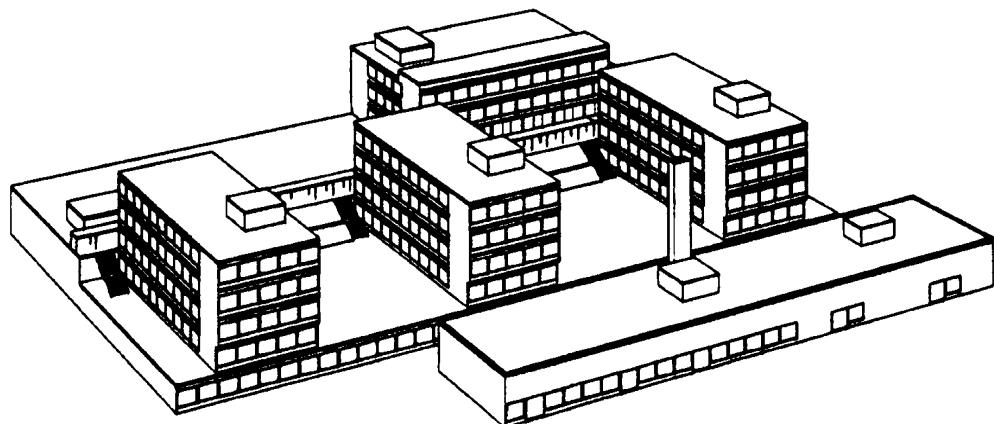


Analyse und Synthese von Regelsystemen im Zustandsraum

Modul **MRT+A**

Mathematische Grundlagen der linearen Matrixalgebra
Entwurfsmethoden für Zustandsregler und Beobachter



Dozenten: Prof. Dr. David Dyntar und Dr. Christoph Eck

Kurze Auffrischung der linearen Matrixalgebra im Hinblick auf die Analyse und Synthese von Regelsystemen im Zustandsraum

Prof. Dr. David Dyntar

(1)

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen (oder Funktionen), eingeschlossen in eckigen Klammern.

Bsp.

$$\begin{matrix} \text{Zeilen} \downarrow & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & -32 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, & [a_1 \ a_2 \ a_3], & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} e^x & 3x \\ e^{2x} & x^2 \end{bmatrix} & (1) \\ & \begin{matrix} \text{Kolumnen} \\ \text{Spalten} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Kolumnenvektor} \\ \text{Spaltenvektor} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Zeilenvektor} \\ \text{Zeile} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Quadratische Matr.} \\ \text{2x2} \end{matrix} & & \end{matrix}$$

Matrizen sind in vielen Anwendungen sehr praktisch.

Bsp. Gleichungssystem

$$5x - 2y + z = 0$$

$$3x + 4z = 0$$

Die entsprechende Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Bsp. Verkaufszahlen von drei Produkten P_1, P_2, P_3 während einer Woche:

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 33 & 81 & 0 & 21 & 47 \\ 0 & 12 & 78 & 50 & 50 & 96 \\ 10 & 0 & 0 & 27 & 43 & 78 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right.$$

Wenn eine Firma z.B. 10 Verkaufsläden hat, so können die einzelnen Matrizen addiert werden.

Allgemeine Notation

(2)dy

Matrizen werden mit grossen Buchstaben bezeichnet $A, B, C \dots$, oder werden mit ihren Elementen in eckigen Klammern ausgeschrieben, $A = [a_{jk}]$

$$A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Element einer Matrix
(entry)

(2)

Wir sprechen von einer $m \times n$ -Matrix, d.h. einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten.

Die Matrizen in (1) sind: $2 \times 3, 2 \times 1, 1 \times 3, 2 \times 2$ und 2×2 .

Beim Doppelindex der Elemente einer Matrix

a_{jk}

~~bedeutet~~ ^{zeichnet} der erste Index j die Zeile und der zweite Index k die Spalte.

Bsp.: a_{23} ist ein Element aus der zweiten Zeile und der dritten Spalte

Eine Matrix mit $m = n$ ist eine quadratische Matrix.

Eine solche Matrix hat eine Diagonale mit den Elementen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Man spricht auch von einer Hauptdiagonale.

Submatrizen

(3) dy

Wenn wir in einer $m \times n$ Matrix A
Zeilen oder Spalten (oder beides) weglassen,
bekommen wir eine Submatrix.

Bsp.

3
Eine 2×3

Matrix \rightarrow

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

enthaltet drei 2×2 Matrizen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Weiterhin: zwei 1×3 ^{Sub-} Matrizen (die zwei
Zeilenvektoren),

drei 2×1 Submatrizen (die drei Spaltenvektoren)
und sechs 1×2 Submatrizen:

$$[a_{11} \ a_{12}], [a_{11} \ a_{13}], \dots \text{etc.}$$

und sechs 1×1 Submatrizen $[a_{11}], [a_{12}]$ etc.

Vektoren

(4) 2)

Ein Vektor ist eine Matrix mit nur einer Zeile = Zeilenvektor, oder nur einer Spalte = Spaltenvektor.

Die Vektorelemente (entries) nennen wir Komponenten. Für die Bezeichnung eines Vektors verwenden wir kleine Buchstaben die unterstrichen werden (in der Literatur oft ohne Unterstrich, dafür aber fett gedruckt).
Bsp. Zeilenvektor

$$\underline{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3] = [a_j], j=1,2,3$$

Spaltenvektor

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Welche der beiden Schreibweisen wir verwenden ist eher praktischer Art.

Die Operation Transponieren (bezeichnet mit hochgestelltem T) ermöglicht die Umwandlung eines Zeilenvektors in einen Spaltenvektor und umgekehrt.

Bsp.

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}; \quad \underline{b}^T = [4 \ 0 \ -7]$$

(5) dy

Transponieren von Matrizen

Es ist praktisch Transponieren für jede beliebige Matrix zu definieren.

Die Transponierte A^T einer $m \times n$ -Matrix $A = [a_{ik}]$ ist eine $n \times m$ -Matrix, welche ~~aussette~~ die erste Zeile von A als erste Spalte hat, die zweite Zeile von A als zweite Spalte etc.

○ Die Transponierte A^T von A ist:

$$A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bsp.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Symmetrische Matrix und Schief-Symmetrische-Matrix sind quadratische Matrizen für welche gilt:

$$A^T = A \text{ (symmetrische Matrix)}$$

$$A^T = -A \text{ (schiefsymmetrische Matrix)}$$

Matrix - Addition und Skalar - Multiplikation

60y

Die Verwendung von Matrizen und Vektoren ist sehr nützlich, wenn wir uns vergessen wünschen, dass wir mit ihnen gleich einfach rechnen können wie mit Zahlen.

Wann haben Matrizen dieselbe Dimension?
Natürlich wenn ihre Anzahl-Zeilen und -Kolumnen (Spalten) gleich sind!

Gleichheit von Matrizen

Def.: Zwei Matrizen $A = [a_{ijk}]$ und $B = [b_{ijk}]$ sind gleich (geschrieben $A = B$) dann und nur dann, wenn sie die gleiche Dimension haben und wenn alle korrespondierenden Elemente gleich sind.

$$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \text{etc.}$$

Bsp.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

gilt dann und nur dann, wenn
 $a_{11} = 4, a_{12} = 0$
 $a_{21} = 3, a_{22} = -1$

Addition von Matrizen

⑦ 3y

Addition ist definiert nur für Matrizen derselben Dimension $A = [a_{jk}]$, $B = [b_{jk}]$. Die Summe wird geschrieben $A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beachte

A und A^T können hier nicht addiert werden

Bsp.

$$\underline{a} = [5 \ 7 \ 2], \underline{b} = [-6 \ 2 \ 0], \underline{a} + \underline{b} = [-1 \ 9 \ 2]$$

Skalarmultiplikation (Multipl. mit einer Zahl)

Das Produkt einer $m \times n$ -Matrix $A = [a_{jk}]$ und eines Skalars c (Zahl c), geschrieben cA , ist die $m \times n$ -Matrix $cA = [c \cdot a_{jk}]$, welche wir erhalten wenn alle Elemente von A mit c multipliziert werden.

Beachte

$$(-1)A = -A, (-k)A = -kA, A + (-B) = A - B$$

Bsp. Skalar-Multiplikation

⑧ Dy

$$A = \begin{bmatrix} 2.7 & -1.8 \\ 0 & 0.9 \\ 9.0 & -4.5 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -2.7 & 1.8 \\ 0 & -0.9 \\ -9.0 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{9} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}, \quad 0 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nullmatrix ↑
(3 × 2) 0

Vorausgesetzt, dass wir nur Matrizen von derselben Dimension $m \times n$ betrachten, haben die Operationen zwischen Matrizen ähnlichen Charakter wie bei den reellen Zahlen.

Insbesondere gilt:

$$A + B = B + A$$

$$(U + V) + W = U + (V + W)$$

$$A + 0 = A$$

$$A + (-A) = 0$$

$$c(A+B) = cA + cB$$

$$(c+k)A = cA + kA$$

$$c(kA) = (ck)A$$

$$1 \cdot A = A$$

Transponieren

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

und

$$(cA)^T = c \cdot A^T$$

Matrix-Multiplikation (MM)

(9) Dy

MM ist die wichtigste Operation bei Transformationen.

Def.: Das Produkt $C = A \cdot B$ (in dieser Reihenfolge !!!) einer $m \times n$ -Matrix $A = [a_{jk}]$ und einer $r \times p$ -Matrix $B = [b_{jk}]$ ist nur definiert wenn $r = n$ ist.

Das bedeutet

Anzahl Zeilen von B = Anzahl Spalten von A

In diesem Fall ~~hat~~ ^{ist} das Resultat eine $m \times p$ -Matrix $C = [c_{jk}]$. Für die Elemente c_{jk} der Matrix C gilt:

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jle} b_{ek} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \dots + a_{jn} b_{nk}$$

wobei $j = 1, 2, \dots, m$ und $k = 1, 2, \dots, p$.

Dies bedeutet:

Multipliere jedes Element der j-ten Zeile von A mit dem korespondierenden Element der k-ten Spalte von B und addiere die n so entstandene Produkte.

Wir sagen auch: „Dies ist die Multiplikation der Zeilen in die Spalten.“

Multiplikationsschema für A, B = C

A

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{bmatrix}$$

j-te Zeile
m-Zeilen

n -Spalten

B

$$\begin{bmatrix}
 b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\
 b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np}
 \end{bmatrix}$$

p -Spalten

C

$$\begin{bmatrix}
 c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\
 c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_{j1} & c_{j2} & \dots & c_{jp} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp}
 \end{bmatrix}$$

p -Spalten

(10)

Bsp. 1 Matrix \cdot Matrix = Matrix (1) dy

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 7 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 9 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 9 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 38 \\ 16 & 47 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}$$

Bsp. 2 Matrix \cdot Spaltenvektor = Spaltenvektor

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 10 \\ 3 + 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 43 \end{bmatrix}$$

Beachte

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ ist nicht definiert (warum?)} \quad \text{Skalar}$$

Bsp. 3 Zeilenvektor \cdot Spaltenvektor = Skalar ~~Matrix~~

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [19]$$

Bsp. 4 Spaltenvektor \cdot Zeilenvektor = Matrix (quadratisch)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 12 & 24 & 4 \end{bmatrix}$$

Bsp. 5 VORSICHT! $AB \neq BA$!

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Bsp. 6 Nochmals VORSICHT!

(12) Dy

$A \cdot B = \mathbf{0}$ impliziert nicht notwendigerweise

$A = \mathbf{0}$ oder $B = \mathbf{0}$ oder $B \cdot A = \mathbf{0}$!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wir sehen, dass die Matrix-Multiplikation von der Zahlenmultiplikation ziemlich differiert.

Wir sagen:

$AB \dots$ Matrix B ist vormultipliziert mit A ,
oder Matrix B ist von links multipliziert
mit A , oder Matrix A ist nachmult.
mit B , oder Matrix A ist von rechts
multipliziert mit B .

Weitere wichtige Eigenschaften:

$$(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = A \cdot (kB) \quad (\text{written } kAB \text{ or } AKB)$$

$$A(BC) = (AB)C$$

(ABC)

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$C(A+B) = CA + CB$$

$k \dots$ Skalar; A, B, C für oper. definierte Matrizen

Spezielle Matrizen

Eine quadratische Matrix deren Elemente oberhalb der Hauptdiagonale sämtlich Null sind heißt "untere Dreieckmatrix". Wenn die Elemente unterhalb der Hauptdiag. sämtlich Null sind, dann heißt sie "obere Dreieckmatrix".

Bsp.:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonal-Matrix

Eine quadratische Matrix $A = [a_{jk}]$ deren Elemente unterhalb und oberhalb der Hauptdiag. sämtlich Null sind, d.h., $a_{jk} = 0$ für alle $j \neq k$ heißt Diagonalmatrix.

Bsp.:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad / \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix mit konst. Elementen $c = 2$
⇒ Skalarmatrix

Warum der Name Skalarmatrix?

(14) Sy

$$S = \begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c \end{bmatrix} \quad \text{Skalarmatrix}$$

$$AS = SA = cA$$

A ist eine $n \times n$ -Matrix, S ist eine $n \times n$ -Skalarmatrix, c ist Skalar (Konstante)

Und schliesslich:

Eine Skalarmatrix deren Elemente auf der Hauptdiagonale sämtlich 1 sind heißt Einheitsmatrix I.

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Bsp.: 3×3 I-Matrix

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transponierung eines Produkts

(15) dy

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (\text{beachte Reihenfolge!})$$

Bsp:

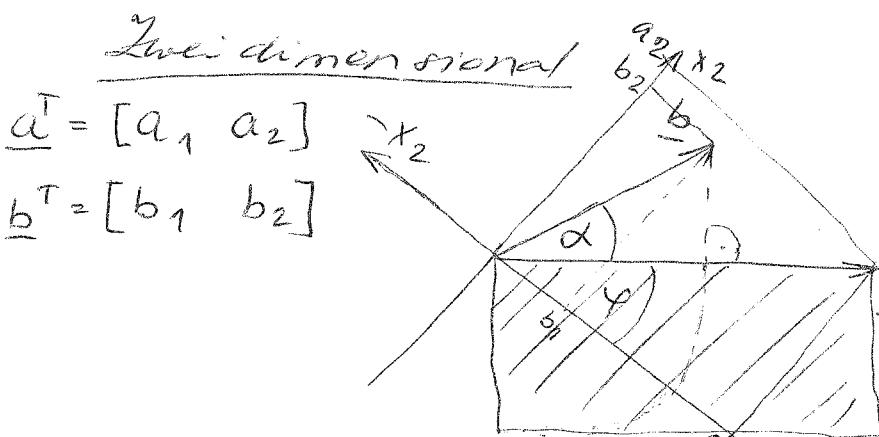
$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 30 & 100 \\ 4 & 16 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 4 & 15 \\ 100 & 16 & 55 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 4 & 15 \\ 100 & 16 & 55 \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt von Vektoren

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{l=1}^n a_l b_l = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

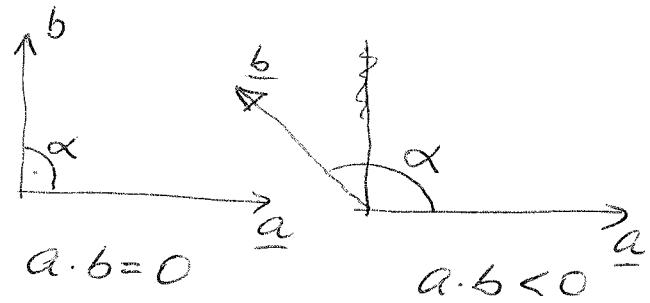
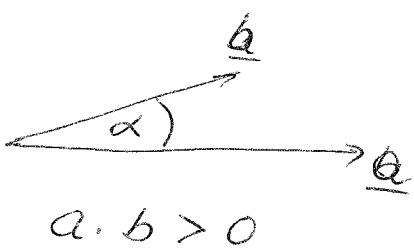


$$\begin{aligned}
 \underline{a} \cdot \underline{b} &= |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \alpha = \\
 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\underline{a}| \cos \varphi. \\
 &= |\underline{a}| |\underline{b}| [\cos \varphi (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) + \\
 &\quad \sin \varphi (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha)] = \\
 &= \underline{a}^T \underline{b}
 \end{aligned}$$

Orthogonalität

(16) Dy

Vektor \underline{a} ist zum Vektor \underline{b} orthogonal, wenn der Skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ ist!
Dann ist auch \underline{b} orthogonal zu \underline{a} und wir sprechen daher von zwei orthogonalen Vektoren \underline{a} und \underline{b} .



Zwei orthogonale Nichtnullvektoren sind aufeinander senkrecht. ($\cos \alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$)

(Rang einer Matrix (rank)) kommt später (17) 3y

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren.

Def. Eine Menge von m Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ (mit derselben Anzahl von Komponenten) bildet die folgende lineare Kombination:

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_m \underline{a}_m$$

c_1, c_2, \dots, c_m sind Skalare (Zahlen).

Daraus können wir die folgende Gleichung anschreiben:

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_m \underline{a}_m = \underline{0}$$

Klar, dies gilt, wenn wir alle c 's = Null wählen. Dann ist $\underline{0} = \underline{0}$. Ist dies die einzige Möglichkeit die obere Gleichung zu erfüllen, dann sind die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ linear unabhängig.

Wenn wir aber einen m -Tupel der Skalare c finden in welchem nicht alle c 's gleich Null sind und die obere Gleichung trotzdem erfüllt ist, dann sind die Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ linear abhängig. Wir können dann mindestens einen der m -Vektoren als lineare Kombination der Anderen ausdrücken.

Bsp. 1

(18) Dy

$$\underline{a}_1 = [3 \ 0 \ 2 \ 2]$$

$$\underline{a}_2 = [-6 \ 42 \ 24 \ 84]$$

$$\underline{a}_3 = [21 \ -21 \ 0 \ -15]$$

Sind linear abhängig weil

$$6\underline{a}_1 - \frac{1}{2}\underline{a}_2 - \underline{a}_3 = 0$$

Bsp. 2

Zwei Vektoren in der Ebene (2D) sind linear abhängig, wenn sie parallel sind.
(Bem.: Bei einem Vektor kommt es auf eine Parallelverschiebung nicht an)

$$\Rightarrow \underline{a} = c \cdot \underline{b}$$

$$\xrightarrow{\underline{b}} \quad \underline{a} = c \cdot \underline{b}$$

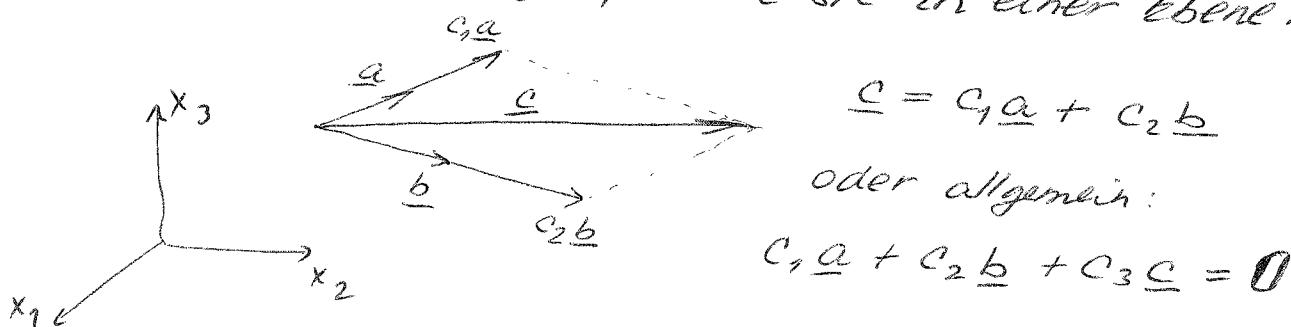
$$\text{damit } \underline{a} - c \underline{b} = \underline{0}$$

$$c > 1$$

Beachte: $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$!

Bsp. 3

Drei Vektoren im Anschlagsraum (3D) sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.



Bsp. 4

(19) Dy

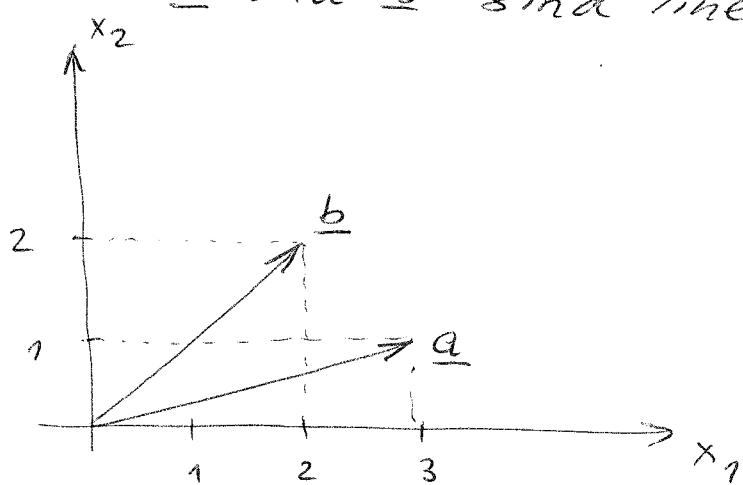
$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{Frage: linear unabhängig?}$$

Wir bilden die Vektorgleichung:

$$c_1 \underline{a} + c_2 \underline{b} = \underline{0}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{array}$$

Die Lösung lautet $c_1 = 0, c_2 = 0 \Rightarrow$
Vektoren \underline{a} und \underline{b} sind linear unabhängig.

Problem

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{Frage: Linear unabhängig?}$$

Rang einer Matrix

(20) 04

Die maximale Zahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix $A = [a_{jk}]$ heist Rang der Matrix A. ($m \times n$)

Bsp.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

Wir habe schon in Bsp. 1 auf Seite 18 gezeigt, dass nur zwei Vektoren linear unabhängig sind $\Rightarrow \text{Rang } A = 2$.

Dasselbe wie oben lässt sich auch für die Spaltenvektoren. Weiterhin kann man zeigen, dass beide Höchstzahlen gleich sind. Somit ist

$$r = \text{Rang } A \leq m, n$$

Determinanten

Determinante ist einer quadratischen $n \times n$ -Matrix zugeordnete Zahl (bzw. Funktion).

Bezeichnung

$n = 2$

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Bsp.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = \underline{\underline{14}}$$

Ein lineares Gleichungssystem

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

s.zw.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

hat nach der Regel von Cramer die Lösung:

$$x_1 = D_1/D, \quad x_2 = D_2/D \quad (\text{mit } D \text{ wie oben})$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Dabei muss natürlich gelten $D \neq 0$

Determinant der Ordnung n

$$\underline{n=1} \Rightarrow D = a_{11}$$

$$\underline{n \geq 2} \Rightarrow$$

$$D = a_{j1} C_{j1} + a_{j2} C_{j2} + \dots + a_{jn} C_{jn} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

oder

$$D = a_{1k} C_{1k} + a_{2k} C_{2k} + \dots + a_{nk} C_{nk} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

wobei

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot M_{jk}$$

C_{jk} ist die Adjunkte (algebr. Komplement) (cofactor)
wobei

M_{jk} die Determinante der Ordnung $n-1$, der Submatrix von A .

Die Submatrix von A erhalten wir, indem wir in A die j -te Zeile und k -te Spalte streichen.

Wichtige Eigenschaften:

1. $\det A = \det A^T$
2. Sind zwei Zeilen (oder zwei Spalten) linear abhängig, so ist die Determinante = 0
3. Vertauscht man zwei Zeilen (oder zwei Spalten), so wird die Determinante mit -1 multipliziert
4. $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$

Die Inverse einer Matrix

ist nur für quadratische Matrizen definiert?

Die Inverse einer regulären $n \times n$ -Matrix
 $A = [a_{jk}]$ ist gegeben durch:

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A_{jk}]^T = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

○ wobei A_{jk} die Adjunkte zu a_{jk} in $\det A$ ist.

Beachte: In \bar{A}^{-1} "sitzt" die Adjunkte A_{jk} an derjenigen korespondierenden Stelle, welche dem Element a_{kj} (nicht a_{jk} !!) "gehört".

Wichtige Eigenschaften

○ $A \cdot \bar{A}^{-1} = \bar{A}^{-1} A = I$ (I $n \times n$ -Einheitsmatrix)

A ist regulär wenn sie eine Inverse besitzt, sonst singulär. Dies ist nur dann der Fall, wenn $\text{Rang } A = n$ ist.

Bei einem linearen Gleichungssystem

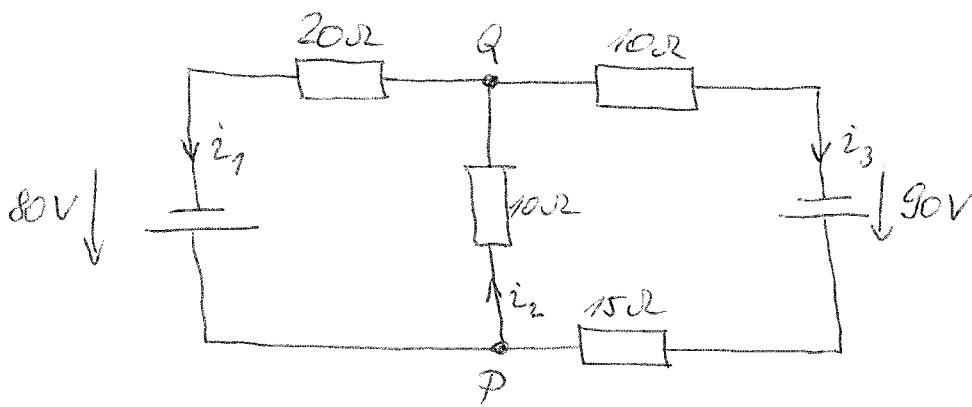
$$A \underline{x} = \underline{b} \quad (\underline{A} \text{ regulär})$$

$$\bar{A}^{-1} A \underline{x} = \bar{A}^{-1} \underline{b} \quad (\text{von links mit } \bar{A}^{-1} \text{ multipliziert})$$

$$\underline{x} = \bar{A}^{-1} \underline{b} \quad (\text{eindeutige Lösung})$$

Bsp.

(24) Dy



Knoten P: $i_1 - i_2 + i_3 = 0$

Knoten Q: $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$

rechte Masze: $10i_2 + 25i_3 = 90$

linker Maß: $20i_1 + 10i_2 = 80$

Das System lässt sich schreiben:

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 25 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Anz. Gl. > Anz. Unbekannten

Das System ist überbestimmt.
Die ersten zwei Zeilenvektoren
sind linear abhängig (Rang. -1)

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 25 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 90 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$D = \det B = -950$$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = 1900$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1900}{-950} = 2 \text{ A}$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} = -3800$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-3800}{-950} = 4 \text{ A}$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} = 10$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-1000}{-950} = 2 \text{ A}$$

Dieses Gleichungssystem hat nach (Cramer's-Theorem) nur dann eine nichttriviale Lösung $\underline{x} \neq \underline{0}$ (d.h. ein Eigenvektor von A , welchen wir suchen) wenn die Koeffizientendeterminante $D(\lambda) = 0$ ist.

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

Wir nennen $D(\lambda)$ die charakteristische Determinante und $D(\lambda) = 0$ charakteristische Gleichung. Das Polynom $\lambda^2 + 7\lambda + 6$ heißt das charakteristische Polynom von A .

Die Lösung lautet: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -6$

Dies sind die Eigenwerte von A .

Wir setzen die gefundenen Eigenwerte in das obige Gleichungssystem ein: ① $\lambda = \lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &\text{ beliebig} \\ x_2 &= 2x_1 \end{aligned} \right\}$$

Wenn wir z.B. $x_1 = 1$ wählen $\Rightarrow x_2 = 2$ und der Eigenvektor

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Wir können dies einfach überprüfen:

$$A\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

(25) dy

Unter allen Problemen die in Verbindung mit Matrizen auftreten sind die Eigenwertprobleme die wichtigsten.

Konzept des Eigenwertproblems

$A = [a_{jk}]$ ist eine gegebene $n \times n$ -Matrix.

Behachten wir nur einen Vektor \underline{x} und eine Zahl λ , so dass gilt:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

Es ist klar, dass diese Gleichung eine primitive Lösung $\underline{x} = \underline{0}$ hat, doch ist diese def. wenig interessant.

Derjenige Wert λ für welchen die obige Gleichung eine Lösung $\underline{x} \neq \underline{0}$ hat heißt der Eigenwert der Matrix A . Die entsprechende Lösung $\underline{x} \neq \underline{0}$ heißt der Eigenvektor der Matrix A .

Bsp. Wie findet man die Eigenwerte und Eigenvektoren?

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A\underline{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$$

$$2x_1 - 2x_2 = \lambda x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 = 0 \end{array} \right\} \text{In Matrixschreibweise}$$

$$\left. \begin{array}{l} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 = 0 \end{array} \right\} (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem

(27) Dy

Eigenvektor zu λ_2 : $\lambda = \lambda_2 = -6$ Eingesetzt:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2}, \text{ wenn wir } x_1 = 2 \text{ wählen} \Rightarrow x_2 = -1$$

und daraus

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Check this!

Allgemein gilt:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n$$

=>

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$

In Matrixnotation

$$(A - \lambda I)\underline{x} = 0 \quad (\text{nach Cramers Theorem})$$

$$J(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\text{Lösung}}$$

Def.

(28) Dy

Die Eigenwerte einer quadratischen Matrix A sind die Wurzeln der entsprechenden charakteristischen Gleichung.

Mehrfache Eigenwerte

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{char. Gl. } -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$$

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \lambda = 5$$

$$(1) -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$(2) +3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0$$

$$(3) \boxed{-7x_1} - 2x_2 - 5x_3 = 0 \quad \text{pivot-Gleichung}$$

pivot

Add pivot Gl. 2x zu Gl. (2)

$$(1) \quad -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$(2) \quad 0 - 8x_2 - 16x_3 = 0$$

$$(3) \quad -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$$

Subtrahiere 2x prot. Gl. von Gl. (1)

$$0 + 16x_2 + 32x_3 = 0$$

$$\cancel{0} \quad \cancel{-8x_{1,2}} - 16x_3 = 0 \quad \text{Prot. Gl.}$$

$$-x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$$

~~Sub.~~ addiere 2x prot. Gl. zu Gl. (1)

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$-8x_2 - 16x_3 = 0 \quad \text{wähle } x_3 = -1$$

$$-x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{16}{8} = 2$$

~~Gl. 1~~ ~~Gl. 2~~ ~~Gl. 3~~

fehlt nicht weil
Gl. (3) schon prot. Gl.
war

$$-8x_2 - 16x_3 = 0$$

$$\Rightarrow -x_1 = 2 \cdot 2 + (-5) = -1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Einsetzen

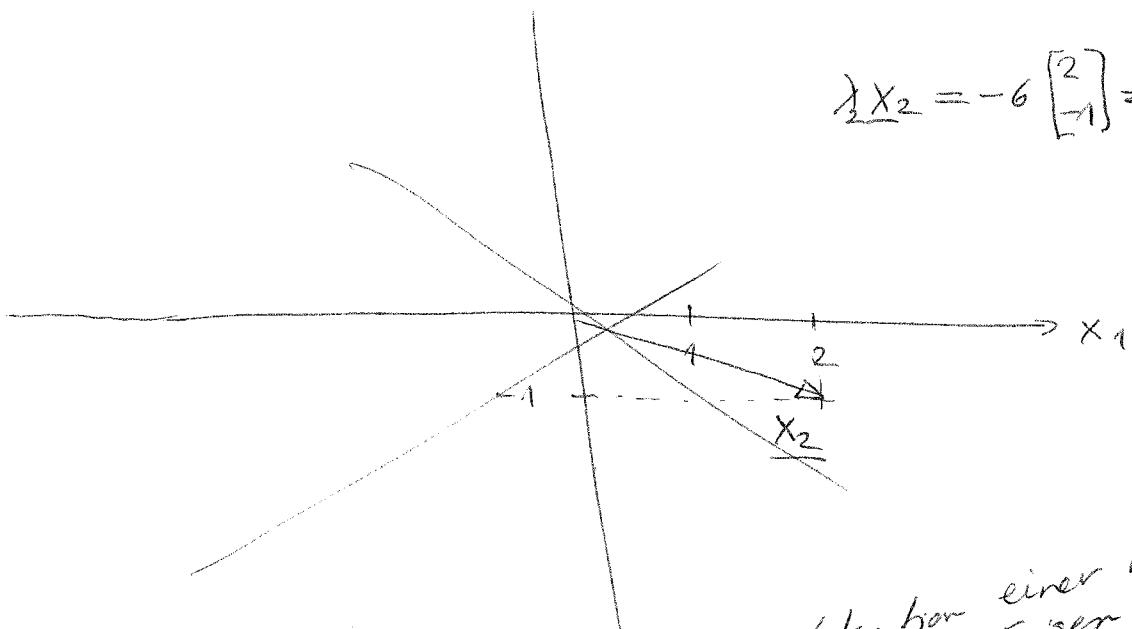
wähle x3 = 0

$$-8x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ da } x_2 \text{ frei}$$

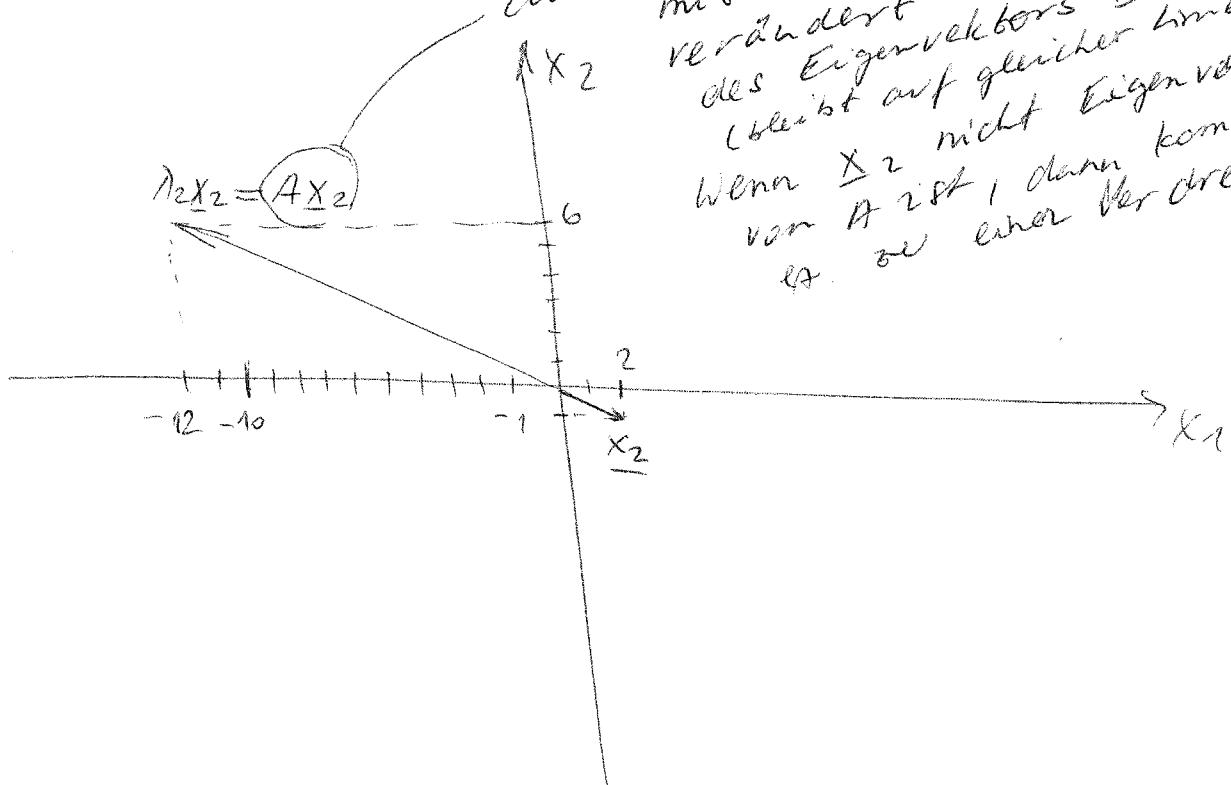
y

29a

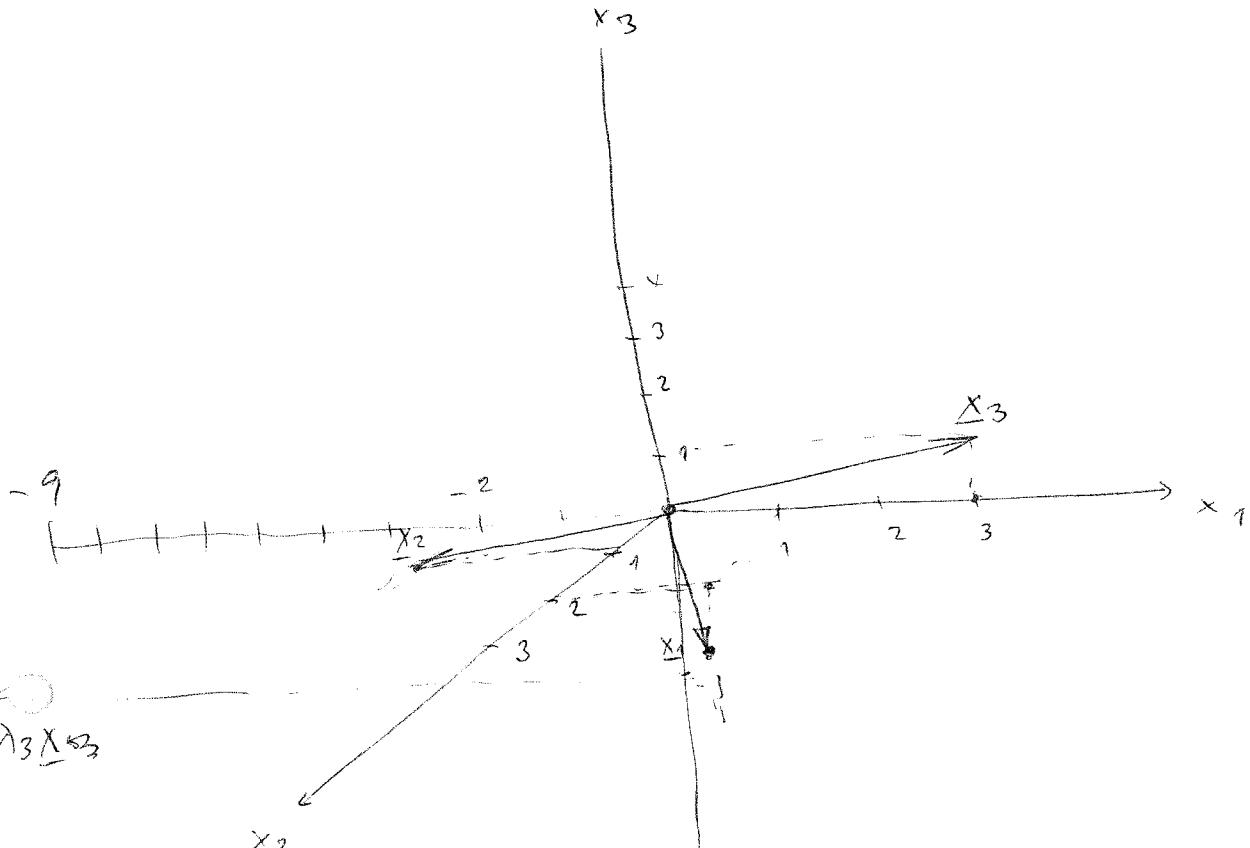
$$\lambda_2 \underline{x}_2 = -6 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix}$$



die Multiplikation einer Matrix mit ihrem Eigenvektor verändert die Richtung des Eigenvektors \underline{x}_2 nicht (bleibt auf gleicher Linie). Wenn \underline{x}_2 nicht Eigenvektor von A ist, dann kommt es zu einer Veränderung.



(29b)



$$A \cdot \underline{X}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \lambda_3 \cdot \underline{X}_3 = (-3) \cdot \underline{X}_3$$

(3x3) (3x1)

Winkel γ zwischen zwei Vektoren \underline{X}_3 und $\lambda \underline{X}_3$

$$\cos \gamma = \frac{\underline{X}_3 \cdot \lambda \underline{X}_3}{\|\underline{X}_3\| \|\lambda \underline{X}_3\|} = \frac{-27 + 0 - 3}{\sqrt{9+1} \sqrt{81+9}} = \frac{-30}{30} = -1$$

$\Rightarrow \underline{y} = -\pi$ die beiden Vektoren liegen auf derselben Gerade. Die Transformation eines Eigenvektors \underline{X}_3 mit A , $A \cdot \underline{X}_3$ führt nicht zur Verdrfung des Vektors, sondern nur zur Veränderung der Länge.

(30) dy

Symmetrische Matrix $A = [a_{jk}]$

$$A = A^T \Rightarrow a_{kj} = a_{jk}$$

Bsp.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Schief-symmetrische-Matrix

$$A^T = -A \Rightarrow a_{kj} = -a_{jk}$$

Bsp.

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$$

Orthogonale Matrix

$$A^T = \bar{A}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Jede quadratische Matrix A kann geschrieben werden als Summe einer symmetrischen Matrix R und einer schief-symmetrischen Matrix S , wobei

$$R = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad \text{und} \quad S = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Bsp.

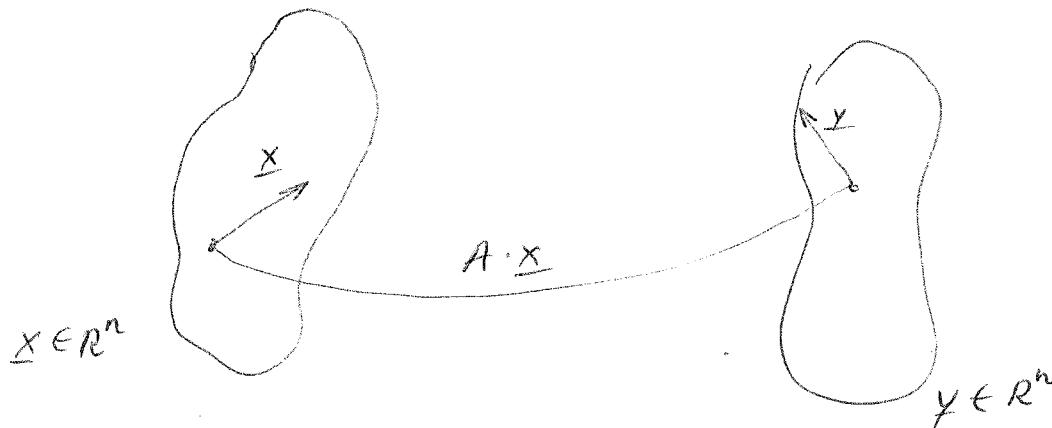
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} = R + S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind real. (31)

Eigenwerte einer schief-symmetrischen Matrix sind rein imaginär, oder Null.

Orthogonale Transformation

$$Y = A \underline{X} \quad \text{mit } A \text{ Orthogonal } (A^T = \bar{A})$$



Bsp. $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}, \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 = \cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

\Rightarrow die beiden Vektoren der Matrix A sind orthogonal

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ ist eine Rotation um } \alpha$$

Theorem Die Determinante einer Orthogonalmatrix hat den Wert 1 oder -1.

Bsp. $\det(A) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

(32) Sy

Theorem Die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix A sind real oder konjugiert-komplex mit der Norm = 1

Norm eines Vektors (eig. seine Länge)

$$\|X\|_2 = \sqrt{\underline{a}_j \cdot \underline{a}} = \sqrt{\underline{a}^T \underline{a}} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n} =$$

Skalar
Multipl.

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Bsp. Orthogonale Matrix von der Seite (30).

Charakteristische Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

Einer der Eigenwerte muss real sein! Warum?
(es gibt nur drei \Rightarrow 2 konjugiert-komplex (\leftrightarrow) ein real).

$$\lambda_1 = -1; \text{ Division durch } (\lambda + 1) \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 5\lambda/3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = (5 \pm j\sqrt{11})/16$$

Ähnlichkeitstransformation

Eine $n \times n$ -Matrix \hat{A} heist ähnlich zu einer $n \times n$ -Matrix A wenn gilt

$$\hat{A} = T^{-1} A T$$

mit beliebiger, nicht singulärer Matrix $n \times n T$.

Wichtig \hat{A} und A haben dieselben Eigenwerte!

