Stochastik

Poisson-Verteilung / Parameterschätzung

Mirko Birbaumer

Hochschule Luzern Technik & Architektur

Poisson-Verteilung: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$

- Bei Binomial(n, π)-Verteilung nimmt X beschränkten Wertebereich an

$$W = \{0, 1, \ldots, n\}$$

- Oft ist aber nicht von vornherein klar, wieviele Beobachtungen eintreten
- Beispiele:
  - Anzahl Anrufe in einem Callcenter pro Stunde
  - Anzahl Schadensmeldungen eines Versicherten pro Jahr
  - Anzahl Autounfälle pro Tag
  - Anzahl α-Zerfälle pro Sekunden
- Jede Zahl möglich (zumindest theoretisch)
- D.h. n unbekannt $\quad\rightarrow\quad$ Binomialverteilung nicht anwendbar

Poisson-Verteilung: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$

- Für unbeschränkte **Zähldaten**: Poisson-Verteilung

Poisson-Verteilung

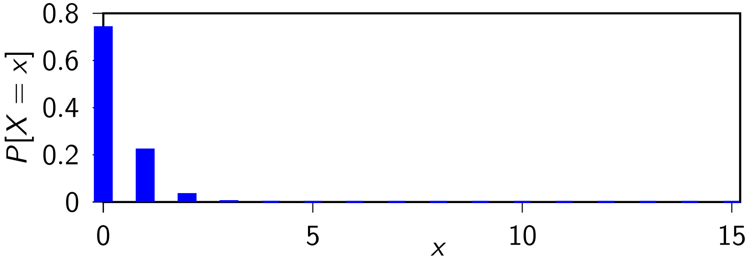
Eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ heisst Poisson(λ)-verteilt, falls

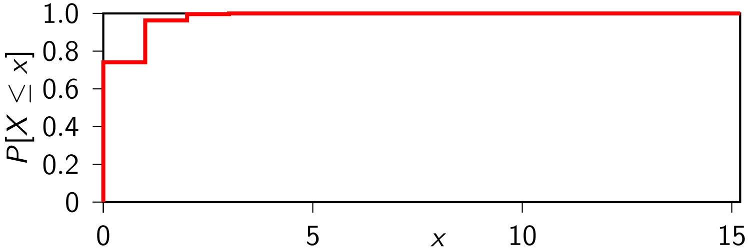
$$P(X = x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots),$$

wobei $\lambda > 0$ ein Parameter der Verteilung ist.
Erwartungswert / Varianz / Standardabweichung:

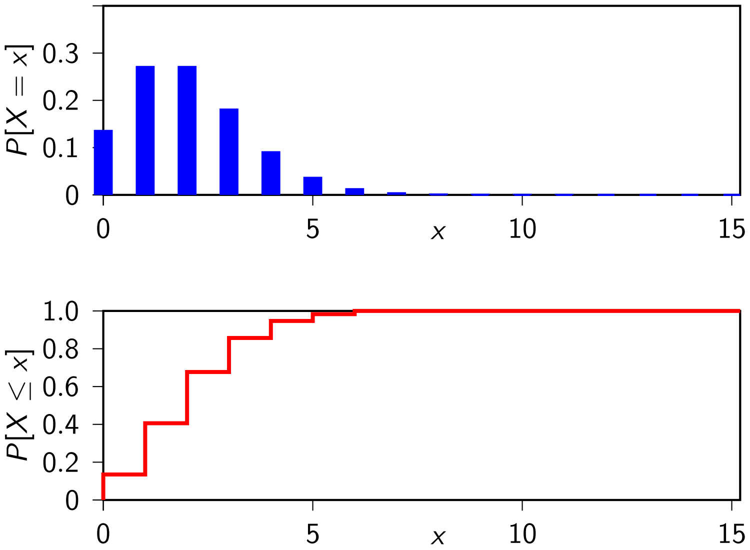
$$E(X) = \lambda; \qquad \text{Var}(X) = \lambda; \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Poisson-Verteilung ($\lambda = 0.3$)

