Aufgabe 5 (25min)

a) Ein dynamisches System ist im Zustandsraum gegeben mit der folgenden Systembeschreibung:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} x$$

Skizzieren Sie das detaillierte Signalflussbild mit einzelnen Integratoren wie Sie es in Matlab/Simulink für die Simulation verwenden würden. Fügen Sie folgende Bezeichnungen in Ihre Darstellung ein x_1, x_2, x_3, u, y, sowie die jeweiligen Vorzeichen bei den Summationsstellen.

b) Betrachten Sie ihr Signalflussbild. Können Sie die Stabilität oder die Instabilität der Regelstrecke aus Ihrem Signalsflussbild ablesen? Gibt es einen bestimmten Parameter der für Ihre Stabilitätsuntersuchung wesentlich ist?

c) Bestimmen Sie die Steuerbarkeitsmatrix Q_S. Betrachten Sie die Steuerbarkeitsmatrix: Ist das System vollständig steuerbar? Begründen Sie Ihre Überlegung.

d) Gehen Sie davon aus, dass die Zustandsvariablen x_1 und x_3 messbar sind. Wie würden Sie einen Beobachter auslegen für die Zustandsvariable x_2? Welche Ordnung besitzt Ihr Beobachter? Zeichnen Sie Ihren Beobachter in das bestehende Signalflussbild ein. Verwenden Sie hierzu eine andere Farbe. (Hinweis: Der Beobachter muss nicht explizit berechnet werden.)

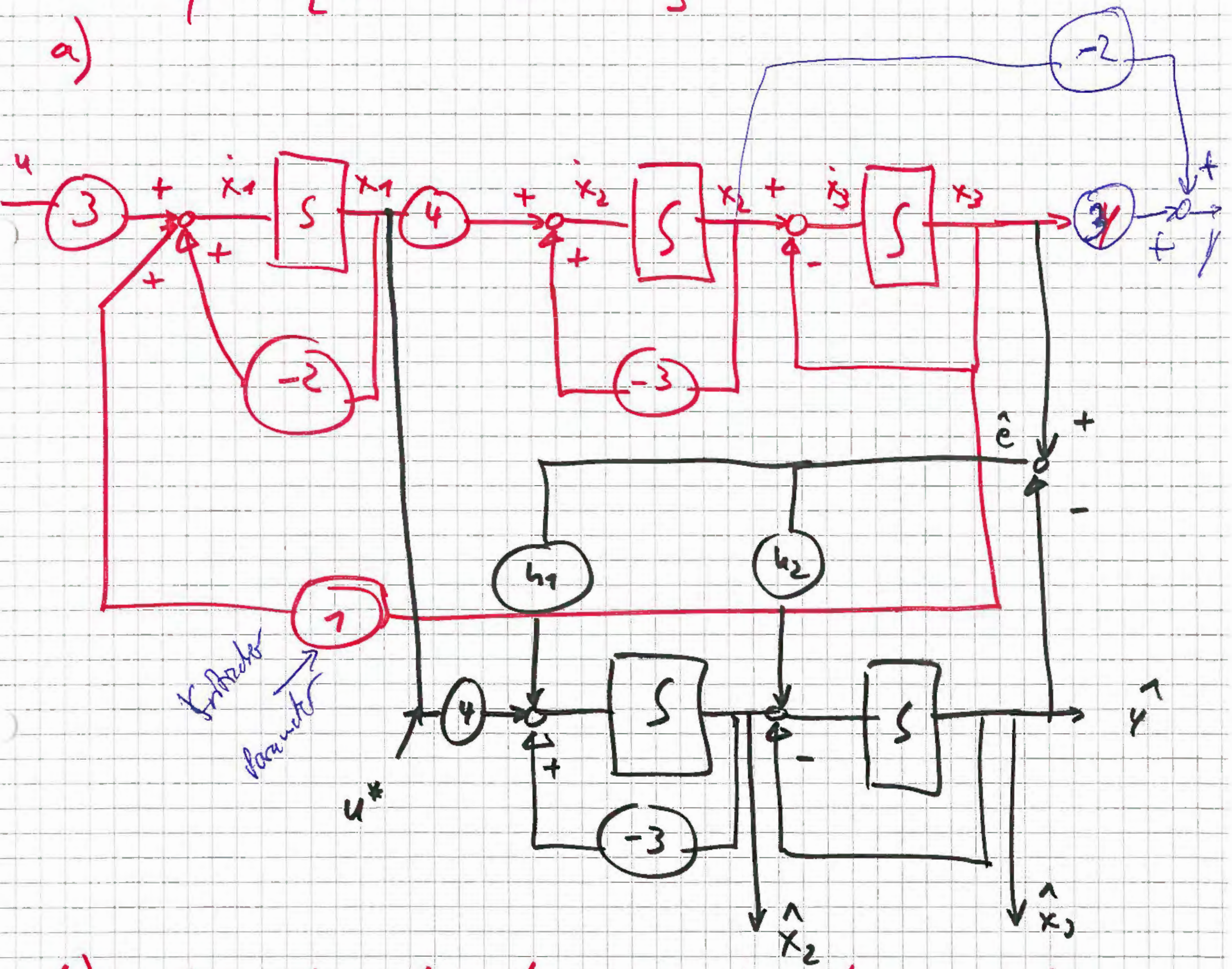
e) Mit Hilfe von Matlab können die Eigenwerte berechnet werden. Diese setzen sich aus einem konjugiert-komplexen Eigenwertpaar und einem reellen Eigenwert zusammen. Das System soll in die Jordan-Normalform transformiert werden. Welche Eigenschaften besitzt die resultierende Systemmatrix in Jordannormalform?