Wenn X ist Eigenvektor von A , dann ist $\hat{y} = T X$ ein korrespondierender Eigenvektor von \hat{A} .

Transformation auf Diagonalfom

(33) 3

Wenn eine $n \times n$ -Matrix A verschiedene Eigenwerte besitzt, dann hat sie eine Basis von Eigenvektoren eines \mathbb{R}^n -Raumes. Dann kann auch die folgende Transformation auf Diagonalfom durchgeführt werden:

$$\mathcal{D} = X^{-1} A X$$

\mathcal{D} ist eine Diagonalmatrix, mit den n Eigenwerten auf der Diagonale.

X ist eine Matrix mit Eigenvektoren von A als Spalten.

Bsp.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ hat Eigenvektoren } \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(X) = -4 + 1 = -3$$

$$\text{(siehe S. 23)} \quad \text{Adj}(X) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \cancel{\text{P}} \quad , \quad X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \cdot (\text{Adj}(X))^T$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = X^{-1} A X &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zeige, dass die Änderung der Reihenfolge der Spalten in X , zu einer Änderung der Reihenfolge der Eigenwerte auf der Diagonale von \mathcal{D} führt.

Quadratische Form

(34) by

Die skalare Funktion

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T S \underline{x}, \quad S = (s_{jk}) \text{ symmetrisch}$$

nennt man eine quadratische Form der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n

Schreibe es für $n=2$ auf!

Matrix - Analysis

Wenn die Elemente einer Matrix von einer Variablen z.B. Zeit t abhängen, so kann man diese Matrix differenzieren, integrieren und Laplace - transformieren.

Es gilt: Alle genannten Operationen sind Elementenweise vorzunehmen!

Bsp.

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 5t^2 + t \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -e^t \\ 10t + 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}\{\underline{x}(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s+1} \\ \frac{10}{s^3} + \frac{1}{s^2} \\ -\frac{4}{s} \end{bmatrix}$$

$$(AB)^* = A^*B + AB^*$$

11 Systembeschreibung und -analyse mit Zustandsvariablen

11.1 Einführung der Zustandsvariablen

Wenn man sich bemüht, einen Regelkreis oder eine Steuerung auf Grund der physikalischen Gesetzmäßigkeiten möglichst exakt zu beschreiben, so erhält man in der Mehrzahl der Fälle ein Gemisch aus gewöhnlichen Gleichungen und gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Differentialgleichungen können verschiedene Ordnung aufweisen, sie können linear oder nichtlinear, zeitinvariant oder zeitvariant, explizit oder implizit gegeben sein. Die Gesamtheit dieser Gleichungen und Differentialgleichungen bildet die mathematische Beschreibung oder das mathematische Modell des technischen Systems. In vielen Fällen sind die Gleichungen und Differentialgleichungen linear und zeitinvariant oder können doch mit genügender Näherung als linear und zeitinvariant angesehen werden. Dann ist es üblich, die Laplace-Transformation anzuwenden und so von dem Gleichungs-Differentialgleichungssystem im Zeitbereich zu einem gewöhnlichen Gleichungssystem im komplexen Bereich überzugehen. Auch wir sind bei den gesamten bisherigen Untersuchungen in dieser Weise vorgegangen. Der praktische Nutzen für Beschreibung, Untersuchung und Entwurf dynamischer Systeme dürfte deutlich geworden sein. Er beruht darauf, daß im komplexen Bereich durch die Anwendung der Funktionentheorie oft tiefere Einblicke in das dynamische Verhalten möglich werden als im Zeitbereich. Man denke etwa an den Zusammenhang zwischen der Stabilität und den Singularitäten der Übertragungsfunktion.

Leider hat dieses Vorgehen dort eine Grenze, wo Nichtlinearität und Zeitvarianz der Systeme nicht mehr vernachlässigt werden können. Dann ist man gezwungen, bei der Beschreibung durch Differentialgleichungen zu bleiben. Aber auch bei linearen zeitinvarianten Systemen kann die Beschreibung im Zeitbereich sehr nützlich sein. Dafür gibt es verschiedene Gründe:

- Reale Systeme sind häufig von sehr hoher Ordnung und verwickelter Struktur. Dann liefert die Beschreibung durch Vektordifferentialgleichungen einen besseren Überblick als die Benutzung der Übertragungsfunktionen. Insbesondere stellt sie eine günstigere Basis für die Berechnung des Systems dar.
- Die Zeitvorgänge eines realen Systems werden in jedem Fall auf dem Rechner bestimmt. Die Beschreibung durch Vektordifferentialgleichungen gestattet eine für viele Zwecke sehr rationelle numerische Berechnung auf dem Digitalrechner.
- Bei der Durchführung von Steuerungsoperationen kommt es häufig vor, daß man die Reaktion des Systems auf Anfangsbedingungen ermitteln und beeinflussen muß. Das ist bei der Beschreibung durch Vektordifferentialgleichungen erheblich einfacher und übersichtlicher als im komplexen Bereich.
- Es gibt allgemeine Untersuchungen über das Systemverhalten, beispielsweise über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen, die sich nur im Zeitbereich durchführen lassen.

Aus solchen Gründen kann es angebracht sein, bei der Behandlung eines Systems im Zeitbereich zu bleiben. Dann ist es zweckmäßig, die auftretenden Differentialgleichungen durch Einführen von *Zwischengrößen* in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwandeln. Es sei etwa ein Übertragungsglied durch die Differentialgleichung

$$a_n^{(n)} \ddot{y} + a_{n-1}^{(n-1)} \dot{y} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u, \quad a_n \neq 0, \quad (11.1)$$

zwischen seiner Eingangsgröße u und seiner Ausgangsgröße y gegeben. Dann kann man als Zwischengrößen x_1, x_2, \dots, x_n die Ausgangsgröße y und ihre Ableitungen nehmen:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = {}^{(n-2)}y, \\ x_n = {}^{(n-1)}y.$$

Aus der Definition folgen die einfachen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Setzt man die Definitionsgleichungen der Zwischengrößen in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, so erhält man

$$a_n \dot{x}_n + a_{n-1} x_n + \dots + a_2 x_3 + a_1 x_2 + a_0 x_1 = b_0 u \quad \text{oder}$$

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{b_0}{a_n} u. \quad (11.3)$$

Die Gleichungen (11.2) und (11.3) zusammen bilden ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung, das der ursprünglichen Differentialgleichung n -ter Ordnung äquivalent ist.

Die Zwischengrößen x_1, \dots, x_n vermitteln den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y . Im vorliegenden Fall ist die Ausgangsgröße wegen

$$y = x_1 \quad (11.4)$$

mit einer Zwischengröße identisch. Das muß nicht so sein. Im allgemeinen wird y eine kompliziertere Funktion der Zwischengrößen (und eventuell der Eingangsgröße u) darstellen.

Betrachten wir zunächst zwei einfache physikalische Beispiele. Für die Schaltung in Bild 11/1 gelten die Gleichungen

$$u = u_R + u_C + u_L,$$

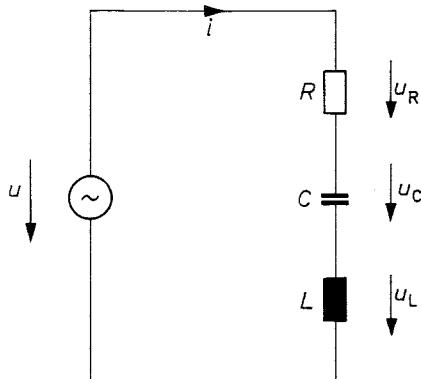


Bild 11/1. Elektrischer Schwingkreis.

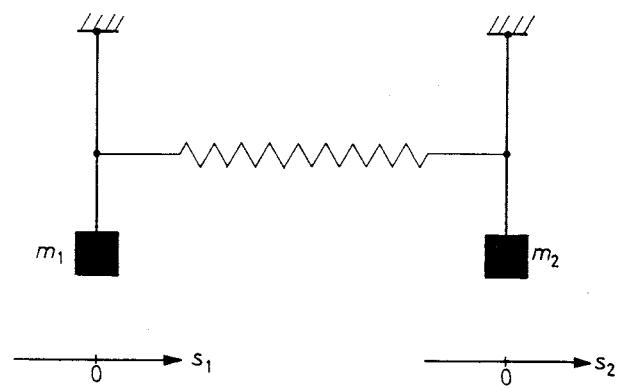


Bild 11/2. Gekoppelte Schwinger

$$u_R = R i, \quad (11.5)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau, \quad (11.6)$$

$$u_L = L \dot{i}, \quad (11.7)$$

worin u eine von außen angelegte Spannung ist. Faßt man diese Gleichungen zusammen, so erhält man zunächst

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau + L\dot{i} = u \quad (11.8)$$

und daraus durch Differenzieren und Umordnen

$$LC\ddot{i} + RC\dot{i} + i = C\dot{u}. \quad (11.9)$$

Statt die Schaltung durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu beschreiben, kann man aber auch zu einem System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung übergehen. Das ist z.B. dadurch möglich, daß man u_C als Zwischengröße einführt. Dann hat man zunächst nach (11.6)

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau \quad \text{oder}$$

$$\dot{u}_C = \frac{1}{C} i. \quad (11.10)$$

Weiter wird aus (11.8)

$$Ri + u_C + Li = u \quad \text{oder}$$

$$i = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u. \quad (11.11)$$

Die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung (11.10) und (11.11) sind der Differentialgleichung zweiter Ordnung (11.9) äquivalent. Ihre Zwischengrößen sind der Strom i und die Kondensatorspannung u_C . Interessiert man sich für den Strom i , so ist dieser zugleich die Ausgangsgröße des Systems. Ist aber beispielsweise die Spannung am ohmschen Widerstand von Interesse, so ist diese die Ausgangsgröße des Systems. Sie hängt wegen (11.5) durch eine gewöhnliche Gleichung mit den Zwischengrößen zusammen:

$$u_R = R i. \quad (11.12)$$

Als mechanisches Beispiel mögen die gekoppelten Schwinger in Bild 11/2 dienen. Auf m_1 wirke außer der Federkraft $-c(s_1 - s_2)$ noch die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung $-\varrho_1 \dot{s}_1$ und die äußere Kraft F_{Z1} , und entsprechendes gelte für m_2 . Dann hat man zunächst die beiden Differentialgleichungen

$$m_1 \ddot{s}_1 = -c(s_1 - s_2) - \varrho_1 \dot{s}_1 + F_{Z1},$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -c(s_2 - s_1) - \varrho_2 \dot{s}_2 + F_{Z2}.$$

Aus diesem System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhält man ein System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung, indem man die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 einführt:

$$\dot{s}_1 = v_1, \quad (11.13)$$

$$\dot{s}_2 = v_2, \quad (11.14)$$

$$\dot{v}_1 = -\frac{c}{m_1}(s_1 - s_2) - \frac{\varrho_1}{m_1}v_1 + \frac{1}{m_1}F_{Z1}, \quad (11.15)$$

$$\dot{v}_2 = -\frac{c}{m_2}(s_2 - s_1) - \frac{\varrho_2}{m_2}v_2 + \frac{1}{m_2}F_{Z2}. \quad (11.16)$$

Ist etwa die kinetische Energie des Systems die interessierende Ausgangsgröße, so hat man zusätzlich die gewöhnliche Gleichung

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \quad (11.17)$$

Die Gleichungen (11.13) bis (11.17) beschreiben das schwingende mechanische System als Übertragungsglied. Seine Eingangssgrößen sind die äußeren Kräfte F_{Z1} und F_{Z2} . Seine Ausgangsgröße ist die kinetische Energie E_k . Der Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen und der Ausgangsgröße wird durch die Zwischengrößen s_1 , s_2 , v_1 und v_2 hergestellt. Das geschieht über einen Satz von expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung und einer gewöhnlichen Gleichung. In den Differentialgleichungen treten nur die Ableitungen der Zwischengrößen auf. Die Eingangsgrößen kommen nur selbst, aber nicht in ihren Ableitungen vor. Die Ausgangsgröße tritt

in den Differentialgleichungen überhaupt nicht auf. Sie hängt über eine gewöhnliche Gleichung von den Zwischengrößen ab.

Aus diesem Beispiel wird ersichtlich, warum man die Zwischengrößen als *Zustandsvariable* des Systems bezeichnet. Lage und Geschwindigkeit der Massen charakterisieren in jedem Zeitmoment den dynamischen Zustand des mechanischen Systems. Sind die Werte der x_v für irgendeinen Zeitpunkt t_0 gegeben und kennt man die Eingangsgrößen F_{Z1} und F_{Z2} für $t \geq t_0$, so sind die x_v für alle Zeitpunkte $t \geq t_0$ eindeutig bestimmt.

Die Verallgemeinerung des hier an Beispielen eingeführten Begriffs der Zustandsvariablen liegt auf der Hand. Wir gehen aus von einem System mit den p Eingangsgrößen u_1, \dots, u_p und den q Ausgangsgrößen y_1, \dots, y_q (Bild 11/3). Die Eingangsgrößen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie das System beeinflussen, aber selbst nicht durch das System beeinflußt werden. Durch sie wirkt die Umwelt auf das System ein. Es kann sich um eine gezielte Einwirkung handeln, wie bei Steuergrößen, oder auch um eine ungewollte Beeinflussung, so beim Auftreten von Störgrößen. Die Ausgangsgrößen werden durch das Ziel der Untersuchung aus der Gesamtheit der zeitveränderlichen Größen herausgehoben. So interessiert man sich beispielsweise bei vielen Anwendungen des Gleichstrommotors für seine Drehzahl, bei anderen Aufgaben für das von ihm abgegebene Drehmoment. Im ersten Fall ist die Drehzahl, im letzteren das Drehmoment die Ausgangsgröße des Systems *Gleichstrommotor*.

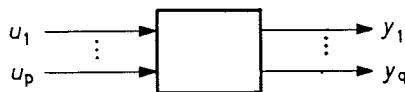


Bild 11/3. Blocksymbol eines dynamischen Systems

Der Zusammenhang zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen möge durch einen Satz von gewöhnlichen Gleichungen und gewöhnlichen Differentialgleichungen hergestellt werden. Anders ausgedrückt: Ein- und Ausgangsgrößen seien durch ein Netz von rationalen Übertragungsgliedern, Summierungsstellen und Kennliniengliedern (mit eventuell mehreren Eingangsgrößen) miteinander verknüpft. Durch Einführung geeigneter Zwischengrößen x_1, x_2, \dots, x_n sei es möglich, diese Verknüpfung in der folgenden Weise auszudrücken:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.18)$$

$$y_k = g_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t), \quad k = 1, \dots, q. \quad (11.19)$$

Die Differentialgleichungen sind von der ersten Ordnung und enthalten nur die Ableitungen der Zwischengrößen. Sie hängen lediglich von den Eingangsgrößen selbst, aber nicht von deren Ableitungen ab. Die Ausgangsgrößen treten in den Differentialgleichungen überhaupt nicht auf, sind vielmehr als explizite Funktionen der Eingangs- und Zwischengrößen gegeben, zu denen noch die Zeit als weitere Variable treten darf.

Will man das Zeitverhalten des Systems von einem Zeitpunkt t_0 an verfolgen, so muß zweierlei gegeben sein:

Einmal muß man die Eingangsgrößen u_v als Funktionen der Zeit für $t > t_0$ kennen, zum anderen müssen die Anfangswerte $x_i(t_0) = x_{i0}$ gegeben sein. Dann sind die Funktionen $x_i(t)$ für alle $t > t_0$ eindeutig bestimmt, sofern die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems (11.18) sehr allgemeine Voraussetzungen erfüllen, die man bei unseren Anwendungen als gegeben ansehen darf. Mit den $x_i(t)$ sind auch die $y_k(t)$ eindeutig bestimmt. Die Vergangenheit des Systems für $t < t_0$ spielt für sein Verhalten von $t = t_0$ an keine Rolle.

Da die $x_i(t)$ den dynamischen Zustand des Systems in jedem Zeitmoment t beschreiben, bezeichnet man sie als *Zustandsvariable* des Systems. Neben den Ein- und Ausgangsgrößen stellen sie den dritten Typ von zeitveränderlichen Systemgrößen dar.¹⁾

Ein Anfangswertproblem wie bei den rationalen Übertragungsgliedern, bei denen man zwischen den Anfangswerten bei -0 und bei $+0$ zu unterscheiden hat, tritt hier nicht auf. Das liegt daran, daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen (11.18) nicht von den Ableitungen der u_v , sondern nur von den u_v selbst abhängen. Die $x_v(t)$ hängen stetig von t ab, auch in $t=0$.

Es liegt nahe, zur Vereinfachung der Schreibweise Vektoren einzuführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{u}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, & \mathbf{g} &= \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hier wie auch im folgenden sind Vektoren und Matrizen durch halbfetten Druck gekennzeichnet. Berücksichtigt man, daß ein Vektor, dessen Elemente Zeitfunktionen sind, gliedweise differenziert wird, so gilt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}.$$

Damit kann man das Differentialgleichungssystem (11.18) zu einer *Vektordifferentialgleichung* zusammenfassen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (11.20)$$

Entsprechend wird aus dem Gleichungssystem (11.19) eine *Vektorgleichung*:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (11.21)$$

¹⁾ Für eine allgemeine und tiefere Charakterisierung der Begriffe *Zustand* und *Zustandsvariable* wird auf [11.1], S. 325–329, und [11.2], S. 4–5, verwiesen.

Die Vektordifferentialgleichung (11.20) sei als *Zustandsdifferentialgleichung* bezeichnet, die Vektorgleichung (11.21) als *Ausgangsgleichung*, beide Beziehungen zusammen als *Zustandsgleichungen*.

Die Komponenten des Zustandsvektors x kann man als Koordinaten eines Punktes im n -dimensionalen (euklidischen) Raum auffassen. Diesen bezeichnet man als *Zustandsraum* (oder Phasenraum) des Systems. Für irgend einen Zeitpunkt t stellt $x(t)$ einen bestimmten Punkt dieses Raumes dar. Er ist das geometrische Bild für den dynamischen Zustand des Systems. Man spricht daher auch vom *Zustandspunkt des Systems*. Mit fortschreitender Zeit t ändert der Zustandspunkt seine Lage im Raum. Er beschreibt dort eine Kurve, die *Zustandskurve* oder *Trajektorie* des Systems. Sie geht für $t=t_0$ vom Punkt $x(t_0)=x_0$ aus. Dabei ist der Eingangsvektor $u(t)$ als eine fest gegebene Zeitfunktion angenommen. Von Ausnahmepunkten abgesehen, geht durch jeden Punkt des Zustandsraumes oder eines Teilbereiches genau eine Trajektorie.

Die Trajektorie ist in Parameterdarstellung mit der Zeit t als Parameter gegeben. Man kann aber auch t als zusätzliche Koordinate auffassen und den Vektor $x(t)$ in dem $(n+1)$ -dimensionalen (t, x_1, \dots, x_n) -Raum betrachten. Diesen bezeichnet man als *Bewegungsraum* des Systems. Projiziert man die Bahnkurven im Bewegungsraum in Richtung der t -Achse in den (x_1, \dots, x_n) -Raum, also den Zustandsraum, so erhält man die Trajektorien. Ein einfaches Beispiel mag die Verhältnisse veranschaulichen. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$T\dot{x} + x = Ku \quad \text{für } t > 0,$$

wobei $u = \sigma(t)$ sein möge. Dann hat man die Differentialgleichung

$$T\dot{x} + x = K.$$

Da sie erster Ordnung ist, gibt es nur die eine Zustandsvariable x . Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = K(1 - e^{-t/T}) + x(0)e^{-t/T} = K + [x(0) - K]e^{-t/T}.$$

Für $t \rightarrow +\infty$ streben alle Lösungen $\rightarrow K$, ganz gleich, bei welchem Anfangswert $x(0)$ sie beginnen. Man erhält so die in Bild 11/4 dargestellten Kurven in der (t, x) -Ebene,

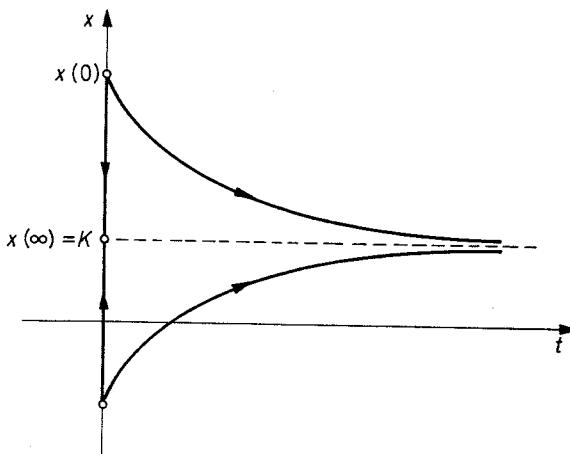


Bild 11/4. Bewegungsraum und Zustandsraum für ein System erster Ordnung

die in diesem Fall den Bewegungsraum darstellt. Der Zustandsraum besteht hier lediglich aus der x -Achse. Projiziert man die Bahnkurven im Bewegungsraum auf die x -Achse, so erhält man als Trajektorien des Systems Geradenstücke, die mit wachsendem t sämtlich gegen den Punkt $x=K$ des Zustandsraums streben.

11.2 Aufstellen der Zustandsgleichungen

Die vorhergehenden Beispiele zeigen, wie man, von den physikalischen Gesetzen des Systems ausgehend, seine Zustandsgleichungen aufstellen kann. Ein umfangreicheres Anwendungsbeispiel folgt in Kapitel 13. Im allgemeinen erhält man zunächst einen Satz von gewöhnlichen Gleichungen und Differentialgleichungen verschiedener Ordnung, aus denen man durch geeignete Zusammenfassung und Einführung von Zwischengrößen die Zustandsgleichungen vom Typ (11.20) und (11.21) erzeugt. In vielen Fällen liegt aber bereits eine mathematische Beschreibung des dynamischen Systems vor. Dann braucht man diese nur umzuformen, um zu den Zustandsgleichungen zu gelangen. Hier sollen zwei besonders häufige Fälle betrachtet werden:

1. Es liegt ein rationales Übertragungsglied vor, das durch seine Übertragungsfunktion gegeben ist.
2. Das dynamische System wird durch ein Strukturbild (oder Signalflußbild) beschrieben.

Wir wenden uns zunächst dem Fall 1 zu. Es ist dann in verschiedenartiger Weise möglich, Zustandsvariable einzuführen. Im folgenden wollen wir die für die regelungstechnischen Anwendungen wichtigsten Formen der Zustandsgleichungen herleiten, wobei es uns in erster Linie auf die Verwendbarkeit bei der Synthese ankommt.

11.2.1 Die Regelungsnormalform der Zustandsgleichungen

Für ein rationales Übertragungsglied gilt

$$Y(s) = G(s) U(s) \quad \text{mit} \quad (11.22)$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}. \quad (11.23)$$

Dabei sei $a_n \neq 0$ und mindestens ein $b_v \neq 0$. Zähler und Nenner seien wie stets ohne gemeinsame Wurzel. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$a_n \overset{(n)}{\dot{y}} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \dots + b_n \overset{(n)}{u}. \quad (11.24)$$

Falls $b_1 = \dots = b_n = 0$ ist, kann man einfach durch

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = \overset{(n-1)}{y}$$

Zustandsvariable einführen, wie das oben beschrieben wurde ((11.2), (11.3)). Ist aber einer dieser Koeffizienten $\neq 0$, so erhält man statt (11.3) die Differentialgleichung

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \sum_{v=0}^n \frac{b_v}{a_n} \overset{(v)}{u}.$$

In ihr tritt mindestens eine Ableitung von u auf. Das ist jedoch nicht zulässig, da in den Zustandsgleichungen nur die Eingangsgrößen selbst, nicht ihre Ableitungen auftreten dürfen.

Die letztere Forderung ist wesentlich. In vielen Anwendungsfällen sind die Eingangsgrößen unstetig, stellen z. B. Treppenfunktionen dar. Dann sind die Ableitungen erster oder gar höherer Ordnung im üblichen Sinn nicht vorhanden. Bei der Simulation im Rechner lassen sie sich bestenfalls näherungsweise erzeugen. Es ist daher besser, sie überhaupt zu vermeiden. Zum guten Teil beruht die Einfachheit der Systembeschreibung durch Zustandsvariable auf dieser Tatsache.

Um dieses Ziel im Falle der Differentialgleichung (11.24) bzw. der Übertragungsfunktion (11.23) zu erreichen, schreibt man die komplexe Übertragungsgleichung (11.22) in der Form

$$Y = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{N(s)} U \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} Y &= b_0 \frac{1}{N(s)} U + b_1 \frac{s}{N(s)} U + \cdots + b_{n-1} \frac{s^{n-1}}{N(s)} U + \\ &\quad + b_n \frac{s^n}{N(s)} U. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Nun definiert man die Zustandsvariablen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{N(s)} U, \quad X_2 = \frac{s}{N(s)} U, \quad X_3 = \frac{s^2}{N(s)} U, \dots \\ &\dots, \quad X_{n-1} = \frac{s^{n-2}}{N(s)} U, \quad X_n = \frac{s^{n-1}}{N(s)} U. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Aus der Definition folgen einfache Beziehungen zwischen den Zustandsvariablen:

$$sX_1 = X_2, \quad sX_2 = X_3, \dots, \quad sX_{n-1} = X_n.$$

Falls man hier wie auch im folgenden die Anfangswerte zu Null annimmt, folgt daraus im Zeitbereich

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n. \quad (11.27)$$

Für x_1 gilt daher

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{x}_1 = x_3, \dots, \quad {}^{(n-1)}x_1 = x_n. \quad (11.28)$$

Weiterhin folgt aus

$$X_1 = \frac{1}{N(s)} U = \frac{1}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} U$$

die Beziehung

$$a_n s^n X_1 + a_{n-1} s^{n-1} X_1 + \cdots + a_1 s X_1 + a_0 X_1 = U$$

oder

$$a_n {}^{(n)}x_1 + a_{n-1} {}^{(n-1)}x_1 + \cdots + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 = u.$$

Setzt man (11.28) ein, so wird daraus

$$a_n \dot{x}_n + a_{n-1} x_n + \cdots + a_1 x_2 + a_0 x_1 = u. \quad (11.29)$$

Mit (11.27) und (11.29) hat man die gewünschten Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Die Ausgangsgleichung erhält man aus (11.25), indem man die Definitionsgleichungen (11.26) einsetzt:

$$Y = b_0 X_1 + b_1 X_2 + \cdots + b_{n-1} X_n + b_n s X_n$$

oder

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_{n-1} x_n + b_n \dot{x}_n.$$

Ersetzt man hierin \dot{x}_n gemäß der letzten Differentialgleichung von (11.30), so wird endgültig

$$y = \left(b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n} \right) x_1 + \cdots + \left(b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n} \right) x_n + \frac{b_n}{a_n} u. \quad (11.31)$$

Die Zustandsgleichungen (11.30) und (11.31) sind der ursprünglichen Differentialgleichung äquivalent. Die für die Herleitung mittels der Übertragungsfunktion gemachte Annahme verschwindender Anfangswerte kann man nunmehr fallenlassen.

Besonders übersichtlich werden die Verhältnisse, wenn man zur Matrzenschreibweise übergeht. Dann wird aus dem Differentialgleichungssystem (11.30) die *eine Vektor-differentialgleichung*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ a_n \end{bmatrix} u. \quad (11.32)$$

Die hier auftretende (n, n) -Matrix wird auch die *Frobenius-Matrix* oder *Begleitmatrix* des Polynoms $N(s)$ genannt.

Auch die Ausgangsgleichung kann man in Vektorform schreiben:

$$\begin{aligned} y &= \left[b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n}, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n} \right] \times \\ &\quad \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \frac{b_n}{a_n} u. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Liegt die Zustandsbeschreibung eines Systems in Form von (11.32) und (11.33) vor, so wollen wir im Anschluß an J. Ackermann [11.3] von der *Regelungsnormalform der Zustandsgleichungen* sprechen. Wie sich in Kapitel 12 herausstellen wird, spielt nämlich diese Darstellung bei

der Regelungssynthese im Zustandsraum eine wichtige Rolle.

Bei der Behandlung des Beobachtungsproblems, d.h. der Aufgabe, aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems auf den Zustandsvektor zu schließen, wird noch eine andere Zustandsbeschreibung benötigt. Sie sei als *Beobachtungsnormalform*¹⁾ bezeichnet und soll nun hergeleitet werden.

11.2.2 Die Beobachtungsnormalform der Zustandsgleichungen

Wir gehen wieder von der komplexen Übertragungsgleichung (11.22) eines rationalen Übertragungsgliedes aus und nehmen zusätzlich an, daß in der Übertragungsfunktion $G(s)$ gemäß (11.23) $a_n = 1$ und $b_n = 0$ ist. Erstere Voraussetzung läßt sich stets erfüllen, indem man durch a_n kürzt. Letztere Voraussetzung wird bei einer realen Strecke in der Regel erfüllt sein, da bei ihr der Zählergrad der Übertragungsfunktion kleiner als der Nennergrad ist. Beide Annahmen sind unwesentlich, vereinfachen aber die Zustandsgleichungen ein wenig.

(11.22) lautet dann

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} U(s) \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} s^n Y + a_{n-1} s^{n-1} Y + \dots + a_1 s Y + a_0 Y &= \\ &= b_0 U + b_1 s U + \dots + b_{n-1} s^{n-1} U. \end{aligned}$$

Division durch s^n liefert

$$\begin{aligned} Y + \frac{a_{n-1}}{s} Y + \dots + \frac{a_1}{s^{n-1}} Y + \frac{a_0}{s^n} Y &= \\ &= \frac{b_{n-1}}{s} U + \dots + \frac{b_1}{s^{n-1}} U + \frac{b_0}{s^n} U \quad \text{oder} \\ Y &= \frac{1}{s} \left\{ b_{n-1} U - a_{n-1} Y + \frac{1}{s} \left(\dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{s} \left[b_1 U - a_1 Y + \frac{1}{s} (b_0 U - a_0 Y) \right] \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

Nunmehr definiert man als Zustandsvariable die mit $1/s$ multiplizierten Klammerausdrücke, wobei man mit der runden Klammer beginnt und $Y = X_n$ setzt:

$$X_1 = \frac{1}{s} [b_0 U - a_0 X_n],$$

$$X_2 = \frac{1}{s} [b_1 U - a_1 X_n + X_1],$$

⋮

$$X_n = \frac{1}{s} [b_{n-1} U - a_{n-1} X_n + X_{n-1}].$$

Durch Multiplikation mit s und Übergang in den Zeitbereich folgt

1) J. Ackermann unterscheidet in [11.3] zwei verschiedene Beobachtungsnormalformen. Die im folgenden hergeleitete Beschreibung heißt bei ihm Beobachter-Normalform (S. 130/131), im Unterschied zur Beobachtbarkeits-Normalform.

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_n + b_0 u,$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_n + x_1 + b_1 u,$$

⋮

$$\dot{x}_n = -a_{n-1} x_n + x_{n-1} + b_{n-1} u.$$

In Matrzenschreibweise wird daraus die Vektordifferentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ 0 & & & & & -a_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u. \quad (11.34)$$

Die Ausgangsgleichung $y = x_n$ ist so einfach, daß es keinen Vorteil bringt, sie in Vektorform zu schreiben. Um sie mit anderen Zustandsdarstellungen vergleichen zu können, kann dies aber doch zweckmäßig sein:

$$y = [0, \dots, 0, 1] x. \quad (11.35)$$

Die Zustandsgleichungen (11.34) und (11.35) wollen wir als *Beobachtungsnormalform* bezeichnen.

Der Vergleich mit der Regelungsnormalform zeigt eine weitgehende Symmetrie beider Normalformen. Sie tritt besonders deutlich hervor, wenn man auch bei der *Regelungsnormalform* die Voraussetzung $a_n = 1$ und $b_n = 0$ macht. Dann wird aus (11.32) und (11.33)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & . & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (11.36)$$

$$y = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] x. \quad (11.37)$$

Wie man sieht, gehen die beiden (n, n) -Matrizen durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen ineinander über, während die Koeffizientenvektoren der Ein- und Ausgangsgröße vertauscht sind.

11.2.3 Die Jordansche Normalform der Zustandsgleichungen

Um die Regelungs- oder Steuerungsnormalform aufzustellen, braucht man die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ nicht zu kennen; vielmehr benötigt man nur ihre Koeffizienten. Häufig sind die Pole aber bekannt, so bei Regelstrecken, die als Reihenschaltung einfacher Übertragungsglieder vorliegen. Dann kann man ohne Mühe eine dritte Darstellung der Zustandsgleichungen gewinnen. Das geschieht durch die Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion $G(s)$. Sie sei zunächst für einfache Pole $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ durchgeführt. Dann gilt

$$Y(s) = \left[\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right] U(s), \quad (11.38)$$

wobei r_0 nur dann $\neq 0$ ist, wenn Zähler und Nenner von $G(s)$ den gleichen Grad haben. Man definiert jetzt die

Zustandsvariablen durch

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s), \quad i=1, \dots, n. \quad (11.39)$$

Dann wird aus (11.38)

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n r_i X_i(s) + r_0 U(s). \quad (11.40)$$

Um in den Zeitbereich überzugehen, multipliziert man (11.39) mit $s - \lambda_i$:

$$s X_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s). \text{ Daraus wird}$$

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u, \quad i=1, \dots, n. \quad (11.41)$$

Wie man sieht, ist das so erhaltene System der Zustandsdifferentialgleichungen von besonders einfacher Struktur. In jeder Differentialgleichung tritt nur eine einzige Zustandsvariable auf: Das Differentialgleichungssystem ist entkoppelt. Ein Blick auf die früheren Beispiele sowie auf die Regelungs- und Beobachtungsnormalform zeigt, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem hat vor anderen Darstellungen einen entscheidenden Vorzug: Jede Differentialgleichung kann für sich gelöst werden, ohne daß man die anderen Differentialgleichungen berücksichtigen muß. Für theoretische Untersuchungen ist diese Wahl der Zustandsvariablen oft die günstigste.

Die Ausgangsgleichung lautet nach (11.40) im Zeitbereich

$$y = \sum_{i=1}^n r_i x_i + r_0 u. \quad (11.42)$$

Geht man zur Matrzenschreibweise über, so erhält man die Vektordifferentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (11.43)$$

und die gewöhnliche Gleichung

$$y = [r_1, r_2, \dots, r_n] x + r_0 u. \quad (11.44)$$

Die Tatsache, daß es sich um ein *entkoppeltes System* handelt, drückt sich jetzt darin aus, daß die quadratische Matrix, die mit dem Zustandsvektor multipliziert wird, eine *Diagonalmatrix* ist.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Pole von $G(s)$ einfach sind. Nun möge λ_1 ein m -facher Pol sein, während die restlichen Pole einfach sind. Dann wird die Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \left[\frac{r_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{r_m}{(s - \lambda_1)^m} + \sum_{i=m+1}^n \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right] U(s). \quad (11.45)$$

Man definiert die Zustandsvariablen in der gleichen Weise wie bei einfachen Polen:

$$X_1 = \frac{1}{s - \lambda_1} U, \quad X_2 = \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} U, \dots, \quad X_m = \frac{1}{(s - \lambda_1)^m} U,$$

$$X_i = \frac{1}{s - \lambda_i} U, \quad i = m+1, \dots, n. \quad (11.46)$$

Die Zustandsdifferentialgleichungen kann man aber jetzt nicht in derselben Weise wie dort herleiten. Sonst würde beispielsweise aus der zweiten Gleichung von (11.46):

$$(s^2 - 2\lambda_1 s + \lambda_1^2) X_2 = U \quad \text{oder}$$

$$\ddot{x}_2 - 2\lambda_1 \dot{x}_2 + \lambda_1^2 x_2 = u.$$

Es würden also Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung in den Zustandsdifferentialgleichungen auftreten, was nicht zulässig ist.

Um dies zu vermeiden, formt man die Ausdrücke (11.46), soweit sie sich auf den Pol λ_1 beziehen, etwas um:

$$X_1 = \frac{1}{s - \lambda_1} U \text{ (bleibt unverändert)},$$

$$X_2 = \frac{1}{s - \lambda_1} \cdot \frac{1}{s - \lambda_1} U = \frac{1}{s - \lambda_1} X_1,$$

$$X_3 = \frac{1}{s - \lambda_1} \cdot \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} U = \frac{1}{s - \lambda_1} X_2,$$

$$\vdots$$

$$X_m = \frac{1}{s - \lambda_1} \cdot \frac{1}{(s - \lambda_1)^{m-1}} U = \frac{1}{s - \lambda_1} X_{m-1}.$$

So erhält man die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_1 x_2 + x_1, \\ \dot{x}_3 &= \lambda_1 x_3 + x_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= \lambda_1 x_m + x_{m-1} \quad \text{und dazu wie bisher} \end{aligned} \quad (11.47)$$

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u, \quad i = m+1, \dots, n.$$

Die Zustandsdifferentialgleichungen sind jetzt sämtlich erster Ordnung, wie es erforderlich ist. Allerdings ist das System nicht mehr entkoppelt. Doch ist die Kopplung sehr einfach: x_1 kommt nur in der zweiten Differentialgleichung vor, x_2 nur in der dritten usw. Man kann daher das Differentialgleichungssystem sukzessive ohne Schwierigkeit lösen: Aus der ersten Differentialgleichung (11.47) wird x_1 in Abhängigkeit von der gegebenen Eingangsgröße u ermittelt. Die so erhaltene Zeitfunktion wird in die zweite Differentialgleichung (11.47) eingesetzt, die damit nur noch die unbekannte Funktion x_2 enthält, und so fort.

In Matrizenform ist die Zustandsdifferentialgleichung durch (11.48) gegeben.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ \cdot & & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda_1 \\ & & & & \lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (11.48)$$

Die Ausgangsgleichung lautet:

$$y = [r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n] x + r_0 u. \quad (11.49)$$

Während sich die Ausgangsgleichung von derjenigen bei einfachen Polen nicht unterscheidet, sind die Matrizen der Vektordifferentialgleichung anders aufgebaut. Zu dem m -fachen Pol λ_1 gehört ein Kästchen der quadratischen Matrix, das in der Hauptdiagonale mit dem gleichen Wert λ_1 besetzt ist, entsprechend der Tatsache, daß $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m = \lambda_1$ gilt. Die übrigen Elemente des Kästchens sind aber nicht sämtlich Null; vielmehr ist die unter der Hauptdiagonale gelegene Paralleldiagonale mit 1 besetzt. Darin drückt sich die Tatsache der Kopplung aus.

Es wird jetzt ohne weitere Rechnung klar sein, wie die Vektordifferentialgleichung aussieht, wenn mehrere mehrfache Pole auftreten: Zu einem mehrfachen Pol der Ordnung m gehört ein Kästchen der eben beschriebenen Art von der Seitenlänge m , und diese Kästchen sind längs der Hauptdiagonale aufgereiht. Die einfachen Pole können als Spezialfall aufgefaßt werden, wobei das zugehörige Kästchen nur ein Element enthält, so daß eine 1 nicht vorkommen kann.

Wir wollen die durch (11.48) und (11.49) bestimmte Zustandsdarstellung als *Jordansche Normalform* der Zustandsgleichungen bezeichnen. Die Benennung ist aus der Matrizentheorie übernommen, wo gezeigt wird, daß jede quadratische Matrix durch geeignete Transformation auf die eben beschriebene Kästchenform gebracht werden kann, die dann als Jordansche Normalform der Matrix bezeichnet wird. Die Diagonalform ist als Spezialfall darin enthalten, der mit Sicherheit dann vorliegt, wenn die Eigenwerte der Matrix einfach sind.¹⁾

Wir verfügen jetzt über mehrere Möglichkeiten, Zustandsvariable bei einem rationalen Übertragungsglied einzuführen.

Welche Darstellung man vorzieht, hängt von dem Zweck ab, den man mit der Beschreibung verfolgt. Es wurde schon gesagt, daß für theoretische Untersuchungen die Jordansche Normalform der Zustandsgleichungen oft am angenehmsten ist. Es können jedoch noch andere Gesichtspunkte maßgebend sein. Kennt man die Pole des Übertragungsgliedes nicht und will man sie nicht aus-

rechnen, so ist die Regelungsnormalform bequemer, da man sie sofort hinschreiben kann. Regelungs- und Beobachtungsnormalform sind bei bestimmten Syntheseproblemen allen anderen Darstellungen vorzuziehen. Es kann aber auch sein, daß man nach Möglichkeit nur solche Zustandsvariablen einführen will, die meßtechnisch erfassbar sind. Dann wird man die Zustandsvariablen auf Grund der Kenntnis des konkreten technischen Systems bestimmen müssen, wobei allerdings nicht gesagt ist, daß sich das Ziel überhaupt erreichen läßt.

Ein Punkt sei noch erwähnt. Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ können konjugiert komplex sein. Führt man die Jordansche Normalform ein, so treten in den Zustandsdifferentialgleichungen konjugiert komplexe Koeffizienten auf, was zur Folge hat, daß auch die zugehörigen Zustandsvariablen konjugiert komplex sind. Es sei betont, daß hierdurch weder die bisherigen Überlegungen über die Aufstellung der Zustandsgleichungen noch die späteren Angaben über ihre Lösung beeinträchtigt werden.

Jedoch sind Fälle denkbar, in denen man ausschließlich reelle Zustandsvariable haben möchte, z. B. bei der Nachbildung eines Systems auf dem Rechner. Dann kann man entweder auf die Jordansche Normalform verzichten oder von ihr wieder zu einer reellen Darstellung übergehen. Wie das möglich ist, sei am Beispiel eines einfachen konjugiert komplexen Polpaars gezeigt. Die zugehörigen Zustandsdifferentialgleichungen seien

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u, \quad (11.50)$$

$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u$, wobei also

$$\lambda_1 = a + jb, \quad \lambda_2 = a - jb \quad \text{und demgemäß}$$

$$x_1 = \xi + j\eta, \quad x_2 = \xi - j\eta$$

ist. Einsetzen in die erste Differentialgleichung (11.50) liefert

$$\dot{\xi} + j\dot{\eta} = (a\xi - b\eta) + j(b\xi + a\eta) + u.$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile bekommt man statt der beiden konjugiert komplexen Differentialgleichungen (11.50) die beiden reellen Differentialgleichungen

$$\dot{\xi} = a\xi - b\eta + u,$$

$$\dot{\eta} = b\xi + a\eta,$$

die zu dem System (11.50) äquivalent sind. Die beiden Differentialgleichungen sind allerdings gekoppelt; das ist der Preis, den man für die Reellwertigkeit zu zahlen hat.

Vergleicht man abschließend die verschiedenen, bisher angegebenen Zustandsdarstellungen für ein rationales Übertragungsglied, so erkennt man, daß sie vom folgenden gemeinsamen Typ sind:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (11.51)$$

$$y = c^T x + du. \quad (11.52)$$

1) Für die allgemeine Theorie der Jordanschen Normalform sei etwa auf [11.4], auch auf [11.3], Abschnitt 5.2, verwiesen. Ob die Einsen oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen liegen, hängt nur von der Numerierung der Zustandsvariablen ab.

Dabei ist A eine n -reihige quadratische Matrix, b ein n -reihiger Spaltenvektor, c^T ein n -reihiger Zeilenvektor (das wird durch das Transpositionszeichen T angezeigt) und d eine Zahl. A , b , c^T und d bestehen aus konstanten Elementen, die durch die Struktur des Übertragungsgliedes bestimmt werden und von den zeitveränderlichen Größen nicht abhängen. Die wichtigsten Systemeigenschaften, besonders das Stabilitätsverhalten, werden durch die Matrix A bestimmt. Sie sei deshalb als *Systemmatrix* bezeichnet. Die Vektormatrix b möge *Eingangsmatrix* heißen, entsprechend c^T *Ausgangsmatrix*. Was die Zahl d betrifft, so geht sie bei Systemen mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen in eine Matrix über. Bei realen Systemen ist d bzw. die entsprechende Matrix im allgemeinen Null, da die Eingangsgröße u nicht unmittelbar auf die Ausgangsgröße y wirkt, sondern nur durch Vermittlung der Zustandsvariablen x_i . So ist bei der Regelungsnormalform nach (11.33) $d = b_n/a_n$, bei der Jordanschen Normalform $d = r_0$. Beide Male ist also $d = 0$, wenn der Zählergrad der Übertragungsfunktion kleiner als der Nennergrad ist, wenn also das Übertragungsglied Tiefpaßcharakter hat. Das ist der Normalfall. Da d bzw. die entsprechende Matrix nur dann von Null verschieden ist, wenn die Eingangsgröße auf die Ausgangsgröße durchgeschaltet wird, wollen wir sie in Ermangelung einer besseren Bezeichnung als *Durchgangsmatrix* bezeichnen.

11.2.4 Aufstellen der Zustandsgleichungen aus dem Strukturbild

Wir wollen nunmehr zur *Herleitung der Zustandsgleichungen aus dem Strukturbild des Systems* übergehen. Das ist praktisch sehr wichtig. Denn bei einem komplizierteren System wird man zunächst das Strukturbild aufstellen, um eine sowohl exakte als auch anschauliche Basis für alle weiteren Untersuchungen zu haben. Der Übergang zu den Zustandsgleichungen ist denkbar einfach, wenn das Strukturbild an dynamischen Gliedern nur I- und VZ_1 -Glieder enthält. Er wird dann durch die folgende Vorschrift ausgedrückt:

Man führe die Ausgangsgrößen der Integrierglieder und Verzögerungsglieder erster Ordnung als Zustandsvariable des Systems ein.

Auf diese Weise ist gesichert, daß man ausschließlich Differentialgleichungen erster Ordnung erhält, in die nur die Eingangsgrößen selbst eingehen. Das Prinzip werde auf einige Beispiele angewandt.

Zunächst wollen wir die Reihenschaltung in Bild 11/5 betrachten, die z. B. eine Regelstrecke mit Stelleinrichtung beschreiben kann. Setzt man die Ausgangsgrößen der einzelnen Glieder gleich den Zustandsvariablen x_i , so erhält man zunächst die folgenden Beziehungen:

$$X_1 = \frac{K_0}{s} U,$$

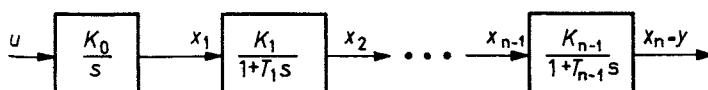


Bild 11/5. Einführung von Zustandsvariablen bei einer Reihenschaltung

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{K_1}{1+T_1 s} X_1, \\ &\vdots \\ X_n &= \frac{K_{n-1}}{1+T_{n-1} s} X_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Ausgangsgröße y ist dabei gleich x_n . Multipliziert man jede Gleichung mit ihrem Nenner, so entsteht

$$\begin{aligned} s X_1 &= K_0 U, \\ T_1 s X_2 + X_1 &= K_1 X_1, \\ &\vdots \\ T_{n-1} s X_n + X_{n-1} &= K_{n-1} X_{n-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt im Zeitbereich

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= K_0 u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_1} x_2 + \frac{K_1}{T_1} x_1, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -\frac{1}{T_{n-1}} x_n + \frac{K_{n-1}}{T_{n-1}} x_{n-1}. \end{aligned}$$

In Matrzenschreibweise:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{K_1}{T_1} & -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & & . \\ 0 & \frac{K_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 & & . \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{K_{n-1}}{T_{n-1}} -\frac{1}{T_{n-1}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} K_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = x_n = [0, \dots, 0, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + 0 \cdot u.$$

Da die Reihenschaltung ein rationales Übertragungsglied bildet, kann man auch zu einer der früheren Darstellungen übergehen. Die eben beschriebene Darstellung könnte demgegenüber den Vorteil haben, daß die so eingeführten Zustandsvariablen meßtechnisch erfaßbar sind. Das kommt beispielsweise dann in Betracht, wenn die Blöcke in Bild 11/5 selbständigen Bauelementen der realen Anlage entsprechen, zwischen denen man physikalische Größen entnehmen kann. Das kann bei solchen Reihenschaltungen der Fall sein. Hingegen wird die Partialbruchzerlegung, die einer Parallelschaltung entspricht, wohl so gut wie nie durch eine reale Regelstrecke verwirklicht werden. Es handelt sich um eine mathematische Beschreibung des Systems, bei der die Zustandsvariablen nicht unbedingt physikalische Realität zu haben brauchen.

Als weiteres Beispiel für die Aufstellung der Zustandsgleichungen aus dem Strukturbild betrachten wir Bild

3/9, das im wesentlichen den Koppelplan für die Analogrechenschaltung eines allgemeinen rationalen Übertragungsgliedes zeigt. Der Kürze halber wollen wir $b_n = 0$ annehmen, wie dies meist der Fall ist. Führt man die Ausgangsgrößen der Integrierglieder als Zustandsvariablen ein, so liest man aus Bild 3/9 zunächst die folgenden Gleichungen ab:

$$y = x_1,$$

$$x_1 = \int_0^t \left[\frac{b_{n-1}}{a_n} u + x_2 - \frac{a_{n-1}}{a_n} y \right] dt,$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \int_0^t \left[\frac{b_1}{a_n} u + x_n - \frac{a_1}{a_n} y \right] dt,$$

$$x_n = \int_0^t \left[\frac{b_0}{a_n} u - \frac{a_0}{a_n} y \right] dt.$$

Differenziert man die Integralgleichungen und setzt $y = x_1$ ein, so erhält man

$$\dot{x}_1 = x_2 - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_1 + \frac{b_{n-1}}{a_n} u,$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n - \frac{a_1}{a_n} x_1 + \frac{b_1}{a_n} u,$$

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 + \frac{b_0}{a_n} u$$

als Zustandsdifferentialgleichungen. Wie man sieht, ist der Koppelplan einer Analogrechenschaltung eine spezielle Zustandsdarstellung des Übertragungsgliedes.

Bisher wurden nur Strukturbilder betrachtet, die sich aus I- und VZ₁-Gliedern zusammensetzen. Treten auch kompliziertere R-Glieder auf, so kann man diese zunächst in I- und VZ₁-Glieder zerlegen oder für sie eine der obigen Zustandsdarstellungen herleiten, z.B. die Diagonalform. Betrachten wir etwa den in Bild 11/6, oben, dargestellten Wirkungskreis. Man kann das VZ₂-Glied in Partialbrüche zerlegen und gelangt so zu komplexen Zustandsgleichungen. Oder man kann es durch die Rückführung zweier VZ₁-Glieder nach Bild 1/52 beschreiben. Wählen wir diese Möglichkeit und stellen überdies das AR₁-Glied in der Rückführung nach Bild 1/45 als Parallelschaltung eines P- und VZ₁-Gliedes dar, so erhalten wir die äquivalente Struktur in Bild 11/6, unten. Aus ihr liest man zunächst die folgenden Beziehungen ab:

$$X_1 = \frac{K_2}{s} X_2,$$

$$X_2 = \frac{1}{1 + \frac{T}{d}s} X_3,$$

$$X_3 = \frac{K_1}{d^2} \frac{1}{1 + \frac{T}{d}s} \times$$

$$\times \left[U - \frac{1-d^2}{K_1} X_2 - K_3 \frac{T_3}{T_4} X_1 - X_4 \right],$$

$$X_4 = K_3 \left(1 - \frac{T_3}{T_4} \right) \frac{1}{1 + T_4 s} X_1.$$

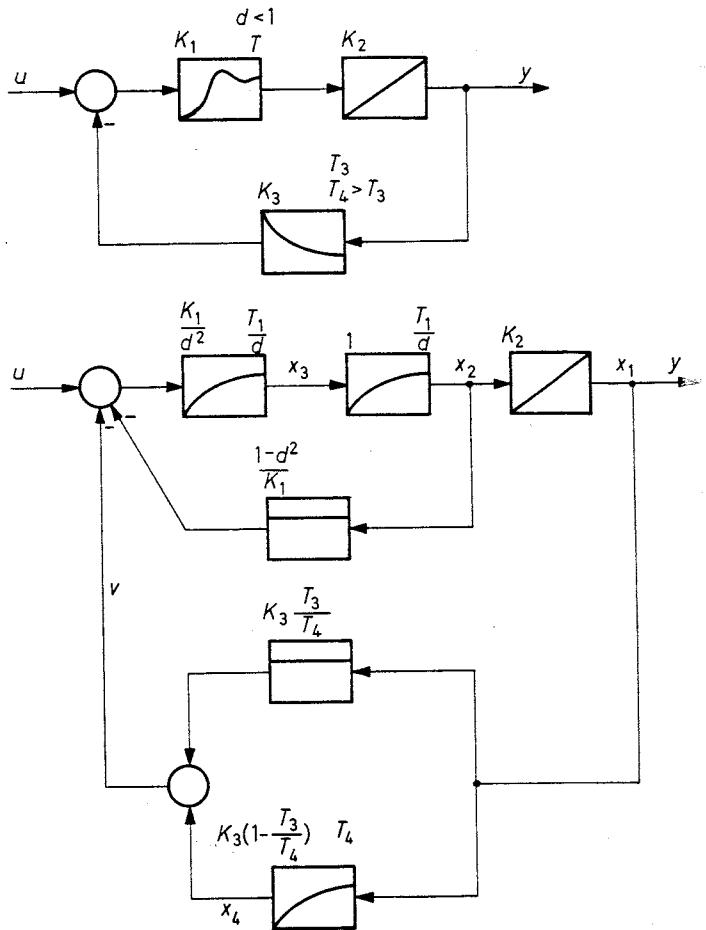


Bild 11/6. Einführung von Zustandsvariablen in einem Wirkungskreis

Multipliziert man mit den Nennern und geht dann in den Zeitbereich über, so erhält man die folgenden Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\dot{x}_1 = K_2 x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{d}{T} x_2 + \frac{d}{T} x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_1 K_3 T_3}{dT T_4} x_1 - \frac{1-d^2}{dT} x_2 - \frac{d}{T} x_3 - \frac{K_1}{dT} x_4 + \frac{K_1}{dT} u,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_3 (T_4 - T_3)}{T_4^2} x_1 - \frac{1}{T_4} x_4.$$

Dazu kommt noch die Ausgangsgleichung

$$y = x_1.$$

Auch dann, wenn das Strukturbild andere Blöcke als rationale Übertragungsglieder und Summierungsstellen enthält, z.B. Kennlinienglieder und multiplikative Glieder, geht man in der gleichen Weise vor. Auch dafür zwei Beispiele. Bild 1/15 zeigt das Strukturbild eines fremderregten Gleichstrommotors. Ausgangsgrößen der I- und VZ₁-Glieder sind die Winkelgeschwindigkeit ω , der Ankerstrom i_A und der Feldfluß ψ_F . Führt man sie als Zustandsvariable ein, so liest man aus Bild 1/15 folgende Gleichungen ab:

$$\omega = \frac{1}{J_s} (c i_A \psi_F - M_L),$$

$$i_A = \frac{\frac{1}{R_A}}{1 + \frac{L_A}{R_A} s} (u_A - c \omega \psi_F),$$

$$\psi_F = \frac{1}{s} (u_F - R_F \tilde{F}(\psi_F)).$$

Multiplikation mit den Nennern und Übergang in den Zeitbereich liefern die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{\omega} = \frac{c}{J} i_A \psi_F - \frac{1}{J} M_L,$$

$$\dot{i}_A = -\frac{R_A}{L_A} i_A - \frac{c}{L_A} \omega \psi_F + \frac{1}{L_A} u_A,$$

$$\dot{\psi}_F = -R_F \tilde{F}(\psi_F) + u_F.$$

Sie sind hier nichtlinear. Als Eingangsgrößen treten die Feldspannung u_F , die Ankerspannung u_A und das Lastmoment M_L auf. Ausgangsgröße ist die Winkelgeschwindigkeit ω , die zugleich Zustandsvariable ist.

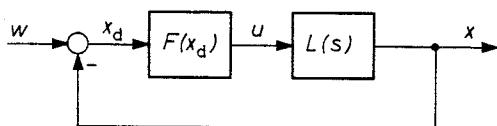


Bild 11/7. Einführung von Zustandsvariablen in einem nichtlinearen Regelkreis

Als zweites Beispiel eines nichtlinearen Systems werde ein nichtlinearer Regelkreis betrachtet, wie er häufig vorliegt (Bild 11/7). Die Kennlinie sei durch die Gleichung $u = F(x_d)$ gegeben. Ist $L(s)$ rational, ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad und hat $L(s)$ nur einfache Pole $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, so wird der geschlossene Regelkreis durch die Gleichungen

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u, \quad i=1, \dots, n, \quad (11.53)$$

$$x = \sum_{v=1}^n r_v x_v, \quad (11.54)$$

$$x_d = w - x, \quad (11.55)$$

$$u = F(x_d) \quad (11.56)$$

beschrieben. Setzt man (11.54) in (11.55), (11.55) sodann in (11.56) und diesen Ausdruck schließlich in (11.53) ein, so hat man als Zustandsdifferentialgleichungen des nichtlinearen Regelkreises

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + F\left(w - \sum_{v=1}^n r_v x_v\right), \quad i=1, \dots, n. \quad (11.57)$$

Eingangsgröße ist hier die Führungsgröße w des Regelkreises. Seine Regelgröße x ist durch die Ausgangsgleichung

$$x = \sum_{v=1}^n r_v x_v \quad (11.58)$$

gegeben. Statt mit den sehr unübersichtlichen Zustandsdifferentialgleichungen (11.57) zu arbeiten, ist es in einem solchen Fall jedoch besser, die Zustandsgleichungen nicht in der kürzestmöglichen Form zu schreiben, sondern lieber eine gewöhnliche Hilfsgleichung hinzunehmen:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + F(x_d), \quad i=1, \dots, n.$$

$$x_d = w - \sum_{v=1}^n r_v x_v.$$

Enthält ein Strukturbild Totzeitglieder, so kann das System nicht durch Differentialgleichungen beschrieben werden. Seine Darstellung durch Zustandsgleichungen vom Typ (11.20), (11.21) ist dann unmöglich. Aber auch dann kann es nützlich sein, die totzeitfreien Systemteile durch Zustandsvariable zu beschreiben, weil dadurch wichtige Aussagen über das Gesamtsystem möglich sind. Beispielsweise gilt das für nichtlineare Regelkreise mit Totzeit oder für Steuerungsprobleme linearer Systeme.

Abgesehen von der Gleichstrommaschine wurden bisher Systeme mit einer einzigen Ein- und Ausgangsgröße betrachtet. Die Erweiterung auf mehrere Ein- und Ausgangsgrößen bringt aber keinerlei Schwierigkeiten mit sich. Es genügt, ein Beispiel zu betrachten. Nehmen wir das in Bild 11/8 dargestellte gekoppelte System. Man stellt für jedes rationale Übertragungsglied

$$Y_{ik}(s) = G_{ik}(s) U_k(s)$$

in der früher beschriebenen Weise die Zustandsgleichungen auf und fügt sie zusammen. Dann hat man die Zustandsgleichungen des Gesamtsystems. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß bei allen $G_{ik}(s)$ der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist und daß die Nenner sämtlich die gleiche Ordnung n haben. Die Pole

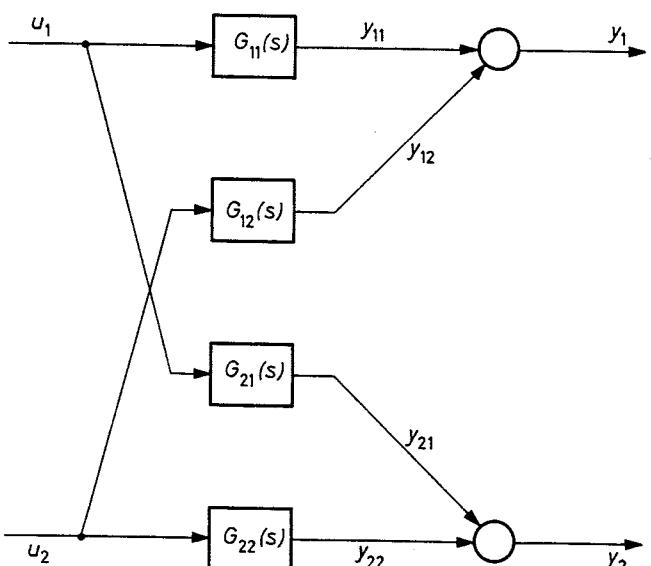


Bild 11/8. Einführung von Zustandsvariablen in einem rationalen System mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen

seien verschieden und sollen für alle vier Übertragungsglieder durchgezählt werden: $\lambda_1, \dots, \lambda_{4n}$. Wenn wir für jedes Übertragungsglied die Diagonalförm wählen, erhalten wir für

$$G_{11}: y_{11} = \sum_{i=1}^n r_i x_i, \quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i + u_1, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$G_{12}: y_{12} = \sum_{i=n+1}^{2n} r_i x_i, \quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i + u_2, \quad i = n+1, \dots, 2n;$$

$$G_{21}: y_{21} = \sum_{i=2n+1}^{3n} r_i x_i, \quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i + u_1, \\ i = 2n+1, \dots, 3n;$$

$$G_{22}: y_{22} = \sum_{i=3n+1}^{4n} r_i x_i, \quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i + u_2, \\ i = 3n+1, \dots, 4n.$$

Faßt man zusammen, so ergibt sich

$$y_1 = y_{11} + y_{12} = \sum_{i=1}^{2n} r_i x_i,$$

$$y_2 = y_{21} + y_{22} = \sum_{i=2n+1}^{4n} r_i x_i,$$

also in Vektorform

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \dots r_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r_{2n+1} \dots r_{4n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \\ \vdots \\ x_{4n} \end{bmatrix}. \quad (11.59)$$

Für die Vektordifferentialgleichung folgt

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \\ \dot{x}_{2n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{3n} \\ \dot{x}_{3n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & \lambda_n & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & \lambda_{n+1} & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & \lambda_{2n} & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & \lambda_{2n+1} & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & \lambda_{3n} & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_{3n+1} & & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \lambda_{4n} & & \end{bmatrix}$$

11.2.5 Allgemeine Form der Zustandsgleichungen eines linearen Systems

Man erkennt hieraus die allgemeine Form der Zustandsgleichungen eines rationalen Übertragungssystems, d. h. eines Systems, das aus rationalen Übertragungsgliedern und Summierungsstellen aufgebaut ist, also durch lineare Gleichungen und Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben wird. Man kann auch von der Klasse der linearen und zeitinvarianten Systeme sprechen, wenn man dabei beachtet, daß nur Systeme in Betracht gezogen werden, die sich durch Differentialgleichungen beschreiben lassen (nicht aber z. B. Totzeitssysteme).

Aus (11.60) und (11.59) folgt für die allgemeine Form der Zustandsgleichungen dieser Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (11.61)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (11.62)$$

Dabei ist \mathbf{x} der n -gliedrige Zustandsvektor, \mathbf{u} der p -gliedrige Eingangsvektor und \mathbf{y} der q -gliedrige Ausgangsvektor. Die

(n, n) -Matrix \mathbf{A} (Systemmatrix),

(n, p) -Matrix \mathbf{B} (Eingangsmatrix),

(q, n) -Matrix \mathbf{C} (Ausangsmatrix),

(q, p) -Matrix \mathbf{D} (Durchgangsmatrix)

bestehen aus konstanten Elementen. Die Zustandsgleichungen (11.51) und (11.52) für Systeme mit einer einzigen Ein- und Ausgangsgröße sind als Spezialfall in (11.61) und (11.62) enthalten. Treten in den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} Elemente auf, die zeitabhängig sind, so hat man in (11.61) und (11.62) die Zustandsgleichungen eines *linearen zeitvarianten Systems*.

Was die Durchgangsmatrix betrifft, so geht aus den Beispielen hervor, daß bei realen Systemen im allgemeinen $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ sein wird, weil die Eingangsgrößen normalerweise

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \\ \dot{x}_{2n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{3n} \\ \dot{x}_{3n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{4n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (11.60)$$

Die nicht ausgefüllten Stellen der Systemmatrix sind mit Nullen besetzt.

nicht unmittelbar auf die Ausgangsgrößen wirken, sondern nur über die Vermittlung der Zustandsvariablen. Wir werden daher später häufig die Voraussetzung $D=0$ machen.

Bei der Eingangsmatrix B wird man im Realfall immer $p \leq n$ annehmen dürfen, d.h. die Zahl der Eingangsgrößen wird die Zahl der Zustandsvariablen nicht überschreiten. B hat daher höchstens den Rang p . Wir dürfen annehmen, daß B in der Tat den Rang p hat. Angenommen nämlich, B habe einen kleineren Rang. Dann sind die Spaltenvektoren b_1, \dots, b_p von B linear abhängig. Es gelte etwa $b_p = c_1 b_1 + \dots + c_{p-1} b_{p-1}$. Aus Bu wird dann nach (14.54):

$$\begin{aligned} Bu &= b_1 u_1 + \dots + b_p u_p = (u_1 + c_1 u_p) b_1 + \dots + \\ &\quad + (u_{p-1} + c_{p-1} u_p) b_{p-1} = u^* b_1 + \dots + u_{p-1}^* b_{p-1} = \\ &= [b_1, \dots, b_{p-1}] \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_{p-1}^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Das heißt: Man kann den Einfluß der äußeren Größen auf das System von vornherein in der letzteren Form, also mittels der verkürzten Eingangsmatrix $[b_1, \dots, b_{p-1}]$ und der Eingangsgrößen u_1^*, \dots, u_{p-1}^* beschreiben. Falls u_1, \dots, u_p Steuergrößen sind, über die man verfügen kann, ist u_p überflüssig, da sich die Wirkung von u_p durch geeignete Bemessung von u_1, \dots, u_{p-1} ersetzen läßt. Entsprechend darf man bei der Ausgangsmatrix C voraussetzen, daß sie den Rang q aufweist.

Man kann die Zustandsgleichungen als Strukturbild darstellen. Dazu muß man die Vektordifferentialgleichung integrieren. Einen Vektor oder allgemein eine Matrix integriert man aber gliedweise. Das bedeutet beispielsweise für $x(t)$:

$$\int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t \dot{x}_1(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \dot{x}_n(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(t) - x_n(0) \end{bmatrix} = x(t) - x(0).$$

Daher folgt aus (11.61)

$$x(t) = \int_0^t [Ax(\tau) + Bu(\tau)] d\tau + x(0).$$

Zusammen mit (11.62) ergibt sich so Bild 11/9. Die doppelt gezogenen Wirkungslinien sollen auf den Vektorcharakter der zeitveränderlichen Größen hinweisen.

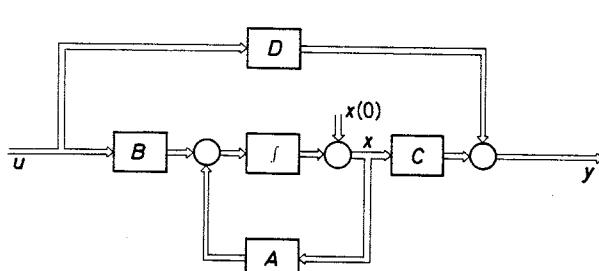


Bild 11/9. Strukturbild der Zustandsgleichungen eines linearen Systems

Für die Zustandsgleichungen der linearen zeitinvarianten Systeme lassen sich allgemeine Lösungsformeln angeben, die das dynamische Verhalten auch sehr umfangreicher und verwickelt aufgebauter Systeme gut überschauen lassen. Davon soll im nächsten Abschnitt die Rede sein.

11.3 Lösung der Zustandsgleichungen von linearen zeitinvarianten Systemen

11.3.1 Die Matrizenfunktion e^{At}

Die Aufgabe besteht darin, einen Formelzusammenhang zwischen dem Eingangsvektor $u(t)$ und dem Ausgangsvektor $y(t)$ herzustellen. Diese Aufgabe ist gelöst, wenn man aus der Zustandsdifferentialgleichung $\dot{x}(t)$ in Abhängigkeit von $u(t)$ bestimmt. Man braucht dann $x(t)$ nur noch in die Ausgangsgleichung einzusetzen.

Um eine Vorstellung davon zu bekommen, wie man die Vektordifferentialgleichung eventuell lösen kann, betrachten wir die entsprechende skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = ax + bu.$$

Man kann sie auf verschiedene Weise lösen. Ein einfacher Weg besteht darin, daß man mit e^{-at} multipliziert:

$$e^{-at} \dot{x} = e^{-at} ax + e^{-at} bu,$$

$$e^{-at} \dot{x} - ae^{-at} x = e^{-at} bu.$$

Die linke Seite ist jetzt gerade der Differentialquotient

$$\frac{d}{dt} (e^{-at} x). \quad \text{Demzufolge gilt}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{-at} x) = e^{-at} bu(t).$$

Integriert man vom Anfangszeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t , so wird daraus

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} (e^{-a\tau} x(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau. \quad (11.63)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird aus dem Ausdruck auf der linken Seite

$$e^{-at} x(t) - e^{-at_0} x(t_0).$$

Damit erhält man aus (11.63), wenn man die Gleichung noch mit e^{at} multipliziert:

$$x(t) - e^{a(t-t_0)} x(t_0) = e^{at} \int_{t_0}^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau.$$

Da nach τ integriert wird, kann man den Faktor e^{at} in den Integranden schreiben und bekommt endgültig:

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + e^{a(t-t_0)} x(t_0). \quad (11.64)$$

Man darf vermuten, daß die Lösung der entsprechenden Vektordifferentialgleichung den gleichen Aufbau zeigen wird, nur daß eben die Skalare durch die entsprechenden

Vektoren und Matrizen ersetzt sind. Trifft das zu, so müssen Matrizenfunktionen vom Typ e^{Az} auftreten, wo z eine Variable ist. Zunächst ist ein derartiges Symbol aber gar nicht definiert. Es muß daher vorerst geklärt werden, was darunter zu verstehen ist.

Es liegt nahe, e^{Az} mittels der Potenzreihe für die e-Funktion zu definieren:

$$e^{Az} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(Az)^v}{v!} = I + A \frac{z}{1!} + A^2 \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad (11.65)$$

wobei I die n -reihige quadratische Einheitsmatrix ist. Die einzelnen Glieder der Reihe sind wohldefinierte Matrizenpotenzen $A^v = A \cdot A \cdots A$, die noch mit dem Skalar $z^v/v!$ multipliziert werden. Es handelt sich daher bei jedem einzelnen Glied der Reihe um eine (n, n) -Matrix, wobei n die Zahl der Zustandsvariablen des Systems ist. Ist

$A = (a_{ik})$, so ist

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sum_{\lambda=1}^n a_{i\lambda} a_{\lambda k} \right), \\ A^3 &= \left(\sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{i\lambda} a_{\lambda\mu} a_{\mu k} \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Addition der Reihenglieder in (11.65) ist ebenfalls erklärt. Da man Matrizen addiert, indem man die entsprechenden Elemente addiert, erhält man

$$e^{Az} = \left(e_{ik} + \frac{z}{1!} a_{ik} + \frac{z^2}{2!} \sum_{\lambda=1}^n a_{i\lambda} a_{\lambda k} + \frac{z^3}{3!} \sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{i\lambda} a_{\lambda\mu} a_{\mu k} + \dots \right),$$

$$\text{wobei } e_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}.$$

Jedes Element der (n, n) -Matrix e^{Az} stellt somit eine unendliche Reihe dar. Die Definition (11.65) ist daher sinnvoll, wenn sich die Konvergenz dieser Reihen zeigen lässt. Das ist in der Tat nicht schwierig. Die Elemente a_{ik} sind feste Zahlen und daher dem Betrag nach sämtlich $\leq M$, wo M eine feste positive Zahl ist. Im k -ten Term der unendlichen Reihe treten Produkte der a_{ik} zu k Faktoren auf. Diese Produkte sind somit dem Betrage nach $\leq M^k$. Die Anzahl dieser Produkte im k -ten Term ist n^{k-1} . Also ist der k -te Summand der Reihe dem Betrag nach

$$\leq \frac{|z|^k}{k!} n^{k-1} M^k = \frac{1}{n} \frac{(|z|nM)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dieser Term ist aber das k -te Glied der Reihenentwicklung von $(1/n) e^{|z|nM}$ (n ist hierbei eine feste Zahl!). Die e-Reihe ist somit absolute Majorante der von uns betrachteten Reihe. Daher ist diese absolut und außerdem sogar gleichmäßig konvergent in jedem endlichen z -Intervall. Die Definition (11.65) ist damit als sinnvoll erwiesen.

Aus der Definition (11.65) läßt sich leicht folgern, daß man mit der Matrizenfunktion genau so rechnen kann wie mit der gewöhnlichen e-Funktion. Vor allem gilt das Additionstheorem der e-Funktion:

$$e^{Az_1} e^{Az_2} = e^{A(z_1 + z_2)}. \quad (11.66)$$

Zunächst sieht man nämlich durch Ausmultiplizieren der Reihen, daß

$$e^{Az_1} e^{Az_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{v=0}^n A^n \frac{z_1^v}{v!} \frac{z_2^{n-v}}{(n-v)!} \right].$$

Zieht man in der v -Summe, die das n -te Glied der Produktreihe bildet, A^n vor und erweitert mit $n!$, so erhält man den Ausdruck

$$\frac{A^n}{n!} \sum_{v=0}^n \frac{n!}{v!(n-v)!} z_1^v z_2^{n-v} = \frac{A^n}{n!} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} z_1^v z_2^{n-v}.$$

Nach dem binomischen Satz ist das gleich

$$\frac{A^n}{n!} (z_1 + z_2)^n. \quad \text{Damit wird}$$

$$e^{Az_1} e^{Az_2} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}.$$

Die rechtsstehende Reihe ist aber nach (11.65) gerade die Matrizenfunktion $e^{A(z_1 + z_2)}$.

Aus dem Additionstheorem folgt unmittelbar, daß die Matrix e^{-At} invers zur Matrix e^{At} ist, daß also

$$e^{At} e^{-At} = I$$

gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} e^{At} e^{-At} &= e^{A(t-t)} = e^{A0} = \\ &= I + A \frac{0}{1!} + A^2 \frac{0^2}{2!} + \dots = I. \end{aligned}$$

Eine weitere Rechenregel, die wir im folgenden benötigen, ist die Differentiationseigenschaft der e-Funktion:

$$\frac{d}{dz} e^{Az} = A e^{Az} = e^{Az} A. \quad (11.67)$$

Das beweisen wir durch Differentiation der Reihe (11.65) nach z , eine Operation, die gewiß zulässig ist, da es sich um die Differentiation von Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzbereichs handelt. Gliedweise Differentiation von (11.65) liefert

$$\frac{d}{dz} e^{Az} = A + A^2 \frac{z}{1!} + A^3 \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Diese Reihe ist einerseits gleich

$$A \left[I + A \frac{z}{1!} + A^2 \frac{z^2}{2!} + \dots \right] = A e^{Az},$$

andererseits gleich

$$\left[I + A \frac{z}{1!} + A^2 \frac{z^2}{2!} + \dots \right] A = e^{Az} A.$$

Nebenbei wird in (11.67) die Tatsache ausgedrückt, daß die beiden Matrizen A und e^{Az} miteinander vertauschbar sind.

11.3.2 Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich

Die Vektordifferentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11.68)$$

kann nunmehr entsprechend der Lösung der skalaren Differentialgleichung gelöst werden.

Als einziges weiteres Hilfsmittel wird die Tatsache benutzt, daß auch für ein Matrizenprodukt die übliche Produktregel der Differentiation gilt, wobei man nur auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten hat. Sind also X und Y Matrizen mit zeitabhängigen Elementen, so gilt (siehe Abschnitt 14.2)

$$\frac{d}{dt}(XY) = X\dot{Y} + \dot{X}Y. \quad (11.69)$$

Multipliziert man die Gleichung (11.68) von links mit e^{-At} , so erhält man

$$e^{-At}\dot{x} = e^{-At}Ax + e^{-At}Bu.$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Matrizen e^{-At} und A kann man hierfür auch schreiben:

$$e^{-At}\dot{x} - Ae^{-At}x = e^{-At}Bu. \quad (11.70)$$

Nach der Produktregel (11.69) ist aber

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}\dot{x} - Ae^{-At}x.$$

Damit wird aus (11.70)

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}Bu.$$

Integriert man diese Vektorgleichung vom Zeitpunkt t_0 , in dem die Betrachtung des Systems begonnen wird, bis zu einem anderen Zeitpunkt t , so erhält man

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}[e^{-A\tau}x(\tau)] d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau.$$

Wendet man auf das linke Integral den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an, der auch für die Integration von Matrizen gilt (Abschnitt 14.2), so entsteht

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau. \quad (11.71)$$

Da, wie schon früher bemerkt, der Lösungsvektor $x(t)$ der Zustandsgleichung stetig ist, braucht man hier zwischen den Grenzwerten bei t_0+0 und t_0-0 nicht zu unterscheiden. Vielmehr gilt

$$x(t_0+0) = x(t_0-0) = x(t_0).$$

Als Anfangswerte kann man also die aus der Vergangenheit des Systems stammenden Werte nehmen.

Multipliziert man (11.71) von links mit e^{At} , so wird daraus

$$x(t) - e^{A(t-t_0)}x(t_0) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau.$$

Da nach τ integriert wird, kann man e^{At} unter das Integral schreiben und erhält so

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)}x(t_0). \quad (11.72)$$

Damit hat man die allgemeine Lösung der Zustandsgleichung in Vektorform erhalten. Sie setzt sich aus zwei Termen additiv zusammen. Der erste Term gibt die Abhängigkeit von dem Eingangsvektor $u(t)$ an, der zweite Term die Abhängigkeit vom Anfangszustand $x(t_0)$. Die Formel ist außerordentlich übersichtlich, was auf die Vektor- und Matrizenschreibweise zurückzuführen ist. Man überschaut mit einem Blick die gesamten auf das System einwirkenden äußeren Einflüsse. Hierin zeigt sich eine deutliche Überlegenheit gegenüber der Beschreibung durch Strukturbild und Übertragungsfunktion. Das gilt besonders bezüglich des Anfangszustands. Zwar kann er durch das Strukturbild und durch komplexe Zusatzterme zur Übertragungsfunktion erfaßt werden, aber in nicht annähernd so durchsichtiger Weise wie in (11.72).

Denkt man sich $u(t)$ zu $\mathbf{0}$ angenommen, so wird das System allein durch den Anfangszustand bestimmt. Dann gilt

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0). \quad (11.73)$$

Das heißt: Der Anfangszustand $x(t_0)$ wird in den momentanen Systemzustand $x(t)$ durch Multiplikation mit der Matrix

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (11.74)$$

überführt. Das ist ein Zusammenhang von unübertrefflicher Einfachheit. Die Matrix $\Phi(t, t_0)$ wird deshalb als *Überführungs- oder Transitionsmatrix* des Systems bezeichnet. Aus den Beziehungen (11.72) und (11.73) werden die Vorteile der Zustandsvariablenbeschreibung deutlich.

Wie man aus (11.72) ersieht, bestimmt die Transitionsmatrix die Lösung der Zustandsgleichung. Das gilt nicht nur für die hier betrachteten zeitinvarianten Systeme, sondern ebenso für zeitvariante. Für lineare Systeme (die durch Differentialgleichungen beschrieben werden) gilt [11.1, 11.2, 11.5] allgemein

$$x(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) Bu(\tau) d\tau + \Phi(t, t_0)x(t_0).$$

Nur läßt sich bei zeitvarianten Systemen die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ im allgemeinen nicht formelmäßig nach Art von (11.74) angeben. Vielmehr ist man auf ihre Bestimmung mit dem Rechner angewiesen, wobei man die Differentialgleichung (11.75) mit der Anfangsbedingung (11.76) benutzt.

Hat man es nur mit zeitinvarianten Systemen zu tun, so bezeichnet man die Transitionsmatrix auch häufig mit $\Phi(t-t_0)$, da die beiden Variablen t und t_0 nach (11.74) nur als Differenz $t-t_0$ auftreten.

Hier seien noch einige Eigenschaften der Transitionsmatrix zusammengestellt, die sowohl für zeitinvariante als auch für zeitvariante Systeme gelten. Setzt man in der Zustandsgleichung (11.68) sowie in ihrer Lösung (11.72) $u=\mathbf{0}$, so erhält man

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0).$$

Das heißt aber, daß $\Phi(t, t_0) x(t_0)$ die homogene Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ löst. Somit gilt

$$\dot{\Phi}(t, t_0) x(t_0) = A\Phi(t, t_0) x(t_0).$$

Da dies für jeden Anfangszustand $x(t_0)$ gilt, folgt daraus

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0). \quad (11.75)$$

Die Transitionsmatrix erfüllt somit die homogene Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Elementweise geschrieben lautet (11.75):

$$\dot{\phi}_{ik} = \sum_{v=1}^n a_{iv} \Phi_{vk}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein System von n^2 Differentialgleichungen für die n^2 Elemente $\Phi_{ik}(t, t_0)$.

Die zugehörige Anfangsbedingung lautet

$$\Phi(t_0, t_0) = I. \quad (11.76)$$

Denn aus (11.74) folgt

$$\Phi(t_0, t_0) = e^{A0} = I.$$

Somit kann man die Transitionsmatrix auch aus einem Differentialgleichungssystem bestimmen. Allerdings bringt dies gegenüber der Reihenentwicklung von (11.74) bei zeitinvarianten Systemen keinen Vorteil. Bei zeitvarianten Systemen aber, bei denen keine Formeldarstellung nach Art von (11.74) existiert, ist dieses Verfahren zur Berechnung der Transitionsmatrix von Bedeutung.

Noch eine weitere allgemeine, das heißt für zeitinvariante und zeitvariante Systeme, gültige Eigenschaft der Transitionsmatrix sei hergeleitet. Sind t_0, t_1, t_2 irgendwelche Punkte der t -Achse und verfolgt man die Bahn des Systems im Zustandsraum zunächst von t_0 bis t_1 und dann von t_1 bis t_2 , so gilt

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1) x(t_1), \quad x(t_1) = \Phi(t_1, t_0) x(t_0),$$

also insgesamt

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) x(t_0).$$

Andererseits gilt direkt

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_0) x(t_0).$$

Da die beiden letzten Beziehungen für einen beliebigen Anfangszustand $x(t_0)$ gelten, folgt aus ihnen

$$\Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0). \quad (11.77)$$

In Worten kann man dies etwa so ausdrücken: Einem Bahnstück im Zustandsraum von einem bestimmten Anfangszeitpunkt t_0 bis zu einem bestimmten Endzeitpunkt t_1 entspricht eindeutig eine Transitionsmatrix $\Phi(t_1, t_0)$. Durchläuft das System nacheinander zwei Bahnstücke,

so gehört zu der Gesamtbahn das Produkt der beiden Transitionsmatrizen. Dabei ist stets $u = 0$ vorausgesetzt.

Setzt man in (11.77) $t_2 = t_0$, so erhält man

$$\Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_0),$$

also wegen (11.76)

$$\Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0) = I.$$

Das heißt aber: Die Transitionsmatrix $\Phi(t_1, t_0)$ hat die inverse Matrix $\Phi(t_0, t_1)$, die also aus ihr einfach durch Vertauschung der Variablen hervorgeht. Es gilt somit, wenn wir nun den beliebigen Punkt t_1 mit t bezeichnen:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t). \quad (11.78)$$

Auch diese Beziehung gilt sowohl für zeinvariante als auch für zeitvariante Systeme. Für die zeitinvarianten Systeme ist speziell.

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = e^{A(t_0 - t)} = e^{-A(t - t_0)}. \quad (11.79)$$

Wir wollen jetzt zur Lösung der Zustandsgleichungen zurückkehren. Der Ausgangsvektor $y(t)$ ist nun sofort gefunden. Man braucht nur (11.72) in die Ausgangsgleichung

$$y = Cx + Du$$

einzusetzen. Da C konstant ist, kann man C unter das Integral setzen und erhält so

$$y(t) = \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) + Ce^{A(t-t_0)} x(t_0). \quad (11.80)$$

Bei einem zeitinvarianten System ist es gleichgültig, wo hin man den Zeitnullpunkt legt. Wir wollen von jetzt an der Einfachheit halber $t_0 = 0$ setzen. Dann ist

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) + Ce^{At} x_0 \quad (11.81)$$

mit $x_0 = x(0)$.

Die von u abhängenden Terme kann man noch übersichtlicher schreiben. Betrachten wir zunächst das Integral. Führt man die Matrix

$$F(t) = C e^{At} B = [F_{km}(t)]$$

ein, so ist es gleich

$$\begin{aligned} \int_0^t F(t-\tau) u(\tau) d\tau &= \int_0^t \left[\sum_{v=1}^p F_{kv}(t-\tau) u_v(\tau) d\tau \right] = \\ &= \left[\sum_{v=1}^p \int_0^t F_{kv}(t-\tau) u_v(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Die einzelnen Integrale sind Faltungsintegrale. Daher kann man für die letzte Summe auch

$$\left[\sum_{v=1}^p F_{kv}(t) * u_v(t) \right]$$

schreiben. Das ist aber nichts anderes als das Matrizenprodukt von $\mathbf{F}(t)$ und $\mathbf{u}(t)$, nur daß es sich nicht um die gewöhnliche Multiplikation, sondern um die Faltungsmultiplikation handelt. Man darf daher für den letzten Ausdruck auch schreiben

$\mathbf{F}(t) * \mathbf{u}(t)$, so daß also

$$\int_0^t \mathbf{C} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{F}(t) * \mathbf{u}(t) \text{ gilt.}$$

Auch den Term $\mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ in (11.80) kann man auf die Faltungsfom bringen. Man muß nur beachten, daß sich eine Zeitfunktion $f(t)$ auch als Faltungprodukt $f(t) * \delta(t)$ schreiben läßt (Abschnitt 3.6). Dann wird

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{u}(t) &= \left[\sum_{v=1}^p d_{kv} u_v(t) \right] = \left[\sum_{v=1}^p d_{kv} (\delta(t) * u_v(t)) \right] = \\ &= \left[\sum_{v=1}^p (d_{kv} \delta) * u_v(t) \right] = \mathbf{D}\delta(t) * \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Insgesamt wird so aus (11.80)

$$y(t) = \mathbf{F}(t) * \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\delta(t) * \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}_0.$$

Führt man nun die Matrix

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{D}\delta(t) = \mathbf{C} e^{At} \mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (11.82)$$

ein, so wird endgültig

$$y(t) = \mathbf{G}(t) * \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}_0. \quad (11.83)$$

Diese Beziehung bringt in prägnanter Form zum Ausdruck, wie sich die äußeren Einflüsse, also Eingangsgrößen und Anfangsbedingungen, auf den Ausgangsvektor auswirken. Was die Wirkung der Anfangsbedingungen betrifft, so gilt das gleiche, was bereits oben beim Zustandsvektor gesagt wurde. Denken wir uns jetzt den Anfangszustand zu Null angenommen, so daß das System nur durch die Eingangsgrößen beeinflußt wird.

Die Beeinflussung wird durch das Faltungsintegral

$$y(t) = \mathbf{G}(t) * \mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.84)$$

ausgedrückt. Das ist die geradlinige *Erweiterung des Duhamel-Integrals*, das bei einem System mit einer einzigen Ein- und Ausgangsgröße gilt (siehe Abschnitt 3.7):

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau.$$

Da die Matrix $\mathbf{G}(t)$ die Verallgemeinerung der Gewichtsfunktion $g(t)$ darstellt, bezeichnet man sie als *Gewichtsmatrix*.

Die Beziehung (11.83) zeigt wieder den Vorzug der Beschreibung durch Zustandsvariable. Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen wird ebenso einfach wiedergegeben wie in der klassischen Theorie, die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aber erheblich übersichtlicher.

Löst man die Matrizengleichung (11.84) in ihre Elementgleichungen auf, so erhält man

$$y_k(t) = \sum_{v=1}^p g_{kv}(t) * u_v(t). \quad (11.85)$$

Schaltet man allein

$$u_m(t) = \delta(t)$$

auf, während man die übrigen $u_v(t) \equiv 0$ setzt, so wird

$$y_k(t) = g_{km}(t) * \delta(t) = g_{km}(t).$$

Das heißt: Dasjenige Element der Gewichtsmatrix, das in der k -ten Zeile und m -ten Spalte steht, ist gleich der k -ten Ausgangsgröße, wenn man als m -te Eingangsgröße einen δ -Impuls einschaltet. Die Gewichtsmatrix stellt somit wie schon die Gewichtsfunktion die *Impulsantwort* des Systems dar.

