Stochastik

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Mirko Birbaumer

Hochschule Luzern Technik & Architektur

Wahrscheinlichkeitsverteilung bei (kontinuierlichen) Messdaten

- ZV X_0 uniform auf $W_0 = \{0, 1, \ldots, 9\} \rightarrow P(X_0 = x) = \frac{1}{10}$
- ZV X_1 uniform auf $W_1 = \{0.0, 0.1, \ldots, 9.9\} \rightarrow P(X_1 = x) = \frac{1}{100}$
- ZV X_2 uniform auf $W_2 = \{0.00, 0.01, \ldots, 9.99\} \rightarrow P(X_2 = x) = \frac{1}{1000}$

$\vdots$

- ZV X_i uniform auf $W_i \rightarrow P(X_i = x) = \frac{1}{10^{i+1}}$
- ZV X_∞ uniform auf $W_\infty = [0, 10] \rightarrow P(X_\infty = x) = 0$

Punktwahrscheinlichkeit ist null
bei kontinuierlichen Zufallsvariablen!

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Was ist für eine kontinuierliche ZV der analoge Begriff zur Punktwahrscheinlichkeit $P(X = x)$ bei diskreter ZV?
- Betrachte Messdaten: Aufgrund der relativen Häufigkeiten in beliebigen Intervallen $(a, b]$ können wir die Wahrscheinlichkeiten ermitteln

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b)\,.$$

- Mit der kumulativen Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ folgt

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

Die **(Wahrscheinlichkeits-)Dichte** $f(\cdot)$ ist definiert als Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion:

$$f(x) = F'(x).$$

Interpretation der Wahrscheinlichkeitsdichte

- *Interpretation der Wahrscheinlichkeitsdichte*: die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert in $(x, x + \Delta x]$ annimmt, lautet

$$P(x < X \leq x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x \text{ , falls } \Delta x \text{ klein ist.}$$

- Begründung: aus der Definition einer Ableitung folgt

$$\frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

- In differentieller Schreibweise: $P(x < X \leq x + \mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$

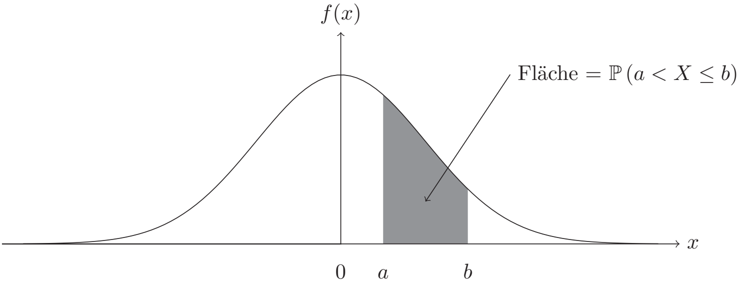
- Aus Dichte kann die kumulative Verteilungsfunktion zurückgewonnen werden:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

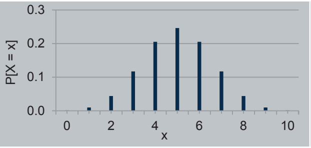
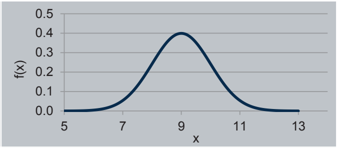
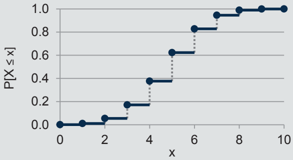
Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsdichte

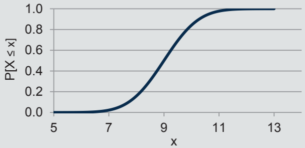
Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsdichte

1. $f(x) \geq 0$ für alle x (da $F(\cdot)$ monoton wachsend ist)
2. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ (Fläche zwischen a und b unter $f(x)$)
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (wegen 2.)



