Stochastik

Gesetz der Grossen Zahlen, Zentraler Grenzwertsatz und Fehlerrechnung

Mirko Birbaumer

Hochschule Luzern Technik & Architektur

Lineare Transformation einer Zufallsvariablen

Wir betrachten hier den Fall einer linearen Transformation

$$Y = a + bX \quad (a,\ b \in \mathbb{R}).$$

Eigenschaften Lineare Transformationen

Es gelten dann folgende Beziehungen:

(i) $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(a + bX) = a + b\mathrm{E}(X)$,

(ii) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(a + bX) = b^2\mathrm{Var}(X), \quad \sigma_Y = |b|\sigma_X$,

(iii) $\alpha -$ Quantil von $Y = q_Y(\alpha) = a + bq_X(\alpha)$,

(iv) $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$.

Beispiel: Transformation von Grad zu Fahrenheit

- Wir haben eine Temperatur in Grad Celsius gemessen und kennen die Standardabweichung des Messfehlers auf dieser Skala: $\sigma_C = \frac{1}{3}$ Grad Celsius.
- Wir wollen die Temperatur aber nicht in Grad Celsius, sondern in Grad Fahrenheit angeben.
- Wie gross ist die Standardabweichung σ_F des Messfehlers, wenn wir die Temperatur in Grad Fahrenheit angeben?
- **Antwort:** Temperatur T_c in Grad Celsius kann folgendermassen in die Temperatur T_F in Grad Fahrenheit umrechnen:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

Also $T_F = b \cdot T_C + a$, mit $b = \frac{9}{5}$ und $a = 32$. Daher ist die Standardabweichung in Grad Fahrenheit

$$\sigma_F = b \cdot \sigma_C = \frac{9}{5}\sigma_C = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

Empirirische Illustration Gesetz der grossen Zahlen

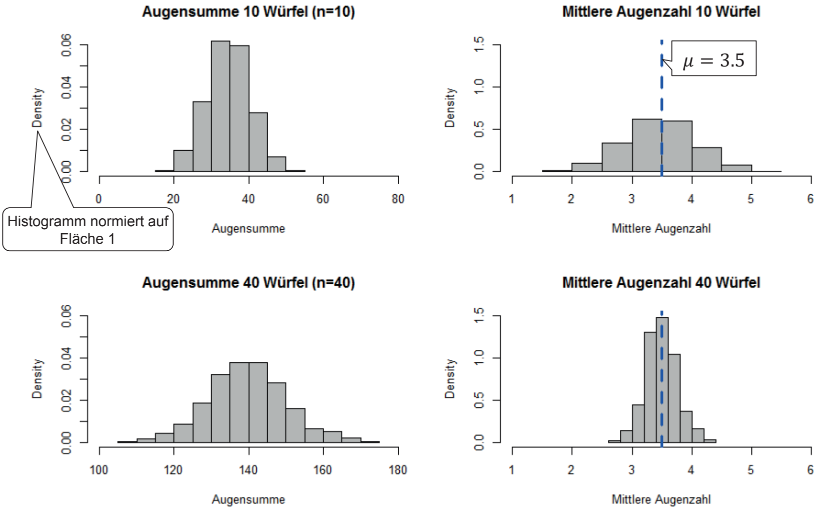
Betrachten Sie zwei Situationen

- Werfe **10 Würfel** 
- Werfe **40 Würfel** 
- X_i sei die Augenzahl des i-ten Würfels, Erwartungswert:

$$\mu = E[X_i] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$$

- In einem Durchgang würfeln wir einmal mit allen 10 und einmal mit allen 40 Würfeln. Wir notieren jeweils die **Augensumme** (S_n) und die **mittlere Augenzahl** ($\overline{X}_n$), $n \in \{10, 40\}$

Simulationsresultate (je 1000 Durchgänge)

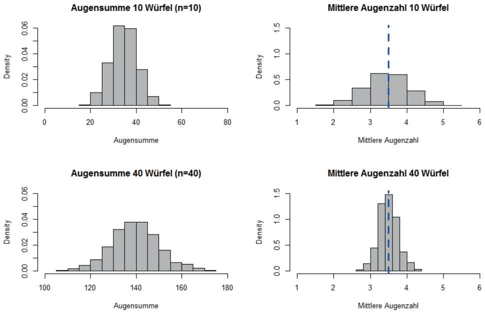


Simulationsresultate (je 1000 Durchgänge)

