z-Übertragungsfunktionen des offenen und des geschlossenen Regelkreises? Pole im s Breich versus Pole im z Bereich ? Diskrete Zustandsraumdarstellung?

Thierry Prud'homme

Hochschule Luzern
Technik & Architektur

Outline

Outline

Outline

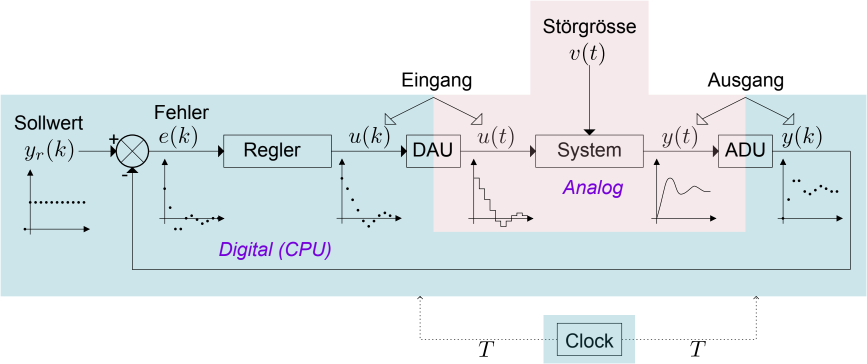
Outline

Outline

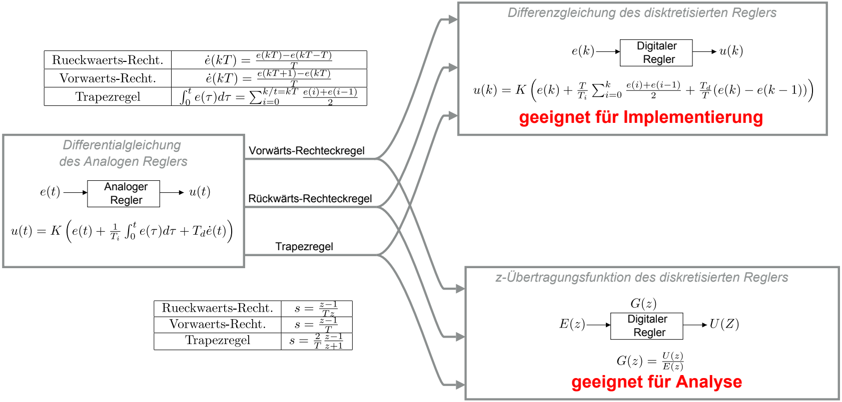
Lernziele

- Die Studierende können den Zusammenhang zwischen den Polen eines kontinuierlichen Systems und den Polen eines diskreten Systems erklären.
- Die Studierende können die z-Übertragungsfunktionen des offenen und des geschlossenen (Störverhalten und Führungsverhalten) herleiten.
- Die Studierende können ein im Zustandsraum dargestellen Modell diskretisieren.

Digitaler Geschlossener Regelkreis



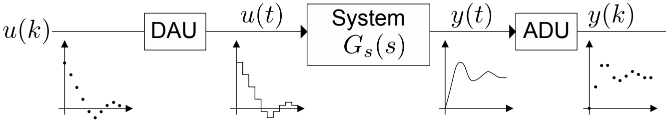
Diskretisierung des Reglers



Rueckwaerts-Recht.	$\dot{e}(kT) = \frac{e(kT)-e(kT-T)}{T}$
Vorwaerts-Recht.	$\dot{e}(kT) = \frac{e(kT+1)-e(kT)}{T}$
Trapezregel	$\int_0^t e(\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{k/t=kT}\frac{e(i)+e(i-1)}{2}$

Rueckwaerts-Recht.	$s = \frac{z-1}{Tz}$
Vorwaerts-Recht.	$s = \frac{z-1}{T}$
Trapezregel	$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

Diskretisierung der Regelstrecke



1 Partialbruchzerlegung von $\frac{G_s(s)}{s}$

$$\frac{G_s(s)}{s} = \frac{\sum_{i=1}^{q}(s+b_q)^{n_q}}{\sum_{j=1}^{r}(s+a_r)^{n_r}} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n_r}\frac{c_{j,l}}{(s+a_r)^l}$$