Vergleich der Konzepte (diskret vs. stetig)

<table>
<tr><th></th><th>Diskret</th><th>Stetig</th></tr>
<tr><td>Dichte</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Kumulative Verteilungsfunktion</td><td>

$$F(x) = \sum_{k\,:\,x_k \le x} p(x_k)$$</td><td>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$</td></tr>
<tr><td>Erwartungswert</td><td>$$E[X] = \sum_{k\ge 1} x_k p(x_k)$$</td><td>$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$</td></tr>
</table>

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert und Varianz

Der **Erwartungswert** ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x$$

Die **Varianz** ist wie folgt definiert:

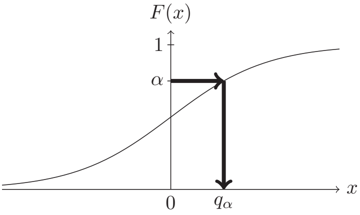
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x) \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \,. \end{aligned}$$

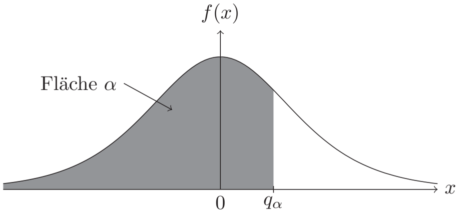
Quantile

Quantile

Die **Quantile** $q(\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ einer Zufallsvariablen X, bzw. deren Verteilung, sind wie folgt definiert:

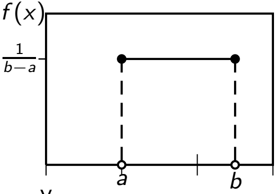
$$P(X \leq q(\alpha)) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad F(q(\alpha)) = \alpha \Leftrightarrow q(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$$



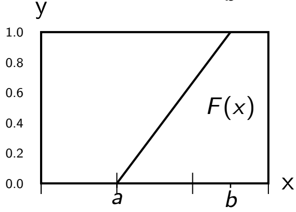


Uniforme Verteilung

- **Situation**: Jeder Wert im Intervall $[a, b]$ ist gleich wahrscheinlich.
- ZV X: Ein Wert aus $[a, b]$
- $X \sim \text{Unif}(a, b)$
  „X ist uniform verteilt auf dem Intervall $[a, b]$“
- Dichte: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ falls $a \leq x \leq b$, sonst 0

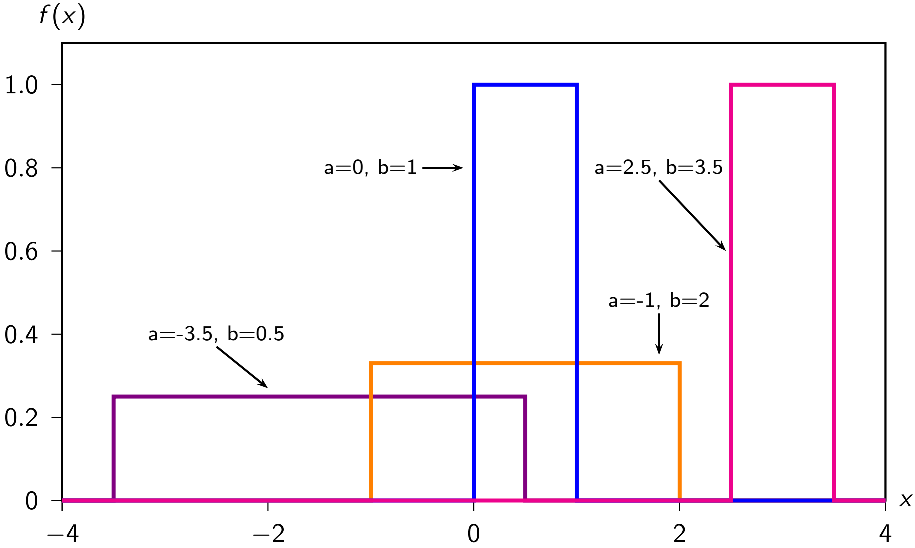


- Verteilungsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x < b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$