Hieraus ist auch zu erkennen, wie man die Gewichtsmatrix grundsätzlich messen kann. Man gibt die Anfangsbedingungen Null vor. Dann schaltet man als erste Eingangsgröße etwa den Einheitssprung $\sigma(t)$ auf, während man alle anderen Eingangsgrößen Null setzt. Es ergibt sich nach (11.85)

$$y_k(t) = g_{k1}(t) * \sigma(t) = \int_0^t g_{k1}(\tau) d\tau = h_{k1}(t), \quad k=1, \dots, q.$$

Wenn man diese Ausgangsgrößen etwa oszillographiert, so hat man die Sprungantworten des Systems, die zur ersten Spalte der Gewichtsmatrix gehören. Führt man diese Beobachtung nacheinander für die zweite, dritte, ..., p -te Eingangsgröße durch, so erhält man die Matrix $[h_{km}(t)]$ aller Sprungantworten. Aus ihnen kann man durch Differentiation auf die Gewichtsmatrix schließen oder zu den zugehörigen Übertragungsfunktionen übergehen.

Der Nutzen der allgemeinen Formeln (11.72), (11.80) und (11.83) ist ein zweifacher. Einmal sind sie wegen ihrer Übersichtlichkeit ein guter Ausgangspunkt für tiefere Einsichten in das Systemverhalten. Das wird sich später z. B. bei den Untersuchungen über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eines Systems zeigen. Zum anderen sind sie sehr geeignet zur numerischen Berechnung des Zustands- und Ausgangsvektors mittels des Digitalrechners. Den Kernpunkt bildet die Berechnung der Matrizenfunktion e^{At} , die mit Hilfe eines Anfangsstückes der Potenzreihe (11.65) vorgenommen wird. Darauf wird in Abschnitt 11.6 eingehender berichtet.

Hier sollen noch zwei einfache Beispiele gerechnet werden. Es ist klar, daß die allgemeine Lösungstheorie bei so einfachen Systemen keinen Vorteil bringt. Darauf soll es aber jetzt nicht ankommen. Es geht nur darum, die allgemeinen Begriffsbildungen an konkreten Fällen zu erläutern.

Als erstes betrachten wir das in Bild 11/10 wiedergegebene gekoppelte System. Führt man die Ausgangsgrößen der beiden VZ₁-Glieder als Zustandsvariable ein, so hat man zunächst die komplexen Gleichungen

$$X_1 = \frac{1}{s+1} U_1, \quad X_2 = \frac{1}{s+2} U_2,$$

$$Y_1 = X_1 + 2U_2, \quad Y_2 = X_2 - U_1.$$

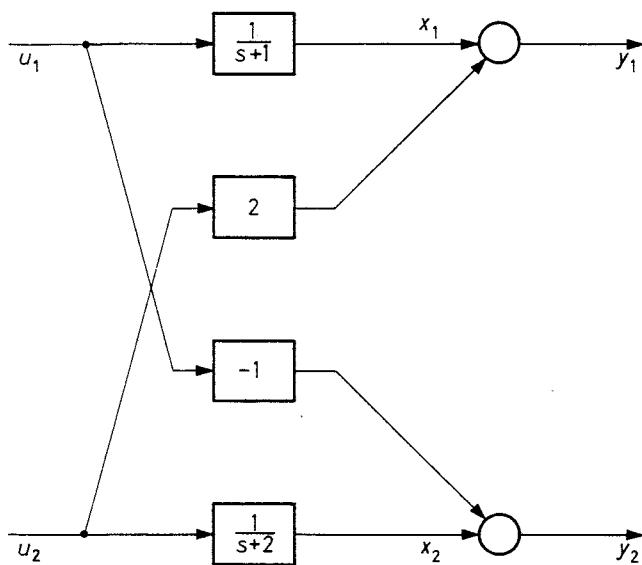


Bild 11/10. Gekoppeltes System

Aus ihnen folgt im Zeitbereich

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u_2; \\ y_1 &= x_1 + 2u_2, \\ y_2 &= x_2 - u_1.\end{aligned}$$

In Matrzenschreibweise lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u.\end{aligned}$$

Somit ist A eine Diagonalmatrix. Für sie lassen sich die Matrizenpotenzen sehr einfach bilden, denn es ist

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & 0 \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^m \end{bmatrix}.$$

Daher wird

$$\begin{aligned}e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{t}{1!} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots, \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2t}{1!} + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + \dots \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Das ist bei komplizierteren Systemen nicht mehr in so einfacher Weise möglich und wird für die Berechnung der Matrizenfunktion auf dem Digitalrechner auch nicht benötigt.

Im vorliegenden Fall erhält man weiter auf Grund von (11.80)

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t \mathbf{I} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \mathbf{I} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{I} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0,\end{aligned}$$

$$y(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} u_1(\tau) \\ e^{-2(t-\tau)} u_2(\tau) \end{bmatrix} d\tau + \begin{bmatrix} 2u_2(t) \\ -u_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} x_{10} \\ e^{-2t} x_{20} \end{bmatrix},$$

also schließlich

$$y_1(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u_1(\tau) d\tau + 2u_2(t) + e^{-t} x_{10},$$

$$y_2(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u_2(\tau) d\tau - u_1(t) + e^{-2t} x_{20}.$$

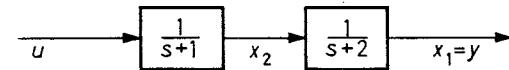


Bild 11/11. Reihenschaltung

Als zweites Beispiel betrachten wir die Reihenschaltung in Bild 11/11. Da $y=x_1$ ist, braucht man nur die Zustandsdifferentialgleichung zu untersuchen. Zunächst ist

$$X_1 = \frac{1}{s+2} X_2, \quad X_2 = \frac{1}{s+1} U, \quad \text{woraus}$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u \quad \text{oder}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{folgt. Hier ist also}$$

In einem so einfachen Fall wie dem vorliegenden lassen sich die unendlichen Reihen, aus denen die Elemente von e^{At} bestehen, sofort in geschlossener Form angeben:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ usw. Daher wird}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 - 2 \frac{t}{1!} + 4 \frac{t^2}{2!} - 8 \frac{t^3}{3!} + \dots & 0 + \frac{t}{1!} - 3 \frac{t^2}{2!} + 7 \frac{t^3}{3!} - \dots \\ 0 & 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix}$$

Auch hier ist es nicht schwierig, die Reihen zu summieren. Die an der Stelle (1, 1) stehende Reihe hat die Summe e^{-2t} , die an der Stelle (2, 2) stehende die Summe e^{-t} . Die an der Stelle (1, 2) stehende Reihe setzt man als Linearkombination $C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$ an. Der Koeffizientenvergleich der beiden ersten Glieder liefert $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Damit ist

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Nach (11.72) ist daher (mit $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau + \\ &\quad + \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \\ x(t) &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau) d\tau + \dots, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] u(\tau) d\tau + e^{-2t} x_{10} + \\ &\quad + (e^{-t} - e^{-2t}) x_{20}, \\ x_2(t) &= \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau + e^{-t} x_{20}. \end{aligned}$$

11.3.3 Anwendung der Laplace-Transformation auf die Zustandsgleichungen

Wenn man ein lineares Differentialgleichungssystem lösen will, ohne den Rechner zu benutzen, pflegt man die Laplace-Transformation anzuwenden. So kann man auch bei der Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{verfahren.} \quad (11.86)$$

Da eine Matrix elementweise Laplace-transformiert wird, gelten die üblichen Rechenregeln der Laplace-Transformation auch für Matrizen. Beispielsweise ist

$$\mathfrak{L}\{\dot{x}\} = \mathfrak{L}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{L}\{\dot{x}_1\} \\ \vdots \\ \mathfrak{L}\{\dot{x}_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_{10} \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_{n0} \end{bmatrix} = sX(s) - x_0.$$

Da die Zustandsvariablen stetige Größen sind, ist $x_i(+0) = x_i(-0) = x_i(0)$, welche Werte wir abkürzend mit x_{i0} bezeichnen haben.

Die Laplace-Transformation von (11.86) liefert somit, da A, B konstante Matrizen sind:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s),$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + x_0, \quad \text{also}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x_0. \quad (11.87)$$

Es ist hierbei angenommen, daß die inverse Matrix zur Matrix $sI - A$ existiert. Das ist genau dann der Fall, wenn $\det(sI - A) \neq 0$ ist. Nun ist

$$\det(sI - A) = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Denkt man sich die Determinante ausgerechnet, so sieht man, daß sie ein Polynom darstellt, das mit der Potenz s^n beginnt. Daraus folgt, daß sie in einer hinreichend weit rechts gelegenen Halbebene $\neq 0$ ist. Dort existiert daher die Matrix $(sI - A)^{-1}$.

Aus der Ausgangsgleichung folgt durch Laplace-Transformation

$$Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

Setzt man (11.87) ein, so wird daraus

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0. \quad (11.88)$$

Wenn man in (11.87) $U(s) \equiv 0$ setzt, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0.$$

Andererseits gilt im Zeitbereich für $u(t) \equiv 0$ ((11.73) für $t_0 = 0$)

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Vergleich der beiden letzten Beziehungen liefert das Resultat

$$\mathfrak{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}. \quad (11.89)$$

Diese Korrespondenz ist völlig entsprechend dem skalaren Fall:

$$\mathfrak{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} = (s-a)^{-1} = (s \cdot 1 - a)^{-1}.$$

Auch hier zeigt sich wieder, daß man mit der Matrizenfunktion genauso wie mit der skalaren e-Funktion rechnen kann.

Setzt man den Anfangsvektor $x_0 = \mathbf{0}$, so wird im Zeitbereich nach (11.83)

$$y(t) = G(t) * u(t).$$

Nach dem Faltungssatz der Laplace-Transformation folgt hieraus

$$Y(s) = G(s) U(s), \quad \text{wobei} \quad (11.90)$$

$$\mathfrak{L}\{G(t)\} = G(s)$$

ist. Die Unterscheidung von Zeitfunktionen und Laplace-Transformierten durch Klein- und Großbuchstaben ist bei Matrizen, die nicht gerade Vektormatrizen sind, nicht möglich, da sie von vornherein mit großen Buchstaben bezeichnet werden. Um Verwechslungen zu vermeiden, dürfte es genügen, die unabhängige Variable hinzuschreiben.

Andererseits folgt aus (11.88) für $x_0 = \mathbf{0}$:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s).$$

Durch Vergleich dieser Beziehung mit (11.90) erhält man

$$\mathfrak{L}\{G(t)\} = G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D. \quad (11.91)$$

Das ist also die Laplace-Transformierte der Gewichtsmatrix. Für ein System mit einer einzigen Ein- und Ausgangsgröße geht letztere in die Gewichtsfunktion über, die Laplace-Transformierte in die Übertragungsfunktion. $G(s)$ ist somit die unmittelbare Erweiterung der Übertragungsfunktion auf Systeme mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen. Man bezeichnet sie deshalb als *Übertragungsmatrix*. Die Matrizengleichung $Y(s) = G(s) U(s)$ lautet ausgeschrieben

$$Y_k(s) = \sum_{v=1}^p G_{kv}(s) U_v(s).$$

Das Element $G_{kv}(s)$ der Übertragungsmatrix ist diejenige Übertragungsfunktion, welche die v -te Eingangsgröße mit der k -ten Ausgangsgröße verknüpft.

Bei einem System mit einer einzigen Ein- und Ausgangsgröße geht also die Übertragungsmatrix $G(s)$ in die Übertragungsfunktion $G(s)$ über. Aus (11.91) folgt so

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d. \quad (11.92)$$

Das ist eine sehr interessante Darstellung der klassischen Übertragungsfunktion durch die Zustandsmatrizen. Wir

werden sie in Abschnitt 11.7 zur Berechnung von Frequenzkennlinien benutzen.

Berechnet man die inverse Matrix $(sI - A)^{-1}$, so geschieht dies durch Auflösen der Gleichung

$$(sI - A) X = I$$

nach der unbekannten Matrix $X = (x_{ik})$ (Abschnitt 14.2). Das führt auf n Gleichungssysteme von jeweils n Gleichungen mit n Unbekannten. Die Determinante sämtlicher Gleichungssysteme ist $\det(sI - A)$. Nach der Leibniz-Cramerschen Regel ist daher

$$X_{ik} = \frac{P_{ik}(s)}{\det(sI - A)},$$

wobei $P_{ik}(s)$ ein Polynom in s ist, das hier nicht im einzelnen interessiert. Somit ist

$$(sI - A)^{-1} = X = \frac{(P_{ik})}{\det(sI - A)}$$

und damit nach (11.92)

$$G(s) = \frac{c^T (P_{ik}(s)) b}{\det(sI - A)} + d \quad \text{oder}$$

$$G(s) = \frac{c^T (P_{ik}(s)) b + d \det(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{Z(s)}{\det(sI - A)}. \quad (11.93)$$

Es wurde schon bemerkt, daß die Determinante ein Polynom n -ten Grades in s ist. Setzt man es gleich Null, so erhält man die *charakteristische Gleichung* der Matrix A . Ihre Nullstellen nennt man die *Eigenwerte* von A . Aus (11.93) ersieht man, daß ein Pol von $G(s)$ nur dann auftreten kann, wenn $\det(sI - A) = 0$ wird. Jeder Pol von $G(s)$ muß daher ein Eigenwert von A sein. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Denn es ist möglich, daß ein Eigenwert, also eine Nullstelle des Nenners $\det(sI - A)$, zugleich eine Nullstelle des Zählerpolynoms $Z(s)$ ist. Falls beide Nullstellen die gleiche Ordnung haben, heben sich die zugehörigen Faktoren im Zähler und Nenner von $G(s)$ heraus. Dann ist dieser Eigenwert von A kein Pol von $G(s)$. Dieser Fall kommt gerade bei Regelkreisen dauernd vor, nämlich stets dann, wenn man Pole der Strecke durch Nullstellen im Regler herauskürzt. Betrachten wir beispielsweise den offenen Regelkreis in Bild 11/12, oben. Hier wird die größte Streckenzeitzkonstante T_1 durch einen realen PD-Regler mit

$$G_K(s) = K_R \frac{1 + T_1 s}{1 + T_R s}, \quad T_R \ll T_1,$$

in ihrer Wirkung auf den Regelkreis beseitigt. Da Reglerzeitkonstante T_1 und Streckenzeitzkonstante T_1 in verschiedenen Teilen des realen Systems verwirklicht werden, sind jedoch beide als reale Gegebenheiten vorhanden. Nur das dynamische Verhalten der Reihenschaltung Regler-Strecke ist so, als ob T_1 nicht mehr vorhanden wäre.

Will man das System möglichst realistisch beschreiben, so kann man von Bild 11/12, oben, ausgehen und die Zustandsdifferentialgleichungen aufstellen. Dazu muß man die Übertragungsfunktion des PD-Reglers umformen:

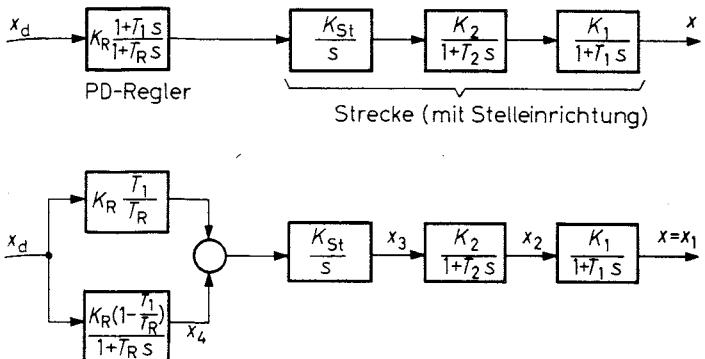


Bild 11/12. Einführung von Zustandsvariablen bei einem stabilisierten offenen Regelkreis

$$K_R \frac{1+T_1 s}{1+T_R s} = K_R \frac{T_1}{T_R} + \frac{K_R \left(1 - \frac{T_1}{T_R}\right)}{1+T_R s}.$$

Damit erhält man Bild 11/12, unten. Aus ihm liest man die folgende Zustandsdifferentialgleichung ab, wobei zu beachten ist, daß hier die Regeldifferenz x_d als Eingangsgröße auftritt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{K_1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{St} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{St} K_R \frac{T_1}{T_R} \\ \frac{K_R}{T_R} \left(1 - \frac{T_1}{T_R}\right) \end{bmatrix} x_d. \quad (11.94)$$

Die charakteristische Gleichung zur Matrix A ist daher

$$\det(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_1} & -\frac{K_1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{1}{T_2} & -\frac{K_2}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & s - K_{St} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s + \frac{1}{T_R} \end{bmatrix} = 0.$$

Entwickelt man sukzessive nach der 4., 3., 2. Zeile, so erhält man

$$\left(s + \frac{1}{T_R}\right) s \left(s + \frac{1}{T_2}\right) \left(s + \frac{1}{T_1}\right) = 0.$$

Die Systemmatrix A hat also die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{T_R}.$$

Demgegenüber folgt aus Bild 11/12, oben, für die Übertragungsfunktion des Systems

$$G(s) = \frac{K_R K_{St} K_1 K_2}{(1 + T_R s) s (1 + T_2 s)}, \quad (11.95)$$

wenn man wie stets bei Übertragungsfunktionen gleiche Zähler- und Nennerfaktoren wegbürtzt. $G(s)$ hat die Pole $-1/T_R$, 0 , $-1/T_2$. Der Eigenwert $-1/T_1$ ist hingegen kein Pol.

Es kann also sein, daß gewisse Eigenwerte der Systemmatrix in der Übertragungsfunktion nicht erscheinen. Beurteilt man das System allein nach seiner Übertragungsfunktion, so kann man sie gar nicht erkennen. In solchen Fällen gibt die Übertragungsfunktion nur eine vergrößerte Beschreibung der Systemstruktur. Sie liefert eben nur die Beziehung zwischen der Ein- und Ausgangsgröße des Systems. Feinere Einzelheiten der Innenstruktur werden von ihr unter Umständen nicht erfaßt. Man konstatierst eine Überlegenheit der Beschreibung durch Zustandsvariable, die sich enger an die realen Verhältnisse anzupassen vermag.

Allerdings ist in Fällen von der Art des eben betrachteten Beispiels der Unterschied praktisch meist ohne Belang. Er wird nur dann relevant, wenn der Pol der Strecke, den man herauskürzen möchte, auf oder rechts der imaginären Achse liegt ($T_1 \leq 0$). Dann allerdings liefert die Übertragungsfunktion (11.95) auch für praktische Zwecke keine brauchbare Beschreibung des Systems mehr, da die unvermeidbaren Abweichungen der Reglerzeitkonstante T_1 von der Streckenzeitzkonstante T_1 ein gänzlich anderes Systemverhalten bewirken, als es durch die Übertragungsfunktion (11.95) vorgetäuscht wird. Darauf wurde bereits in Abschnitt 4.2 eingegangen (Regel (4.12)).

Will man die Vektordifferentialgleichung (11.86) im konkreten Fall mit der Laplace-Transformation lösen, so wird man nicht die allgemeine Lösungsformel (11.87) benutzen, in der man erst die inverse Matrix $(sI - A)^{-1}$ zu ermitteln hätte. Sie ist für allgemeine Untersuchungen von der Art der eben durchgeföhrten Betrachtung nützlich. Im konkreten Fall wird man besser in der konventionellen Weise vorgehen:

1. Manwendet die Laplace-Transformation auf die einzelnen Zustandsdifferentialgleichungen an.
2. Man löst das entstehende gewöhnliche lineare Gleichungssystem nach den Unbekannten $X_i(s)$ auf.
3. Mit Partialbruchzerlegung und Faltungsregel geht man zu den Zeitfunktionen $x_i(t)$ über.

Hierzu noch ein Beispiel, und zwar möge das System in Bild 11/13 untersucht werden. Seine Zustandsdifferentialgleichungen lauten:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + u.$$

Die Laplace-Transformation liefert

$$sX_1(s) - x_{10} = X_2(s), \quad (11.96)$$

$$sX_2(s) - x_{20} = -X_2(s) + X_3(s), \quad (11.97)$$

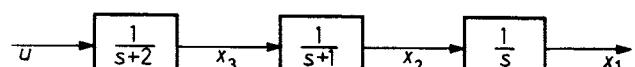


Bild 11/13. Strukturbild einer Reihenschaltung

$$sX_3(s) - x_{30} = -2X_3(s) + U(s). \quad (11.98)$$

Damit hat man ein System von drei gewöhnlichen linearen Gleichungen für die drei Unbekannten X_1, X_2, X_3 . Aus der letzten Gleichung folgt zunächst

$$X_3(s) = \frac{1}{s+2} U(s) + \frac{1}{s+2} x_{30}.$$

Damit folgt aus der vorhergehenden Gleichung (11.97)

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} U(s) + \frac{1}{(s+1)(s+2)} x_{30} + \frac{1}{s+1} x_{20}.$$

Für X_1 erhält man nun aus (11.96)

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} U(s) + \frac{1}{s(s+1)(s+2)} x_{30} + \\ &+ \frac{1}{s(s+1)} x_{20} + \frac{1}{s} x_{10}. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen liefert die Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} &\rightarrow \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}, \\ \frac{1}{s(s+1)} &\rightarrow 1 - e^{-t}, \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} &\rightarrow e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned}$$

Wendet man noch die Faltungsregel an, so ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t \left[\frac{1}{2} - e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{2} e^{-2(t-\tau)} \right] u(\tau) d\tau + \\ &+ x_{10} + x_{20}(1 - e^{-t}) + x_{30} \left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right), \\ x_2 &= \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] u(\tau) d\tau + \\ &+ x_{20} e^{-t} + x_{30} (e^{-t} - e^{-2t}), \\ x_3 &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau) d\tau + x_{30} e^{-2t}. \end{aligned}$$

Schreibt man diese drei Gleichungen als eine Vektorgleichung, so ist sie von dem allgemeinen Typ (11.72), wenn man dort $t_0 = 0$ setzt. Insbesondere erhält man so die Matrix e^{At} in geschlossener Form, indem man $u(t) \equiv 0$ setzt. Im vorliegenden Fall ist

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} & \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Will man nur die Matrix e^{At} ermitteln, so setzt man von vornherein $u(t) \equiv 0$ und nimmt die Laplace-Transformation des verbleibenden Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ vor.

Bei Verwendung eines Digitalrechners ist es aber, wie schon bemerkt, günstiger, unmittelbar im Zeitbereich zu rechnen, also die Funktion e^{At} durch das Anfangsstück ihrer Potenzreihe anzunähern.

11.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit linearer zeit-invariante Systeme

11.4.1 Steuerbarkeit

Das für die neuere Regelungstheorie grundlegende Begriffspaar *Steuerbarkeit* und *Beobachtbarkeit* wurde 1960 von R. E. Kalman eingeführt [11.6]. Wir wollen es für lineare und zeitinvariante Systeme näher untersuchen.¹⁾

Zunächst wenden wir uns der *Steuerbarkeit* zu und betrachten das dynamische System von dem beliebigen Zeitpunkt t_0 an. Während des Betrachtungszeitraums mögen keine Störgrößen auf das System einwirken, so daß die Eingangsgrößen u , sämtlich als Steuergrößen anzusehen sind, mit denen man das System gezielt beeinflussen kann. Das System soll sich nach Möglichkeit in einem gewünschten Betriebszustand x_B befinden. Durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems kann man $x_B = 0$ erreichen, was für das Folgende angenommen sei. Zum Anfangszeitpunkt t_0 der Untersuchung befindet sich das System jedoch in einem Anfangszustand x_0 , der irgendwo im Zustandsraum liegen kann und in den es etwa durch vorangegangene Störungen getrieben worden ist. Die Aufgabe besteht jetzt darin, durch geeignete Wahl von u den Zustandspunkt x des Systems von x_0 nach 0 zu bringen, und zwar in endlicher Zeit. Das ist genau das Steuerbarkeitsproblem – wie man sieht, eine sehr naheliegende Fragestellung, wenn man die gezielte Beeinflussung eines Systems im Zustandsraum betreibt. Halten wir zunächst die folgende Definition fest:

Das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad A, B, C, D \text{ konstant,} \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (11.99)$$

heiße *steuerbar*, wenn sein Zustandspunkt x durch geeignete Wahl des Steuervektors u in endlicher Zeit aus dem beliebigen Anfangszustand x_0 in den Endzustand 0 bewegt werden kann.

In der Literatur nennt man ein derartiges System *vollständig zustandssteuerbar*. Das ist bei allgemeineren Untersuchungen nötig. Man kann nämlich auch die Forderung stellen, den Ausgangsvektor y aus einem gegebenen Anfangsvektor in endlicher Zeit in einen gewünschten Endvektor zu überführen, und hat dann die *Ausgangssteuerbarkeit*²⁾ von der *Zustandssteuerbarkeit* zu unterscheiden. Bleibt man bei der Zustandssteuerbarkeit, so kann es sein, daß sich x nicht aus *jedem* Punkt x_0 des Zustandsraums in endlicher Zeit nach 0 bewegen läßt. Dann wäre das System nicht *vollständig zustandssteuerbar*. Da wir uns im folgenden ausschließlich mit der vollständigen Zustandssteuerbarkeit befassen, können wir sie für unsere Zwecke als *Steuerbarkeit* schlechthin

1) Die Erweiterung und Verfeinerung dieser Begriffe für zeitvariante Systeme findet man z. B. in [11.2] und [11.5].

2) Hierüber kann man in [11.2], Kapitel 7, nachlesen.

bezeichnen, wie das in der Definition (11.99) schon geschehen ist.

Es liegt auf der Hand, daß nicht jedes System steuerbar ist. Ein ganz einfaches Beispiel zeigt das:

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1,$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_2 u.$$

Wie immer man auch u wählen mag, es ist unmöglich, x_1 zu beeinflussen. Die Zustandsvariable

$$x_1(t) = x_1(t_0) e^{\lambda_1(t-t_0)}$$

strebt zwar gegen 0 für t gegen $+\infty$ (sofern λ_1 negativ ist), wird diesen Wert aber nicht in endlicher Zeit erreichen – außer in dem Ausnahmefall $x_1(t_0) = 0$, wo x_1 von vornherein Null ist.

Es erheben sich somit zwei Fragen:

- Wann ist ein System steuerbar?
- Wie ist die Steuerung (in endlicher Zeit) durchzuführen?

Die zweite Frage wird beim Entwurf auf endliche Einstellzeit in Kapitel 12 ausführlich behandelt. An dieser Stelle wird die erste Frage beantwortet, und zwar durch die Formulierung eines notwendigen und hinreichenden Steuerbarkeitskriteriums. Es soll für Systeme mit *einer* Eingangsgröße u hergeleitet werden und läßt sich anschließend analog für mehrere Eingangsgrößen formulieren.

Wir gehen also von der Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (11.100)$$

aus, nehmen das System als steuerbar an und sehen zu, was man daraus für A und b schließen kann. Die allgemeine Lösung der Zustandsdifferentialgleichung ist gemäß (11.72)

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)} x(t_0).$$

Ist das System steuerbar, so gibt es nach Definition zu einem beliebigen Anfangszustand $x(t_0)$ ein $t_e > t_0$ und eine Steuerfunktion $u(t)$ derart, daß

$$x(t_e) = \int_{t_0}^{t_e} e^{A(t_e-\tau)} bu(\tau) d\tau + e^{A(t_e-t_0)} x(t_0) = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit e^{-At_e} , so entsteht aus ihr

$$\int_{t_0}^{t_e} e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau = -e^{-At_e} x(t_0) \quad \text{oder kürzer}$$

$$\int_{t_0}^{t_e} e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau = v.$$

Da $x(t_0)$ beliebig, ist auch v ein beliebiger n -dimensionaler Ortsvektor im Zustandsraum. Nach Definition der e-Funktion folgt aus der letzten Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_e} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{A^v (-\tau)^v}{v!} bu(\tau) d\tau = v,$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} A^v b \int_{t_0}^{t_e} \frac{(-\tau)^v}{v!} u(\tau) d\tau = v.$$

Da es sich bei den Integralen um feste Zahlen c_v handelt, kann man kürzer schreiben:

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v A^v b = v. \quad (11.101)$$

Links steht eine Linearkombination der n -dimensionalen Spaltenvektoren b, Ab, A^2b, \dots . Höchstens n von ihnen können linear unabhängig sein. Es muß in der Tat n linear unabhängige geben: Da (11.101) für einen beliebigen n -dimensionalen Vektor v gilt, müssen die Vektoren b, Ab, \dots den gesamten n -dimensionalen Raum aufspannen, was nur möglich ist, wenn es unter ihnen n linear unabhängig gibt.

Das sind gerade die n ersten: $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$. Angenommen nämlich, dies sei nicht der Fall: Dann gibt es ein $r < n$ derart, daß $b, Ab, \dots, A^{r-1}b$ linear unabhängig, aber $A^r b$ von ihnen linear abhängig:

$$A^r b = k_0 b + k_1 Ab + \dots + k_{r-1} A^{r-1} b, \quad (11.102)$$

wobei nicht alle k_v Null sind. Durch Linksmultiplikation mit A folgt daraus

$$A^{r+1} b = k_0 Ab + \dots + k_{r-1} A^r b, \quad \text{also wegen (11.102)}$$

$$A^{r+1} b = k'_0 b + \dots + k'_{r-1} A^{r-1} b.$$

So fortlaufend kann man zeigen, daß sämtliche Vektoren $A^r b$ mit $v \geq r$ linear von $b, Ab, \dots, A^{r-1}b$ abhängen. Wegen $r < n$ heißt das aber: Es gibt keine n Vektoren $A^r b$, die linear unabhängig sind. Das ist ein Widerspruch. Mithin muß die Annahme falsch sein, daß die Vektoren $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ linear abhängig sind.

Es ist so gezeigt: Ist das System (11.100) steuerbar, so sind die Vektoren $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ linear unabhängig. Damit ist die Struktur der Steuerbarkeitsbedingung geklärt. Bleibt zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, daß also aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ die Steuerbarkeit folgt. Darauf können wir hier verzichten, da in Kapitel 12 eine Steuerfunktion für endliche Einstellzeit konstruiert und so der gefragte Beweis mitgeliefert wird.

Zusammenfassend hat man die *notwendige und hinreichende Steuerbarkeitsbedingung* (Kalman, 1960):

Das System $\dot{x} = Ax + bu$, A, b konstant, ist genau dann steuerbar, wenn die Vektoren $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ linear unabhängig sind. (11.103)

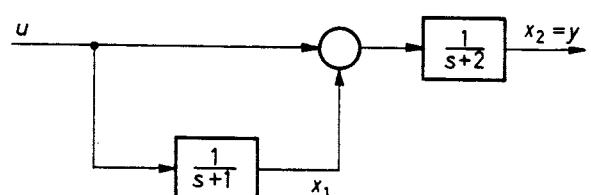


Bild 11/14. Beispiel eines nicht steuerbaren, wohl aber beobachtbaren Systems

Die (n, n) -Matrix

$$Q_s = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \quad (11.104)$$

wird auch als *Steuerbarkeits-Matrix* bezeichnet. Sie ist genau dann regulär, wenn das System steuerbar ist. Bild 11/14 zeigt ein einfaches Beispiel eines nicht steuerbaren Systems. Aus den komplexen Gleichungen

$$X_1 = \frac{1}{s+1} U, \quad X_2 = \frac{1}{s+2} (X_1 + U) \quad (11.105)$$

folgen die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u$. Daher ist

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Ab = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

so daß $b + Ab = 0$. Da somit die beiden Vektoren b, Ab linear abhängig sind, ist das System gemäß (11.103) nicht steuerbar.

Das ist in einem so einfachen Fall auch durch direkte Rechnung zu sehen. Aus der ersten Zustandsdifferentialgleichung folgt mit $t_0 = 0$:

$$x_1(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau + e^{-t} x_1(0). \quad (11.106)$$

Weiterhin erhält man aus (11.105)

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} \left(1 + \frac{1}{s+1} \right) U(s) = \frac{1}{s+1} U(s).$$

Daher gilt

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u, \quad \text{woraus}$$

$$x_2(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau + e^{-t} x_2(0) \quad (11.107)$$

folgt. Verlangt man nun

$$x_1(t_e) = 0, x_2(t_e) = 0,$$

so resultiert aus (11.106) und (11.107):

$$\int_0^{t_e} e^{-(t_e-\tau)} u(\tau) d\tau = -e^{-t_e} x_1(0),$$

$$\int_0^{t_e} e^{-(t_e-\tau)} u(\tau) d\tau = -e^{-t_e} x_2(0),$$

also wegen der Gleichheit der linken Seiten:

$$x_1(0) = x_2(0).$$

Eine Steuerung nach $\mathbf{0}$ in endlicher Zeit ist also nur für diejenigen Punkte $x(0)$ möglich, die auf der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten liegen, nicht für alle $x(0)$. Das System ist daher nicht steuerbar. Man kann den vorliegenden Sachverhalt auch so aus-

drücken: Steuert man die eine Zustandsvariable in endlicher Zeit nach Null, so ist dies für die andere ausgeschlossen.

Liegt ein System mit mehreren Eingangsgrößen vor, so ist die Steuerbarkeitsbedingung entsprechend zu (11.103) (Herleitung z. B. in [11.1], [11.2], [11.5]):

Das System $\dot{x} = Ax + Bu$ ist genau dann steuerbar, wenn die (n, np) -Matrix $[B, Ab, \dots, A^{n-1}B]$ den Rang n , also n linear unabhängige Spaltenvektoren hat. (11.108)

11.4.2 Beobachtbarkeit

Das Beobachtungsproblem entspringt unmittelbar aus dem Steuerungsproblem. Es liegt auf der Hand, daß eine Steuerfunktion $u(t)$, die das System in endlicher Zeit von dem Anfangszustand x_0 in den Endzustand $\mathbf{0}$ überführt, von $x_0 = x(t_0)$ abhängt. Um sie im realen System erzeugen zu können, muß man daher $x(t_0)$ kennen. Nun sind aber im allgemeinen nicht sämtliche Zustandsvariable meßbar. Man denke beispielsweise an die Jordansche Normalform bzw. Diagonalf orm der Zustandsgleichungen, die kaum jemals in einem realen System verwirklicht sein wird. Hier sind die Zustandsvariablen fiktive mathematische Größen, zum Zwecke besserer Berechenbarkeit eingeführt. Aber auch dann, wenn den Zustandsvariablen physikalische Realität zukommt, kann ihre Messung zu schwierig oder zu aufwendig sein. Hingegen wird man die Ausgangsgrößen $y_k(t)$, z. B. die Regelgröße, als relativ leicht meßbar voraussetzen dürfen. Es erhebt sich somit die Frage: Kann man aus der Messung der $y_k(t)$, natürlich über einen endlichen Zeitraum, den Anfangszustand $x(t_0)$ ermitteln? Ist das der Fall, so heißt das System *beobachtbar*; genauer:

Das System

$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A, B, C, D$ konstant,
 $y = Cx + Du$, heiße *beobachtbar*, wenn man bei bekanntem $u(t)$ aus der Messung von $y(t)$ über eine endliche Zeitspanne den Anfangszustand $x(t_0)$ eindeutig ermitteln kann, ganz gleich, wo dieser liegt. (11.109)

Eigentlich müßte es, ähnlich wie bei der Steuerbarkeitsdefinition, auch hier *vollständig beobachtbar* heißen, um zu betonen, daß ein *beliebiger* Anfangszustand als eindeutig erkennbar gefordert wird. Doch können wir auf die Kennzeichnung *vollständig* verzichten, da von uns kein anderer Beobachtbarkeitsbegriff verwandt wird. Wie beim Steuerbarkeitsproblem stellen sich auch hier zwei Fragen: Wann ist ein System beobachtbar? Und wie? Sie sollen für ein System mit einer Ausgangsgröße beantwortet werden. Die Übertragung auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen liegt dann nahe. Gemäß (11.83) gilt für ein System mit einer Ausgangsgröße wegen $C = c^T$:

$$y(t) = G(t) * u(t) + c^T e^{At} x(0).$$

Dabei ist $t_0 = 0$ angenommen, was für zeitinvariante Systeme keine Einschränkung der Allgemeinheit be-

deutet. $u(t)$ ist eine bekannte Funktion. Wird $y(t)$ gemessen, so darf man die Differenz

$$z(t) = y(t) - G(t) * u(t)$$

als bekannt ansehen.¹⁾ Durch Differentiation nach t folgt dann aus

$$c^T e^{At} x(0) = z(t);$$

$$c^T A e^{At} x(0) = z'(t),$$

$$\vdots$$

$$c^T A^{n-1} e^{At} x(0) = z^{(n-1)}(t).$$

Für $t \rightarrow +0$ wird hieraus

$$c^T x(0) = z(+0),$$

$$c^T A x(0) = z'(+0),$$

$$\vdots$$

$$c^T A^{n-1} x(0) = z^{(n-1)}(+0).$$

Darin sind $c^T, c^T A, \dots, c^T A^{n-1}$ bekannte n -dimensionale Zeilenvektoren. Die linken Seiten der Gleichungen sind also von der Form

$$k_1 x_1(0) + k_2 x_2(0) + \dots + k_n x_n(0)$$

mit bekannten Zahlen k_v . (11.110) ist somit ein System von n linearen Gleichungen für die n gesuchten Komponenten von $x(0)$. Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Zeilenvektoren $c^T, c^T A, \dots, c^T A^{n-1}$ linear unabhängig sind. Man erhält so als *notwendige und hinreichende Beobachtbarkeitsbedingung* (Kalman, 1960):

Das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad A, B, c^T, d^T \text{ konstant}, \\ y &= c^T x + d^T u, \\ \text{ist genau dann beobachtbar, wenn die} & \quad (11.111) \\ \text{Zeilenvektoren} & \\ c^T, c^T A, \dots, c^T A^{n-1} & \\ \text{linear unabhängig sind.} & \end{aligned}$$

Die (n, n) -Matrix

$$Q_B = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11.112)$$

heißt *Beobachtbarkeitsmatrix* und ist genau dann regulär, wenn das System beobachtbar ist.

Das Wie der Beobachtung ist im Prinzip auch geklärt: Man bestimmt $z(t)$ aus $y(t)$ und $u(t)$, differenziert $(n-1)$ -mal, bildet die Grenzwerte der Ableitungen für $t \rightarrow +0$ und löst das so gebildete Gleichungssystem (11.110) nach den Komponenten von $x(0)$ auf. Praktisch ist das Verfahren in dieser Form nicht durchführbar, da durch

1) Vielfach nimmt man deshalb bereits bei der Beobachtbarkeitsdefinition $u = 0$ an, betrachtet also von vornherein nur die homogene Zustandsdifferentialgleichung.

die $(n-1)$ -malige Differentiation die in der Meßgröße $y(t)$ enthaltene Störwelligkeit so vergrößert wird, daß sich mit den Ableitungen nichts mehr anfangen läßt. Wir brauchen uns aber nicht um eine realistische Modifikation dieses Beobachtungsverfahrens zu bemühen, da wir in Kapitel 12 eine praktikable Methode kennenlernen werden, die zwar nicht den Anfangswert $x(0)$, wohl aber eine gute Schätzung des Momentanwerts $x(t)$ liefert, was für die Regelung im Zustandsraum günstiger ist.

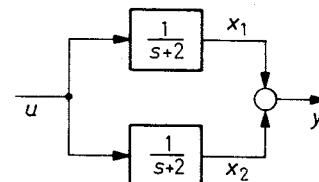


Bild 11/15. Beispiel eines nicht beobachtbaren Systems

Ein einfaches Beispiel eines nicht beobachtbaren Systems findet man in Bild 11/15. Es kann sich bei den beiden Blöcken um zwei verschiedene Gerätebausteine handeln, die zwar gleiches Übertragungsverhalten haben, aber dennoch verschiedene Anfangswerte haben können. Aus den Zustandsgleichungen

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u,$$

$$y = x_1 + x_2 \text{ folgt}$$

$$c^T = [1, 1]$$

$$c^T A = [1, 1] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = [-2, -2], \text{ so daß}$$

$$2c^T + c^T A = \mathbf{0}$$

gilt. Das System ist nach (11.111) nicht beobachtbar. Das ist auch direkt zu sehen:

$$y = x_1 + x_2 = 2 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau) d\tau + e^{-2t} [x_1(0) + x_2(0)].$$

Da $y(t)$ nur von der *Summe* der beiden Anfangswerte abhängt, ist es ausgeschlossen, die Anfangswerte einzeln durch Messung von $y(t)$ zu erhalten.

Für ein System mit mehreren Ausgangsgrößen gilt in Analogie zu (11.111):

Das System

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A, B, C, D \text{ konstant},$$

ist genau dann beobachtbar, wenn die (nq, n) -Matrix

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11.113)$$

n linear unabhängige Zeilenvektoren enthält.

11.5 Transformation auf Normalform

Die verschiedenen Zustandsdarstellungen eines linearen und zeitinvarianten Systems lassen sich durch eine lineare Transformation vom Typ

$$z = Tx$$

ineinander überführen, wobei an Stelle des Zustandsvektors x der neue Zustandsvektor z eingeführt wird. Dabei ist $T = (t_{ik})$ eine konstante (n, n) -Matrix, die regulär ist, d. h. deren Inverse T^{-1} existiert. Diese Forderung ist notwendig, um mit $x = T^{-1}z$ aus z den ursprünglichen Vektor x eindeutig zurückzuerhalten. Das Symbol T für die Transformationsmatrix ist in der Literatur vielfach üblich und soll deshalb auch hier benutzt werden. Verwechslungen mit einer Zeitkonstante T sind wohl kaum zu befürchten. Manchmal schreibt man eine derartige Transformation auch in der Form

$$x = Vz, \quad V \text{ regulär.}$$

Davon werden wir bei der Transformation auf Jordansche Normalform Gebrauch machen.

Bei der Überführung verschiedener Zustandsdarstellungen ineinander sind im Hinblick auf die Anwendung vor allem drei Fragen interessant: Wie hat man die Transformation zu wählen, damit man von der beliebigen Zustandsbeschreibung

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du$$

(11.114)

zu der

- Jordanschen Normalform,
- Regelungsnormalform,
- Beobachtungsnormalform

gelangt. Diese Fragen sollen in den nächsten drei Abschnitten beantwortet werden.

11.5.1 Transformation auf Jordansche Normalform

Die Jordansche Normalform der Zustandsgleichungen (Abschnitt 11.2.3) ist für viele, vor allem theoretische, Untersuchungen am angenehmsten, weil die Rechnungen mit ihr besonders übersichtlich verlaufen. Es ist deshalb wichtig, eine Transformation zu finden, welche die allgemeine Darstellung (11.114) in die Jordansche Normalform verwandelt.

Hierzu setzen wir die Transformation

$$x = Vz \quad \text{mit}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (11.115)$$

an. Wegen $\dot{x} = V\dot{z}$ wird dann aus der Zustandsdifferentialgleichung (11.114)

$$\dot{z} = V^{-1}AVz + V^{-1}Bu. \quad (11.116)$$

V soll nun so gewählt werden, daß

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \cdot \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{oder}$$

$$AV = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \cdot \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{wird. Hierin ist}$$

(11.117)

$$A(v_1, \dots, v_n) = (Av_1, \dots, Av_n)$$

und weiterhin

$$V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \cdot \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \dots & \lambda_n v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{n2} & \dots & \lambda_n v_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n).$$

Damit wird aus (11.117)

$$(Av_1, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n).$$

Durch Vergleich folgt

$$Av_k = \lambda_k v_k \quad \text{oder} \quad (11.118)$$

$$(\lambda_k I - A)v_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.119)$$

Für jedes k ist dies ein System von n homogenen Gleichungen für die Unbekannten v_{ik} , $i = 1, \dots, n$. Zusammen bilden diese den Spaltenvektor v_k der gesuchten Transformationsmatrix V . Da sie regulär sein muß, darf v_k keinesfalls der Nullvektor sein. Es sind daher nur Lösungen $\neq 0$ der Gleichung (11.119) von Interesse. Sie existieren genau dann, wenn

$$\det(\lambda_k I - A) = 0 \quad (11.120)$$

ist. Diese Beziehung heißt *charakteristische Gleichung* der Matrix A . Ihre Nullstellen sind die *Eigenwerte* λ_k von A . Für die λ_k ist (11.120) erfüllt. Zu jedem Eigenwert λ_k gehört somit ein vom Nullvektor verschiedener Lösungsvektor v_k . Man bezeichnet ihn als einen *Eigenvektor* von A .

Bestimmt man zu jedem k einen derartigen Vektor v_k aus (11.119), so bilden sie zusammen eine Transformationsmatrix

$$V = (v_1, \dots, v_n).$$

Sie ist genau dann regulär, wenn ihre Spaltenvektoren v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind. Man kann zeigen, daß dies sicher der Fall ist, wenn die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ einfach sind, also einfache Nullstellen der charakteristischen Gleichung darstellen [11.4]. Treten mehrfache Eigenwerte auf, so gibt es im allgemeinen kein System von n linear unabhängigen Eigenvektoren von A . Die Transformation auf die Jordansche Normalform wird

dann komplizierter. Hierfür sei auf [11.1] bis [11.5], besonders [11.4], verwiesen.