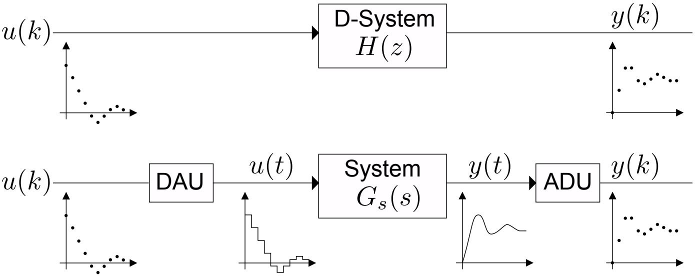
2 z-Transformation von jedem Komponent

$$\frac{c_{j,1}}{(s+a_r)} \rightarrow \frac{c_{j,1}z}{z-e^{-a_r T}}$$

$$\frac{c_{j,2}}{(s+a_r)^2} \rightarrow \frac{c_{j,2}Te^{-a_r h}z}{(z-e^{-a_r T})^2}$$

$$\cdots \rightarrow \cdots$$

Diskretisierung der Regelstrecke



3

Berechnung der z-Übertragungsfunktion
der Regelstrecke

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \left(\sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_r} Z \left\{ L^{-1} \left[\frac{c_{j,l}}{(s+a_r)^l} \right] \right\} \right)$$

Asymptotisch / BIBO Stabilität

Asymptotische Stabilität

Das System kehrt allein zu seinem Ruhestand zurück wenn es davon ausgelenkt wird.

BIBO Stabilität

Ein beschränkter Eingang führt zu einem beschränkten Ausgang.

$$|u(k)| \leq S_u < \infty \rightarrow |y(k)| \leq S_y < \infty$$

Beide sind für LZI Systeme identisch.

Analyse der Stabilität mit der Impulsantwort $g(k)$

Faltungssumme

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} u(l)g(k-l)$$

Wenn $|u(k)| \leq S_u < \infty \rightarrow |y(k)| < \sum_{l=0}^{\infty} S_u |g(k-l)|$

Theorem

Das System ist stabil wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$

Stabilität

Theorem

Stabilität

Ein digitales LZI-Glied ist stabil wenn die Pole seiner z-Übertragungsfunktion $H(z)$ im Einheitskreis liegen.

Zusammenhang Polen Laplace- / z-Übertragungsfunktion

z-Rücktransformation

$$\frac{c}{s - s_1} \quad \rightarrow \quad \frac{cz}{z - e^{s_1 T}}$$

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 \quad \rightarrow \quad z_1 = e^{s_1 T} = e^{\sigma_1 T} e^{j\omega_1 T}$$

