

ET+V

Elektrotechnik Vertiefung

HSLU T&A

Kapitel Kondensator

24.9.2015

Lernziele

- Sie kennen den Begriff Kapazität und können diese Grösse in einfachen geometrischen Anordnungen berechnen
- Sie können Kondensatornetzwerke umformen
- Sie können Ladungsmengen und Spannungen in Kondensatornetzwerken berechnen
- Sie können die im Kondensator gespeicherte Energie berechnen
- Sie können Feldgrössen im parallel geschichteten Dielektrikum berechnen.
- Sie kennen die Spannungs-Strombeziehung an einer Kapazität

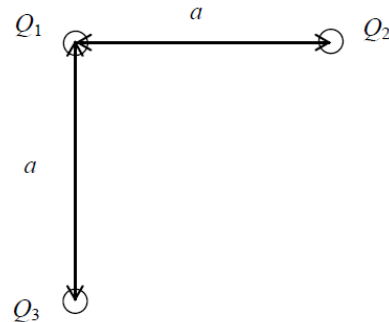
Fragen zu Hausaufgaben?

Gegeben: Eine Anordnung von Punktladungen

E1-1: Elektrostatisches Feld und Kräfte

E2-1: Elektrostatisches Feld

E1-1



Die Punktladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 bilden die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks.

Daten: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0,5 \text{ nAs}$ (positive Ladungen)

$a = 2 \text{ cm}$ $\epsilon_r = 1$

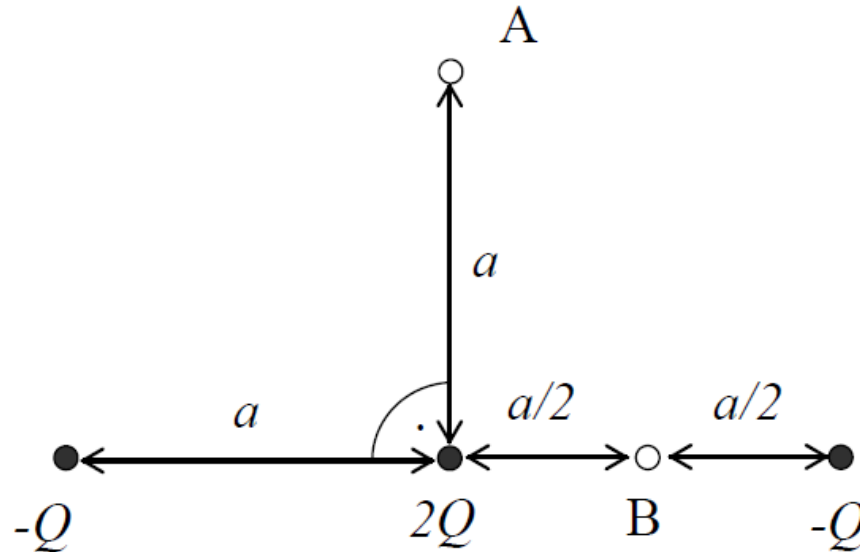
- Berechnen Sie den Betrag der Kraft auf die Ladung Q_1 (2 Pt.) und zeichnen Sie den Vektor im oben dargestellten Bild ein.
- Bestimmen Sie den Ort, wo eine zusätzliche negative Ladung $Q_4 = -0,5 \text{ nAs}$ angeordnet werden muss, so dass auf Q_1 keine Kraft wirkt. Berechnen Sie den gesuchten Ort und zeichnen Sie ihn im oben dargestellten Bild ein.
- Zeichnen Sie (qualitativ) den Verlauf der Feldlinien im unten vorbereiteten Bild ein. (Feldlinien in der Ebene aufgespannt durch die drei Ladungen, ohne Q_4)



E2-1

Aufgabe 1: Elektrostatisches Feld und Kräfte

Drei Punktladungen sind gemäss Bild auf einer Linie angeordnet. (Medium: Luft)



Daten: $|Q| = 1 \text{ nC}$ $a = 10 \text{ cm}$

- Bestimmen Sie die elektrischen Feldstärken in den Punkten A und B .
(Betrag berechnen und Richtung in der Zeichnung eintragen)
- Zeichnen Sie die Feldlinien im Bild ein.

Repetitionsfragen

1. Elektrostatisches Feld
Ursache, Wirkung?
2. Begriffe
 1. Elektrische Feldstärke
 2. Verschiebungsdichte
3. Einfluss des Materials im Feldraum?
4. Satz von Gauss. Spielt die Form der Hüllfläche eine Rolle?
5. Elektrisches Feld um Punktladung?
6. Spielt der Integrationsweg für die Spannung eine Rolle?
7. Was wird integriert?

Kondensator-1 (E6,S1)

- Bauelement oder Anordnung mit voneinander isolierten Metallelektroden. Isolation dazwischen gefüllt mit isolierendem Dielektrikum
- Kapazität C als charakteristischen Kennwert (Geometrie Elektroden, Material Dielektrikum) in F (Farad)

$$Q = C \cdot U \quad [C] = \frac{As}{V} = F \text{ (Farad)}$$

Allgemein gilt:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Kondensator-2 Berechnung von Kapazitäten (E6,S.2)

Strategie

1. Fläche A mit $\Psi = Q$ und $|\vec{E}| = \text{konst.}$ um (unbek.)

Ladung Q legen $Q = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$

2. Bestimmung von $\vec{D} = f(r)$

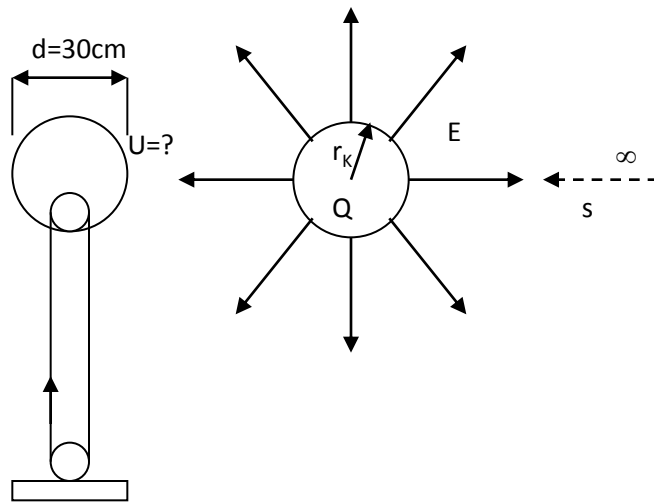
3. daraus folgt $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$