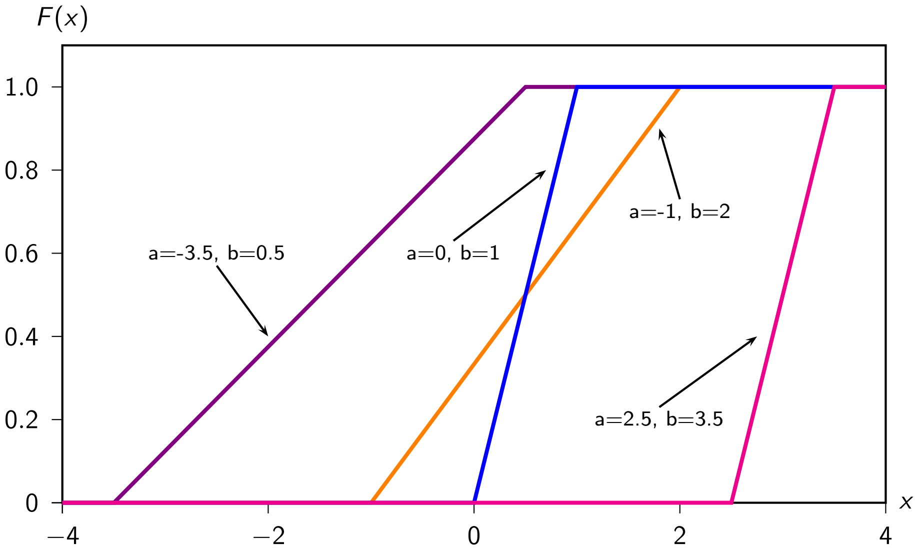


- **Erwartungswert**: $E(X) = \frac{b+a}{2}$ und **Varianz**: $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Uniforme Verteilung: Illustration Dichten



Uniforme Verteilung: Illustration kum. Vert.fn



Beispiel: Wartezeit an Haltestelle

- In Zürich fahren die Trams alle 7 Minuten. Angenommen, Sie kommen zu einer zufälligen Zeit an eine Haltestelle, an der ein Tram fährt. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie höchstens eine Minute warten müssen?

- X: Wartezeit in Minuten

$$X \sim \mathrm{Unif}(0, 7)$$

- $P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1-0}{7-0} = \frac{1}{7}$

Beispiel mit **R**

Betrachten wir das Beispiel mit $X \sim \text{Unif}(0, 7)$, dann könen wir $P(X \leq 1)$

R-Befehl: punif()

```
> punif(1,min=0,max=7)
[1] 0.1428571
```

Der Wert der Wahrscheinlichkeitsdichte an der Stelle $x = 3$ berechnet sich mit:

R-Befehl: dunif()

```
> dunif(3,min=0,max=7)
[1] 0.1428571
```

Wollen wir uniform verteilte Zufallszahlen generieren, z.B. $X_i \sim \text{Unif}(0, 7)$ mit $i = 1, 2, 3$:

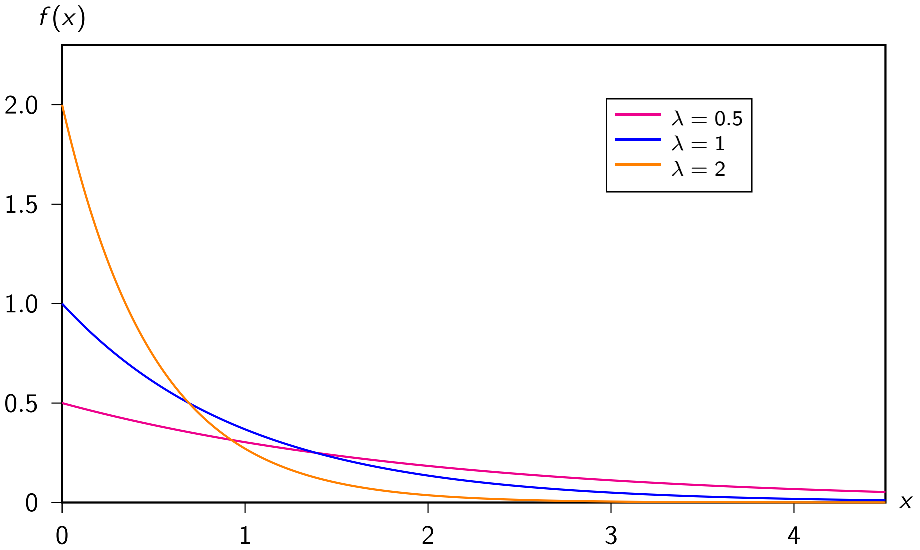
R-Befehl: runif()

```
> runif(3,min=0,max=7)
[1] 0.2299871 5.0154340 0.8013493
```