Die Anzahl Summanden wird 4 Mal so gross

$\sigma_{S_{10}}$

$\sigma_{\overline{X}_{10}}$



$\sigma_{S_{40}} = 2 \cdot \sigma_{S_{10}}$

$\sigma_{\overline{X}_{40}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\overline{X}_{10}}$

Standardabweichung der Summe verdoppelt sich.

Standardabweichung des arithm. Mittels halbiert sich.

Schlussfolgerung

- Je grösser n, desto grösser wird die Streuung der **Augensumme**
- Für die **durchschnittliche** Augenzahl wird die Streuung aber kleiner, und man ist immer **näher am Erwartungswert** (in diesem Fall 3.5)
- Also, wie intuitiv zu erwarten ist: **Wenn wir über viele Beobachtungen mitteln, werden wir immer genauer.**
- D.h. für n sehr gross ist das arithm. Mittel $\overline{X}_n$ sehr nahe am Erwartungswert. Dies ist gerade die Aussage vom **Gesetz der grossen Zahlen** (GGZ).

Kennzahlen von S_n

Kennzahlen von S_n

Für $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d gilt

$$\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = n\mu \,,$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = n\mathrm{Var}(X_i) \,,$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma_X \,.$$

Kennzahlen von $\overline{X}_n$

Kennzahlen von $\overline{X}_n$

Für $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d gilt

$$\mathrm{E}(\overline{X}_n) = \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu\ ,$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\ ,$$

$$\sigma(\overline{X}_n) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\ .$$

Die Standardabweichung von $\overline{X}_n$ heisst auch der **Standard-Fehler** des arithmetischen Mittels.

Gesetz der grossen Zahlen

Gesetz der grossen Zahlen

Für $n \to \infty$ geht die Streuung des arithmetischen Mittels gegen null. Es gilt das **Gesetz der grossen Zahlen:** Falls $X_1, \dots, X_n$ i.i.d., dann

$$\overline{X}_n \longrightarrow \mu \ (n \to \infty).$$

- Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels (**Standardfehler**) ist jedoch nicht proportional zu $1/n$, sondern nimmt nur ab mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$

$$\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_X \ .$$

- Um den Standardfehler zu halbieren, braucht man also *viermal* so viele Beobachtungen. Dies nennt man auch das $\sqrt{n}$-**Gesetz**.

Illustration ZGWS: Akkumulation von Messfehlern

- Wir betrachten eine Messung, die sich zusammensetzt aus der **Summe** von mehreren Einzelmessungen
- Beispiel: Auf einer Baustelle messen wir täglich die Arbeitsdauer eines Arbeiters, um die totale Zeit für seinen Arbeitsauftrag zu bestimmen.
- Jede Einzelmessung werde gerundet, also liegt der Messfehler einer Einzelmessung zwischen -0.5 und 0.5 (Stunden)
- Wir modellieren den Messfehler U_j der j-ten Messung also mit einer Uniformen Verteilung mit Parametern $a = -0.5$ und $b = 0.5$

Illustration: Akkumulation von Messfehlern

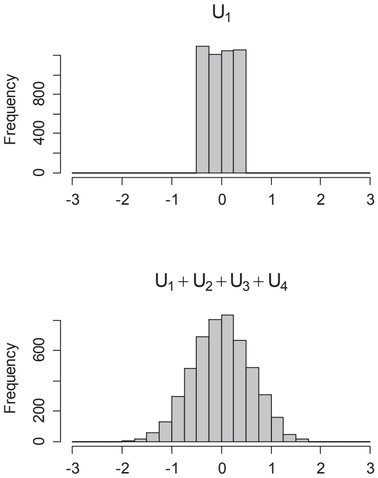
Wir betrachten nun den akkumulierten Fehler über die gesamte Summe der Arbeitszeiten eines Arbeiters. $U_1 + U_2$ ist die Summme der Messfehler des ersten und zweiten Arbeitstages.