A4

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} x$$

a)



b) Nein, der Parameter a_{13} bewirkt eine positive Rückkopplung, d.h. das System kann stabil / instabil sein

$$eig(A) = \begin{bmatrix} -2.89 + 1.19 \\ -2.89 - 1.19 \\ -0.20 \end{bmatrix}$$

c) $Q_s = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot b = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -20 & 9 & 4 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A \cdot b = \begin{bmatrix} 12 \\ -60 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$Q_s = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

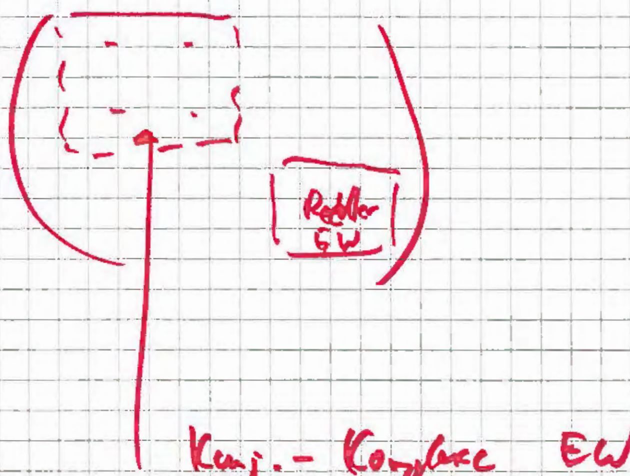
$\det(Q_s) = 432 \neq 0$

Da Q_s den Rang $= 3$ besitzt, ist das System vollständig steuerbar.

d) siehe Signalflussbild.

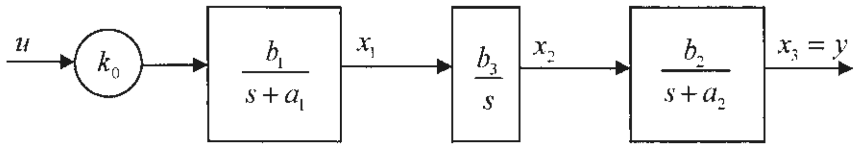
Ordnung = 2

e) Die Systemmatrix in Jordannormalform besteht bei konjugiert-komplexen Eigenwerten keine reine Diagonalform, sondern Jordan-Blöcke



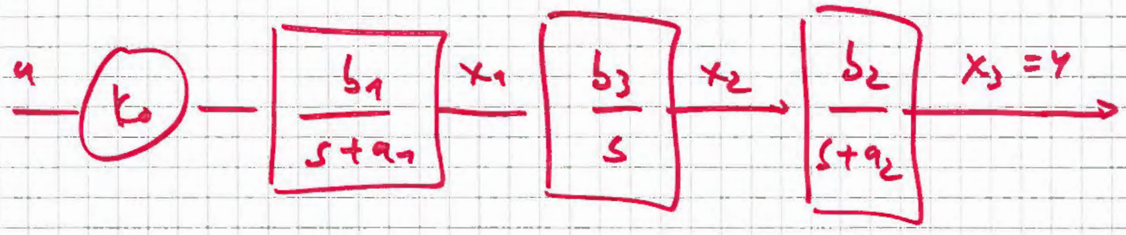
Aufgabe 6 (25min)