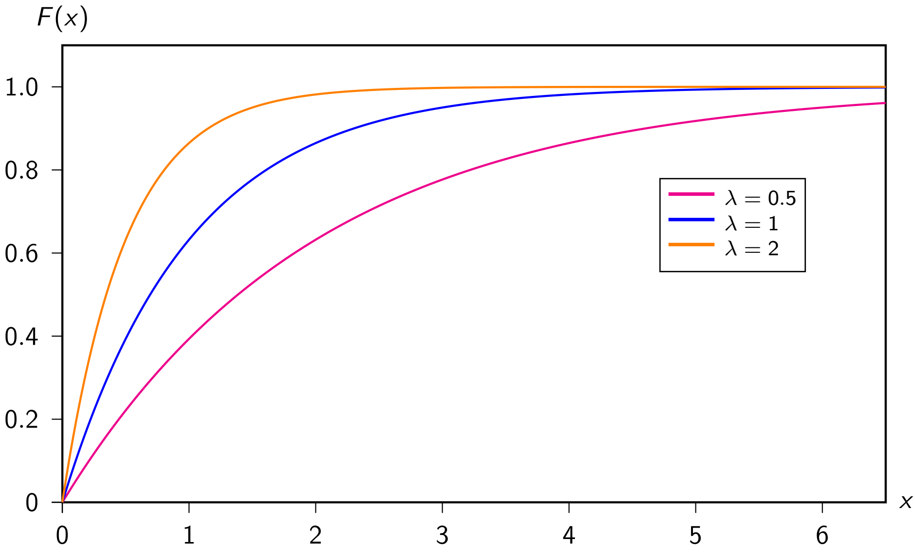
Exponentialverteilung: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

- **Wertebereich** $W_X = [0, \infty)$
- **Dichte** $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x},\ x \geq 0$
- **Verteilungsfunktion** $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x},\ x \geq 0$
- **Erwartungswert** $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- **Varianz** $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- **Anwendung** Lebenszeit techn. Systeme (ohne Alterungserscheinungen), Wartezeiten, stetige Version der geom. Verteilung, ...

Exponentialverteilung: Illustration Dichten



Exponentialverteilung: Illustration kumul. Vert.fn



Beispiel Exponentialverteilung: Radioaktiver Zerfall

- Wie lange dauert es, bis ein bestimmtes radioaktives Isotop zerfällt?
- Modell für diese zufällige Lebenszeit : **Exponentialverteilung**
- T : Zerfallszeit ; somit $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Beispiel Exponentialverteilung: Radioaktiver Zerfall

- Für welche Dauer $t_{1/2}$ wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Isotop bis dahin „überlebt" und dann zerfällt, gleich $\frac{1}{2}$?

- **Antwort**: Median,

$$F(t_{1/2}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

- In einem radioaktiven Sample gibt es sehr viele aktive Isotope. Die relative Häufigkeit der zerfallenen Isotope bis zum Zeitpunkt $\frac{0.693}{\lambda}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ des Zerfalls eines einzelnen Isotops

- $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ wird **Halbwertszeit** genannt

- Bsp.: Halbwertszeit Americium: 16.02 h, Halbwertszeit Uran (235) : 703'800'000 Jahre

Exponential-Verteilung mit **R**

Angenommen $X \sim \text{Exp}(3)$, dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 4)$ mit **R** wie folgt berechnen:

R-Befehl: pexp()

```
> pexp(4,rate=3)
[1] 0.9999939
```

Den Wert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet mit Hilfe von **R** wie folgt