4. Bestimmung von $U = \int_{\text{Elektrode 1}}^{\text{Elektrode 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

5. daraus folgt $C = Q/U$

Kondensator-2 Berechnung von Kapazitäten (E6,S.3)

Beispiel: Kugel im Raum



Über den Satz von Gauss kann man Q bestimmen

$$Q = D \cdot \int_A dA$$

Wenn man als Hüllfläche gleich die Kugeloberfläche nimmt, ist $\int_A dA = A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r_K^2$

$$Q = D \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_K^2 \rightarrow \text{mit } D = \epsilon_0 \cdot E$$

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

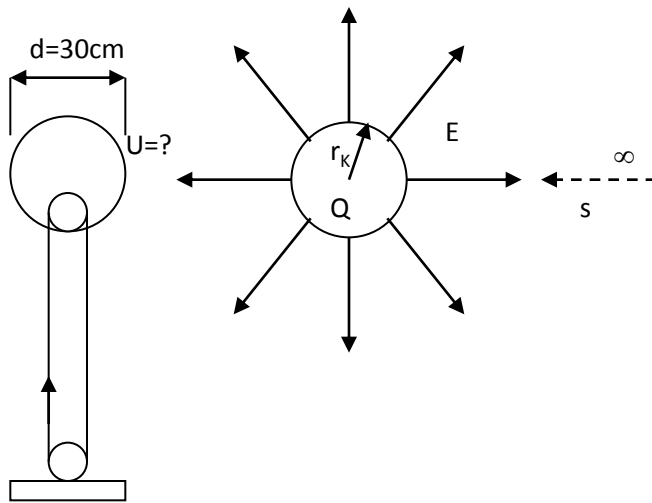
$$U = \int_{\infty}^{r_K} E \cdot ds = \int_{\infty}^{r_K} \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot s^2} \cdot ds = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_{\infty}^{r_K} \frac{1}{s^2} \cdot ds$$

$$U = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left[\frac{1}{s} \right]_{\infty}^{r_K} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_K} - 0 \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K}$$

$$\underline{C} = \frac{Q}{U} = \frac{Q \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K}{Q} = \underline{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K}$$

Kondensator-2 Berechnung von Kapazitäten (E6,S.3)

Beispiel: Maximale Spannung



Über den Satz von Gauss kann man Q bestimmen

$$Q = D \cdot \int_A dA$$

Wenn man als Hüllfläche gleich die Kugeloberfläche nimmt, ist $\int_A dA = A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r_K^2$

$$Q = D \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_K^2 \rightarrow \text{mit } D = \epsilon_0 \cdot E$$

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K^2} \rightarrow Q = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K^2$$

$$U = \int_{\infty}^{r_K} E \cdot ds = \int_{\infty}^{r_K} \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot s^2} \cdot ds = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_{\infty}^{r_K} \frac{1}{s^2} \cdot ds$$

$$U = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left[\frac{1}{s} \right]_{\infty}^{r_K} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_K} - 0 \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K}$$

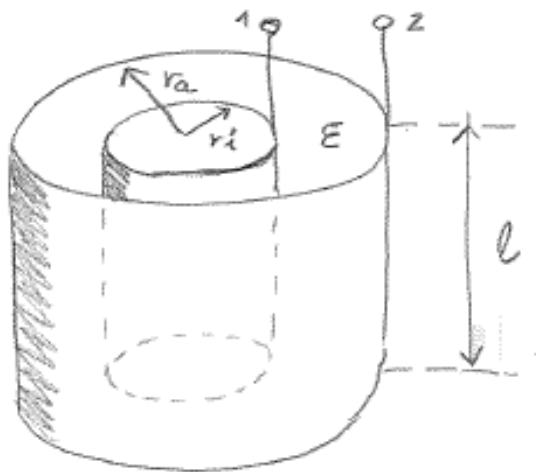
$$U_{\max} = \frac{E_{\max} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_K} = E_{\max} \cdot r_K$$

Deshalb sind an Hochspannungsanlagen alle Teile abgerundet

Wie gross wird die Spannung an der Kugel mit einem Radius von 5cm?

Kondensator-2 Berechnung von Kapazitäten (E6,S.3)

Beispiel: Zylinderkondensator



$$Q = D \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \quad l = \text{Länge}$$

$$\Rightarrow D = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l} \quad \text{und} \quad E = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot r \cdot l}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

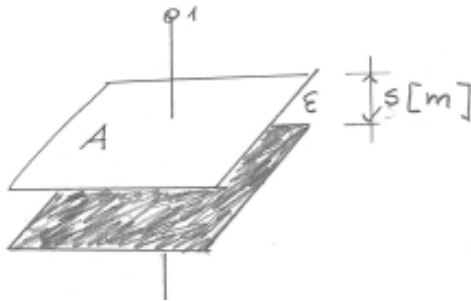
$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln(r_a/r_i)}}$$

r_i = Aussenrad. Innenelektrode

r_a = Innenrad. Aussenelektrode

Kondensator-2 Kapazitäten (E6,S.3)

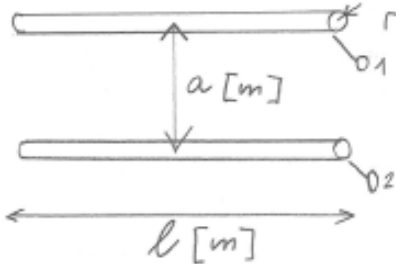
Weitere Beispiele



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot A}{s}$$

Plattenkondensator

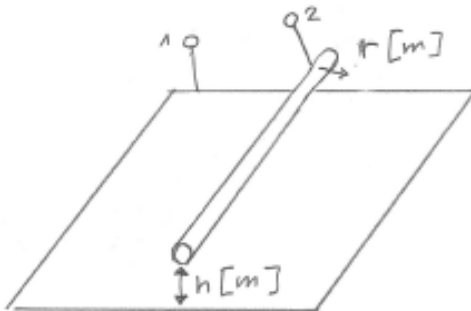
Plattenabmessung, gross
im Vergleich zu s