Anzahl Messungen	Messfehler
1 Messung	U_1
2 Messungen	$U_1 + U_2$
4 Messungen	$U_1 + U_2 + U_3 + U_4$
8 Messungen	$\sum_{j=1}^{8} U_j$

Wir nehmen an, dass alle U_j voneinander unabhängig sind und $U_j \sim \text{Uniform}(-0.5, 0.5)$

Schauen wir uns die Situation einer Grossbaustelle mit 5000 Arbeitern an: für jeden der 5000 Arbeiter simulieren wir die Werte U_j, wobei j den Arbeitstag bezeichnet.

Histogramme von simulierten Messfehlern



Form ähnelt immer mehr der Glockenkurve der Normalverteilung

Zentraler Grenzwertsatz

- Kennzahlen von S_n und $\overline{X}_n$ haben wir bereits ermittelt. Wie aber sind S_n und $\overline{X}_n$ verteilt?

- Beispiel mit den Messfehlern in Bezug auf Arbeitszeit: S_n ist die Summe von uniform verteilten Zufallsvariablen (Messfehlern) und ist normalverteilt. Allgemein gilt der sehr bedeutende:

Zentraler Grenzwertsatz

Falls $X_1, \ldots, X_n$ $\mathrm{i.i.d}$ mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, dann gilt

$$S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma_X^2) \quad , \quad \overline{X}_n \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2/n),$$

wobei die Approximation im allgemeinen besser wird mit grösserem n. Überdies ist auch die Approximation besser, je näher die Verteilung von X_i bei der Normal-Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)$ ist.

Zentraler Grenzwertsatz: Anmerkungen

Der zentrale Grenzwertsatz sagt zudem aus, dass

- **Binomialverteilung** $\approx$ **Normalverteilung für** n **gross** und π nicht zu klein (da die Binomialverteilung eine Summe von vielen Bernoulli-Verteilungen ist)

- **Poissonverteilung** $\approx$ **Normalverteilung für** λ **gross** (da Poissonverteilung eine Summe von vielen anderen Poissonverteilungen ist)

Normalapproximation Binomialverteilung

Wie geht man dann konkret vor?

Wenn $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$, dann ist

$$E[X] = n\pi, \quad \text{Var}(X) = n\pi(1-\pi)$$

Als Approximation wählen wir eine Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit

$$\mu = n\pi, \quad \sigma^2 = n\pi(1-\pi)$$

Also haben wir

$$P[X \leq x] \approx \Phi\left(\frac{x - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}\right)$$

Beispiel: Normalapproximation

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10000 Würfen mit einer Münze maximal 5100 mal Kopf erscheint?
- Die Anzahl Würfe, bei denen Kopf erscheint, ist $\text{Bin}(10000, 0.5)$-verteilt. Diese Verteilung approximieren wir mit einer Normalverteilung, d.h.,

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

mit $\mu = 10000 \cdot 0.5 = 5000$ und $\sigma^2 = 10000 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5) = 2500$. Von Interesse ist

$$P(X \leq 5100) = \Phi\left(\frac{5100 - 5000}{\sqrt{2500}}\right) = \Phi(2) \approx 0.98\,.$$

R-Befehl: pnorm()

```
> pnorm(2)
0.9772499
```

Normalapproximation Poissonverteilung

Wenn $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, dann ist

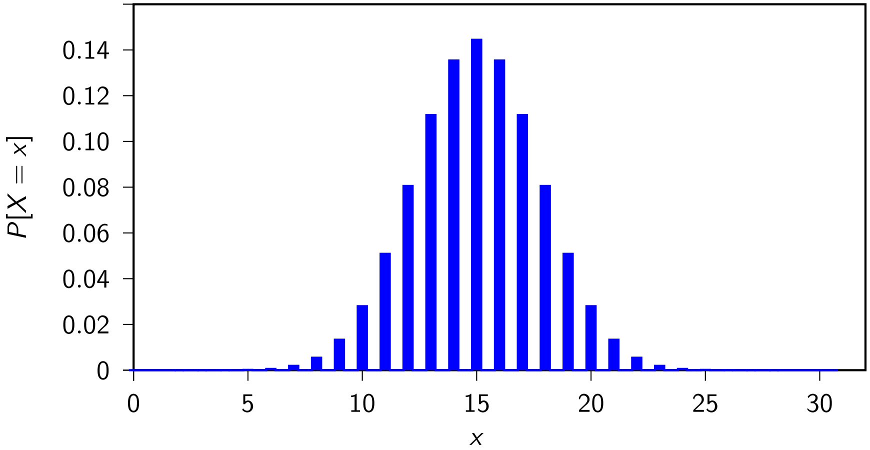
$$E[X] = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