Setzen wir einfache Eigenwerte voraus, was wir von nun an tun wollen, so liefert die aus den Eigenvektoren v_1, \dots, v_n aufgebaute Matrix V die gewünschte Transformation.

Die transformierten Zustandsgleichungen lauten jetzt nach (11.116)

$$\dot{z} = \Lambda z + \hat{B}u \text{ mit } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \cdot \\ & & \ddots & & \cdot \\ & & & \ddots & \cdot \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (11.121)$$

$$\hat{B} = V^{-1} B,$$

$$y = \hat{C}z + Du \text{ mit } \hat{C} = CV. \quad (11.122)$$

Ausgeschrieben hat man:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sum_{v=1}^p \hat{b}_{iv} u_v, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.123)$$

$$y_k = \sum_{v=1}^n \hat{c}_{kv} z_v + \sum_{v=1}^p d_{kv} u_v, \quad k = 1, \dots, q. \quad (11.124)$$

- Die allgemeinen Betrachtungen seien noch an einem Beispiel ausgeführt, und zwar an der Struktur von Bild 11/13. Man kann sich vorstellen, daß den einzelnen Blöcken der Reihenschaltung reale Geräte entsprechen und daß man die Ausgangsgröße und die Zwischengrößen x_1, x_2, x_3 messen kann. Zur Beeinflussung des Systems mit einem Prozeßrechner möchte man aber im Rechner auf die Jordansche Normalform übergehen.

Die Zustandsgleichungen in den Variablen x_1, x_2, x_3 lauten

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, 0, 0] x.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix A ergeben sich aus der Gleichung

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{zu}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2.$$

Die Eigenvektoren

$$v_k = \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ v_{3k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

werden gemäß (11.119) aus den Gleichungssystemen

$$\lambda_k v_{1k} - v_{2k} = 0,$$

$$(\lambda_k + 1) v_{2k} - v_{3k} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$(\lambda_k + 2) v_{3k} = 0$$

ermittelt. Man erhält für

$$\lambda_1 = 0: v_{11} = 0, v_{21} = 0, v_{31} = 0;$$

$$\lambda_2 = -1: v_{32} = 0, v_{22} = -v_{12};$$

$$\lambda_3 = -2: v_{33} = -v_{23}, v_{23} = -2v_{13}.$$

Da es sich um ein homogenes Gleichungssystem handelt, sind die Unbekannten nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, den man beliebig $\neq 0$ wählen kann. Setzt man etwa

$$v_{11} = 1, \quad v_{12} = 1, \quad v_{13} = 1, \quad \text{so erhält man}$$

$$V = (v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die inverse Matrix berechnet sich daraus zu

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Für die transformierten Zustandsmatrizen ergibt sich so

$$\hat{B} = V^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CV = [1 \ 1 \ 1].$$

Die Zustandsgleichungen in Jordanscher Normalform lauten daher

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \ 1 \ 1] z \quad \text{oder}$$

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2} u,$$

$$\dot{z}_2 = -z_2 - u,$$

$$\dot{z}_3 = -2z_3 + \frac{1}{2} u,$$

$$y = z_1 + z_2 + z_3.$$

Aus der Jordanschen Normalform der Zustandsgleichungen kann man einige interessante Folgerungen für die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit ziehen. Wir wollen sie hier für Systeme mit je einer Ein- und Ausgangsgröße herleiten. Aus (11.123) und (11.124) folgt für ein derartiges System

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \hat{b}_i u, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.125)$$

$$y = \sum_{v=1}^n \hat{c}_v z_v + du. \quad (11.126)$$

Aus (11.125) erkennt man sofort: Ist ein $\hat{b}_i = 0$, so ist die Zustandsvariable z_i durch u nicht beeinflußbar. Es liegt auf der Hand, daß dann auch $x = Vz$ nicht in der gewünschten Weise gesteuert werden kann. Das System ist also nicht steuerbar.

Daß auch die Umkehrung gilt, das System also steuerbar

ist, wenn alle $\hat{b}_i \neq 0$ sind, läßt sich ohne Schwierigkeit mit dem Kalmanschen Steuerbarkeitskriterium zeigen. Dazu bildet man die Determinante der Steuerbarkeitsmatrix \hat{Q}_s für die Zustandsdifferentialgleichung (11.121) und hat nachzuweisen, daß sie $\neq 0$ ist. Zunächst ist

$$\det \hat{Q}_s = |\hat{b}_1, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_1| \quad \text{Wegen}$$

$$\hat{A}^v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^v = \begin{bmatrix} \lambda_1^v & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^v \end{bmatrix} \quad \text{ist}$$

$$\hat{A}^v \hat{b} = \begin{bmatrix} \lambda_1^v \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \lambda_n^v \hat{b}_n \end{bmatrix}. \quad \text{Damit wird}$$

$$\det \hat{Q}_s = \begin{vmatrix} \hat{b}_1 & \lambda_1 \hat{b}_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \hat{b}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_n & \lambda_n \hat{b}_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \hat{b}_n \end{vmatrix} \quad \text{oder}$$

$$\det \hat{Q}_s = \hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Die verbleibende Determinante ist eine Van-der-Monde-Determinante (Abschnitt 14.2). Da alle λ_i voneinander verschieden sind, ist sie $\neq 0$. Somit ist $\det \hat{Q}_s$ genau dann $\neq 0$, wenn alle $\hat{b}_i \neq 0$ sind. Genau dann ist das System also steuerbar. Damit hat man das Resultat (E. G. Gilbert, 1963, allgemeiner für Mehrfachsysteme):

Hat das System mit der Zustandsdifferentialgleichung $\dot{x} = Ax + bu$ einfache Eigenwerte, so ist es genau dann steuerbar, wenn kein Element des Spaltenvektors $\hat{b} = V^{-1}b$ verschwindet. Dabei ist V die Matrix der Eigenvektoren von A .

Weiterhin sieht man sofort aus (11.126), daß die Zustandsvariable z_v nicht auf die Ausgangsgröße y einwirken kann, wenn $\hat{c}_v = 0$ ist. Durch Messungen an y kann man dann über z_v nichts erfahren, das System kann deshalb nicht beobachtbar sein. Entsprechend wie bei der Steuerbarkeit gelangt man zu dem Satz (E. G. Gilbert, 1963):

Hat das System $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x + du$ einfache Eigenwerte, so ist es genau dann beobachtbar, wenn kein Element des Zeilenvektors $c^T = c^T V$ verschwindet.

Aus den beiden Bedingungen (11.127) und (11.128) läßt sich ein Zusammenhang zwischen der Steuerbarkeit-Beobachtbarkeit und der Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems (11.125), (11.126) herleiten. Durch Laplace-Transformation folgt aus den Gleichungen (11.125) und (11.126) bei verschwindenden Anfangswerten

$$Z_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} \hat{b}_i U(s),$$

$$Y(s) = \sum_{v=1}^n \hat{c}_v Z_v(s) + d U(s) \quad \text{und damit}$$

$$Y(s) = \left[\sum_{v=1}^n \frac{\hat{b}_v \hat{c}_v}{s - \lambda_v} + d \right] U(s).$$

Da zugleich $Y(s) = G(s) U(s)$ gilt, muß

$$G(s) = \sum_{v=1}^n \frac{\hat{b}_v \hat{c}_v}{s - \lambda_v} + d \quad \text{sein.} \quad (11.129)$$

Ist nun das System nicht steuerbar oder nicht beobachtbar oder beides nicht, so ist mindestens ein \hat{b}_i oder \hat{c}_i gleich Null. Dann fällt in (11.129) mindestens ein Partialbruch weg, weil sein Zähler Null ist. Daraus folgt, daß der zugehörige Eigenwert kein Pol von $G(s)$ ist.

Wenn man die Partialbrüche zusammenfaßt, um $G(s)$ als Quotient zweier Polynome darzustellen, wird man natürlich die Partialbrüche mit dem Zähler 0 unberücksichtigt lassen. Das hat zur Folge, daß der Nenner der Übertragungsfunktion einen Grad hat, der kleiner als die Zahl der Zustandsdifferentialgleichungen ist. Denn letztere ist gleich der Gesamtzahl der Partialbrüche. Man hat so das Resultat:

Ein System mit nur einer Ein- und Ausgangsgröße und einfachen Eigenwerten ist genau dann steuer- und beobachtbar, wenn alle Eigenwerte Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ sind. Anders ausgedrückt: Wenn die Übertragungsfunktion $G(s)$, in der keine gemeinsamen Zähler- und Nennerfaktoren auftreten dürfen, einen Nennergrad aufweist, der gleich der Zahl der Zustandsdifferentialgleichungen ist. (11.130)

Ist letzteres nicht der Fall, so weiß man also, daß das System nicht zugleich steuer- und beobachtbar sein kann. Es ist aber durchaus möglich, daß es wenigstens eine dieser beiden Eigenschaften aufweist.

11.5.2 Transformation auf Regelungsnormalform

Die Regelungsnormalform ist dadurch ausgezeichnet, daß sich aus ihrer Zustandsdifferentialgleichung die charakteristische Gleichung ohne weitere Rechnung ablesen läßt.

Aus (11.32) folgt für die Regelungsnormalform, wenn wir $a_n = 1$ und $b_n = 0$ setzen, was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet:

$$\dot{z} = A_R z + b_R u \quad \text{mit} \quad (11.131)$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 \\ -a_0 - a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.132)$$

Die charakteristische Gleichung lautet daher

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & -1 & \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & s+a_{n-1} & \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Entwicklung nach der letzten Zeile entsteht

$$a_0(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ s & -1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & \end{vmatrix} + a_1(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & \end{vmatrix} + \\ + a_2(-1)^{n+3} \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & 0 & & \vdots \\ \vdots & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & -1 & \end{vmatrix} + \dots + (s+a_{n-1}) \begin{vmatrix} s & -1 & \dots & 0 \\ 0 & s & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & s \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die erste dieser Determinanten sukzessive nach der ersten Zeile, die weiteren Determinanten sukzessive nach der ersten Spalte, so wird

$$a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + a_1(-1)^{n+2}s(-1)^{n-2} + \\ + a_2(-1)^{n+3}s^2(-1)^{n-3} + \dots + (s+a_{n-1})s^{n-1} = 0$$

oder wegen $(-1)^{2n} = 1$:

$$a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n = 0.$$

Wir stellen fest:

In der Regelungsnormalform besteht die letzte Zeile der Systemmatrix aus den negativen Koeffizienten der charakteristischen Gleichung (abgesehen von dem Koeffizienten der höchsten Potenz). (11.133)

Wir gehen nun von der Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (11.134)$$

aus, wobei A eine konstante (n, n) -Matrix und b ein konstanter $(n, 1)$ -Vektor ist. Das System sei steuerbar, sonst aber beliebig. Die Zustandsdifferentialgleichung soll durch eine geeignete Transformation

$$z = Tx \quad (11.135)$$

auf die Regelungsnormalform (11.131), (11.132) gebracht werden.¹⁾

Setzt man $x = T^{-1}z$ in die Zustandsdifferentialgleichung (11.134) ein, so entsteht

$$T^{-1}\dot{z} = AT^{-1}z + bu.$$

Multipliziert man von links mit T , so wird daraus

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + Tbu.$$

Der Vergleich mit der gewünschten Zustandsdifferentialgleichung (11.131) liefert die Beziehungen

$$TAT^{-1} = A_R \quad \text{bzw.}$$

$$TA = A_R T \quad \text{und} \quad (11.136)$$

$$Tb = b_R. \quad (11.137)$$

Hieraus hat man die gesuchte Transformation T zu berechnen.

Um dieses Ziel in möglichst einfacher Weise zu erreichen, schreiben wir T in der Form

$$T = \begin{bmatrix} t_1^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{bmatrix}, \quad \text{wobei}$$

$$t_i^T = [t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}], \quad i=1, \dots, n,$$

die Zeilenvektoren von T sind. Es ist dann

$$TA = \begin{bmatrix} t_1^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} t_1^T A \\ \vdots \\ t_n^T A \end{bmatrix}. \quad (11.138)$$

1) Über entsprechende Transformationen bei *mehreren* Eingangsgrößen kann man in [11.3] oder [11.5] nachlesen.

Weiterhin ist nach (11.132)

$$A_R T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_0 - a_1 - \dots - a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} = \quad (11.139)$$

$$= \begin{bmatrix} t_{21} & t_{22} & & \\ t_{31} & t_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \\ -a_0 t_{11} - a_1 t_{21} - \dots - a_{n-1} t_{n1} & -a_0 t_{12} - a_1 t_{22} - \dots - a_{n-1} t_{n2} & \dots & -a_0 t_{1n} - \dots - a_{n-1} t_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2^T \\ t_3^T \\ \vdots \\ t_n^T \\ -a_0 t_1^T - a_1 t_2^T - \dots - a_{n-1} t_n^T \end{bmatrix}.$$

Denkt man sich nun (11.138) und (11.139) in die Bestimmungsgleichung $T A = A_R T$ eingesetzt und vergleicht die entsprechenden Zeilen auf beiden Seiten, so hat man zunächst die Gleichungen

$$\begin{aligned} t_1^T A &= t_2^T, \\ t_2^T A &= t_3^T, \\ &\vdots \\ t_{n-1}^T A &= t_n^T \end{aligned} \quad (11.140)$$

sowie als letzte Gleichung

$$t_n^T A = -a_0 t_1^T - a_1 t_2^T - \dots - a_{n-1} t_n^T. \quad (11.141)$$

Damit hat man (11.136) ausgewertet. Es bleibt (11.137). Diese Gleichung lautet komponentenweise:

$$\begin{aligned} t_1^T b &= 0, \\ &\vdots \\ t_{n-1}^T b &= 0, \\ t_n^T b &= 1. \end{aligned} \quad (11.142)$$

Aus (11.140) und (11.142) kann man jetzt T zeilenweise bestimmen. Aus (11.140) folgt sukzessive

$$\begin{aligned} t_2^T &= t_1^T A, \\ t_3^T &= t_2^T A = t_1^T A \cdot A = t_1^T A^2, \\ &\vdots \\ t_n^T &= t_{n-1}^T A = t_1^T A^{n-1}. \end{aligned} \quad (11.143)$$

Damit hat man das Zwischenergebnis

$$T = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_1^T A \\ \vdots \\ t_1^T A^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (11.144)$$

Es bleibt t_1^T zu berechnen. Dazu setzt man (11.143) in (11.142) ein:

$$\begin{aligned} t_1^T b &= 0, \\ t_1^T A b &= 0, \\ &\vdots \\ t_1^T A^{n-1} b &= 1. \end{aligned} \quad (11.145)$$

Das ist ein lineares inhomogenes System von n Gleichungen für die n gesuchten Komponenten $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}$ von t_1^T . Die Systemdeterminante ist

$$|b, Ab, \dots, A^{n-1}b|.$$

Weil das System $\dot{x} = Ax + bu$ als steuerbar vorausgesetzt wurde, sind die Spaltenvektoren der Determinante gemäß (11.103) linear unabhängig, die Determinante somit $\neq 0$. Das Gleichungssystem (11.145) ist daher eindeutig nach den Komponenten von t_1^T auflösbar. Setzt man sie in (11.144) ein, so hat man die Transformationsmatrix T gefunden.

Sie hängt eng mit der Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_S = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$$

zusammen. Deren Inverse Q_S^{-1} ist durch die Gleichung

$$Q_S^{-1} Q_S = I$$

definiert, wo I die n -reihige Einheitsmatrix ist. Speziell für die letzte Zeile q_S^T von Q_S^{-1} folgt aus dieser Gleichung $q_S^T Q_S =$ letzte Zeile von $I = [0, \dots, 0, 1]$.

Ausführlich geschrieben, heißt das:

$$\begin{aligned} q_S^T b &= 0, \\ q_S^T Ab &= 0, \\ &\vdots \\ q_S^T A^{n-1}b &= 1. \end{aligned}$$

Das ist aber gerade das Gleichungssystem (11.145). So mit ist

$$t_1^T = q_S^T = \text{letzte Zeile von } Q_S^{-1}.$$

Bleibt zu zeigen, daß T regulär ist. Dazu prüft man, ob die Zeilenvektoren in (11.144) linear unabhängig sind, und setzt zu diesem Zweck die Gleichung

$$c_1 \mathbf{t}_1^T + c_2 \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} + \cdots + c_n \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{0}^T \quad (11.146)$$

an. Multipliziert man von rechts mit \mathbf{b} , so entsteht die skalare Gleichung

$$c_1 \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} + c_2 \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \mathbf{b} + \cdots + c_n \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} = 0.$$

Wegen (11.145) folgt daraus $c_n = 0$. Die so verbleibende Gleichung (11.146) multipliziert man nun von rechts mit $\mathbf{A} \mathbf{b}$, was zu $c_{n-1} = 0$ führt. So fortlaufend, sieht man, daß alle $c_v = 0$ sind. Daher sind die Zeilenvektoren von \mathbf{T} linear unabhängig, so daß \mathbf{T} eine reguläre Matrix darstellt.

Vielleicht wird es dem Leser aufgefallen sein, daß bei der Berechnung von \mathbf{T} die Gleichung (11.141) nicht benötigt wurde. Das ist auch gut so, da die Koeffizienten a_v von vornherein nicht bekannt sind. Da es sich, wie stets bei der Regelungsnormalform, um die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung handelt, kann man sie zwar aus \mathbf{A} berechnen, indem man die zu \mathbf{A} gehörende charakteristische Gleichung aufstellt, doch ist das bei Systemen höherer Ordnung recht mühsam. Über \mathbf{T} kann man sie jetzt aber auch in anderer Weise erhalten, nämlich aus der bisher noch nicht benötigten Gleichung (11.141). Durch Transposition folgt aus ihr

$$a_0 \mathbf{t}_1 + a_1 \mathbf{t}_2 + \cdots + a_{n-1} \mathbf{t}_n = -\mathbf{A}^T \mathbf{t}_n. \quad (11.147)$$

Da die \mathbf{t}_v bekannt sind, ist dies ein System von n Gleichungen für die n gesuchten Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n . Es ist eindeutig lösbar, da seine Systemdeterminante gleich $\det \mathbf{T}$ und damit $\neq 0$ ist. Wir wollen die Lösung dieser Gleichung hier nicht weiter verfolgen, da ein gleichwertiges Problem bei der Beobachtungsnormalform ausführlich behandelt wird.

In einem abschließenden Satz seien die Ergebnisse zusammengefaßt:

Das steuerbare System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \mathbf{A}, \mathbf{b} \text{ konstant,}$$

kann durch $\mathbf{z} = \mathbf{T} \mathbf{x}$ auf die Regelungsnormalform

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_R \mathbf{z} + \mathbf{b}_R u \text{ mit}$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -a_0 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gebracht werden, wenn man

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_S^T \\ \mathbf{q}_S^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_S^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

wählt. Dabei ist \mathbf{q}_S^T die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S^{-1} , läßt sich also aus den Gleichungen

$$\mathbf{q}_S^T \mathbf{b} = 0,$$

$$\mathbf{q}_S^T \mathbf{A} \mathbf{b} = 0,$$

⋮

$$\mathbf{q}_S^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} = 1$$

bestimmen.

$$\text{Für } \mathbf{q}_S^T \text{ gilt die Gleichung} \quad (11.148)$$

$$-a_0 \mathbf{q}_S^T - a_1 \mathbf{q}_S^T \mathbf{A} - \cdots - a_{n-1} \mathbf{q}_S^T \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{q}_S^T \mathbf{A}^n.$$

Die letzte Gleichung folgt aus (11.141), wenn man dort (11.143) einsetzt und berücksichtigt, daß $\mathbf{t}_1^T = \mathbf{q}_S^T$ ist.

Wie einfach der so gefundene Rechengang zur Ermittlung der Transformationsmatrix \mathbf{T} ist, sei noch an einem Zahlenbeispiel illustriert. Wir nehmen etwa das System in Bild 11/13, das durch die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + u$$

beschrieben wird, also die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

aufweist. Daher ist

$$\mathbf{A} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nach (11.148) lautet das Gleichungssystem zur Ermittlung von \mathbf{q}_S :

$$q_3 = 0,$$

$$q_2 - 2q_3 = 0,$$

$$q_1 - 3q_2 + 4q_3 = 1,$$

woraus

$$\mathbf{q}_S^T = [q_1, q_2, q_3] = [1, 0, 0]$$

folgt. Damit wird

$$\mathbf{q}_S^T \mathbf{A} = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = [0, 1, 0],$$

$$\mathbf{q}_S^T \mathbf{A}^2 = \mathbf{q}_S^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = [0, -1, 1].$$

Wiederum nach (11.148) ist daher

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zweifellos kann man bei einem so einfachen System wie dem hier vorliegenden die Regelungsnormalform leichter durch Bilden der charakteristischen Gleichung erhalten, als durch die Transformation \mathbf{T} . Es gibt aber Aufgaben, bei denen das Problem nicht in der Herstellung der Regelungsnormalform besteht, vielmehr gerade die

Transformationsmatrix T gefragt ist. Besonders ist dies bei der Synthese einer Regelung durch das Verfahren der Polvorgabe (*pole assignment*) der Fall (Kapitel 12).

11.5.3 Transformation auf Beobachtungsnormalform

Da hier entsprechende Beziehungen gelten wie bei der Transformation auf Regelungsnormalform, können wir uns kürzer fassen. Nach (11.34) und (11.35) sind die Zustandsgleichungen in Beobachtungsnormalform

$$\dot{x} = A_B x + b_B u, \quad (11.149)$$

$$y = c_B^T x \quad (11.150)$$

mit

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (11.151)$$

$$c_B^T = [0, \dots, 0, 1]. \quad (11.152)$$

Da $\det[sI - A_B]$ offensichtlich durch Spiegelung an der Hauptdiagonale in $\det[sI - A_R]$ übergeht, folgt sofort:

In der Beobachtungsnormalform besteht die letzte Spalte der Systemmatrix aus den negativen Koeffizienten der charakteristischen Gleichung (abgesehen von dem Koeffizienten der höchsten Potenz). (11.153)

Sei nun das beobachtbare, aber sonst beliebige System

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (11.154)$$

$$y = c^T x \quad (11.155)$$

gegeben. Es soll durch die Transformation

$$z = Tx$$

auf die Beobachtungsnormalform gebracht werden. Hier wird die Berechnung der Transformation besonders einfach, wenn man von der Umkehrung

$$x = T^{-1} z = Sz \quad (11.156)$$

ausgeht, wobei also

$$T^{-1} = S$$

gesetzt ist. Mit (11.156) wird aus den Zustandsgleichungen des Systems

$$\dot{z} = S^{-1} ASz + S^{-1} bu,$$

$$y = c^T Sz.$$

Sollen sie mit der Beobachtungsnormalform übereinstimmen, so muß

$$S^{-1} AS = A_B \quad \text{bzw.}$$

$$AS = SA_B \quad \text{und} \quad (11.157)$$

$$c^T S = c_B^T = [0, \dots, 0, 1] \quad (11.158)$$

gelten.

Stellt man nunmehr die Matrix S durch ihre Spaltenvektoren dar,

$$S = [s_1, s_2, \dots, s_n],$$

so folgt entsprechend wie im vorigen Abschnitt:

$$\begin{aligned} s_2 &= As_1 \\ s_3 &= As_2 = A^2 s_1 \\ &\vdots \\ s_n &= As_{n-1} = A^{n-1} s_1 \quad \text{und} \end{aligned} \quad (11.159)$$

$$\begin{aligned} c^T s_1 &= 0, \\ c^T As_1 &= 0, \\ &\vdots \\ c^T A^{n-1} s_1 &= 1, \quad \text{wozu noch die Gleichung} \end{aligned} \quad (11.160)$$

$$As_n = a_0 s_1 - a_1 s_2 - \dots - a_{n-1} s_n \quad (11.161)$$

tritt, die aber zur Berechnung von S nicht benötigt wird.

Die Gleichungssysteme (11.159) und (11.160) kann man entsprechend wie im vorigen Abschnitt auswerten und erhält so ein zu (11.148) analoges Resultat:

Das beobachtbare System

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^T x$$

kann durch die Transformation $z = Tx$ auf die Beobachtungsnormalform (11.149) bis (11.152) gebracht werden. Dabei ist

$$S = T^{-1} = [q_B, Aq_B, \dots, A^{n-1} q_B], \quad (11.162)$$

wobei q_B die letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix Q_B^{-1} ist. Man erhält sie aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} c^T q_B &= 0, \\ &\vdots \\ c^T A^{n-2} q_B &= 0, \\ c^T A^{n-1} q_B &= 1. \end{aligned} \quad (11.162a)$$

Bei der Transformation auf Beobachtungsnormalform ist es wichtig, die Elemente von A_B und b_B durch numerisch leicht durchführbare Rechnungen, also möglichst ohne Matrizeninversion und ohne Lösung von Gleichungssystemen zu erhalten. Das ist in der Tat möglich, sofern q_B einmal berechnet ist. Was zunächst den Vektor b_B betrifft, so gilt für ihn

$$b_B = Tb \quad \text{oder}$$

$$T^{-1} b_B = b.$$

Daraus folgt

$$[\mathbf{q}_B, A\mathbf{q}_B, \dots, A^{n-1}\mathbf{q}_B] \begin{bmatrix} b_{B1} \\ \vdots \\ b_{Bn} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{oder wegen (14.54)}$$

$$\mathbf{q}_B b_{B1} + \dots + A^{n-2} \mathbf{q}_B b_{B,n-1} + A^{n-1} \mathbf{q}_B b_{Bn} = \mathbf{b}. \quad (11.163)$$

Multipliziert man (11.163) von links mit c^T , so folgt daraus wegen (11.162a)

$$b_{Bn} = c^T \mathbf{b}.$$

Multiplikation von (11.163) mit $c^T A$ liefert dann weiter

$$b_{B,n-1} + c^T A^n \mathbf{q}_B b_{Bn} = c^T A \mathbf{b} \quad \text{oder}$$

$$b_{B,n-1} = c^T A \mathbf{b} - c^T A^n \mathbf{q}_B b_{Bn}.$$

So fortlaufend, erhält man allgemein die Rekursionsformel

$$b_{Bi} = c^T A^{n-i} \mathbf{b} - c^T A^n \mathbf{q}_B b_{B,i+1} - \dots - c^T A^{2n-i-1} \mathbf{q}_B b_{Bn}, \\ i = n-1, n-2, \dots, 1, \quad \text{mit } b_{Bn} = c^T \mathbf{b}. \quad (11.164)$$

Analog läßt sich aus (11.161) eine Rekursionsformel für die a_v gewinnen, nachdem man in diese Gleichung

$$s_1 = \mathbf{q}_B, s_2 = A\mathbf{q}_B, \dots, s_n = A^{n-1}\mathbf{q}_B = A^{n-1}\mathbf{q}_B$$

eingesetzt hat:

$$a_0 \mathbf{q}_B + a_1 A \mathbf{q}_B + \dots + a_{n-1} A^{n-1} \mathbf{q}_B = -A^n \mathbf{q}_B.$$

Daraus folgt die Rekursionsformel:

$$a_{n-i} = -c^T A^{n+i-1} \mathbf{q}_B - a_{n-1} c^T A^{n+i-2} \mathbf{q}_B - \dots - a_{n-i+1} c^T A^n \mathbf{q}_B,$$

$$i = 2, \dots, n, \quad \text{mit } a_{n-1} = -c^T A^n \mathbf{q}_B. \quad (11.165)$$

11.6 Digitale Berechnung der Transitionsmatrix

Bei der Analyse und Synthese linearer zeitinvarianter Regelkreise spielt die Transitionsmatrix im Zeitbereich eine ähnlich wichtige Rolle wie der Frequenzgang im Bildbereich; es ist daher sehr wichtig, einfache Algorithmen zur Verfügung zu haben, mit denen man die Transitionsmatrix aus der Systemmatrix bestimmen kann. Grundsätzlich lassen sich drei Möglichkeiten angeben (Bild 11/16):

- Analytische Methoden, also beispielsweise die formelmäßige Lösung der homogenen Vektordifferentialgleichung im Zeit- oder Bildbereich, oder die Anwendung analytischer Darstellungen der Transitionsmatrix unter Verwendung der Eigenwerte des Systems [11.7] bis [11.10].
- Experimentelle Methoden, bei denen man die Zeitantworten eines auf einem (hybriden) Analogrechner realisierten Streckenmodells oder der echten Regelstrecke auf zweckmäßig gewählte Anfangsbedingungen aufzeichnet.
- Numerische Verfahren, bei denen man die homogene Systemdifferentialgleichung numerisch integriert oder die Reihendarstellung für $\Phi(t-t_0) = \exp[A(t-t_0)]$ zahlenmäßig auswertet [11.11] [11.12].

Man kann im allgemeinen davon ausgehen, daß eine analytische Berechnung der Transitionsmatrix für Systeme einer höheren als der dritten Ordnung für die Praxis zu mühevoll ist. Da reale Systeme meist eine erheblich höhere Ordnung haben, wird man die Transitionsmatrix

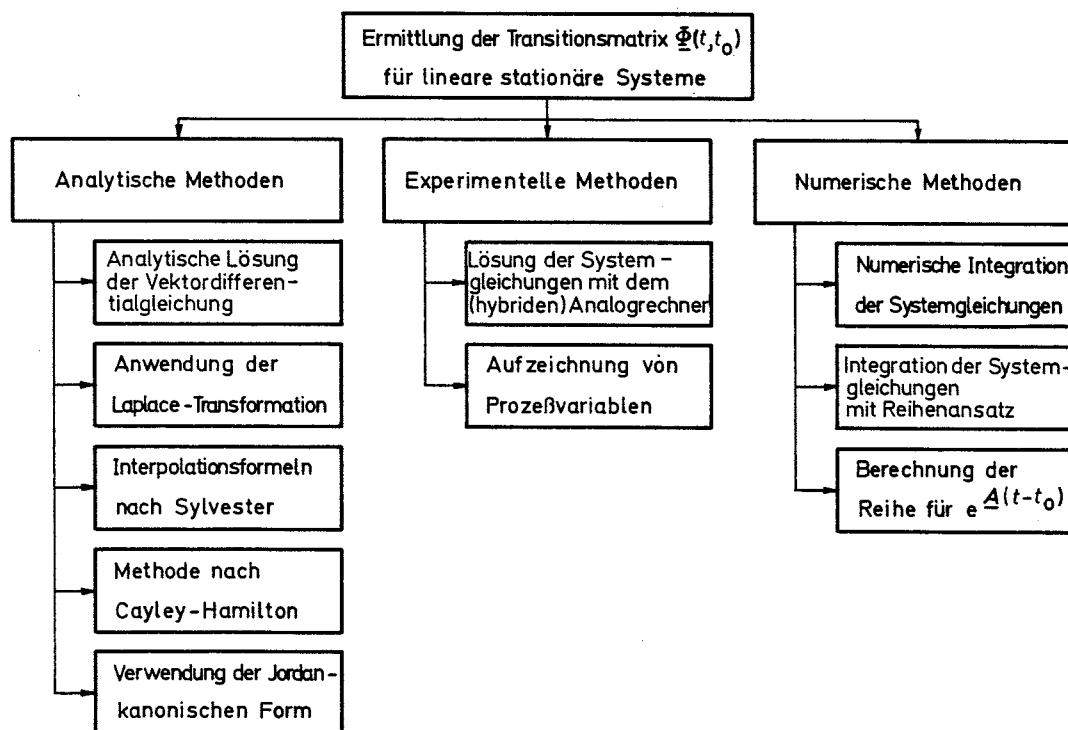


Bild 11/16. Verfahren zur Berechnung der Transitionsmatrix linearer Systeme

daher meist experimentell oder numerisch bestimmen. Im folgenden wollen wir zwei einfache Algorithmen zur numerischen Berechnung der Transitionsmatrix angeben.

11.6.1 Direkte Auswertung der Reihendarstellung

Nach den Gleichungen (11.65) und (11.74) kann man die Transitionsmatrix $\Phi(t - t_0)$ durch die unendliche Reihe

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t - t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A(t - t_0)]^k}{k!} \quad (11.166)$$

darstellen. Mit den Abkürzungen

$$\tau = t - t_0 \quad \text{und}$$

$X = A\tau$ wird daher:

$$\Phi(\tau) = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^k}{k!} + \cdots \quad (11.167)$$

In Abschnitt 11.3 wurde gezeigt, daß diese Reihe für jedes endliche $\tau > 0$ absolut und gleichmäßig konvergiert; die Summation kann daher abgebrochen werden, sobald jedes Element des Zuwachses eine Schranke ε betragsmäßig unterschreitet.

Man berechnet die Reihendarstellung für Φ rekursiv; zunächst ermittelt man die Summanden aus:

$$T_1 = I,$$

$$T_2 = I \frac{X}{1} = T_1 \frac{X}{1}, \quad (11.168)$$

$$T_3 = I \frac{X}{1} \frac{X}{2} = T_2 \frac{X}{2},$$

$$\vdots \\ T_k = T_{k-1} \frac{X}{k-1}, \\ \vdots$$

Gleichzeitig bildet man die Teilsummen:

$$\Phi_1 = I = T_1,$$

$$\Phi_2 = I + \frac{X}{1!} = \Phi_1 + T_2,$$

$$\Phi_3 = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} = \Phi_2 + T_3, \quad (11.169)$$

$$\vdots \\ \Phi_k = \Phi_{k-1} + T_k, \\ \vdots$$

Während der Berechnung der Summanden T_k überprüft man, ob jedes Element von T_k betragsmäßig die Schranke ε unterschreitet und bricht die Rechnung ab, sobald dies der Fall ist. Um bei schlechter Konvergenz die Rechenzeit zu begrenzen, schränkt man die Zahl der berücksichtigten Reihenglieder auf eine vorgegebene Zahl k_{\max} und veranlaßt bei Überschreiten von k_{\max} das Ausdrucken einer entsprechenden Fehlermeldung, die das Nichterreichen der geforderten Genauigkeit anzeigen. Bild 11/17 zeigt ein Ablaufdiagramm für diesen einfachen rekursiven Algorithmus.

11.6.2 Berechnung der Transitionsmatrix nach Plant

Die direkte Auswertung der Reihendarstellung nach (11.166) führt bei schlechter Konvergenz zur Mitnahme sehr vieler Terme der Reihe, was sich in großen Rechenzeiten und – durch Aufsummieren der Rundungsfehler – schließlich in einer numerischen Instabilität des Verfahrens äußert. Schlechte Konvergenz der Reihe ist immer dann zu erwarten, wenn die Norm der Matrix X , also

$$|X| = |A\tau| = \sum_i \sum_j |a_{ij}| \tau$$

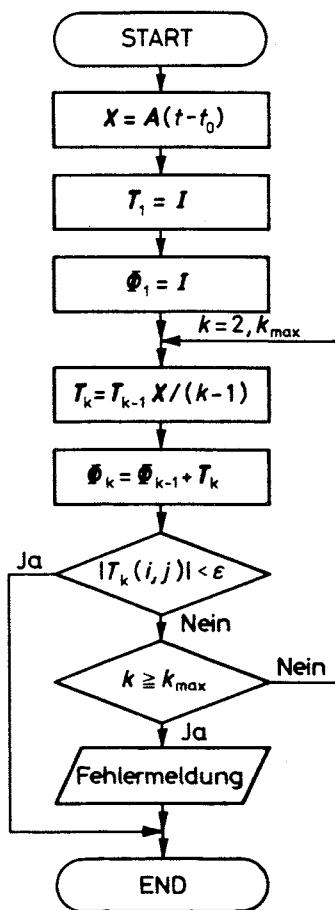
große Werte annimmt; dies ist der Fall für große Zeitintervalle τ , große Eigenwerte und (oder) eine große Dimension der Matrix. Die numerische Instabilität des Verfahrens lässt sich zwar auf Kosten der Rechenzeit durch eine Rechnung mit doppelter Genauigkeit zu größeren Werten von $|X|$ verschieben, aber nicht ganz beseitigen. Gerade die in der Praxis wichtigen Systeme hoher Ordnung lassen sich daher mit diesem Verfahren nicht behandeln.

Für diese Fälle wurde von Plant [11.13] ein elegantes Verfahren angegeben; dieses stimmt für $|X| < 1$ mit dem direkten Verfahren überein. Man setzt zunächst

$$N = \frac{A\tau}{|A\tau|}, \quad (11.170)$$

wobei N wieder eine n, n -Matrix ist; außerdem ist $|N|=1$. Für die Transitionsmatrix können wir dann schreiben:

$$\Phi(\tau) = e^{N|X|}.$$



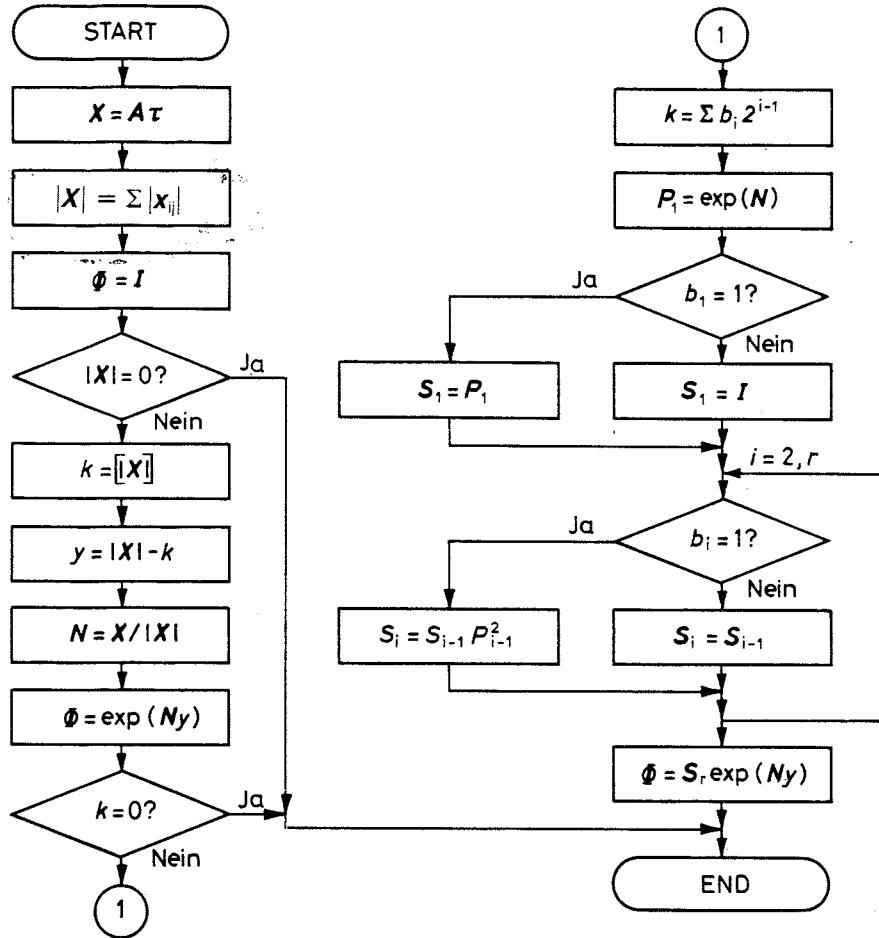


Bild 11/18. Ablaufdiagramm zum Verfahren von Plant [11.13]

Die Norm $|X|$ ist eine skalare Zahl größer als Null, die man in ihren ganzen und ihren gebrochenen Teil zerlegen kann:

$$|X| = k + y;$$

hierbei ist k eine nichtnegative ganze Zahl und y eine Zahl zwischen 0 und 1. Mit dieser Zerlegung erhalten wir für die Transitionsmatrix

$$\Phi(\tau) = \exp[N(k+y)] = \exp(Nk) \cdot \exp(Ny). \quad (11.171)$$

Wegen $|N|=1$ und $0 \leq y < 1$ kann man den Term $\exp(Ny)$ mit dem in Teil 11.6.1 beschriebenen direkten Verfahren bei guter Konvergenz berechnen. Den verbleibenden Faktor $\exp(Nk)$ ermittelt man wie folgt: Zunächst schreibt man die ganze Zahl k als Binärzahl, also

$$k = \sum_{i=1}^r b_i 2^{i-1} = b_1 2^0 + b_2 2^1 + \cdots + b_r 2^{r-1},$$

wobei die b_i nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Mit dieser Darstellung für k erhält man

$$\begin{aligned} \exp(Nk) &= \exp\left[N \sum_{i=1}^r b_i 2^{i-1}\right] = \\ &= \exp[N(b_1 2^0 + b_2 2^1 + \cdots + b_r 2^{r-1})]. \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der Klammer führt zu

$$\begin{aligned} \exp(Nk) &= \exp(Nb_1 2^0) \exp(Nb_2 2^1) \cdots \exp(Nb_r 2^{r-1}) = \\ &= \prod_{i=1}^r \exp(N 2^{i-1} b_i). \end{aligned} \quad (11.172)$$

Mit der Abkürzung

$$P_i = \exp(N 2^{i-1}) \quad (11.173)$$

erhält man die rekursive Beziehung

$$P_i = \exp(N 2^{i-2} 2) = P_{i-1}^2 \quad (11.174)$$

für $i = 2, 3, \dots, r$; das Startelement ist

$$P_1 = \exp(N).$$

Wegen $|N|=1$ kann man P_i mit der Reihendarstellung bei guter Konvergenz berechnen.

Unter Verwendung der P_i können wir für (11.172)

$$\exp(Nk) = \prod_{i=1}^r P_i^{b_i}$$

schreiben. Dieses Produkt berechnen wir ebenfalls rekursiv; hierzu bilden wir die Produkte

$$S_1 = P_1^{b_1} = \begin{cases} I & \text{für } b_1 = 0 \\ P_1 & \text{für } b_1 = 1 \end{cases}$$

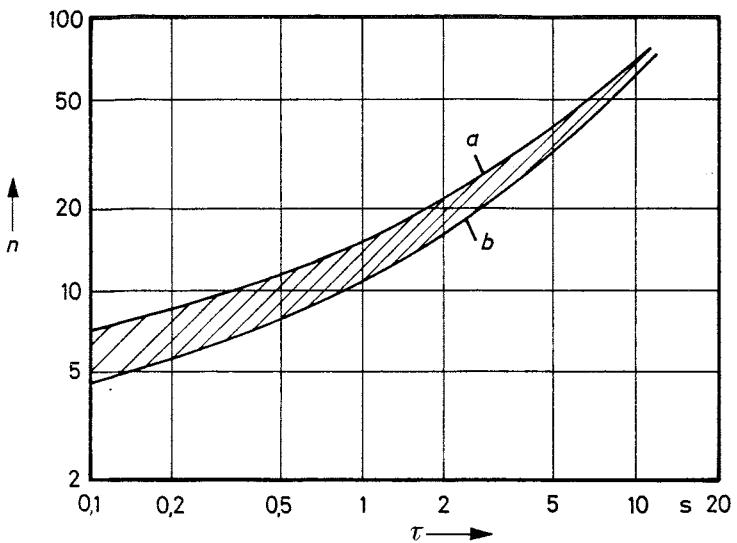


Bild 11/19. Zahl der Polynomterme als Funktion des Intervalls

a $\epsilon = 10^{-3}$

b $\epsilon = 10^{-6}$

$$S_2 = P_1^{b_1} P_2^{b_2} = S_1 P_2^{b_2} = S_1 \cdot \begin{cases} I & \text{für } b_2 = 0 \\ P_1^2 & \text{für } b_2 = 1 \end{cases},$$

$$\vdots$$

$$S_r = S_{r-1} \cdot \begin{cases} I & \text{für } b_r = 0 \\ P_{r-1}^2 & \text{für } b_r = 1 \end{cases}.$$

Zuletzt multiplizieren wir die Matrix $S_r = \exp(Nk)$ mit dem zuvor berechneten Faktor $\exp(Ny)$ und erhalten damit nach (11.171) die Transitionsmatrix. Das zugehörige Ablaufdiagramm ist im Bild 11/18 zu finden.

