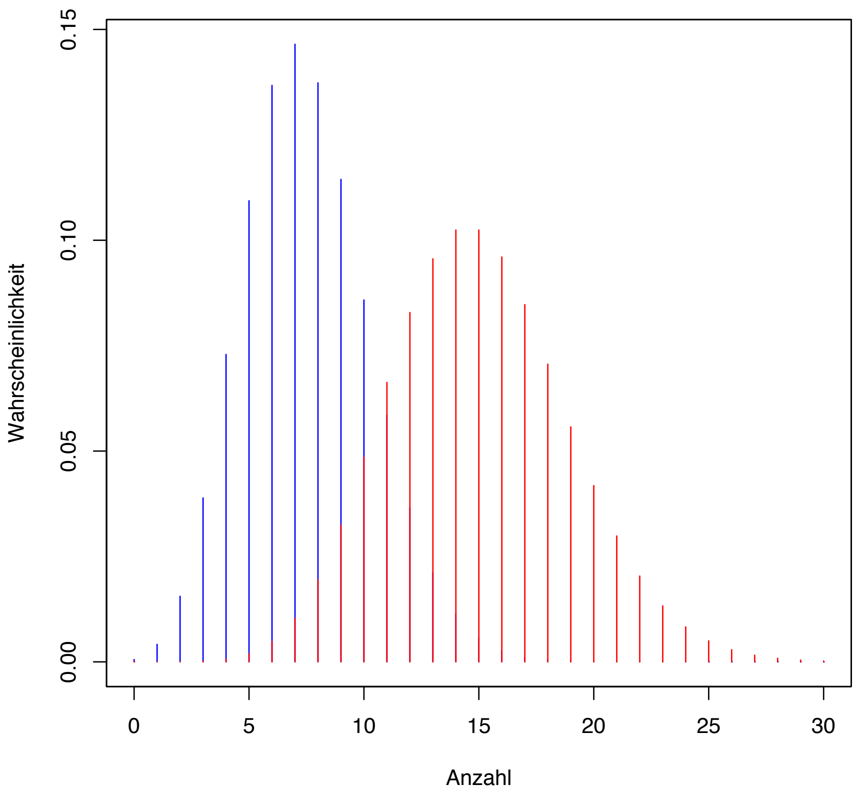
Stochastik

Serie 7

Aufgabe 7.1

Wir bezeichnen mit X die Anzahl Asbestfasern in einem bestimmten Volumen und wählen eine Poissonverteilung $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. In der untenstehenden Abbildung ist die Verteilung von X für die Nullhypothese $\lambda_0 = 7.5$ respektive für die Alternativhypothese $\lambda = 15$ und die kritische Grenze $c = 13$ angegeben ($\alpha = 0.05$, einseitiger Test und c gehört zum Verwerfungsbereich).

```
plot(0:30, dpois(0:30, 7.5), type = "h", xlab = "Anzahl",
     ylab = "Wahrscheinlichkeit", col = "blue")
box()
lines(0:30, dpois(0:30, 15), type = "h", xlab = "Anzahl",
     ylab = "Wahrscheinlichkeit", col = "red")
```



a) Zeichnen Sie in diese Graphik den Verwerfungsbereich, die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art und des Fehlers 2. Art ein.

b) Beurteilen Sie die folgenden Aussagen mit „richtig" oder „falsch". Geben Sie eine kurze Begründung an.

   1. Die Macht wird kleiner, wenn man das Niveau des Tests vergrössert.
   2. Die Alternative mit $\lambda = 20$ hat einen grösseren Fehler 2. Art als die Alternative mit $\lambda = 15$.
   3. Falls die kritische Grenze auf $c = 14$ erhöht wird, so wird die Macht kleiner.

Aufgabe 7.2

Lisa hat eine Maschine gekauft, die das Abwerfen einer Münze filmt und anhand einer komplizierten Videoanalyse das Ergebnis („Kopf" oder „Zahl") vorhersagt. Der Verkäufer hat behauptet, dass man mit dieser Maschine Vorhersagen machen kann, die in 70 % der Fälle zutreffen. Zu Hause möchte die skeptische Lisa schauen, ob man mit Hilfe eines statistischen Tests die Behauptung des Verkäufers nachweisen kann. Sei X die Anzahl der von der Maschine korrekt geratenen Ergebnisse (aus $n = 20$ Versuchen). Zur Modellierung von X verwenden wir also eine Binomialverteilung mit Parametern $n = 20$ und Erfolgswahrscheinlichkeit π, d. h. $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$; $n = 20$. Als Null- und Alternativhypothesen verwenden wir

$$H_0 : \pi_0 = 0.7 \quad \text{und} \quad H_A : \ \pi < 0.7 :$$

Statistische Tests führen wir auf dem 5%-Niveau durch. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen mit „richtig" oder „falsch". Geben Sie eine kurze Begründung an.

