \right] + v(p - p_U)$

Exergiedifferenz (ohne kin. & pot. E.): $e_2 - e_1 = h_2 - h_1 - T_U (s_2 - s_1)$

Exergiebilanz/Exergieverlust

$$\dot{E}_V = T_U \dot{S}_{irr} = \sum_{ein} \dot{E}_e - \sum_{aus} |\dot{E}_a| = \sum P + \sum \dot{E}_Q + \sum_{ein} \dot{m}_e e_e - \sum_{aus} \dot{m}_a e_a$$

Nachfolgend betrachten wir folgende technischen Anwendungen:

1. Reversible isotherme Turbine
2. Isotherme Turbine mit Dissipation
3. Vergleich zwischen reversibler isothermer und isentroper Verdichtung
4. Adiabater Verdichter
5. Adiabate Turbine
6. Wärmeübertragung mit endlicher Temperaturdifferenz
7. Entropiebilanz eines Luftkühlers
8. Isochore Erwärmung von Luft mit zwei verschiedenen Prozessen
9. Adiabate Düse: Beurteilung eines Patents
10. Adiabater Druckausgleich

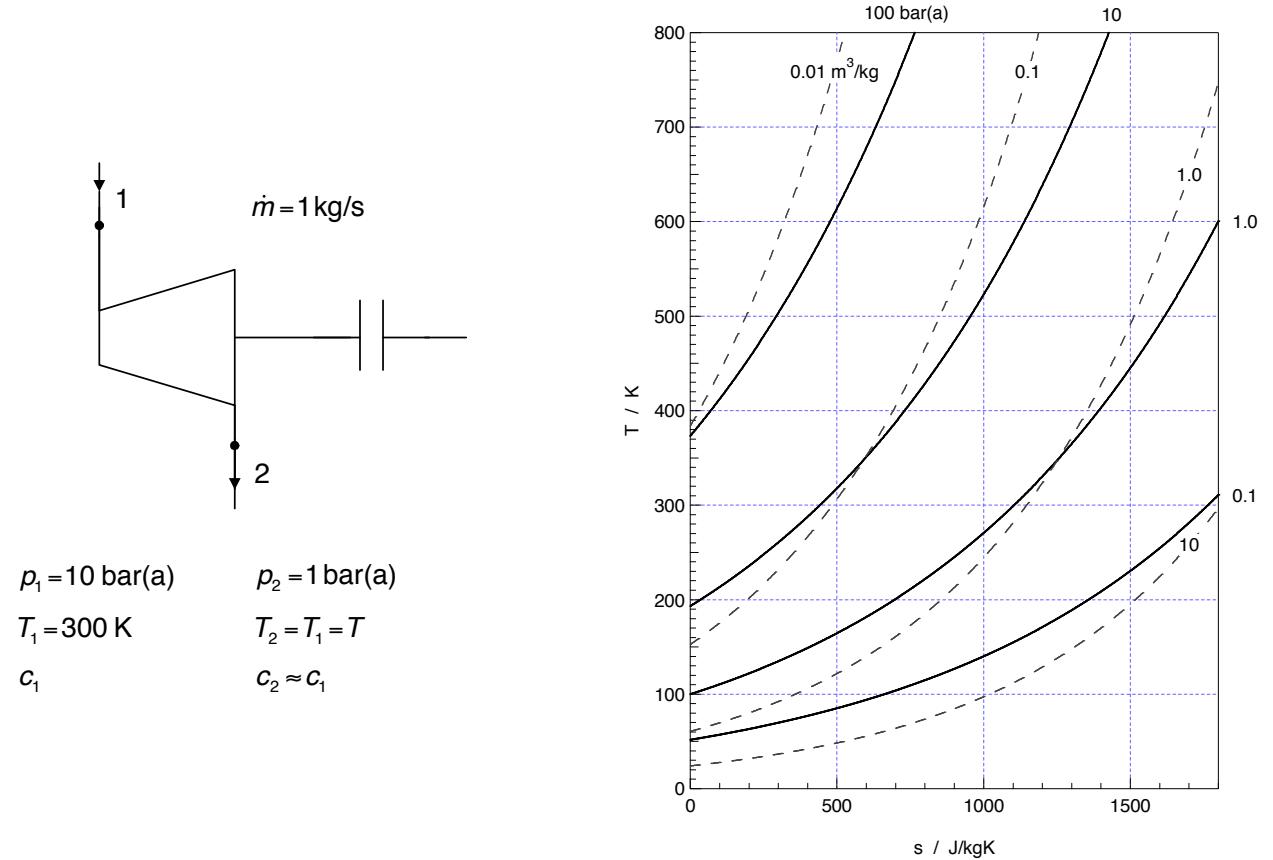
Es geht darum, dass Sie die Anwendung des 1. und 2. HS sicher beherrschen.

Hinweis:

Wenn nichts anderes angegeben, wird Luft als Arbeitsmedium verwendet.
Die Stoffdaten sind: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_p = 1004 \text{ J/kg K}$, $\kappa = 1.4$.

In den meisten Anwendungen vernachlässigen wir die Änderungen der kinetischen und potentiellen Energie. Die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 300 \text{ K}$.

1. Reversible isotherme Turbine



$$\begin{aligned} p_1 &= 10 \text{ bar(a)} & p_2 &= 1 \text{ bar(a)} \\ T_1 &= 300 \text{ K} & T_2 &= T_1 = T \\ c_1 & & c_2 & \approx c_1 \end{aligned}$$

$$1. \text{ HS: } q_{12} + w_{t12} = \underbrace{h_2 - h_1}_0$$

$$-w_{t12rev} = q_{12rev} = -R_L T \ln \frac{p_2}{p_1} = 198.3 \text{ kJ/kg}$$

$$P_{12rev} = \dot{m} w_{t12rev} = -198.3 \text{ kW}$$

$$2. \text{ HS: } ds = \frac{dq + dj}{T}$$

$$s_2 - s_1 = s_{Q12} = \frac{q_{12rev}}{T} = -\frac{R_L T \ln \frac{p_2}{p_1}}{T} = 661 \text{ J/kg K}$$

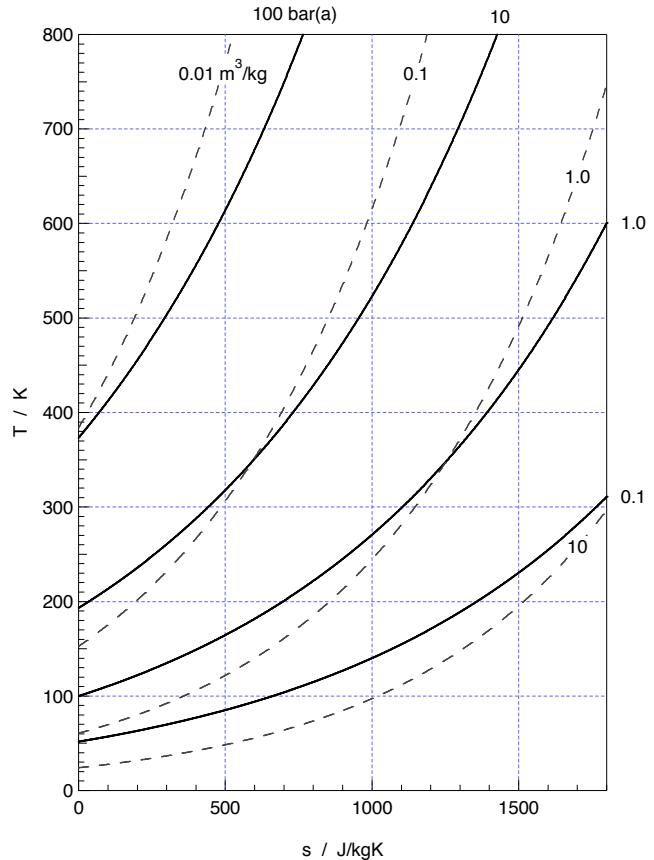
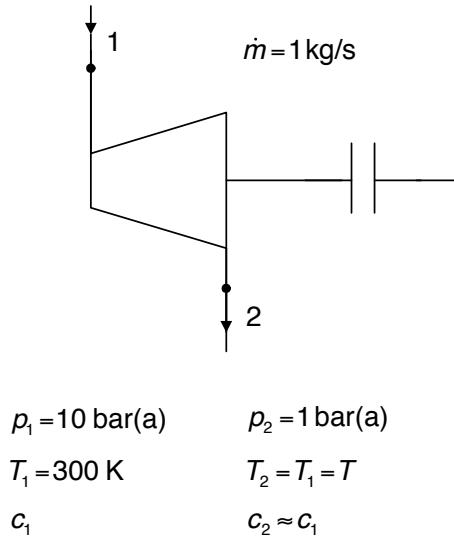
$$s_2 - s_1 = \underbrace{c_p \ln \frac{T_2}{T_1}}_0 - R_L \ln \frac{p_2}{p_1} = -R_L \ln \frac{p_2}{p_1} = 661 \text{ J/kg K}$$

$$\dot{S}_{irr} = \dot{m} (s_2 - s_1) - \frac{\dot{Q}_{12rev}}{T} = \dot{m} - R_L \ln \frac{p_2}{p_1} - \frac{\dot{m} R_L T \ln \frac{p_2}{p_1}}{T}$$

$$\dot{S}_{irr} = 0, \text{ reversibel}$$

$$\text{Exergieverlust: } \dot{E}_{v12} = T_U \dot{S}_{irr} = 0$$

2. Isotherme Turbine mit Dissipation



Der Wirkungsgrad der Turbine ist: $\eta_T = \frac{-w_{t12}}{-w_{t12rev}} = 80\%$

$$1. \text{ HS: } q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1; \rightarrow -w_{t12} = q_{12}$$

$$-w_{t12} = \eta_T (-w_{t12})_{rev} = \eta_T \left(-R_L T \ln \frac{p_2}{p_1} \right) = 158.6 \text{ kJ/kg}$$

$$P_{12} = -158.6 \text{ kJ/kg} = -\dot{Q}_{12}$$

$$\dot{J}_{12} = (1 - \eta_T) |P_{12rev}| = 39.6 \text{ kW}$$

$$2. \text{ HS: } \dot{S}_{irr12} = \dot{m} (s_2 - s_1) - \frac{\dot{Q}_{12}}{T} \geq 0$$

$$\dot{m} \left(-R_L \ln \frac{p_2}{p_1} \right) - \frac{\dot{m} \eta_T \left(-R_L T \ln \frac{p_2}{p_1} \right)}{T}$$

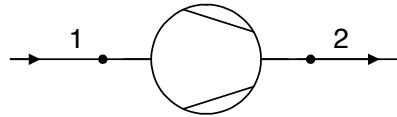
$$\dot{S}_{irr12} = -\dot{m} (1 - \eta_T) R_L \ln \frac{p_2}{p_1} = 132.2 \text{ W/K}$$

$$\text{Exergieverlust: } \dot{E}_{v12} = T_U \dot{S}_{irr} = 39.6 \text{ kW}$$

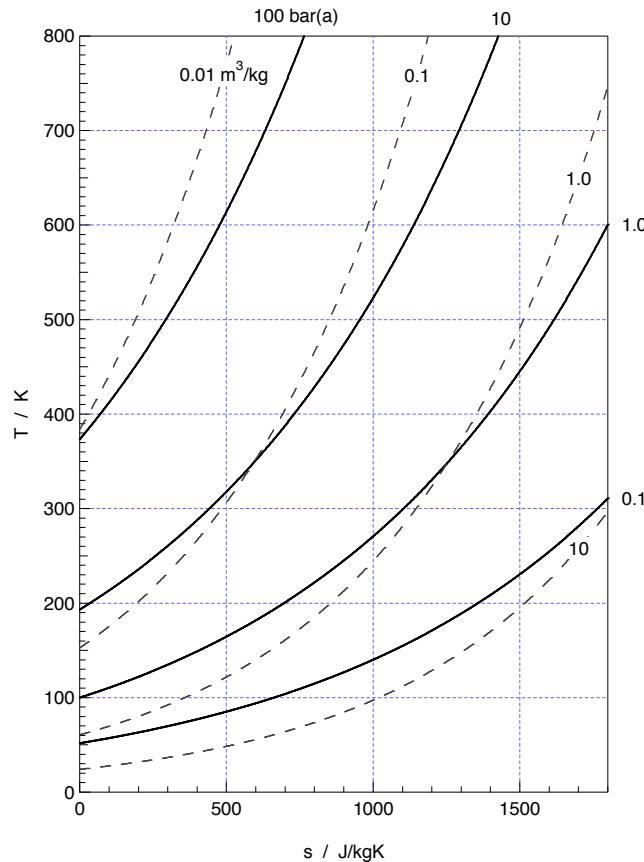
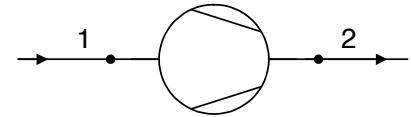
3. Vergleich zwischen reversibler isothermer und isentroper Verdichtung

In beiden Fällen sei $\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$ und $c_2 \approx c_1$.

a) Reversibel isotherm



b) Reversibel adiabat (=isentrop)



$$w_{t12\ rev} = -q_{12\ rev}$$

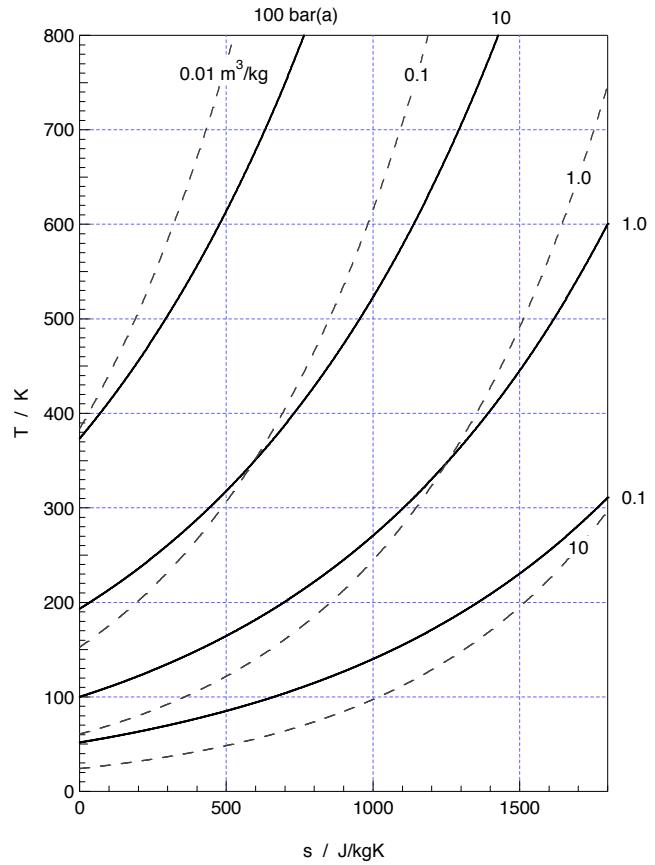
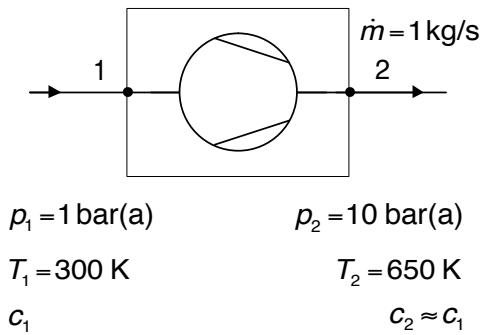
$$w_{t12\ rev} = h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

$$= R_L T \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= \frac{R_L \kappa}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]$$

$$\Delta w = w_{t12\ rev} - w_{s12\ rev}$$

4. Adiabater Verdichter



$$1. \text{ HS: } w_{t12} = h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 351.4 \text{ kJ/kg}$$

$$P_{12} = 351.4 \text{ kW}$$

Idealer adiabater Verdichter:

$$w_{t12s} = h_{2s} - h_1 = c_p (T_{2s} - T_1) = 280.3 \text{ kJ/kg}$$

$$T_{2s} = 579 \text{ K}$$

$$P_{12s} = 280.3 \text{ kW}$$

Isentroper Wirkungsgrad:

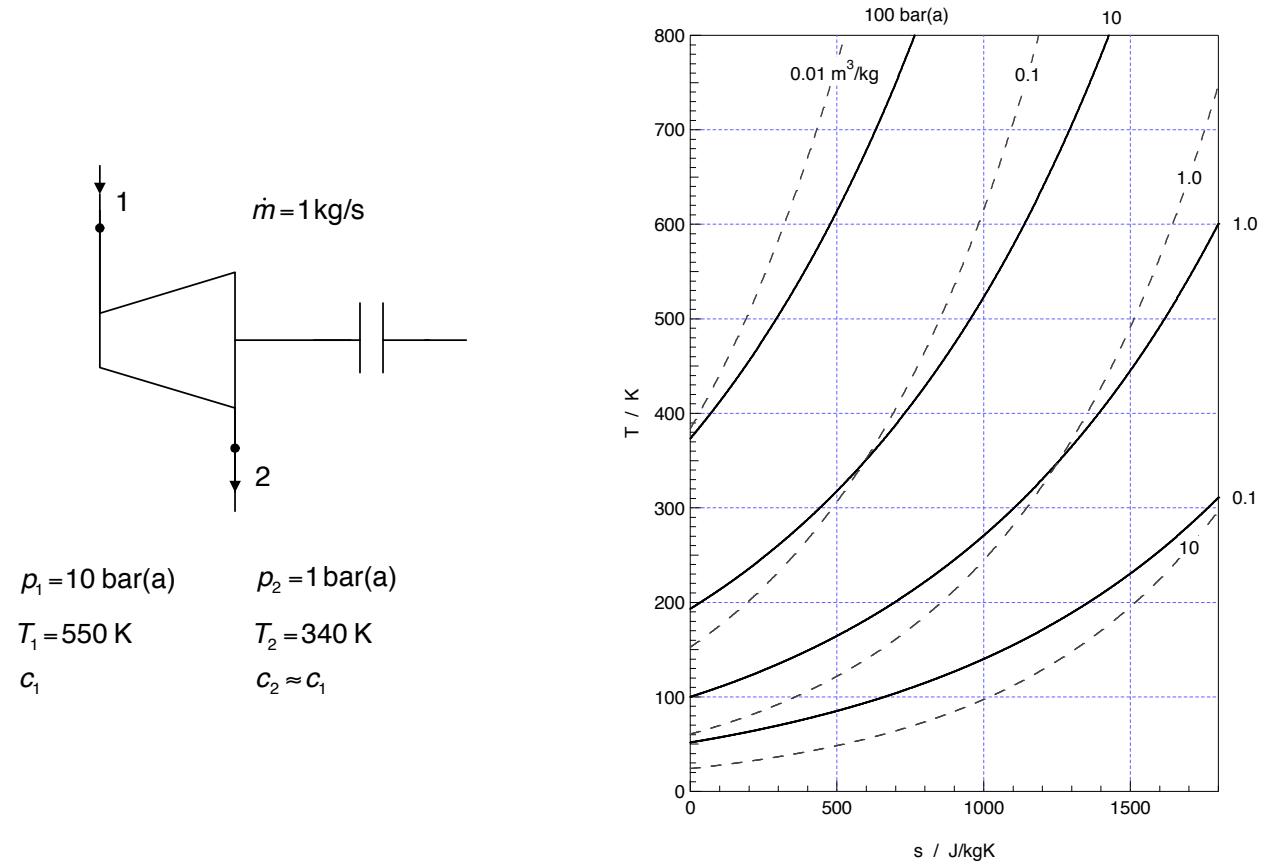
$$\eta_s = \frac{w_{t12s}}{w_{t12}} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{T_{2s} - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\eta_s = 0.80$$

Exergieverlust:

$$\dot{E}_{v12} = T_U \dot{S}_{irr12}$$

5. Adiabate Turbine



$$1. \text{ HS: } \underbrace{q_{12}}_0 + w_{t12} = h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = -210.8 \text{ kJ/kg}$$

$$P_{12} = -210.8 \text{ kW}$$

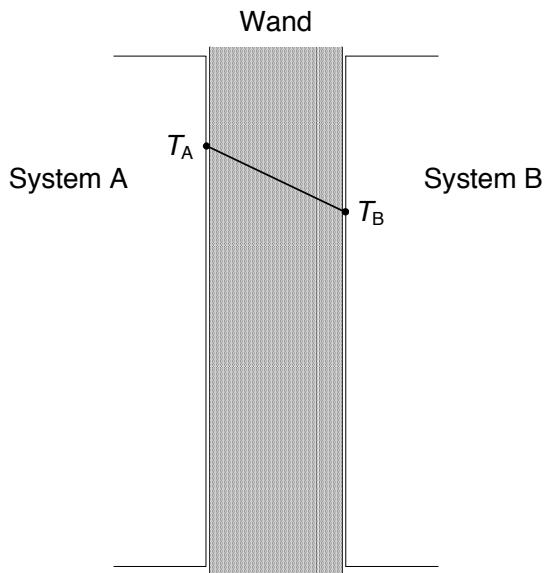
Ideale adiabate Turbine:

$$T_{2s} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 284.8 \text{ K}$$

$$P_{12s} = \dot{m} c_p (T_{2s} - T_1) = -266.3 \text{ kW}$$

Isentroper Wirkungsgrad:

$$\eta_s = \frac{w_{t12}}{w_{t12s}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_{2s}} = 0.79$$

6. Wärmeübertragung mit endlicher Temperaturdifferenz

Fall A: T_A ist 400 K. Es wird ein Wärmestrom $\dot{Q} = 100 \text{ kW}$ an System B übertragen. System B habe eine Temperatur von 390 K, 350 K und 300 K (d.h $\Delta T = T_A - T_B = 10 \text{ K}$, 50 K und 100 K).

Fall B: Die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_A - T_B$ ist konstant 10 K. Es wird ein Wärmestrom $\dot{Q} = 100 \text{ kW}$ bei verschiedenen Temperaturniveaus übertragen: $T_A = 1000 \text{ K}, 400 \text{ K}$ und 100 K .

7. Entropiebilanz eines Luftkühlers

Ein Luftstrom von 0.5 kg/s wird in einem Verdichter auf 4 bar(a) verdichtet und hat dadurch 214°C. Mit Wasser von 15°C soll die Luft auf 35°C abgekühlt werden; das Kühlwasser wird dabei 22°C warm. Im Kühler fällt der Druck der Luft infolge Verlusten auf 3.6 bar(a). Wasserseitig ist der Druckverlust vernachlässigbar klein. Man erstelle eine Entropie-Analyse für diesen Luftkühler.

Luft: $\dot{m}_1 = 0.5 \text{ kg/s}$

$$\vartheta_{11} = 214^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_{12} = 35^\circ\text{C}$$

$$p_{11} = 4 \text{ bar(a)}$$

$$p_{12} = 3.6 \text{ bar(a)}$$

$$c_{p1} = 1.004 \text{ kJ/kg K}$$

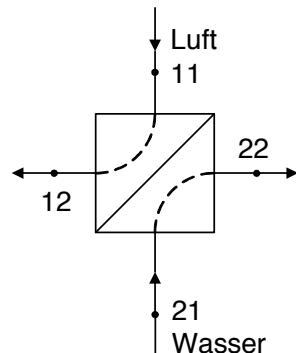
$$R_1 = 0.287 \text{ kJ/kg K}$$

Wasser: $\vartheta_{21} = 15^\circ\text{C}$

$$\vartheta_{22} = 22^\circ\text{C}$$

$$p_{21} \approx p_{22}$$

$$c_{p2} = 4.19 \text{ kJ/kg K}$$



Lösung:

8. Isochore Erwärmung von Luft mit zwei verschiedenen Prozessen

2 kg Luft wird isochor von 20°C auf 120°C erwärmt. Bei einem ersten Prozess erfolgt die Erwärmung durch Wellenarbeit und bei einem Zweiten mittels Wärmezufuhr.

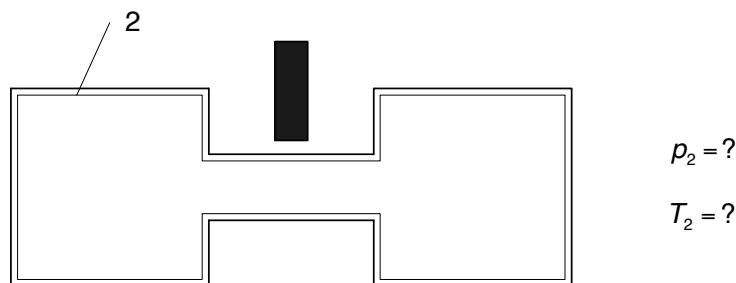
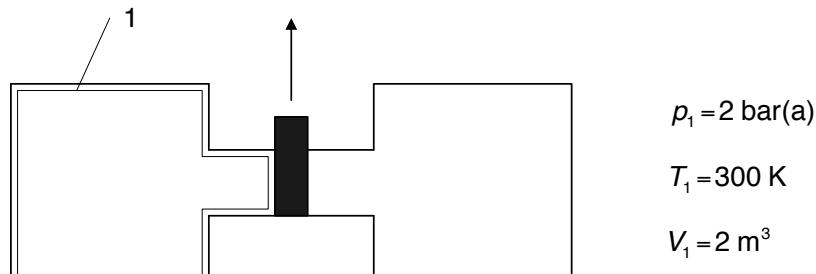
Was ist gleich und was verschieden bei diesen zwei Prozessen?

9. Adiabate Düse: Beurteilung eines Patents

Ein Erfinder behauptet bei Entspannung von Luft in einer adiabaten Düse von 12 bar(a) auf 1 bar(a) eine Temperaturerniedrigung von 25°C auf -126°C zu erreichen. Beurteilen Sie seine Angabe!

10. Adiabater Druckausgleich

Durch Herausziehen des Schiebers erfolgt ein adiabater Druckausgleich:



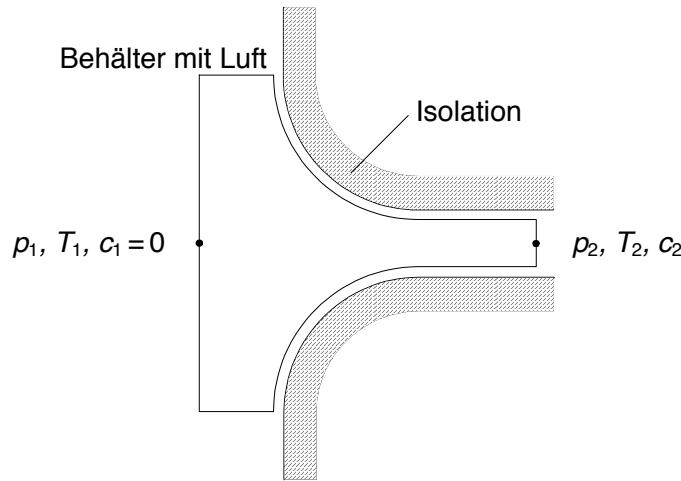
7.7 Übungen

Versuchen Sie die Übungen 7.1 bis 7.3 im Sinne einer Selbstkontrolle ohne Hilfe der Unterlagen zu lösen.

Übung 7.1: Kontrollfragen Kap. 7.

- a. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? – Die Entropie eines Systems nimmt ab,
 - wenn das System Wärme abgibt,
 - wenn das System Arbeit abgibt,
 - wenn im Innern des Systems dissipative Effekte auftreten oder
 - die Entropie eines Systems kann grundsätzlich nicht abnehmen.
- b. Welche der folgenden Größen kann weder erzeugt noch vernichtet werden?
 - Entropie
 - Energie
 - Enthalpie
 - Exergie
- c. In welchem System kann die Entropie niemals abnehmen? In einem
 - offenen System,
 - ruhenden geschlossenen System,
 - adiabaten System oder
 - in überhaupt keinem System.

Übung 7.2: Entspannung in einer Düse. In einem grossen Behälter befindet sich Luft bei einem Druck p_1 und einer Temperatur T_1 . Die Luft wird in einer Düse adiabat und reibungsfrei (d.h. ohne Strömungsverluste) auf den Druck p_2 entspannt. Die Luft kann als ideales Gas betrachtet werden ($R_L, \kappa, c_{pL} = \text{konst.}$). (P)



- Formulieren Sie den 1. HS der Thermodynamik für dieses System.
- Wird die Luft durch die Entspannung erwärmt oder abgekühlt? Geben Sie eine klare Begründung an und leiten Sie aus dem 1. HS eine Berechnungsgleichung für T_2 her.
- Wie gross ist die Dissipation j_{12} ?
- Zeichnen Sie die Entspannung mit Angabe der thermischen Zustandsgrössen qualitativ in ein T, s -Diagramm ein.

Übung 7.3: Bilanzierung und Entwertung der Energie. In einem geschlossenen System mit wärmedurchlässiger Systemgrenze hat man als Arbeitsmittel ein ideales Gas. Dem System wird im Laufe einer Zustandsänderung bei konstant bleibender Temperatur von 400 K eine Wärmeenergie von 11000 J zugeführt. Die Dissipation beträgt 1000 J. (P)

- Wie gross sind die Gesamtarbeit und die Volumenänderungsarbeit?
($W_{12} = -11000 \text{ J}, W_{v12\ rev} = -12000 \text{ J}$)
- Wie gross ist die Entropieänderung des Systems? Welches Vorzeichen hat sie? (D.h. nimmt die Entropie zu oder ab?) ($S_2 - S_1 = +30 \text{ J/K}$)

Übung 7.4: Erwärmung von Helium. In einem Wärmeübertrager mit der Wärmeleistung 1000 kW werden 1.9 kg/s Helium isobar bei 15 bar(a) erwärmt. Die Eintrittstemperatur beträgt 10°C. Helium soll als ideales Gas behandelt werden ($M_{He} = 4 \text{ g/mol}$, $\kappa = 1.667$).

Wie ändert sich der Entropiestrom $\dot{S}_2 - \dot{S}_1$? ($\dot{S}_2 - \dot{S}_1 = 3.02 \text{ kW/K}$)

Übung 7.5: Verdichtung von Methan. In einem adiabaten Verdichter wird ein Normvolumenstrom von 100'000 m³/h Methan von 10 bar(a) und 12°C auf 40 bar(a) verdichtet, wodurch die Temperatur auf 150°C steigt. Methan kann als perfektes Gas behandelt werden. Die Stoffdaten können über diesen Bereich als konstant angenommen werden. Die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie darf vernachlässigt werden. Stoffdaten: $M_{CH_4} = 16 \text{ g/mol}$, $\kappa = 1.32$, $\rho_n = 0.718 \text{ kg/m}^3$

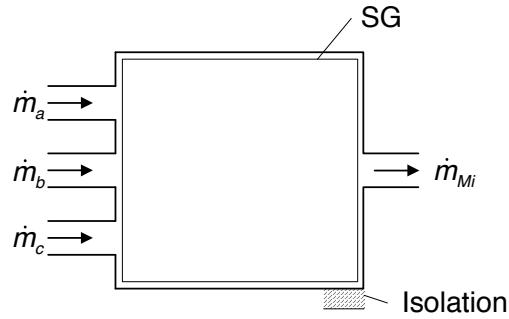
- a. Welche Verdichterleistung ist erforderlich (Lagerreibung vernachlässigt)?
($P_{12} = 5899.5 \text{ kW}$)
- b. Wie gross ist die reversible Verdichterleistung? ($P_{12\ rev} = 5022.9 \text{ kW}$)
- c. Welche Leistung wird dissipiert? ($J_{12} = 877.4 \text{ kW}$)
- d. Wie gross ist der Entropieproduktionsstrom des Systems? ($\dot{S}_{irr} = 2.51 \text{ kW/K}$)

Übung 7.6: Druckminderungsventil. In einem Druckminderungsventil wird Luft mit einer Temperatur von 20°C adiabat von 6 bar(a) auf 2 bar(a) gedrosselt. Die Strömungsgeschwindigkeit soll ungefähr konstant bleiben (Querschnittserweiterung). Die Luft kann als ideales Gas behandelt werden ($R_L = 287.2 \text{ J/kg K}$, $\kappa = 1.4$).

- a. Welche Temperatur hat die Luft nach der Drosselung? ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = 20^\circ C$)
- b. Wie ändert sich die spezifische Entropie $s_2 - s_1$? ($s_2 - s_1 = 315.5 \text{ J/kg K}$)
- c. Wie gross ist die spezifische Dissipation j_{12} ? ($j_{12} = 92.5 \text{ kJ/kg}$)

Übung 7.7: Temperaturausgleich durch Mischen. Es werden 3 Luftströme bei konstantem Druck $p = 1.2 \text{ bar(a)}$ gemischt. Die Umgebungstemperatur beträgt 20°C . Die Prozessdaten lauten: $\dot{m}_a = 400 \text{ kg/h}$, $\vartheta_a = 20^\circ\text{C}$, $\dot{m}_b = 1000 \text{ kg/h}$, $\vartheta_b = 80^\circ\text{C}$, $\dot{m}_c = 600 \text{ kg/h}$, $\vartheta_c = 50^\circ\text{C}$

Stoffdaten von Luft: $R_L = 287 \text{ J/kg K}$, $c_p = 1.006 \text{ kJ/kg K}$



Berechnen Sie:

- die Mischtemperatur ϑ_{Mi} , ($\vartheta_{Mi} = 59^\circ\text{C}$)
- die Entropiezunahme \dot{S}_{irr} durch den Temperaturausgleich bei der Mischung und ($\dot{S}_{irr} = 1.435 \text{ W/K}$)
- den Exergieverluststrom \dot{E}_V . ($\dot{E}_V = 420.8 \text{ W}$)

Hinweis: Betrachten Sie den isobaren Mischvorgang so, als ob die einzelnen Ströme von ihrer Ausgangstemperatur auf die Mischtemperatur abgekühlt bzw. erwärmt werden.

