F: FELDLEHRE

Die Schwierigkeit ist die **Abstraktheit**: in den Feldern muss sich nichts Materielles bewegen; sie brauchen nicht einmal von Materie erfüllt zu sein.

Feldraum

Örtliche Beschreibung durch die Angabe von Intensität und Richtung des Feldes:

- Feldstärke (Ursache)
- Flussdichte (Wirkung)

$\Rightarrow$ **ortsbezogene Feldgrössen: Vektoren!**

Beschreibung des Feldes in seiner Gesamtheit:

- Potentialdifferenz (Ursache)
- Fluss (Wirkung)

$\Rightarrow$ **integrale Feldgrössen: skalare Grössen!**

INTEGRALE FELDGRÖSSEN

Potentialdifferenz

Ist die Flussantriebsgrösse (Ursache des Feldes).

Flussstärke

Ist die Wirkungsgrösse.

Der Feldraum wird in seiner gesamten Ausdehnung vom betreffenden Fluss durchsetzt.

Teilflüsse: Fluss durch definierte Flächen.

Es gilt das 1. Kirchhoffsche Gesetz (Knotenregel).

Zusammenhang zw. den integralen Grössen

Flussstärke	=	Leitwert des Feldraumes • Flussantriebsgrösse

Widerstand = Kehrwert des *Leitwerts*

Leitwert im homogenen Feld:

- prop. spezifischer Leitwert des Raumes (oft abh. von der Flussbelastung ⇒ nichlinear)
- prop. Feldraumquerschnitt
- umgekehrt prop. Feldraumlänge

ORTSBEZOGENE FELDGRÖSSEN

Feldstärke

In einem Feldpunkt wirksame lokale Teilflussantriebsgrösse (Ursachengrösse).

Flussdichte

Ist die lokale Wirkungsgrösse.

Zusammenhang zw. den ortsbezogenen Grössen

Flussdichte	=	spez. Leitwert des Feldraumes • Feldstärke

ZUSAMMENHANG INTEGR. / ORTSBEZ. GR.

Flussstärke	=	Flächenintegral über die Flussdichte

Flussantriebsgrösse	=	Linienintegral über die Feldstärke

FELDBEGRIFFE

homogene Felder
Überall gleicher Zustand der lokalen Feldgrössen.

inhomogene Felder
Ungleicher Zustand der lokalen Feldgrössen.

Feldlinien
Die Feldstärkevektoren stehen tangential zu den Feldlinien.

Ihr Abstand ist umgekehrt prop. zum Betrag der Feldstärkevektoren.

Aequipotentialflächen
Flächen gleichen Potentials.
Sie stehen senkrecht zu den Feldstärkevektoren.

Quellenfeld
Jede Feldlinie beginnt bei einer "Quelle" und endet in einer "Senke".

Wirbelfeld
Sämtliche Feldlinien sind geschlossen.

Strömungsfeld
Es fliesst Materie (z.B. Ladungsträger).

Zeitabhängigkeit
örtlich und/oder zeitlich konstante bzw. sich ändernde Felder.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

ÜBERSICHTSTABELLE

Vergleich der drei Feldarten der Elektrotechnik:

elektrisches Feld	**elektrisches Strömungsfeld**	**magnetisches Feld**
integrale Feldgrössen		
Ursachengrössen		
el. Potentialdiff. $U = \dfrac{W}{Q}$	el. Spannung $U = \dfrac{W}{Q}$	Durchflutung, magn. Potentialdiff. Θ, V_m
Wirkungsgrössen		
diel. Flussstärke Ψ	el. Stromstärke $I = \dfrac{Q}{t}$	magn. Flussstärke Φ
Eigenschaft des Feldraumes: Leitwert		
diel. Leitwert G_d: $G_d = \dfrac{\Psi}{U}$ homogenes Feld: $G_d = \varepsilon \dfrac{A}{s}$	el. Leitwert G: $G = \dfrac{I}{U}$ homogenes Feld: $G = \gamma \dfrac{A}{s}$	magn. Leitwert G_m: $G_m = \dfrac{\Phi}{V_m} = \Lambda$ homogenes Feld: $G_m = \mu \dfrac{A}{s}$
Zusammenhang zw. Ursachen- und Wirkungsgrösse		
$\Psi = G_d \cdot U$	$I = G \cdot U$	$\Phi = G_m \cdot V_m$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

elektrisches Feld	elektrisches Strömungsfeld	magnetisches Feld
lokale Feldgrössen		
Ursachengrössen		
el. Feldstärke $\vec{E}$ $\left\|\vec{E}\right\| = \frac{dU}{ds} = \frac{\left\|\vec{F}\right\|}{Q}$ homogenes Feld: $E = U/s$	el. Feldstärke $\vec{E}$ $\left\|\vec{E}\right\| = \frac{dU}{ds} = \frac{\left\|\vec{F}\right\|}{Q}$ homogenes Feld: $E = U/s$	magn. Feldstärke $\vec{H}$ $\left\|\vec{H}\right\| = \frac{dV_m}{ds}$ homogenes Feld: $H = V_m/s$
Wirkungsgrössen		
diel. Flussdichte $\vec{D}$ $\left\|\vec{D}\right\| = \frac{d\Psi}{dA}$ homogenes Feld: $D = \Psi/A$	el. Stromdichte $\vec{J}$ $\left\|\vec{J}\right\| = \frac{dI}{dA}$ homogenes Feld: $J = I/A$	magn. Flussdich. $\vec{B}$ $\left\|\vec{B}\right\| = \frac{d\Phi}{dA}$ homogenes Feld: $B = \Phi/A$
Eigenschaft des Feldraumelements: spez. Leitwert		
Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$	spez. el. Leitwert γ	Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
Zusammenhang zw. Ursachen- und Wirkungsgrösse		
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

elektrisches Feld	**elektrisches Strömungsfeld**	**magnetisches Feld**

Zusammenhang integrale und ortsbezogene Gr.