An einem einfachen System dritter Ordnung, das durch die Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

beschrieben wird, wollen wir die Eigenschaften der beiden oben abgeleiteten Algorithmen vergleichen. Bild 11/19 zeigt zunächst das schnelle Ansteigen der Zahl der mitzunehmenden Polynomterme der Reihendarstellung bei anwachsendem Zeitintervall τ und zwei verschiedenen Fehlerschranken ϵ . Bei $\tau = 10$ müssen beispielsweise 60 (bei $\epsilon = 10^{-3}$) bzw. 66 (bei $\epsilon = 10^{-6}$) Summanden berücksichtigt werden; die Auswertung bei viel größeren

Zeitdifferenzen ist wegen der überhandnehmenden Rundungsfehler nicht mehr möglich. Bild 11/20 zeigt die Zunahme der Rechenzeiten¹⁾ T_R (in Millisekunden) als Funktion der Zeitdifferenz τ für beide Algorithmen, jeweils für $\epsilon = 10^{-3}$ und $\epsilon = 10^{-6}$. Für kleine Zeitintervalle stimmen beide Verfahren überein und liefern daher auch vergleichbare Rechenzeiten. Bereits bei $\tau \approx 1$ s bringt aber das Verfahren von Plant kleinere Rechenzeiten als die direkte Auswertung der Reihendarstellung. Außerdem ist der Anstieg erheblich langsamer, und das Verfahren ist auch für große Zeitdifferenzen noch brauchbar. Weitergehende Untersuchungen haben gezeigt, daß das Verfahren von Plant auch bei Systemen sehr hoher Ordnung seine günstigen Eigenschaften behält.

11.7 Digitale Berechnung von Frequenzkennlinien

Mit dem Frequenzkennlinien-Verfahren steht dem Regelungstechniker eine leistungsfähige Methode zur Analyse und zum Entwurf von Regelsystemen zur Verfügung. Hauptvorteile dieses Verfahrens sind seine leichte Erlernbarkeit, die Möglichkeit, wichtige Systemeigenschaften auf einen Blick zu erfassen, und das einfache Auffinden von Näherungen, mit denen man relativ komplizierte dynamische Systeme durch einfachere genügend genau nachbilden kann. Für die klassischen Eingrößen-Regelkreise können die Frequenzkennlinien leicht unter Verwendung graphischer Methoden konstruiert werden (Kapitel 7), wobei einfache Hilfsmittel wie das Phasenlineal (Bild 5/6) wertvolle Hilfe leisten können. Versucht man aber, diese Papier-und-Bleistift-Methode auf Mehrgrößen-Regelsysteme mit inneren Rückführungen und Verkopplungen anzuwenden, dann stößt man sehr bald an eine Grenze, bei der die Arbeit zu mühevoll und/oder die Ergebnisse zu ungenau werden. Hier kann nun der Digitalrechner dem entwickelnden Ingenieur die Arbeit des Konstruierens der Kennlinien und der Dokumentation der Eingabedaten und der Ergebnisse weitgehend abnehmen und ihn für die eigentliche Entwurfsaufgabe freistellen [11.14].

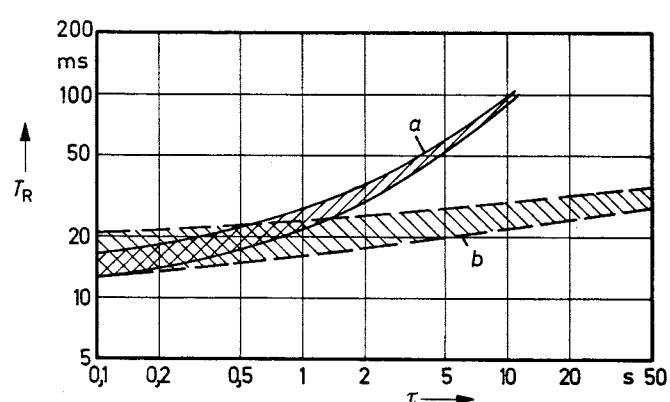


Bild 11/20. Rechenzeiten als Funktion der Intervalllänge

a Auswertung der Reihe für e^{-At}
b Verfahren nach Plant

1) Ohne Übersetzungszeiten, einfache Genauigkeit, (Rechner TELEFUNKEN TR 440).

Eine Vorbedingung für ein einfaches Arbeiten mit dem Digitalrechner ist das Vorliegen einer Form der Systembeschreibung, die einerseits für den Ingenieur leicht verständlich ist und die man aus den beim Entwurf von Regelkreisen üblicherweise vorliegenden Unterlagen über Systemstruktur und -parameter leicht entnehmen kann, die andererseits aber auch auf die Eigenschaften des Digitalrechners zugeschnitten ist. Die klassische Eingangs-Ausgangs-Beschreibung dynamischer Systeme durch Übertragungsfunktionen erfüllt diese Bedingung zumindest bei komplizierteren Systemen nur sehr unvollkommen. Demgegenüber weist die Systembeschreibung durch Zustandsvariable geradezu ideale Voraussetzungen bezüglich der eben gestellten Forderungen auf:

- Die Darstellung durch ein System von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung ist dem Regelungstechniker vom Analogrechner her seit langem vertraut.
- Da bei der Entwicklung eines Regelsystems in den meisten Fällen das dynamische Verhalten der geregelten Strecke an Hand einer Analogrechner-Simulation überprüft werden muß, liegt häufig mit dem Analogrechner-Koppelplan die Zustandsform der Systembeschreibung ohnehin vor. Auch bei einer digitalen Simulation müssen die Systemgleichungen in ein System von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden, will man die üblichen numerischen Integrationsalgorithmen verwenden.
- Die Matrzenschreibweise der Zustandsraum-Darstellung kommt der rekursiven Organisationsstruktur eines Digitalrechners entgegen. Unterprogramme für die häufigsten Matrizenoperationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Inversion gehören zur Standardsoftware jedes wissenschaftlichen Rechners oder lassen sich einfach schreiben. Auf diese Weise können große Datensätze mit wenigen Programmbefehlern eingelesen, verarbeitet und ausgegeben werden.
- Da alle Zustandsvariablen des Systems frei zugänglich sind, kann durch eine einfache Umdeklaration der Ausgangsgröße der Frequenzgang zwischen der Eingangsgröße und einer beliebigen Systemvariablen berechnet werden.
- Strukturänderungen können auf einfache Weise vorgenommen werden; man kann besonders die Frequenzgänge des offenen und des geschlossenen Kreises mit nur geringfügigen Änderungen der Systemdaten berechnen.

Die genannten Eigenschaften der Systembeschreibung im Zustandsraum lassen es günstig erscheinen, diese Form der Darstellung einem EDV-Programm zur digitalen Berechnung von Frequenzkennlinien zugrunde zu legen. Ein solches Programm sollte die folgenden Eigenschaften aufweisen:

- einfache Handhabung durch Beschränkung der erforderlichen Eingabedaten auf wenige Parameter zur Steuerung des Programmablaufs sowie die Systemparameter,
- übersichtliche Dokumentation der Eingabedaten,
- automatische Berechnung von Zwischenwerten in kritischen Frequenzbereichen,
- Drucker-Ausgabe des Frequenzgangs getrennt nach Real- und Imaginärteil, Betrag, Betrag in dB und Phase,
- automatische Aufzeichnung der Frequenzkennlinien mittels Digitalplotter,
- hinreichende Genauigkeit und – nicht zuletzt – vertretbar kurze Rechenzeiten.

Um den Verwendungsbereich des EDV-Programms zur Berechnung der Frequenzkennlinien auch auf Systeme mit Totzeit auszudehnen, wollen wir die zu Beginn dieses Kapitels abgeleitete Zustandsform der Systemdarstellung noch um einige Terme erweitern. Dieses wollen wir zunächst an Hand eines einfachen Systems vorführen, bevor wir die allgemeinste Darstellungsform totzeitbehafeter Systeme einführen. Gegeben sei die in Bild 11/21 dargestellte Struktur einer Eingrößen-Regelstrecke dritter Ordnung, die aus zwei Verzögerungsgliedern erster Ordnung, einem Integrierer und drei Totzeitgliedern mit voneinander abweichenden Verzögerungszeiten besteht. Zunächst lesen wir aus der Struktur die Systemgleichungen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2 + 2x_2(t-0,5), \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 10x_3(t-0,1), \\ \dot{x}_3 &= -0,5x_3 + u, \\ y &= x_1 + 4u + 5u(t-0,3).\end{aligned}$$

Neben den direkten Kopplungen zwischen der Eingangsgröße u , den Zustandsgrößen x_i und der Ausgangsgröße y treten in diesen Gleichungen also auch verzögerte Kopplungen zwischen den Variablen auf. Wenden wir die

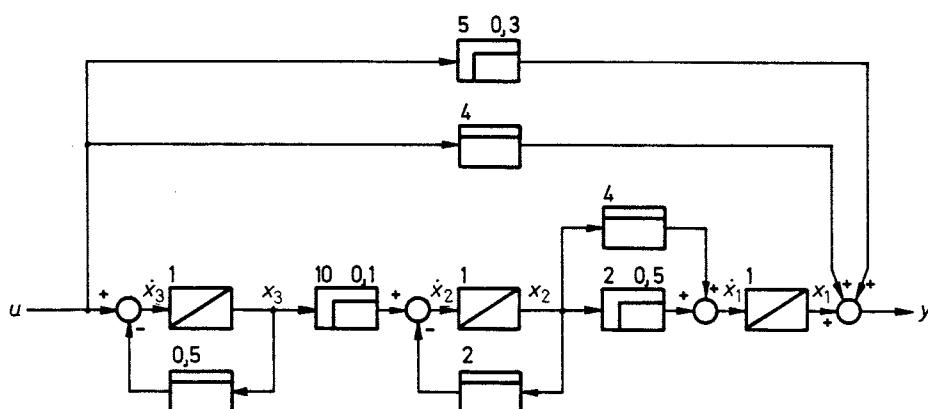


Bild 11/21. Struktur der Regelstrecke dritter Ordnung

Laplace-Transformation auf diese Gleichungen an, dann erhalten wir mit der Korrespondenz

$$f(t-T) \xrightarrow{\text{Laplace}} e^{-Ts} f(s) \quad (11.175)$$

unter Vernachlässigung der Anfangsbedingungen die Systemgleichungen im Bildbereich zu

$$sx_1 = 4x_2 + 2e^{-0.5s}x_2,$$

$$sx_2 = -2x_2 + 10e^{-0.1s}x_3,$$

$$sx_3 = -0.5x_3 + u \quad \text{und}$$

$$y = x_1 + 4u + 5e^{-0.3s}u,$$

die wir in Matrizenschreibweise wie folgt darstellen können:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \\ sx_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 2e^{-0.5s} & 0 \\ 0 & 0 & 10e^{-0.1s} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 4u + 5e^{-0.3s}u. \end{aligned}$$

Vergleichen wir diese Darstellung mit der zu Beginn des Kapitels 11 abgeleiteten Standardform der Systemgleichungen, dann erkennen wir das zusätzliche Auftreten von Termen, die von der komplexen Variablen s abhängen und die von den Systemtotzeiten hervorgerufen werden. Verallgemeinert man diese Gleichungen, indem man annimmt, daß neben den direkten Verkopplungen der Variablen jeweils auch verzögerte auftreten, dann erhält man die allgemeine Form

$$sx = Ax + A_D(s)x + Bu + B_D(s)u, \quad (11.176)$$

$$y = Cx + C_D(s)x + Du + D_D(s)u, \quad (11.177)$$

in der die durch die Totzeit hinzutretenden Systemmatrizen durch den Index D (für Delay) gekennzeichnet

sind¹⁾. Bild 11/22 zeigt die Struktur dieses Systems. Jedes Element dieser Matrizen ist durch zwei Kenngrößen spezifiziert, nämlich den Verstärkungsfaktor des Totzeitgliedes und den Wert der Totzeit. Für A_D lesen wir für unser Eingrößensystem beispielsweise ab:

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 2e^{-0.5s} & 0 \\ 0 & 0 & 10e^{-0.1s} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen B_D und C_D sind hier nicht besetzt, und für D_D erhalten wir die skalare Größe

$$d_D = 5e^{-0.3s}.$$

Zur Verkürzung der Schreibweise definieren wir jetzt die komplexen Systemmatrizen

$$\begin{aligned} A^*(s) &= A + A_D(s), \\ B^*(s) &= B + B_D(s), \\ C^*(s) &= C + C_D(s), \\ D^*(s) &= D + D_D(s), \end{aligned} \quad (11.178)$$

und können damit für (11.176) und (11.177) schreiben:

$$sx = A^*(s)x + B^*(s)u \quad (11.179)$$

$$y = C^*(s)x + D^*(s)u. \quad (11.180)$$

Diesen Gleichungen entspricht die Struktur des Bildes 11/23. Fassen wir in (11.179) die Ausdrücke mit x zusammen und isolieren x auf der linken Seite, dann erhalten wir den Zustandsvektor zu

$$x = [sI - A^*(s)]^{-1} B^*(s)u, \quad (11.181)$$

wobei I eine n, n -Einheitsmatrix ist. Setzen wir diesen Ausdruck in die Ausgangsgleichung (11.180) ein, dann gewinnen wir den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsvektor zu

- Bei sehr komplizierten Systemen kann es günstig sein, als zusätzliche Variable die Summiererausgänge zu verwenden. Auf diese Weise kann man die Systemgleichung meist leicht angeben und die Vereinfachung der Systemstruktur dem Digitalrechner überlassen [11.15].

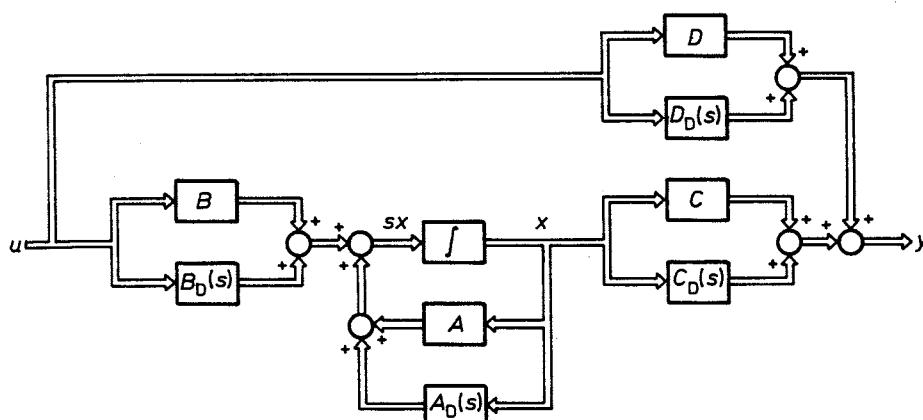


Bild 11/22. Allgemeine Struktur des totzeitbehafteten Systems

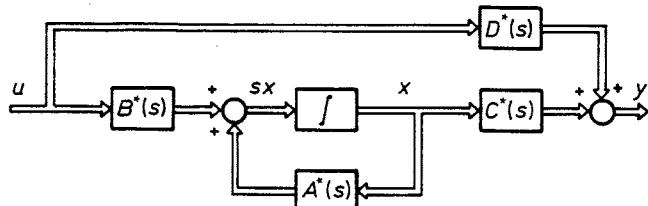


Bild 11/23. Vereinfachte Struktur des totzeitbehafteten Systems

$$y = \{C^*(s)[sI - A^*(s)]^{-1}B^*(s) + D^*(s)\}u. \quad (11.182)$$

Damit wird die Übertragungsmatrix

$$G(s) = C^*(s)[sI - A^*(s)]^{-1}B^*(s) + D^*(s); \quad (11.183)$$

diese stellt den Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen u_i und den Ausgangsgrößen y_i des Systems dar.

Der Frequenzgang eines stabilen linearen dynamischen Systems ist als *Wert der Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse* definiert [11.16], d.h., wir können $G(j\omega)$ aus (11.183) ableiten, indem wir $s=j\omega$ setzen:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G(s)|_{s=j\omega} = \\ &= C^*(j\omega)[j\omega I - A^*(j\omega)]^{-1}B^*(j\omega) + D^*(j\omega). \end{aligned} \quad (11.184)$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage des nachfolgend an Hand des Ablaufdiagramms (Bild 11/24) beschriebenen EDV-Programms zur Berechnung der Frequenzkennlinien von Mehrgrößensystemen.

Eingabe von Steuerparametern

Um einen ordnungsgemäßen Ablauf des Programms zu gewährleisten, müssen einige Steuerparameter vorgegeben werden; diese können z.B. umfassen:

- Angaben zu den Dimensionen des Systems, also die Dimensionskennzahlen n , p und q des Zustands-, Eingangs- und Ausgangsvektors,
- Vorgabe der Kreisfrequenzen, bei denen der Wert des Frequenzganges berechnet werden soll, also beispielsweise die untere Frequenzschranke ω_{\min} , die Zahl der Werte je Dekade n_w und die Zahl der Dekaden n_d ,
- eine Angabe über die Phase φ_0 bei der unteren Frequenz ω_{\min} (siehe später) und
- die Vorgabe einer höchstzulässigen Phasendifferenz $\Delta\varphi_z$ zwischen zwei benachbarten Rechenpunkten als Kriterium für eine Zwischenwertberechnung (siehe später).

Eingabe der Systemmatrizen

Da bei den meisten regelungstechnischen Systemen die Systemmatrizen nur zu einem kleinen Teil besetzt sind, ist eine selektive Eingabe der Systemdaten anzustreben. Diese erreicht man dadurch, daß man für jede Systemmatrix zunächst die Zahl der von Null verschiedenen Elemente und anschließend die Elemente selbst mit ihrer Zeilen- und Spaltenkennziffer einliest. Bei unserem Beispiel würde man dementsprechend die Matrix A_D wie folgt vorgeben:

2	(Zahl der Elemente +0)
1 2 2 0,5	(Element $A_D(1, 2)$)
2 3 10 0,1	(Element $A_D(2, 3)$)

Berechnet man nacheinander mehrere Frequenzkennlinien mit etwas geänderten Strukturen bzw. Systemdaten, dann hat man jeweils nur die Matrizelemente neu einzulesen, die sich gegenüber dem vorhergehenden Lauf geändert haben.

Vorgabe von Frequenzwerten

Um eine gleichmäßige Überdeckung des Frequenzbereichs zu erreichen, empfiehlt sich eine Vorgabe der Werte für die Kreisfrequenz nach der Beziehung

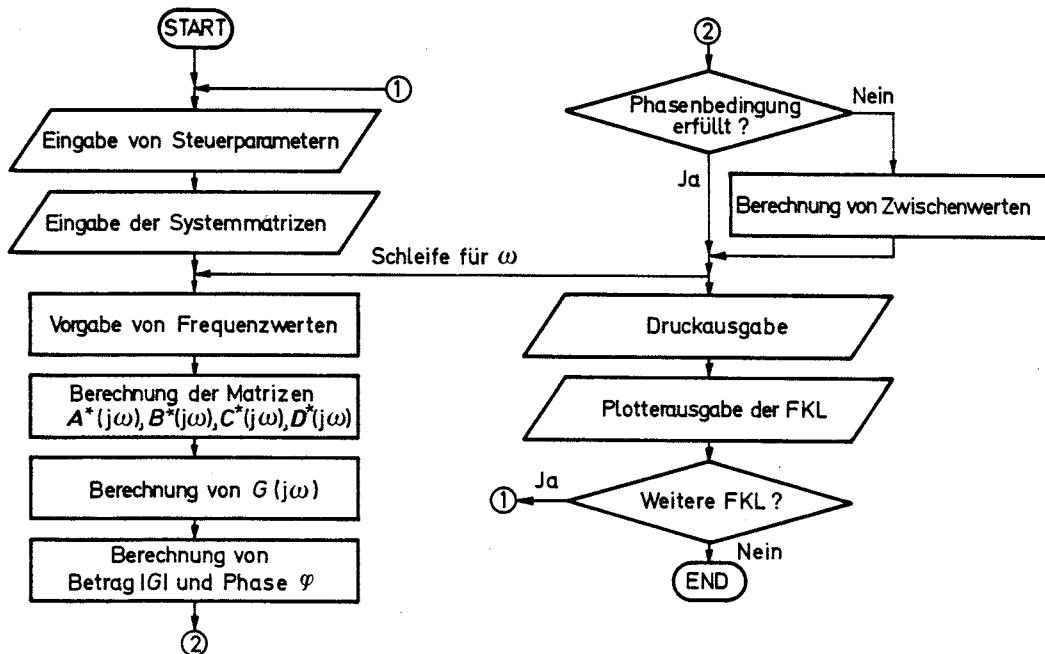


Bild 11/24. Ablaufdiagramm des EDV-Programms zur Berechnung von Frequenzkennlinien (FKL)

$$\omega_j = \omega_{\min} 10^{(j-1)/n_\omega}. \quad (11.185)$$

Hierbei läuft die Variable j von 1 bis m , wobei m die Zahl der Frequenzwerte bezeichnet; es ist

$$m = n_\omega n_d + 1.$$

Für $n=5$ ergibt sich dann annähernd die Reihe R 5, für $n=10$ die Reihe R 10 nach DIN 323. In logarithmischer Darstellung erhalten wir eine äquidistante Teilung der ω -Achse, so daß man die Frequenzkennlinien auch auf linear geteiltem Papier leicht zeichnen kann. Im EDV-Programm verwendet man anstelle von (11.185) die äquivalente rekursive Form

$$\omega_{j+1} = \omega_j 10^{1/n_\omega} \quad (11.186)$$

mit $\omega_1 = \omega_{\min}$ als Startwert; den konstanten Faktor in dieser Gleichung berechnet man vor dem Eintreten in die ω -Schleife.

Berechnung der komplexen Matrizen A^ , B^* , C^* und D^**
 Man berechnet diese Matrizen nach den Definitionsgleichungen (11.178), indem man zunächst die frequenzabhängigen Matrizen $A_D(j\omega)$, $B_D(j\omega)$, $C_D(j\omega)$ und $D_D(j\omega)$ für die vorgegebene Kreisfrequenz berechnet und anschließend die reellen Matrizen A , B , C und D hinzugefügt. Da diese Operation viermal in der gleichen Weise durchzuführen ist, empfiehlt sich das Anfertigen eines speziellen Unterprogramms.

Berechnung von $G(j\omega)$

Die Frequenzgangmatrix $G(j\omega)$ ermitteln wir nach (11.184) unter Verwendung von Standardunterprogrammen für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Inversion komplexer Matrizen.

Berechnung von Betrag und Phase

Den Betrag $|G_{ij}(\omega)|$ und die Phase $\varphi_{ij}(\omega)$ jedes Elements der Frequenzgangmatrix berechnen wir aus dem Realteil $X_{ij}(\omega)$ und dem Imaginärteil $Y_{ij}(\omega)$ zu

$$|G_{ij}(\omega)| = 10 \log(X_{ij}^2 + Y_{ij}^2),$$

$$\varphi_{ij}(\omega) = \arctan \frac{Y_{ij}}{X_{ij}}.$$

Beim Berechnen des Phasenwinkels ist die Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion zu beachten, die bei Berücksichtigung der Vorzeichen von Y_{ij} und X_{ij} eine Periodizität von 360° aufweist. Um ein Springen der Phase beim Übergang von einem Bereich in den anderen zu verhindern, speichert man den Phasenwert des jeweils vorhergehenden Rechenpunktes und schließt den neuen Phasenwert derart an, daß die Differenz der beiden Werte im Bereich $-180^\circ < \Delta \varphi_{ij} < 180^\circ$ liegt. Als Startwert verwendet man die vorgegebene Anfangsphase φ_0 bei ω_{\min} , für die man sich bei den meisten Regelungssystemen durch eine Grenzwertbetrachtung für ω gegen 0 einen groben Näherungswert besorgen kann.

Berechnung von Zwischenwerten

Um Rechenzeit zu sparen ist es günstig, die Abstände der ω -Werte möglichst groß zu wählen, also z.B. nur

fünf Werte je Dekade vorzugeben. In den Frequenzbereichen, in denen sich die Betragskennlinien den Asymptoten anschmiegen – bei regelungstechnischen Systemen also die Bereiche sehr kleiner bzw. sehr großer Frequenzen – reicht diese Vorgabe zum Zeichnen der Frequenzkennlinien aus. In der Nähe der Eigenfrequenzen des Systems ist diese weite Staffelung aber häufig unzureichend, so daß man in diesem Bereich Zwischenwerte berechnen muß. Da sich in der Nähe dieser kritischen ω -Werte die Phase des Frequenzgangs im allgemeinen stark ändert – bei einem schwach gedämpften VZ_2 -Glied springt sie beispielsweise in einem schmalen Frequenzbereich von 0° auf -180° – kann die Phasenänderung zwischen zwei Rechenpunkten als Kriterium für die Zwischenwertberechnung verwendet werden. Hierfür bildet man zunächst den Absolutbetrag der Phasendifferenz bei zwei aufeinanderfolgenden ω -Werten, also

$$|\Delta \varphi| = |\varphi_{j+1} - \varphi_j|,$$

und dividiert diesen Wert durch die vorgegebene größte Phasendifferenz. Die Zahl n_z der Zwischenwerte kann man dann proportional zur Phasendifferenz, also z. B. zu

$$n_z = \left[\frac{|\Delta \varphi|}{|\Delta \varphi_z|} \right], \quad (11.187)$$

vorgeben, wobei die eckige Klammer den ganzzahligen Teil des Bruches bezeichnet. Die Frequenzwerte im Intervall $\omega_j < \omega < \omega_{j+1}$ gibt man dann wieder durch eine Exponentialfunktion vor, nämlich durch die rekursive Form

$$\omega_i = \omega_{i-1} 10^{1/(n_\omega (n_z + 1))} \quad (11.188)$$

mit dem Anfangswert

$$\omega_0 = \omega_j, \quad \text{wobei } i \text{ von 1 bis } n_z \text{ läuft.}$$

Der konstante Faktor in dieser Gleichung wird ebenfalls vor dem Eintreten in die ω -Schleife berechnet.

Ausgabe

Zur Kontrolle der eingegebenen Systemdaten ist es günstig, zunächst die Systemmatrizen und die Steuerparameter drucken zu lassen. Anschließend werden die

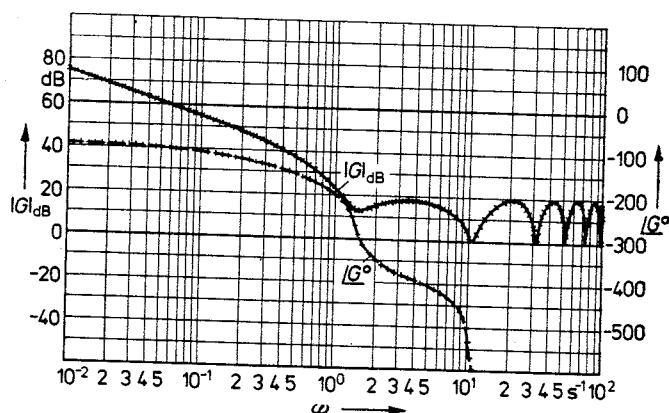


Bild 11/25. Frequenzkennlinien der Regelstrecke dritter Ordnung

berechneten Werte des Frequenzgangs als Funktion der Kreisfrequenz ausgegeben, wobei man neben dem Betrag und der Phase auch den Realteil und den Imaginärteil drucken lassen sollte, um eventuell auch die Nyquist-Ortskurve zeichnen zu können. Durch eine Ausgabe der Betrags- und Phasenkennlinie mit einem Digitalplotter erspart man sich die häufig mühselige Arbeit des Übertragens der Rechenwerte in ein halblogarithmisches Diagramm. Berechnet man nur wenige Werte je Dekade, dann ist es günstig, vom Plotter nur die berechneten Werte markieren zu lassen und die Ausgleichskurven

durch diese Punkte von Hand einzuziehen; man erhält hierdurch einen glatteren Verlauf der Kennlinien. Ein Beispiel hierfür zeigt Bild 11/25, in dem die Frequenzkennlinien für das oben behandelte totzeitbehaftete System dritter Ordnung aufgetragen sind. Wie man den Kennlinien entnimmt, ist für niedrige Frequenzen nur das I-Glied wirksam (vgl. Bild 11/21), während für hohe Frequenzen der aus einer Parallelschaltung von Totzeit- und P-Glied bestehende direkte Übertragungsweg zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße die Oberhand gewinnt.

12 Regelungssynthese im Zustandsraum

12.1 Problematik

Die Regelstrecke sei ein lineares und zeitinvariantes System, das in Zustandsdarstellung gegeben ist. Ihre Struktur kann man aus dem Bild 11/9 entnehmen. Wir wollen hier zusätzlich $D = \mathbf{0}$ voraussetzen, da diese Annahme für die überwiegende Mehrzahl der realen Systeme zutrifft. Die Strecke wird dann durch die Gleichungen

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx,$$

A, B, C konstant, vom Typ (n, n) bzw. (n, p) bzw. (q, n) ,

beschrieben. Sie ist in Bild 12/1 wiedergegeben.

Wir gehen davon aus, daß sich die Strecke zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in einem Zustand x_0 befindet, der von dem gewünschten Betriebszustand x_B verschieden ist. Ist dieser erreicht, so soll die Ausgangsgröße y einen vorgegebenen Sollvektor w annehmen.

Die Aufgabe besteht dann darin, den Systemzustand x aus dem vorliegenden Anfangszustand x_0 in den gewünschten Betriebszustand x_B zu überführen. Dabei werden an den Übergangsvorgang dynamische Forderungen gestellt, z. B. daß er in genügend kurzer Zeit abläuft oder daß die Einschwingvorgänge der Zustandsvariablen gut gedämpft, aber doch nicht zu langsam sind. Um ein derartiges Systemverhalten herbeizuführen, denkt man sich den Zustandsvektor x erfaßt und über die Matrix R zurückgeführt, wie das in Bild 12/1 gezeichnet ist: $u_R = -Rx$. Dabei ist R eine konstante (p, n) -Matrix, wobei p die Anzahl der Steuergrößen u_v und n die Anzahl der Zustandsvariablen, also die Ordnung der Strecke, angibt. Die gerätetechnische Realisierung der Matrix R liefert ein System von P-Gliedern, das wir als *Regler* bezeichnen wollen. Es stellt einen P-Regler dar, der allerdings aus mehreren, äußerstensfalls n^2 , Einzelementen besteht.

Im Unterschied zur gewohnten Struktur liegt hier der Regler in der Rückführung. Diese Tatsache ist nicht sehr wichtig; ebenso gut könnte man ihn in den Vorwärts-

zweig legen und die im folgenden beschriebenen Syntheseverfahren dann entsprechend durchführen. Da es im Schrifttum aber üblich ist, den Zustandsregler in der Rückführung unterzubringen, wollen wir uns an diesen Brauch anschließen.

Aus Bild 12/1 können wir nun die Zustandsgleichungen des Regelungssystems ablesen:

$$y = Cx, \quad (12.1)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (12.2)$$

$$u = u_S + u_R, \quad (12.3)$$

$$u_S = Sw, \quad (12.4)$$

$$u_R = -Rx. \quad (12.5)$$

Auf dieses System wirken zwei Arten äußerer Größen: Der Anfangszustand x_0 und die Führungsgröße w . Die neueren Regelungsverfahren, die im Zustandsraum arbeiten und von denen drei im folgenden beschrieben werden sollen, sind in erster Linie darauf gerichtet, den Systemzustand aus dem Anfangszustand x_0 in den gewünschten Endzustand x_B zu überführen und dabei gewisse Forderungen an das Systemverhalten zu erfüllen, was durch geeignete Wahl von R angestrebt wird. Was das Führungsverhalten betrifft, so wird dessen geeignete Formung einem Vorfilter S überlassen. Da das System linear ist, darf bei der Berechnung von R die zweite Eingangsgröße w und damit auch $u_S = \mathbf{0}$ gesetzt werden, so daß x_0 als einziger äußerer Einfluß verbleibt. Dann ergibt sich aus (12.2) bis (12.5) wegen $\dot{x} = \mathbf{0}$, daß $x_B = \mathbf{0}$ gelten muß.

Ehe wir zu dieser Betrachtungsweise übergehen, sei aber ein kurzer Blick auf das Führungsverhalten geworfen. Wir wollen dabei annehmen, daß $p = q$ ist, also ebenso viele Steuergrößen wie Ausgangsgrößen auftreten. Das wird in der Praxis normalerweise der Fall sein, da man bestrebt ist, jeder Ausgangsgröße eine Steuergröße zuzuordnen, deren Aufgabe in der gezielten Beeinflussung dieser Ausgangsgröße besteht. Nehmen wir nun Laplace-Transformation der Gleichungen (12.1) bis (12.5) vor und setzen $x(0) = \mathbf{0}$, da nur das Führungsverhalten interessiert, so ergibt sich

$$Y(s) = CX(s),$$

$$sX(s) = AX(s) + BU_S(s) - BRX(s).$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt

$$[sI + BR - A]X(s) = BU_S(s) \quad \text{oder}$$

$$X(s) = [sI + BR - A]^{-1}BU_S(s). \quad \text{Damit wird}$$

$$Y(s) = C[sI + BR - A]^{-1}BU_S(s).$$

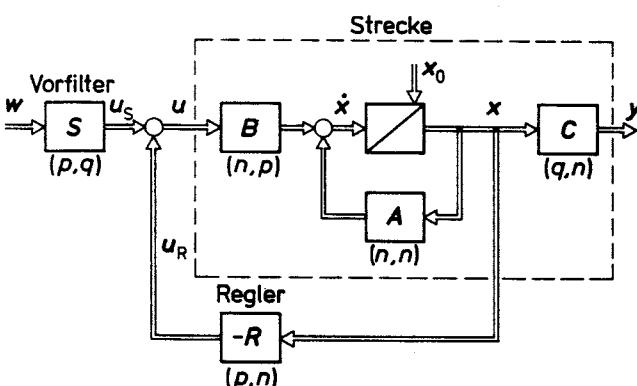


Bild 12/1. Allgemeine Struktur eines Regelungssystems in Zustandsbeschreibung

Die (q, p) -Matrix

$$F(s) = C[sI + BR - A]^{-1}B \quad (12.6)$$

ist die Führungs-Übertragungsmatrix des Systems, wenn wir vom Vorfilter noch absehen, und ist wegen $p=q$ quadratisch. Es gilt dann

$$Y(s) = F(s) U_S(s), \quad (12.7)$$

$$U_S(s) = S(s) W(s). \quad (12.8)$$

Aus (12.7) folgt nach dem Endwertsatz der Laplace-Transformation (sofern das System stabil ist):

$$\begin{aligned} y(+\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) U_S(s) = F(0) \lim_{s \rightarrow 0} s U_S(s), \quad \text{also} \\ y(+\infty) &= F(0) u_S(+\infty). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Theoretisch gilt dieser Zusammenhang erst für $t \rightarrow +\infty$. Praktisch ist er jedoch schon nach einiger Zeit mit genügender Näherung erreicht. Er stellt die Beziehung zwischen den stationären Werten von y und u_S dar:

$$y_{st} = F(0) u_{S,st}. \quad (12.10)$$

Man darf annehmen, daß $F(0)$ regulär ist, da man die Eingriffsstellen der Steuergrößen so wählen wird, daß sich jeder gewünschte stationäre Zustand y_{st} der Ausgangsgrößen durch geeignete Wahl des stationären Steuervektors $u_{S,st}$ verwirklichen läßt. Das bedeutet aber nichts anderes als die Auflösung von (12.10) nach $u_{S,st}$:

$$u_{S,st} = F^{-1}(0) y_{st}. \quad (12.11)$$

Es möge sich nun um eine Festwertregelung handeln, wie bei der einführenden Beschreibung des Regelungssystems bereits angenommen wurde, oder allgemeiner um eine Regelung, bei der die Führungsgröße von Zeit zu Zeit verstellt wird, also stückweise konstant ist. Ist w ein derartiger konstanter Vektor, so muß nach (12.11)

$$u_{S,st} = F^{-1}(0) w \quad (12.12)$$

sein, damit y im stationären Zustand den Sollvektor w annimmt. Da allgemein $u_S = S w$ ist, gilt (12.12) gewiß, wenn man

$$S = F^{-1}(0)$$

wählt. Wegen (12.6) folgt daraus

$$S = [C(BR - A)^{-1} B]^{-1}. \quad (12.13)$$

Da R als bereits berechnet vorausgesetzt ist, kennt man damit das Vorfilter. Es gewährleistet, daß im stationären Zustand y mit dem gewünschten konstanten Vektor w übereinstimmt.¹⁾ Wie man sieht, besteht auch das Vorfilter aus P-Gliedern.

1) Es sei angemerkt, daß im Fall $p \neq q$ zu einem beliebig vorgeschriebenen Vektor w nicht unbedingt ein Vorfilter S zu existieren braucht, das im stationären Zustand gerade diesen Vektor w erzeugt.

Wie ist es nun, wenn w nicht konstant ist? Sofern der eigentliche Regelkreis mit der Eingangsgröße u_S und der Ausgangsgröße x schnell genug ist im Vergleich zu den Änderungen von $w(t)$, kann man sich so verhalten, als ob w konstant sei und das Vorfilter gemäß (12.13) auslegen. Ist die Voraussetzung nicht erfüllt, so muß man zu den allgemeinen Gleichungen (12.7) und (12.8) übergehen. Aus ihnen folgt

$$Y(s) = F(s) S(s) W(s).$$

Die Forderung $Y(s) = W(s)$ ist daher streng nur für

$$S(s) = F^{-1}(s)$$

erfüllt. Man muß dann die Matrix $F^{-1}(s)$ durch realisierbare Übertragungsglieder approximieren. Ist beispielsweise $p=q=1$, so wird man $F(s)$ vielfach durch ein dominantes Polpaar oder einen dominanten reellen Pol approximieren können. $F^{-1}(s)$ ist dann ein Polynom zweiten oder ersten Grades, das man unter Hinzufügung von zwei bzw. einer Nennerzeitkonstante annähern kann.

Nach diesen Bemerkungen zur Wahl des Vorfilters kehren wir zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück, die in der Bestimmung der Reglermatrix R besteht. Wie schon erwähnt, sollen im folgenden drei Verfahren hierzu beschrieben werden.

Das erste wollen wir als Verfahren der *Polvorgabe* bezeichnen, weil bei ihm die Pole der geschlossenen Regelung vorgegeben werden und R so bestimmt wird, daß die Regelung diese Pole annimmt. Strenggenommen werden die Eigenwerte der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises vorgeschrieben, aber sie sind, von Ausnahmefällen abgesehen, mit den Polen des geschlossenen Kreises identisch. Deswegen spricht man im amerikanischen Schrifttum, aus dem das Verfahren stammt (in allgemeiner Form: W. M. Wonham, 1967), von *pole assignment* oder *pole shifting*. Bei uns ist dieser Ausdruck schon mit *Polfestlegung* oder *Polzuweisung* übersetzt worden, doch dürfte die Benennung *Polvorgabe* treffender sein. Das Verfahren wird als erstes der drei zu behandelnden Verfahren dargestellt (Abschnitt 12.2), weil es begrifflich am einfachsten ist. Auch die rechnerische Behandlung ist für Systeme mit einer Eingangsgröße recht geradlinig.

Als nächste Synthesemethode wird der *Entwurf auf endliche Einstellzeit* beschrieben. Bei linearen und zeitinvarianten Systemen, um die es hier ausschließlich geht, kann man ihn als Sonderfall der Polvorgabe interpretieren, da bei ihm die Pole der z -Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises sämtlich in den Nullpunkt der komplexen Ebene gelegt werden. Doch wird man mit dieser Auffassung dem eigentlichen Wesen dieses Entwurfsverfahrens nicht voll gerecht, was sich schon daran zeigt, daß der Entwurf auf endliche Einstellzeit auch bei nichtlinearen Systemen möglich ist, obgleich man dort nicht von Polvorgabe sprechen kann. In der Tat hat die in Abschnitt 12.3 beschriebene, von R. E. Kalman (1960) stammende Methode keine Ähnlichkeit mit dem Vorgehen bei der Polvorgabe.

Als dritte Entwurfsmöglichkeit im Zustandsraum wird die *modale Regelung* oder *modale Entkopplung* (H. H.

Rosenbrock, 1962) dargestellt (Abschnitt 12.4). Auch sie hängt eng mit der Polvorgabe zusammen, insofern man die modale Regelung bei Systemen mit konzentrierten Parametern in erster Linie zur Festlegung der Pole des geschlossenen Kreises auf bestimmte Stellen der komplexen Ebene benutzt. Die modale Regelung ist auf Systeme mit mehreren Eingangsgrößen zugeschnitten und empfiehlt sich dadurch, daß man mit ihr bereits gute Erfahrungen in der industriellen Anwendung gesammelt hat.

Bei allen drei Verfahren benötigt man den Zustandsvektor x . Leider kann man aber, abgesehen von Einzelfällen, nicht alle Zustandsvariablen meßtechnisch erfassen, sei es, daß sie nur als Rechengrößen in der mathematischen Beschreibung des Systems existieren, sei es, daß ihre Messung zu mühsam oder zu aufwendig ist. Meßbar sind aber die Ausgangsgrößen der Mehrfachregelung. Von dem amerikanischen Forscher D. G. Luenberger wurde ein System angegeben (1964, 1966), um aus dem Ausgangsvektor y auf den Zustandsvektor x zu schließen, den nach seinem Erfinder benannten *Luenberger-Beobachter*. Er wird in Abschnitt 12.5 behandelt und ist nicht nur bei den drei eben erwähnten Regelungsverfahren von Bedeutung, sondern stets dann, wenn dem Regler nicht meßbare Zustandsvariable zugeführt werden müssen. Das ist bei den meisten neueren Synthesemethoden der Fall, beispielsweise auch bei den Verfahren der Strukturoptimierung. Bei Berücksichtigung des Beobachtungsproblems hat man die Struktur in Bild 12/1 durch einen Block *Luenberger-Beobachter* zwischen den Wirkungslinien von y und x zu ergänzen.

Vermutlich wird dem Leser bereits aufgefallen sein, daß in diesem Kapitel noch nirgends von Störgrößen die Rede war. In der Tat wirken auf das Regelungssystem in Bild 12/1 von außen nur die Führungsgröße w und der Anfangszustand x_0 ein. Letzteren kann man sich durch impulsartige Störungen entstanden denken, die von Zeit zu Zeit kurzzeitig auf das System wirken und es dadurch aus seinem stationären Betriebszustand x_B entfernen. Durch das Eingreifen des Reglers R wird der Zustandspunkt dann wieder nach x_B zurückgeführt. Insofern werden also kurz dauernde, impulsartige Störungen durch das Regelungssystem in Bild 12/1 berücksichtigt. Wie steht es aber mit anderen, länger dauernden Störungen? Der amerikanische Regelungstechniker C. D. Johnson hat 1971 gezeigt, daß man sie unter recht allgemeinen Voraussetzungen ebenfalls in die Modellvorstellung einbeziehen kann, die der Struktur in Bild 12/1 zugrunde liegt, und zwar dadurch, daß man die Beschreibung der Regelstrecke in geeigneter Weise erweitert. Wie das geschieht, soll im letzten Abschnitt dieses Synthesekapitels (Abschnitt 12.6) skizziert werden. Damit sind die in diesem Kapitel geschilderten Syntheseverfahren auch auf den Fall anderer als nur impulsartiger Störungen anwendbar.

Was eine allgemeine Beurteilung der Entwurfsverfahren im Zustandsraum betrifft, so wird man sie mit den klassischen Verfahren vergleichen. Allgemein kann man wohl folgendes sagen. Die klassischen Entwurfsverfahren, für welche die Übersetzung des Problems in den Bereich der komplexen Funktionen charakteristisch ist, sind auf die Behandlung von Einfachsystemen zugeschnitten, d.h. von Systemen mit nur einer Ein- und Ausgangsgröße. Sie werden schwerfällig oder versagen gänzlich, wenn es

um die Beeinflussung von Mehrfachsystemen geht. Kennzeichnend dafür ist die Tatsache, daß man in den 50er Jahren, als die Behandlung von Systemen im Zustandsraum noch nicht üblich war, beim Entwurf von Mehrfachsystemen so gut wie ausschließlich auf die Entkopplung der Systeme angewiesen war, um auf jeden Fall zu Einfachsystemen zu kommen. Ein Beispiel dafür, wie schwer man sich bei der Anwendung klassischer Verfahren auf Mehrfachsysteme tut, liefert der Versuch, das Frequenzkennlinien- oder Wurzelortsverfahren auf Mehrfachregelungen anzuwenden. So praktikabel diese Verfahren beim normalen Regelkreis sind, so mühsam wird bereits die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens bei Mehrfachregelungen. Hier, auf dem Gebiet der Mehrfachsysteme, liegt die eigentliche Domäne der im Zustandsraum arbeitenden Entwurfsverfahren. Hier lassen sich mit ihnen Entwurfsziele erreichen, die mit den klassischen Verfahren teilweise nicht einmal formuliert werden können.

