Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

Aufgabe 1: Konservative Felder

Überprüfe, ob die folgenden Vektorfelder konservativ sind. Falls ja, bestimme das zugehörige Potential Φ. Geben Sie jeweils an, ob das Gebiet einfach zusammenhängend ist oder nicht.

a)

$$\vec{F}_a = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{F}_b = \frac{1}{x\,y} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{F}_c = \frac{1}{x+y+z} \begin{pmatrix} 3x \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{F}_d = \begin{pmatrix} y\,e^{x\,y} + z^2 \\ x\,e^{x\,y} \\ 2\,z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: 3d-Potentialfeld

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ x\,\cos(y) + \sin(z) \\ y\,\cos(z) \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass $\vec{F}$ konservativ ist.

b) Bestimme das Potential $\Phi(x, y, z)$. Machen Sie den Test, ob Φ tatsächlich das richtige Potential ist!

c) Bestimme das Wegintegral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs einer beliebigen Kurve C von $P_1 = (0, 0, 0)$ bis $P_2 = (5, \pi/2, \pi)$. (Lsg: $\int \ldots = 5$)

Aufgabe 3: Gravitationspotential

Zeigen Sie, dass das Gravitationsfeld

$$\vec{F} = -G\,\frac{M\,m}{r^3}\,\vec{r} = -G\,\frac{M\,m}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ konservativ ist und bestimmen Sie das zugehörige Gravitations-Potential Φ.

Hinweis: $\Phi(x,y,z) = \Phi(r)$.

Aufgabe 4: Ein nicht *einfach zusammenhängendes Gebiet*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

das im Punkt $(0,0)$ nicht definiert ist und daher einen nicht einfach zusammenhängenden Definitionsbereich hat. Somit werden die Bedingungen für das *Lemma von Poincaré* nicht erfüllt. Diese Aufgabe soll zeigen, dass es rotationsfreie Vektorfelder gibt, die nicht konservativ sind.

a) Bestimmen Sie die Rotation $\mathrm{rot}\vec{F}$ (Lsg: 0)

b) Bestimmen Sie das Wegintegral von $\vec{F}$ längs eines geschlossenen Kreises mit Radius $r = 1$ mit positivem Umlaufsinn. (Lsg: $2\,\pi$)

c) Was würde das Wegintegral für ein konservatives Feld ergeben?

Viel Spass!