Quellenfeld: $U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ Wirbelfeld: $U = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $\Psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$ homogenes Feld: $U = E \cdot s$ $\Psi = D \cdot A$	Strömungsfeld: $U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ homogenes Feld: $U = E \cdot s$ $I = J \cdot A$	Wirbelfeld: $\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s}$ $\left(V_m = \int_s \vec{H} \cdot d\vec{s}\right)$ $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ homogenes Feld: $\Theta = H \cdot s$ $\left(V_m = H \cdot s\right)$ $\Phi = B \cdot A$

Energie bei stationärem Feld

Gesamtenergie / Leistung		
$W_e = \frac{U \cdot \Psi}{2}$ $P_d = 0$	$W = P \cdot t$ $P = U \cdot I$	$W_m = \frac{\Theta \cdot \Phi}{2}$ $P_m = 0$
Energiedichte / Leistungsdichte		
$\frac{dW_e}{dV} = \frac{E \cdot D}{2}$	$\frac{dP}{dV} = E \cdot J$	$\frac{dW_m}{dV} = \frac{H \cdot B}{2}$

Energie bei veränderlichem Feld

Leistung		
$p_d = u \frac{d\Psi}{dt}$	$p = u \cdot i$	$p_m = \Theta \frac{d\Phi}{dt}$

E1: EINLEITUNG ELEKTROSTATIK

Die Elektrostatik behandelt die el. Erscheinungsformen von Ladungen, die nicht in Bewegung sind.

GESCHICHTLICHES

- Thales von Milet
  ca. 640 v. Chr.: Entdeckung der Reibungselektrizität von Bernstein (griechisch: Electron)
- Charles Auguste de Coulomb (1736-1806)
  ca. 1780: Beschreibung der Kraftwirkung zwischen ruhenden Ladungen.
- Michael Faraday (1791-1867)
  Abschirmung eines elektrostatischen Feldes durch eine elektrisch leitende Hülle.

ELEKTROSTATISCHE ERSCHEINUNGSFORMEN

Reibungselektrizität

Durch Reibung kann der Gleichgewichtszustand zwischen positiven und negativen Ladungsträgern eines Stoffes gestört werden: **Ladungstrennung**.
z.B.: Reibung von Glas, Nylon oder Bernstein mit einem Wollelappen.

elektrostatische Kraftwirkung

Zwischen elektrisch geladenen Körpern treten Kräfte auf, wobei die Kraftwirkung nicht direkt von den

Ladungen ausgeht, sondern von der Wirkung der el. Felder der Ladungen aufeinander:
gleichnamig geladene Körper **stossen sich ab**, **ungleichnamige ziehen sich an**.

Influenz

Bringt man einen el. neutralen, leitenden Körper in die Nähe eines geladenen Körpers, so verschieben sich die beweglichen Leitungselektronen und es entstehen zwei Bereiche mit entgegengesetzter Ladung.

Polarisation

In einem el. Feld werden die ungleichnamigen Ladungen in den Molekülen eines Isolierstoffes so gegeneinander verschoben, dass positive und negative Enden entstehen (el. Dipole).

Piezoelektrizität

Bildung von el. Dipolen in einigen Kristallen, vor allem Quarz, durch Zug oder Druck.
(Pierre Curie, 1880)

DIELEKTRIKUM

Bezeichnung für einen nichtleitenden Raum (Isolator).

Es kann sich dabei um Vakuum, Gase, Flüssigkeiten oder Festkörper handeln.

E2: GESETZ VON COULOMB

Beschreibt die **Kraftwirkung** zwischen ruhenden el. Ladungen.

Die Wirkungslinie der Kraft zwischen zwei Ladungen ist deren Verbindungslinie.

Ladungen **gleichen** Vorzeichens **stossen sich ab**, Ladungen **ungleichen** Vorzeichens **ziehen sich an**.

Die Ladungen sind **quantisiert**: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
$[Q] = \mathrm{As} = \mathrm{C}\ (\mathrm{Coulomb})$; Elektronen: $-e$, Protonen: $+e$

Gesetz von Coulomb

Kraft zwischen den beiden Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r:

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}}$$

mit $\varepsilon_0 = el.\ Feldkonst. = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

$\varepsilon_r = relative\ Permittivität$ in Vakuum: $\varepsilon_r = 1$

$\varepsilon = Permittivität = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

Die Ursache der Kraftwirkung ist die Wechselwirkung der Felder, welche von den Ladungen ausgehen:

$\Rightarrow$ **elektrisches Feld**

E3: ELEKTROSTATISCHES FELD

Das elektrostatische Feld ist ein Sonderfall des elektrischen Feldes. Es wird durch das elektrische Feld ruhender Ladungen verursacht.

(Die Definition der Begriffe Feldstärke, Potential usw., befinden sich im Kapitel F "Feldlehre").

