THFL+GRU - Fluiddynamik

Zusammenfassung & Formelsammlung

2. Bernoulli Gleichung

Energieerhaltung:

Neben der Masse bleibt auch die Energie in einem geschlossenen System, wie es auch immer definiert ist, erhalten. Der Energieinhalt lässt sich nur durch Zu- oder Abfuhr von Arbeit oder Wärme ändern. Einzig die verschiedenen Formen der Energie können sich verändern, die Summe bleibt jedoch konstant.

Energieformen:

In der Fluiddynamik werden die folgenden Energieformen (Energie = Arbeit [J]) berücksichtigt:

Druckarbeit	$m \cdot p/\rho$	(oder auch Druckverschiebearbeit)
Kinetische Energie	$m \cdot v^2/2$	
Lage Energie	$m \cdot g \cdot h$	

Anders als in der Thermodynamik wird die Energieform Wärme üblicherweise nicht berücksichtigt. Jedoch wird der Einfluss der Temperatur auf die Fluideigenschaften wie z.B. Dichte und Viskosität einbezogen. Die Umwandlung von einer Energieform in eine andere erfolgt in der Regel nicht verlustfrei. Zudem ist der Umwandlungsprozess einer Energieform in Wärme nur teilweise reversibel.

Bernoulli Gleichung:

Eine vereinfachte Form der Energiegleichung lässt sich für die Fluiddynamik formulieren, wenn die Annahme eines idealen Fluids zugrunde gelegt wird. Dies bedeutet Reibungsfreiheit und eine konstante Dichte. Betrachtet man einen Stromfaden (oder Stromröhre) dann gilt für jedes Fluidelement in diesem Stromfaden die Bernoulli Gleichung:

$$E_{Druck} + E_{kin} + E_{pot} = E_{ges} = \text{const.} \qquad [J]$$

Formuliert man die verschiedenen Arbeitsterme massenspezifisch (bezogen auf 1 kg Masse), ergibt sich die Bernoulli Gleichung zu:

$$p/\rho + v^2/2 + g \cdot h = \text{const.} \qquad [m^2/s^2] = [J/kg]$$

In dieser Form beschreibt die Bernoulli Gleichung den spezifischen Energiegehalt eines jeden Fluidpartikels entlang eines repräsentativen Stromfadens und damit auch im gesamten betrachteten Fluidsystem (sofern keine Arbeit oder Wärme zu oder abgeführt wird).

Formen der Bernoulli Gleichung:

Neben der Form der spezifischen Energien, lässt sich die Bernoulli Gleichung auch als „echte" Energiegleichung in der Dimension [J] formulieren. Hierzu ist jede Energieform mit der Masse zu multiplizieren.

$$m \cdot p/\rho + m \cdot v^2/2 + m \cdot g \cdot h = \text{const.} \qquad [J]$$

Betrachtet man ein Fluidelement entlang eines Stromfadens, so gilt dort Massenerhaltung (m = const). Eine weitere Form ist die Darstellung als „Leistungs" Gleichung [J/s] = [W]. Zu diesem Zweck ist die spezifisch formulierte Bernoulli Gleichung mit dem Massenstrom zu multiplizieren. In der Regel liefert die Bernoulli Gleichung als „Energie" oder „Leistungs" Gleichung keine Mehrinformation. Durch Multiplikation der spezifischen Bernoulli Gleichung mit der Dichte lässt sie sich in eine Druckgleichung überführen (alle Terme haben die Dimension [Pa]):

$$p + \rho \cdot v^2/2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{const.} \qquad [Pa]$$

Eine Höhengleichung erhält man durch eine Division mit der Erdbeschleunigung g (alle Terme in [m]):

$$p/(\rho \cdot g) + v^2/(2 \cdot g) + h = \text{const.} \qquad [m]$$

Ausflussformel:

Die Ausflussgeschwindigkeit aus einem grossen Behälter mit kleiner untenliegender Öffnung lässt sich bei Vernachlässigung der Massenänderung im Behälter mit der Ausflussformel von Torricelli berechnen:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad [m/s]$$

Hierbei wird Lage Energie in kinetische Energie umgewandelt. Umgekehrt lässt sich diese Gleichung auch für einen senkrecht nach oben austretenden Freistrahl unter Schwerkrafteinfluss anwenden.