$$C \cong \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln(a/r)}$$

$a \gg r$

Lange Paralleldrahtleitung



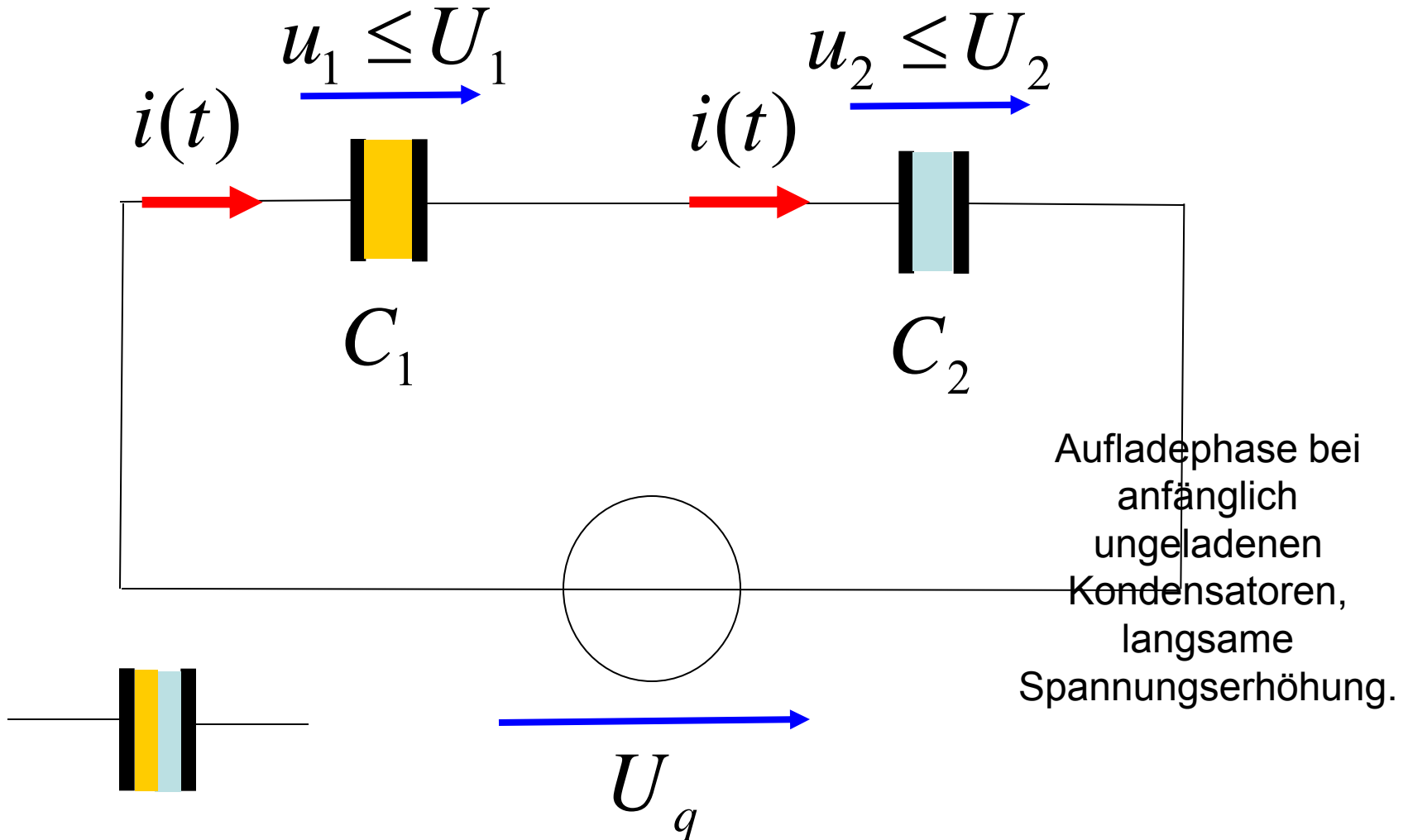
$$C \cong \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln(2h/r)}$$

$h \gg r$

*Langer Einzelleiter
über Erde*

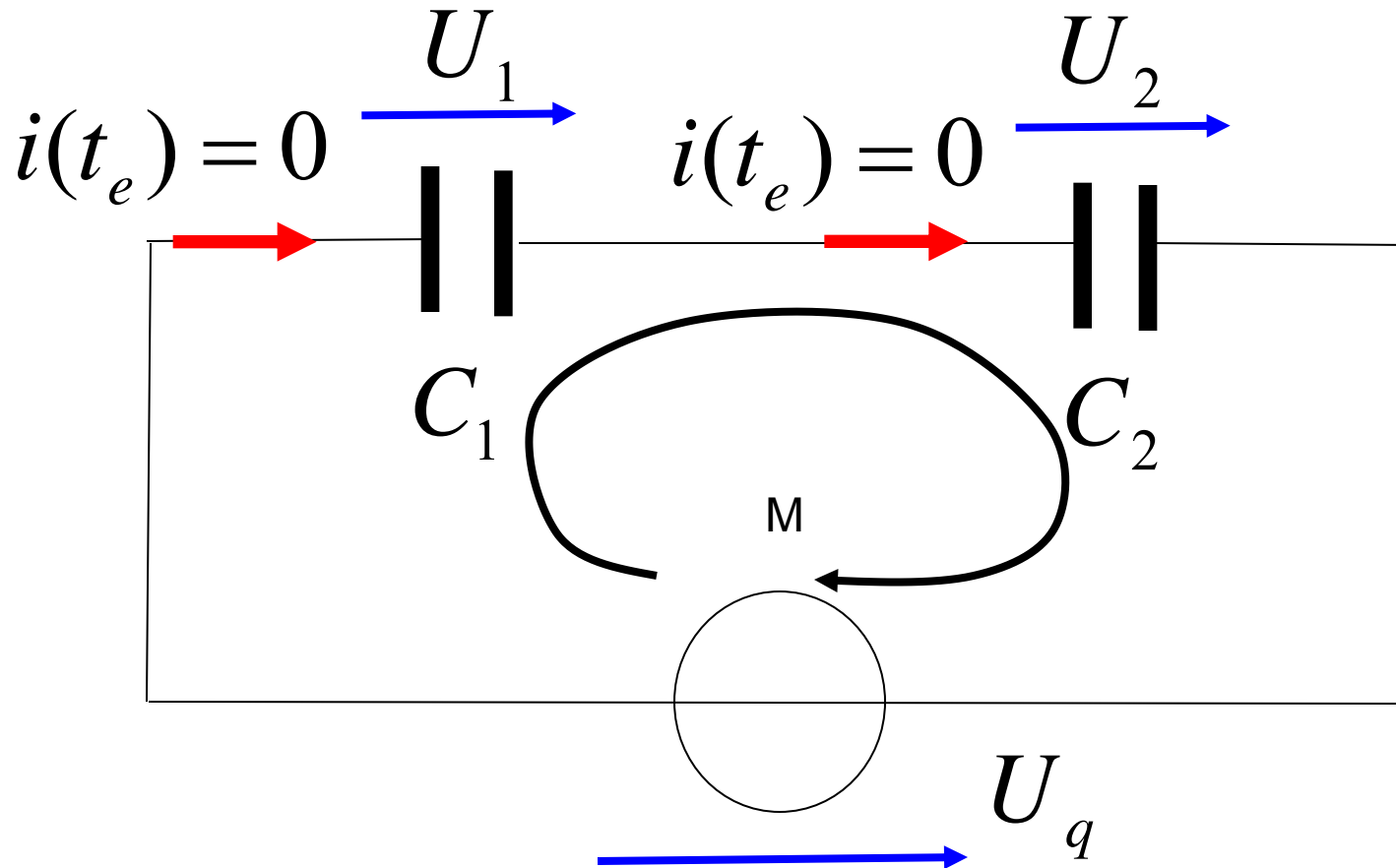
Spannungsverteilung zwischen seriegeschalteten Kondensatoren-1

Praxisbezug: - mehrschichtige Dielektrika



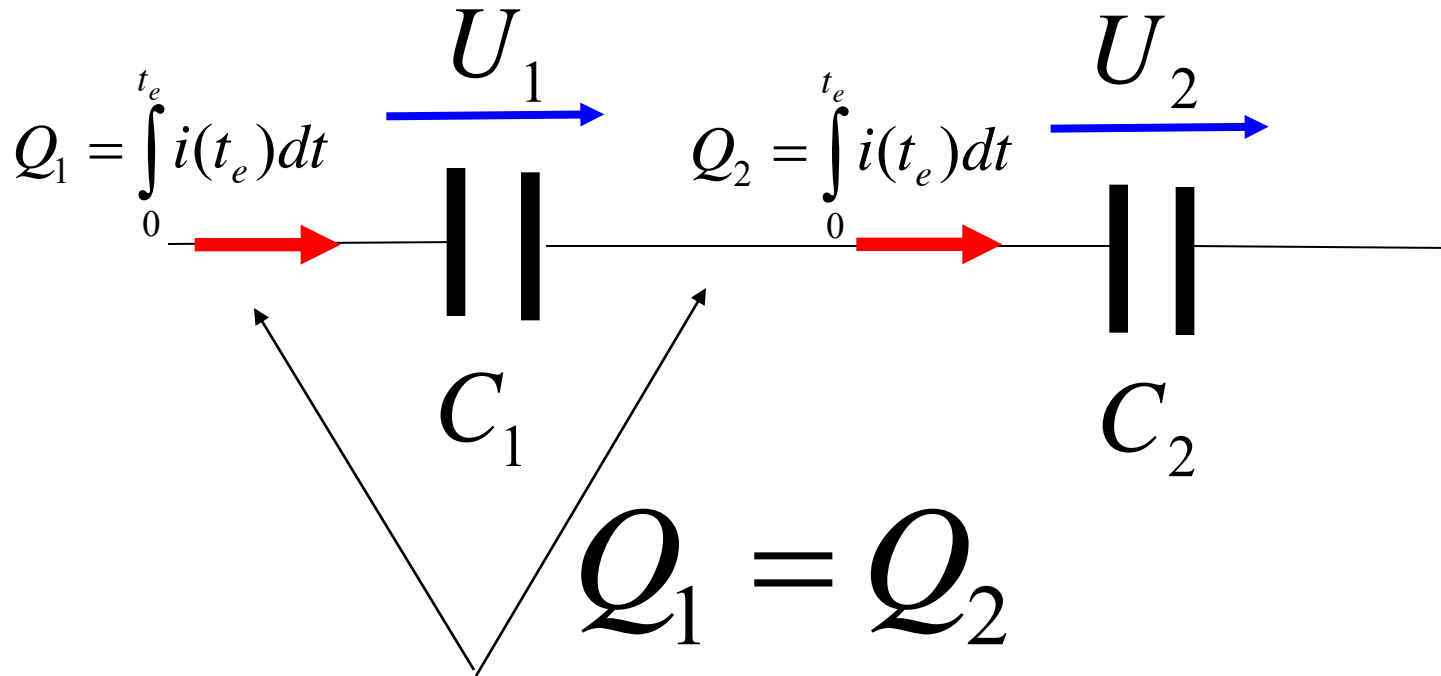
Spannungsverteilung zwischen seriegeschalteten Kondensatoren-2

Gleichgewichtszustand nach t_e



$$\text{Masche } M : -U_q + U_1 + U_2 = 0$$

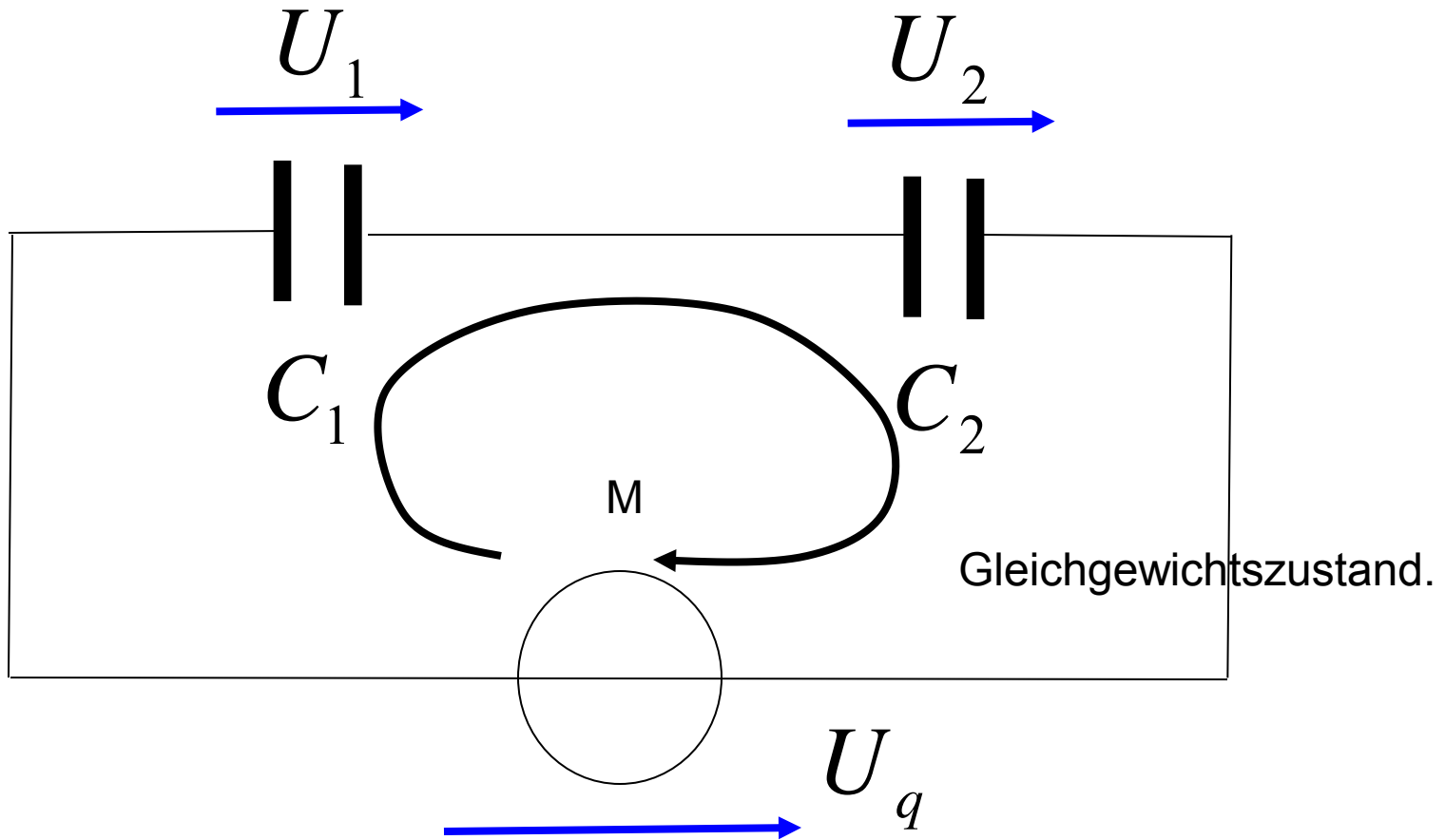
Spannungsverteilung zwischen seriegeschalteten Kondensatoren-3