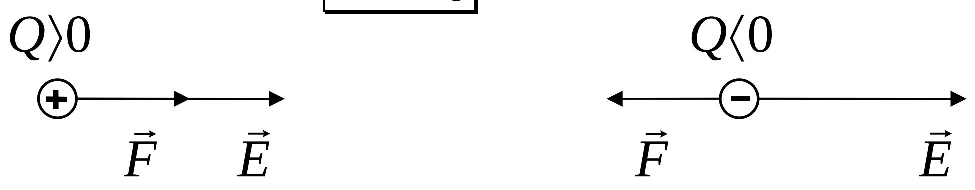
GRUNDLEGENDE ZUSAMMENHÄNGE

Im el. Feld der Stärke $\vec{E}$ ausgehend von der Ladung Q_1 wirkt eine Kraft auf die Probeladung Q_2:

Coulomb: $$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot \vec{r}}{r^3}$$ (Vakuum od. Luft)

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q_2 \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{Q_1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \quad \Rightarrow \left|\vec{E}\right| \; prop. \frac{1}{r^2}$$

allgemein $$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}}$$ (Vektorfeld)



Verschiebungsarbeit für eine Probeladung:

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}$$ (zw. $\vec{F}$ und $d\vec{s}$: Winkel α)

$$\Delta W = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \cdot U_{21} \Rightarrow$$

$$\boxed{U_{21} = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$ im homogenen Feld: $\boxed{U = E \cdot s \cdot \cos\alpha}$

- Das elektrostatische Feld ist ein **Quellenfeld**.
- Richtung der Feldlinien:
  (Bahnkurven einer massenlosen Ladung)
  Ausgangspunkt sind die positiven Ladungen (Quellen) und Endpunkt die negativen (Senken).
- Das elektrostatische Feld entspricht dem elektrischen oder dielektrischen Feld.
  Anderer Natur ist das elektrische Strömungsfeld (elektrischer Stromkreis).

INTEGRALE FELDGRÖSSEN

Ursachengrösse el. Potentialdifferenz (Spannung) $\varphi_2 - \varphi_1 = U_{21}$

elektrisches Potential φ: potentielle Energie einer Probeladung q bezüglich eines definierten Punktes (Leiteroberfläche, Erde, unendlich ferner Punkt).

$$\varphi_1 = \frac{W_1}{q} = U_{10}$$ ($W_1 =$ Verschiebungsarbeit ab Bezug)

Bsp.: φ im Abstand r um eine Punktladung Q bezogen auf unendlich ferner Punkt:

$$\varphi(r) = U_{r\infty} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r}$$

(Das el. Potential φ nimmt in Richtung von $\vec{E}$ ab)

Die el. Potentialdifferenz φ_{21}, bzw. die Spannung U_{21} kennzeichnet die Differenz der potentiellen Energien W_2 (im Punkt 2) und W_1 (im Punkt 1) gegenüber dem Bezugspunkt.

Betrag: $U_{21} = \dfrac{W_2 - W_1}{Q} = \dfrac{\Delta W}{Q}$

Vorzeichen: positiv bei Richtungssinn vom höheren Potential zum tieferen.

Dimension: $[U] = \dfrac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}} = \dfrac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}} = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}\ (\mathrm{Volt})$

Alessandro Graf v.Volta (1745-1827)

Wirkungsgrösse diel. Fluss Ψ

Die el. Potentialdifferenz U verursacht eine Ladungstrennung, welche ein el. Feld hervorruft, das in seiner Gesamtheit durch den diel. Fluss Ψ repräsentiert wird (es fliesst jedoch nichts Materielles).

Der diel. Fluss Ψ der von einer Ladung Q ausgeht ist in der Lage in einem leitenden Körper eine gleichgrosse Ladungsmenge zu verschieben (siehe "Influenz") und wird dieser Ladungsmenge gleichgesetzt (siehe Kapitel "Satz von Gauss").

Betrag: $\Psi = Q$

Vorzeichen: positiv bei Richtungssinn vom höheren Potential zum tieferen.

Dimension: $[\Psi] = [Q] = \mathrm{As} = \mathrm{C}$ (Coulomb)

Eigenschaft des Feldraumes $\Rightarrow$ Verknüpfung

diel. Leitw.: $G_d = \dfrac{\Psi}{U}$ diel. Widerst.: $R_d = \dfrac{1}{G_d}$

$\boxed{\Psi = G_d \cdot U}$ **ohmsches Gesetz der Elektrostatik**

(siehe auch Kapitel "dielektrischer Leitwert")

ORTSBEZOGENE FELDGRÖSSEN

Ursachengrösse el. Feldstärke $\vec{E}$

Definition: $|\vec{E}| = \dfrac{dU}{ds}$

Dimension: $[E] = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

Richtung: Tangente an die lokale Feldlinie, vom höheren Potential zum tieferen.

dU ist die längs $d\vec{s}$ wirkende el. Potentialdifferenz (differentieller Teil der Spannung U)

$\Rightarrow$ el. Feldstärke E im homogenen Feld:

$\boxed{E = \dfrac{U}{s}}$ s: Länge des Feldraumes in Richtung $\vec{E}$

Durchschlagsfestigkeit E_D von Isolierstoffen bei 20°C in $\mathrm{kV/cm}$:

Luft	24
Hartpapier	100...200
Trafo-Öl	125...230
Polystyrol	600

Wirkungsgrösse diel. Flussdichte $\vec{D}$

Definition: $\left|\vec{D}\right| = \dfrac{d\Psi}{dA}$

Dimension: $[D] = \dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$

Richtung: Tangente an die lokale Feldlinie, vom höheren Potential zum tieferen.

$d\Psi$ ist die Stärke des diel. Teilflusses, der das Flächenelement $d\vec{A}$ durchsetzt (differentieller Teil des Gesamtflusses Ψ).

Eigenschaft des Feldraumes ⇒ Verknüpfung

Permittivität: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ (spezifischer diel. Leitwert)

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}}$$

verschiedene relative Permittivitäten ε_r:

Vakuum	1	Luft	1
Trafo-Öl	2,3	Hartpapier	4...6
Aluminiumoxid	6...9	Tantalpentoxid	26

ZUSAMMENHANG ZW. DEN ORTSBEZOGENEN UND DEN INTEGRALEN FELDGRÖSSEN

- Flussantriebsgr. = Linienintegral über Feldstärke

$$\boxed{U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$ (Skalarprodukt)

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

$$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_0^2 \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_1^0 \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0}$$

2. Kirchhoffsches Gesetz in der Elektrostatik (Masche)

- Flussstärke = Flächenintegral über Flussdichte

$$\boxed{\Psi = \int_A \vec{D}\cdot d\vec{A}}$$ (Skalarprodukt)

$$\boxed{\Psi = \oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q}$$ **Satz von Gauss**

(Q wird von der Hüllfläche A eingeschlossen)

$\Rightarrow$ lokaler diel. Leitwert:

$$G_d = \frac{d\Psi}{dU} = \frac{D\cdot dA}{E\cdot ds} = \frac{\varepsilon\cdot dA}{ds}$$

$\Rightarrow$ diel. Leitwert im homogenen Feld:

$$G_d = \frac{\Psi}{U} = \frac{D\cdot A}{E\cdot s} = \frac{\varepsilon\cdot A}{s}$$

dA, A: Querschnitt des Feldraumes senkrecht zu $\vec{D}$

ds, s: Länge des Feldraumes in Richtung $\vec{E}$

INFLUENZ

Ein el. Feld bewirkt in einem el. Leiter oder auch in einem Halbleiter eine **Ladungsverschiebung** an die **Oberfläche** $\Rightarrow$ stationärer Zustand.

Die Feldstärkevektoren treten **senkrecht** aus.

Durch Kompensation der el. Felder entsteht im Leiterinnern ein **feldfreier Raum** (Faraday Käfig).

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

E4: SATZ VON GAUSS

Ausgehend von einer el. Ladung Q die bekanntlich von einem radialen el. Feld $\vec{E}$ umgeben ist,

mit dem Betrag von $\vec{E}$: $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$, folgt die

lokale Flussdichte $\vec{D}$: $\left|\vec{D}\right| = \varepsilon \cdot \left|\vec{E}\right|$

und der lokale Teilfluss $d\Psi$ durch die Fläche $d\vec{A}$:
$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot dA \cdot \cos\alpha$ ($\alpha =$ Winkel zw. $\vec{D}$ und $d\vec{A}$).

Werden alle lokalen Teilflüsse, die durch eine definierte Fläche A gehen, integriert (aufsummiert), resultiert der Fluss durch diese Fläche:

$$\Psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Ist die Fläche eine **kugelförmige Hüllfläche** A_H mit Radius r ($A_H = 4\pi \cdot r^2$) um die Ladung Q, resultiert der Gesamtfluss der von Q ausgeht:

$$\Psi = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \varepsilon \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} 4\pi \cdot r^2 = Q \quad (\cos\alpha = 1)$$

Es ist leicht einzusehen, dass dieser Gesamtfluss auch von einer **beliebig geformten Hüllfläche** erfasst wird. Q ist die **Summe** der eingeschlossenen Ladungen. **Vorzeichen berücksichtigen**!

Satz von Gauss: $\boxed{\Psi = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \sum Q}$

ANWENDUNGEN DES SATZES VON GAUSS

Zur Berechnung der Feldstärke $\vec{E}$ auf Flächen mit $\Psi = Q$ und konstantem Betrag von $\vec{E}$:

- *$\vec{E}$ ausserhalb einer geladenen (leitenden) Kugel:*

  Kugelfläche: $A_H = 4\pi \cdot r^2$ (Hüllfläche um Kugel)

  $\Psi = D \cdot A_H = \varepsilon \cdot E \cdot 4\pi \cdot r^2 = Q$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}} \qquad \left(E \propto \frac{1}{r^2}\right)$$ (radialsym. Feld)

- *$\vec{E}$ innerhalb leitender Hüllfläche = Aequipotentialfl.:*

  $\Psi = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$ (wenn **keine** Ladung eingeschl.)