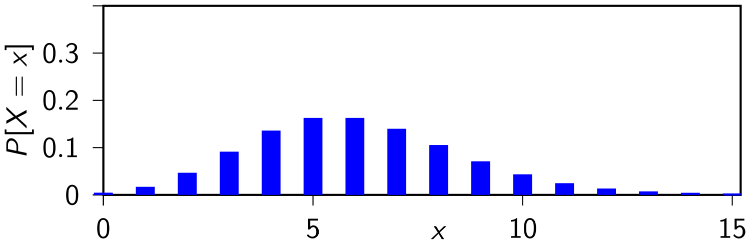


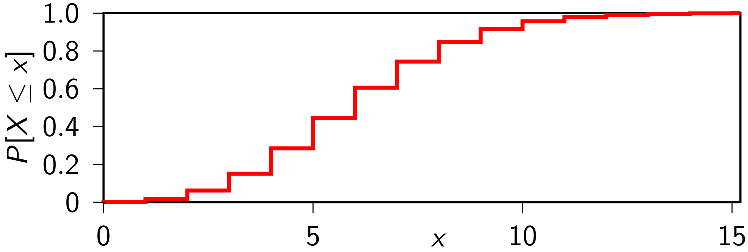


Poisson-Verteilung ($\lambda = 2$)



Poisson-Verteilung ($\lambda = 6$)





Bedeutung von λ in Poisson-Verteilung

- Für $X \sim \text{Pois}(\lambda)$: $\text{E}(X) = \lambda$
- Bedeutung von λ : der zu erwartende Wert von X
- Oft ist λ allerdings unbekannt und wir müssen ihn *schätzen*, siehe Kapitel Parameterschätzung

Beispiel: Callcenter

- Callcenter: erfahrungsgemäss treffen durchschnittlich 350 Telefonanrufe in der Stunde ein
- Allerdings ist es möglich, dass manchmal gar kein Anruf kommt und in der nächsten Stunde 1000
- Die Anzahl der möglichen Anrufe ist, theoretisch, nach oben offen
- Anzahl Anrufe pro Stunde modelliert durch Zufallsvariable X, für die die Poissonverteilung angenommen werden kann

$$X \sim \text{Pois}(\lambda), \ \lambda = 350 \quad (E[X] = \lambda = 350)$$

Beispiel: Callcenter

- Wie gross ist W'keit, dass innerhalb einer Stunde keine Anrufe eingehen?

$$P[X = 0] = \mathrm{e}^{-350} \frac{350^0}{0!} = 9.929\,59 \times 10^{-153}$$

  Dieses Ereignis ist also extrem unwahrscheinlich

- R-Befehl

R-Befehl: dpois()

```
> dpois(x=0,lambda=350)
[1] 9.92959e-153
```

- W'keit, dass genau 350 Anrufe eintreffen: (mit R: `dpois()`)

$$P(X = 350) = 0.021$$

Beispiel: Callcenter

- Viel grösser als die W'keit, dass genau 350 Anrufe eintreffen, ist W'keit, dass zwischen 340 und 360 eingehen:

$$P(340 \leq X \leq 360) = 0.425$$

- Somit treffen in 42.5 % aller Stunden zwischen 340 und 360 Anrufe ein

Poissonverteilung als Binomialverteilung

- Betrachte $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$ und $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Falls n gross und π klein mit $\lambda = n\pi$, dann:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} \approx P(Y = x) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!}$$

für $x = 0, 1, \ldots, n$

- Das heisst: für grosse n und kleine π:
  $\text{Binomial}(n, \pi) \approx \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda = n\pi$

- Mit anderen Worten: die Poisson-Verteilung kann interpretiert werden als Verteilung für *seltene Ereignisse bei vielen unabhängigen Versuchen*

