Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

Aufgabe 1: kern und bild einer linearen Abbildung

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen die Unterräume kern und bild und geben Sie jeweils die Dimensionen und eine Basis dieser Unterräume an. Testen Sie noch die Gültigkeit des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen. Welche Abbildungen sind umkehrbar und welche nicht?

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2\,x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2\,x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 + x_2 + x_3$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie kern und bild der folgenden linearen Abbildungen. Diese Abbildungen können nicht mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden. Verwenden Sie für die Argumentationen die Definitionen für kern und bild.

Hinweis: Bei b) wird die Integrationskonstante = 0 gesetzt.

a)

$$\frac{d}{dx} : p(x) \longmapsto \frac{d}{dx}\, p(x)$$

b)

$$\int : p(x) \longmapsto \int p(x)\, dx$$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

b) Für welche Werte des Parameters γ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \gamma \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & \gamma & 3 \end{pmatrix}$$

singulär?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Determinante der $4 \times 4-$Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe einer kombinatorischen Überlegung, die wir in der Vorlesung analog für eine $2 \times 2-$ und eine $3 \times 3-$Matrix aufgestellt haben.

Aufgabe 5

Die Determinate eines Produktes zweier Matrizen A und B ist gegeben durch das Produkt der Einzeldeterminanten:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Regel, dass sich die Determinante der Inversen wie folgt berechnen lässt:

$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$$

Viel Spass!