  $\Rightarrow \quad \boxed{E = 0}$ **Abschirmung**! (Faraday-Käfig)

- *$\vec{E}$ einer langen, geladenen (leitenden) Geraden:*

  Linienladungsdichte: $\lambda = Q/l$

  Zylinderfläche: $A_H = 2\pi \cdot r \cdot l$ (Hülle um Gerade)

  $\Psi = D \cdot A_H = \varepsilon \cdot E \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = Q = \lambda \cdot l$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot r}} \qquad \left(E \propto \frac{1}{r}\right)$$ (radialsym. Feld)

- *$\vec{E}$ einer ausgedehnten, ebenen, homogenen Flächenladung:*

  Flächenladungsdichte: $\sigma = Q/A$

  $\Psi = D \cdot A_H = \varepsilon \cdot E \cdot 2A = Q = \sigma \cdot A \quad (A_H = 2A)$

  (Faktor 2, wegen den beiden Seiten der Fläche A)

  $$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon}}$$ ($\vec{E}$ konst. und senkrecht zu A)

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

E5: DIELEKTRISCHER LEITWERT

homogene Felder

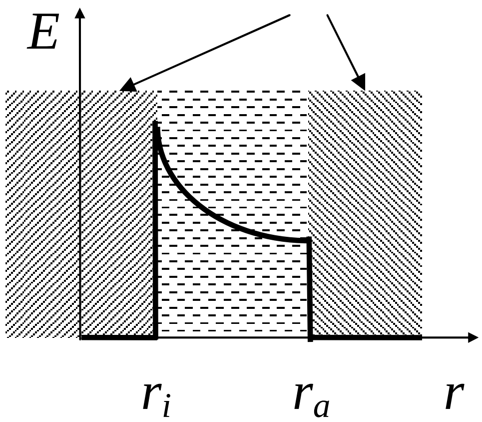
$$\boxed{G_d = \frac{\Psi}{U} = \frac{D \cdot A}{E \cdot s} = \frac{\varepsilon \cdot A}{s}}$$

inhomogene Felder

$$\boxed{G_d = \frac{\Psi}{U} = \frac{\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}}$$

Bsp: Feld zw. zwei leitenden, koaxialen Zylindern:

Radius innerer Zyl.: r_i
Radius äusserer Zyl.: r_a
Länge der Anordnung: l
Spannung zw. den Zyl.: U



$$Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot 2\pi \cdot r \cdot l$$

$$\Rightarrow D(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 2\pi \cdot r \cdot l}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 2\pi \cdot l} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 2\pi \cdot l} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$\boxed{G_d = \frac{\Psi}{U} = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot 2\pi \cdot l}{\ln(r_a / r_i)}} \qquad [G_d] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}\ (\mathrm{Farad})$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

E6: KONDENSATOR

Bauelement aus zwei voneinander durch ein **Dielektrikum** isolierten Metallelektroden.

Einfachster Fall: zwei planparallele, ebene Platten
$\Rightarrow$ **Plattenkondensator** (Dielektrikum: Vakuum)

Flächenladungsdichten entgegengesetzt gleich:
$\sigma_1 = -\sigma_2$ mit $\sigma = Q/A$ ($A =$ Plattenfläche)

Superposition (Überlagerung) der Felder der beiden Platten:

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ zwischen den Platten:

$$\boxed{E = 2\,\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0\cdot A}}$$

homogenes Feld

$\vec{E}$ ausserhalb der Platten:

$$\boxed{E = 0}$$

$\Rightarrow$ Spannung U zwischen den Platten mit Abstand s:

$$U = E\cdot s = \frac{Q}{\varepsilon_0\cdot A}\,s \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{\varepsilon_0\cdot A}{s}\,U = G_d\cdot U$$

Die Kapazität ist der diel. Leitwert des Feldes!

$$\boxed{Q = C\cdot U} \qquad [C] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}\ (\mathrm{Farad})$$

allgemein: $$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E}\cdot d\vec{s}}}$$ NB: $[\varepsilon_0] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$

Normalerweise ist das Dielektrikum nicht Vakuum, dann kommt für die spez. diel. Leitfähigkeit die **Permittivität** ε zum Zuge: $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}$

BERECHNUNG VON KAPAZITÄTEN

Strategie

1. Fläche A mit $\Psi = Q$ und $\left|\vec{E}\right| = konst.$ um (unbek.) Ladung Q legen $\quad Q = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$
2. Bestimmung von $\quad \vec{D} = f(r)$
3. daraus folgt $\quad \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$
4. Bestimmung von $\quad U = \int_{Elektrode\,1}^{Elektrode\,2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$
5. daraus folgt $\quad C = Q/U$

Beispiele

- *Plattenkondensator:* $A =$ Fläche, $s =$ Plattenabstand

$Q = D \cdot A$ $\qquad$ $\vec{E}$-Feld nur zwischen den Platten

$$\Rightarrow \qquad D = \frac{Q}{A} \qquad \text{und} \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A}$$

$$U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot s = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A}\, s$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot A}{s}}$$

- *Kugelkondensator:* $r_i =$ Aussenrad. der Innenkugel
  $r_a =$ Innenrad. der Aussenkugel

$$Q = D \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$\Rightarrow \qquad D = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \qquad \text{und} \qquad E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C = \frac{Q}{U} = 4\pi \cdot \varepsilon \frac{r_i \cdot r_a}{r_a - r_i}}$$

- *Zylinderkondensator:*

$r_i =$ Aussenrad. Innenelektrode
$r_a =$ Innenrad. Aussenelektrode
$l =$ Länge

$$Q = D \cdot 2\pi \cdot r \cdot l$$

$$\Rightarrow \qquad D = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l} \quad \text{und} \quad E = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot r \cdot l}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r}\, dr = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln(r_a / r_i)}}$$

- *Lange Paralleldrahtleitung:*

$l =$ Länge
$a =$ Leitungsabstand
$r =$ Leiterradius

$$\boxed{C \cong \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln(a/r)}} \quad (\text{für } a \rangle\rangle r)$$