Unabhängig von der Frage der praktischen Verwendbarkeit bleibt auch hier gültig, was schon bei der Beschreibung und Analyse der Systeme im Zustandsraum bemerkte wurde: Die Zustandsdarstellung ermöglicht Einsichten in die Struktur und die Eigenschaften dynamischer Systeme, die der klassischen Beschreibung nicht zugänglich sind.

12.2 Polvorgabe (Polfestlegung, pole assignment, pole shifting)

12.2.1 Grundgedanke

Wir gehen von dem Regelungssystem in Bild 12/1 aus. Da es von nun an allein um die Reaktion des Systems auf die Anfangsbedingung x_0 geht, dürfen wir $u_s = 0$ setzen. Auch auf die Betrachtung der Ausgangsgleichung $y = Cx$ können wir verzichten; sie wurde beim Entwurf des Vorfilters in Abschnitt 12.1 berücksichtigt. Jetzt geht es allein um die *Regelung des Zustandsvektors x* . Bild 12/2 zeigt die zugehörige Rückführungsstruktur.

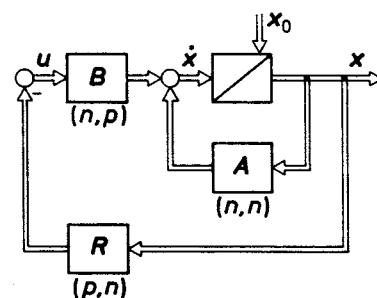


Bild 12/2. Regelung des Zustandsvektors

Das Verfahren der Polvorgabe besteht darin, die konstante Reglermatrix R so zu wählen, daß die Eigenwerte s_1, s_2, \dots, s_n des geschlossenen Regelkreises in Bild 12/2 vorgegebene Lagen in der komplexen Ebene einnehmen. Da die Eigenwerte, von Ausnahmefällen abgesehen, mit den Polen des Regelkreises zusammenfallen, wollen wir im folgenden statt von *Eigenwerten* auch von *Polen* sprechen.

Das Verfahren sagt allerdings nichts darüber, wie die Pole zu wählen sind. Darüber dürfte eine allgemeine Aussage auch schwer möglich sein, da die gewünschte Polkonfiguration zu sehr von den Anforderungen an das dynamische Verhalten der Regelung abhängt. Der nächst-

liegende Gedanke, die Pole des geschlossenen Systems in der komplexen Ebene sehr weit nach links zu verlegen, scheitert an Realisierungsschwierigkeiten. Von konventionellen Regelungen her weiß man, daß hierdurch zu hohe Beträge der Steuergrößen u_k sowie eine starke Stör- und Parameterempfindlichkeit der Regelung impliziert werden. Geht man von klassischen Entwurfsverfahren aus, so liegt es nahe, für die Polkonfiguration des geschlossenen Kreises ein dominantes, konjugiert komplexes Polpaar sowie einen reellen Pol vorzuschreiben, der mit Rücksicht auf die Systemordnung $(n-2)$ -fach zu wählen ist. Man kann aber auch an einen reellen Pol n -ter Ordnung denken.

Um die mannigfaltigen Möglichkeiten in der Wahl der Polkonfiguration auszuschöpfen, wird man auf Simulation des Systems kaum verzichten können.

Nehmen wir nun an, daß die Eigenwerte s_1, \dots, s_n des geschlossenen Kreises gewählt sind. Dessen Zustandsgleichungen lauten nach Bild 12/2:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = -Rx \quad \text{oder}$$

$$\dot{x} = (A - BR)x. \quad (12.14)$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det[sI - (A - BR)], \quad (12.15)$$

das die charakteristische Gleichung liefert, wenn es gleich Null gesetzt wird. Gibt man die Eigenwerte s_1, s_2, \dots, s_n vor, so ist andererseits das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises durch

$$p(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = \\ = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

gegeben, wobei die p_v bekannte Zahlen sind, die man durch Ausmultiplizieren des links stehenden Produkts erhält. Der Vergleich der beiden Formen des charakteristischen Polynoms liefert die Identität

$$\det[sI - (A - BR)] = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0.$$

Denkt man sich die Determinante ausgerechnet, so stellt auch sie ein Polynom von s dar, dessen Koeffizienten von der gesuchten Reglermatrix R abhängen:

$$s^n + a_{n-1}(R)s^{n-1} + \dots + a_0(R) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0. \quad (12.16)$$

Durch Koeffizientenvergleich entstehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_0(R) &= p_0, \\ a_1(R) &= p_1, \\ &\vdots \\ a_{n-1}(R) &= p_{n-1}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Das sind n Gleichungen für die p_n gesuchten Elemente der Reglermatrix R . Für $p=1$, d.h. für eine Steuergröße u , ist dieses Gleichungssystem eindeutig bestimmt, für $p>1$ aber unterbestimmt. Von Natur aus sind daher der

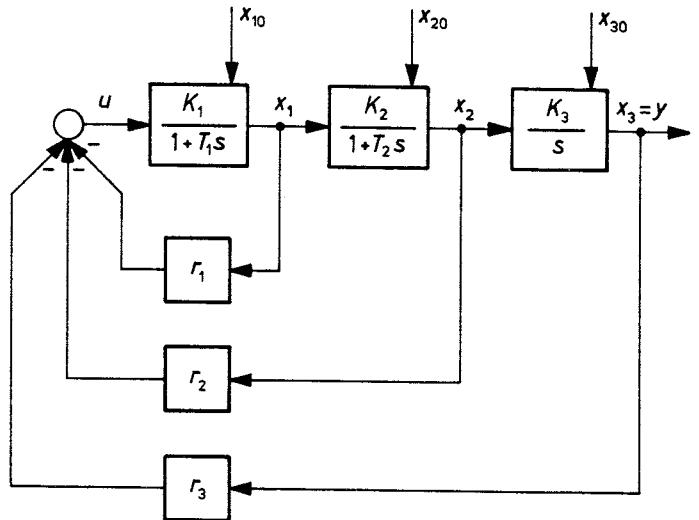


Bild 12/3. Beispiel zur Synthese durch Polvorgabe

Eingrößen- und der Mehrgrößenfall unterschieden. Wir untersuchen vorerst nur Systeme mit einer Eingangsgröße.

Ist das System von niedriger Ordnung, so kann man die Definitionsgleichung (12.16) der Polvorgabe zur Berechnung von R benutzen. Betrachten wir als Beispiel das System in Bild 12/3. Die Eigenwerte des offenen Kreises sind

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Die Zustandsdifferentialgleichung lautet

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \text{mit}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ -K_1\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & K_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -K_1\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da es hier nur eine Eingangsgröße u gibt, ist $R = r^T = [r_1, r_2, r_3]$. Das charakteristische Polynom lautet wegen

$$\begin{aligned} br^T &= \begin{bmatrix} -K_1\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [r_1 r_2 r_3] = \begin{bmatrix} -K_1\lambda_1 r_1 & -K_1\lambda_1 r_2 & -K_1\lambda_1 r_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \det[sI - A + br^T] &= \begin{vmatrix} s - \lambda_1 - K_1\lambda_1 r_1 & -K_1\lambda_1 r_2 & -K_1\lambda_1 r_3 \\ K_2\lambda_2 & s - \lambda_2 & 0 \\ 0 & -K_3 & s \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Durch Entwicklung nach der letzten Zeile folgt

$$\begin{aligned} \det[sI - A + br^T] &= s^3 - [\lambda_2 + \lambda_1(1 + K_1 r_1)]s^2 + \\ &+ [\lambda_1 \lambda_2(1 + K_1 r_1) + K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2 r_2]s + K_1 K_2 K_3 \lambda_1 \lambda_2 r_3. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit

$$s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0$$

erhält man die Gleichungen

$$\lambda_2 + \lambda_1(1 + K_1 r_1) = -p_2,$$

$$\lambda_1 \lambda_2(1 + K_1 r_1) + K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2 r_2 = p_1,$$

$$K_1 K_2 K_3 \lambda_1 \lambda_2 r_3 = p_0.$$

Aus ihnen folgt

$$r_1 = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + p_2}{K_1 \lambda_1},$$

$$r_2 = \frac{\lambda_2(\lambda_1 + p_2) + p_1}{K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2},$$

$$r_3 = \frac{p_0}{K_1 K_2 K_3 \lambda_1 \lambda_2}.$$

Auch bei Strecken vierter Ordnung läßt sich dieses direkte Vorgehen noch ohne große Mühe durchführen, sofern die Matrix $A - br^T$ genügend Nullen enthält, wie das gerade bei realen Systemen häufig der Fall ist.

Für höhere Ordnung der Strecke kann man indessen r^T nicht mehr in der beschriebenen Weise berechnen. Nunmehr soll ein Verfahren vorgestellt werden, das bei beliebiger Ordnung ohne Schwierigkeit verwendbar ist. Wir gehen dazu von der Regelungsnormalform aus, wo das Verfahren auf der Hand liegt, und übertragen es dann auf eine beliebige Zustandsdarstellung, indem wir letztere auf die Regelungsnormalform transformieren.

12.2.2 Polvorgabe bei Regelungsnormalform der Strecke

Die Strecke sei also in Regelungsnormalform gegeben. Dann ist nach (12.14) die Systemmatrix des geschlossenen Kreises von Bild 12/2

$$F = A_R - b_R r_R^T,$$

wobei A_R und b_R aus (11.132) zu entnehmen sind:

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} & \end{bmatrix}, \quad b_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Strecke ist dabei nach (11.133) durch

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{gegeben.}$$

Es wird so

$$F = A_R - b_R r_R^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + r_1) & -(a_1 + r_2) & \dots & -(a_{n-1} + r_n) \end{bmatrix}$$

Wie man sieht, hat diese Matrix wiederum Regelungsnormalform, da lediglich in der letzten Zeile die Parameter $-a_v$ der Strecke durch neue Parameter $-a_v - r_{v+1}$ ersetzt sind. Wie stets bei Vorliegen der Regelungsnormalform kann man sofort das zugehörige charakteristische Polynom hinschreiben: Gemäß (11.133) hat man die negativen Elemente der letzten Zeile als Koeffizienten des Polynoms zu nehmen. Man erhält daher als charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises

$$s^n + (a_{n-1} + r_n)s^{n-1} + \dots + (a_1 + r_2)s + (a_0 + r_1).$$

Es soll gleich dem vorgeschriebenen Polynom

$$s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

sein. Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$a_{v-1} + r_v = p_{v-1}, \quad v = 1, \dots, n, \quad \text{und damit}$$

$$r_v = p_{v-1} - a_{v-1}, \quad v = 1, \dots, n. \quad (12.18)$$

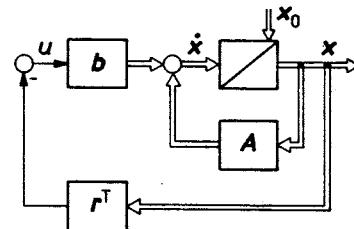


Bild 12/4. Regelung des Zustandsvektors bei einer Steuergröße

Als Ergebnis ist festzuhalten:

Ist die Strecke in Bild 12/4 mit dem charakteristischen Polynom

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$$

in Regelungsnormalform gegeben und schreibt man für den geschlossenen Kreis das charakteristische Polynom

$$s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0$$

vor, so wird es durch die Reglermatrix

$$r_R^T = [p_0 - a_0, p_1 - a_1, \dots, p_{n-1} - a_{n-1}] \quad (12.19)$$

erzeugt.

Dieses Ergebnis ist denkbar einfach. Aber man wird im allgemeinen nicht damit rechnen können, daß eine Strecke in Regelungsnormalform gegeben ist. Nichts liegt jedoch näher, als bei beliebiger Zustandsdarstellung die Transformation auf Regelungsnormalform vorzunehmen, um so das Resultat (12.19) verwenden zu können.

12.2.3 Polvorgabe bei beliebiger Zustandsdarstellung der Strecke

Ist die Strecke steuerbar, was wir voraussetzen wollen, so kann sie nach dem Satz (11.148) auf Regelungsnormalform transformiert werden. Das geschieht durch die Transformation

$$z = Tx,$$

wobei der Zustandsvektor z die Regelungsnormalform charakterisieren möge. Dabei ist die reguläre (n, n) -Matrix

$$T = \begin{bmatrix} q_s^T \\ q_s^T A \\ \vdots \\ q_s^T A^{n-1} \end{bmatrix},$$

wobei q_s^T die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_s^{-1} = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1}$$

darstellt und somit aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} q_s^T Ab &= 0, \\ &\vdots \\ q_s^T A^{n-2}b &= 0, \\ q_s^T A^{n-1}b &= 1 \end{aligned} \tag{12.20}$$

zu bestimmen ist.

In Regelungsnormalform ist

$$u = -r_R^T z.$$

Mit $z = Tx$ wird daraus

$$u = -r_R^T Tx.$$

Daher ist die Reglermatrix r^T in beliebiger Zustandsdarstellung wegen (12.19)

$$r^T = r_R^T T = [p_0 - a_0, \dots, p_{n-1} - a_{n-1}] \begin{bmatrix} q_s^T \\ \vdots \\ q_s^T A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

oder nach (14.54)

$$\begin{aligned} r^T &= (p_0 - a_0) q_s^T + (p_1 - a_1) q_s^T A + \dots + \\ &\quad + (p_{n-1} - a_{n-1}) q_s^T A^{n-1}. \end{aligned}$$

Jetzt wird die letzte Gleichung in Satz (11.148) benutzt, die bei der Berechnung der Transformationsmatrix T als Nebenprodukt abfiel, aber zur Berechnung von T nicht benötigt wurde:

$$-a_0 q_s^T - a_1 q_s^T A - \dots - a_{n-1} q_s^T A^{n-1} = q_s^T A^n. \text{ Mit ihr wird}$$

$$r^T = p_0 q_s^T + p_1 q_s^T A + \dots + p_{n-1} q_s^T A^{n-1} + q_s^T A^n. \tag{12.21}$$

Da q_s^T aus (12.20) berechnet werden kann, ist damit der Regler bekannt.

Mittels des vorgeschriebenen charakteristischen Polynoms

$$p(s) = p_0 + p_1 s + \dots + p_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

des geschlossenen Kreises kann man (12.21) auch in der folgenden Form darstellen:

$$r^T = q_s^T (p_0 I + p_1 A + \dots + p_{n-1} A^{n-1} + A^n) \text{ oder} \tag{12.22}$$

$$r^T = q_s^T p(A). \tag{12.23}$$

Dieses bemerkenswerte Resultat wurde erstmals von J. Ackermann auf andere Weise unter Benutzung des Theorems von Cayley-Hamilton hergeleitet [12.1]. Es sei in einem Satz zusammengefaßt:

Ist die Strecke $\dot{x} = Ax + bu$ aus Bild 12/4 steuerbar und soll der geschlossene Kreis das charakteristische Polynom $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0$ haben, so hat man

$$\begin{aligned} r^T &= p_0 q_s^T + \dots + p_{n-1} q_s^T A^{n-1} + q_s^T A^n = \\ &= q_s^T p(A) \end{aligned} \tag{12.24}$$

zu wählen. Dabei ist q_s^T die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_s^{-1} = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1}$$

und wird daher aus (12.20) bestimmt.

Ein Anwendungsbeispiel zu diesem Satz wird in Kapitel 13 behandelt. Hier soll lediglich der Rechengang an Hand des Systems in Bild 12/3 illustriert werden. Wegen

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ -K_2 \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & K_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -K_1 \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ist} \\ Ab &= \begin{bmatrix} -K_1 \lambda_1^2 \\ K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A^2 b &= A \cdot Ab = \begin{bmatrix} -K_1 \lambda_1^3 \\ K_1 K_2 \lambda_1^2 \lambda_2 + K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2^2 \\ K_1 K_2 K_3 \lambda_1 \lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus dem Gleichungssystem (12.20) für

$$q_s^T = (q_1, q_2, q_3) \text{ sofort}$$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = \frac{1}{K_1 K_2 K_3 \lambda_1 \lambda_2}. \text{ Mithin ist}$$

$$q_s^T = [0, 0, q_3],$$

$$q_s^T A = [0, K_3 q_3, 0] = \left[0, \frac{1}{K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2}, 0 \right],$$

$$q_s^T A^2 = q_s^T A \cdot A = [-K_2 K_3 \lambda_2 q_3, K_3 \lambda_2 q_3, 0] =$$

$$= \left[-\frac{1}{K_1 \lambda_1}, \frac{1}{K_1 K_2 \lambda_1}, 0 \right],$$

$$q_s^T A^3 = q_s^T A^2 \cdot A = \left[-\frac{1}{K_1} - \frac{\lambda_2}{K_1 \lambda_1}, \frac{\lambda_2}{K_1 K_2 \lambda_1}, 0 \right].$$

Nach (12.24) ist

$$r^T = p_0 q_s^T + p_1 q_s^T A + p_2 q_s^T A^2 + q_s^T A^3, \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned} r^T &= \left[-\frac{p_2}{K_1 \lambda_1} - \frac{1}{K_1} - \frac{\lambda_2}{K_1 \lambda_1}, \frac{p_1}{K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2} + \frac{p_2}{K_1 K_2 \lambda_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_2}{K_1 K_2 \lambda_1}, \frac{p_0}{K_1 K_2 K_3 \lambda_1 \lambda_2} \right] = \\ &= \left[-\frac{p_2 + \lambda_1 + \lambda_2}{K_1 \lambda_1}, \frac{p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_2^2}{K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2}, \frac{p_0}{K_1 K_2 K_3 \lambda_1 \lambda_2} \right], \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem oben auf andere Weise erhaltenen Resultat.

12.2.4 Nullstellen der Strecke bei Polvorgabe

Es wurde gezeigt, daß man bei einem System mit *einer* Eingangsgröße, sofern es steuerbar ist, durch eine geeignet gewählte konstante Rückführung die Pole an beliebig vorgegebene Stellen der komplexen Ebene verschieben kann. Die Frage liegt nahe, was dabei mit den Nullstellen der Strecke geschieht. Die Antwort ist sehr wichtig. Werden nämlich die Nullstellen in unkontrollierter Weise mitverschoben, so kann der durch eine zweckmäßig vorgeschriebene Polkonfiguration angestrebte dynamische Effekt verschlechtert werden. Würde sich beispielsweise eine Nullstelle vor ein dominantes Polpaar schieben, so könnte sich dadurch die Sprungantwort erheblich verändern, etwa stärkeres Überschwingen zeigen. Es gilt jedoch der Satz:

Bei Systemen mit *einer* Ein- und Ausgangsgröße werden durch das Verfahren der Polvorgabe die Nullstellen nicht verändert. (12.25)

Um diesen Satz einzusehen, stellen wir zunächst allgemein den Zusammenhang zwischen der Regelungsnormalform eines Systems und seinen Nullstellen her. Dazu bilden wir aus der Regelungsnormalform (11.32), (11.33) die Systemübertragungsfunktion. Das geschieht am einfachsten dadurch, daß man die Zustandsgleichungen für $a_n = 1$ und $b_n = 0$ komponentenweise schreibt und dann der Laplace-Transformation unterwirft:

$$\begin{aligned} sX_1 &= X_2, \\ sX_2 &= X_3, \\ &\vdots \\ sX_{n-1} &= X_n, \\ sX_n &= -a_0 X_1 - \cdots - a_{n-1} X_n + U, \end{aligned} \quad (12.26)$$

$$Y = b_0 X_1 + b_1 X_2 + \cdots + b_{n-1} X_n. \quad (12.27)$$

Aus den ersten $n-1$ Gleichungen folgt

$$X_2 = sX_1, \quad X_3 = s^2 X_1, \quad \dots, \quad X_n = s^{n-1} X_1.$$

Das gibt, in (12.26) eingesetzt:

$$s^n X_1 = -a_0 X_1 - \cdots - a_{n-1} s^{n-1} X_1 + U, \quad \text{woraus}$$

$$X_1 = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} U$$

folgt. Damit ist dann weiter

$$\begin{aligned} X_2 &= sX_1 = \frac{s}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} U, \\ &\vdots \\ X_n &= s^{n-1} X_1 = \frac{s^{n-1}}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} U. \end{aligned}$$

Hiermit erhält man aus (12.27)

$$Y = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} U = G U.$$

Das Resultat war auf Grund der Herleitung der Regelungsnormalform (Abschnitt 11.2.1) zu erwarten.

Man sieht daraus: Ändert man die letzte Zeile der Matrix A_R der Regelungsnormalform, wie das bei der Polvorgabe geschieht, so ändert man dadurch die Koeffizienten des Nennerpolynoms von G , jedoch nicht die Koeffizienten des Zählerpolynoms, das die Nullstellen des Systems bestimmt. Die bereits vorhandenen Nullstellen der Strecke werden somit bei der Polvorgabe nicht verschoben.

Es kann lediglich geschehen, daß eine Nullstelle der Strecke durch einen Pol kompensiert wird. Das läßt sich natürlich durch geeignete Polvorgabe stets vermeiden. Es kann aber unter Umständen nützlich sein, eine für das dynamische Verhalten ungünstige Nullstelle auf diese Weise zu beseitigen.

Wir gingen bei unseren Betrachtungen von der Regelungsnormalform aus. Es ist jedoch klar, daß der Satz (12.25) für jede Zustandsbeschreibung gilt. Denn die Lage der Nullstellen (und Eigenwerte) eines Systems ist von der Wahl der Zustandsdarstellung unabhängig, was auch ohne förmlichen Beweis einleuchtend ist, da es sich um physikalische Systemeigenschaften handelt.

12.2.5 Polvorgabe bei mehreren Eingangsgrößen

Liegt ein System mit *mehreren* Eingangsgrößen vor, so läßt sich dieser Fall in einfacher Weise auf Systeme mit *einer* Eingangsgröße zurückführen, wenn man das Gesamtsystem derart in Teilsysteme zerlegen kann, daß auf jedes Teilsystem nur *eine* Eingangsgröße u_i wirkt. Diese Situation liegt beispielsweise bei den in Kapitel 9 behandelten Mehrfachregelstrecken vor. Bild 12/5 zeigt nochmals eine solche Strecke.

Von den Eingangsgrößen her gesehen, zerfällt diese Mehrfachregelstrecke in zwei Teilsysteme. Teilsystem 1, bestehend aus den durch ihre Übertragungsfunktionen G_{11} und G_{21} gekennzeichneten Blöcken, wird nur durch u_1 angesteuert. Entsprechend wird Teilsystem 2, das aus den durch G_{12} und G_{22} bezeichneten Blöcken besteht, nur durch u_2 beeinflußt. Führt man für Teilsystem 1 einen Zustandsvektor ein, so wird es durch eine Differentialgleichung

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1$$

beschrieben. Den Zustandsvektor x_1 kann man gemäß

$$u_1 = -r_1^T x_1$$

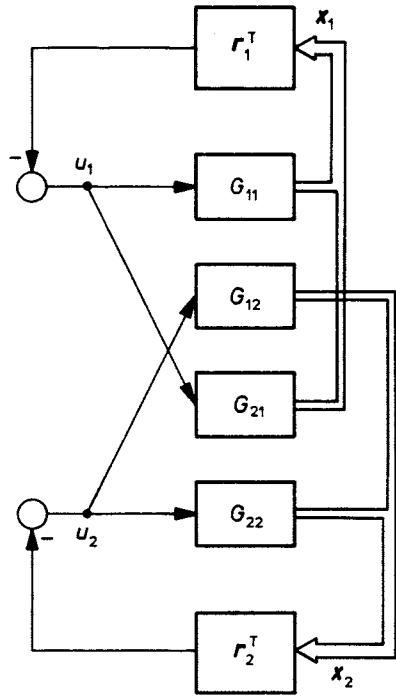


Bild 12/5. Polvorgabe bei einer Mehrfachregelung (ohne Berücksichtigung der Kopplung)

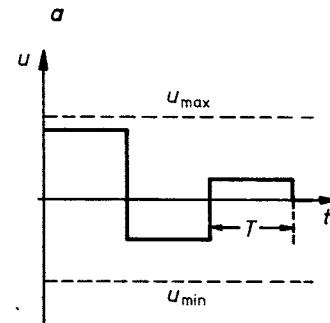
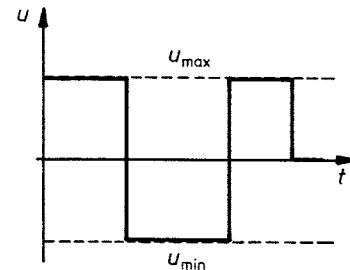


Bild 12/6. Prinzipieller Zeitverlauf der Stellgröße beim zeitoptimalen (a) und schrittoptimalen Entwurf (b)

zurückführen und r_1^T in der bisherigen Weise so bestimmen, daß die Eigenwerte des Teilsystems 1 vorgegebene Lagen annehmen. Entsprechend kann mit Teilsystem 2 verfahren werden, womit die Eigenwerte des Gesamtsystems in gewünschter Weise festgelegt sind.

Bei einem derartigen Entwurf werden die Ausgänge der Mehrfachregelung nicht entkoppelt. Dennoch wird man ein passables dynamisches Verhalten erwarten dürfen, da die Eigenwerte des geschlossenen Systems in zweckmäßiger Weise vorgeschrieben wurden.

Eine kräftige Einschränkung bei dem hier beschriebenen Vorgehen besteht darin, daß u_1 nur mit der Rückführung von x_1 und nicht mit der Rückführung des Zustandsvektors

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

des Gesamtsystems gebildet wird. Entsprechendes gilt für u_2 . Dadurch wird aber der Entwurf so einfach.

Der allgemeine Fall der Polvorgabe bei einem System mit mehreren Eingangsgrößen ist schwieriger zu behandeln. Hierfür sei auf [12.2] bis [12.5] verwiesen, wobei anzumerken ist, daß die beiden letztgenannten Bücher für Ingenieure recht mühsam zu lesen sind.

12.3 Der Entwurf auf endliche Einstellzeit

12.3.1 Formulierung der Entwurfsaufgabe

Von den drei Grundforderungen

- Stabilität,
- gutes Folgeverhalten und
- gutes Störverhalten,

die an einen Regelkreis gestellt werden, steht in der modernen Regelungstheorie das Erzielen eines *optimalen* Folgeverhaltens im Vordergrund. Die zugrundeliegende Entwurfsaufgabe läßt sich wie folgt formulieren:

Gegeben ist ein dynamisches System, das sich zu einem Anfangszeitpunkt $t = t_0$ in einem Zustand $x(t_0)$ befindet,

det, sowie ein Güteindex, der einen einfachen Vergleich verschiedener Übergangsvorgänge der Systemvariablen bezüglich wichtiger Leistungskennwerte wie Übergangszeit, Energieverbrauch usw. ermöglicht. Gesucht ist ein zulässiger zeitlicher Verlauf der Steuergrößen, der das System aus dem Anfangszustand $x(t_0)$ derart in einen vorgegebenen Endzustand $x(t_e)$ steuert, daß der Güteindex einen Extremwert (Maximum oder Minimum) annimmt.

Ein häufig verwendeteter Güteindex ist die Einstellzeit, d.h. das Zeitintervall $t_e - t_0$ zwischen dem Beginn des Regelvorgangs und dem Erreichen des Endzustands. Die Forderung, dieses Zeitintervall zu einem Minimum zu machen, führt im allgemeinen auf einen nichtlinearen Regler, der in Abhängigkeit vom momentanen Systemzustand jeweils die größte positive oder negative vom Stellglied aufbringbare Stellgröße auf die Regelstrecke schaltet [12.6]. Einen typischen Stellverlauf zeigt Bild 12/6a.

Bei Abtastsystemen können die Stellgrößen nur in den Abtastmomenten verändert werden, wobei die Zeitpunkte des Abtastens meist durch die Arbeitsweise des Regelsystems fest vorgegeben sind [12.7]. An die Stelle der Forderung nach einer kürzesten Einstellzeit tritt dann die nach dem Erreichen des Endzustands in einer geringsten Zahl von Abtastschritten. Im Gegensatz zum zeitoptimalen Entwurf, bei dem die Stellamplituden festgelegt und die Umschaltzeitpunkte zu bestimmen sind, liegen beim schrittoptimalen Entwurf (auch: Entwurf auf endliche Einstellzeit, Deadbeat-Entwurf, [12.8] bis [12.10]) die Umschaltzeitpunkte fest und die Stellamplituden sind zu bestimmen. Eine typische Stellfolge bei konstanter Abtastdauer zeigt Bild 12/6b; aus der Darstellung wird ersichtlich, daß die Stellamplituden im Normalbetrieb nicht die Begrenzungen erreichen. Wie wir im folgenden zeigen werden, liefert der schrittoptimale Entwurf – im Gegensatz zum zeitoptimalen – einen linearen Regler, der sich durch große Einfachheit auszeichnet.

13 Synthese der Regelung einer Verladebrücke im Zustandsraum

Die in Kapitel 12 angegebenen Verfahren des Regler- und Beobachterentwurfs im Zustandsraum sollen im folgenden auf ein etwas komplexeres System, nämlich die Steuerung einer Verladebrücke, angewendet werden. Zunächst werden hierfür die nichtlinearen Gleichungen der Regelstrecke abgeleitet, für kleine Pendelwinkel linearisiert und in eine für den Entwurf brauchbare Form gebracht. Anschließend werden die Verfahren der Polvorgabe, des Entwurfs auf endliche Einstellzeit und des Beobachterentwurfs auf diese Regelstrecke angewendet. Abschließend werden die Reglerentwürfe bezüglich des Entwurfs- und Realisierungsaufwands, des Zeitverhaltens und des Stellauwands miteinander verglichen.

13.1 Beschreibung der Regelstrecke

13.1.1 Die Struktur der Regelstrecke

Verladebrücken haben die Aufgabe, Lasten an einer vorgegebenen Stelle aufzunehmen, sie über eine bestimmte Strecke zu befördern und an einer festgelegten Stelle abzusetzen. Bei der Automatisierung dieses Vorgangs tritt das Problem auf, daß die Last durch das Anfahren und Abbremsen der Laufkatze zu unerwünschten Pendelungen angestoßen wird, die wegen der geringen Eigendämpfung des Systems nur langsam abklingen und damit das Aufnehmen und Absetzen der Last erschweren und verzögern [13.1 bis 13.3]. Da die Förderleistung der Verladebrücke in starkem Maße von der Schnelligkeit bestimmt wird, mit der sie ein Arbeitsspiel durchführen kann, muß man im Interesse einer hohen Förderleistung versuchen, diese Pendelungen durch regelungstechnische Maßnahmen zu verhindern oder wenigstens auf ein tragbares Maß zu vermindern. Wegen ihrer wirtschaftlichen Bedeutung wurde diese Aufgabe schon verschiedentlich mit den Verfahren der zeitoptimalen Regelung bearbeitet [13.4 bis 13.8]; im folgenden soll sie mit den in Kapitel 12 abgeleiteten Methoden der Polvorgabe und des Entwurfs auf endliche Einstellzeit gelöst werden. Die Entwurfsaufgabe kann wie folgt formuliert werden:

Steuere den Antriebsmotor des Katzfahrzeugs in Abhängigkeit vom momentanen Zustand des Systems derart, daß der Greifer von einer Anfangsposition in eine vorgegebene Endposition gebracht wird und dort zur Ruhe kommt.

Bei der Lösung dieser Aufgabe soll angenommen werden, daß sich während des Fördervorgangs weder das Gewicht der Last noch die Seillänge merklich ändert, so daß man die Systemparameter als konstant ansehen kann; der Fall veränderlicher Seillänge ist in [13.9] behandelt.

Die Gleichungen des aus der Laufkatze und dem Greifer bestehenden mechanischen Systems leitet man mit Hilfe von Bild 13/1 ab, wobei man zur Vereinfachung annimmt, daß sich alle Bewegungen nur in der Bildebene abspielen, also beispielsweise die Katze nicht senkrecht zur Papierebene verfahren wird. Die momentane Position des Greifers kann daher in eindeutiger Weise durch zwei Koordinaten, also beispielsweise durch die Katzen-

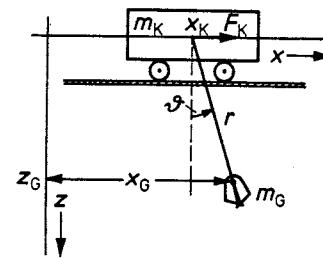


Bild 13/1. Geräteplan zur Steuerung der Verladebrücke

x_K	Position der Laufkatze
x_G, z_G	Position des Greifers
m_K	Masse der Laufkatze
m_G	Masse des Pendels
r	Länge des Seils
ϑ	Seilwinkel
F_K	Vortriebskraft

position x_K und wahlweise durch die Greiferposition x_G oder den Seilwinkel ϑ beschrieben werden. Die horizontale Beschleunigung der Katze erhält man aus dem Kräftegleichgewicht

$$m_K \ddot{x}_K = F_K + S \sin \vartheta, \quad (13.1)$$

wobei F_K die auf die Katze wirkende Antriebskraft und S die Seilkraft ist. Die auf den Greifer in horizontaler und vertikaler Richtung wirkenden Kräfte entnimmt man Bild 13/1 mit $G_G = m_G g$ zu

$$m_G \ddot{x}_G = -S \sin \vartheta \quad \text{und} \quad (13.2)$$

$$m_G \ddot{z}_G = m_G g - S \cos \vartheta. \quad (13.3)$$

Zu diesen Kräftegleichungen treten noch zwei kinematische Bedingungen hinzu, mit denen man die konstante Seillänge berücksichtigt¹⁾:

$$x_G = x_K + r \sin \vartheta, \quad (13.4)$$

$$z_G = r \cos \vartheta. \quad (13.5)$$

Zweimalige Differentiation dieser Zwangsbedingungen nach der Zeit liefert mit $r = \text{konstant}$ die Beziehungen

$$\ddot{x}_G = \ddot{x}_K + r \cos \vartheta \ddot{\vartheta} - r \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2 \quad \text{und}$$

$$\ddot{z}_G = -r \sin \vartheta \ddot{\vartheta} - r \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2,$$

mit deren Hilfe man aus (13.2) und (13.3) die Variablen \ddot{x}_G und \ddot{z}_G eliminieren kann:

$$m_G \ddot{x}_K + m_G r \cos \vartheta \ddot{\vartheta} - m_G r \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2 = -S \sin \vartheta,$$

$$-m_G r \sin \vartheta \ddot{\vartheta} - m_G r \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 = m_G g - S \cos \vartheta.$$

Aus der zweiten Gleichung kann man jetzt die Seilkraft S berechnen und in die erste Gleichung einsetzen; dieses führt nach einigen elementaren Zwischenrechnungen auf die einfache nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{x}_K \cos \vartheta + r \ddot{\vartheta} = -g \sin \vartheta.$$

1) Bei veränderlicher Seillänge ist es günstiger, die Bewegungsgleichungen mittels des Lagrange-Formalismus [13.10] abzuleiten.

Entsprechend erhält man durch Einsetzen der Seilkraft S in (13.1) die ebenfalls nichtlineare Differentialgleichung

$$(m_K + m_G) \ddot{x}_K + m_G r \cos \vartheta \dot{\vartheta} - m_G r \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2 = F_K.$$

Die Bewegungen des aus der Katze und dem pendelnd aufgehängten Greifer bestehenden mechanischen Systems werden also durch zwei gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben; insgesamt liegt also ein dynamisches System vierter Ordnung vor.

Im allgemeinen sind bei Verladebrücken die Winkelausschläge klein, so daß man mit guter Näherung $\cos \vartheta \approx 1$ und $\sin \vartheta \approx \vartheta$ setzen kann. Außerdem sind die auftretenden Winkelgeschwindigkeiten meist so gering, daß quadratische Ausdrücke in $\dot{\vartheta}$ vernachlässigt werden können. Mit diesen Annahmen erhält man die linearisierten Bewegungsgleichungen zu

$$(m_K + m_G) \ddot{x}_K + m_G r \ddot{\vartheta} = F_K, \quad (13.6)$$

$$\ddot{x}_K + r \ddot{\vartheta} = -g \vartheta. \quad (13.7)$$

Diese Gleichungen sind noch nicht in der für den Entwurf im Zustandsraum benötigten Zustandsform. Um diese Form herzustellen, löst man das Gleichungssystem nach den beiden Variablen \ddot{x}_K und $\ddot{\vartheta}$ auf und erhält das Gleichungspaar

$$\ddot{x}_K = \frac{1}{m_K} F_K + \frac{m_G}{m_K} g \vartheta, \quad (13.8)$$

$$r \ddot{\vartheta} = -\frac{1}{m_K} F_K - \left(1 + \frac{m_G}{m_K}\right) g \vartheta, \quad (13.9)$$

das in der gewünschten Zustandsform ist.

Damit sind die Gleichungen für das mechanische System abgeleitet. Den Antrieb der Katze wollen wir vereinfacht durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung mit der Verstärkung K_M und der Zeitkonstante T_M , also durch die Differentialgleichung

$$T_M \dot{F}_K + F_K = K_M u_A,$$

beschreiben, wobei u_A die Steuerspannung des Motors

ist. Bild 13/2 zeigt die Gesamtstruktur der aus dem Antrieb und dem mechanischen System bestehenden Regelstrecke. Um zu einer Vektordifferentialgleichung zu gelangen, führen wir nun Zustandsvariable wie folgt ein:

$$x_1 = x_K; x_2 = \dot{x}_K; x_3 = \vartheta; x_4 = \dot{\vartheta}; x_5 = F_K; u = u_A.$$

Schreiben wir die Systemgleichungen in diesen neuen Variablen, dann erhalten wir die Vektordifferentialgleichung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_G}{m_K} g & 0 & \frac{1}{m_K} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \frac{m_G}{m_K}\right) \frac{g}{r} & 0 & -\frac{1}{m_K r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_M}{T_M} \end{bmatrix} u. \quad (13.10)$$

Die Teilsysteme Laufkatze, Greifer und Antrieb sind durch die Unterteilung der Systemmatrizen gekennzeichnet.

Am Strukturdiagramm der Regelstrecke erkennt man deutlich den Mechanismus der Schwingungsanregung bei einer Beschleunigung der Katze durch ihren Antrieb; außerdem sieht man, daß die Schwingungen des Greifers auf die Bewegung der Katze um so stärker zurückwirken, je größer das Verhältnis der Greifermasse zur Masse der Katze ist. Setzt man beispielsweise $K_M = 100 \text{ N/V}$, $T_M = 1 \text{ s}$, $m_K = 1000 \text{ kg}$, $m_G = 4000 \text{ kg}$ und $r = 10 \text{ m}$, dann ergeben sich die in Bild 13/3 gezeigten Einschwingvorgänge bei einem Sprung der Steuerspannung von 10 V; die Anfangsbedingungen wurden zu $x_1(0) = 2 \text{ m}$, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = 0$ vorgegeben. Da nach dem Hochlaufen des Motors die Katze konstant beschleunigt wird, führt der Greifer ungedämpfte Pendelungen der Periode $T = 2,84 \text{ s}$ um einen von Null verschiedenen Mittelwert aus, die sich abgeschwächt auf die Geschwindigkeit der Katze übertragen. Die Auswirkungen dieser Pendelungen auf die Position der Katze sind dagegen wegen der

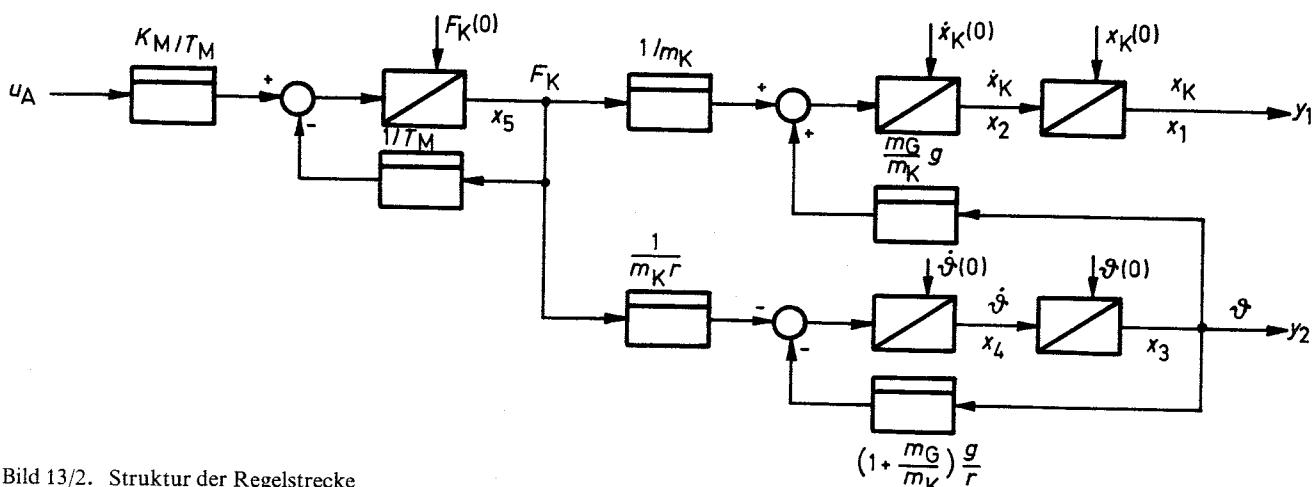


Bild 13/2. Struktur der Regelstrecke

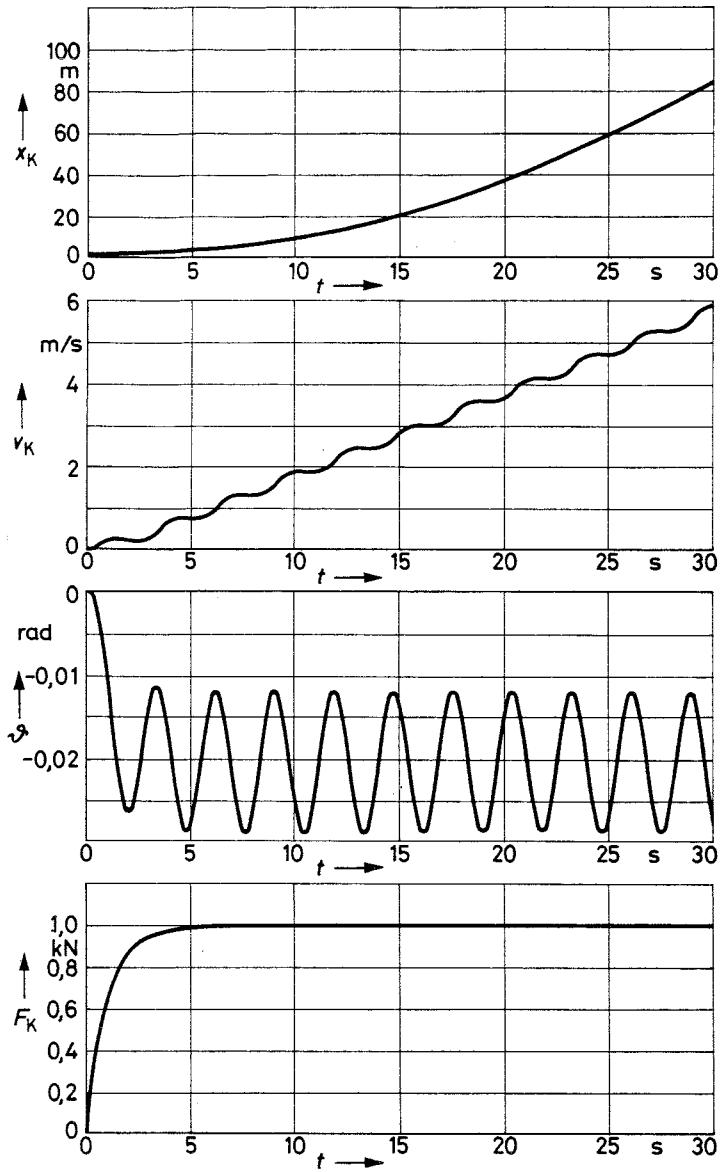


Bild 13/3. Übergangsvorgänge der Regelstrecke

x_K Katzenposition
 v_K Katzen Geschwindigkeit
 θ Pendelwinkel
 F_K Vortriebskraft

glättenden Wirkung der Integration von \dot{x}_K auf x_K gering. Die wirklichen Bewegungen des Greifers werden durch den Luftwiderstand des Greifers und die Reibung im Aufhängepunkt des Seils leicht gedämpft; diese Dämpfung kann man bei Bedarf näherungsweise durch eine P-Rückführung von x_4 auf die Summiererstelle für \dot{x}_4 nachbilden.