Übung 7.8: Luft isochor bzw. isobar erwärmen. Wir betrachten die Erwärmung von 2.5 kg Luft in einem geschlossenen System:

- 1) In einem Behälter bei konstantem Volumen,
- 2) In einem Zylinder/Kolben-System bei konstantem Druck.

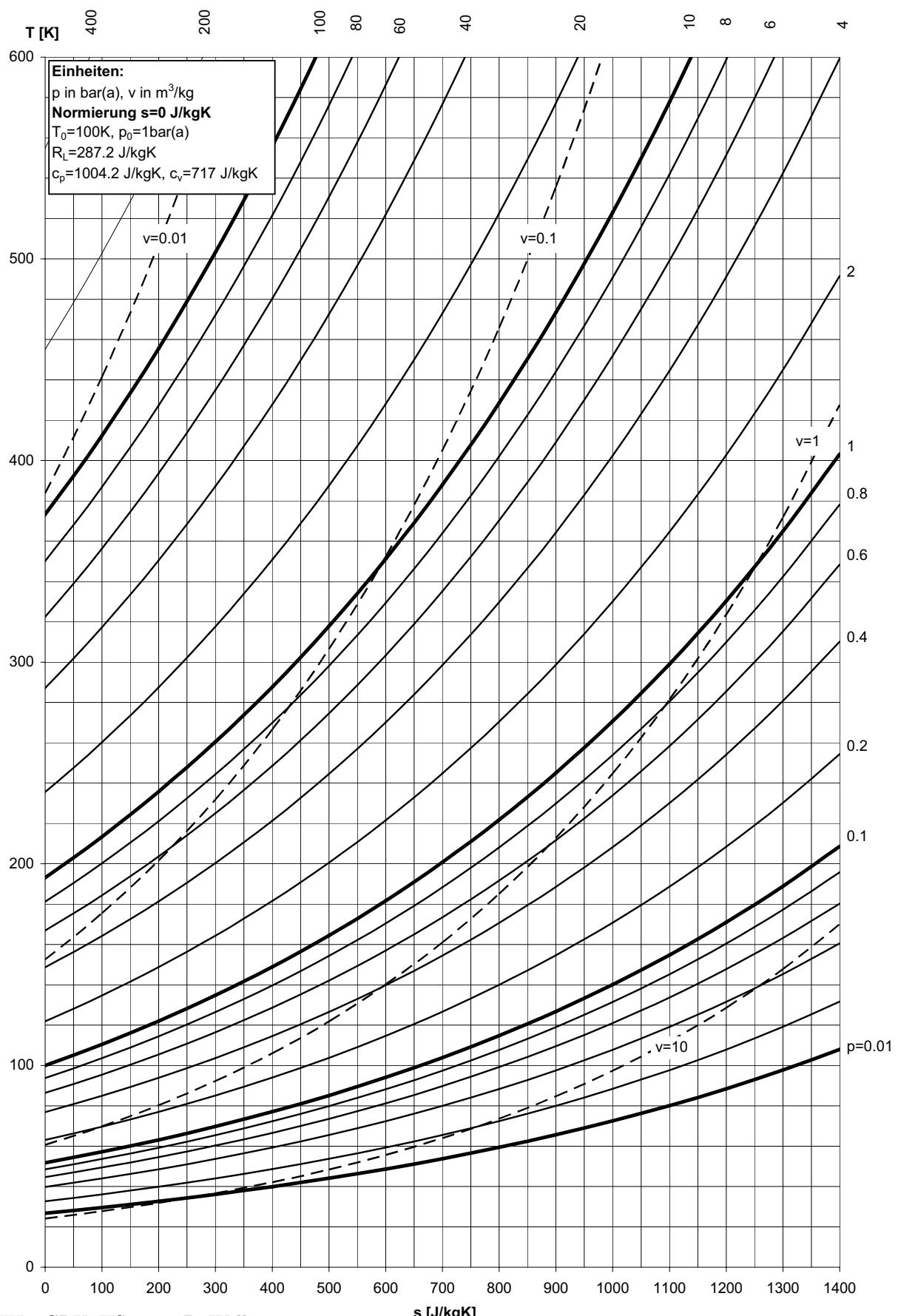
Die Luftmasse hat vor der Erwärmung einen Druck von 4 bar(a) und eine Temperatur von 300 K, in beiden Fällen wird sie auf eine Temperatur von 400 K erwärmt. Die Zustandsänderung erfolgt dissipationsfrei.

- a. Berechnen Sie den Druck und das Volumen nach der isochoren bzw. isobaren Erwärmung!
- b. Wie gross ist die jeweils benötigte Wärmeenergie?
- c. Berechnen Sie die Änderung der Entropie für die beiden Zustandsänderungen!
- d. Zeichnen Sie die beiden Prozesse klar und unmissverständlich in das beiliegende T, s -Diagramm ein. Berechnen Sie falls nötig die exakte Lage der Zustandspunkte und tragen Sie sämtliche Zustandsgrössen und massgebenden Flächen ein.

Hinweis: Die benötigten Stoffdaten der Luft sind im T, s -Diagramm eingetragen.

Numerische Lösung

Zustandsänderung	p_1 [bar(a)]	p_2 [bar(a)]	V_1 [m ³]	V_2 [m ³]	Q_{12} [kJ]	$S_2 - S_1$ [J/K]
isochor	4	5.33	0.539	0.539	179.3	515.7
isobar	4	4	0.539	0.718	251.1	722.2



Anhang A

Lösungsvorschläge

Lösung 1.1: Was ist Thermodynamik?.

- Umwandlung von Wärme in Arbeit:
 - Dampfmaschine (Dampfkraftwerk)
 - Verbrennungsmotor
 - Gasturbine (Kraftwerk, Strahltriebwerk)

- Energieumwandlungen:

solar-thermisch: Solarkollektoren

chemisch-thermisch: Verbrennung: – Heizkessel
 – Brennkammer in Strahltriebwerken
 – Schweißbrenner

solar-chemisch: Photosynthese
 (→ fossile Brennstoffe)

chemisch-elektrisch: Batterie, Akkumulator, Brennstoffzelle
 Kraftwerk mit fossilen Brennstoffen

thermisch-elektrisch: Thermoelement (thermoelektrischer Effekt)
 Peltierelement

elektrisch-elektrisch: Transformator
 Stromwandler (AC → DC)

Lösung 1.2: Mechanische - elektrische - mechanische Energie.

Fast die gesamte elektrische Energie entsteht aus mechanischer Energie. Die Einrichtung dazu heisst

Generator (Elektrogenerator)

Mechanische Energie wird häufig aus elektrischer Energie erzeugt. Die Einrichtung für die Umwandlung heisst

Elektromotor

Es gilt also: $E_{mech} \rightarrow E_{el} \rightarrow E_{mech}$: Welche Bedeutung hat dabei die elektrische Energie?

Transportmittel: Elektrische Energie lässt sich sehr gut transportieren.

Lösung 1.3: Die verschiedenen Energieformen. Anwendungsbeispiele zur Nutzung folgender Energieformen:

- mechanische:
 - Getriebe
 - Schwungrad
 - Antrieb von Maschinen
- elektrische:
 - Licht
 - Radio, TV, PC
 - Elektrolyse (Aluminium-Herstellung)
 - Verkehr (Zug, Tram)
- thermische:
 - Heizung
 - Dampf in Turbine abarbeiten
 - Nutzung von Rauchgasabwärme
- chemische:
 - Heizung mit Öl, Gas, Holz
 - Verbrennungsmotoren, Gasturbinen, Strahltriebwerke
 - Nahrungsaufnahme (biologische Energie)
- nukleare:
 - Reaktor in Atomkraftwerk (AKW)
- solare:
 - Solarzellen (Photovoltaik)
 - Solarkollektoren

Lösung 1.4: Wirkungsgrade technischer Energiewandler.

Vom zugeführten Energiestrom kann nur folgender Anteil genutzt werden:

	< 25%	25...50%	50...75%	> 75%
Mechanisches Getriebe				X
Benzinmotor		X		
Elektromotor			(X)	X
Thermisches Kraftwerk (elektr. Energie aus Erdöl)		X	X	
Hydraulisches Kraftwerk				X
Solarzelle (elektr. Energie aus Sonnenenergie)	X			
Biochemische Energie (Nahrung) in mechanische Energie beim Menschen	X			
Düsenflugzeug (d.h. Antrieb mit Strahltriebwerk)	X			
Brennstoffzelle (elektrische Energie aus H und O)			X	

Lösung 1.5: Eier kochen. Die Behauptung ist falsch. Die Siedetemperatur ist vom herrschenden Druck abhängig. Der Luftdruck auf dem Jungfraujoch (~ 660 mbar(a)) ist kleiner als in Luzern (~ 960 mbar(a)).

Der Zusammenhang zwischen Druck p und Temperatur T ist in der Dampfdruckkurve ersichtlich.

Lösung 1.6: Das “Kaffeerahm-Problem”. Je grösser das Temperaturgefälle, umso grösser der Wärmestrom \rightarrow es ist besser, zuerst eine Weile zu warten und danach den Rahm dazugeben und umrühren.

Lösung 1.7: Umgang mit dem Kühlschrank.

- Nein, im Gegenteil! Die Küche erwärmt sich, sofern die “Abwärme” nicht direkt nach aussen geführt wird. Der Kühlschrank “wird” zur Wärmepumpe.
- Kühlschranktür offen \rightarrow warme Luft strömt ein
Kühlschranktür geschlossen \rightarrow Luft kühlt sich ab und es entsteht ein Unterdruck (im Vergleich zur Küche)

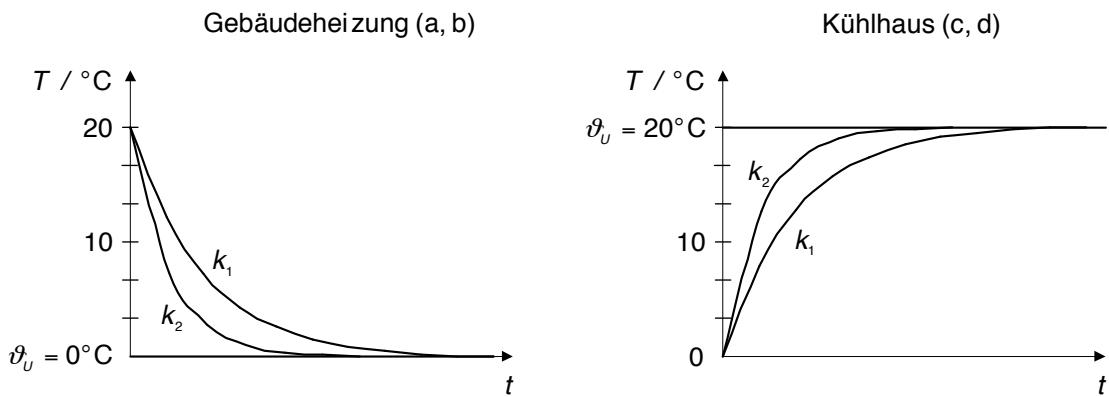
$$pV = mRT \quad V = \text{konst.} \quad \rightarrow p = f(T)$$

- Das Arbeitsfluid nimmt bei tiefer Temperatur “Wärme” aus dem Kühlschrank auf. Diese wird auf ein höheres Temperaturniveau “gepumpt” und an die Umgebung (Küche) abgegeben.

Lösung 1.8: Velopumpe und Flüssigkeits-Pumpe.

- Luft ist kompressibel. Durch die Volumenverkleinerung (Kompression) wird mechanische Energie an die Luft abgegeben.
Ideales Gas: $pV = mRT$
- Wasser ist beinahe inkompressibel \rightarrow keine Erwärmung

Lösung 1.9: Heizen und Kühlen. Die zeitlichen Temperaturverläufe sind unten dargestellt.



Lösung 2.1: Thermodynamische Systeme.

a.

	adiabat	nicht-adiabat (diabat)
offen	isolierter Wärmeübertrager	Velopumpe
geschlossen	Thermosflasche	Dampfkochtopf

b.

Stofftransport durch Systemgrenze möglich	Stofftransport durch Systemgrenze möglich, Wärmefluss durch Systemgrenze nicht möglich	Stofftransport und Wärmefluss durch Systemgrenze nicht möglich
offen	offen, adiabat	geschlossen, adiabat

Lösung 2.2: System-Klassifikation.

- a. offen, adiabat
- b. geschlossen, adiabat
- c. offen, adiabat
- d. SG1: offen, adiabat (falls Brennkammer gut isoliert) bzw. offen, nicht-adiabat (falls Wärmeverluste der Brennkammer nicht vernachlässigbar sind)
SG2: offen, adiabat/nicht-adiabat (mit analoger Begründung wie SG1; Verdichter werden in der Praxis oft als adiabat betrachtet)
- e. geschlossen, nicht-adiabat
- f. SG1: geschlossen, nicht-adiabat
SG2: offen, nicht-adiabat
- g. SG1: geschlossen, nicht-adiabat
SG2: offen, adiabat
- h. offen, adiabat
- i. offen, adiabat
- j. geschlossen, nicht-adiabat

- k. offen, adiabat
- l. SG1: offen, adiabat
SG2: geschlossen, nicht-adiabat
- m. offen, nicht-adiabat

Lösung 2.3: Offene Systeme.

b. Das offene System ist **durch einen Massendurchsatz** gekennzeichnet.

Lösung 2.4: Unterscheidung von thermodynamischen Systemen.

Kein Lösungsvorschlag; hier sind Sie gefordert!

Lösung 2.5: Homogene/heterogene Systeme.

- a. Das Unterscheidungsmerkmal ist die Anzahl der Phasen. Ein **homogenes System** ist einphasig und ein **heterogenes System** mehrphasig.
 - **Homogenes System:** Luft, Schnaps oder ungesättigte Salz- und Zuckerlösungen
 - **Heterogenes System:** Italienische Salatsauce, Gemenge von verschiedenen Steinen, Schlamm, Milch oder Staub
- b. Bei einem Luftstrom handelt es sich um ein **homogenes System**. In der Luft lassen sich die einzelnen Gase nicht unterscheiden und bilden eine einzige Phase.

Lösung 2.6: Zustand und Prozesse.

- a.
 - Die Wärme ist eine **Prozessgrösse**. Die Wärme beschreibt, wie die Zustandsänderung zwischen dem Zustand 1 und Zustand 2 abläuft.
 - Die Temperatur ist eine **Zustandsgrösse**. Sie ist eine makroskopisch erfassbare Grösse und beschreibt eine physikalische Eigenschaft eines Zustandes.
- b. Die Wärme ist eine Prozessgrösse, die Temperatur dagegen eine Zustandsgrösse: Ein Stoff hat immer eine Temperatur. Sie kann wohl von Ort zu Ort verschieden sein. Wärme existiert nur während eines Prozesses (genau so wie Arbeit). Wärme definieren wir als eine Energie, die infolge eines Temperaturgefälles über eine Systemgrenze übertragen wird. Im Grenzfall kann diese Ursache des Wärmetransportes, also die Temperaturdifferenz, verschwindend klein sein.
- c. Kein Lösungsvorschlag; hier sind Sie gefordert!

Lösung 2.7: Zustandsgrößen.

- Bei der Teilung eines homogenen Systems ändern die **extensiven** Zustandsgrößen ihren Wert.
- Spezifische Zustandsgrößen sind **auf die Masse bezogen**.
- Die **Dichte** kann nicht zur Beschreibung der Menge eines Stoffes verwendet werden.
- Die **Anzahl der Moleküle** ist gleich.
- **Intensive** Zustandsgrößen sind **mengenunabhängig**, z.B. Druck p , Temperatur T , Dichte ρ , spezifische Volumen v oder spezifische innere Energie u .
 - **Extensive** Zustandsgrößen sind **mengenabhängig**, z.B. Volumen V , Masse m oder innere Energie U .