Wir wählen also eine Normalverteilung mit $\mu = \lambda,\ \sigma^2 = \lambda$

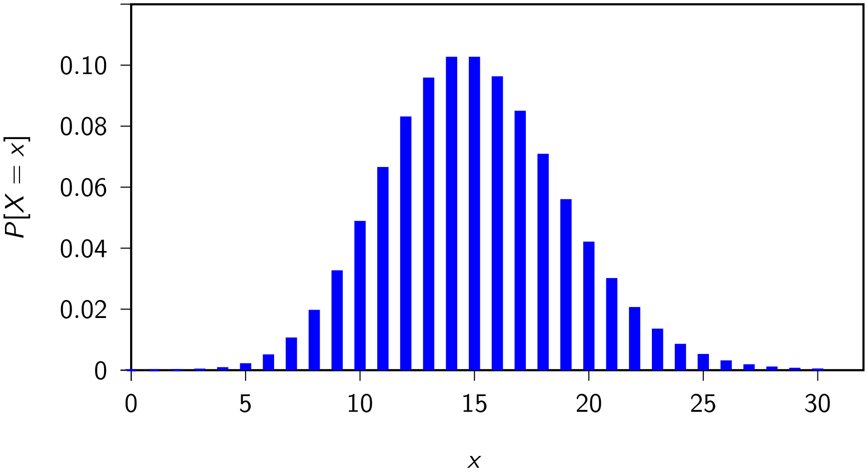
Also haben wir hier

$$P[X \leq x] \approx \Phi\left(\frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Binomialverteilung ($n = 30, \pi = 0.5$)



Poissonverteilung ($\lambda = 15$)



Zentraler Grenzwertsatz: Roulette

Roulette

- 18 rote Felder, 18 schwarze Felder, 1 grünes Feld
- Spieler setzt CHF 1 auf rot
- Der Gewinn des Casinos im i-ten Spiel sei X_i
- $X_i = \begin{cases} 1 & \text{W'heit } \frac{19}{37} & \text{18 schwarz, 1 grün} \\ -1 & \text{W'heit } \frac{18}{37} & \text{18 rot} \end{cases}$
- Totaler Gewinn nach n Spielen ist S_n

Zentraler Grenzwertsatz: Roulette

Wir haben

- $E[X_i] = 1 \cdot \frac{19}{37} + (-1) \cdot \frac{18}{37} = \frac{1}{37}$, d.h. Casino leicht im Vorteil
- $E[X_i^2] = \frac{19}{37} \cdot (-1)^2 + \frac{18}{37} \cdot (1)^2 = 1$
- $\mathrm{Var}(X_i) = E[X_i^2] - \left(E[X_i]\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{37}\right)^2 = 0.99927 \approx 1$

Frage: Wie gross ist die W'keit, dass das Casino Gewinn macht, wenn wir 10'000 (unabhängige) Spiele betrachten?

- $E[S_n] = n \cdot \mathrm{E}[X_i] = 10'000 \cdot \frac{1}{37} \approx 270.27$
- $\mathrm{Var}(S_n) = n \cdot \mathrm{Var}[X_i] = 10'000 \cdot 0.999927 \approx 9992.7$
  $\Rightarrow \sigma_{S_n} = \sqrt{9992.7} \approx 99.96$

Zentraler Grenzwertsatz: Roulette

Wenn wir eine Normalverteilung mit diesem Erwartungswert und dieser Varianz annehmen, haben wir

$$P[S_n > 0] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardisierung}}}{=} P\left[\frac{S_n - 270}{99.96} > \frac{0 - 270}{99.96}\right] \approx P[\underset{\substack{\uparrow \\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)}}{Z} > -2.7] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetrie}}}{=} \Phi(2.7)$$

Es ist $\Phi(2.7) = 0.9965$

Durch den **leichten Vorteil** des Casinos und die **vielen Spiele** reduziert sich das Verlustrisiko sehr stark!

