Aufgabe 1: Unterräume

Ermitteln Sie, ob die angegebenen Teilmengen V von Vektorräumen Unterräume sind oder nicht. Geben Sie eine Basis an, falls es sich um Unterräume handelt.

a) Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Teilmenge $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{wobei} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

b) Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Teilmenge $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{wobei} \quad x_1 + x_2 = 5 \right\}$

c) Vektorraum $\mathbb{P}_2$ mit der Teilmenge $V = \left\{ a\,x^2 + b\,x + c \in \mathbb{P}_2 \quad \text{wobei} \quad b = c = 0 \right\}$

Lösung:

a) Ist ein Unterraum. Er stellt eine Ebene durch den Ursprung mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ dar. Da die Ebene zweidimensional ist, brauchen wir zwei Basisvektoren. Eine mögliche Basis dieses Unterraums ist $(1, -1, 0)^{\mathbf{T}}, (0, 1, -1)^{\mathbf{T}}$.

b) Kein Unterraum, da der Ursprung nicht enthalten ist.

c) Unterraum der Polynome $p(x) = a\,x^2$ mit Basis x^2, somit eindimensional.

Aufgabe 2: Lineare Abbildungen

Ermitteln Sie bei den folgenden Abbildungen ob diese linear sind oder nicht und geben Sie bei den linearen Abbildungen die Matrizen der Abbildungen bezüglich der Standardbasis an.

Hinweis: Sie können entweder die Bedingungen für lineare Abbildungen durchgehen oder einfacher, Sie ermitteln direkt die Matrix der Abbildung nach dem Rezept aus der Vorlesung und testen, ob die Matrix tatsächlich die Abbildung beschreibt.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5\,x_1 - x_2 \\ 3\,x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$f_6 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2\,x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Linear sind die Abbildungen f_1, f_2, f_3 und f_6. Die Matrizen dieser Abbildungen sind gegeben durch:

f_1: $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

f_2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f_3: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f_6: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Elementare Abbildungen in der Ebene

Bestimmen Sie die Matrizen der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und überlegen Sie sich, ob diese umkehrbar sind oder nicht.

a) Projektion auf die x-Achse.
b) Projektion auf die y-Achse.
c) Spiegelung an der Geraden $y = x$.
d) Rotation um den Winkel ϕ.

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nicht umkehrbar.

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nicht umkehrbar.

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ mit Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Umkehrbar.

d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos(\phi) - x_2 \sin(\phi) \\ x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi) \end{pmatrix}$ mit Matrix $\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$. Umkehrbar.

Aufgabe 4: Polynomintegration

Wir betrachten die Polynomintegration

$$\begin{aligned} \int : \mathbb{P}_3 &\longrightarrow \mathbb{P}_4 \\ p(x) &\longmapsto \int p(x)\,dx \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung linear ist, indem Sie die Definitionen für lineare Abbildungen verwenden.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Standardbasis $x^3, x^2, x, 1$. Setzen Sie dazu die Integrationskonstante gleich Null und schreiben Sie das Polynom $a\,x^3 + b\,^2 + c\,x + d$ als Spaltenvektor $(a, b, c, d)^{\mathbf{T}}$.

Lösung:

a) Die Linearität folgt sofort aus der Linearität der Integration:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Wir integrieren $p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ und erhalten $\int p(x)\,dx = a\,x^4/4 + b\,x^3/3 + c\,x^2/2 + d\,x$. Diese Polynome schreiben wir als Spaltenvektoren in $\mathbb{R}_4$ resp. $\mathbb{R}_5$:

$$\begin{aligned} p(x) \quad &\longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4 \\ \int p(x)\,dx \quad &\longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a/4 \\ b/3 \\ c/2 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_5 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die letzte Komponente (Integrationskonstante) gleich Null gesetzt. Daraus können wir sofort die Matrix der Abbildung herauslesen:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Rotation in $\mathbb{R}^3$

Stellen Sie die Rotation um die y-Achse von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als Matrix dar.

Lösung:

Die Matrix einer Rotation mit Winkel α um die y-Achse ergibt sich durch Ermittlung der Bilder der drei Basiseinheitsvektoren e_1, e_2 und e_3 zu:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Translation in $\mathbb{R}^2$

Verschiebt man einen Vektor $(x, y)^{\mathbb{T}} \in \mathbb{R}^2$ um a in x-Richtung und b in y-Richtung $(x + a, y + b)^{\mathbb{T}} \in \mathbb{R}^2$, so ist diese Abbildung nicht linear, da der Nullpunkt nicht fest bleibt. Mit einem Trick können Sie die Abbildung trotzdem linear machen und als Matrix darstellen. Wie?

Lösung:

Der Trick besteht darin, dass man eine z-Komponente mit $z = 1$ hinzufügt und die folgende Abbildung betrachtet:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$