Lösung 2.8: Wasserstoffbehälter.

- Ja, der Zustand dieses Systems ist durch die folgenden Zustandsgrößen bestimmt:

$$\vartheta = \vartheta_U \quad V = 100 \text{ m}^3$$

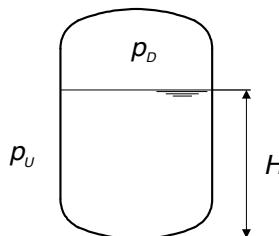
Wasserstoff : $M_{H_2} = 2.016 \text{ kg/kmol}$; Stoffmenge: $n = 49.60 \text{ kmol}$

- Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M_{H_2} n}{V} = \frac{2.016 \text{ kg/kmol} \cdot 49.60 \text{ kmol}}{100 \text{ m}^3} = 1.0 \text{ kg/m}^3$$

Spezifisches Volumen:

$$v = \frac{1}{\rho} = 1.0 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Lösung 2.9: Überdruck in einem Behälter.

Gegeben:
 $H = 30 \text{ m}$
 $p_D = 2.5 \text{ bar(a)}$
 $\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$
 $p_U = 700 \text{ Torr} = 0.933 \text{ bar(a)}$

$$p_{max} = p_D + \rho g H = 5.884 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 5.884 \text{ bar(a)}$$

Überdruck im Behälter:

$$p = p_{max} - p_U = 4.951 \text{ bar(g)}$$

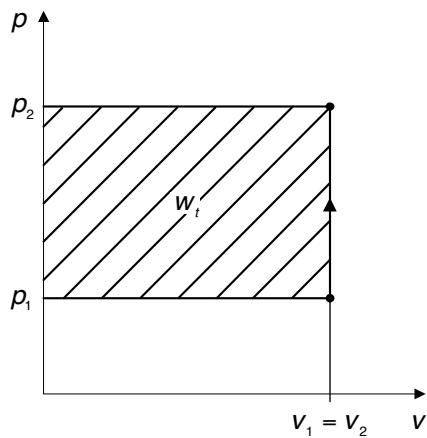
Lösung 2.10: Leistung und spezifische Arbeit einer Pumpe.

a. Die spezifische Arbeit w_t hat die Einheit [J/kg].

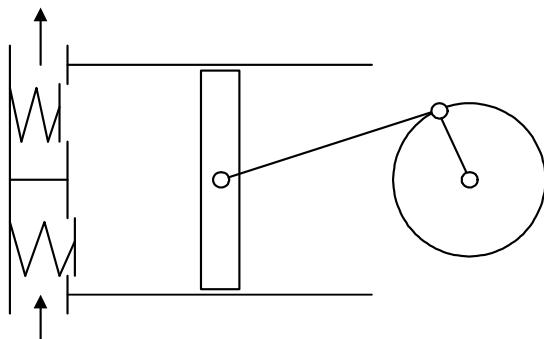
b. Spezifische Arbeit einer Pumpe:

$$w_t = v(p_2 - p_1)$$

c. p, v -Diagramm

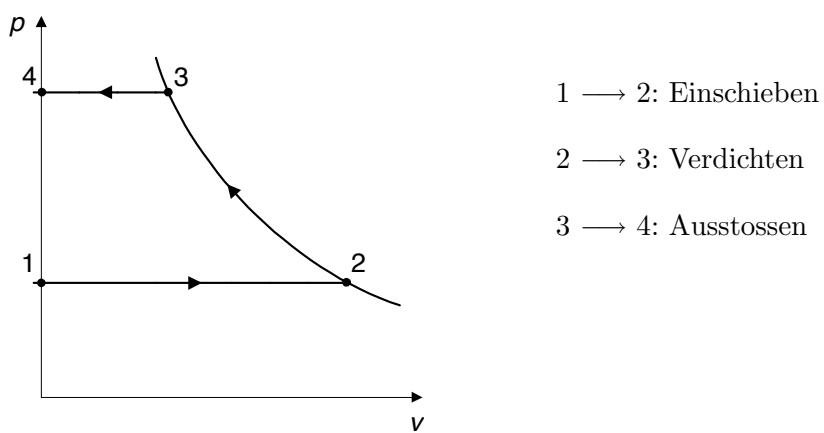


Lösung 2.11: Kompressor als thermodynamisches System.



1 Kurbelumdrehung = 1 Arbeitstakt

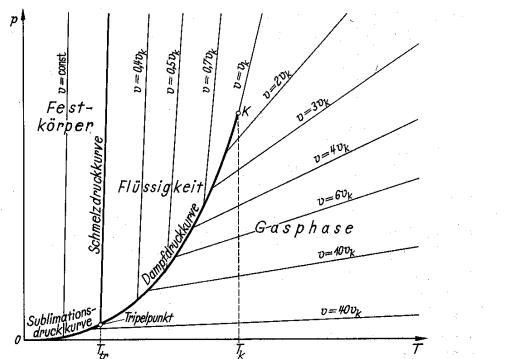
1. Einschieben, 2. Verdichten, 3. Ausstossen



Lösung 3.1: Kontrollfragen.

Bemerkung: Die thermische Zustandsgleichung der idealen Gase wird nachfolgend kurz "Gasgleichung" genannt.

- a. p, T -Diagramm eines reinen Stoffes:



- b. Die Nassdampf-Isotherme ist als **Punkt** in einem p, v -Diagramm zu erkennen.
 c. Die kritische Isotherme hat im p, v -Diagramm am kritischen Punkt einen **Wendepunkt**.
 d.

$$pV = nRT$$

- e.
 - Bei gleichem Druck und gleicher Temperatur ist die Masse von Propan in der Gasflasche grösser als von Helium.
 - Es befindet sich in beiden Fällen die gleiche Stoffmenge in der Gasflasche.
 f. Die Erwärmung der Propan-Gasflasche entspricht einer **isochoren Zustandsänderung**.
 g. Die Gasgleichungen für beide Zustände sind:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= m R_i T_1 \\ p_2 V_2 &= m R_i T_2 \end{aligned}$$

Durch Division und mit $p_1 = p_2$ erhält man:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Aufgelöst nach T_2 :

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}$$

h. Die Gasgleichungen für beide Zustände sind:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= m R_i T_1 \\ p_2 V_2 &= m R_i T_2 \end{aligned}$$

Durch Division und mit $V_1 = V_2$ erhält man:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Aufgelöst nach T_2 :

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}$$

Lösung 3.2: p, T -Diagramm.

Gebiet X: Festkörper

Gebiet Y: Flüssigkeit

Gebiet Z: Gasphase

Kurve 1: Schmelzdruckkurve

Kurve 2: Dampfdruckkurve

Kurve 3: Sublimationsdruckkurve

Punkt A: Kritischer Punkt

Punkt B: Tripelpunkt

Lösung 3.3: Montageort für Gasdetektoren.

Bevor man entscheiden kann, auf welcher Höhe die jeweiligen Gasdetektoren montiert werden sollen, muss man sich Gedanken über die Dichte der einzelnen Gase machen.

Die Gasgleichung lautet:

$$p v = R_i T \quad \text{oder} \quad p v = \frac{R}{M_i} T$$

Die Dichte entspricht dem Kehrwert des spezifischen Volumens:

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{p}{R_i T} = \frac{M_i p}{R T}$$

Es ist ersichtlich, dass die Dichte umgekehrt proportional zu der Gaskonstante bzw. direkt proportional zur molaren Masse ist. Je grösser die Gaskonstante bzw. je kleiner die molare Masse, desto kleiner die Dichte. Aufgrund dieser Feststellung können die Gasdetektoren wie folgt montiert werden:

- Decke: Gasdetektor für Ammoniak
- Kopfhöhe: Gasdetektor für Luft
- Bodennähe: Gasdetektoren für Kohlendioxid und Kältemittel R22

Lösung 3.4: Gaskonstante von Luft.

Das spezifische Volumen ist:

$$v = \frac{V}{m} = 0.81 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Die Gaskonstante von Luft wird damit:

$$R_L = \frac{p v}{T} = 277.3 \text{ J/kg K}$$

Lösung 3.5: Schweissarbeiten an Stahltank.

Die Gaskonstante von Stickstoff ist $R_{N2} = 296 \text{ J/kg K}$ und die molare Masse $M_{N2} = 28 \text{ kg/kmol}$.

- a. Die Stickstoffmasse errechnet man aus der Gasgleichung:

$$m = \frac{p_1 V_1}{R_{N2} T_1} = 55.5 \text{ kg}$$

- b. Die Stoffmenge ist:

$$n = \frac{m}{M_{N2}} = 1.98 \text{ kmol}$$

- c. Der Temperaturanstieg erfolgt isochor. Die Gasgleichung liefert den Druck

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 2.96 \text{ bar(a)}$$

Lösung 3.6: Isobare Erwärmung von Helium.

Für die isobare Zustandsänderung ergibt sich aus der Gasgleichung:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

Der Ersatz von V_2 durch $V_2 = V_1 + \Delta V$ liefert nach kurzer Rechnung

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \cdot 100\% = 33.2\%$$

Lösung 3.7: Isotherme Kompression von Luft.

Das Volumen für eine isotherme Zustandsänderung ergibt sich aus der Gasgleichung:

$$V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} = 1.27 \text{ m}^3$$

Lösung 3.8: Isotherme Kompression und isobare Expansion.

- a. Aus der Gasgleichung erhält man bei isothermer Kompression für das Volumen:

$$V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} = 3.74 \text{ m}^3$$

- b. Für die Temperatur einer isobaren Expansion bekommt man aus der Gasgleichung

$$T_3 = T_2 \frac{V_1}{V_2} = 1903 \text{ K}$$

Lösung 3.9: Sauerstoffbehälter.

- a. Das Speichervolumen des kugelförmigen Behälters berechnet man mit der bekannten Formel:

$$V = \frac{\pi}{6} D^3 = 113.1 \text{ m}^3$$

Mit der Avogadrokonstante $N_A = 6.022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ ergibt sich die Stoffmenge:

$$n = \frac{N}{N_A} = 14.95 \text{ kmol}$$

- b. Das molare Volumen ist:

$$v_m = \frac{V}{n} = 7.57 \text{ m}^3/\text{kmol}$$

- c. Mit der universellen Gaskonstante R und der molaren Masse M_{O_2} von Sauerstoff ergibt sich:

$$R_{O_2} = \frac{R}{M_{O_2}} = 259.8 \text{ J/kg K}$$

- d. Der Gasdruck ergibt sich aus der Gasgleichung:

$$p = \frac{n R T}{V} = 3.30 \text{ bar(a)}$$

Lösung 3.10: Auftrieb eines Heissluftballons.

- a. Die Auftriebskraft wird wie folgt berechnet:

$$F_A = V_B g (\rho_U - \rho_{HL})$$

Die Dichte der Luft kann mit der Gasgleichung bestimmt werden:

$$\rho = \frac{m_L}{V_B} = \frac{p_U}{R_L T}$$

Daraus folgt für die Auftriebskraft:

$$F_A = V_B g \frac{p_U}{R_L} \left(\frac{1}{T_U} - \frac{1}{T_{HL}} \right)$$

Nach T_{HL} auflösen:

$$T_{HL} = \left(\frac{1}{T_U} - \frac{F_A R_L}{V_B g p_U} \right)^{-1} = 353.6 \text{ K} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta_{HL} = 80.45^\circ\text{C}$$

- b. Luftmasse im Ballon:

$$m_L = \frac{p_U V_B}{R_L T_{HL}} = 985.0 \text{ kg}$$

Lösung 3.11: Gasbehälter.

- a. Für den Druck p_{1a} gilt:

$$p_{1a} = p_{1g} + p_U = 20.95 \text{ bar(a)}$$

- b. Die Gasgleichung lautet:

$$pV = R_i T \quad \text{bzw.} \quad pV = mR_i T$$

Somit gilt für die Zustände 1 und 2:

$$p_1 V = m R_i T_1$$

$$p_2 V = m R_i T_2$$

Daraus folgt für eine isochore Zustandsänderung:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{T_2}{T_1} \\ p_2 &= p_1 \frac{T_2}{T_1} = p_{2a} = 17.38 \text{ bar(a)} \end{aligned}$$

Falls der Umgebungsdruck konstant ist, gilt für die Anzeige des Manometers:

$$p_{2g} = p_{2a} - p_U = 16.43 \text{ bar(g)}$$

Lösung 3.12: Mess-Ballon.

- a. Für die Gasgleichungen bei den verschiedenen Zuständen 1 und 2 gilt:

$$p_1 V_1 = m R_i T_1$$

$$p_2 V_2 = m R_i T_2$$

Daraus folgt:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_2} = 1.52$$

- b. Zur Bestimmung der Radiusänderung wird die Gaskonstante von Helium benötigt:

$$R_{He} = \frac{R}{M_{He}} = 2077.28 \text{ J/kg K}$$

Für das Volumen des Ballons gilt bei gegebenem Zustand:

$$V = \frac{m_{He} R_{He} T}{p} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Somit kann der Radius bei Zustand 1 und 2 bestimmt werden:

$$r_1 = 4.0 \text{ m}, \quad r_2 = 4.6 \text{ m}$$

Lösung 3.13: Campinggasflasche.

- a. Für die Gasgleichung gilt:

$$pV = m R_i T$$

Daraus folgt für die Methan-Masse vor der Entnahme:

$$m_1 = \frac{p_1 V}{R_{CH4} T_1}$$

Und für die Methan-Masse nach der Entnahme unter der Voraussetzung, dass die Temperatur gleich bleibt ($T_1 = T_2$):

$$m_2 = \frac{p_2 V}{R_{CH4} T_1}$$

Zur Berechnung der einzelnen Massen wird weiter die Gaskonstante von Methan benötigt:

$$R_{CH4} = \frac{R}{M_{CH4}} = 519.63 \text{ J/kg K}$$

Die entnommene Methan-Masse kann jetzt berechnet werden:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = 0.00659 \text{ kg}$$

- b. Zur Bestimmung des Volumens der entnommenen Methan-Masse wird wiederum die Gasgleichung verwendet:

$$V = \frac{\Delta m R_{CH4} T_3}{p_3} = 0.0108 \text{ m}^3$$

Lösung 3.14: Dichte von Luft.

Für die Gaskonstante der Luft gilt:

$$R_L = \frac{R}{M_L} = 287.18 \text{ J/kg K}$$

Das Volumen kann durch Anwendung der Gasgleichung ermittelt werden:

$$V_L = \frac{m_L R_L T}{p} = 1.885 \text{ m}^3$$

Für das spezifische Volumen gilt somit:

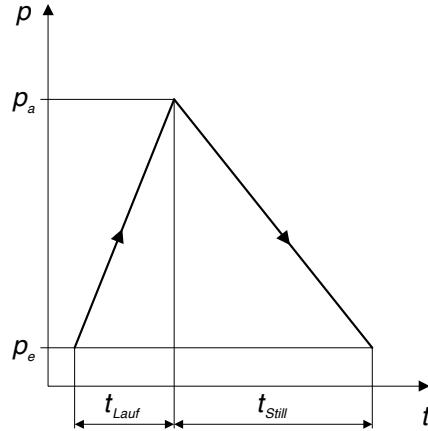
$$v_L = \frac{V_L}{m_L} = 0.126 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Daraus kann weiter die Dichte der Luft bei diesem Zustand berechnet werden:

$$\rho_L = \frac{1}{v_L} = 7.96 \text{ kg/m}^3$$

Lösung 3.15: Verdichter.

Die folgende Prinzipskizze zeigt den Druck im Kessel in Funktion der Zeit.



Die Luftmasse im Kessel bei voller Füllung, d.h. unmittelbar nach dem Abschalten des Kompressors, kann mit Hilfe der Gasgleichung berechnet werden:

$$m_a = \frac{p_a V_K}{R_L T_K} = 41.56 \text{ kg}$$

Die Luftmasse im Kessel unmittelbar vor dem Einschalten des Kompressors kann analog bestimmt werden:

$$m_e = \frac{p_e V_K}{R_L T_K} = 23.63 \text{ kg}$$

Der Massenstrom, welcher vom Verbraucher kontinuierlich aus dem Kessel entnommen wird, kann wiederum aus der Gasgleichung berechnet werden:

$$\dot{m}_3 = \frac{p_3 \dot{V}_3}{R_L T_3} = 11.76 \text{ kg/h}$$

Jetzt kann die Laufzeit des Kompressors bestimmt werden:

$$t_{Lauf} = \frac{m_a - m_e}{\dot{m}_K - \dot{m}_3} = 0.47 \text{ h}$$

Analog dazu kann auch die Stillstandzeit des Kompressors berechnet werden:

$$t_{Still} = \frac{m_a - m_e}{\dot{m}_3} = 1.53 \text{ h}$$

Lösung 3.16: Druckverteilung in der Atmosphäre.

a. Gemäss den Gesetzen der Aerostatik gilt:

$$p = \rho g z$$

Daraus folgt:

$$dp = -\rho(z) g dz$$

Zudem gilt:

$$\frac{p(z)}{p_0} = \frac{\rho(z)}{\rho_0}$$

Daraus folgt:

$$\rho(z) = \rho_0 \frac{p(z)}{p_0}$$

Damit gilt:

$$dp = -\rho_0 \frac{p(z)}{p_0} g dz \implies \frac{dp}{p} = -\rho_0 \frac{g}{p_0} dz$$

Durch die Intergration folgt:

$$\int \frac{dp}{p} = -\rho_0 \frac{g}{p_0} \int dz \implies \ln p = -\rho_0 \frac{g}{p_0} z + C_1$$

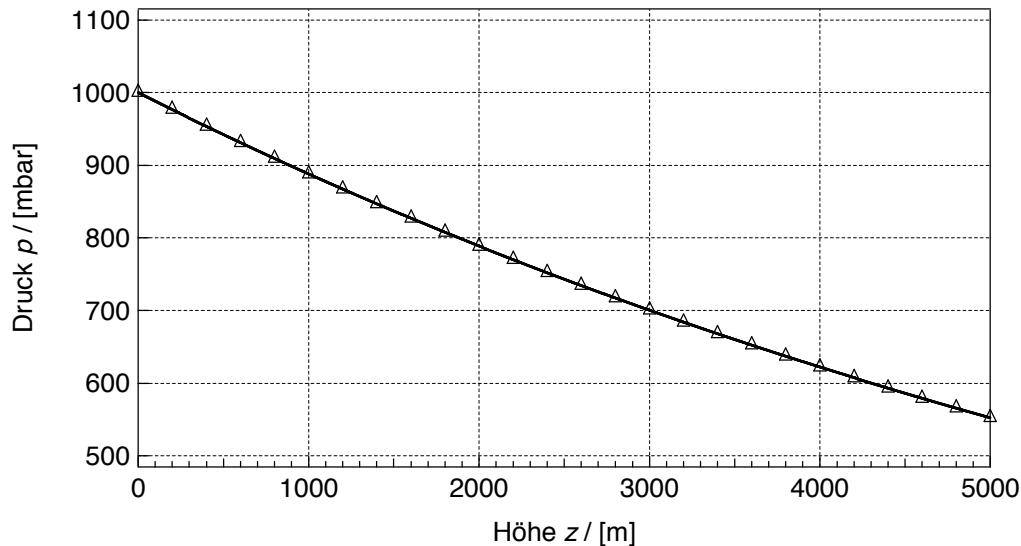
$p(z = 0) = p_0$ somit wird $C_1 = \ln p_0$ und

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z$$

Somit folgt für den Druck in Funktion der Höhe z :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z} = p_0 e^{-\frac{g}{R T} z}$$

b.



Lösung 4.1: Isotherme Zustandsänderung.

Für die reversible Volumenänderungsarbeit W_{v12rev} gilt allgemein:

$$W_{v12rev} = - \int_1^2 p dV$$

Aus der Gasgleichung erhält man für den Druck p :

$$p(V) = \frac{m R_i T}{V}$$

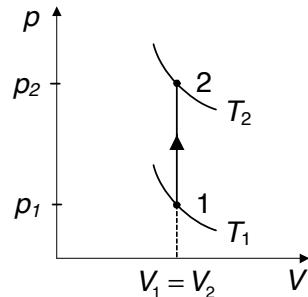
Eingesetzt in die Gleichung der reversiblen Volumenänderungsarbeit:

$$W_{v12rev} = -m R_i T \int_1^2 \frac{dV}{V}$$

Durch Integration findet man:

$$W_{v12rev} = -m R_i T \ln \frac{V_2}{V_1} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Lösung 4.2: Isochore Zustandsänderung.



Die Gasgleichungen für die Zustände lauten:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= m R_i T_1 \\ p_2 V_2 &= m R_i T_2 \end{aligned}$$

Durch Division sowie mit $V_1 = V_2$ erhält man:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

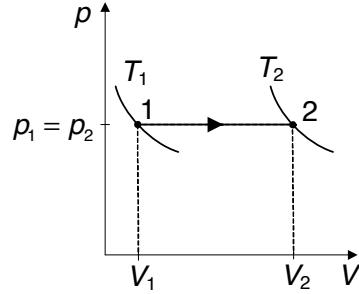
Daraus folgt für die Temperatur T_2 :

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}$$

Für die reversible Volumenänderungsarbeit W_{v12rev} erhält man:

$W_{v12rev} = 0$ da es sich um eine isochore Zustandsänderung, d.h. $dV = 0$, handelt

Lösung 4.3: Isobare Zustandsänderung.



Die Gasgleichungen für die Zustände lauten:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= m R_i T_1 \\ p_2 V_2 &= m R_i T_2 \end{aligned}$$

Durch Division sowie mit $p_1 = p_2$ erhält man:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Daraus folgt für die Temperatur T_2 :

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}$$

Für die reversible Volumenänderungsarbeit $W_{v\,12\,rev}$ erhält man:

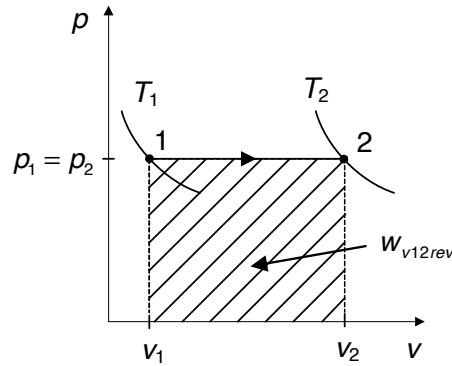
$$W_{v\,12\,rev} = -p(V_2 - V_1)$$

Lösung 4.4: Volumenänderungsarbeit.

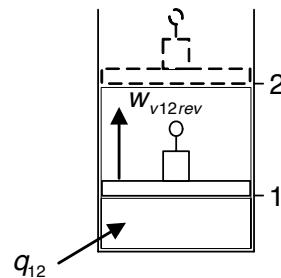
a. Die Gleichung für die Berechnung der spezifischen Volumänderungsarbeit w_{v12rev} lautet:

$$w_{v12rev} = - \int_1^2 p \, dv$$

b.



c.



d. *Hinweis:* Aufgabe zum 1. Hauptsatz erst später lösen!

Der 1. HS für dieses geschlossene System lautet:

$$w_{v12rev} + q_{12} = u_2 - u_1$$

Aufgelöst nach der spezifischen Volumänderungsarbeit w_{v12rev} :

$$w_{v12rev} = -R_i(T_2 - T_1) = -p(v_2 - v_1)$$

Die spezifische Volumänderungsarbeit w_{v12rev} ist negativ. w_{v12rev} erhält man natürlich auch direkt aus der Grundformel für die spezifische Volumänderungsarbeit.

Lösung 4.5: Gewichtsbelasteter Kolben. Durch den gewichtsbelasteten Kolben bleibt der Druck konstant. Die Berechnung erfolgt nach dem Gesetz der Isobare.

Das Volumen im Zustand 2 ist

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 0.3251 \text{ m}^3$$

Der Kolbenweg beträgt

$$\begin{aligned} A(l_2 - l_1) &= V_2 - V_1 \\ \Delta l &= \frac{V_2 - V_1}{A} = 0.64 \text{ m} \end{aligned}$$

Der Überdruck ist

$$\Delta p_{\ddot{U}} = p - p_U = 1 \text{ bar(g)}$$

Die auf den Kolben wirkende Kraft beträgt

$$F = \Delta p_{\ddot{U}} A = 19'600 \text{ N}$$

Die Kolbenbelastung ist dann

$$m_{La} = \frac{F}{g} = 2'000 \text{ kg}$$

Die abgegebene reversible Volumenänderungsarbeit ist somit

$$W_{v12\,rev} = -p(V_2 - V_1) = -25'020 \text{ J}$$

Lösung 4.6: Durch Wärmezufuhr einen Kolben heben.

- a. Arbeit des Gases A = Ausschiebearbeit

$$W_{\text{Ausschiebe}} = -F \Delta z = -p A \Delta z = - \left(p_U + \frac{m g + F}{A} \right) A \Delta z = -200 \text{ J}$$

- b. Resultierende Kolbenarbeit:

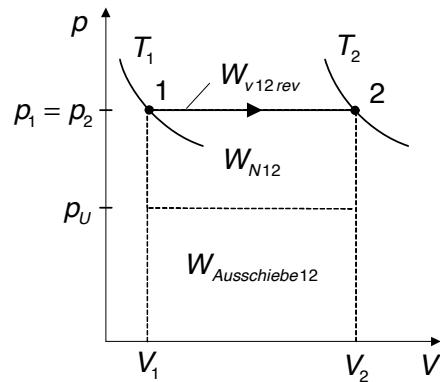
$$W_{N12} = \int_1^2 dW = W_{v12} - W_{U12} = - \int_1^2 (p - p_U) dV = - \int_1^2 (p - p_U) A dz = -100 \text{ J}$$

- c. Endtemperatur des Gases:

Für eine isobare Zustandsänderung ist:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 600 \text{ K}$$

- d. p, V -Diagramm



Lösung 4.7: Gas expandieren.

- a. Reversible Volumenänderungsarbeit für eine isotherme Zustandsänderung:

$$W_{v12\text{rev}} = - \int_1^2 p \, dV = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -161 \text{ J}$$

- b. Gegendruckarbeit am Atmosphärendruck

$$W_{GD12} = p_U (V_2 - V_1) = 400 \text{ J}$$

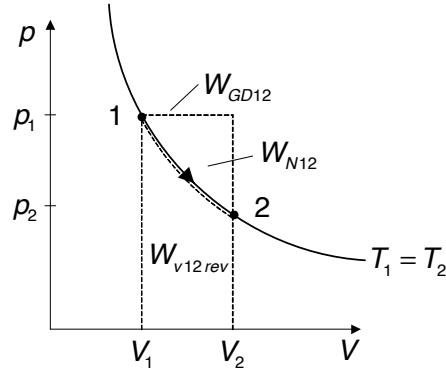
- c. Nutzarbeit des Kolbens:

Die Nutzarbeit setzt sich aus der Verschiebearbeit und der Gegendruckarbeit zusammen.

$$W_{N12} = W_{v12\text{rev}} + W_{GD12} = 239 \text{ J}$$

Die Nutzarbeit ist positiv! Für die Expansion muss Arbeit zugeführt werden. → Innendruck ist kleiner als der Umgebungsdruck.

- d. p, V -Diagramm



Lösung 4.8: Zweifach beaufschlagter Kolben.

- a. Endtemperatur CO₂

Für ein ideales Gas gilt allgemein:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Der Druck im Zustand 1 berechnet sich aus dem Umgebungsdruck und dem hydrostatischen Druck des Öls:

$$p_1 = p_U + \frac{\rho_{Oel} g A z_{Oel}}{A} = p_U + \rho_{Oel} g z_{Oel}$$

Der Druck im Zustand 2 ist gleich dem Umgebungsdruck:

$$p_2 = p_U$$

und das Volumen V_2

$$V_2 = A(z_{Oel} + z_1)$$

Die Gasgleichung umgeformt nach T_2 :

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} \frac{V_2}{V_1}$$

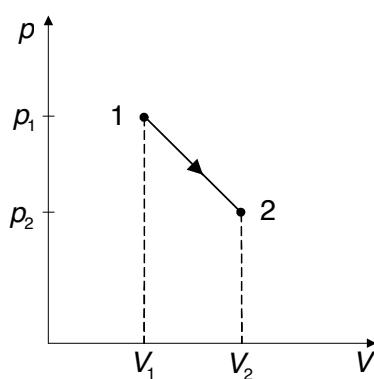
Die Gleichungen für p_1 , p_2 , und V_2 einsetzen:

$$T_2 = \frac{T_1 p_U A (z_{Oel} + z_1)}{(p_U + \rho_{Oel} g z_{Oel}) z_1 A} = \frac{T_1 p_U (z_{Oel} + z_1)}{(p_U + \rho_{Oel} g z_{Oel}) z_1} = 753 \text{ K}$$

- b. Volumenänderungsarbeit von CO₂

$$W_{v12} = - \int_1^2 p dV = - \left[p_U (V_2 - V_1) + \rho_{Oel} g z_{Oel} \frac{V_2 - V_1}{2} \right] = -681 \text{ kJ}$$

- c. p, V -Diagramm



Lösung 4.9: Isotherme Expansion in einem offenen System. Für die spezifische reversible Druckänderungsarbeit w_{p12rev} einer isothermen Expansion in einem offenen System gilt:

$$w_{p12rev} = p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

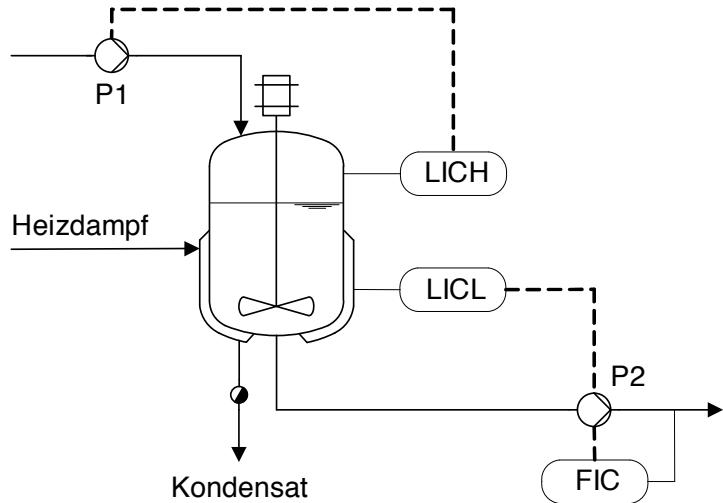
Das Produkt $p_1 v_1$ kann mit Hilfe der Gasgleichung ersetzt werden durch:

$$p_1 v_1 = R_L T_1$$

Daraus folgt schlussendlich für die isotherme Druckänderungsarbeit ($T_1 = T_2 = T$):

$$w_{p12rev} = R_L T \ln \frac{p_2}{p_1} = -198.35 \text{ kJ/kg}$$

Lösung 5.1: Befüllen eines Rührkessels.



Massenbilanz:

$$\frac{dm}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} - \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega}$$

$$\frac{d}{dt} (\rho V) = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \rho \dot{V}_1 - \rho \dot{V}_2$$

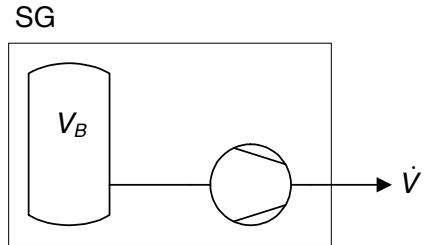
$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}_1 - \dot{V}_2$$

$$\int_{V_{\alpha}}^{V_{\omega}} dV = \int_0^t (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) dt$$

$$V_{\omega} - V_{\alpha} = (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) t$$

$$t = \frac{V_{\omega} - V_{\alpha}}{\dot{V}_1 - \dot{V}_2} = 4.15 \text{ h}$$

Lösung 5.2: Evakuieren eines Behälters.



a. Massenbilanz:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} - \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} \\ \frac{d}{dt} (\rho V_B) &= -\dot{m} = -\dot{V} \rho \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{\dot{V}}{V_B} dt \\ \ln \frac{\rho}{\rho_0} &= -\frac{\dot{V}}{V_B} t \\ \rho(t) &= \rho_0 e^{-\frac{\dot{V}}{V_B} t} \end{aligned}$$

b. Dichte halbiert:

$$t = -\frac{V_B}{\dot{V}} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = 139 \text{ s} \quad \left(\frac{\rho}{\rho_0} = 0.5 \right)$$

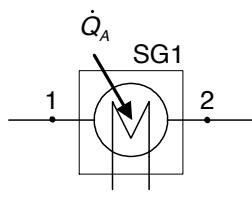
Lösung 5.3: Heizsystem mit flüssiger Salzlösung.

Allgemeiner Ansatz für die Energiebilanz:

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \left(h_{\alpha} + \frac{c_{\alpha}^2}{2} + g z_{\alpha} \right) = \sum_{\omega} P_{\omega} + \sum_{\omega} \dot{Q}_{\omega} + \sum_{\omega} \dot{m}_{\omega} \left(h_{\omega} + \frac{c_{\omega}^2}{2} + g z_{\omega} \right)$$

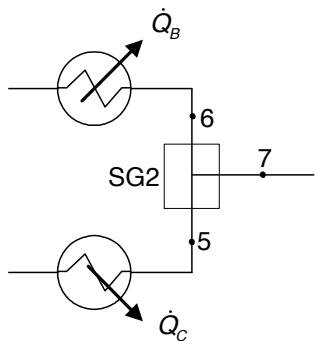
Für die folgenden Bilanzen können die kinetischen und potentiellen Energien der Fluidströme vernachlässigt werden.

Ölfeuerung:



$$\begin{aligned}\dot{Q}_A + \dot{m}_1 h_1 &= \dot{m}_2 h_2 \\ \dot{m}_1 &= \dot{m}_2 = \dot{m} \\ \dot{Q}_A &= \dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{m} c_p (\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ \vartheta_1 &= \vartheta_2 - \frac{\dot{Q}_A}{\dot{m} c_p} = 150^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Mischstelle:



$$\begin{aligned}\dot{m}_6 h_6 + \dot{m}_5 h_5 &= \dot{m}_7 h_7 \\ \dot{m}_6 c_p \vartheta_6 + \dot{m}_5 c_p \vartheta_5 &= \dot{m}_7 c_p \vartheta_7 \quad / : c_p \\ \dot{m}_6 \vartheta_6 + \dot{m}_5 \vartheta_5 &= \dot{m}_7 \vartheta_7 \\ \vartheta_6 &= \frac{\dot{m}_7 \vartheta_7 - \dot{m}_5 \vartheta_5}{\dot{m}_6} = 100^\circ\text{C}\end{aligned}$$

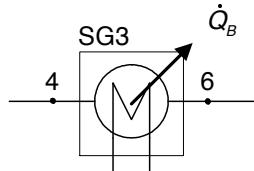
Wärmeströme \dot{Q}_B und \dot{Q}_C

$$\dot{m}_4 h_4 = \dot{Q}_B + \dot{m}_6 h_6$$

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_6$$

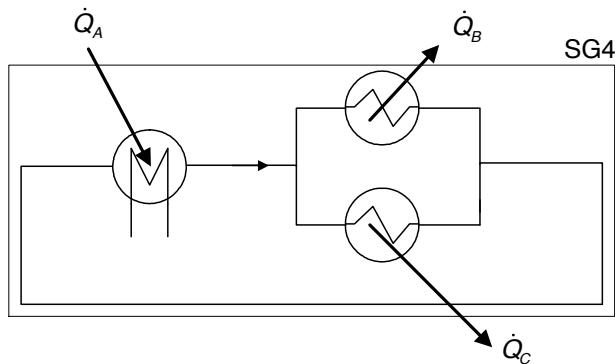
$$\dot{Q}_B = \dot{m}_4 (h_6 - h_4)$$

$$\dot{Q}_B = \dot{m}_4 c_p (\vartheta_6 - \vartheta_4) = -30 \text{ MW}$$



Wärmeübertrager C analog:

$$\dot{Q}_C = \dot{m}_3 c_p (\vartheta_5 - \vartheta_3) = -10 \text{ MW}$$

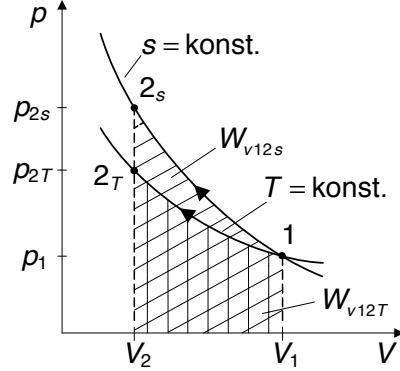


Kontrolle: Energiebilanz um Gesamtsystem

Tabelle:

Punkte	1	2	3	4	5	6	7
ϑ [°C]	150	250	250	250	200	100	150
\dot{m} [kg/s]	100	100	50	50	50	50	100

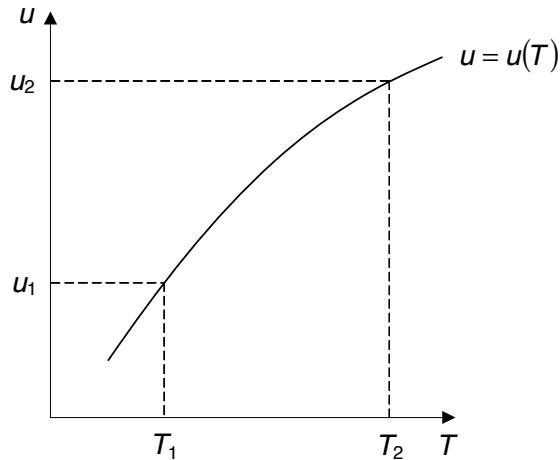
Lösung 6.1: Verdichtung von idealem Gas.



Die Volumenänderungsarbeit der isentropen Verdichtung ist grösser, weil die Fläche unter der Isentropen grösser als bei der Isothermen ist.

Lösung 6.2: Innere Energie von idealem Gas.

a.



Die spezifische innere Energie u hängt von der Temperatur aber nicht vom Druck ab.

- b. Die Beziehung zwischen der spezifischen inneren Energie u und der spezifischen Enthalpie h lautet:

$$h = u + p v$$

Lösung 6.3: Ideales Gas unterschiedlich erwärmen.

Der 1. HS für dieses System lautet:

$$W_{v12\text{rev}} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

Für die isobare Zustandsänderung gilt:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= U_2 - U_1 - W_{v12\text{rev}} = m c_v (T_2 - T_1) + \underbrace{p(V_2 - V_1)}_{R_i(T_2 - T_1)} \\ Q_{12} &= m(c_v + R_i)(T_2 - T_1) = m c_p (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

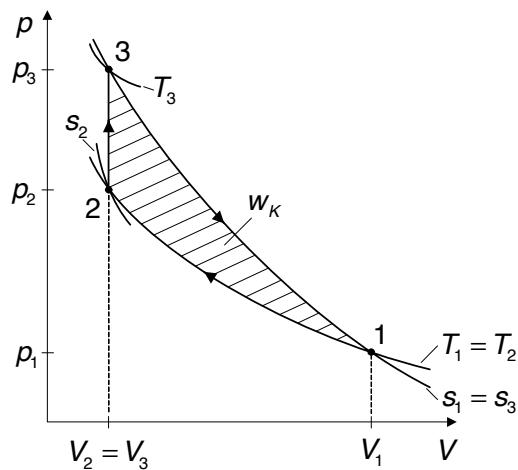
Bei der isochoren Zustandsänderung ist $W_{v12\text{rev}} = 0$ und für die Wärmeenergie Q_{12} gilt:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1)$$

Die Wärmeenergie ist für die isobare Zustandsänderung grösser, weil $c_p > c_v$ ist.

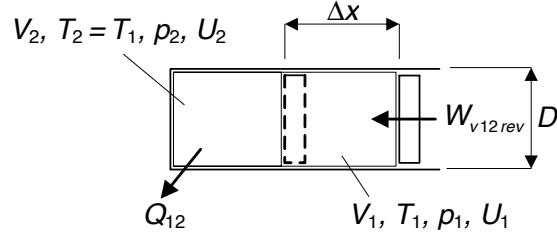
Lösung 6.4: System mit 3 Teilprozessen.

a.



b. Die Netto-Arbeit w_K ist negativ.

Lösung 6.5: Isotherme Verdichtung.



- a. Reversible Volumenänderungsarbeit für eine isotherme Zustandsänderung

$$V_2 = V_1 - \frac{\pi}{4} D^2 \Delta x; \quad p_2 = p_1 \frac{V_2}{V_1}; \quad W_{v12,rev} = - \int_1^2 p \, dV = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 62.3 \text{ kJ}$$

$$w_{v12,rev} = \frac{W_{v12,rev}}{m} = -R_L T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 7.0 \text{ kJ/kg}$$

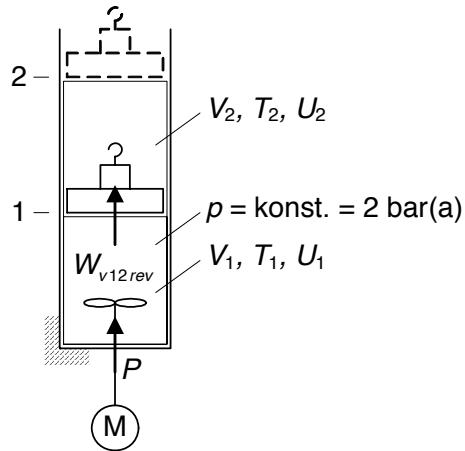
- b. 1. HS für reversible isotherme Verdichtung

$$W_{v12,rev} + Q_{12} = U_2 - U_1 = 0$$

$$Q_{12} = -W_{v12,rev} = -62.3 \text{ kJ}$$

- c. Bei einer isothermen Zustandsänderung bleibt die innere Energie konstant

$$U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1) = 0$$

Lösung 6.6: Rührwerk.

a. Rührerarbeit

$$W_{R12} = P \Delta t = 81 \text{ kJ}$$

$$w_{R12} = \frac{W_{R12}}{m} = P \Delta t \frac{R_{N2} T_1}{p V_1} = 58.7 \text{ kJ/kg}$$

b. Isobare Zustandsänderung

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 0.72 \text{ m}^3$$

c. Reversible Volumenänderungsarbeit für eine isobare Volumenänderung

$$W_{v12rev} = - \int_1^2 p dV = -p (V_2 - V_1) = -25 \text{ kJ}$$

$$w_{v12rev} = \frac{W_{v12rev}}{m} = -\frac{V_2 - V_1}{V_1} R_{N2} T_1 = -18.12 \text{ kJ/kg}$$

d. Der 1. HS für dieses geschlossene System lautet:

$$W_{v12rev} + W_{R12} + \underbrace{Q_{12}}_{=0} = U_2 - U_1$$

$$-25 \text{ kJ} + 81 \text{ kJ} = U_2 - U_1$$

$$U_2 - U_1 = 56.0 \text{ kJ}$$

$$u_2 - u_1 = 40.6 \text{ kJ/kg}$$

Die zugeführte Rührerarbeit wird a) als (reversible) Volumenänderungsarbeit abgeführt und geht b) in die Erhöhung der inneren Energie.

Lösung 6.7: Rührkessel mit adiabater Systemgrenze.

1. HS für geschlossene Systeme:

$$W_{12} + \underbrace{Q_{12}}_{0, \text{ da adiabat}} = U_2 - U_1$$

Es treten zwei Arbeiten über die Systemgrenze ($W_{12} = W_{v12rev} + W_{R12}$)

a. Reversible Volumenänderungsarbeit für isobare Zustandsänderung:

$$W_{v12rev} = - \int_1^2 p dV = -p(V_2 - V_1)$$

Für $p_1 = p_2$ ist:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Somit folgt für die abgeföhrte reversible Volumenänderungsarbeit W_{v12rev} :

$$W_{v12rev} = -p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = -40 \text{ kJ}$$

b. Änderung der inneren Energie

Aus dem 1. HS

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

folgt:

$$U_2 - U_1 = W_{12} = W_{v12rev} + W_{R12} = 140 \text{ kJ}$$

c. Verschiebearbeit

$$W_{U12} = - \int_1^2 p_U dV = -p_U (V_2 - V_1) = -9.5 \text{ kJ}$$

d. Nutzarbeit

$$W_{N12} = W_{v12rev} - W_{U12} = -30.5 \text{ kJ}$$

Lösung 6.8: Rührkessel mit wärmedurchlässiger Systemgrenze.

1. HS für geschlossene Systeme:

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

Es treten zwei Arbeiten über die Systemgrenze ($W_{12} = W_{v12\text{rev}} + W_{R12}$)

a. Reversible Volumenänderungsarbeit für isobare Zustandsänderung:

$$W_{v12\text{rev}} = - \int_1^2 p \, dV = -p(V_2 - V_1)$$

Für $p_1 = p_2$ folgt:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Somit folgt für die abgeföhrte reversible Volumenänderungsarbeit $W_{v12\text{rev}}$:

$$W_{v12\text{rev}} = -p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = -60.0 \text{ kJ}$$

b. Abgegebene Wärme

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{v12\text{rev}} + W_{R12} = 0.4 \cdot W_{R12}$$

Mit:

$$U_2 - U_1 = 0.4 \cdot W_{R12}$$

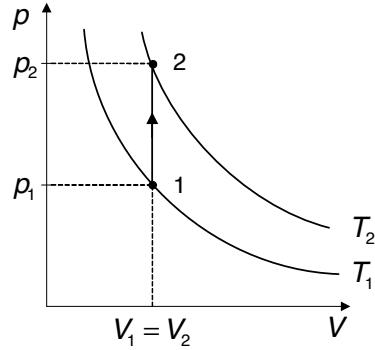
folgt für Q_{12} :

$$Q_{12} = 0.4 \cdot W_{R12} - W_{v12\text{rev}} - W_{R12} = -48.0 \text{ kJ}$$

Lösung 6.9: Zylinder/Kolben-System mit elektrischer Heizung.

a. p, V -Diagramm

Isochorer Prozess ($V_1 = V_2$)



b. Die innere Energie wird aus dem 1. HS berechnet

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

Für Q_{12} gilt:

$$Q_{12} = U_{el} I_{el} \Delta t = 9.4 \text{ kJ}$$

Und für W_{12} gilt:

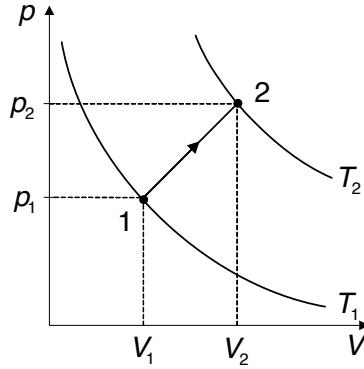
$$W_{12} = W_{v12\ rev} = 0, \quad \text{da } V = \text{konst.}$$

Somit folgt für die Änderung der inneren Energie:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} = 9.4 \text{ kJ}$$

Lösung 6.10: Zylinder/Kolben-System mit elektrischer Heizung und Feder.

a. p, V -Diagramm



b. 1. HS für geschlossene Systeme:

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

Für die Berechnung der Volumenänderungsarbeit gilt allgemein:

$$W_{v12\,rev} = - \int_1^2 p \, dV = - \int_1^2 p \, A \, dx$$

Dabei gilt für $p \, A$:

$$p_i \, A = p_U \, A + F_{Feder} \quad F_{Feder} = C \, x$$

Für die Zustände 1 und 2 gilt:

- Zustand 1

$$V = V_1$$

$$p = p_1 = p_U$$

- Zustand 2

$$V = V_2 = 2 \cdot V_1$$

$$p = p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Somit gilt für $p_1 \, A$ und $p_2 \, A$:

$$p_1 \, A = p_U \, A + C \, x_1 \quad (x_1 = 0)$$

$$p_2 \, A = p_U \, A + C \, x_2 \quad (x_2 = x_1 + \Delta x) \quad C = \frac{(p_2 - p_U) \, A}{\Delta x}$$

Daraus folgt die Beziehung für $p \, A$:

$$p \, A = p_U \, A + \frac{(p_2 - p_U) \, A}{\Delta x} \, x$$

Die Volumenänderungsarbeit lässt sich jetzt wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 W_{v12rev} &= - \int_1^2 p A dx \\
 W_{v12rev} &= - \int_1^2 \left[p_U A + \frac{(p_2 - p_U) A}{\Delta x} x \right] dx \\
 W_{v12rev} &= -p_U A (x_2 - x_1) - \frac{(p_2 - p_U) A}{\Delta x} \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = -p_U A \Delta x - (p_2 - p_U) A \frac{x_2 + x_1}{2} \\
 W_{v12rev} &= -p_U A \Delta x - \frac{p_2}{2} A \Delta x + \frac{p_U}{2} A \Delta x = -\frac{p_U}{2} A \Delta x - \frac{p_2}{2} A \Delta x \\
 W_{v12rev} &= -\frac{A \Delta x}{2} (p_U + p_2) \quad (A \Delta x = V_2 - V_1) \\
 W_{v12rev} &= -(V_2 - V_1) \frac{p_1 + p_2}{2} = -3 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

c. Aufteilung der Volumenänderungsarbeit

Die Volumenänderungsarbeit setzt sich zusammen aus:

$$W_{v12rev} = W_{N12} - W_{GD12}$$

Der Anteil der Gegendruckarbeit W_{GD12} berechnet sich mit:

$$W_{GD12} = p_U (V_2 - V_1) = 2 \text{ kJ}$$

Für die Nutzarbeit W_{N12} gilt somit (in Feder gespeichert):

$$W_{N12} = W_{v12rev} + W_{GD12} = -1 \text{ kJ}$$

d. Änderung der inneren Energie

Aus dem 1. HS folgt für die Änderung der inneren Energie mit $Q_{12} = 9.4 \text{ kJ}$ aus Übung 6.9:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} = Q_{12} + W_{v12rev} = 6.4 \text{ kJ}$$

e. Aufteilung der zugeführten Wärme

$$\begin{aligned}
 \frac{|W_{v12rev}|}{Q_{12}} &= 0.321 \\
 \frac{U_2 - U_1}{Q_{12}} &= 0.679
 \end{aligned}$$

Lösung 6.11: Durch Wärmeabfuhr einen Kolben senken.

1. HS für geschlossene Systeme:

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

Umgestellt nach der abgegebenen Wärmeenergie Q_{12} :

$$Q_{12} = U_2 - U_1 - W_{12}$$

Für eine isobare Zustandsänderung berechnet sich die Wärmeenergie:

$$Q_{12} = m c_v (T_2 - T_1) + p (V_2 - V_1)$$

Aus der Gasgleichung lässt sich die Masse berechnen:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= m R_L T_1 \\ m &= \frac{p_1 V_1}{R_L T_1} = 0.233 \text{ kg} \end{aligned}$$

Die Gaskonstante für Luft R_L ist 287 J/kg K.

V_2 berechnet sich mit der isobaren Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{V_1}{V_2} \\ V_2 &= V_1 \frac{T_2}{T_1} = 0.076 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung der Wärmeenergie mit $c_v = 717 \text{ J/kg K}$:

$$Q_{12} = -21.09 \text{ kJ}$$

Lösung 6.12: Luft reversibel entspannen.

1. HS für geschlossene Systeme:

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

a. Der Polytropenexponent n berechnet sich mit:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} = 1.2$$

b. Spezifische Arbeit, die das System abgibt:

$$w_{v12} = - \int_1^2 p \, dv = \frac{R_L}{n-1} (T_2 - T_1) = -212.4 \text{ kJ/kg}$$

c. Ausgetauschte Wärme:

$$q_{12} = u_2 - u_1 - w_{v12} = c_v (T_2 - T_1) - \frac{R_L}{n-1} (T_2 - T_1) = \left(c_v - \frac{R_L}{n-1} \right) (T_2 - T_1)$$

Für die Gaskonstante von Luft R_L gilt:

$$c_v (\kappa - 1) = R_L$$

Eingesetzt in die Gleichung für die ausgetauschte Wärme:

$$\begin{aligned} q_{12} &= \left(c_v - \frac{c_v \kappa - c_v}{n-1} \right) (T_2 - T_1) \\ q_{12} &= c_v \left(1 - \frac{\kappa - 1}{n-1} \right) (T_2 - T_1) = c_v \left(\frac{n-\kappa}{n-1} \right) (T_2 - T_1) = 106.1 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Lösung 6.13: Luft komprimieren und expandieren.

1. HS für geschlossene Systeme:

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

oder spezifisch:

$$w_{12} + q_{12} = u_2 - u_1$$

a. Berechnung der Endtemperaturen T_2

Für die Berechnung der Endtemperatur T_2 eines reversiblen, isentropen Prozesses bei bekannter Anfangstemperatur und bekanntem Volumenverhältnis gilt:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}$$

Dabei gilt für den Isentropenexponent κ :

$$\kappa = 1.4$$

Die Zahlenwerte der resultierenden Endtemperaturen in Abhängigkeit der Endvolumen sind in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

Für die Endtemperaturen T_2 eines reversiblen, isothermen Prozesses gilt:

$$T_1 = T_2 = T = 300 \text{ K}$$

Berechnung der spezifischen Volumenänderungsarbeiten

Ein isentroper Prozess verläuft adiabat. Somit folgt aus dem 1. HS für das ruhende geschlossene System:

$$w_{v12s} = u_2 - u_1 \quad \text{da} \quad q_{12} = 0$$

Dabei gilt für die Änderung der spezifischen inneren Energie:

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

Durch Einsetzen der obigen Gleichung zur Berechnung der Endtemperatur T_2 folgt:

$$w_{v12s} = c_v (T_2 - T_1) = c_v T_1 \left[\frac{T_2}{T_1} - 1 \right] = c_v T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

Mit:

$$c_v = \frac{R_L}{\kappa - 1}$$

folgt weiter:

$$w_{v12s} = \frac{R_L T_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

Für die Berechnung der spezifischen Volumenänderungsarbeit eines isothermen Prozesses gilt:

$$w_{v12T} = -R_L T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Die Zahlenwerte der spezifischen Volumenänderungsarbeiten und die Werte für das Verhältnis der spezifischen Volumenänderungsarbeit sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

b. Ergebnisse der verschiedenen Prozesse:

Zustand	V_2 [m ³]	T_2 [K]	w_{v12s} [kJ/kg]	w_{v12T} [kJ/kg]	γ [-]
0 (Grundzustand)	0.1	300	-	-	-
1	0.01	753.6	325.7	198.4	1.6
2	0.001	1892.9	1143.7	396.8	2.9
3	1	119.4	-129.7	-198.4	0.65
4	10	47.5	-181.3	-396.8	0.46

Lösung 6.14: Zustandsänderung eines perfekten Gases.

Der 1. HS lautet:

$$\underbrace{w_{t12}}_0 + \underbrace{q_{12}}_{0, \text{ da adiabat}} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \underbrace{(c_2^2 - c_1^2)}_{0, \text{ da } c_1 \approx c_2} + g \underbrace{(z_2 - z_1)}_{0, \text{ da } z_1 \approx z_2}$$

Somit bleibt:

$$h_1 = h_2$$

Für ein perfektes Gas ist $c_p = \text{konst.}$:

$$c_p T_1 = c_p T_2$$

Daraus folgt:

$$T_1 = T_2$$

Lösung 6.15: Das ideale Gas.

- a. Die spezifische innere Energie und spezifische Enthalpie sind abhängig von der Temperatur, aber nicht vom Druck.
- b.

$$h = u + p v$$

Lösung 6.16: 1. HS für offene Systeme.

Der 1. HS für offene Systeme lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1)$$

w_{t12}	technische Arbeit
q_{12}	spezifische Wärme
$h_2 - h_1$	Änderung der spezifischen Enthalpie
$\frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2)$	Änderung der kinetischen Energie
$g (z_2 - z_1)$	Änderung der potentiellen Energie

Die technische Arbeit berechnet sich mit:

$$w_{t12} = \int_1^2 v dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1) + j_{12}$$

Für ein perfektes Gas gilt für die Änderung der spezifischen Enthalpie:

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

Lösung 6.17: Isentrope Zustandsänderung.

- a. Die Gasgleichung lautet:

$$p v = R_i T$$

- b. Für eine isentrope Zustandsänderung ist:

$$p v^\kappa = \text{konst.}$$

- c. 1. Aus der Gasgleichung erhält man:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{v_2}{v_1}$$

und aus der Beziehung einer isentropen Zustandsänderung:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa$$

Ersetzt man das Druckverhältnis in der Gasgleichung, folgt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa = \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{-\kappa} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{1-\kappa} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1}$$

2. Aus der Beziehung einer isentropen Zustandsänderung folgt:

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\kappa}}$$

Ersetzt man das spezifische Volumenverhältnis in der Gasgleichung, erhält man:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Lösung 6.18: Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität eines Gases.

- a. Der 1. HS in seiner allgemeinen Form lautet:

$$P_{12} + \dot{Q}_{12} = \dot{m} \left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1) \right]$$

- b. $\dot{Q}_{12} = 0$, da kein Wärmestrom zu- bzw. abgeführt wird.

$$\frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) = 0, \quad \text{da } c_1 \approx c_2$$

$$g (z_2 - z_1) = 0, \quad \text{da } z_1 \approx z_2$$

- c. Aus dem 1. HS folgt für ein ideales Gas:

$$P_{12} = \dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{m} c_p (T_2 - T_1)$$

Aufgelöst nach der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p :

$$c_p = \frac{P_{12}}{\dot{m} (T_2 - T_1)}$$

wobei für die Leistung folgender Zusammenhang gilt:

$$P_{12} = P_{el} = U I$$

Für die Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität müssen die Eintritts- und die Austrittstemperatur (T_1 und T_2), der Massenstrom \dot{m} , die Spannung U und der elektrische Strom I erfasst werden.

Lösung 6.19: Turboverdichter.

a. Die Temperatur T_1 wird mit der Gasgleichung bestimmt:

$$\frac{p_1 \dot{V}_1}{T_1} = \frac{p_2 \dot{V}_2}{T_2}$$

Aufgelöst nach der Temperatur:

$$T_1 = T_2 \frac{p_1}{p_2} \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = 300 \text{ K}, \quad \vartheta_1 = 27^\circ\text{C}$$

b. Der Durchmesser des Ansaugstutzens berechnet sich aus dem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= A_1 c_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} c_1 \\ d_1 &= \sqrt{\frac{4 \dot{V}_1}{\pi c_1}} = 0.130 \text{ m} \end{aligned}$$

Lösung 6.20: Zweistufige Kompression von Luft.

Für die Lösung dieser Aufgaben werden die nachfolgenden Stoffdaten verwendet:
 $c_p = 1004 \text{ J/kgK}$; $R_L = 287 \text{ J/kgK}$; $\kappa = 1.4$ (Unter Vernachlässigung der Änderung von e_{kin} und e_{pot})

Der Massenstrom lässt sich mit der Gasgleichung berechnen:

$$\dot{m} = \frac{p_1 \dot{V}_1}{R_L T_1} = 0.403 \text{ kg/s}$$

a. Verdichtung bei konstanter Temperatur

Der 1. HS lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1$$

Mit $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 0$ folgt:

$$w_{t12} = -q_{12}$$

Dabei gilt für $w_{t12} = w_{p12} + j_{12}$. Die Verdichtung ist reversibel, somit ist $j_{12} = 0$.

Technische Arbeit:

$$w_{t12} = w_{p12} = \int_1^2 v \, dp = R_L T_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$w_{t23} = w_{p23} = \int_2^3 v \, dp = R_L T_2 \ln \frac{p_3}{p_2}$$

Leistung:

$$P_{12} = \dot{m} w_{t12} = \dot{m} R_L T_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = 76.74 \text{ kW}$$

$$P_{23} = \dot{m} w_{t23} = \dot{m} R_L T_2 \ln \frac{p_3}{p_2} = 76.74 \text{ kW}$$

Wärmestrom:

$$w_{t12} + q_{12} = 0 \rightarrow \dot{Q} = -P$$

$$\dot{Q}_{12} = -P_{12} = -76.74 \text{ kW}$$

$$\dot{Q}_{23} = -P_{23} = -76.74 \text{ kW}$$

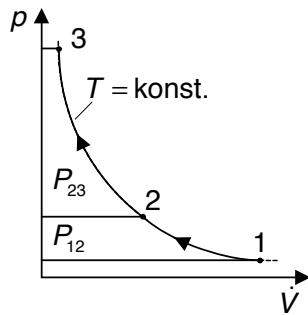
Änderung der spezifischen Enthalpie und der spezifischen inneren Energie:

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 0$$

$$h_2 - h_1 = 0 \quad u_2 - u_1 = 0$$

$$h_3 - h_2 = 0 \quad u_2 - u_1 = 0$$

Darstellung im p, \dot{V} -Diagramm (isotherme Verdichtung):



- b. Verdichtung in einem adiabaten Kompressor

Der 1. HS lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1$$

Mit $q_{12} = 0$, da adiabate Verdichtung, folgt aus dem 1. HS:

$$w_{t12} = h_2 - h_1$$

Für w_{t12} gilt auch:

$$w_{t12} = w_{p12} + j_{12}$$

Weil die Verdichtung reversibel erfolgt, ist die Dissipation $j_{12} = 0$.

Technische Arbeit:

$$w_{t12} = w_{p12} = c_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]$$

$$w_{t23} = w_{p23} = c_p T_2 \left[\left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]$$

Mit:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 556.33 \text{ K}$$

Leistung:

$$P_{12} = \dot{m} w_{t12} = 108.53 \text{ kW}$$

$$P_{23} = \dot{m} w_{t23} = 209.53 \text{ kW}$$

Wärmestrom: adiabat $\rightarrow q_{12} = 0$

$$\dot{Q}_{12} = 0$$

$$\dot{Q}_{23} = 0$$

Änderung der spezifischen Enthalpie und der spezifischen inneren Energie:

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 269.25 \text{ kJ/kg}$$

$$h_3 - h_2 = c_p (T_3 - T_2) = 519.85 \text{ kJ/kg}$$

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) = 192.28 \text{ kJ/kg}$$

$$u_3 - u_2 = c_v (T_3 - T_2) = 371.25 \text{ kJ/kg}$$

Darstellung im p, \dot{V} -Diagramm (isentrope Verdichtung):

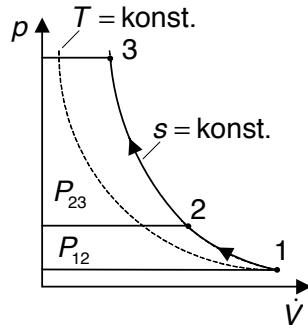
- c. In einem nicht-adiabaten Kompressor mit dem Polytropenexponent $n = 1.2$

Der 1. HS lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1$$

Für w_{t12} gilt auch:

$$w_{t12} = w_{p12} + j_{12}$$



Weil die Verdichtung reversibel erfolgt, ist die Dissipation $j_{12} = 0$.

Technische Arbeit:

$$w_{t12} = w_{p12} = \frac{n}{n-1} R_L T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

$$w_{t23} = w_{p23} = \frac{n}{n-1} R_L T_2 \left[\left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

Mit:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 422.95 \text{ K}$$

Leistung:

$$P_{12} = \dot{m} w_{t12} = 93.54 \text{ kW}$$

$$P_{23} = \dot{m} w_{t23} = 137.31 \text{ kW}$$

Wärmestrom:

Aus dem 1. HS folgt für q_{12} :

$$q_{12} = (h_2 - h_1) - w_{t12} = c_p (T_2 - T_1) - w_{t12}$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) - P_{12} = -39.10 \text{ kW}$$

$$\dot{Q}_{23} = \dot{m} c_p (T_3 - T_2) - P_{23} = -57.23 \text{ kW}$$

Mit:

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 620.81 \text{ K}$$

Änderung der spezifischen Enthalpie und der spezifischen inneren Energie:

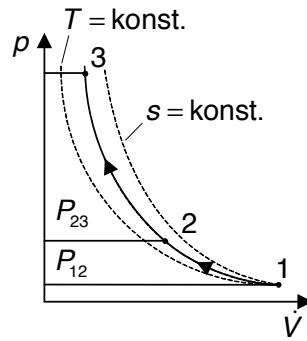
$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 135.11 \text{ kJ/kg}$$

$$h_3 - h_2 = c_p (T_3 - T_2) = 198.54 \text{ kJ/kg}$$

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) = 96.49 \text{ kJ/kg}$$

$$u_3 - u_2 = c_v (T_3 - T_2) = 141.79 \text{ kJ/kg}$$

Darstellung im p, \dot{V} -Diagramm (polytropen Verdichtung):



Lösung 6.21: Expansion eines Verbrennungsgases.

Der 1. HS lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

Da die Expansion adiabat verläuft und die Höhendifferenz zwischen Turbineneintritt und -austritt vernachlässigbar klein ist, folgt aus dem 1. HS:

$$w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2)$$

a. Technische Arbeit

Die Dichte des einströmenden Gases kann anhand der Gasgleichung wie folgt hergeleitet werden:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R_V T_1} = 5.283 \text{ kg/m}^3$$

Daraus ergibt sich für den Massenstrom:

$$\dot{m} = \rho_1 \dot{V}_1 = 20.55 \text{ kg/s}$$

Aus dem Massenstrom lässt sich die Geschwindigkeit am Eintritt bestimmen:

$$c_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 A_1} = 194.5 \text{ m/s}$$

Aus dem Druckverhältnis wird die Austrittstemperatur für eine isentrope Zustandsänderung berechnet:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 593.7 \text{ K}$$

Die Dichte des ausströmenden Gases errechnet sich mittels Gasgleichung:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R_V T_2} = 0.587 \text{ kg/m}^3$$

Unter der Voraussetzung der Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung) wird die Geschwindigkeit am Austritt bestimmt:

$$c_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 A_2} = 81.42 \text{ m/s}$$

Mit Hilfe folgender Beziehung ergibt sich die spezifische Wärmekapazität:

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_V = 1132 \text{ J/kg K}$$

Bei der Berechnung der technischen Arbeit muss die Änderung der kinetischen Energie berücksichtigt werden. Somit folgt für w_{t12} :

$$w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) = c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) = -762.1 \text{ kJ/kg}$$

b. Damit resultiert für die abgegebene Wellenleistung:

$$P_{12} = \dot{m} w_{t12} = -15661 \text{ kW}$$

Lösung 6.22: Expansionsmaschine für CO₂-Gas.

