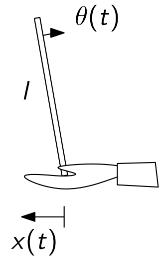
Lernkontrolle 3 MUSTERLÖSUNG

HINWEIS : Dieses Dokument kann mittels 'IPE' (siehe ipe.otfried.org) editiert werden.

Aufgabe 1)

Das Balancieren eines Stabes der Länge l kann näherungsweise durch die nachfolgende Differentialgleichung beschrieben werden.

$$l \cdot \ddot{\theta} - g \cdot \sin(\theta) = \ddot{x} \cdot \cos(\theta)$$



a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand und linearisieren Sie die Differentialgleichung um diesen.

$\mathbb{L}$: Im Gleichgewichtszustand gilt $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \dot{x} = \ddot{x} = 0$. Daher muss

$$-g \cdot \sin(\theta_0) = 0$$

erfüllt sein, was offensichtlich für $\theta_0 = 0$, respektive $\theta_0 = n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Aufgrund der dargestellten Situation darf von $\theta_0 = 0$ ausgegangen werden. Daher ist

$$D(\ddot{\theta}, \theta, \ddot{x}) = l \cdot \ddot{\theta} - g \cdot \sin(\theta) - \ddot{x} \cdot \cos(\theta) = 0$$

für $\theta_0 = 0$ zu linearisieren. Es resultieren die partiellen Ableitungen

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \ddot{\theta}}\right|_{\theta_0} = l$$
$$\left.\frac{\partial D}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = -g \cdot \cos(\theta_0) + \ddot{x} \cdot \sin(\theta_0) = -g$$
$$\left.\frac{\partial D}{\partial \ddot{x}}\right|_{\theta_0} = -\cos(\theta_0) = -1$$

und damit die linearisierte Gleichung

$$l\Delta\ddot{\theta} - g\Delta\theta - \Delta\ddot{x} = 0 \quad \text{respektive}$$
$$l\Delta\ddot{\theta} - g\Delta\theta = \Delta\ddot{x}$$

b) Wie lautet die Übertragungsfunktion des linearisierten Systems?

$\mathbb{L}$: Die linearisierte Differentialgleichung kann direkt in den Laplacebereich übertragen werden, wodurch sich

$$ls^2\Theta - g\Theta = s^2X$$
$$(ls^2 - g) \cdot \Theta = s^2X \qquad \text{und}$$
$$G(s) = \frac{\Theta}{X} = \frac{s^2}{ls^2 - g} = \frac{1}{l} \cdot \frac{s^2}{s^2 - \frac{g}{l}}$$

ergibt.

c) Bestimmen Sie die Stossantwort $g(t)$ des linearisierten Systems und prüfen Sie diese auf Plausibilität.

$\mathbb{L}$: Da $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(s)$ ist, folgt durch Rücktransformation nach Polynomdivision

$$G(s) = \frac{1}{l} \cdot \frac{s^2}{s^2 - \frac{g}{l}}$$

$$G(s) = \frac{1}{l}\left(1 + \frac{\frac{g}{l}}{s^2 - \frac{g}{l}}\right)$$

$$g(t) = \frac{1}{l}\left(\delta(t) + \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) \cdot \sigma(t)\right)$$

da $1 \bullet\!\!-\!\!\circ\, \delta(t)$ und $\frac{a}{s^2 - a^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \sinh(at)$ ist.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen des Zähler- und Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion. Wie hängen diese von den Parametern l und g des Systems ab?

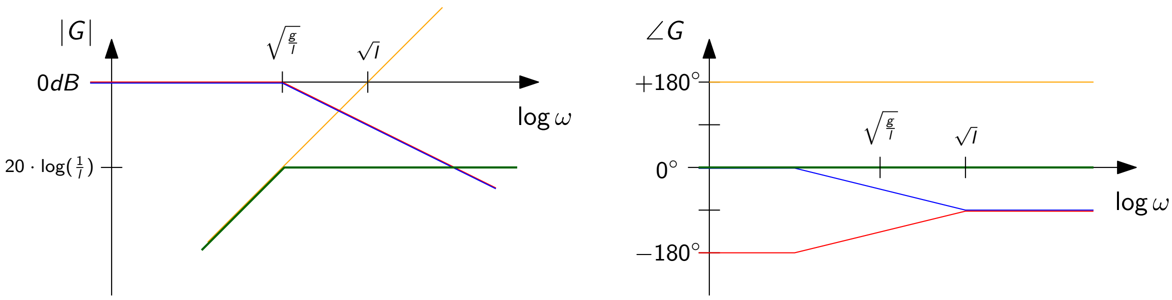
$\mathbb{L}$ Nullstellen Zähler : keine, Nullstellen Nenner : $s_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$

e) Skizzieren Sie den Verlauf von $20\log|G(s)|$ und von $\angle G(s)$ für $s : 0 \to j\infty$.