Kontraktionszahl:

Eine Ausströmung aus einer scharfkantigen Öffnung hat durch die endliche Krümmung der Stromlinien zu folge, dass sich die Stromlinien nach dem Austrittsquerschnitt weiter kontrahieren. Es entsteht stromab eine Engstelle, welche den effektiven Querschnitt bestimmt. Erst in diesem effektiven Querschnitt sind die Stromlinien ungekrümmt und es lässt sich aus der Druckkrümmungsformel ableiten, dass dort der Druck im Fluid gleich dem Druck in der Atmosphäre um die Ausströmung ist. Aus der Potentialtheorie für reibungsfreie Strömungen lässt sich die Kontraktionszahl (Querschnittsflächenverengung) errechnen:

$$\alpha = A_{\text{effektiv}}/A_{\text{Öffnung}} = \pi/(2 + \pi) = 0.611 \qquad [\ ]$$

Erweiterte Bernoulli Gleichung:

In der Praxis sind technische Strömungsvorgänge verlustbehaftet. Auch ist es für viele Anwendungen relevant, dass Arbeit (z.B. durch eine Pumpe) am Fluid geleistet wird. Um trotzdem die Vorteile der Bernoulli Gleichung nutzen zu können, wird eine erweiterte Form der Gleichung eingeführt. Hier werden sowohl ein Arbeitsterm, als auch ein Verlustterm berücksichtigt. Betrachtet man einen Stromfaden von 1 => 2, wobei 1 vor der Arbeitsleistung positioniert ist und 2 entsprechend dahinter, dann gilt:

$$m_1 \cdot p_1/\rho + m_1 \cdot v^2_1/2 + m_1 \cdot g \cdot h_1 + E_A = m_2 \cdot p_2/\rho + m_2 \cdot v^2_2/2 + m_2 \cdot g \cdot h_2 + E_V \qquad [J]$$

Der Arbeitsterm E_A wird der „eintretenden" Energie (Zustand 1) zugeschlagen. Ist E_A positiv, so wird Arbeit am Fluid geleistet (Pumpe). Ist E_A negativ, so wird dem Fluid Arbeit entzogen (Turbine). Der Verlustterm E_V wird der „austretenden" Energie zugeschlagen, da diese dem Fluid nicht mehr zur Verfügung steht. Dieser Verlustterm dissipiert im Fluid zu Wärme. Durch Kontinuität gilt $m_1 = m_2$.

Analog zur Bernoulli Gleichung ohne Arbeits- und Verlustterm, lässt sich diese Gleichung auch als spezifische Gleichung, oder als „Leistungs" Gleichung darstellen. Spezifisch lautet die Gleichung:

$$p_1/\rho + v^2_1/2 + g \cdot h_1 + e_A = p_2/\rho + v^2_2/2 + g \cdot h_2 + e_V \qquad [J/kg]$$

Auch die Form einer Druckgleichung oder Höhengleichung ist möglich. Dabei erhalten die Arbeits- und Verlustterme ebenfalls die Dimension eines Druckes oder entsprechend einer Höhe.

Stutzenarbeit, Förderhöhe und Druckaufbau:

Der Arbeitsterm e_A in der spezifischen Formulierung der erweiterten Bernoulli Gleichung wird als spezifische Stutzenarbeit Y bezeichnet. Zu verstehen als zwischen Eintritts- und Austrittsstutzen der Pumpe oder Turbine am Fluid geleisteten spezifischen Arbeit. Y hat die Dimension [J/kg]. In der Höhengleichung hat der Arbeitsterm die Dimension [m] und wir so als Förderhöhe H bezeichnet.
In der Druckgleichung ist direkt der Druckaufbau (bzw. Abbau im Falle einer Turbine) am Arbeitsterm abzulesen. Es gilt:

$$Y = E_A/m = e_A = H \cdot g = p_A/\rho \qquad [J/kg]$$

Hydraulische Leistung:

Die spezifische Stutzenarbeit Y multipliziert mit dem Massenstrom wird als Hydraulische Leistung P_{hyd} bezeichnet. Es gilt:

$$P_{hyd} = \dot{m} \cdot Y = V_{Punkt} \cdot \rho \cdot Y = V_{Punkt} \cdot \rho \cdot g \cdot H \qquad [W]$$

Verluste:

Verluste in Fluidsystemen entstehen durch Reibung an festen Wänden, sowie durch Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen der Fluidpartikel durch Einbauten (z.B. Krümmer oder Querschnitts-änderungen). Analog zu dem Arbeitsterm erhält auch der Verlustterm e_V die physikalische Dimension der jeweiligen Formulierung der Bernoulli Gleichung. Für die Höhengleichung bedeutet dies eine

Verlusthöhe h_V. Generell werden die Verluste der Druckenergie zugeschrieben. Dies bedeutet, dass $e_V \cdot \rho$ in der Druckgleichung direkt ein Druckverlust Δp ausdrückt. In der spezifischen Formulierung resultiert e_V zu $\Delta p_V/\rho$.

Da Reibungsverluste in der Regel mit dem Quadrat der Geschwindigkeit skalieren, wird der Druckverlust Δp_V als ein Teil oder Vielfaches der kinetischen Energie ausgedrückt. Der Proportionalitätsfaktor wird als Verlustbeiwert ζ bezeichnet. Es gilt:

$$E_V \cdot \rho/m = e_V \cdot \rho = h_V \cdot \rho \cdot g = \Delta p_V = \zeta \cdot \rho \cdot v^2/2 \qquad [Pa]$$

Zu beachten ist an dieser Stelle auf welche Geschwindigkeit sich die kinetische Energie bezieht. Entstehen in einem System mehrere Verluste, so lässt sich der Gesamtverlust als Summe aller Einzelverluste errechnen:

$$\Delta p_{V_{ges}} = \Sigma\, \Delta p_V = \Sigma\, (\zeta \cdot \rho \cdot v^2/2) \qquad [Pa]$$

Austrittsverlust:

Strömt ein Fluid innerhalb eines Systems in einen anderen Behälter ein, der mit dem gleichen Fluid gefüllt ist, so kann in der Regel davon ausgegangen werden, dass die gesamte kinetische Energie beim Einströmen in diesen Behälter als Verlust verwirbelt und somit zu Wärme dissipiert. Es gilt:

$$\Delta p_{Vein} = \zeta \cdot \rho \cdot v^2_{ein}/2 \qquad [Pa] \qquad \text{mit } \zeta = 1$$

Wirkungsgrade:

Unter dem Wirkungsgrad η wird allgemein das Verhältnis von „Nutzen zu Aufwand“ verstanden. Wirkungsgrade lassen sich unterschiedlich definieren, je nach Systemgrenze und damit Definition von Nutzen und Aufwand. Der Wirkungsgrad wird in der Regel durch eine Leistungsbilanz bestimmt. Für eine Pumpe wäre es z.B. das Verhältnis der hydraulischen Leistung zur Antriebsleistung, z.B. die mechanische Leistung an der Welle einer Kreiselpumpe:

$$\eta_{Pumpe} = P_{hyd}/ P_{mech} = \dot{m} \cdot Y / M \cdot \omega \quad [\ ]$$

Betrachtet man die Pumpe als mechanisches System, so wird die Pumpe nicht die gesamte von aussen eingetragene Wellenleistung an das Fluid übertragen können, da sich mechanische Verluste, z.B. durch die Wellenlagerung ergeben. Das Verhältnis aus eingetragener Wellenleistung zur effektiv an der Welle anliegender Leistung, die an das Fluid übertragen werden kann, wird als mechanischer Wirkungsgrad η_{mech} bezeichnet. Der Pumpenwirkungsgrad besteht aus einem Hydraulischen und einem Mechanischen:

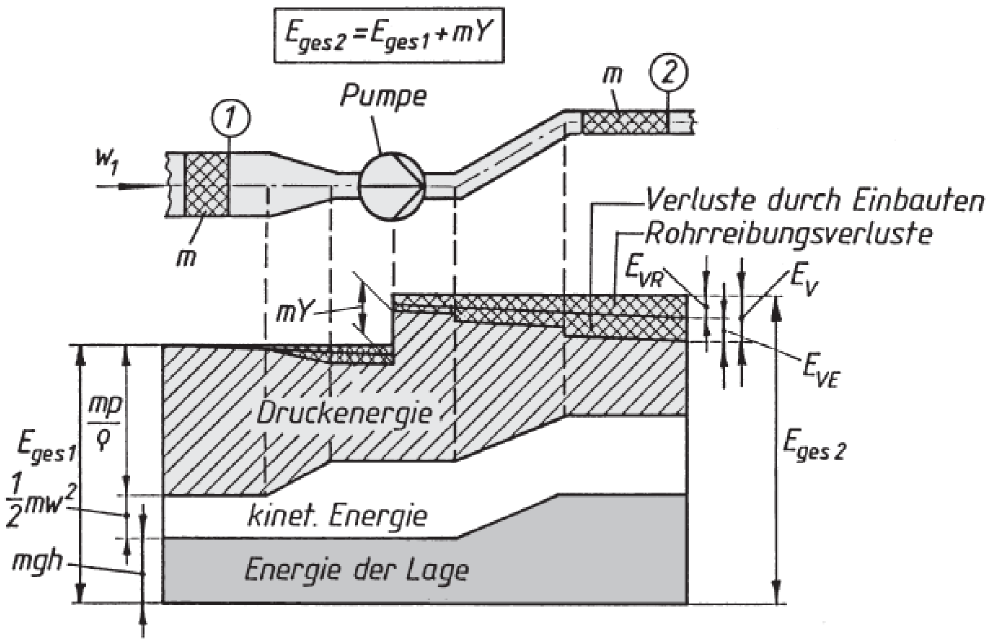
$$\eta_{Pumpe} = \eta_{hyd} \cdot \eta_{mech} \qquad [\ ]$$

Wird nun die Welle durch ein Elektromotor angetrieben, der wiederum einen eigenen elektrischen Wirkungsgrad η_{el} besitzt, errechnet sich der Gesamtwirkungsgrad zu:

$$\eta_{ges} = \eta_{Pumpe} \cdot \eta_{el} = \eta_{hyd} \cdot \eta_{mech} \cdot \eta_{el} \qquad [\ ]$$

Exemplarische Darstellung der erweiterten Bernoulli Gleichung:

Ein System bestehend aus einer Rohrleitung mit Querschnittsänderung, Umlenkung, Höhenänderung, Arbeitseintrag durch Pumpe und Verlusten ist unten gezeigt. Neben der graphischen Darstellung des Verlaufes der verschiedenen Energieformen entlang des Strömungspfades von 1 nach 2, sind auch die verschiedenen Formen der Bernoulli Gleichung dargestellt (Anmerkung; Geschwindigkeit hier w).



Energiegleichung $\frac{w_1^2}{2} + g\,h_1 + \frac{p_1}{\rho} + Y = \frac{w_2^2}{2} + g\,h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\Delta p_v}{\rho}$	SI-Einheit Nm/kg; m^2/s^2
Höhengleichung $\frac{w_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{w_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_v$	m
Druckgleichung (Gase, Ventilatoren: $\rho\,g\,h \approx 0$) $\frac{1}{2}\rho\,w_1^2 + \rho\,g\,h_1 + p_1 + \Delta p_t = \frac{1}{2}\rho\,w_2^2 + \rho\,g\,h_2 + p_2 + \Delta p_v$	Pa