Der 1. HS lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1$$

Da die Expansion adiabat erfolgt, vereinfacht sich der 1. HS:

$$w_{t12} = h_2 - h_1$$

a. Die verlustfreie, abgegebene Leistung lässt sich über das Druckverhältnis bestimmen:

$$P_{12} = \dot{m} \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_{CO2} T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = -47.5 \text{ kW}$$

b. Der Eintrittsvolumenstrom berechnet sich mit der Gasgleichung:

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{m} R_{CO2} T_1}{p_1}$$

und der Austrittsvolumenstrom mit:

$$\dot{V}_2 = z \frac{d^2 \pi}{4} x_2 n$$

wobei z für die Anzahl Zylinder und x_2 für die Kolbenposition steht. Der Eintritts- und Austrittsvolumenstrom sind über die Beziehung $p \dot{V}^\kappa = \text{konst.}$ gekoppelt:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Setzt man die hergeleiteten Beziehungen ein und löst nach der Drehzahl auf, erhält man:

$$n = \frac{4 \dot{m} R_{CO2} T_1}{p_1 z x_2 d^2 \pi} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

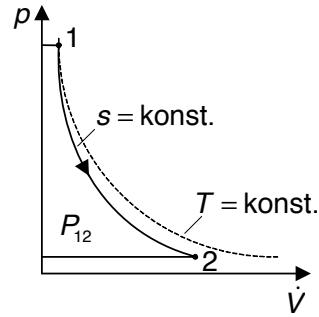
Für 4 Zylinder ergibt sich eine Drehzahl von:

$$n = 110.73 \text{ s}^{-1}$$

- c. Es gilt wiederum die Beziehung $p \dot{V}^\kappa = \text{konst}$. Da sich die Zylinderflächen nicht ändern, sind die Hubhöhen proportional zu den Volumenströmen. Daraus kann die Schliessposition des Einlassventils berechnet werden:

$$x_1 = x_2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 0.033 \text{ m}$$

- d. p, \dot{V} -Diagramm (isentrope Entspannung)



- e. Die Austrittstemperatur kann über das Druckverhältnis berechnet werden:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 279.28 \text{ K}, \quad \vartheta_2 = 6.12^\circ\text{C}$$

Lösung 7.1: Kontrollfragen Kap. 7.

Für jede Frage existiert nur eine korrekte Aussage. Nachfolgend sind die Antworten aufgeführt.

- Die Entropie eines Systems nimmt ab, *wenn das System Wärme abgibt.*
- Energie* kann weder erzeugt noch vernichtet werden.
- In einem *adiabaten System* kann die Entropie niemals abnehmen.

Lösung 7.2: Entspannung in einer Düse.

- Der 1. HS für offene Systeme lautet:

$$\underbrace{q_{12}}_{0, \text{adiabat}} + \underbrace{w_{t12}}_0 = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - \underbrace{c_1^2}_0) + g \underbrace{(z_2 - z_1)}_{0, z_1 \approx z_2}$$

Da es sich um einen grossen Behälter handelt, kann die Anfangsgeschwindigkeit im Behälter $c_1 = 0$ gesetzt werden.

- Aus dem 1. HS erhält man:

$$h_1 - \frac{c_2^2}{2} = h_2$$

Durch Umformen der Gleichung erhält man für ein perfektes Gas:

$$\frac{c_2^2}{2} = h_1 - h_2 = c_p (T_1 - T_2)$$

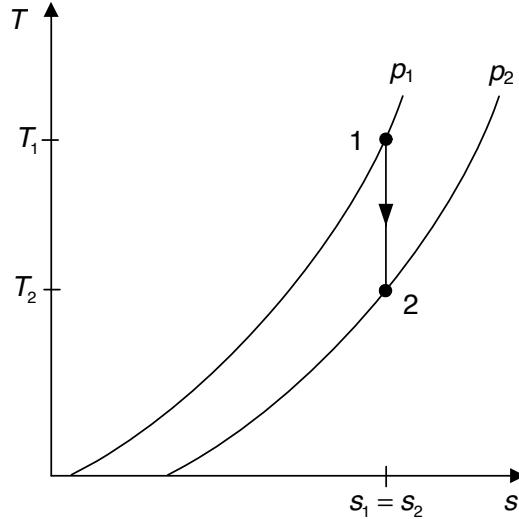
Die gesuchte Temperatur T_2 ist somit:

$$T_2 = T_1 - \frac{c_2^2}{2 c_p}$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, dass die Luft durch die Entspannung abgekühlt wird.

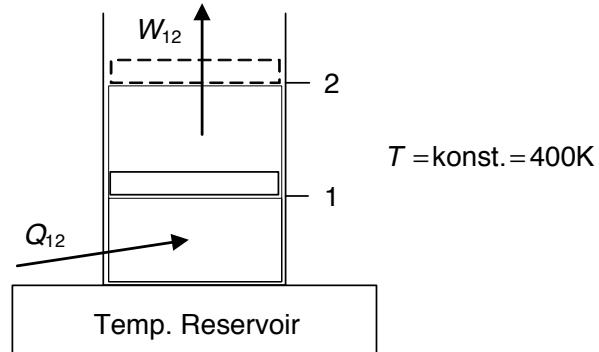
- Es wird keine Energie der Luft dissipiert, d.h. $j_{12} = 0$. Es handelt sich dabei um eine isentrope Zustandsänderung, weil diese adiabat und reversibel erfolgt.

d. Qualitatives T, s -Diagramm für die Entspannung:



Lösung 7.3: Bilanzierung und Entwertung der Energie.

a. Berechnung der Gesamtarbeit W_{12} und der Volumenänderungsarbeit $W_{v12\,rev}$



Der 1. HS für geschlossene Systeme lautet:

$$W_{12} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

Die innere Energie ändert sich nicht, da die Temperatur konstant ist.

$$U_2 - U_1 = m c_v \underbrace{(T_2 - T_1)}_0 = 0$$

Die Gesamtarbeit W_{12} setzt sich aus der reversiblen Volumenänderungsarbeit und der Dissipation zusammen:

$$W_{12} = W_{v12\ rev} + J_{12}$$

Aus dem 1. HS folgt für die Gesamtarbeit W_{12} :

$$W_{12} = -Q_{12} = -11000 \text{ J}$$

Die reversible Volumenänderungsarbeit $W_{v12\ rev}$ ist:

$$W_{v12\ rev} = -Q_{12} - J_{12} = -12000 \text{ J}$$

- b. Entropieänderung des Systems

Die Änderung der Entropie $S_2 - S_1$ kann bei einer isothermen Zustandsänderung wie folgt berechnet werden:

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_{12} + J_{12}}{T} = \frac{+11000 \text{ J} + 1000 \text{ J}}{400 \text{ K}} = 30 \text{ J/K}$$

Die Wärmeenergie wird dem System zugeführt, demnach ist Q_{12} positiv. Die Dissipation J_{12} hat immer einen positiven Wert. Somit nimmt die Entropie zu (positives Vorzeichen).

Lösung 7.4: Erwärmung von Helium.

Der 1. HS für stationäre Fliessprozesse unter Vernachlässigung der Änderung der kinetischen und potentiellen Energie lautet:

$$P_{12} + \dot{Q}_{12} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

Da keine technische Leistung verrichtet wird, folgt für den Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{m}c_p(T_2 - T_1)$$

Daraus folgt für die Temperatur T_2 :

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{m}c_p} = 384.47 \text{ K}, \quad \vartheta_2 = 111.32^\circ\text{C}$$

Für die spezifische Wärmekapazität gilt:

$$c_p = \frac{\kappa R_{He}}{\kappa - 1} = 5194.7 \text{ J/kg K}$$

und für die Gaskonstante von Helium:

$$R_{He} = \frac{R}{M_{He}} = 2078.5 \text{ J/kg K}$$

Die Änderung der spezifischen Entropie errechnet sich allgemein wie folgt:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R_{He} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Die Zustandsänderung erfolgt isobar $p_1 = p_2$:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Für die Änderung des Entropiestroms erhält man somit:

$$\dot{S}_2 - \dot{S}_1 = \dot{m} c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 3.02 \text{ kW/K}$$

Lösung 7.5: Verdichtung von Methan.

a. Für den Massenstrom gilt:

$$\dot{m} = \dot{V}_n \rho_n = 19.94 \text{ kg/s}$$

Der 1. HS für stationäre Fliessprozesse unter Vernachlässigung der Änderung der kinetischen und potentiellen Energie lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1$$

Die Verdichtung verläuft adiabat, d. h.:

$$w_{t12} = h_2 - h_1$$

Für die Verdichterleistung erhält man somit:

$$P_{12} = \dot{m} w_{t12} = \dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) = 5899.5 \text{ kW}$$

Dazu muss c_p und R_{CH4} aus den Stoffdaten errechnet werden:

$$c_p = \frac{\kappa R_{CH4}}{\kappa - 1} = 2143.5 \text{ J/kg K}$$

$$R_{CH4} = \frac{R}{M_{CH4}} = 519.6 \text{ J/kg K}$$

b. Der Polytropenexponent kann aus den Zustandsgrößen der Zustandspunkte 1 und 2 der polytropen Zustandsänderung ermittelt werden:

$$n = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{p_2}{p_1} - \ln \frac{T_2}{T_1}} = 1.398$$

Die spezifische Druckänderungsarbeit für eine polytrope Zustandsänderung berechnet sich mit:

$$w_{p12rev} = \int_1^2 v dp = \frac{n}{n-1} \frac{R}{M_{CH4}} (T_2 - T_1) = 251.9 \text{ kJ/kg}$$

Für die reversible Verdichterleistung gilt:

$$P_{12rev} = \dot{m} w_{p12rev} = 5022.9 \text{ kW}$$

- c. Die spezifische Dissipation für diese polytrope, adiabate Zustandsänderung unter Vernachlässigung der Änderung der kinetischen und potentiellen Energie berechnet sich aus der technischen Arbeit:

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + j_{12} = w_{p12\,rev} + j_{12}$$

$$j_{12} = w_{t12} - w_{p12\,rev} = 44.0 \text{ kJ/kg}$$

Die dissipierte Leistung beträgt somit:

$$\dot{J}_{12} = \dot{m} j_{12} = 877.4 \text{ kW}$$

- d. Die allgemeine Entropiebilanzgleichung für stationäre Fliessprozesse lautet:

$$\dot{S}_{irr} = \sum_{aus} \dot{m}_a s_a - \sum_{ein} \dot{m}_e s_e - \sum \dot{S}_Q$$

Für dieses adiabate System gilt:

$$\dot{S}_{irr} = \dot{m} (s_2 - s_1) = 2.51 \text{ kW/K}$$

Die Änderung der spezifischen Entropie errechnet sich bei einer polytropen Zustandsänderung wie folgt:

$$s_2 - s_1 = \frac{c_p}{\kappa} \frac{n - \kappa}{n - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} = 125.6 \text{ J/kg K}$$

Lösung 7.6: Druckminderungsventil.

- a. Die Zustandsänderung verläuft isotherm, d.h.:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta = 20^\circ\text{C}$$

- b. Die Änderung der spezifischen Entropie ist allgemein:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R_L \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Für eine isotherme Zustandsänderung folgt:

$$s_2 - s_1 = R_L \ln \frac{p_1}{p_2} = 315.5 \text{ J/kg K}$$

- c. Spezifische Dissipation

Der 1. HS für stationäre Fliessprozesse lautet:

$$w_{t12} + q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1)$$

Die technische Arbeit ist:

$$w_{t12} = \int_1^2 v \, dp + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g (z_2 - z_1) + j_{12}$$

Da keine technische Arbeit zu- bzw. abgeführt wird sowie die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie vernachlässigt werden darf, ergibt sich:

$$j_{12} = - \int_1^2 v \, dp$$

Für eine isotherme Zustandsänderung erhält man für die spezifische Dissipation:

$$j_{12} = -R_L T \int_1^2 \frac{dp}{p} = -R_L T \ln \frac{p_2}{p_1} = 92.5 \text{ kJ/kg}$$

Lösung 7.7: Temperaturausgleich durch Mischen.

a. Mischtemperatur

Der 1. HS für ein System mit mehreren Stoffströmen lautet unter Vernachlässigung der Änderungen der kinetischen und potentiellen Energien:

$$\sum \dot{Q} + \sum P = \sum_{aus} \dot{m}_a h_a - \sum_{ein} \dot{m}_e h_e$$

Für den adiabaten Mischvorgang gilt:

$$\sum_{ein} \dot{m}_e h_e = \sum_{aus} \dot{m}_a h_a$$

Die Energiebilanz der drei Stoffströme mit konstanter mittlerer spezifischer Wärmekapazität lautet:

$$\dot{m}_a c_{pm} T_a + \dot{m}_b c_{pm} T_b + \dot{m}_c c_{pm} T_c = (\dot{m}_a + \dot{m}_b + \dot{m}_c) c_{pm} T_m$$

Daraus folgt für die Mischtemperatur:

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{\dot{m}_a c_{pm} T_a + \dot{m}_b c_{pm} T_b + \dot{m}_c c_{pm} T_c}{(\dot{m}_a + \dot{m}_b + \dot{m}_c) c_{pm}} \\ T_m &= \frac{\dot{m}_a T_a + \dot{m}_b T_b + \dot{m}_c T_c}{(\dot{m}_a + \dot{m}_b + \dot{m}_c)} = 332.15 \text{ K}, \quad \vartheta_m = 59^\circ\text{C} \end{aligned}$$

b. Entropiezunahme durch den Temperaturausgleich

Die Änderung der spezifischen Entropie berechnet sich wie folgt:

$$s_m - s_i = c_p \ln \frac{T_m}{T_i} - R_L \ln \frac{p_m}{p_i}$$

Für eine isobare Zustandsänderung ergibt sich für die Änderung der spezifischen Entropie:

$$s_m - s_i = c_p \ln \frac{T_m}{T_i}$$

Die gesamte Entropiezunahme berechnet sich aus der Addition der Entropiezunahmen der einzelnen Ströme:

$$\Delta \dot{S}_{irr} = c_p \left[\dot{m}_a \ln \frac{T_m}{T_a} + \dot{m}_b \ln \frac{T_m}{T_b} + \dot{m}_c \ln \frac{T_m}{T_c} \right] = 1.435 \text{ W/K}$$

c. Der Exegieverluststrom berechnet sich mit:

$$\dot{E}_V = T_U \Delta \dot{S}_{irr} = 420.8 \text{ W}$$

Lösung 7.8: Luft isochor bzw. isobar erwärmen.

a. Druck- und Volumenänderung

Aus der Gasgleichung kann das Anfangsvolumen berechnet werden:

$$V_1 = \frac{m R_L T_1}{p_1} = 0.539 \text{ m}^3$$

Bei einer isochoren Zustandsänderung bleibt das Volumen konstant, d.h. $V_1 = V_2 = V = 0.539 \text{ m}^3$. Der Druck im Endzustand ist:

$$p_2 = \frac{m R_L T_2}{V} = 5.33 \text{ bar(a)}$$

Bei einer isobaren Zustandsänderung bleibt der Druck konstant, d.h. $p_1 = p_2 = p = 4 \text{ bar(a)}$. Das Volumen im Endzustand ist:

$$V_2 = \frac{m R_L T_2}{p} = 0.718 \text{ m}^3$$

b. Benötigte Wärmeenergie

Der 1. HS für geschlossene Systeme ohne Dissipation lautet:

$$W_{v12\ rev} + Q_{12} = U_2 - U_1$$

Bei der isochoren Zustandsänderung wird keine Arbeit verrichtet. Somit gilt für die Wärmeenergie:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1) = 179.3 \text{ kJ}$$

Für die Wärmeenergie einer isobaren Zustandsänderung gilt:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= (U_2 - U_1) - W_{v12\ rev} \\ &= (U_2 - U_1) + p(V_2 - V_1) \\ &= H_2 - H_1 = m c_p (T_2 - T_1) = 251.1 \text{ kJ} \end{aligned}$$

c. Änderung der Entropie

Die Änderung der Entropie der isochoren Zustandsänderung berechnet sich mit:

$$S_2 - S_1 = m c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 515.7 \text{ J/K}$$

und für die isobare Zustandsänderung:

$$S_2 - S_1 = m c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 722.2 \text{ J/K}$$

d. Prozess im T, s -Diagramm