Real- und Imaginär-Anteil

$$\begin{aligned} |z| &= e^{\sigma T} \\ \arg(z) &= \omega T \end{aligned}$$

Periodizität

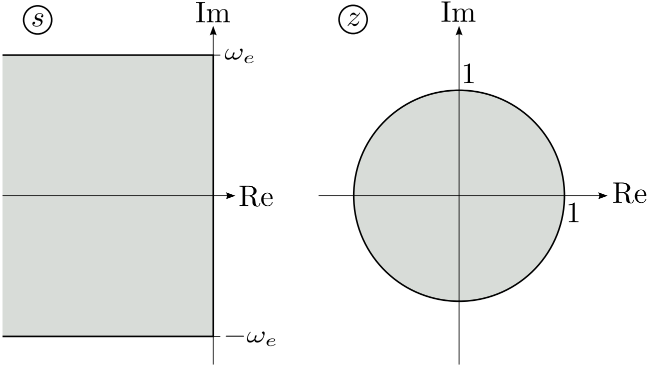
Abtastfrequenz ω_e

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T}$$

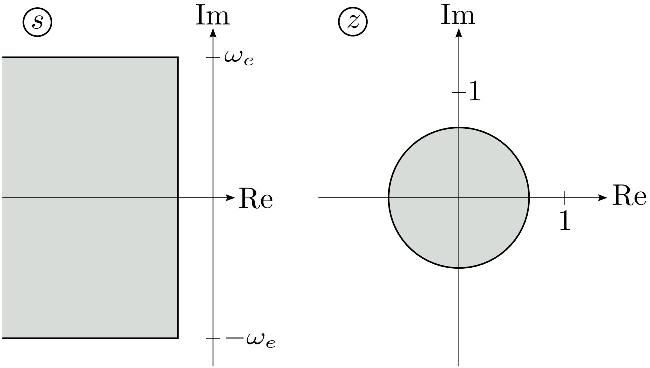
Periodizität

$$z = e^{(s+j\omega_e)T} = e^{sT} e^{j\omega_e T} = e^{sT} e^{j2\pi} = e^{sT}$$

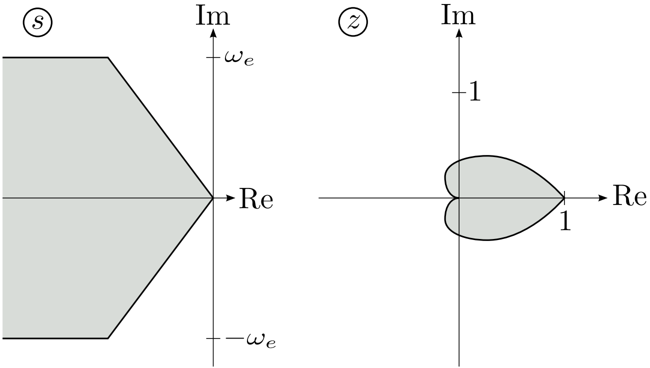
Mapping 1



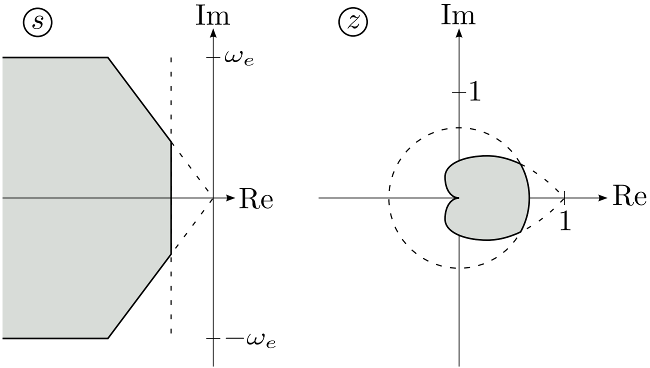
Mapping 2



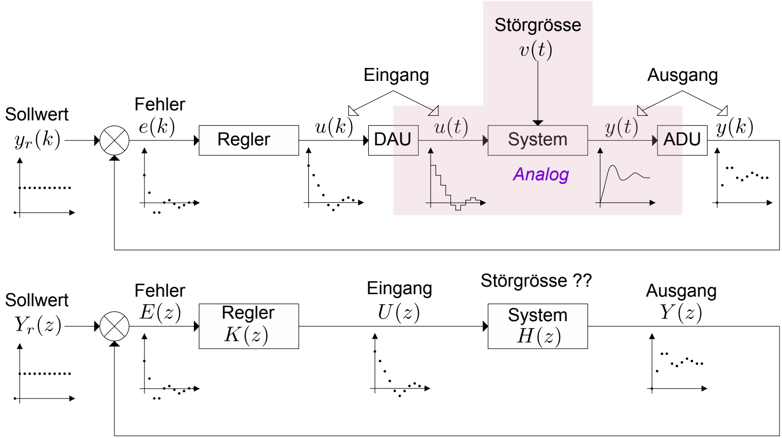
Mapping 3



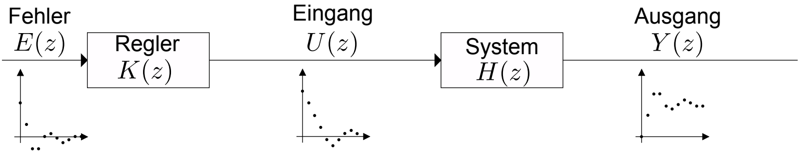
Mapping 4



Regelkreis


Störgrösse
$v(t)$
Eingang
Ausgang
Sollwert
$y_r(k)$
Fehler
$e(k)$
Regler
$u(k)$
DAU
$u(t)$
System
Analog
$y(t)$
ADU
$y(k)$
Sollwert
$Y_r(z)$
Fehler
$E(z)$
Regler
$K(z)$
Eingang
$U(z)$
Störgrösse ??
System
$H(z)$
Ausgang
$Y(z)$

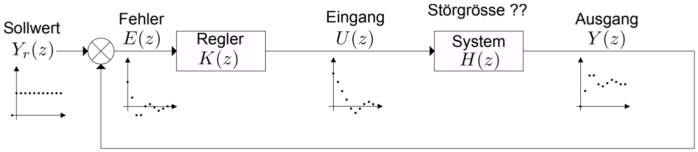
z-Übertragunsfunktion des offenen Regelkreises