- *Langer Einzelleiter über Erde:*

$l =$ Länge
$h =$ Abstand zur Erde
$r =$ Leiterradius

$$\boxed{C \cong \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln(2h/r)}} \quad (\text{für } h \rangle\rangle r)$$

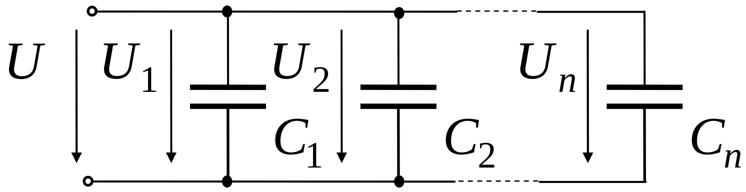
Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

KONDENSATORSCHALTUNGEN

Parallelschaltung

$$U_1 = U_2 = \cdots = U_n = U$$

$$Q_1 = C_1 \cdot U$$
$$Q_2 = C_2 \cdot U$$
$$\ldots$$
$$Q_n = C_n \cdot U$$

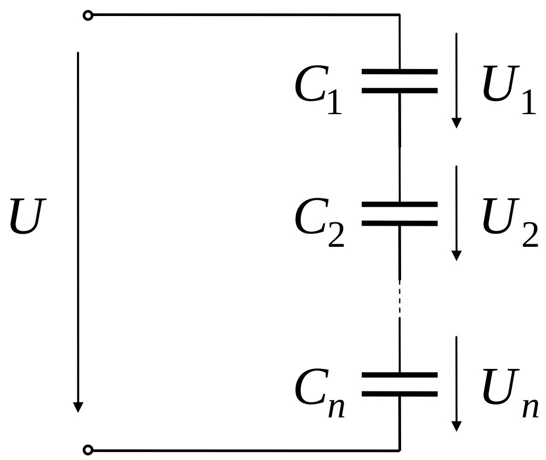


$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$

Serieschaltung

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}$$
$$U_2 = \frac{Q}{C_2}$$
$$\ldots$$
$$U_n = \frac{Q}{C_n}$$



$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

bei zwei Kondensatoren: $\boxed{C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}$

Spannungsverhältnisse: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$ und $\frac{U_2}{U} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$

E7: ISOLATOR IM ELEKTRISCHEN FELD

Polarisation

unpolare Moleküle: die Schwerpunkte der positiven und der negativen Ladungen sind identisch.
Bei angelegtem el. Feld: Verschiebung der Ladungsschwerpunkte (Polarisation) und mech. Deformation $\Rightarrow$ **el. Dipol** (prop. E und reversibel)

polare Moleküle: besitzen einen el. Dipol.
Bei angelegtem el. Feld: Ausrichtung der Dipole und Verstärkung durch Polarisation.

- *Fall geladener Plattenkondensator von Quelle getrennt mit Vakuum (keine Polarisation möglich):*
  $\Rightarrow$ Grössen: U_0, Q_0, $\vec{E}_0$ und $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0$
  Anschl. wird das Vakuum durch Isolatormaterial ersetzt: $Q = Q_0$ bleibt unverändert! d.h. $\vec{D} = \vec{D}_0$
  die Polarisation wirkt entgegen $\vec{E}_0$: mit $\varepsilon_r \geq 1$
  $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon_r}$ und $U = U_0 / \varepsilon_r$ wird kleiner!
  $C = \varepsilon_r \cdot C_0$ wird grösser

- *Fall Plattenkondensator an Quelle angeschlossen mit Vakuum (keine Polarisation möglich):*
  $\Rightarrow$ Grössen U_0, Q_0, $\vec{E}_0$ und $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0$
  Anschl. wird das Vakuum durch Isolatormaterial ersetzt: $U = U_0$ bleibt unverändert! d.h. $\vec{E} = \vec{E}_0$
  die Quelle vergrössert die Ladung: $Q = \varepsilon_r \cdot Q_0$
  $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_r \cdot \vec{D}_0}$ und $C = \varepsilon_r \cdot C_0$ werden grösser!

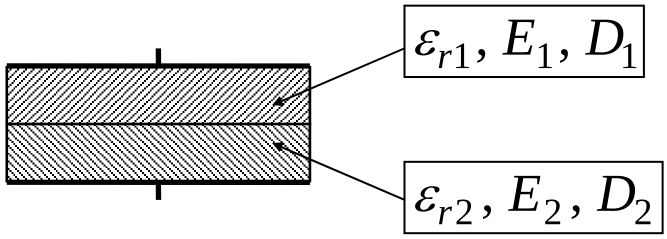
E8: FELDLINIEN AN GRENZFLÄCHEN

Ortsbezogene Feldgrössen beim Übergang von einem isotropen Medium (ε_1) in ein anderes (ε_2).

Mehrschichtdielektrikum quergeschichtet

$$D_1 = D_2 = D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot E_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot E_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

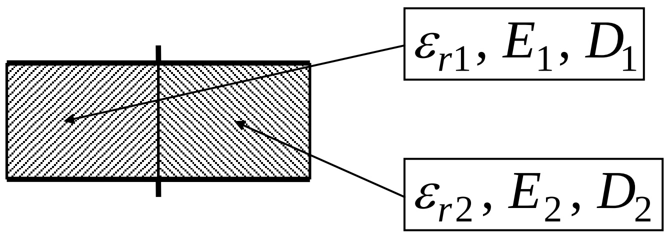


$\Rightarrow$ Im Material mit der kleineren Permittivität tritt die grössere Feldstärke auf.
Sprunghafte Änderung v. E an der Trennfläche.

