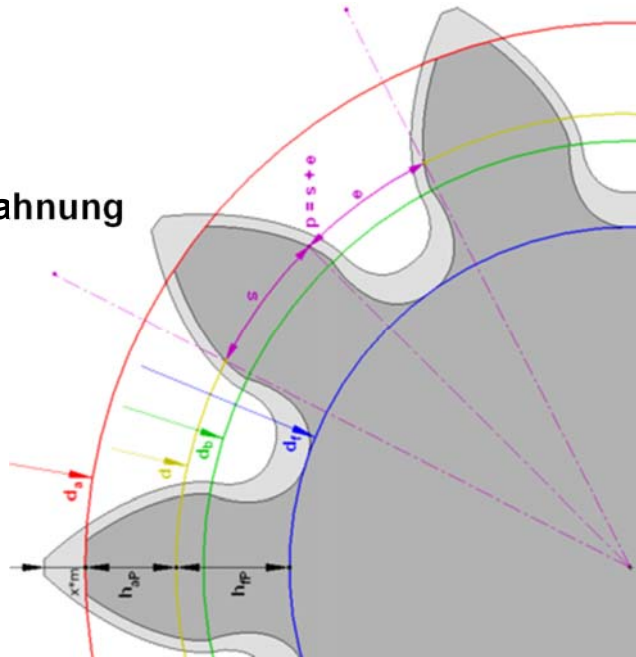


Modul TA.PR+SY

Zahnradgetriebe

Teil 2

Stirnräder mit Evolventenverzahnung



FH Zentralschweiz

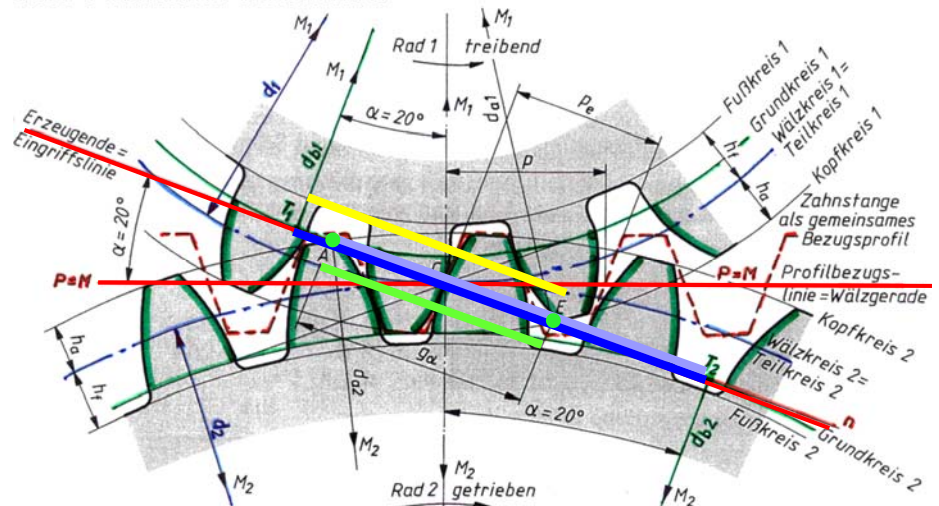
Inhalt

• Stirnräder mit Evolventenverzahnung (Teil 2)

- Geometrie und Bestimmungsgrößen
- Eingriffsstrecke und Profilüberdeckung
- Profilverschiebung
- Schrägstirnräder
- Kegelräder
- Innenverzahnungen und Umlaufrädergetriebe
- Schraubräder und Schneckengetriebe
- Toleranzen und Verzahnungsqualität

Eingriffsstrecke und Profilüberdeckung

Eingriffsstrecke
muss stets grösser
sein als die
Eingriffsteilung.



Eingriffsstrecke g_α

$$g_\alpha = \frac{1}{2} \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a_d \cdot \sin \alpha$$

$$AE = T_1 E + T_2 A - T_1 T_2$$

Profilüberdeckung ε_α

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_e} = \frac{0,5 \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a_d \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha} > 1.1, \text{ möglichst } 1.25$$

© HSLU TA.PR+SY_H16

6

Grenzzähnezahl



Theoretische Grenzzähnezahl z_g

> kein Unterschnitt

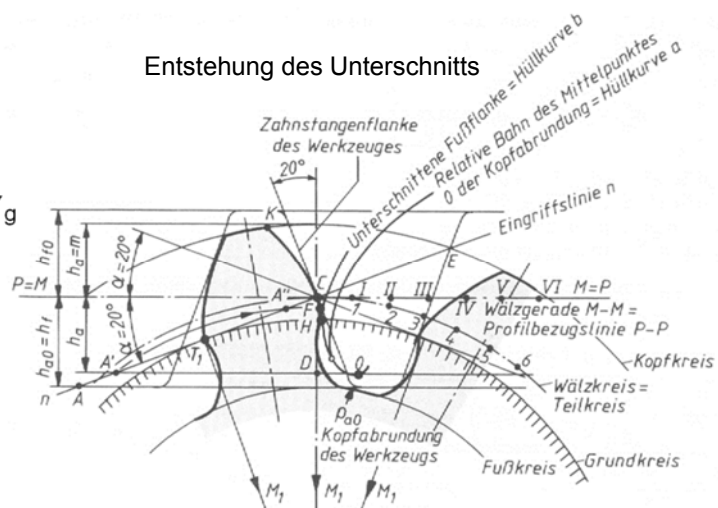
$$z_g = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \approx 17$$

Praktische Grenzzähnezahl z'_g

> noch ertragbarer Unterschnitt
ohne Gefährdung der Eingriffs-
verhältnisse

$$z'_g \approx 14$$

Entstehung des Unterschnitts



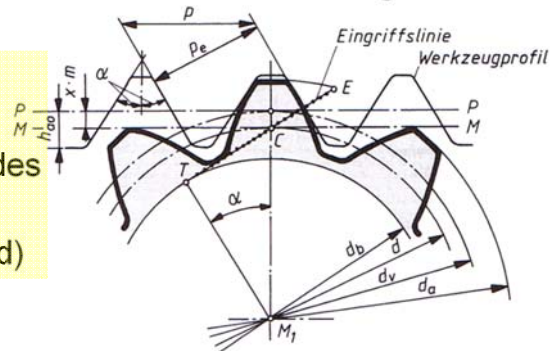
© HSLU TA.PR+SY_H16

9

Profilverschiebung

- Bei der Evolventenverzahnung können durch die **Profilverschiebung** „Zahnkorrekturen“ erzeugt werden:

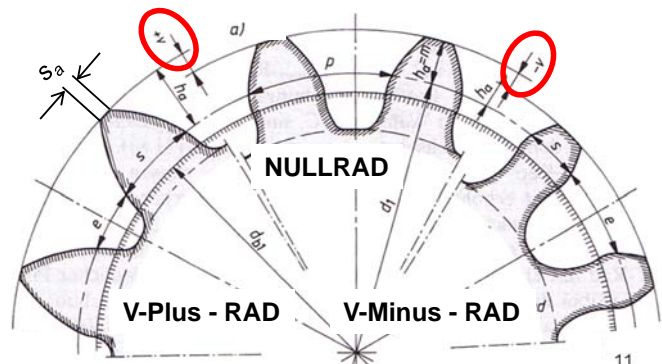
- zur Vermeidung von Unterschnitt
- zur Erhöhung der Tragfähigkeit
- zur Erhöhung des Überdeckungsgrades
- zum Erreichen bestimmter Einbauverhältnisse (z.B. Achsabstand)



- Profilverschiebung $V = x \cdot m$
x: Profilverschiebungsfaktor
- Praktischer x-Grenzwert an der Unterschnittgrenze

$$x_{\text{grenz}} = \frac{z'_g - z}{z_g} = \frac{14 - z}{17}$$

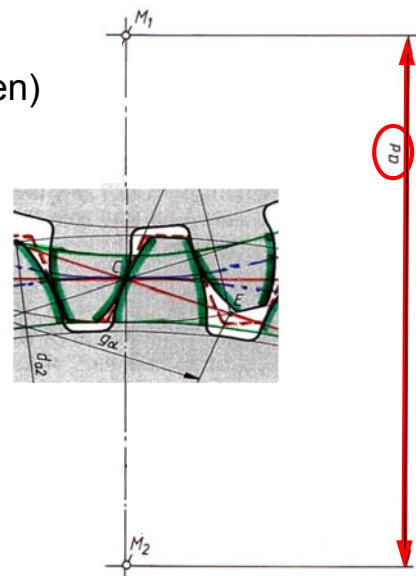
© HSLU TA.PR+SY_H16



Paarung der Zahnräder

- Null-Getriebe**
(Getriebe aller Art mit mittleren Belastungen)

- Paarung zweier Nullräder
- Grundkreise sind unverändert
- Teilkreise berühren sich im Wälzpunkt C (Teilkreise = Wälzkreise)
- Achsabstand a = Nullachsabstand a_d



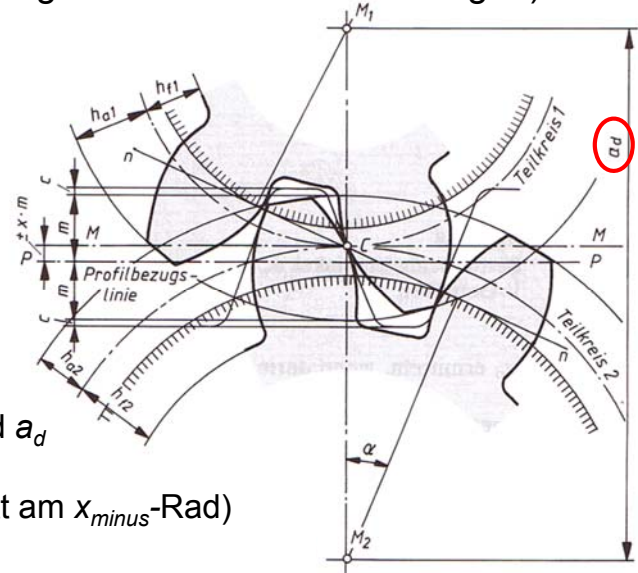
© HSLU TA.PR+SY_H16

Paarung der Zahnräder

• V-Null-Getriebe

(Getriebe mit grösseren Übersetzungen und höheren Belastungen)

- Paarung V-Plus und V-Minus Rad
+ $x_1 = -x_2$; $\Sigma x = x_1 + x_2 = 0$
- Grundkreise sind unverändert
- Teilkreise berühren sich im Wälzpunkt C
(Teilkreise = Wälzkreise)
- Achsabstand a = Nullachsabstand a_d
- $z_1 + z_2 \geq 2 \cdot z'_g$ (kein Unterschnitt am x_{minus} -Rad)

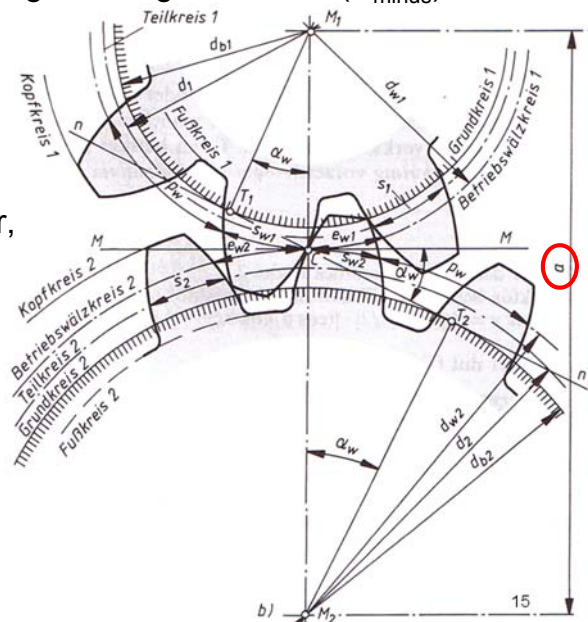


Paarung der Zahnräder

• V-Getriebe

- bei vorgegebener Übersetzung und festgelegtem Achsabstand
- wenn beide Räder eine hohe Tragfähigkeit haben müssen (V_{plus})
- wenn ein besonders gleichförmiger, ruhiger Lauf gefordert ist (V_{minus})

- Paarung V- mit V- oder Nullrad
- Grundkreise sind unverändert
- Teilkreise berühren sich nicht mehr, sind aber unverändert $d = m \cdot z$
- Achsabstand $a \neq a_d$



Verzahnungsmasse der V-Räder

- Für einen störungsfreien Eingriff muss ein ausreichendes Kopfspiel vorhanden sein.

$$c = a - 0.5 \cdot (d_{a1} + d_{f2}) \quad \text{oder} \quad c = a - 0.5 \cdot (d_{a2} + d_{f1})$$

- Kopfhöhenänderung

$$k = k^* \cdot m = a - a_d - m \cdot (x_1 + x_2)$$

$k^* = y - \sum x$ Kopfhöhenänderungsfaktor,
wenn y der Teilkreisabstandsfaktor aus
 $y \cdot m = a - a_d$ und daraus
 $y = [(z_1 + z_2)/2] \cdot [(\cos \alpha / \cos \alpha_w) - 1]$ ist.

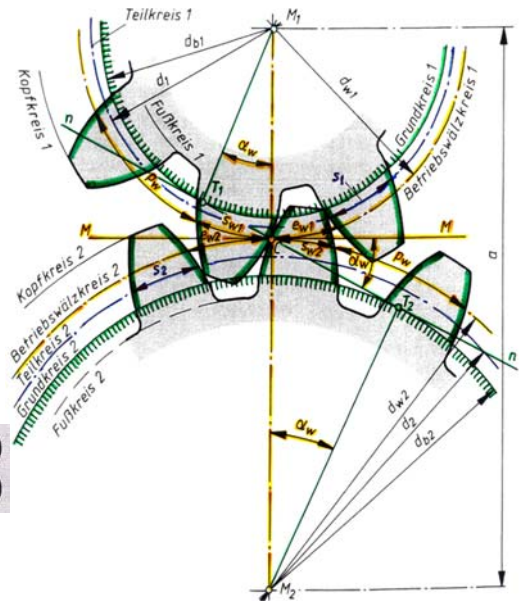
- Kopfkreis - \emptyset

$$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m + 2 \cdot V_1 + 2 \cdot k = d_1 + 2 \cdot (m + V_1 + k)$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m + 2 \cdot V_2 + 2 \cdot k = d_2 + 2 \cdot (m + V_2 + k)$$

- Profilüberdeckung

$$\epsilon_\alpha = \frac{0.5 \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a \cdot \sin \alpha_w}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha}$$

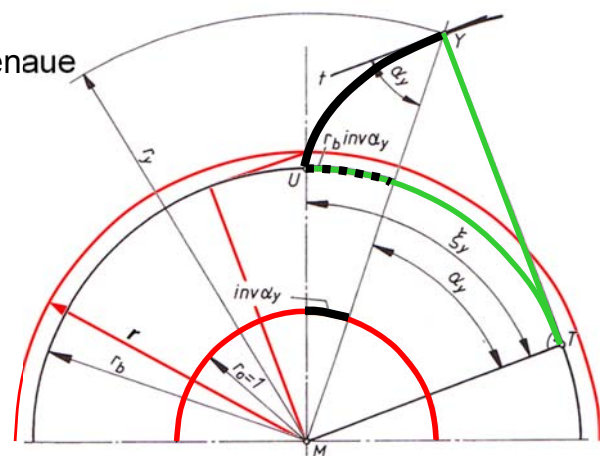


Evolventenfunktion

- Die **Evolventenfunktion** gestattet die genaue Berechnung der Abmasse am Zahnrad.

- Profilwinkel α_y

$$\cos \alpha_y = \frac{r_b}{r_y} = \frac{d_b}{d_y} = d \times \frac{\cos \alpha}{d_y}$$



Grundkreisbogen $\widehat{UT} = r_b \cdot \xi_y = \widehat{YT} = r_b \cdot \tan \alpha_y$

Winkelvergleich $\xi_y = \tan \alpha_y$

Winkeldifferenz $\xi_y - \alpha_y = \tan \alpha_y - \hat{\alpha}_y = \tan \alpha_y - \pi \cdot \alpha_y^\circ / 180^\circ$

Definition $\boxed{\text{inv } \alpha_y = \tan \alpha_y - \hat{\alpha}_y}$

Evolventenfunktion des Winkels α_y
(sprich: Involut alpha-ypsilon)

Anwendung der Evolventenfunktion

- Zahndickennennmass am beliebigen $\varnothing d_y$

$$s_y = d_y \cdot \left(\frac{\pi + 4 \cdot x \cdot \tan \alpha}{2 \cdot z} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_y \right) = d_y \cdot \left(\frac{s}{d} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_y \right)$$

α_y Profilwinkel aus $\cos \alpha_y = d \cdot \cos \alpha / d_y$
 s/d Zahndickenhalbwinkel ψ (s. zu Bild 21-1)

- Zahnlückennennmass am beliebigen $\varnothing d_y$

$$e_y = d_y \cdot \left(\frac{\pi - 4 \cdot x \cdot \tan \alpha}{2 \cdot z} - \text{inv } \alpha + \text{inv } \alpha_y \right) = d_y \cdot \left(\frac{e}{d} - \text{inv } \alpha + \text{inv } \alpha_y \right)$$

$e/d = \eta$ Zahnlückenhilbwinkel

- Zahndicke s_a am Kopfkreis

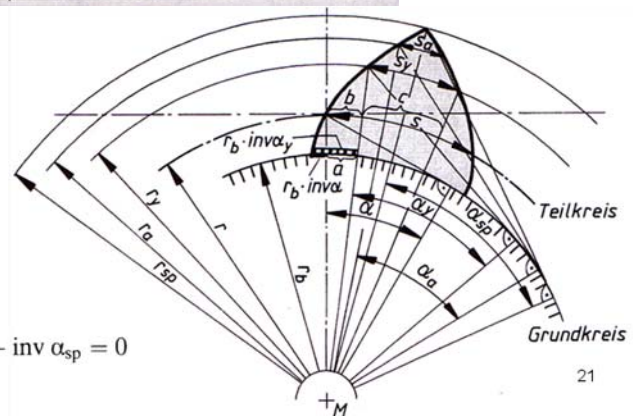
$$s_a = d_a \cdot \left(\frac{s}{d} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_a \right) \geq s_{a \min}$$

- Spitzengrenze $s_a = 0$

$$d_{sp} = \frac{d \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha_{sp}}$$

α_{sp} ergibt sich für $s/d + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_{sp} = 0$

© HSLU TA.PR+SY_H16



21

Anwendung der Evolventenfunktion

- Betriebseingriffswinkel

$$\text{inv } \alpha_w = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha + \text{inv } \alpha$$

α_w aus Evolvententabelle TB 21-4;
 a , d_{w1} und d_{w2} errechenbar

$$\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \frac{\pi \cdot \alpha}{180}$$

- Summe und Aufteilung der Profilverschiebungsfaktoren

$$\Sigma x = x_1 + x_2 = \frac{\text{inv } \alpha_w - \text{inv } \alpha}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot (z_1 + z_2)$$

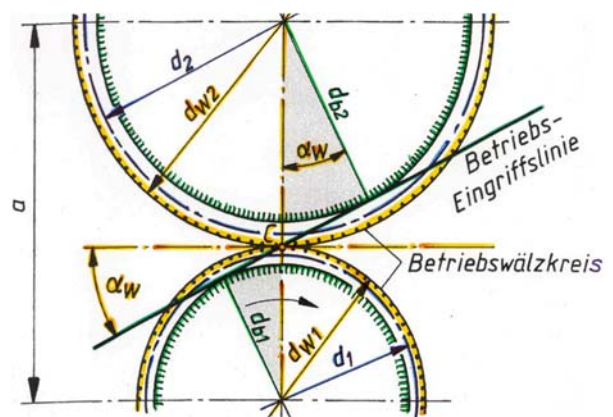
$$x_1 \approx \frac{x_1 + x_2}{2} + \left(0,5 - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cdot \frac{\lg u}{\lg \frac{z_1 \cdot z_2}{100}}$$

$u = z_{\text{Großrad}} / z_{\text{Kleinrad}} \geq 1$

- Achsabstand

$$a = a_d \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$

© HSLU TA.PR+SY_H16

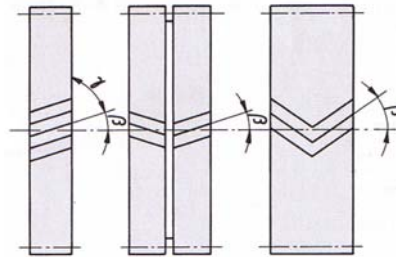
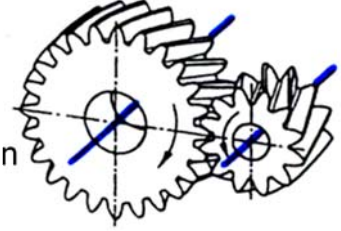


TB 21-5

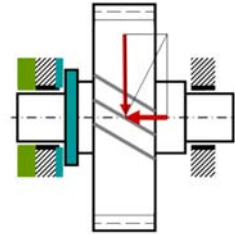
TB 21-6

Geometrie der Schrägstirnräder mit Evolventenverzahnung

- Zähne schraubenförmig gewunden
- **Schrägungswinkel β** bestimmt den Flankenlinienverlauf
 $\beta \approx 8^\circ \dots 20^\circ$ für Schräg- und Doppelschrägverzahnungen
 $\beta \approx 30^\circ \dots 45^\circ$ für Pfeilverzahnungen
- **Steigungswinkel γ**
rechts- bzw. linksgängig



- Vorteile:
 - Ruhiger Lauf
 - Grosse Drehzahlen
 - Höhere Belastung
- Nachteile:
 - Zusätzliche Kräfte auf Lager
 - Wirkungsgrad geringer



Schnitte durch die Schrägverzahnung

Eingriffsverhältnisse

Herstellung

Stirnschnitt

Normalschnitt

Stirnteilung p_t
Stirnmodul m_t
Stirneingriffswinkel α_t

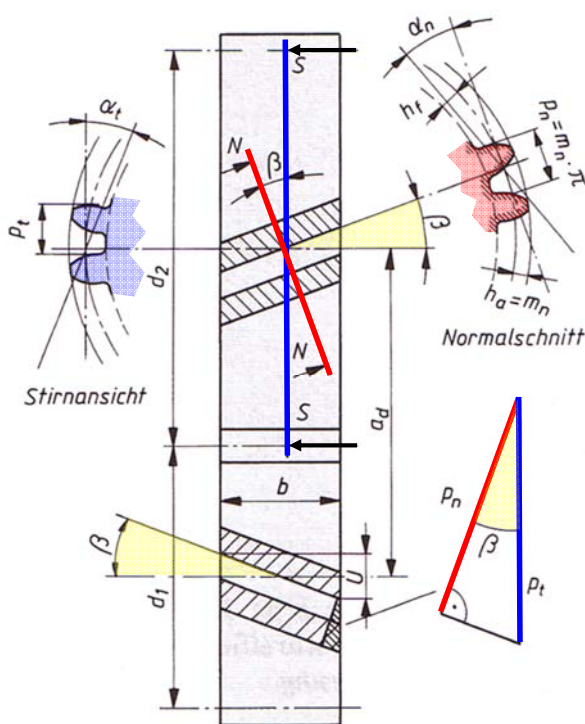
Normalteilung p_n
Normalmodul m_n
Normaleingriffswinkel α_n

Schrägungswinkel β
Normalteilung p_n
Stirnteilung p_t

$$\cos \beta = \frac{p_n}{p_t} = \frac{m_n \cdot \pi}{m_t \cdot \pi} = \frac{m_n}{m_t} = \frac{\tan \alpha_n}{\tan \alpha_t}$$

$$\alpha_t > \alpha_n = 20^\circ \hat{=} \alpha_p$$

Verzahnungsmasse



© HSLU TA.PR+SY_H16

Grundkreisschrägungswinkel β_b

$$\tan \beta_b = \tan \beta \cdot \cos \alpha_t$$

$$\sin \beta_b = \sin \beta \cdot \cos \alpha_n$$

$$\cos \beta_b = \frac{p_{bn}}{p_{bt}} = \cos \beta \cdot \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_t} = \frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha_t}$$

Grundkreisteilung = Stirneingriffsteilung

Grundzylinder-Normalteilung = Normaleingriffsteilung

$$p_{bt} \hat{=} p_{et} = p_t \cdot \cos \alpha_t$$

$$p_{bn} \hat{=} p_{en} = p_n \cdot \cos \alpha_n$$

Teilkreis \emptyset $d = z \cdot m_t = z \cdot \frac{m_n}{\cos \beta}$

Grundkreis \emptyset $d_b = d \cdot \cos \alpha_t = z \cdot \frac{m_n \cdot \cos \alpha_t}{\cos \beta}$

Null-Achsabstand

$$a_d = \frac{d_1 + d_2}{2} = m_t \cdot \frac{(z_1 + z_2)}{2} = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \frac{(z_1 + z_2)}{2}$$

Kopf + Fusskreis \emptyset

$$d_a = d + 2 \cdot h_a = d + 2 \cdot m_n = m_n \cdot \left(2 + \frac{z}{\cos \beta} \right)$$

$$d_f = d - 2 \cdot h_f = d - 2,5 \cdot m_n$$

27

Eingriffsverhältnisse

Durch die Zahnschräge werden die Eingriffsverhältnisse wie z.B. die Überdeckung entscheidend beeinflusst und verbessert, was zu einem merklich ruhigeren und leiseren Lauf beiträgt.

- Sprung

$$U = b \cdot \tan \beta$$

- Sprungüberdeckung

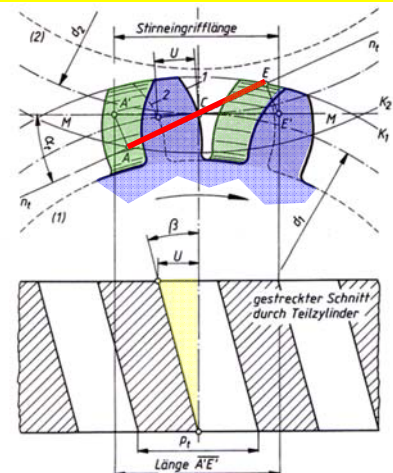
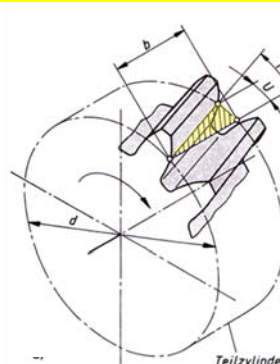
$$\epsilon_\beta = \frac{U}{p_t} = \frac{b \cdot \tan \beta}{p_t} = \frac{b \cdot \sin \beta}{\pi \cdot m_n}$$

- Profilüberdeckung

$$\epsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_{et}} = \frac{0,5 \cdot \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a_d \cdot \sin \alpha_t}{\pi \cdot m_t \cdot \cos \alpha_t}$$

- Gesamtüberdeckung

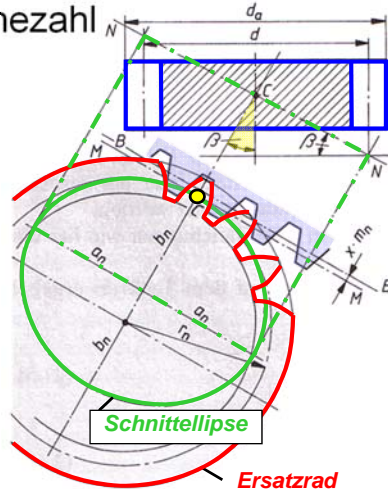
$$\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta = \text{Profilüberdeckung} + \text{Sprungüberdeckung}$$



Profilverschiebung

Bei Schrägverzahnung ist nur selten Profilverschiebung zur Vermeidung von Unterschnitt erforderlich. Auch kann meist ohne Profilverschiebung ein bestimmter Achsabstand lediglich durch geschickte Wahl des Schrägungswinkels erreicht werden. Für eine Profilverschiebung gelten im Prinzip die gleichen Regeln wie bei Geradverzahnung.

- Ersatzzähnezahl



$$z_n = \frac{d_n}{m_n} = \frac{d}{\cos^2 \beta_b \cdot m_n} = \frac{z}{\cos^2 \beta_b \cdot \cos \beta} \approx \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

© HSLU TA.PR+SY_H16

- Praktische Grenzzähnezahl

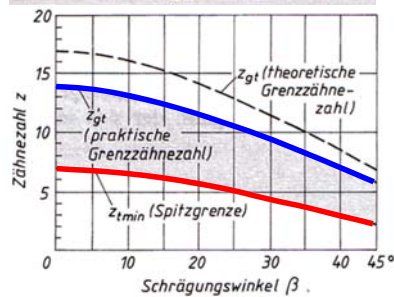
$$z'_{gt} \approx z'_{gn} \cdot \cos^3 \beta = 14 \cdot \cos^3 \beta$$

- Profilverschiebung

$$V = x \cdot m_n$$

- Mindestverschiebungsfaktor

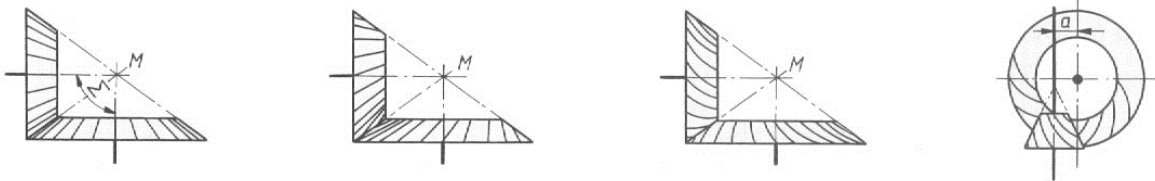
$$x_{\text{grenz}} = \frac{z'_{gn} - z_n}{z_{gn}} = \frac{14 - z_n}{17}$$



29

Geometrie der Kegelräder

Wälzgetriebe mit sich in einem Punkt M schneidenden Achsen (Normalkegelräder) oder sich kreuzenden Achsen (Hypoidgetriebe).



- Geradverzahnte Kegelräder für kleine Drehzahlen, $v_t \approx 6 \text{ m/s}$ ($v_t \approx 20 \text{ m/s}$ geschliffen)
- Schrägverzahnte Kegelräder mit höherem Überdeckungsgrad, geräuscharmer Lauf
 $v_t \approx 40 \text{ m/s}$ (gefräst), $v_t \approx 60$ bis 100 m/s (geschliffen)
- Bogenverzahnte Kegelräder für besonders hohe Anforderungen an Laufruhe und Zahnfusstragfähigkeit
 $v_t \approx 30 \text{ m/s}$ (gefräst), $v_t \approx 60 \text{ m/s}$ (geschliffen)
- Kegelräder erfordern höchste Sorgfalt bei der Fertigung, dem Einbau (Zustellung der Räder) und der Lagerung, da hiervon Laufruhe und Lebensdauer weitgehend abhängen.

Übersetzung, Zähnezahlverhältnis, Teilkegelwinkel, Radabmessungen

- Achsenwinkel und Teilkegelwinkel

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2$$

- Übersetzung

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$$

- Zähnezahlverhältnis

$$u = \frac{z_{Rad}}{z_{Ritzel}} \geq 1$$

- Teilkegelwinkel

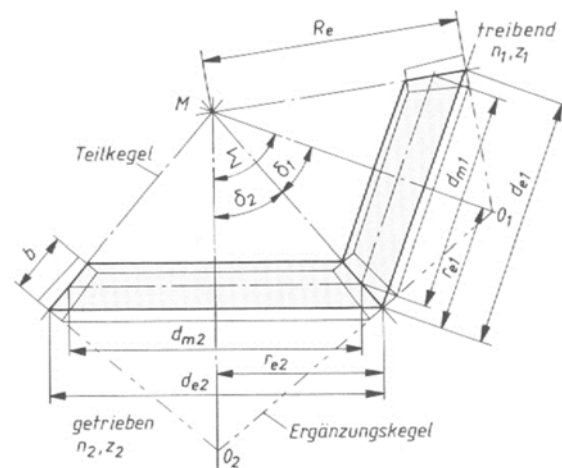
$$\tan \delta_1 = \frac{\sin \Sigma}{u + \cos \Sigma}$$

- Für $\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ gilt:

$$\tan \delta_1 = \frac{1}{u}$$

bzw.

$$\tan \delta_2 = u$$



- Radabmessungen

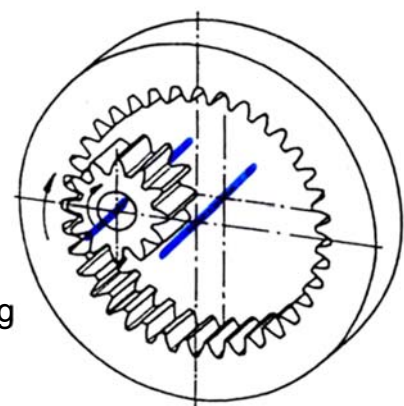
$$d_e = z * m_e = d_m * b * \sin \delta$$

$$d_m = z * m_m$$

$$R_e = \frac{d_m}{2 * \sin \delta} \geq 3 * b$$

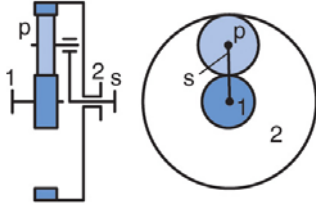
Innverzahnungen

- Werden meist auch als Hohlräder bezeichnet
- Herstellung durch Wälzstossen oder Wälzfräsen
- Schleifen nur bedingt möglich
- Wälzbewegung ergibt auch hier eine Evolvente
 - Abbild der entsprechenden Aussenverzahnung
 - Gleicher Grundkreis
 - Gleicher Modul
 - Zahndicke des Aussenrades wird zur Zahnücke des Hohlrades
- Geometrie ist mit den bekannten Regeln beschreibbar
- Bei Hohlrädern werden die Innendurchmesser $d < 0$ und die Zähnezahlen $z < 0$, negativ definiert. ($d_1 = -250 \text{ mm}$, $z_1 = -50$)



Übersetzung bei Umlaufradgetrieben

• Stand- und Umlaufübersetzungen



$$i_{12} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Standübersetzung
Antrieb Zentralrad 1 (Steg steht still)

$$i_{1s} = 1 - i_{12}$$

Antrieb Zentralrad 1
(Standgetrieberad 2 steht still)

$$i_{2s} = 1 - \frac{1}{i_{12}}$$

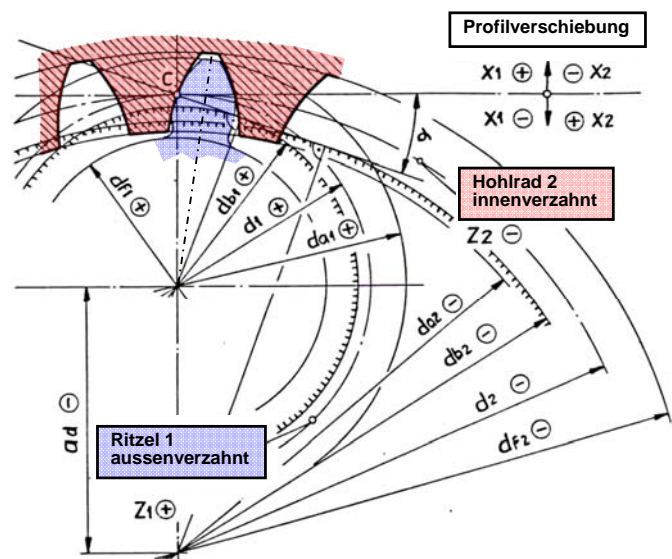
Antrieb Standgetrieberad 2
(Zentralrad 1 steht still)

1: Zentralrad 1
2: Standgetrieberad 2
s: Steg (Planetenträger)
p: Planetenrad

Regel: Sofern parallele Wellen eines Getriebes sich im gleichen Drehsinn bewegen, haben die Drehzahlen das gleiche Vorzeichen.
 $i > 0$, gleichsinnige Drehrichtung, $i < 0$, entgegengesetzte Drehrichtung

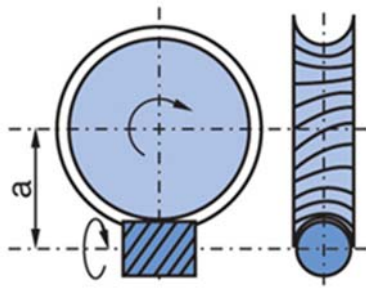
Geometrie Innenverzählter Stirnräder

- Die Krümmungsrichtung wird durch das Vorzeichen der Zähnezahls unterschieden
- Alle von der Zähnezahls abhängigen Grössen haben negative Vorzeichen
- Bei Schrägrädern ändert zudem das Vorzeichen des Schrägungswinkels
- Eine Profilverschiebung vom Zahnfuß zum Zahnkopf hin wird nach wie vor positiv bezeichnet
- Die von der Aussenverzählung her bekannten Gleichungen gelten unter strikter Beachtung der Vorzeichen auch für Hohlräder

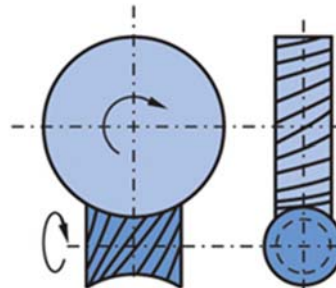


Geometrie bei Zylinderschneckengetrieben

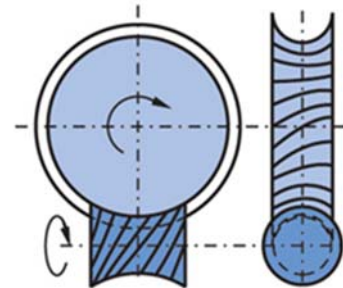
Schneckengetriebe sind Zahnradgetriebe mit rechtwinklig gekreuzten Achsen.
(Achsenwinkel $\Sigma = 90^\circ$)



Zylinderschneck
Globoid-Schneckenrad



Globoid-Schnecke
Zylinderschneckenrad



Globoid-Schnecke
Globoid-Schneckenrad

Geometrie bei Zylinderschneckengetrieben

- Übersetzung (Zähnezahlverhältnis)

$$i = u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

Mindestübersetzung $i_{\min} \approx 5$
Höchstübersetzung $i_{\max} \approx 50 \dots 60$

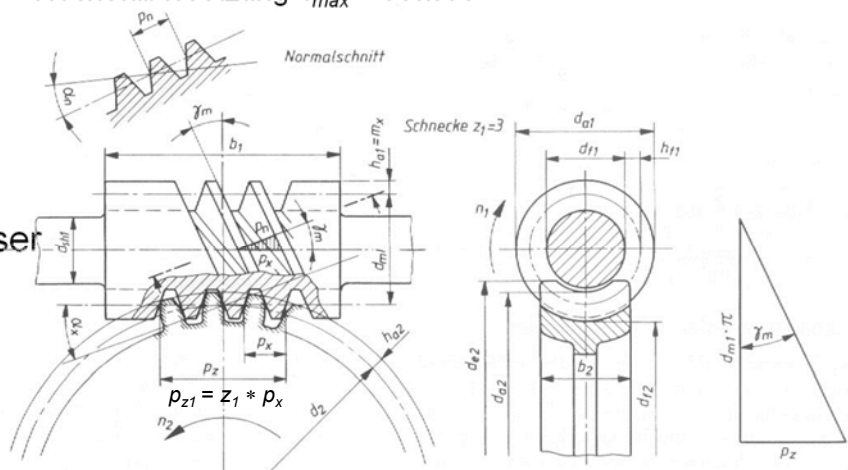
- Steigungswinkel

$$\tan \gamma_m = \frac{p_{z1}}{d_{m1} \cdot \pi}$$

- Mittendurchmesser

$$d_{m1} = \frac{z_1 \cdot m_n}{\sin \gamma_m}$$

$$m_n = m \cdot \cos \gamma_m$$



Richtwert für Entwurf: $d_{m1} \approx 0.4 \cdot m$; d_{m1} kann nach konstruktiven Gesichtspunkten frei gewählt werden.

Richtwerte für die Zähnezah der Schnecke

TB 23-3 Richtwerte für die Zähnezah der Schnecke

Übersetzung i	<5	5 ... 10	> 10 ... 15	>15 ... 30	>30
Zähnezah der Schnecke z_1	6	4	3	2	1

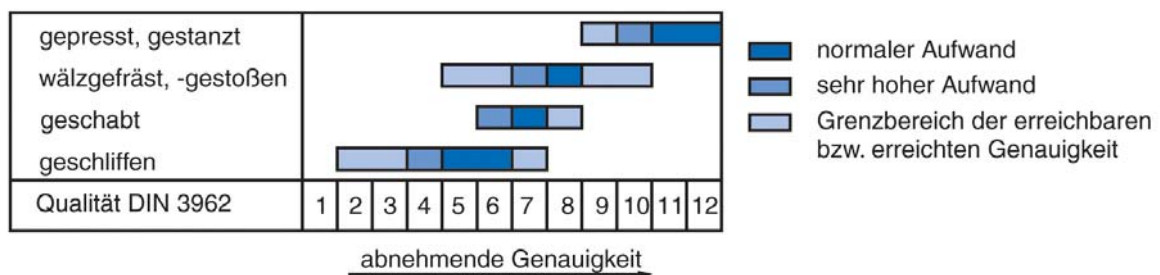
Wirkungsgrad bei Schneckengetrieben

Bei treibender Schnecke:
$$\eta_z = \frac{\tan \gamma_m}{\tan(\gamma_m + \rho')}$$