Gleichung

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = K(z)H(z)$$

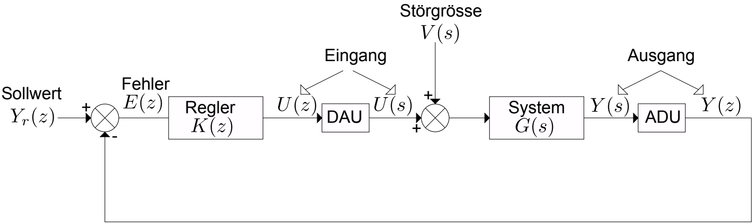
Führungsübertragungsfunktion

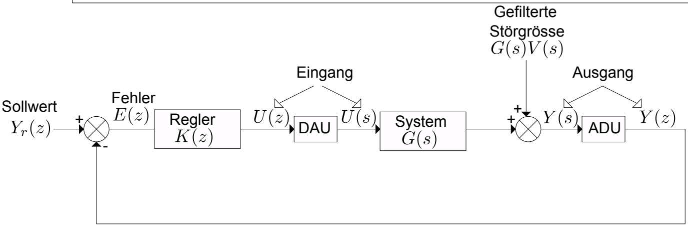


Gleichung

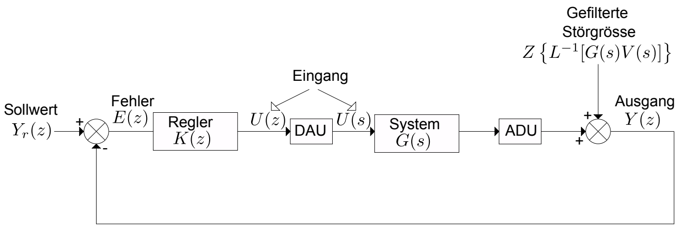
$$\frac{Y(z)}{Y_r(z)} = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)}$$

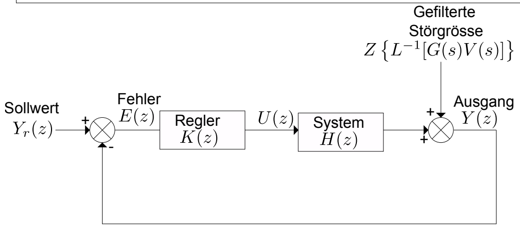
Störübertragungsfunktion



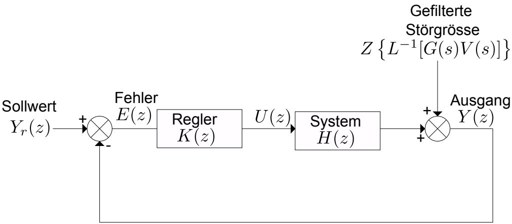


Störübertragungsfunktion





Störübertragungsfunktion



Ergebniss

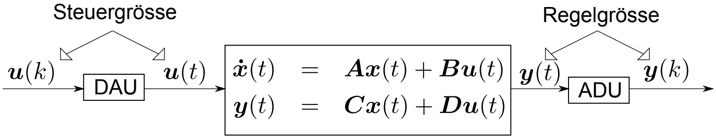
$$Y(z) = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} Y_r(z) + \frac{Z\left\{L^{-1}\left\{G(s)V(s)\right\}\right\}}{1 + K(z)H(z)}$$

Störübertragungsfunktion mit $v(t) = a$

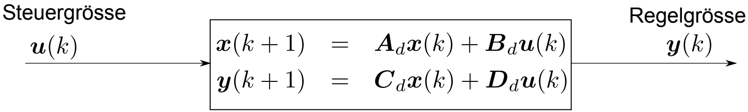
Ergebnis

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)}Y_r(z) + \frac{Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{aG(s)}{s}\right\}\right\}}{1+K(z)H(z)} \\
Y(z) &= \frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)}Y_r(z) + \frac{a\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}}{1+K(z)H(z)} \\
Y(z) &= \frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)}Y_r(z) + \frac{H(z)}{1+K(z)H(z)}V(z) \\
&\quad \text{mit } V(z) = \frac{az}{z-1}
\end{aligned}
$$

Problemstellung



Analog



Digital

Transformation

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t_{k+1}) &= e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
\mathbf{x}(t_{k+1}) &= e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\mathbf{B}\mathbf{u}(t_k) \\
\mathbf{x}(k+1) &= e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(k) + \int\limits_{0}^{T} e^{\mathbf{A}\tau}\mathrm{d}\tau\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(k)
\end{aligned}$$

Ergebnis

Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{B}_d &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathrm{d}\tau \mathbf{B} \end{aligned}$$

Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$