Wenn wir die Anzahl Spiele erhöhen, verstärkt sich dieser Effekt und das Casino macht mit hoher W'keit einen (grossen) Gewinn.

Fehlerrechnung: Systematische und zufällige Fehler

- Messungen physikalischer Grössen sind grundsätzlich **fehlerbehaftet**, d.h., man erhält Messwerte, die vom wahren Wert mehr oder weniger abweichen.
- Unterscheidung zwischen **systematischen** und **zufälligen** Fehlern.
- Systematische Fehler rühren von der Unvollkommenheit der Messgeräte her, wie zum Beispiel Funktionsfehler und Eichfehler, oder von der Unvollkommenheit der Messverfahren.

Fehlerrechnung: Systematische und zufällige Fehler

- Beispiele von **systematischen Messfehlern**:

  1. Bei Kurzschluss der Eingänge zeigt ein Voltmeter nicht mehr 0 V an (Nullpunktsfehler).
  2. Durch den Innenwiderstand eines Voltmeters sind gemessene Strom- oder Spannungswerte stets zu klein.
  3. Bei einem Pendelversuch wird durch die Luft- und Lagerreibung die Schwingung gedämpft, wodurch die Frequenz der Schwingung verringert wird.

- Systematische Fehler sollten nach Möglichkeit vermieden oder kleingehalten werden. Sie sind jedoch nicht Gegenstand einer Fehlerrechnung.

Zufällige Fehler

- Zufällige Fehler entstehen vor allem durch die Naturgesetze selber wie zum Beispiel aufgrund der statistischen Natur von Kernzerfällen, durch Ungeschicklichkeit beim Messen oder durch statistisch schwankende äussere und innere Einflüsse (Druck, Temperatur, Luftfeuchtigkeit).

- Messwerte streuen um **arithmetischen Mittelwert**

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \, .$$

- Je grösser die Messreihe ist (also je grösser n), um so näher liegt der Mittelwert am wahren Wert und umso kleiner wird der Fehler des Mittelwertes, der sogenannte **Standardfehler**:

$$s_{\overline{x}_n} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \, .$$

Darstellung von Fehlern

- Der Standardfehler ist dann der **absolute Fehler**, den man im Zusammenhang mit dem arithmetischen Mittel einer Messreihe angibt:

$$\overline{x}_n \pm s_{\overline{x}_n}$$

- **Beispiel:** Umlaufzeit eines Plattentellers mit **absolutem Fehler** des Mittelwertes:
  $T = (1.817 \pm 0.012)$ s

- Der **relative Fehler** wird folgendermassen angegeben:

$$\overline{x}_n \pm \frac{s_{\overline{x}_n}}{\overline{x}_n} \cdot 100\%$$

- **Beispiel:** Umlaufzeit eines Plattentellers mit **relativem Fehler** des Mittelwertes:
  $T = 1.817\text{s} \pm \frac{0.012s}{1.817s} = 1.817 \text{ s } \pm 0.66\%$.

Darstellung von Fehlern

- Bei der Berechnung des arithmetischen Mittelwertes muss die **Anzahl signifikanter Stellen** der Messreihe berücksichtigt werden: es werden nur so viele signifikante Stellen angegeben wie im ungenauesten Messresultat.

  Signifikante Stellen: Die folgenden Ausdrücke haben zwei signifikante Stellen: $0.0012, 0.012, 0.12, 1.2, 12$

- Mittelwert und Fehler sollen mit **gleich vielen** Dezimalstellen geschrieben werden.

- Sowohl zum arithmetischen Mittelwert als auch zum Fehler des Mittelwerts gehören **Einheiten**. Einheit ist für beide dieselbe wie für die Messgrösse.