1. Falls wir 5 korrekt vorhergesagte Würfe beobachten, so berechnet sich der P-Wert hier als
$$\sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} 0.7^k (1 - 0.7)^{20-k} .$$
2. Der P-Wert errechnet sich dann zu 0.00223.
3. Um die Macht zu berechnen, müssen wir nicht wissen, wie viele korrekt vorhergesagte Würfe beim Versuch eingetreten sind.
4. Lisa berechnet die Macht des Tests für $\pi = 0.4$, der Hersteller für $\pi = 0.75$ (beide für $n = 20$ und für das gleiche Signifikanzniveau). Die berechnete Macht des Herstellers wird kleiner sein als die berechnete Macht von Lisa.
5. Die Macht, die Lisa berechnet, hat den Wert 0.87.

6. Wenn wir das Signifikanzniveau verkleinern, dann wird die Macht generell auch kleiner.
7. Das 95 %-Vertrauensintervall für die Beobachtung $x = 5$ ist $[0.00, 0.46]$.

Aufgabe 7.3

An einer Losbude kaufen Sie 50 Lose. Unter den Losen sind 7 Gewinne.

a) Wie lautet das approximative zweiseitige 95 % Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit? Lassen Sie dazu den Parameterwert π nach „unten" und nach „oben" wandern (in Schritten von 0.01).

R-Hinweis:

```
# Startwert und Endwert von moeglichen Pi-Werten
# bestimmen
pi.trial <- seq(..., ..., 0.01)
for (i in 1:length(pi.trial)) {
    pwert <- pbinom(..., ..., size = 50, prob = pi.trial[i])
    cat(pi.trial[i], pwert, "\n")
}
```

b) Wie lautet das approximative einseitige 95 % Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn die Alternativhypothese nach oben zeigt?

c) Wie lautet das approximative einseitige 95 % Vertrauensintervall für die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn die Alternativhypothese nach unten zeigt?

d) Lesen Sie die Hilfe der Funktion `binom.test` und berechnen Sie damit das zweiseitige und die beiden einseitigen 95 %-Vertrauensintervalle.

Aufgabe 7.4

In dieser Aufgabe wollen wir in einer Simulation die Wahrscheinlichkeit untersuchen, mit der sich Vertrauensintervalle überdecken. Wir betrachten hierzu eine Binomialverteilung mit $n = 50$. Wählen Sie selber eine Erfolgswahrscheinlichkeit π.

a) Simulieren Sie 20 Realisationen von obiger Binomialverteilung und bestimmen Sie für jede Realisation das 95 %-Vertrauensintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit π. Wie oft erwarten Sie, dass der wahre Wert im Vertrauensintervall liegt? Wie oft liegt er tatsächlich drin?

R-Hinweise:

```
# 20 Werte simulieren
p <- ...
x <- rbinom(20, 50, p)
# Grenzen der Intervalle in Matrix speichern 1. Spalte
# ist untere Grenze, 2. Spalte obere
confint.bound <- matrix(0, nrow = 20, ncol = 2)
contains.truth <- logical(20)
# Alle 20 Faelle untersuchen und Grenzen speichern
for (i in 1:20) {
    test <- binom.test(...)  # Setzen Sie die richtigen Argumente!
    confint.bound[i, ] <- test$conf.int
    contains.truth[i] <- (p >= confint.bound[i, 1]) & (p <=
        confint.bound[i, 2])
}
sum(contains.truth)
```

b) Stellen Sie das Resultat aus a) geeignet dar.

R-Hinweise:

```
# Relative Haeufigkeiten plotten
plot(x/50, 1:20, xlim = c(0, 1), xlab = "Probability",
    ylab = "Simulation Number")
# Vertrauensintervalle als Liniensegemente plotten
for (i in 1:20) {
    segments(confint.bound[i, 1], i, confint.bound[i,
        2], i)
}
# Wahrer Wert als vertikale Linie einzeichnen
abline(v = ...)
```

Aufgabe 7.5

Überprüfen Sie folgende Aussagen zu statistischen Tests und Vertrauensintervallen, ob sie richtig oder falsch sind.

a) Wenn $[-0.001, 3.001]$ ein 95 %-Vertrauensintervall für einen Parameter μ ist, dann verwirft der zugehörige Test die Nullhypothese $\mu = 0$ auf dem 5 %-Niveau nicht.

b) Anhand des P-Wertes können wir den Testentscheid ablesen.

c) Die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art addieren sich immer zu 1.

d) Mit dem Signifikanzniveau wird der Fehler 1. Art kontrolliert.

e) Je mehr Beobachtungen wir haben, desto kleiner wird der Fehler 1. Art, wenn wir einen Test auf dem 5 %-Niveau durchführen.

f) Je mehr Beobachtungen wir haben, desto wahrscheinlicher ist es, dass wir die Nullhypothese auf dem 5 %-Niveau verwerfen, wenn sie in Tat und Wahrheit nicht stimmt.

Kurzlösungen vereinzelter Aufgaben

A 7.3:

a) $[0.06, 0.26]$ b) $[0, 0.24]$ c) $[0.07, 1]$