Gegeben ist folgende Regelstrecke:



a) Geben Sie für die dargestellte Regelstrecke die Zustandsraumbeschreibung $\{A, b, c^T, d\}$ an.
b) Wie lauten die Eigenwerte der Systemmatrix A?
c) Geben Sie mit Hilfe des Skriptes die Lösung für $x_1(t)$ in Abhängigkeit von $u(t) \neq 0$ und $x(t_0) \neq 0$ für $t \geq t_0$ an.
d) Was versteht man unter der Matrizenfunktion e^{At} und wie lautet die zugehörige Potenzreihe?
e) Geben Sie für die allgemeine Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen $\{A, B, C, D\}$ die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ an. Setzen Sie hierbei $x_0 = 0$.
f) Führen Sie für die allgemeine Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen $\{A, B, C, D\}$ eine Zustandsraumtransformation gemäss $x = V^{-1}z$ durch. Wie lauten die resultierenden Systemmatrizen $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$?
g) Skizzieren Sie für die oben angegebene Regelstrecke die Beobachtungsnormalform in detaillierter Form.
h) Wie lautet die Beobachtbarkeitsmatrix Q_B?
i) Wie lautet das Gütekriterium für den LQR-Reglerentwurf? Warum spricht man beim LQR-Regler auch von einem Riccati-Regler?

A6



a) $$x_1 = \frac{b_1}{s+a_1} \cdot k_0 \cdot u$$

$$(s+a_1) \cdot x_1 = b_1 \cdot k_0 \cdot u$$

$$s \cdot x_1 = -a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot k_0 \cdot u$$

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + b_1 \cdot k_0 \cdot u$$

$$x_2 = \frac{b_3}{s} \cdot x_1$$

$$\dot{x}_2 = b_3 \cdot x_1$$

$$x_3 = \frac{b_2}{s+a_2} \cdot x_2$$

$$(s+a_2) \cdot x_3 = b_2 \cdot x_2$$

$$\dot{x}_3 = -a_2 \cdot x_3 + b_2 \cdot x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \cdot k_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{c^T} x \qquad d = 0$$

b) EW = Pole der Übertragungsfunktion

$s = 0$

$s = -a_1$

$s = -a_2$

c) $\dot{x}_1 = -a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot k_0 \cdot u$

Skript Seite 293:

$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u$

besitzt die Lösung

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau)\, d\tau + e^{a(t-t_0)} x(t_0)$$

damit

$$\boxed{x_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-a_1(t-\tau)} \cdot b_1 \cdot k_0 \cdot u(\tau)\, d\tau + e^{-a_1(t-t_0)} \cdot x(t_0)}$$

d) $e^{At} = I + A \cdot \frac{t}{1!} + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} \ldots$

e^{At} wird als Überführungs- bzw. Transitionsmatrix bezeichnet

Homogene Lösung: $x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)$

Skript S. 295

e) $\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left[C(sI - A)^{-1} \cdot B + D \right] + \underbrace{C(sI - A)^{-1} \cdot x_0}_{=0\text{, da } x_0 = \underline{0}.}$$

Skript S. 299

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} \cdot b + d$$

f) $\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

$\leftarrow \begin{cases} x = V^{-1} \cdot z \\ \dot{x} = V^{-1} \cdot \dot{z} \end{cases}$

$V^{-1} \cdot \dot{z} = A \cdot V^{-1} \cdot z + B \cdot u \quad | \cdot V$ v. links