$\mathbb{L}$: Die Übertragungsfunktion kann wie folgt faktorisiert werden:

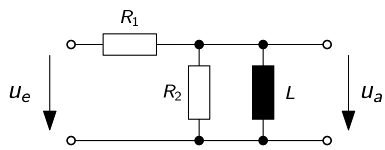
$$G(s) = \frac{1}{l} \cdot \frac{s^2}{s^2 - \frac{g}{l}} = \frac{s^2}{l} \cdot \frac{1}{s + \sqrt{\frac{g}{l}}} \cdot \frac{1}{s - \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

womit sich das Gesamtsystem als Komposition von Teilsystemen darstellen lässt.



Aufgabe 2)

Bei nachfolgendem elektrischen System sei u_e die Eingangsgrösse und u_a die Ausgangsgrösse.



Induktivität : $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$

a) Wie lautet die zugehörige Differentialgleichung?

$\mathbb{L}$: An der Induktivität gilt $u_a = L \cdot \frac{di_L}{dt}$ wobei durch den Knotensatz für i_L die Beziehung $i_L = i_{R_1} - i_{R_2}$ gilt. Mittels des Maschensatzes ergibt sich zudem $u_{R_1} = u_e - u_a$. Damit:

$$u_a = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot i'_{R_1} - L \cdot i'_{R_2}$$

$$u_a = \frac{L}{R_1} \cdot (u'_e - u'_a) - \frac{L}{R_2} \cdot u'_a$$

$$u_a = \frac{L}{R_1} \cdot u'_e - \frac{L}{R_1 \parallel R_2} \cdot u'_a$$

Dabei ist bezeichnet $R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ die Parallelschaltung von R_1 und R_2.

b) Leiten Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ aus der Differentialgleichung her.

$\mathbb{L}$: Durch die Korrespondenz $f' \circ\!\!-\!\!\bullet\, s\,F(s) - f(0)$ und Anfangsbedingungen identisch Null ergibt sich die Differentialgleichung im Laplacebereich zu:

$$U_a = \frac{L}{R_1} \cdot s\,U_e - \frac{L}{R_1 \parallel R_2} \cdot s\,U_a$$

$$\left(1 + s\frac{L}{R_1 \parallel R_2}\right) \cdot U_a = \frac{L}{R_1} \cdot s\,U_e \qquad \text{respektive}$$

$$G(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{s \cdot \frac{L}{R_1}}{1 + s \cdot \frac{L}{R_1 \| R_2}}$$

c) Bestimmen Sie die Nullstellen des Zähler- und Nennerpolynoms.

$\mathbb{L}$: Nullstelle : $s = 0$, Pol : $s = -\frac{R_1 \| R_2}{L}$

d) Wie lautet die Stossantwort $g(t)$, wie die Sprungantwort $h(t)$?

$\mathbb{L}$: Mit $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{R_1 \| R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{s + \frac{R_1 \| R_2}{L}}$ folgt anhand der Tabelle unmittelbar

$h(t) = \frac{R_1 \| R_2}{R_1} \cdot e^{-\frac{R_2 \| R_1}{L} t} \cdot \sigma(t)$ und $g(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{R_1 \| R_2}{R_1} \cdot \left(\delta(t) - \frac{R_1 \| R_2}{L} \cdot e^{-\frac{R_2 \| R_1}{L} t} \cdot \sigma(t)\right)$

e) Skizzieren Sie den Verlauf von $20 \log |G(s)|$ und von $\angle G(s)$ für $s : 0 \to j\infty$.

$\mathbb{L}$: Das System lässt sich wie folgt zerlegen:

$$G(s) = \frac{s \cdot \frac{L}{R_1}}{1 + s \cdot \frac{L}{R_1 \| R_2}} = s \cdot \frac{L}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{L}{R_1 \| R_2}}$$

und damit die Diagramme durch geometrische Addition konstruieren: