Aufgabe 1: Lösen von Differentialgleichungen mit periodischer Störfunktion

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Fourierreihen-Ansatzes die allgemeine Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung mit periodischer Anregung

$$-u''(x) + u(x) = |\sin(x)|$$

Hinweis: Vergleichen Sie dazu Kapitel 1.8 im Skript Fourierreihen.

Lösung:

Zuerst lösen wir die homogene Gleichung

$$-u''(x) + u(x) = 0$$

Mit der Ansatzfunktion $u_h(x) = e^{\lambda\, x}$ erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$-\lambda^2 + 1 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$ und damit die homogene Lösung

$$u_h(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x}$$

Als nächstes bestimmen wir eine partikuläre Lösung $u_p(x)$ in Form einer Fourierreihe. Dazu entwickeln wir zuerst die rechte Seite (gerade Funktion und $2\,\pi$-periodisch) in eine reine Cosinus-Fourierreihe auf dem halben Intervall $[0, \pi]$:

$$|\sin(x)| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \cos(k\, x)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(x)|\, \cos(k\, x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, \cos(k\, x)\, dx$$

erhalten wir die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} \\ a_k &= \frac{2}{\pi\,(1-k^2)}\, (1 + \cos(k\,\pi)) \end{aligned}$$

und damit die Fourierreihe

$$\begin{aligned} |\sin(x)| &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\cos(k\,\pi)}{1-k^2} \cos(k\, x) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ gerade}} \frac{\cos(k\, x)}{1-k^2} \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\, k\, x)}{1-4\, k^2} \end{aligned}$$

Um nun eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz

$$u_p(x) = A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, \cos(2\, k\, x)$$

mit den unbekannten Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, ...$ Diesen Ansatz setzten wir in der ursprünglichen Differentialgleichung ein und erhalten schrittweise:

$$\begin{aligned}
-u_p''(x) + u_p(x) &= |\sin(x)| \\
\sum_{k=0}^{\infty} A_k \, 4\,k^2 \cos(2\,k\,x) + A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \, \cos(2\,k\,x) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\,(1-4\,k^2)} \cos(2\,k\,x) \\
A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \, (4\,k^2+1) \cos(2\,k\,x) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\,(1-4\,k^2)} \cos(2\,k\,x)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{\pi} \\
A_k &= \frac{4}{\pi\,(1-4\,k^2)\,(1+4\,k^2)}
\end{aligned}$$

Somit haben wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x} + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2\,k\,x)}{(1-4\,k^2)\,(1+4\,k^2)}$$

Aufgabe 3: instationäre Wärmeleitung in einem homogenen Draht

Gegeben ist ein isolierter, geschlossener Draht der Länge L und Temperaturleitzahl a. Gesucht ist die zeitliche und örtliche Temperaturentwicklung $\vartheta(x,t)$ bei vorgegebener Anfangsverteilung $\vartheta_0(x) := \vartheta(x,0)$

$$\vartheta_0(x) = \begin{cases} 50, & \text{falls } -L/4 < x < L/4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Lösung ist analog zum Beispiel aus der Vorlesung (Wärmeleitung in einer Wand). Auch hier lautet die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2}$$

Der Produkteansatz $\vartheta(x,t) := X(x)\,T(t)$ sowie die daraus folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen sind identisch

$$X''(x) + \lambda^2\,X(x) = 0$$
$$T'(t) + a\,\lambda^2\,T(t) = 0$$

mit den allgemeinen Lösungen (A,B und C sind Konstanten und λ ist ubekannt)

$$X(x) = A\,\cos(\lambda\,x) + B\,\sin(\lambda\,x)$$
$$T(t) = C\,\exp(-a\,\lambda^2\,t)$$

Der Hauptunterschied besteht darin, dass hier keine Ränder und somit auch keine Randbedingungen für die Temperatur vorgegeben sind. Aber da der Draht geschlossen ist, kann die Periodizität $\vartheta(0,t) = \vartheta(L,t)$ ausgenutzt werden

a) Bestimmen Sie aus der allgemeinen Lösung für $X(x)$ die möglichen Werte für λ, indem Sie die Periodizität verwenden und formulieren Sie die Basislösungen $\vartheta_k(x,t) := X_k(x)\,T_k(t)$.

b) Die allgemeine Lösung für $\vartheta(x,t)$ erhält man durch Linearkombination der Basislösungen. Verwenden Sie diese Linearkombination um mit Hilfe der Anfangsverteilung $\vartheta_0(x)$ und der Fourierzerlegung die spezielle Lösung zu berechnen.

Lösung:

a) Die Bedingung für die Periodizität lautet $X(0) = X(L)$. Eingesetzt in die allgemeine Lösung von $X(x)$

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 = A \cdot \cos(\lambda \cdot L) + B \cdot \sin(\lambda \cdot L)$$

liefert das die Bedingungen $\cos(\lambda \cdot L) = 1$ und $\sin(\lambda \cdot L) = 0$, was für alle $\lambda_k = \frac{2\,\pi\,k}{L}$ mit $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Somit lauten die Basislösungen

$$\vartheta_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = (A_k\,\cos(\lambda_k\,x) + B_k\,\sin(\lambda_k\,x)) \cdot e^{-a\,\lambda_k^2\,t}$$

b) Die allgemeine Lösung ist durch Linearkombination der Basislösungen gegeben

$$\vartheta(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x,t)$$

Daraus erhält man die spezielle Lösung, indem man die Anfangsbedingung der Temperaturverteilung einsetzt.

$$\begin{aligned}\vartheta(x,0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x,0)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k\, \cos(\lambda_k\, x) + B_k\, \sin(\lambda_k\, x)\right)\end{aligned}$$

Die rechte Seite entspricht dabei gerade der Fourierreihendarstellung der gegebenen Anfangsbedingung. Die Koeffizienten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}B_k &= 0\\ A_0 &= 50\\ A_k &= \frac{100\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{2}\right)}{\pi\, k}\end{aligned}$$

Womit die Lösung folgt:

$$\vartheta(x,t) = 25 + \frac{100}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi\, k}{2}\right)}{\pi\, k}\, \cos\left(\frac{2\,\pi\, k}{L}\, x\right)\, \exp\left(-\frac{4\, a\, \pi^2\, k^2}{L^2}\, t\right)$$

Aufgabe 4: Die Wellengleichung bei der schwingenden Saite

Wie bei der Wärmeleitungsgleichung verwenden wir auch hier den Produkteansatz

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

und setzen diesen in der Wellengleichung ein. Das liefert die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = const := -\lambda^2$$

woraus sich zwei entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen (harmonische Schwingungen) ergeben

$$\begin{aligned} T'' + \lambda^2\, c^2\, T &= 0 \\ X'' + \lambda^2\, X &= 0 \end{aligned}$$

mit den allgemeinen Lösungen:

$$\begin{aligned} T(t) &= A\, \cos(\lambda\, c\, t) + B\, \sin(\lambda\, c\, t) \\ X(x) &= C\, \cos(\lambda\, x) + D\, \sin(\lambda\, x) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen zusammen mit der Lösung für $X(x)$ liefern: $C = 0$ und $\lambda = \frac{2\pi\, k}{L}$. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot T_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\, \cos(\lambda_k\, c\, t) + b_k\, \sin(\lambda_k\, c\, t)) \cdot \sin(\lambda_k\, x)$$

Für die Anfangsgeschwindigkeit muss noch die Ableitung gebildet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\, \cos(\lambda_k\, c\, t) + b_k\, \sin(\lambda_k\, c\, t)) \cdot \sin(\lambda_k\, x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-a_k\, \lambda_k\, c\, \sin(\lambda_k\, c\, t) + b_k\, \lambda_k\, c\, \cos(\lambda_k\, c\, t)) \cdot \sin(\lambda_k\, x) \end{aligned}$$

Setzt man $t = 0$, so folgt mit der Bedingung $\partial u(x,0)/\partial t = 0$ sofort $b_k = 0$ und die allgemeine Lösung reduziert sich zu:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot T_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \cos(\lambda_k\, c\, t) \cdot \sin(\lambda_k\, x)$$

Nun können für eine beliebige Anfangsauslenkung $u(x,0)$ die Fourierkoeffizienten a_k aus der Beziehung

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \sin(\lambda_k\, x)$$

ermittelt werden.