Mehrschichtdielektrikum längsgeschichtet

$$E_1 = E_2 = E = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}$$



$\Rightarrow$ Im Material mit der grösseren Permittivität tritt die grössere Flussdichte auf.
Verständlich, wegen der besseren Leitfähigkeit.

Mehrschichtdielektrikum schräggeschichtet

$\Rightarrow$ **Brechung** der Feldlinien.

Zerl. von $\vec{E}$ und $\vec{D}$ in Normal- und Tangentialkomp.

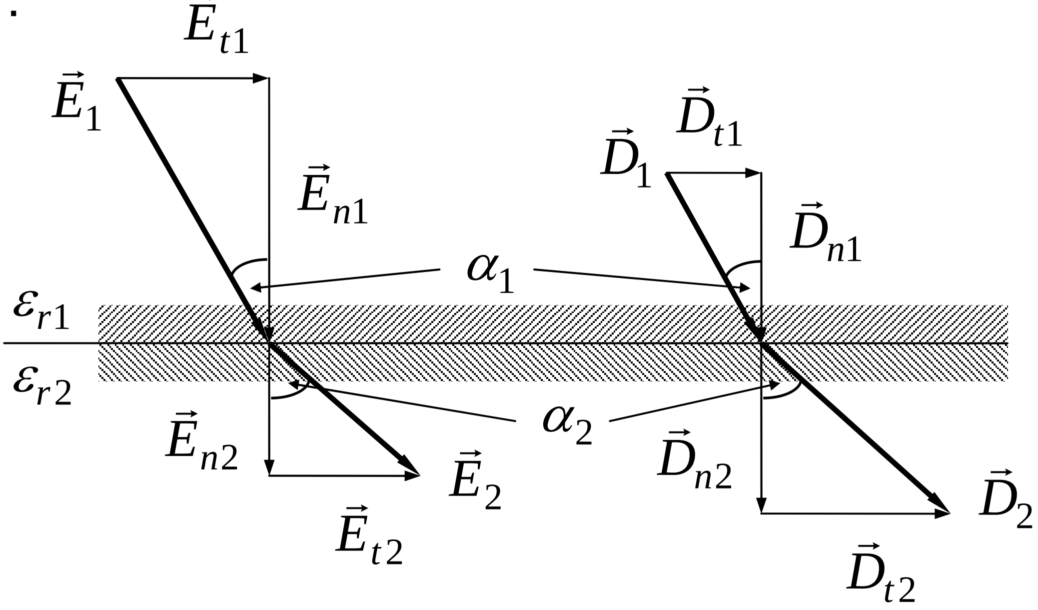
Normalkomp. $\Rightarrow$ quergeschichtetes Dielektrikum
E_n umgekehrt prop. zu ε_r
D_n unverändert: $D_{n1} = D_{n2}$

Tangentialkomp. $\Rightarrow$ längsgeschichtetes Dielektrikum
E_t unverändert: $E_{t1} = E_{t2}$
D_t proportional zu ε_r

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{E_{t1}/E_{n1}}{E_{t2}/E_{n2}} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}$$ **Brechungsgesetz**

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}} \text{ und } \boxed{\frac{D_1}{D_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}}$$

$\varepsilon_{r1} \langle \varepsilon_{r2}$:



Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

E9: ENERGIE IM ELEKTROSTAT. FELD

Energie

Die Ladung dQ wird auf einen Kondensator gebracht:

$$dW_e = u \cdot dQ = u \cdot C \cdot du$$

Aufladung ausgehend von $u = 0$ bis U:

$$\boxed{W_e = C\int_0^U u \cdot du = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Energiedichte $w_e = W_e / V$ $V =$ Vol. des Feldraumes

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\frac{C \cdot U^2}{V} = \frac{1}{2}\frac{Q \cdot U}{V} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C \cdot V}}$$

Spezialfall Plattenkondensator (homogenes Feld):

$V = A \cdot s$ ($A =$ Plattenfläche, $s =$ Plattenabstand)

$w_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C \cdot A \cdot s}$ mit $D = \frac{Q}{A}$ und $U = \frac{Q}{C}$ folgt:

$w_e = \frac{1}{2}\frac{D \cdot U}{s} = \frac{1}{2} D \cdot E$ **im ganzen Feldraum gleich!**

homogenes Feld: $$\boxed{w_e = \frac{1}{2} D \cdot E = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}}$$

inhomogenes Feld: w_e: gleiche Beziehung wie im homogenen Feld, jedoch **ortsabhängig**!

Gesamtenergie: $$\boxed{W_e = \int_V w_e \cdot dV = \frac{1}{2}\int_V D \cdot E \cdot dV}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

E10: KRÄFTE IM ELEKTROSTAT. FELD

elektrostatisches Feld $\Rightarrow$ Kraft auf geladene Körper

Kraft bei der Energieumwandlung:
mechanische Energie $\Leftrightarrow$ elektrische Energie

Wirkungsrichtung der Kräfte so gerichtet, dass
- die Feldlinien verkürzt werden,
- die Kapazität einer Anordnung grösser wird,
- der Energieinhalt des Feldes abnimmt.