Poisson-Verteilung: Additionseigenschaft

- Ist $X \sim \text{Pois}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Pois}(\lambda_2)$, unabhängig, dann ist

$$X + Y \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Die Anzahl Ausfälle eines Systems in einem Zeitintervall der Länge t kann z.B. als $\text{Pois}(\lambda t)$ modelliert werden
- Beispiel: Callcenter erhält Telefonanrufe als ein Poisson-Prozess mit $\lambda = 350$ pro Stunde
- Annahme: Die Anzahl eintreffender Anrufe pro Stunde sind von Stunde zu Stunde unabhängig
- Die Anzahl Anrufe in einem 24 Stunden Intervall folgt dann einer Poisson-Verteilung mit Parameter

$$\tilde{\lambda} = 24 \cdot \lambda = 8400$$

Poisson-Verteilung: Radioaktiver Zerfall

- In Bezug auf Gesamtzahl Atome in einer radioktiven Substanz: Alpha-Zerfall ist ein seltenes Ereignis, also π klein
- Anzahl Zerfälle ist nach oben nicht begrenzt (**unbeschränkte Zähldaten**)
- Jeder Zerfall ist unabhängig vom vorhergehenden
- Jede Anzahl Zerfälle in 10 Sekunden hat gemäss der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- Frage: Wie können wir λ schätzen?

Wie stelle ich ein Wahrscheinlichkeitsmodell auf?

Fragestellung (betreffend unsicherem Phänomen)

Bsp: Erwartete Anzahl Überschwemmungen in den nächsten 10 Jahren?

Annahmen

Bsp: Jährliche W'keit sei p=0.1, Ereignisse in verschiedenen Jahren seien unabhängig.

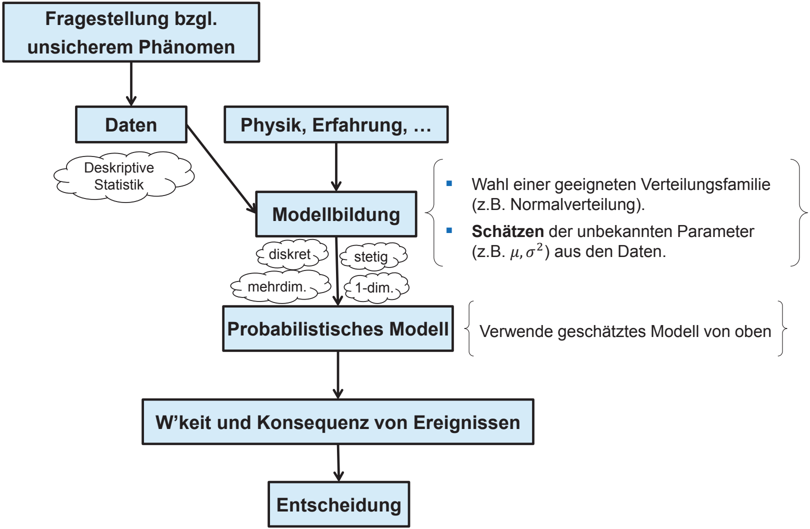
Modell

Bsp: Modelliere Anzahl Überschwemmungen mit Binomialverteilung.

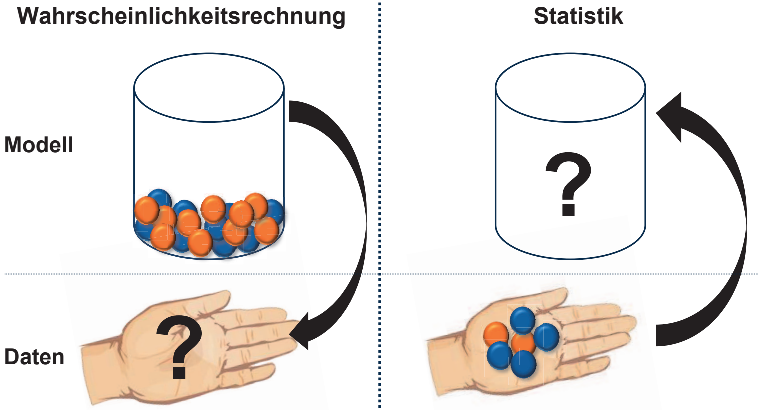
Antwort (basierend auf Modell)

Bsp: Erwartete Anzahl, W'keit dass keine Überschwemmung, etc.

Wahrscheinlichkeitsmodell beruhend auf Daten



Wahrscheinlichkeitsrechnung vs. Statistik



Gegeben der Informationen über die Urne:
Was und mit welcher W'keit werden wir in den Händen haben?

Gegeben der Informationen in unserer Hand:
Was ist in der Urne enthalten und wie sicher sind wir darüber?

Schätzung bei Binomialverteilung und Poisson-Verteilung

- Problem:
  - Beim Alphazerfall ist der Parameter λ unbekannt
  - Beim Würfelwurf ist die Wurfw'keit π, um „Kopf" zu werfen, unbekannt
- Wie kann man aus Beobachtung(en) die Parameter λ bzw. π annähern (schätzen)?
- Es gibt zwei verbreitete Methoden, um Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu schätzen:
  - die **Momentenmethode**
  - die **Maximum-Likelihood-Schätzermethode**

Bemerkungen

- Um einen Schätzwert einer Grösse zu kennzeichnen, wird ein Hut ($\widehat{\ }$) auf die Variable gesetzt
- Beispiele:
  - $\widehat{\pi}$ ein Schätzwert des Parameters π
  - $\widehat{\mathrm{E}}(X)$ ist ein Schätzwert des wahren Erwartungswertes $\mathrm{E}(X)$
  - $\widehat{y}$ ist ein Schätzwert der Variable y
- Begriff „Schätzung“ im statistischen Sinne:
  - Wir *berechnen* diesen Wert aufgrund von unvollständigen Informationen
  - Dieser berechnete Wert ist dann eben die Schätzung einer Grösse, die wir nicht kennen

Momentenmethode bei Binomialverteilung: Beispiel

- Münzenwurf: in 50 Würfen wird 35 mal „Kopf“ geworfen
- Unbekannt: Münze fair oder nicht
- Parameter π ist also unbekannt
- Welcher Wert für π ist aus der Beobachtung anzunehmen?
- Vermutung:

$$\widehat{\pi} = \frac{35}{50}$$

Momentenmethode bei Binomialverteilung

- Betrachten folgende Situation: Gegeben ist eine Beobachtung x, welche als Realisierung von $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$ aufgefasst wird
- Möchten Schlüsse über den *unbekannten* Parameter π ziehen
- Für Binomialverteilung $\text{Binomial}(n, \pi)$ ist der Erwartungswert $\text{E}(X)$:

$$\text{E}(X) = n\pi$$

- Für Parameter π gilt dann

$$\pi = \frac{\text{E}(X)}{n}$$

Momentenmethode bei Binomialverteilung

- Wert n (Anzahl unabhängiger Versuche) ist **bekannt**; $\mathrm{E}(X)$ ist **unbekannt**
- Erste Schätzung: Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ wird durch Beobachtung x geschätzt:

$$\widehat{\mathrm{E}}(X) = x = \text{ beobachtete Anzahl Gewinne}$$

Momentenmethode

Somit ergibt sich aufgrund der **Momentenmethode** die relative Häufigkeit

$$\widehat{\pi} = \frac{x}{n}$$

als Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit.

Beispiel: Münzwurf

- Münze: Ist sie fair ist oder ergibt es systematisch eher „Kopf“?
- Beobachtung: Münze 100-mal geworfen und 58 mal „Kopf“ erhalten
- Zufallsvariable $X =$ Anzahl „Kopf“(K) bei 100 Würfen
- Vernünftiges Modell

$$X \sim \text{Binomial}(100, \pi)$$

- Beobachtet (realisiert) wurde $x = 58$
- W'keit, dass die Münze bei einem Wurf Kopf zeigt, ist gemäss der Momentenmethode also

$$P(K) = \widehat{\pi} = \frac{58}{100} = 0.58$$

Schätzung aus mehreren Beobachtungen: Beispiel

- Werfen Münze und machen dabei zwei Versuche:
  - Im 1. Versuch werfen wir 50 mal und erreichen 30 mal K
  - Im 2. Versuch sind es 115 mal K auf 160 Würfe
- 1. Versuch: $X_1 \sim \text{Bin}(50, \pi)$; 2. Versuch: $X_2 \sim \text{Bin}(160, \pi)$
- Schätzungen

$$\widehat{\pi}_1 = \frac{30}{50} = 0.6 \qquad \text{und} \qquad \widehat{\pi}_2 = \frac{115}{160} = 0.72$$

- Können beide Versuche zusammen als grossen Versuch mit 210 Würfen und 145 Erfolgen K ansehen $\quad \rightarrow \quad X \sim \text{Bin}(210, \pi)$
- Dann ist der geschätzte Parameter

$$\widehat{\pi} = \frac{30 + 115}{50 + 160} = \frac{145}{210} = 0.69$$

Maximum-Likelihood bei Binomialverteilung

- Andere, weit verbreitete Methode zur Parameterschätzung: *Maximum-Likelihood-Methode*

- Annahme: Anzahl „Kopf" bei n Münzwürfen verteilt wie:

$$X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$$

- Hier: $n = 100$ und die Zufallsvariable X hat den Wert 58 angenommen

- Aufgabe: einen Wert für π zu finden, der möglichst gut zu unserer Beobachtung passt

- Welches Kriterium könnte man verwenden, um zu zeigen, dass ein Wert π_1 besser zu der Beobachtung passt als π_2?

Maximum-Likelihood bei Binomialverteilung

- Möglichkeit: Berechnen die W'keit, genau 58 mal Kopf bei 100 Münzwürfen zu erzielen
- Verwenden dabei z.B. $\pi_1 = 0.5$ und $\pi_2 = 0.6$
- Zugehörige W'keiten:

$$P_{0.5}(X = 58) = 0.0223 \qquad \text{und} \qquad P_{0.6}(X = 58) = 0.074$$

- Schätzung von π : wählen das π aus, das zur grösseren W'keit für 58 mal Kopf führt:

$$\widehat{\pi} = 0.6$$

Maximum-Likelihood bei Binomialverteilung

- Um den *wahrscheinlichsten* Wert für π zu erhalten, müsste man natürlich nicht nur zwei Werte von π vergleichen, sondern alle, die denkbar sind

- Ziel: π so wählen, dass Ausdruck maximal wird

$$P[X = 58] = \binom{100}{58} \pi^{58} (1 - \pi)^{42}$$

- Bekannte Problemstellung:
  - Ausdruck nach π ableiten
  - Ableitung nach π gleich null setzen
  - Gleichung nach π auflösen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\pi} \left(\binom{100}{58} \pi^{58} (1 - \pi)^{42} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi = \frac{58}{100}$$

Maximum-Likelihood bei Binomialverteilung

- Im allgemeinen: π so wählen, dass der Ausdruck maximal wird:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

- Dann muss gelten (mit n und x als Parameter)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\pi} \left(\binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi = \frac{x}{n}$$

- Resultat für die Schätzung $\widehat{\pi}$

$$\widehat{\pi} = \frac{x}{n}$$

- In unserem Beispiel mit $x = 58$ und $n = 100$

$$\widehat{\pi} = \frac{58}{100} = 0.58$$

Bemerkungen zur Maximum-Likelihood-Methode

- In diesem Beispiel ist das Ergebnis identisch mit dem Ergebnis aus der Momentenmethode: im allgemeinen ist das aber nicht der Fall!
- Obige Methode wird **Maximum-Likelihood-Methode**
- Sie ist die mit Abstand gebräuchlichste Methode, um Parameter zu schätzen und oft der Momentenmethode überlegen
- Die zu maximierenden Funktion heisst **Likelihood-Funktion** $L(\pi)$ (das π deutet an, dass dann nach π abgeleitet wird):

$$L(\pi) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

Parameterschätzung mit R

R-Befehl: binom.test()

```
> binom.test(x=58, n=100, p=0.5, alternative= "two.sided",
conf.level=0.95)
Exact binomial test
data: 58 and 100
number of successes = 58, number of trials = 100, p-value
= 0.1332
alternative hypothesis: true probability of success is not
equal to 0.5
95 percent confidence interval:
0.4771192 0.6780145
sample estimates:
probability of success
0.58
```

Schätzung aufgrund von mehreren Beobachtungen

- Werfen Münze und machen dabei zwei Versuche:
  - Im 1. Versuch werfen wir 50 mal und erreichen 30 mal K
  - Im 2. Versuch sind es 115 mal K auf 160 Würfe
- 1. Versuch: $X_1 \sim \text{Bin}(50, \pi)$; 2. Versuch: $X_2 \sim \text{Bin}(160, \pi)$
- Wichtig: Parameter π bei beiden gleich
- Schätzung: Maximum-Likelihood-Methode
- Gesucht: W'keit

$$P[(X_1 = 30) \cap (X_2 = 115)]$$

Schätzung aufgrund von mehreren Beobachtungen

- Annahme: Beide Versuche stochastisch unabhängig

$$P[(X_1 = 30) \cap (X_2 = 115)] = P[X_1 = 30] \cdot P[X_2 = 115]$$
$$= \binom{50}{30} \pi^{30}(1-\pi)^{20} \cdot \binom{160}{115} \pi^{115}(1-\pi)^{45}$$

- Ausdruck hängt von π ab: dies ist die **Likelihood-Funktion**:

$$L(\pi) = \binom{50}{30} \pi^{30}(1-\pi)^{20} \cdot \binom{160}{115} \pi^{115}(1-\pi)^{45}$$

- Vorgehen:
  - Funktion nach π ableiten
  - Ableitung nach π gleich null setzen
  - Gleichung nach π auflösen
- Resultat: $\widehat{\pi} = \dfrac{145}{210}$

Schätzung aufgrund von mehreren Beobachtungen

- Im allgemeinen Fall für $X_1 = x_1$ und $X_2 = x_2$ mit n_1 bzw. n_2 Versuchen

- Mit Maximum-Likelihood-Methode

$$\widehat{\pi} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

- Dies ist dasselbe Resultat wie bei der Momentenmethode, was für andere Verteilungen aber nicht der Fall sein muss.

Momentenmethode bei Poisson-Verteilung

- Daten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ als Realisierungen von

$$X_1, \ldots, X_m \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

- Wie lässt sich λ aus den Daten schätzen?

Beispiel: Kanzerogene Fasern

- Hersteller für Isolationsmaterialien misst die Anzahl krebserregende Fasern pro mm^2 in 5 Proben
- Die gemessenen Werte $x_1, \ldots, x_5$ seien:
$$4, 1, 2, 3, 6$$
- Modell: Anzahl krebserregender Fasern mit einer Poisson-Verteilung, da die mögliche Anzahl Fasern nicht nach oben begrenzt ist
- Annahme: Beobachtungen $x_1, \ldots, x_5$ Realisierungen von
$$X_1, \ldots, X_5 \sim \text{Poisson}(\lambda)$$
- Wie sollen wir λ wählen? Was ist unsere Schätzung $\widehat{\lambda}$ basierend auf den beobachteten Daten?

Beispiel: Kanzerogene Fasern

- Erwartungswert der Poisson-Verteilung:

$$\mathrm{E}(X) = \lambda$$

- Schätzen nun den Erwartungswert mit dem empirischen Mittelwert

$$\widehat{E}(X) = \overline{x} = \frac{4+1+2+3+6}{5} = 3.2$$

- Schätzung für den Parameterwert λ der Poisson-Verteilung

$$\widehat{\lambda} = \overline{x} = 3.2$$

Momentenmethode für beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir fassen unsere Daten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Realisierungen einer Zufallsvariablen X auf.
Falls die Zufallsvariable X einer bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung mit unbekanntem Parameter ϑ folgt, dann berechnet man zuerst den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und löst die Gleichung nach dem unbekannten Parameter ϑ der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf.
Dann ersetzt man den Erwartungswert durch dessen empirisches Gegenstück, den empirischen Mittelwert, und man erhält einen **Momentenschätzer** für den unbekannten Parameter ϑ.

Maximum-Likelihood bei Poisson-Verteilung: Beispiel

- Hersteller für Isolationsmaterialien misst die Anzahl krebserregende Fasern pro mm^2 in 5 Proben

- Die gemessenen Werte $x_1, \ldots, x_5$ seien:
$$4, 1, 2, 3, 6$$

- Modell: Anzahl krebserregender Fasern mit einer Poisson-Verteilung, da die mögliche Anzahl Fasern nicht nach oben begrenzt ist

- Annahme: Beobachtungen $x_1, \ldots, x_5$ Realisierungen von
$$X_1, \ldots, X_5 \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

- Wie sollen wir λ wählen? Was ist unsere Schätzung $\widehat{\lambda}$ basierend auf den beobachteten Daten?

Maximum-Likelihood bei Poisson-Verteilung: Kanzerogene Fasern

- Für ein gegebenes λ ist die *Wahrscheinlichkeit*, genau die gemessenen Werte $x_1 = 4, \ldots, x_5 = 6$ zu beobachten:

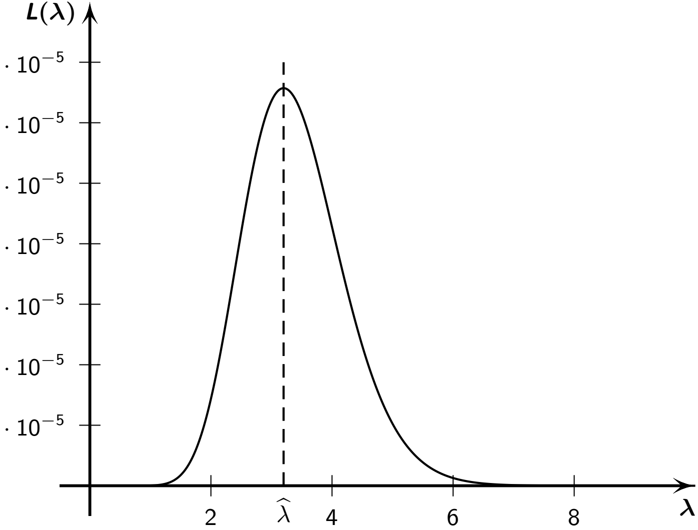
$$P[(X_1 = 4) \cap (X_2 = 1) \cap \cdots \cap (X_5 = 6)]$$

- Annahme: Messungen sind stochastisch unabhängig voneinander

- Dann gilt für die **Likelihood-Funktion** L:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= P(X_1 = 4) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 2) \cdot P(X_4 = 3) \cdot P(X_5 = 6) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^6}{6!} \end{aligned}$$