$\dot{z} = VAV^{-1} \cdot z + V \cdot B \cdot u$

$y = C \cdot V^{-1} \cdot z + D \cdot u$

damit $\tilde{A} = VAV^{-1}$

$\tilde{B} = V \cdot B$

$\tilde{C} = C \cdot V^{-1}$

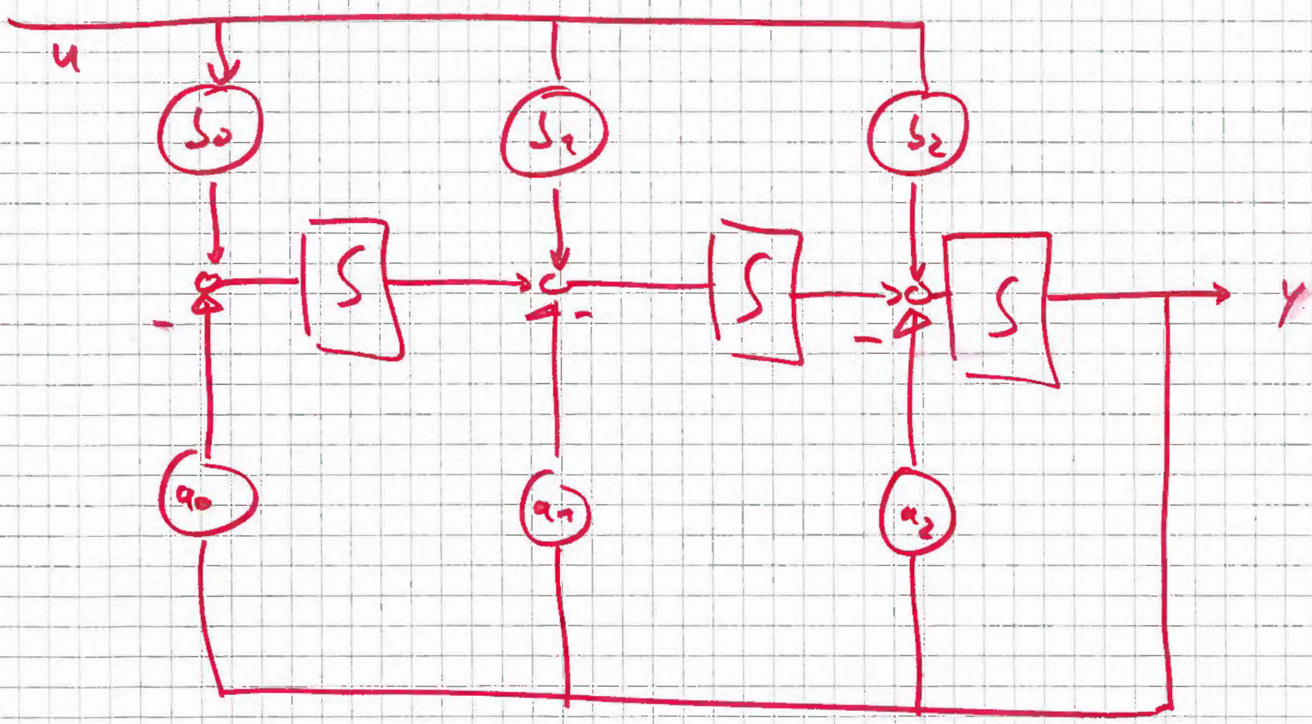
$\tilde{D} = D$

a) $$G(s) = K_0 \cdot \frac{b_1}{s+a_1} \cdot \frac{b_3}{s} \cdot \frac{b_2}{s+a_2}$$

$$= \frac{K_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}{\underbrace{(s+a_1)(s+a_2)}_{s^2 + (a_1+a_2)s + a_1 \cdot a_2} \cdot s}$$

$$G(s) = \frac{\overbrace{K_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}^{b_0}}{s^3 + \underbrace{(a_1+a_2)}_{a_2} s^2 + \underbrace{a_1 \cdot a_2}_{a_1} \cdot s + \underbrace{0}_{a_0} \cdot s^0}$$

Beobachtungsnormalform:



1)

$$Q_B = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$c^T \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ -a_1 b_3 & 0 & 0 \\ b_2 b_3 & -a_2 b_2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$c^T \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ -a_1 b_3 & 0 & 0 \\ b_2 b_3 & -a_2 b_2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_2 b_3 & -a_2 b_2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_2 & -a_2 \\ b_2 b_3 & -a_2 b_2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

i) $$J(x) = \int_0^t \left\{ x^T Q x + u^T R u \right\} dt$$

Es muss die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung gelöst werden.

Dann wird der LQR-Regler auch als Riccati-Regler bezeichnet.