R-Befehl: dexp()

```
> dexp(3,rate=1)
[1] 0.04978707
```

Zusammenhang zwischen Exponential-Verteilung und Poisson-Verteilung

- Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ereignet sich ein radioaktiver Zerfall in einem radioaktiven Sample. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst nach dem Zeitpunkt t erneut ein Zerfall eintreten kann?
- T: Lebensdauer der Atome im radioaktiven Sample
- Wahrscheinlichkeit, dass sich erst nach der Zeit t wieder ein Zerfall ereignet:

$$P(T > t) = P(\text{kein Zerfall in } [0, t])$$

- X: Anzahl Zerfälle im Zeitintervall $[0, t]$ folgt einer Poisson-Verteilung

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}$$

Bedeutung von λ: mittlere Anzahl Zerfälle pro Zeiteinheit
Bedeutung von λt: mittlere Anzahl Zerfälle in $[0, t]$

Zusammenhang zwischen Exponential-Verteilung und Poisson-Verteilung

- Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich erst nach der Zeit t wieder ein Zerfall ereignet:

$$P(T > t) = P(\text{kein Zerfall in } [0, t]) = \frac{(\lambda t)^0 \mathrm{e}^{-\lambda t}}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

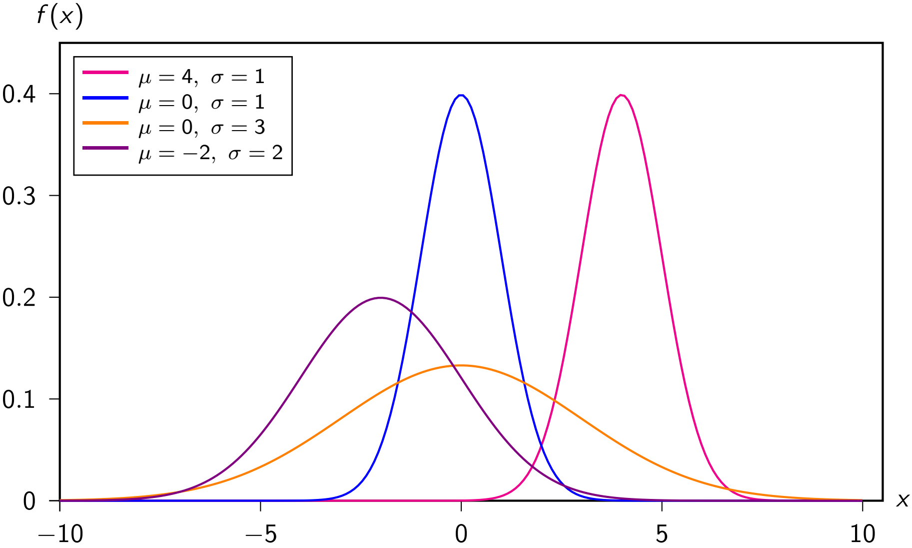
- Also folgt die Lebenszeit T eines radioaktiven Isotops einer Exponentialverteilung mit Parameter λ. Die kumulative Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{für } t \geq 0$$

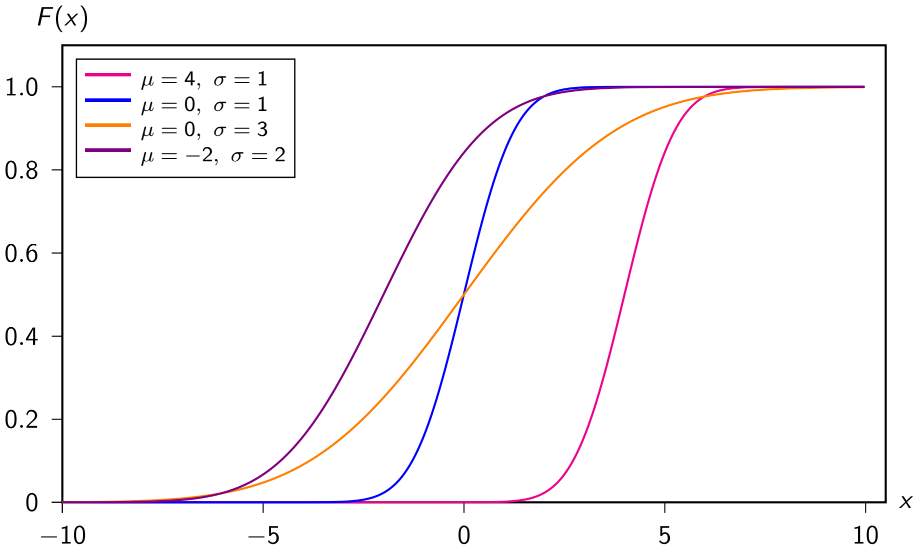
Normalverteilung (Gaussverteilung): $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