Bei treibendem Schneckenrad:
$$\eta'_z = \frac{\tan(\gamma_m - \rho')}{\tan \gamma_m}$$

$$\tan \rho' = \mu', \text{ Keilreibungswinkel}$$

Verzahnungsqualität, Toleranzklassen und Flankenrauheit



v [m/s]	Bearbeitung der Zahnflanken	Qualität DIN 3962	Toleranzfeld DIN 3967	Flankenrauheit [μm]	
				R_a	R_z
0,8	Gegossen, roh	12	2 x 30	-	-
0,8	Geschruppt	11 oder 10	29 oder 28	6,3	40
2	Schlichtgefräst	9	27	1,6	14
4	Schlichtgefräst	8	26	0,8	6,3
8	Feingeschliffen	7	25	0,4	3
12	Geschabt oder geschliffen	6	24	0,3	2
20	Feingeschliffen	5	23	0,1	1
40	Feinstbearbeitet	4 oder 3	22	0,05	0,5
60	Feinstbearbeitet	3	22 oder 21	0,025	0,3

Flankenspiel

- Normalflankenspiel
 - Kürzester Abstand der Rückflanken

$$j_n = j_t \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta$$

$$j_n \approx 0,05 + (0,025 \dots 0,1) \cdot m_n$$

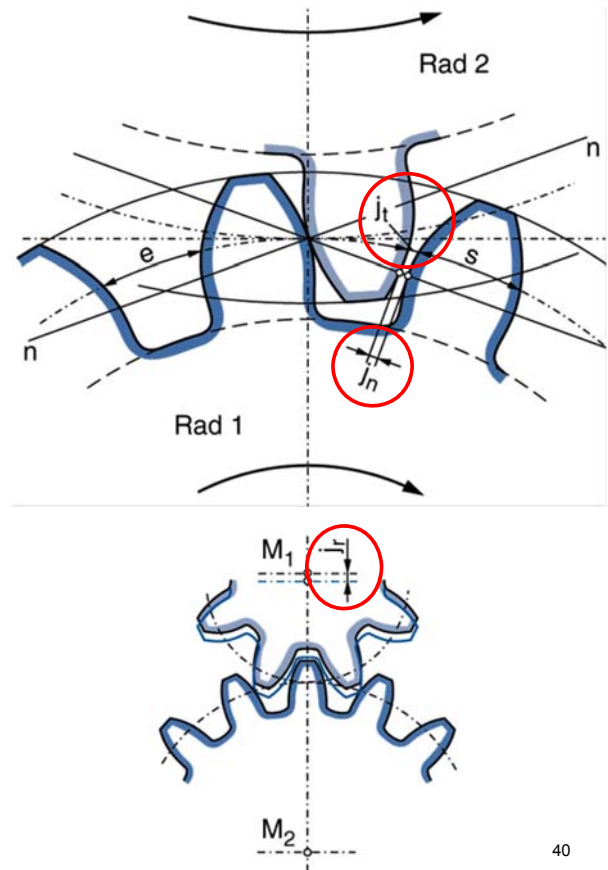
- Drehflankenspiel
 - Bogenmass auf dem Wälzkreis

$$j_t = \frac{j_n}{(\cos \alpha_n \cdot \cos \beta)}$$

- Radialspiel
 - Achsabstanddifferenz

$$j_r = \frac{j_t}{(2 \cdot \tan \alpha_{wt})}$$

© HSLU TA.PR+SY_H16



40

Flankenspieländerung durch die Achsabstandtoleranz

- Aus den Zahndickenabmassen und den Achsabstandsabmassen ergibt sich das Drehflankenspiel.
- Empfehlungen für Zahndickenabmass A_{sn} , Zahndickentoleranz T_{sn} und Achsabstandstoleranz js .
Tabelle TB 21-8

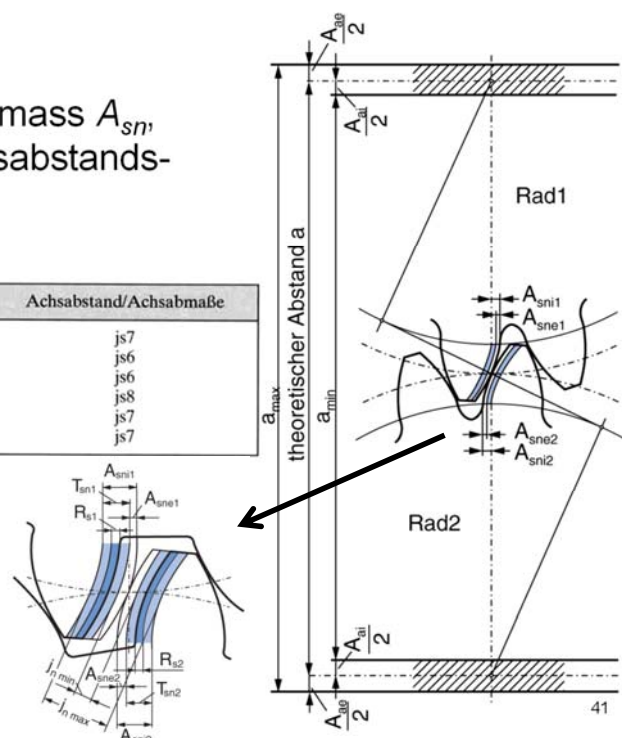
Anwendungsbereich	A_{sne} -Reihe	T_{sn} -Reihe	Achsabstand/Achsabmaße
Allgemeiner Maschinenbau	b	26	js7
dschl. reversierend, Scheren, Fahrwerke	c	25	js6
Werkzeugmaschinen	f	24/25	js6
Landmaschinen	e	27/28	js8
Kraftfahrzeuge	d	26	js7
Kunststoffmaschinen, Lok-Antriebe	c, cd	25	js7

$$\Delta j_a = 2 \cdot A_a \cdot \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}$$

$$j_{tmax} = - \sum A_{sti} + \Delta j_{ae}$$

$$j_{tmin} = - \sum A_{ste} + \Delta j_{ai}$$

© HSLU TA.PR+SY_H16



41