Gleiche Ladungsmenge, da beide Kondensatoren wegen der Serieschaltung den gleichen Strom über die gleiche Ladezeit t_e haben

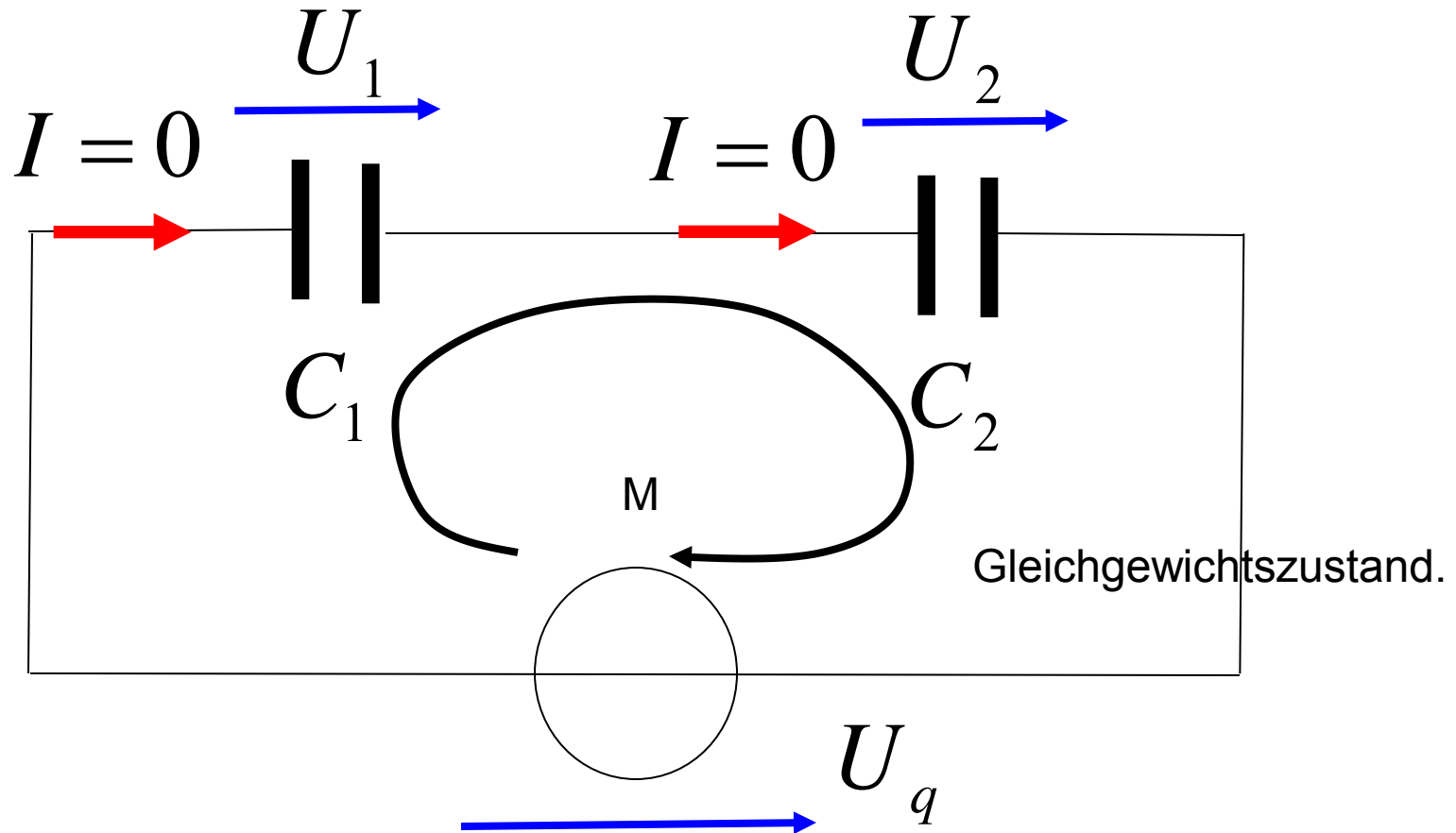
$$Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow C_1 U_1 = C_2 U_2$$

Spannungsverteilung zwischen seriengeschalteten Kondensatoren-4



$$\text{Masche } M : -U_q + U_1 + U_2 = 0$$

Spannungsverteilung zwischen seriengeschalteten Kondensatoren-5



$$\text{Masche } M : -U_q + U_1 + U_2 = 0$$

Kapazitive Spannungsteilung

$$\text{Masche } M : -U_q + U_1 + U_2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ladungsgleichheit} : Q_1 = Q_2 = U_1 \cdot C_1 = U_2 \cdot C_2 \quad (2)$$

$$U_1 = \frac{U_2 \cdot C_2}{C_1}$$

$$U_q = U_1 + U_2 = \frac{U_2 \cdot C_2}{C_1} + U_2$$

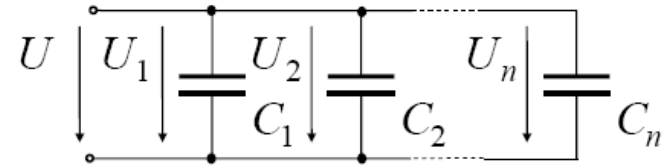
$$C_1 \cdot U_q = U_2 \cdot C_2 + C_1 \cdot U_2$$

$$U_2 = \frac{C_1 \cdot U_q}{C_2 + C_1}$$

Kondensator-3 Kondensatorschaltungen

(E6,S.4)

