Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

Aufgabe 1: Kurvenintegrale

Bestimmen Sie für die gegebenen Vektorfelder $\vec{F}$ und Wege $\vec{\gamma}(t)$ die Linienintegrale. Skizzieren Sie die Vektorfelder und die Wege, im angegebenen Bereich.

a)

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 4$$

b)

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ -y \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\,\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le \pi$$

Hinweis zu b: $\sin(2\,x) = 2\,\cos(x)\,\sin(x)$

Aufgabe 2: Kurvenintegral im 2d

Gegeben ist das konstante Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und eine Kurve parametrisiert durch

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\,\cos(t) + 3 \\ 2\,\sin(t) \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, \pi]$

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld und die Kurve. Geben Sie die Umlaufrichtung der Kurve an.

b) Berechnen Sie das Wegintegral von $\vec{F}$ entlang der Kurve $\vec{\gamma}$. (Lsg: -8)

c) Entlang welcher Kurven verschwindet das Wegintegral? (Überlegen Sie sich das mit einer Skizze, keine Rechnung erforderlich)

Aufgabe 3: Kurvenintegral im 3d

Sie steigen mit einem Flugzeuges der Masse $m = 2000$ kg längs einer Schraubenlinie mit Radius $r = 1000$ m und mit konstanter Steigung $h = 100$ m (Höhenzunahme nach einer Umdrehung) Richtung Himmel.

Da der Radius sehr klein ist, darf die Erdoberfläche als Ebene betrachtet werden.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schraubenlinie $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ mit Startpunkt $(r, 0, 0)$ und Endpunkt $(r, 0, 2\,h)$

Wir betrachten als Kraftfeld eine Überlagerung aus der Erdgravitation $\vec{F}_G$ (nur in z-Richtung) und einem Windfeld $\vec{F}_W$.

$$\vec{F}_G = -G\,M\,m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{(z-R_E)^2} \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_W = 50 \begin{pmatrix} -y + 20 \\ x \\ -2\,z \end{pmatrix}$$

Wobei $R_E = 6.378 \cdot 10^6$ der Erdradius ist. Die letzte Komponente im Windvektor $-2\,z$ stellen Fallwinde dar, die mit steigender Höhe z zunehmen.

b) Berechnen Sie die erforderliche Steigarbeit längs der Schraubenlinie aus a) falls Sie nur das Gravitationsfeld $\vec{F}_G$ berücksichtigen.

(Lsg: $W_G = \frac{2\,G\,M\,m\,h}{(2\,h - R_E)\,RE} = -3.918$ MJ, also muss Energie reingesteckt werden.)

c) Die Arbeit aus b) könnte man noch viel einfacher berechnen, falls man berücksichtigt, dass die Gravitationsbeschleunigung bei solch kleiner Höhenzunahme nahezu konstant bleibt. Wie?

d) Bestimmen Sie nun die Steigarbeit, falls noch zusätzlich der Wind berücksichtigt werden soll. *Hinweis:* Wegen der Linearität reicht es aus, nur den Wind zu berücksichtigen und am Schluss die Energie mit der Anwort aus b) zu addieren.

(Lsg: Integral $W_W = 50 \int_{t_1}^{t_2} r^2 - 20\,r\,\sin(t) - \frac{h^2}{2\,\pi^2}\,t\,dt = +626$ MJ. $W_{tot} = +622$ MJ.)

e) Das numerische Resultat aus d) zeigt, dass durch den Steigflug Energie gewonnen wird. Wie ist das möglich? (*Tipp:* Skizze der Bahn und des Vektorfeldes)

Viel Spass!