- Wertebereich $W = (-\infty, \infty)$
- Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$
- Verteilungsfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- Erwartungswert $E[X] = \mu$
- Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- Anwendung Häufigste Verteilung für Messwerte
- Beispiel IQ Tests folgen einer Normalverteilung mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 15

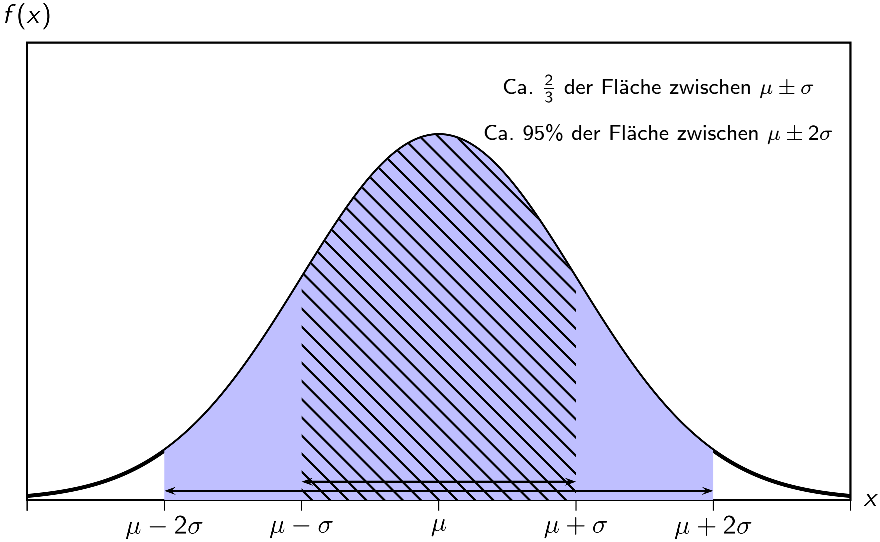
Normalverteilung: Illustration Dichten



Normalverteilung: Illustration kumul. Vert.fn.



Normalverteilung: Eigenschaften



Beispiel mit **R**: Verteilung von IQ

- Ergebnisse von einem IQ Test folgen in etwa einer Normalverteilung mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 15.
- Wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass jemand einen IQ von mehr als 130 hat, also als hochbegabt gilt?
- X bezeichne den IQ, wobei $X \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$. Gesucht: $P(X > 130)$
- Wir bestimmen $1 - P(X \leq 130)$

R-Befehl: pnorm()

```
> 1-pnorm(130,mean=100, sd=15)
[1] 0.02275013
```

- Also rund 2% der Bevölkerung ist hochbegabt

Beispiel mit **R**: Verteilung von IQ

- In welchem Intervall liegen 90% der IQ Ergebnisse?
- Gesucht: c, so dass $P(-c < X < c) = 0.9$, also $P(X < -c) = 0.05$ und $P(X > c) = 0.95$

R-Befehl: qnorm()

```
> qnorm(0.05,mean=100,sd=15)
[1] 75.3272
> qnorm(0.95,mean=100,sd=15)
[1] 124.6728
```

- Also liegen 90% der IQ Ergebnisse im Intervall $[75.3272, 124.6728]$

Normalverteilung: Standardnormalverteilung

- Man spricht von der **Standardnormalverteilung** falls

$$\mu = 0, \ \sigma^2 = 1$$

- Die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnet man mit $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- Die kumul. Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet man mit $\Phi(x)$ (diese ist nicht geschlossen darstellbar, also nicht mit Funktionen wie log(x), oder exp(x)):

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy$$

Normalverteilung: Standardisierung

- Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Man spricht in diesem Zusammenhang von der **Standardisierung** von X (auf Erwartungswert 0 und Varianz 1)
- **Beispiel:** Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 4$. Berechnen Sie $P(X \leq 5)$.

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq \frac{5-2}{2})$$
$$= P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5) = 0.93$$

R-Befehl: pnorm()

```
> pnorm(1.5)
[1] 0.9331928
```