Abbildung von $L(\lambda)$



Maximum-Likelihood bei Poisson-Verteilung: Beispiel

- Für jedes λ kann man den Wert $L(\lambda)$ berechnen
- Suchen nun das λ, welches die beobachteten Daten $x_1 = 4, \dots, x_5 = 6$ möglichst plausibel erscheinen lässt
- Suchen also das λ, welches $L(\lambda)$ *maximiert*, also grösstmöglich macht
- Graphisch: $L(\lambda)$ ein Maximum an der Stelle $\widehat{\lambda} = 3.2$
- Schätzen wir also λ mit 3.2, also $\widehat{\lambda} = 3.2$
- Die beobachteten Daten passen nun am besten mit dem Modell $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$

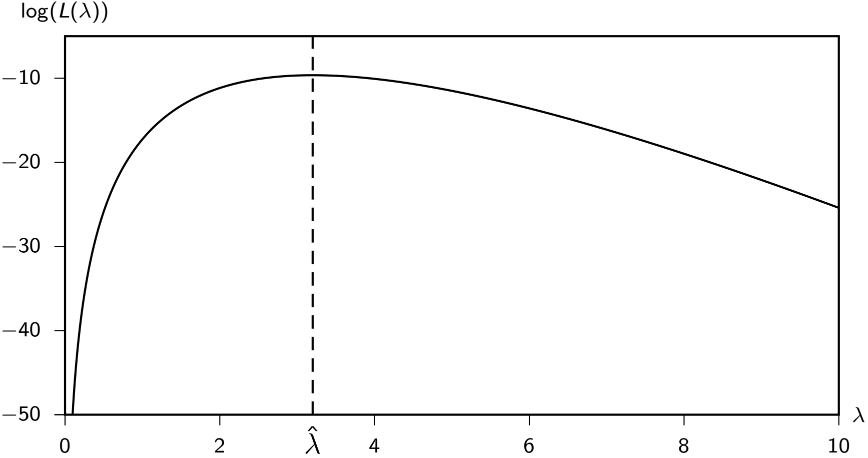
Maximum-Likelihood bei Poisson-Verteilung: Berechnung von $\widehat{\lambda}$

- Berechnung von $\widehat{\lambda}$: Likelihood-Funktion nach λ ableiten, gleich null setzen und nach λ auflösen
- Nachteil: rechnerisch ist dies sehr aufwändig
- Rechnerisch ist es vorteilhafter, mit der **log-Likelihood-Funktion** zu arbeiten

$$l(\lambda) = \log(L(\lambda))$$

- Maximum der Funktion $l(\lambda)$ liegt nach wie vor an der Stelle $\widehat{\lambda} = 3.2$

Log-Likelihood Funktion für Datensatz kanzerogener Fasern



Maximum-Likelihood bei Poisson-Verteilung: Berechnung von $\widehat{\lambda}$

- **log-Likelihood-Funktion**:

$$l(\lambda) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = \sum_{i=1}^{n}\log\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)$$

- Leitet man $l(\lambda)$ nach λ ab und setzt $l'(\lambda) = 0$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0\,.$$

- Maximum-Likelihood Schätzer :

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Maximum-Likelihood Schätzer

Maximum-Likelihood Schätzer

Es liegen m Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vor. Sind die Datenpunkte x_i Realisierungen der unabhängigen Zufallsvariablen $X_i \sim \text{Binomial}(n_i, \pi)$, so ergibt der Maximum-Likelihood-Schätzer:

$$\widehat{\pi} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}$$

Sind die Datenpunkte x_i Realisierungen der unabhängigen Zufallsvariablen $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, so ergibt der Maximum-Likelihood-Schätzer:

$$\widehat{\lambda} = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}$$

Zusammenfassung Parameterschätzer

- Für unsere beobachteten Daten nehmen wir ein **Modell** an (z.B. Binomialverteilung)
- Das Modell enthält unbekannte Parameter (z.B. π)
- Basierend auf den beobachteten Daten versuchen wir, die Parameter zu schätzen (z.B. mit Momentenmethode, Maximum-Likelihood Methode).
- **Das heisst, dass wir basierend auf den beobachteten Daten versuchen, Rückschlüsse über den datengenerierenden Mechanismus zu ziehen!**