Strategie zur Berechnung der Kräfte

mit Hilfe der Feldgrössen:

feldverursachende Ladung Q_1

$\Rightarrow$ dielektrische Flussdichte $\vec{D}_1$ am Ort der Ladung Q_2 $(D_1 = Q_1 / A_{Hülle})$

$\Rightarrow$ Feldstärke $\vec{E}_1$ $(E_1 = D_1 / \varepsilon)$

$\Rightarrow$ Kraft auf Ladung Q_2 $(F = Q_2 \cdot E_1)$

mit Hilfe des Energiesatzes:

- Berechung der anziehenden Kräfte zwischen den Elektroden (+ und -) von Kondensatoren.
- Berechnung der Kräfte an den Trennflächen von Dielektrika.

Vorgehen:
differentielle Verschiebung ds der Flächen A. Die Summe der Energieänderungen muss Null sein (Energieerhaltung).

BESTIMMUNG VON KRÄFTEN

mit Hilfe der ortsbezogenen Feldgrössen

- *Kraft auf freie Ladung im E-Feld*

$$\boxed{\vec{F} = Q \cdot \vec{E}}$$

- *Kraft zw. Punktladungen (Gesetz von Coulomb)*

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{s^2}} \quad s = \text{ Abstand der Ladungen}$$

- *Kraft zwischen Linienladungen*

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{2\pi \cdot \varepsilon} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{s \cdot l}} \quad s = \text{ Abstand der Leiter, } l = \text{ Leiterlänge}$$

mit Hilfe des Energiesatzes

- *Kräfte auf Kondensatorelektroden (2 Fälle)*

(Verschiebung einer Platte um $d\vec{s}$ entgegen der Kraft $\vec{F}$)

C an Spannungsquelle angeschlossen $\Rightarrow U = konst.$:

Energiebilanz: $dW_{el} = dW_m + dW_e$ (NB: dW_e nimmt ab)

$$i \cdot U \cdot dt = F \cdot ds + \frac{1}{2} dC \cdot U^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{ds}}$$

Plattenkondensator: $C = \varepsilon \cdot A/s$

und $$\frac{dC}{ds} = -\frac{\varepsilon \cdot A}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \cdot A}{s^2} U^2} \quad \text{(prop. } \frac{1}{s^2}\text{)}$$

NB: ein negatives Vorzeichen bedeutet, dass $\vec{F}$ entgegen $d\vec{s}$ (Zunahme von s) gerichtet ist.

C aufgeladen und von Quelle getrennt $\Rightarrow Q = konst.$:

$$dW_m = dW_e \qquad F \cdot ds = \frac{1}{2} dC \frac{Q^2}{C^2} \quad \Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{ds}}$$

Plattenkondensator: $C = \varepsilon \cdot A/s$

$$F = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{(\varepsilon \cdot A/s)^2}\frac{\varepsilon \cdot A}{s^2} \qquad \boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon \cdot A}}$$

(unabh. von s)

- *Kräfte auf Trennflächen (2 Fälle)*

Ansatz: Energiedichte $w_e = \frac{1}{2} D \cdot E$ mal $dV = A \cdot ds$

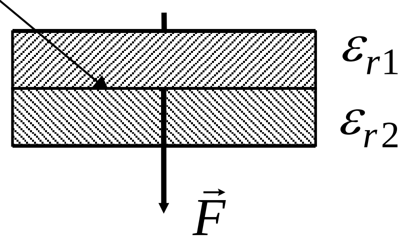
Trennfläche senkrecht zur Feldrichtung

$dW_m = F \cdot ds$ ($ds =$ Verschiebung der Trennfläche A)

$$F \cdot ds = \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \right) A \cdot ds$$

für $\varepsilon_{r1} \rangle \varepsilon_{r2}$:

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} D^2 \cdot A \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \right)}$$



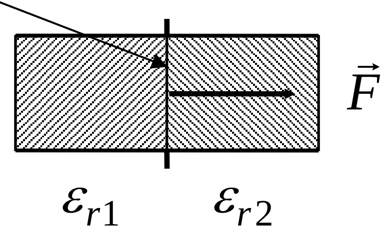
Trennfläche parallel zur Feldrichtung

$dW_m = F \cdot ds$ ($ds =$ Verschiebung der Trennfläche A)

$$F \cdot ds = \frac{1}{2} E^2 (\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}) A \cdot ds$$

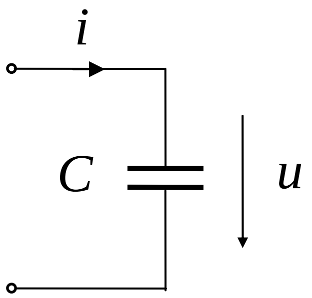
für $\varepsilon_{r1} \rangle \varepsilon_{r2}$:

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \cdot A (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})}$$



Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

E11: STROM UND SPANNUNG AM KONDENSATOR



$$dq = C \cdot du$$

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt}}$$ **Differentialform**

Der Strom "durch" einen Kondensator ist mit einer Aenderung der Spannung verbunden.

$\Rightarrow$ Der Strom ist Null, wenn die Spannung konstant ist.

$$du = \frac{1}{C} i \cdot dt$$

$$\boxed{u = \frac{1}{C}\int_0^{t_f} i \cdot dt + U_0}$$ **Integralform**

Die Spannung am Kondensator setzt sich zusammen aus der Anfangsspannung U_0 und einem Anteil aus der im Zeitraum 0 bis t_f zu- oder abgeflossenen Ladung.