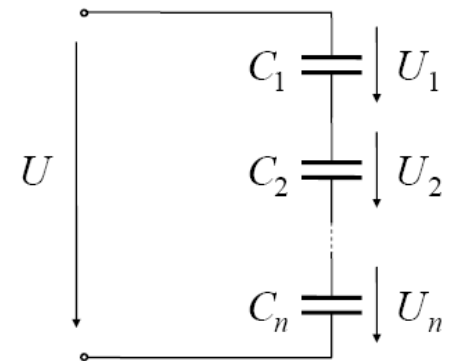
Parallelschaltung $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Serieschaltung $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$

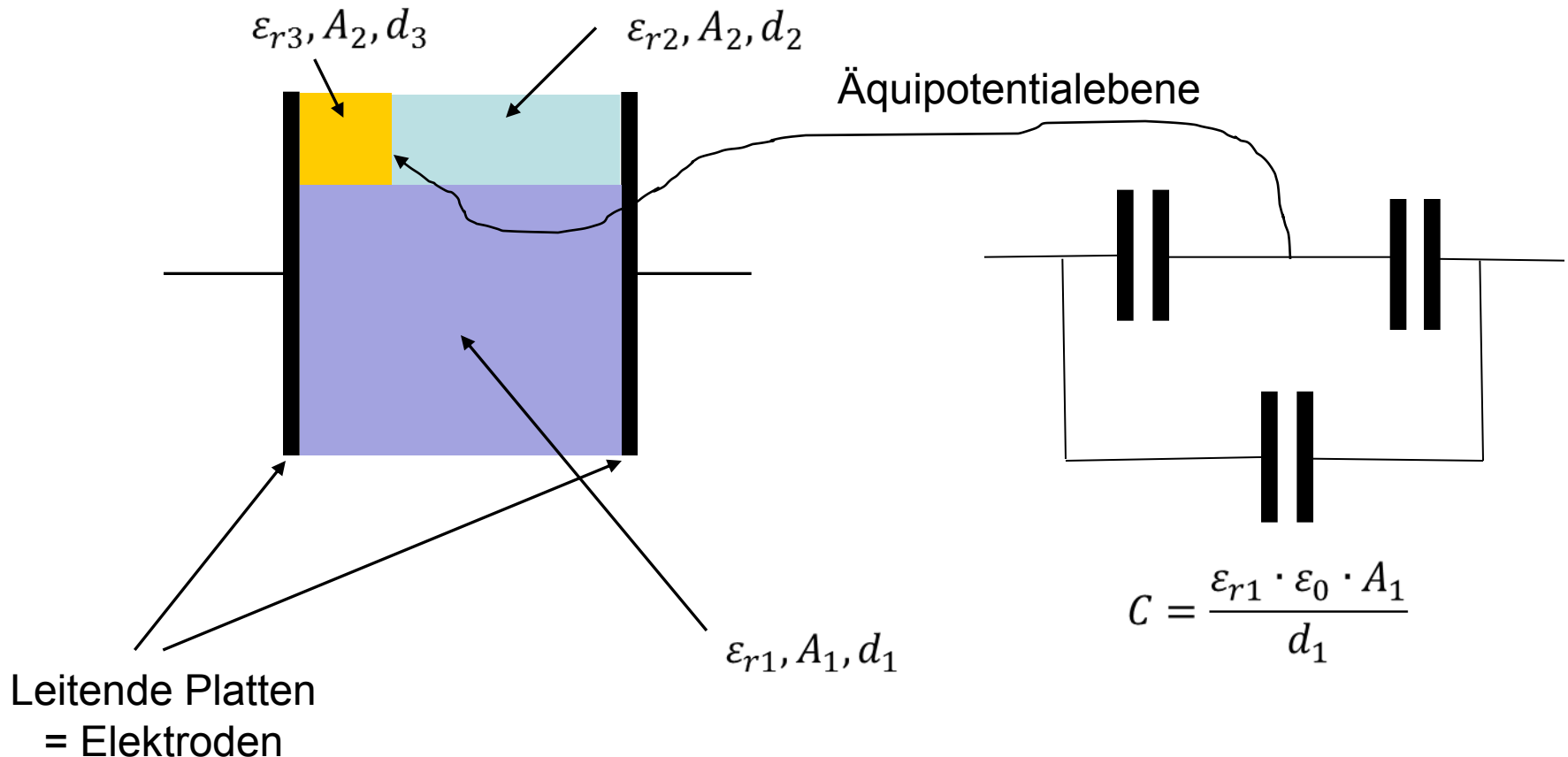
$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$



Bei 2 Kondensatoren $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

Ersatzschaltung mit Kondensatoren für parallelgeschichtete Dielektrika

Beispiel mit 3 quaderförmigen Feldräumen



Kondensator- 4 Energie im elektrostatischen Feld (E9,S.1)

Die Ladung dQ wird auf einen Kondensator gebracht:

$$dW_e = u \cdot dQ = u \cdot C \cdot du$$

Aufladung ausgehend von $u = 0$ bis U :

$$W_e = C \int_0^U u \cdot du = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} [Ws]$$

Energiedichte:

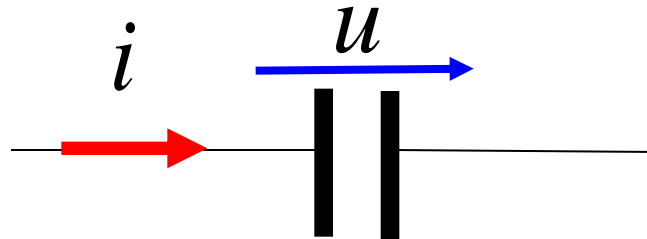
$$w_e = \frac{W_e}{Volumen} \left[\frac{Ws}{m^3} \right]$$

Beispiel 2010: Supercap
3-5 Wh/kg bzw. 3.4-5.7 kWh/m³

Vergleich Li-Ion-Akku
100 Wh/kg

Vergleich mit kinetischer Energie $mv^2/2$ z.B aus Schwungrad

Kondensator-5 Strom-Spannungsbeziehung an der Kapazität (E11,S.1)



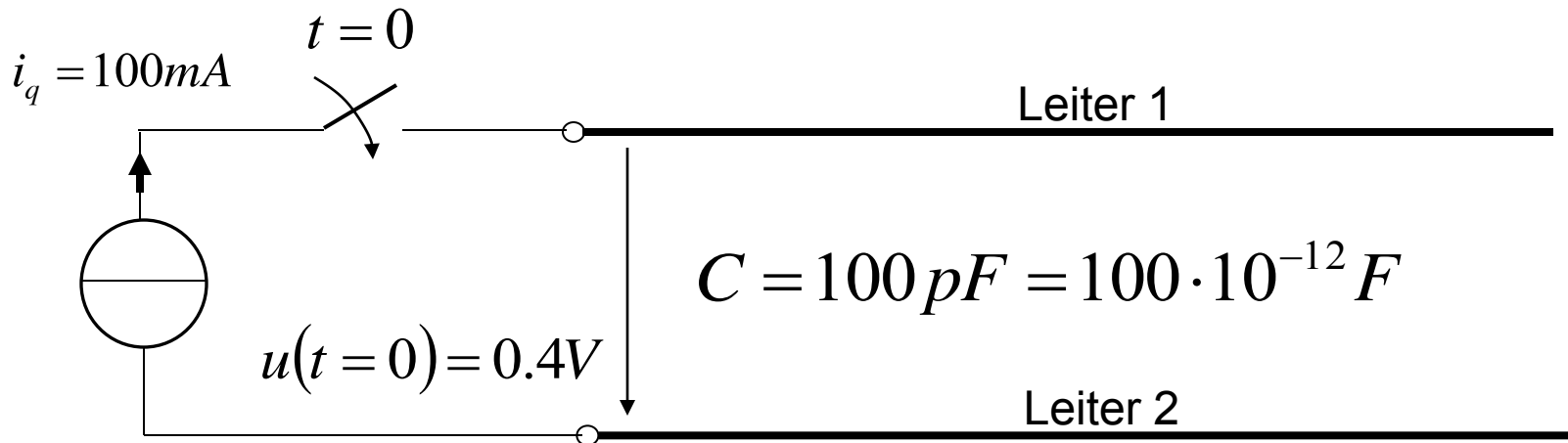
Differentialform $dq = C \cdot du$ $\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ $i = C \frac{du}{dt}$

Der Strom "durch" einen Kondensator ist mit einer Änderung der Spannung verbunden. Der Strom ist Null, wenn die Spannung konstant ist.

Integralform $du = \frac{1}{C} i \cdot dt$ $u = \frac{1}{C} \int_0^{t_f} i \cdot dt + U_0$

Die Spannung am Kondensator setzt sich zusammen aus der Anfangsspannung U_0 und einem Anteil aus der im Zeitraum 0 bis t_f zu- oder abgeflossenen Ladung.

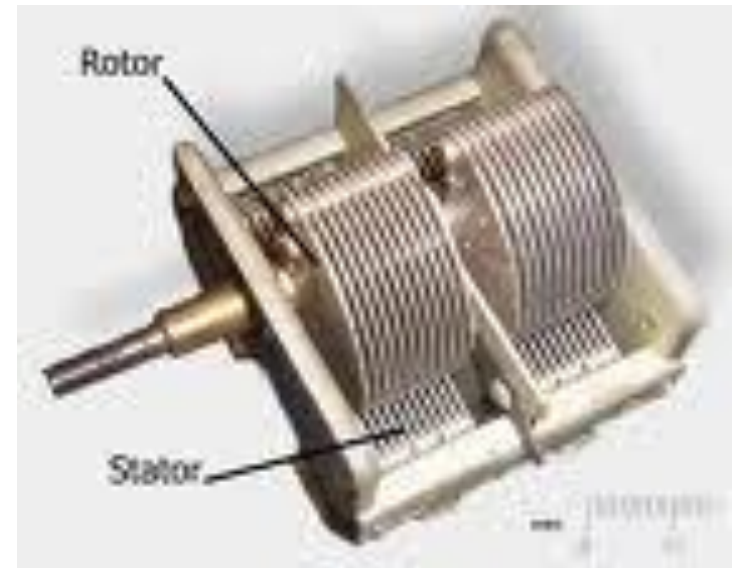
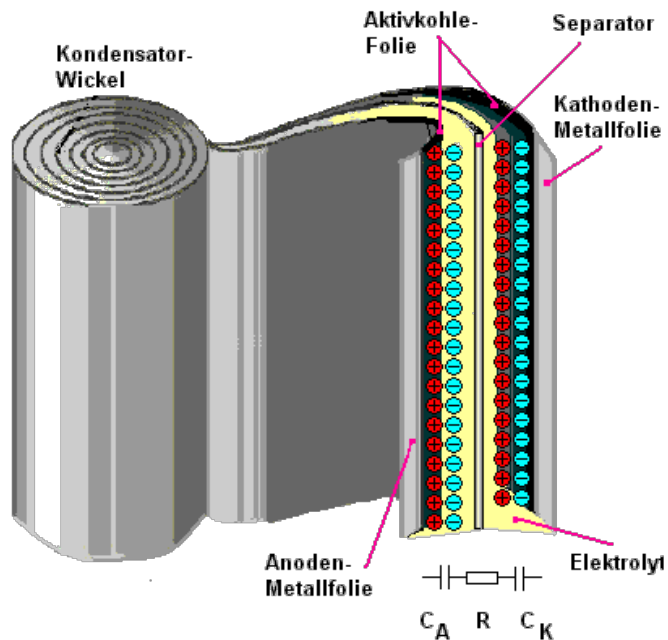
Beispiel: Anstiegsgeschwindigkeit der Signale in einem Mikroprozessor-System



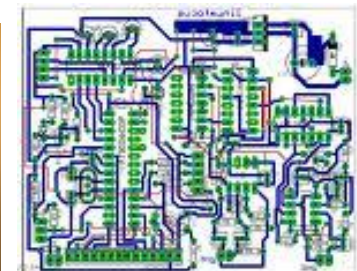
Wie lange dauert es, bis die Spannung zwischen den Leitern auf 3.4 V angestiegen ist? Wellenausbreitungs-Phänomen vernachlässigen. Zum Zeitnullpunkt herrsche zwischen den Leitern eine Spannung von 0.4V. 3ns

Bauformen von Kondensatoren

Gewollt:



Ungewollt: Kabel, Leitungskapazität



Praxisbezug

- Häufige Anwendung Kondensatoren
 - Filter
 - Bereitstellen von el. Leistung
(Stützkondensatoren in elektronischen Schaltungen)
- Energiespeicherung in Kondensatoren
(Fahrzeuge, Zwischenkreis)
- Netzwerke mit geschalteten Kondensatoren

Aufgaben – Phase der Studierenden

Dozent hilft nach Möglichkeit individuell

1-2L

Gegeben: Ein Netzwerk von Kondensatoren
mit bekannten Kapazitäten liegt an
einer Spannungsquelle

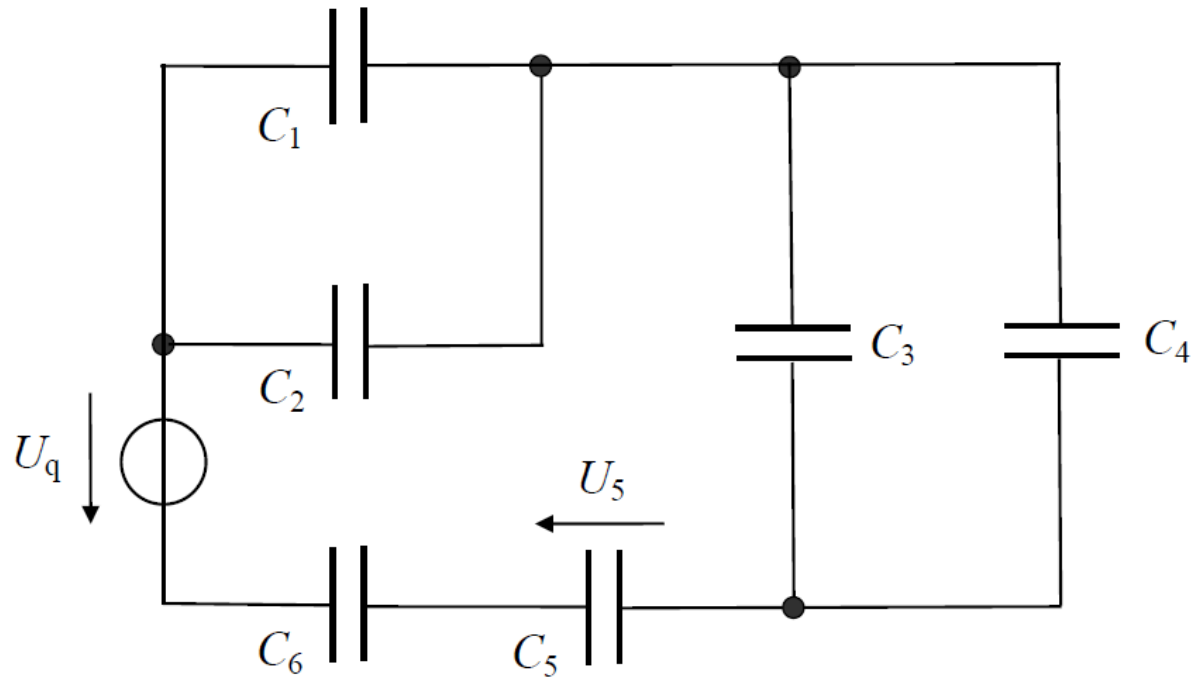
Gesucht: Teilspannungen

E1-2:

E2-3:

E1-2

Aufgabe 2: Spannung an Kondensator



Daten:

$U_q = 12 \text{ V}$	$C_1 = 1,5 \text{ } \mu\text{F}$	$C_2 = 1,5 \text{ } \mu\text{F}$	$C_3 = 0,5 \text{ } \mu\text{F}$
	$C_4 = 0,5 \text{ } \mu\text{F}$	$C_5 = 1 \text{ } \mu\text{F}$	$C_6 = 2,2 \text{ } \mu\text{F}$

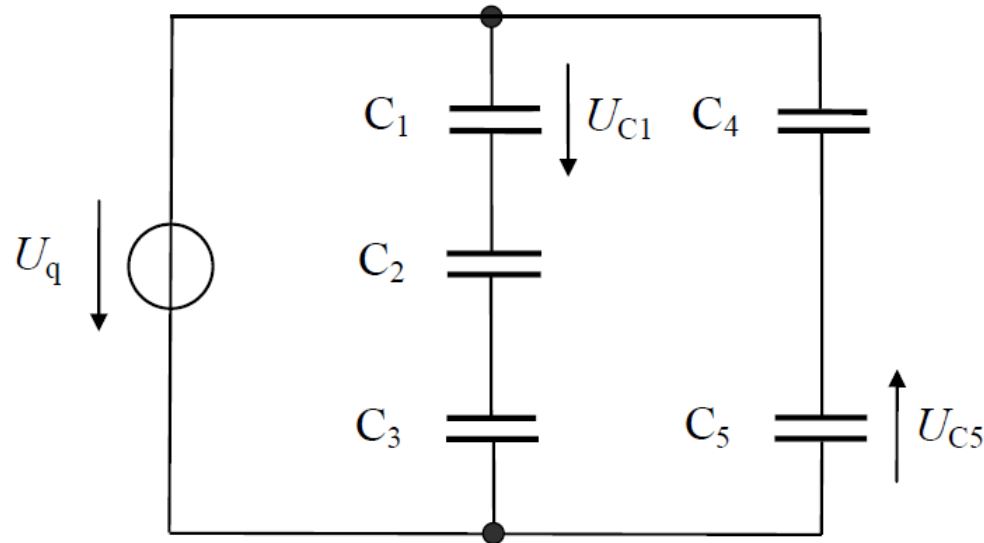
Die Spannungsquelle wird langsam hochgefahren, dabei werden die vorher spannungsfreien Kondensatoren aufgeladen.

Bestimmen Sie die Spannung U_5 .

E2-3

Aufgabe 3: Netzwerk mit Kondensatoren

Die abgebildete Kondensatorschaltung wird mit der Spannungsquelle U_q langsam aufgeladen. Zu Beginn waren alle Kondensatoren entladen.



Daten:

C_1	$=$	$5 \mu\text{F}$	C_2	$=$	$2 \mu\text{F}$	C_3	$=$	$1 \mu\text{F}$
C_4	$=$	$1 \mu\text{F}$	C_5	$=$	$3 \mu\text{F}$			

- Welche Quellenspannung U_q muss eingestellt werden, damit für U_{C1} eine Spannung von 40 V gemessen wird?
- Für U_q wird 300 V eingestellt:
Bestimmen Sie die Spannung U_{C5} ,
die in der Schaltung total gespeicherte Ladung Q_T und
die total gespeicherte Energie W_T .