13.1.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Strecke

Eine wichtige Voraussetzung für die Durchführbarkeit des Entwurfs der Zustandsregler ist, daß die Regelstrecke von der Steuerspannung des Motors her steuerbar und durch – noch festzulegende – Sensoren beobachtbar ist. Eine Betrachtung der Struktur der Regelstrecke läßt folgendes vermuten: Für ein reales System mit einer von Null verschiedenen Verstärkung K_M und endlichen Massen m_K und m_G kann jede Zustandsvariable durch u_A beeinflußt werden; damit ist das System *vollständig*

steuerbar. Von der Ausgangsgröße y_1 (Katzposition) ist das System dann *beobachtbar*, wenn die Greifermasse m_G von Null verschieden ist, allerdings dürfte die Beobachtbarkeit der Zustandsgrößen x_3 und x_4 bei einem kleinen Massenverhältnis m_G/m_K gering sein. Von der Ausgangsgröße y_2 (Seilwinkel) allein dagegen ist das System nicht vollständig beobachtbar, da aus y_2 nicht auf die Position und die Geschwindigkeit der Katze geschlossen werden kann.

Diese physikalischen Überlegungen wollen wir im folgenden durch Berechnen der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix verifizieren, wobei wir diese Berechnung hier analytisch durchführen wollen; in der Praxis wird man diese etwas mühsame Rechnung im allgemeinen numerisch mit dem Digitalrechner durchführen.

Die Steuerbarkeitsmatrix Q_S ist für $n=5$ definiert durch

$$Q_S = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5] \quad \text{mit} \quad (13.11)$$

$$q_i = b, \quad q_{i+1} = A q_i. \quad (13.12)$$

Für die Verladebrücke ist damit

$$q_1 = b = \frac{K_M}{T_M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$q_2 = A b = \frac{K_M}{T_M} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_K} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_K r} \\ -\frac{1}{T_M} \end{bmatrix},$$

$$q_3 = A q_2 = \frac{K_M}{T_M} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_K} \\ \frac{1}{m_K T_M} \\ -\frac{1}{m_K r} \\ \frac{1}{m_K r T_M} \\ \frac{1}{T_M^2} \end{bmatrix},$$

$$q_4 = A q_3 = \frac{K_M}{T_M} \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_K T_M} \\ -\frac{1}{m_K} \left[\frac{m_G}{m_K} \cdot \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \\ \frac{1}{m_K r T_M} \\ \frac{1}{m_K r} \left[\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \\ -\frac{1}{T_M^3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_5 = \mathbf{A} \mathbf{q}_4 = \frac{K_M}{T_M} \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_K} \left[\frac{m_G}{m_K} \cdot \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \\ \frac{1}{m_K T_M} \left[\frac{m_G}{m_K} \cdot \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \\ \frac{1}{m_K r} \left[\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \\ -\frac{1}{m_K r T_M} \left[\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \\ \frac{1}{T_M^4} \end{bmatrix}.$$

Das System ist vollständig steuerbar, wenn die Matrix \mathbf{Q}_S den Rang $n=5$ hat, ihre Spaltenvektoren also linear unabhängig sind. Dieses ist der Fall, wenn die Determinante von \mathbf{Q}_S nicht identisch Null ist. Nach einer längeren, aber elementaren Rechnung erhält man diese zu

$$\det \mathbf{Q}_S = \left(\frac{K_M}{T_M} \right)^5 \left(\frac{g}{m_K^2 r^2} \right)^2.$$

Das System ist demnach vollständig steuerbar, wenn K_M von Null verschieden ist und T_M, m_K und r endliche Werte annehmen. Da diese Bedingungen für K_M, T_M, m_K und r bei einem realen System immer erfüllt sind, ist die Steuerbarkeit der Verladebrücke gesichert.

Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \mathbf{q}_3^T \\ \mathbf{q}_4^T \\ \mathbf{q}_5^T \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

$$\text{mit } \mathbf{q}_1^T = \mathbf{c}^T \text{ und } \mathbf{q}_{i+1}^T = \mathbf{q}_i^T \mathbf{A} \quad (13.14)$$

erhalten wir bei einer Messung der Katzposition, also mit

$$\mathbf{c}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ zu}$$

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_G}{m_K} g & 0 & \frac{1}{m_K} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_G}{m_K} g - \frac{1}{m_K T_M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_G}{m_K} g \left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} & 0 - \frac{1}{m_K} & \left[\frac{m_G}{m_K} \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von \mathbf{Q}_B berechnet man leicht zu

$$\det \mathbf{Q}_B = \left(\frac{m_G}{m_K} g \right)^2 \frac{1}{m_K} \left(\frac{g}{r} + \frac{1}{T_M^2} \right).$$

Die Verladebrücke ist also durch einen Sensor für die Katzposition vollständig beobachtbar, wenn die Greifermasse m_G verschieden von Null ist und m_K, r und T_M endliche Werte annehmen. Für $m_G=0$ entfällt die Pendelrückwirkung auf die Katze, was sich formal dadurch bemerkbar macht, daß die dritte und vierte Spalte von \mathbf{Q}_B zu Nullvektoren werden.

Bei einer Erfassung des Pendelwinkels allein, also mit

$$\mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

erhalten wir die Beobachtbarkeitsmatrix zu:

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} & 0 & -\frac{1}{m_K r} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} & \frac{1}{m_K r T_M} \\ 0 & 0 & \left[\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} \right]^2 & 0 & \frac{1}{m_K r} \left[\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} - \frac{1}{T_M^2} \right] \end{bmatrix}.$$

Da die ersten beiden Spalten dieser Matrix linear abhängig sind, ist das System durch einen Sensor für den Pendelwinkel allein nicht vollständig beobachtbar. Mit Hilfe eines solchen Sensors kann daher nur der Zustand, des aus Antrieb und Greifer bestehenden Teilsystems dritter Ordnung rekonstruiert werden.

13.2 Reglerentwurf durch Polvorgabe

13.2.1 Festlegen der Pole des geschlossenen Kreises

Bevor wir uns dem eigentlichen Entwurf zuwenden, wollen wir uns noch die Eigenwerte der Regelstrecke besorgen und Überlegungen zur Polvorgabe des geschlossenen Regelkreises anstellen. Zunächst berechnen wir die charakteristische Gleichung der Regelstrecke aus

$$P(s) = |sI - \mathbf{A}| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -\frac{m_G}{m_K} g & 0 & -\frac{1}{m_K} \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} & s & \frac{1}{m_K r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s + \frac{1}{T_M} \end{bmatrix} \text{ zu}$$

$$P(s) = s^2 \left(s + \frac{1}{T_M} \right) \left[s^2 + \left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r} \right]. \quad (13.15)$$

Für $P(s)=0$ erhalten wir daraus die Pole der Regelstrecke zu

$$s_{1,2} = 0,$$

$$s_{3,4} = \pm j \sqrt{\left(1 + \frac{m_G}{m_K} \right) \frac{g}{r}} \quad \text{und}$$

$$s_5 = -\frac{1}{T_M}.$$

Der Doppelpol $s_{1,2}$ bei Null beschreibt die Dynamik des Katzfahrzeugs, die Pole $s_{3,4}$ auf der imaginären Achse die ungedämpften Pendelungen des Greifers und der Pol s_5 die Dynamik des Antriebs. Setzt man die

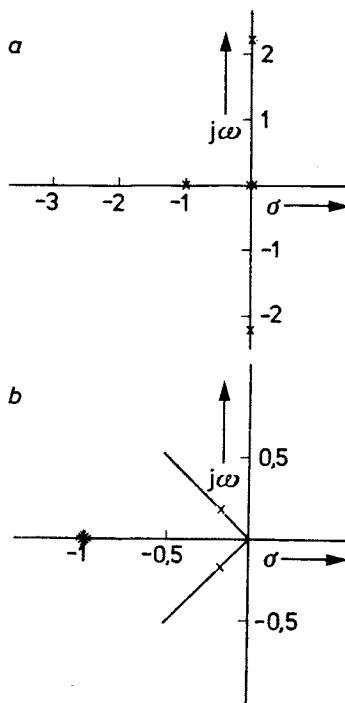


Bild 13/4. Zur Wahl der Polstellen beim Verfahren der Polvorgabe

- a Lage der Pole der Regelstrecke
- b Vorgegebene Pole des geschlossenen Regelkreises

– eine Vergrößerung der Bandbreite und damit Verstärkung des Einflusses von stochastischen Störungen.

Man sollte daher das System nur so schnell wie unbedingt notwendig machen, also die Pole nicht zu weit nach links verschieben.

Bei der betrachteten Regelstrecke liegt es nahe, die Polkonfiguration so vorzugeben, daß das Übertragungsverhalten des geschlossenen Kreises im wesentlichen durch ein hinreichend schnelles, gut gedämpftes Verzögerungsglied zweiter Ordnung bestimmt wird, während die Wirkung der verbleibenden Pole vernachlässigt werden kann.

Befassen wir uns zunächst mit der Auslegung des VZ_2 -Gliedes. Einen schnellen, gut gedämpften Verlauf mit einem geringen Überschwingen erhält man für einen Dämpfungs faktor $d = 0,7$. Die Kreisfrequenz ω_0 kann man z.B. durch die Forderung festlegen, daß die Sprungantwort nach einer vorgegebenen Zeit t_f einen Streifen von $\pm 2\%$ um den Endwert nicht mehr verläßt. Gemäß (1.28) ist die Sprungantwort des VZ_2 -Gliedes mit $T = 1/\omega_0$

$$h(t) = K - \frac{K}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-d^2} \omega_0 t + \psi);$$

die Einhüllende dieser gedämpften Schwingung ist

$$h_e(t) = K \pm \frac{K}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t}.$$

Die Abweichung vom Endwert $h_e(+\infty) = K$ ist dem Betrage nach

$$|h_e(t) - K| = \frac{K}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t}.$$

Für den Zeitpunkt t_f wird diese Abweichung 2% von K , also:

$$\frac{K}{50} = \frac{K}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t_f}, \quad \text{oder}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{dt_f} \ln \frac{50}{\sqrt{1-d^2}}. \quad (13.16)$$

Legen wir t_f zu 25 s fest, dann wird $\omega_0 = 0,243$, so daß das VZ_2 -Glied durch den Operator

$$G_2(s) = \frac{0,0592}{0,0592 + 0,344s + s^2}$$

beschrieben wird.

Die restlichen Pole legen wir auf den Punkt -1 der s -Ebene und damit genügend weit vom komplexen Pol entfernt. Das charakteristische Polynom erhalten wir damit zu

$$\begin{aligned}
 p(s) &= (s+1)^3 (s^2 + 0,344s + 0,0592) = \\
 &= s^5 + 3,344s^4 + 4,091s^3 + 2,201s^2 + 0,522s + 0,0592. \\
 \end{aligned} \quad (13.17)$$

Die Polverteilung des geschlossenen Kreises ist in Bild 13/4b dargestellt.

13.2.2 Berechnung der Reglerparameter

Nachdem wir nun das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises vorgegeben haben, können wir die Parameter des Rückführreglers gemäß (12.20) und (12.21) ermitteln. Das kann prinzipiell auf analytischem Wege geschehen; da wir aber hierbei die 5×5 -Matrix Q_s invertieren müssen, um q_s^T zu erhalten, und außerdem das Polynom für r^T in A berechnen müssen, ist eine numerische Lösung mit dem Digitalrechner in jedem Fall vorzuziehen. Das Ablaufdiagramm eines derartigen EDV-Programms, dem man gleichzeitig die Berechnung der Steuerbarkeitsmatrix Q_s und die Prüfung auf Steuerbarkeit überträgt, ist in Bild 13/5 dargestellt. Beschränkt man sich auf Systeme mit einer Eingangs- und

einer Ausgangsgröße, dann kann man ein solches Programm mit vergleichsweise geringem Aufwand erstellen.

Für die von uns betrachtete Regelstrecke wollen wir den Entwurf mit Hilfe eines solchen EDV-Programms durchführen, wobei wir die vorstehend genannten Systemparameter zugrunde legen. Durch Inversion der Steuerbarkeitsmatrix Q_s , die wir bereits in Abschnitt 13.1.2 berechnet haben, erhalten wir:

$$Q_s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 49,8 & 0 & 398 & 0,010 \\ 49,8 & 49,8 & 398 & 398 & 0 \\ 49,8 & 10,1 & 398 & 101 & 0 \\ 10,1 & 10,1 & 101 & 101 & 0 \\ 10,1 & 0 & 101 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bild 13/5. Ablaufdiagramm des EDV-Programms zur Polvorgabe bei Eingrößen-Regelkreisen

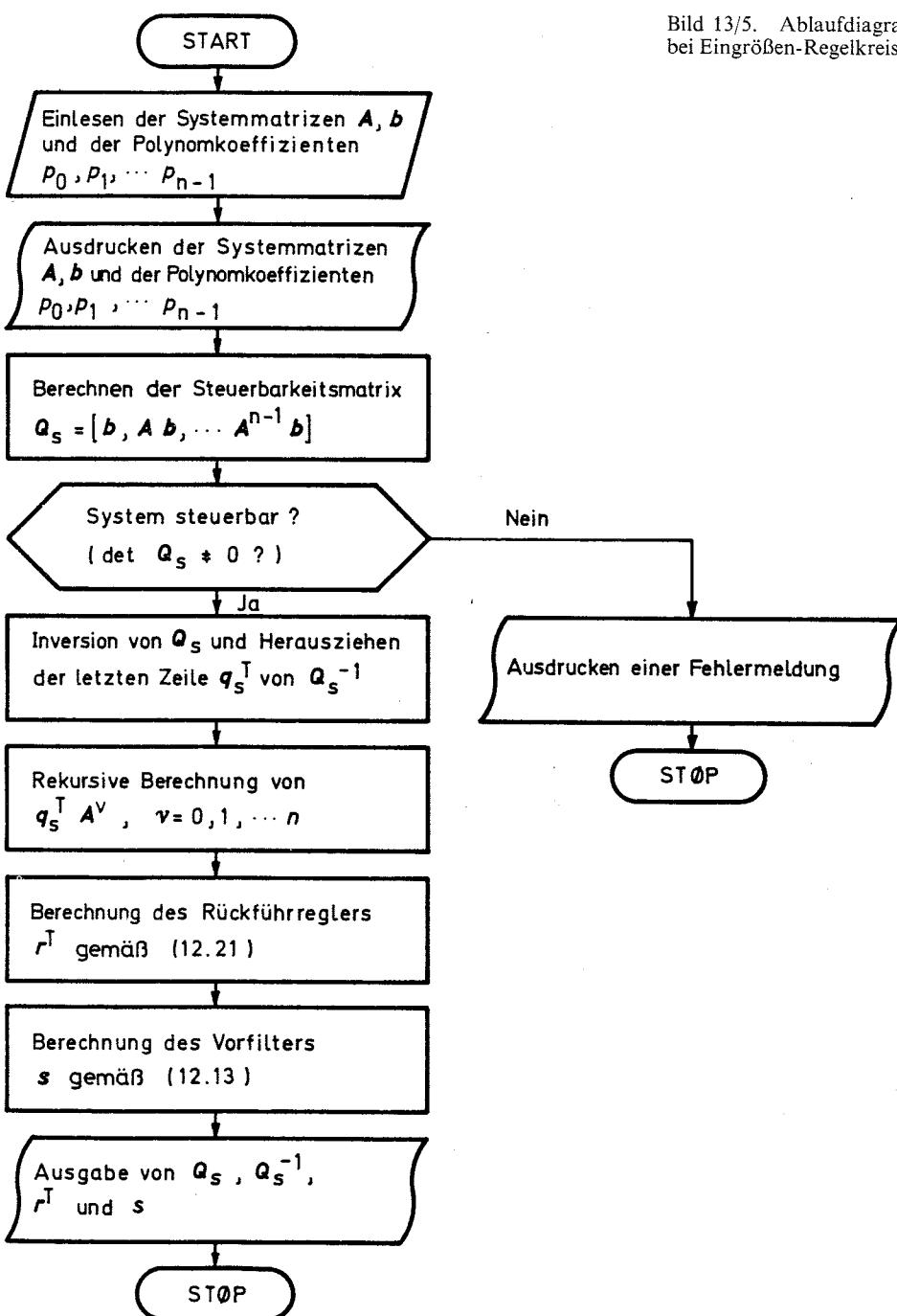


Bild 13/6. Struktur des durch Polvorgabe entworfenen Regelkreises

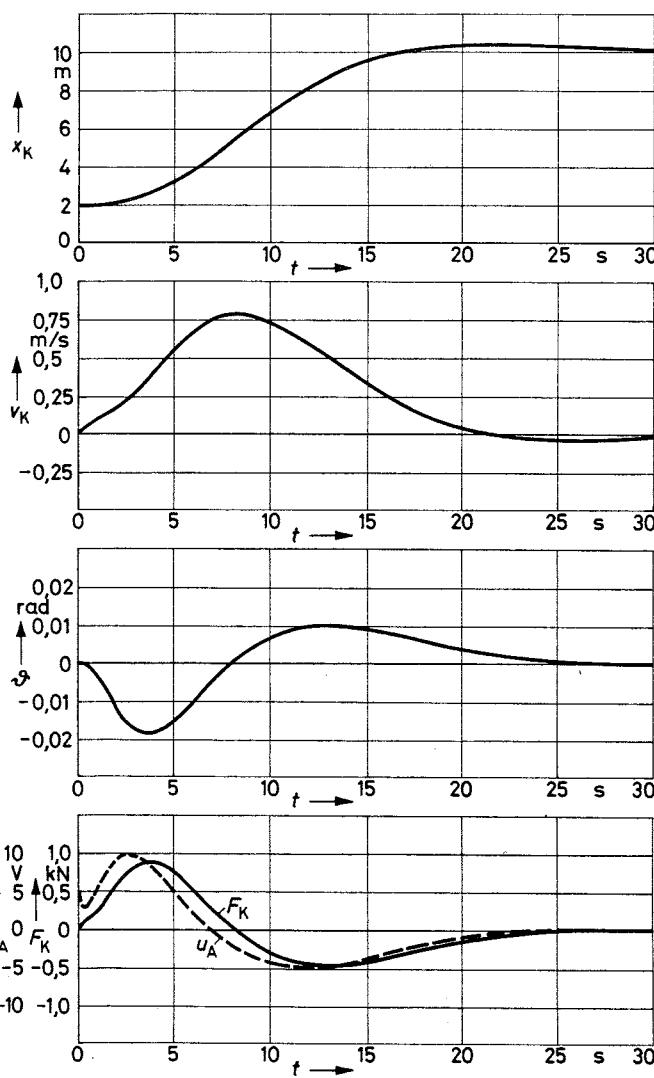
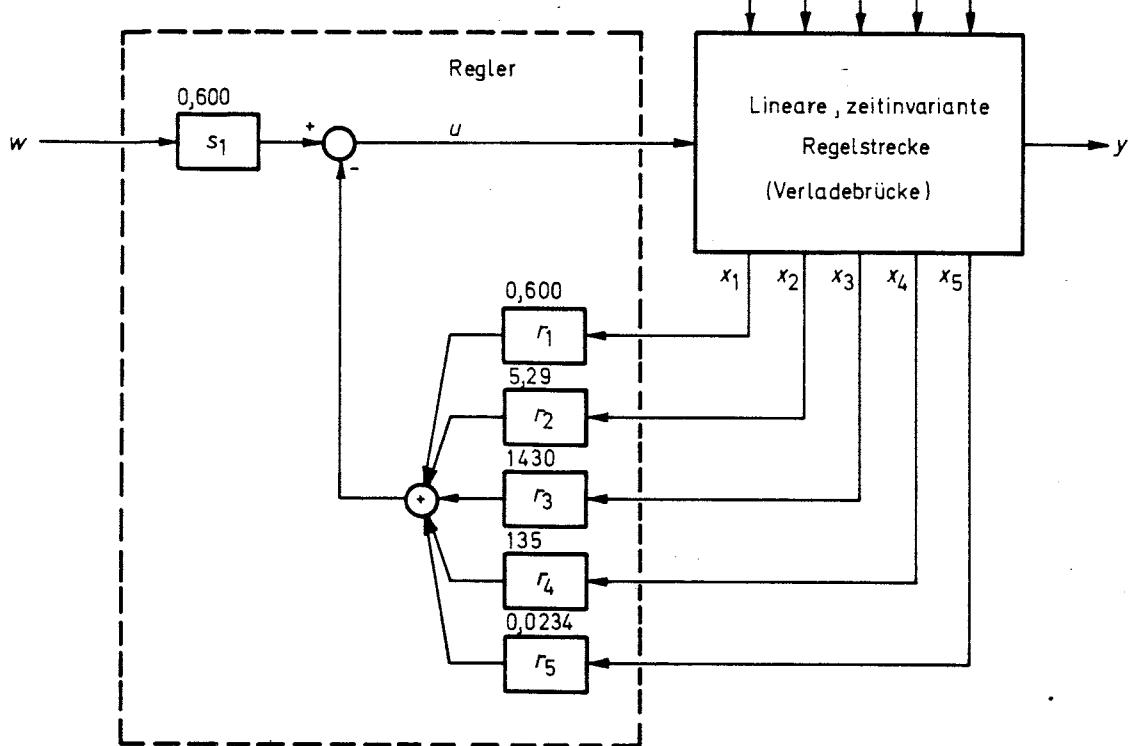


Bild 13/7. Übergangsvorgang des durch Polvorgabe entworfenen Regelkreises

x_K Katzposition
 v_K Katzgeschwindigkeit
 ϑ Pendelwinkel
 u_A Steuerspannung
 F_K Vortriebskraft

Die letzte Zeile von Q_s^{-1} ist also:

$$q_s^T = [10,1 \quad 0 \quad 101 \quad 0 \quad 0].$$

Einsetzen von q_s^T und der Systemmatrix A gemäß (13.10) in (12.21) bringt dann mit den Polynomkoeffizienten gemäß (13.17) die Reglermatrix r^T zu:

$$r^T = \left[0,600 \frac{V}{m} \quad 5,29 \frac{Vs}{m} \quad 1430 \frac{V}{rad} \quad 135 \frac{Vs}{rad} \quad 0,0234 \frac{V}{N} \right]. \quad (13.18)$$

Die Vorfilterverstärkung erhält man dann mit (12.13) zu:

$$s_1 = 0,600 \frac{V}{m}. \quad (13.19)$$

Bild 13/6 zeigt die Struktur des durch Polvorgabe ausgelegten Regelkreises. Die relativ großen Rückführverstärkungen bei x_3 und x_4 sind auf die Messung von ϑ und $\dot{\vartheta}$ in rad bzw. rad/s zurückzuführen.

Die Übergangsvorgänge der Zustandsgrößen x_1 , x_2 , x_3 und x_5 und die Steuerspannung u sind in Bild 13/7 für einen Sollwertsprung von

$$w = 10 \text{ m}$$

und die Anfangsbedingungen:

$$x_1(0) = 2 \text{ m}, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad x_5(0) = 0$$

mit dem Digitalrechner errechnet und *geplottet*¹⁾. Wie verlangt, erreicht die Katzposition x_1 nach etwa 25 s den neuen Sollwert, wobei der Einschwingvorgang gut gedämpft und praktisch überschwingungsfrei ist. Da auch die anderen Variablen ein günstiges Verhalten zeigen, kann man den Entwurf als durchaus gelungen betrachten.

13.3 Entwurf auf endliche Einstellzeit

13.3.1 Berechnung der Reglerparameter

Die Entwurfsaufgabe bestehe nun darin, die Steuerspannung des Katzantriebs so vorzugeben, daß der Greifer aus einer Anfangsposition $x_1(0)$ in die vorgegebene Sollposition $x_1(t_f) = w$ verfahren wird und dort zur Ruhe kommt, wobei dieser Vorgang in einer endlichen Zeit abgeschlossen sein soll. Mit dem in Abschnitt 12.3 abgeleiteten Verfahren des Entwurfs auf endliche Einstellzeit kann man diese Aufgabe durch einen schrittoptimalen Abtastregler lösen, der aus einer proportionalen Rückführung der Zustandsvariablen und einer konstanten Vorwärtsverstärkung besteht (Bild 13/8). Die Entwurfsaufgabe reduziert sich damit auf die Bestimmung der fünf Rückführparameter r_1 bis r_5 und der Vorwärtsverstärkung s_1 aus den Streckenparametern nach dem in Abschnitt 12.3 angegebenen Verfahren. Wie dort abgeleitet wurde, kann mit diesem Regler der Einstellvorgang in $n = 5$ Abtastschritten, also in einer Einstellzeit von $t_f = 5 T$, durchgeführt werden. Da die vorliegende Regelstrecke linear ist und konstante Beiwerte

1) Wiedergabe der Kurven mit einem Zeichengerät (*Plotter*).

aufweist, kann man die Reglerparameter im Prinzip analytisch berechnen; dieses Verfahren ist aber bei einem System dritter und höherer Ordnung wegen des im allgemeinen hohen Aufwands wenig empfehlenswert. Kosten günstiger ist eine numerische Berechnung der Parameter mit einem Digitalrechner, wobei man beispielsweise auf die in Abschnitt 11.5 beschriebenen Verfahren zur Berechnung der Transitionsmatrix zurückgreifen kann. Das Ablaufdiagramm eines derartigen EDV-Programms ist in Bild 13/9 gezeigt; es arbeitet wie folgt: Zunächst werden Parameter zur Steuerung des Programms und die Dimensionskennziffern n, n_i und p sowie die Systemmatrizen A und B eingelesen. Anschließend werden die Transitionsmatrix $\Phi(T)$ und das Faltungsintegral $G(T)$ durch Anwenden der Reihendarstellung oder durch numerische Integration der Differentialgleichungen des Systems berechnet; die Transitionsmatrix $\Phi(T)$ wird durch Anwenden eines der üblichen Inversionsalgorithmen invertiert. Die Steuerparameter sowie die Matrizen $A, B, \Phi(T), \Phi^{-1}(T)$ und $G(T)$ werden zum Abschluß dieser vorbereitenden Schritte zur Kontrolle ausgedruckt. Man schließt nun die rekursive Berechnung der Basisvektoren gemäß (12.46) und (12.47)

$$p[(i-1)n_i + j] = \Phi^{-(j-1)}(T) g_i(T) \quad . \quad (13.20)$$

mit $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ an und bildet aus diesen die Matrix P . Inversion dieser Matrix und Herausziehen des 1. und $n_i + 1$ -Zeilenvektors liefert die Rückführmatrix R , die wir noch zur Berechnung des Vorfilters S heranziehen. Zum Abschluß werden die Matrizen P, P^{-1}, R und S ausgedruckt.

Führt man eine solche Rechnung für die Verladebrücke mit den obengenannten Parametern durch, dann erhält man zunächst die Transitionsmatrix $\Phi(T)$ zu:

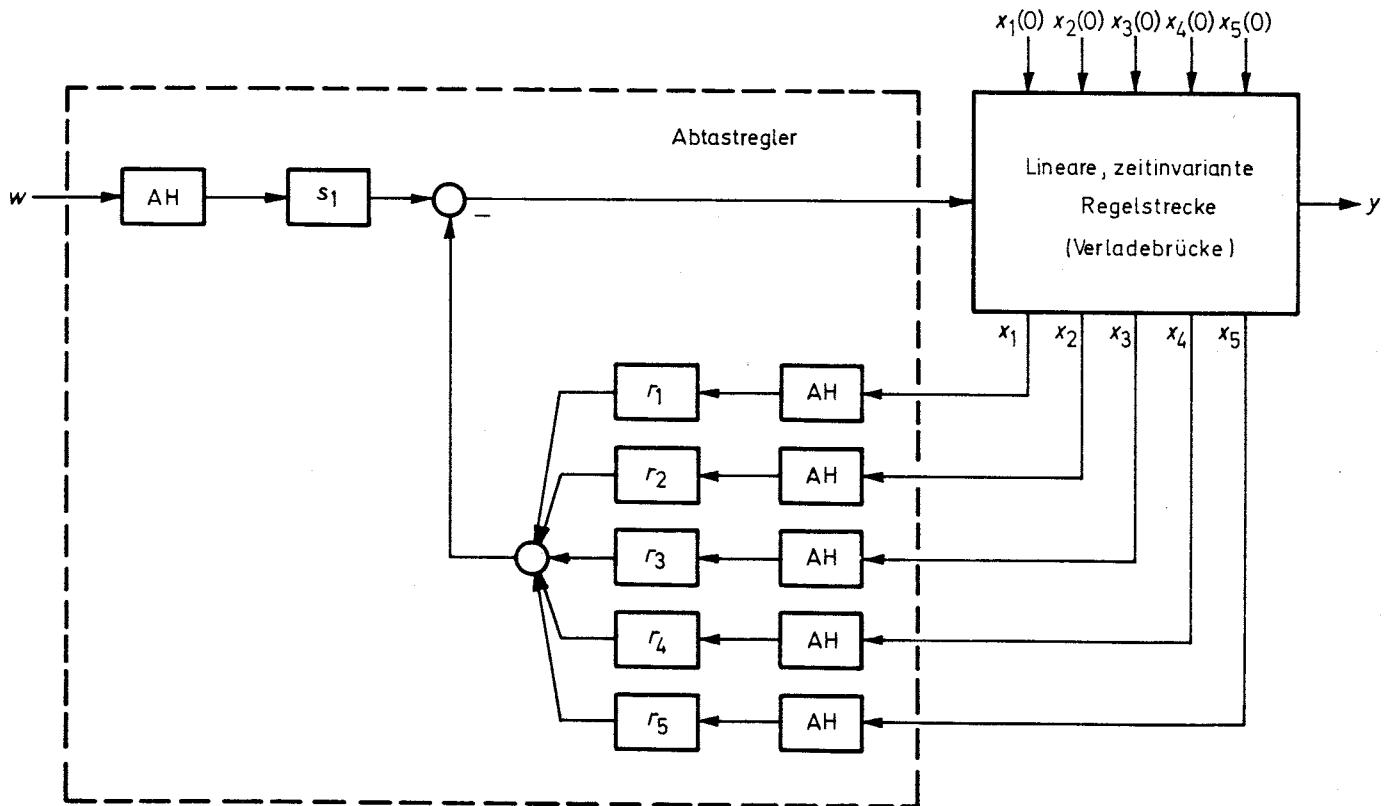
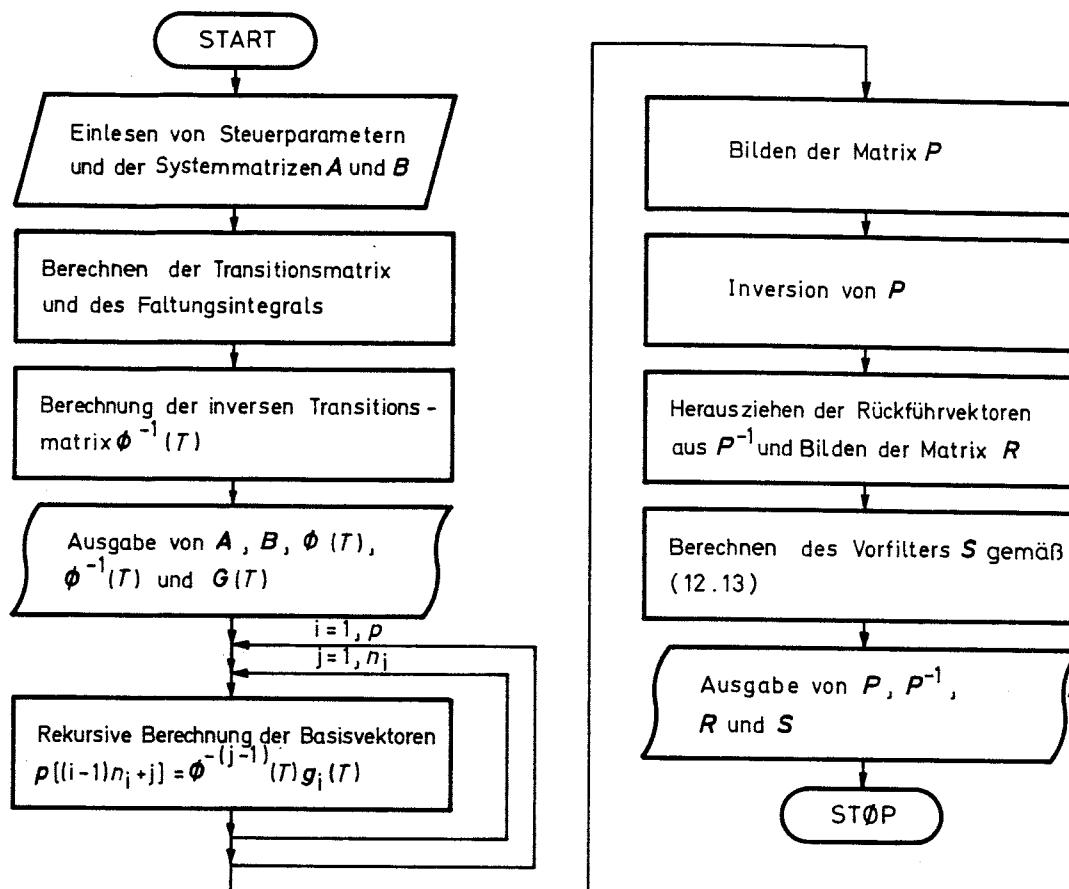


Bild 13/8. Struktur des auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreises

AH Abtast-Halteglied

Bild 13/9. Ablaufdiagramm des EDV-Programms zur Berechnung des schrittoptimalen Abtastreglers



$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7,376 & 43,60 & 7,307 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1 & -17,66 & 7,376 & -9,083 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 & 7,796 \cdot 10^{-2} & -0,4501 & 8,829 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 2,208 & 7,796 \cdot 10^{-2} & 3,619 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,738 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (13.21)$$

und das Faltungsintegral zu:

$$g(T) = \begin{bmatrix} 4,599 \\ -4,864 \\ -0,2501 \\ 0,2520 \\ 1,474 \cdot 10^4 \end{bmatrix}. \quad (13.22)$$

Berechnet man mit diesen Werten¹⁾ die Basisvektoren gemäß (13.20) und invertiert die aus den Basisvektoren aufgebaute P -Matrix, dann gewinnt man die Matrix P^T der dualen Basisvektoren; diese enthält in der ersten Zeile den gesuchten Rückführvektor, der sich hier zu

$$r^T = \begin{bmatrix} 1,094 \frac{V}{m} & 14,70 \frac{Vs}{m} & -397,3 \frac{V}{rad} & 2,011 \frac{Vs}{rad} & -2,146 \cdot 10^{-3} \frac{V}{N} \end{bmatrix} \quad (13.23)$$

ergibt. Einsetzen dieses Vektors in (12.13) liefert schließlich noch die Vorwärtsverstärkung zu:

¹⁾ Alle Zahlenangaben in den Einheiten kg, m, s, rad und V

$$s_1 = r_1 = 1,094 \frac{V}{m}. \quad (13.24)$$

Das Verhalten des Regelkreises mit diesem Regler bei einer Anfangsposition $x_1(0) = 2$ m und einer vorgegebenen Endposition $x_1(25) = 10$ m zeigt Bild 13/10; die Anfangsbedingungen der anderen Zustandsgrößen werden dabei zu Null angenommen, d. h. der Greifer ist anfänglich in Ruhe. Die Stellgrößen ergeben sich für diese Anfangswerte zu $u(0) = 8,75$ V, $u(5) = -10,2$ V, $u(10) = -10,4$ V, $u(15) = -9,2$ V und $u(20) = 0,5$ V. Zum Zeitpunkt $t_f = 25$ s ist die neue Endlage $x_1(t_f)$ auf weniger als einen Zentimeter genau erreicht. Die verbleibenden kleinen Abweichungen in den anderen Systemvariablen sind auf numerische Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Reglerparameter zurückzuführen und wirken sich auf die Position der Katze praktisch nicht aus. Während die Position der Katze während des Einstellvorgangs einen vergleichsweise glatten Verlauf zeigt, führen Katzgeschwindigkeit und Pendelwinkel Schwingungen aus, die durch das Anstoßen des Pendels durch die auf die Katze wirkenden Beschleunigungs- und Bremskräfte und die Rückwirkung der Greiferpendelungen auf die Katze hervorgerufen werden. Bedingt durch die relativ große Masse des Greifers wird die Geschwindigkeit der Katze kurzzeitig sogar negativ.

13.3.2 Realisierung des schrittoptimalen Abtastreglers

Den schrittoptimalen Abtastregler kann man gemäß Bild 13/8 dadurch realisieren, daß man die Zustands-

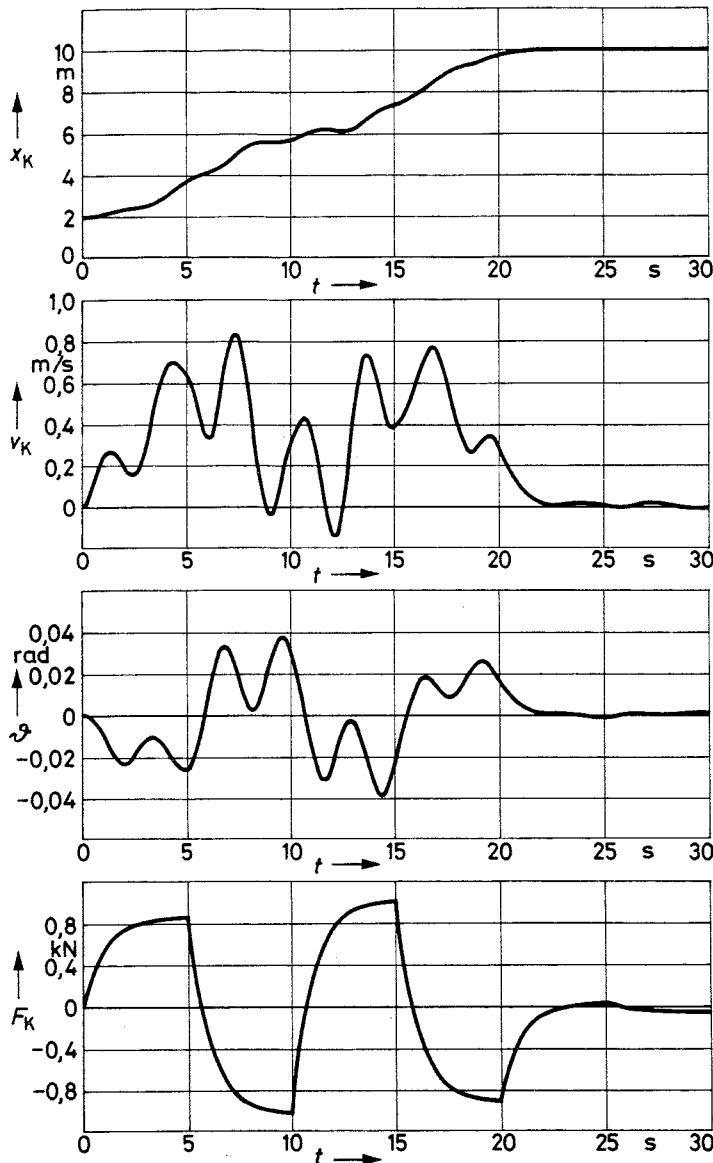


Bild 13/10. Übergangsvorgang des auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreises

x_K Katzposition
 v_K Katzgeschwindigkeit
 ϑ Pendelwinkel
 F_K Vortriebskraft

variablen mit der Tastperiode T abtastet und mit den konstanten Rückführparametern r_1 bis r_5 multipliziert; den konstanten Sollwert w bewertet man mit dem Faktor s_1 und addiert ihn zum Rückführsignal. Für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist die Tatsache entscheidend, daß die Parameter des Rückführreglers und der Vorverstärkung nur von den Streckenparametern und der Tastzeit T , nicht aber vom momentanen Zustand des Systems abhängen; sämtliche Parameter können daher *offline* berechnet und fest im Regler eingebaut werden. Den schrittoptimalen Abtastregler kann man also durchaus mit den Mitteln der analogen Regelungstechnik wie Potentiometern und Operationsverstärkern auf relativ einfache Weise realisieren.

In der einfachen Form nach Bild 13/8 nutzt der Abtastregler aber nicht alle Möglichkeiten des Entwurfs auf endliche Einstellzeit aus. Wie schon in Abschnitt 12.3 dargelegt wurde, setzen die in realen Systemen immer

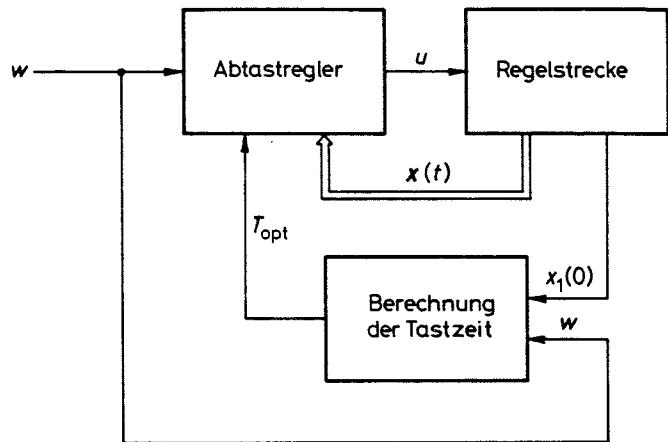


Bild 13/11. Erweiterte Struktur des auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreises

vorhandenen Stellgrößenbegrenzungen der Verkleinerung der Abtastzeit Grenzen. Legt man nun die Abtastzeit derart fest, daß auch beim längsten Verfahrweg der Katze der lineare Stellgliedbereich nicht verlassen wird, dann ergeben sich vergleichsweise kleine Rückführverstärkungen. Bei kleinen Verfahrwegen werden damit die Einstellzeiten unnötig lang, da die Leistungsgrenzen des Stellglieds nicht ausgenutzt werden. Grundsätzlich ist es möglich, den Verfahrweg $w - x_1(0)$ zu Beginn jedes Einstellvorgangs zu erfassen und die Tastzeit so festzulegen, daß jeweils die Leistung des Stellglieds voll ausgenutzt wird (Bild 13/11). Ein stufenloses Einstellen der optimalen Tastzeit T_{opt} und das *online*-Berechnen der hierzu gehörenden Reglerparameter ist aber sehr aufwendig und würde auf jeden Fall einen größeren Prozeßrechner erfordern, ohne daß man eine entsprechende Verbesserung des Einstellverhaltens erreichen würde. Erheblich einfacher zu realisieren ist eine suboptimale Festlegung der Tastzeit derart, daß man den möglichen Verfahrbereich der Katze in einige Bereiche unterteilt und jedem dieser Intervalle eine mittlere Tastzeit zuweist. Die zu jedem Bereich gehörenden Reglerparameter kann man dann *offline* berechnen und im Regler fest einstellen; zu Beginn jedes Einstellvorgangs werden die Reglerparameter in Stufen umgeschaltet. Beschränkt man sich auf wenige Bereiche, dann kann man diesen verbesserten Regler ebenfalls noch mit analogen Bauelementen oder mit einer kleinen digitalen Steuereinheit aufbauen.

13.4 Entwurf von Beobachtern

Die in den Teilen 13.2 und 13.3 durchgeführten Reglerentwürfe sind insofern noch unvollständig, als sie die Kenntnis des vollständigen Zustandsvektors $x(t)$ für $t \geq 0$ voraussetzen. Die Zustandsvariablen der Verladebrücke können zwar grundsätzlich durch geeignete Sensoren erfaßt werden, jedoch ist eine solche Lösung im allgemeinen zu aufwendig und zu teuer. Im folgenden sollen daher nach den in Abschnitt 12.5 angegebenen Verfahren verschiedene Beobachter berechnet werden, mit deren Hilfe sich der meßtechnische Aufwand zur Automatisierung der Verladebrücke stark verringern läßt.

Gemäß den in Abschnitt 13.1 durchgeführten Überlegungen ist die Verladebrücke schon durch einen Sensor

für die Katzposition allein vollständig beobachtbar, d.h., die restlichen Zustandsgrößen können durch einen Beobachter aus den Messungen dieses Sensors generiert werden. Die nachfolgenden Untersuchungen behandeln nur diesen vergleichsweise einfachen Fall, auch wenn die hiermit erzielbaren Ergebnisse bezüglich des Einschwingverhaltens des Beobachters nicht optimal sind. Bessere Ergebnisse sind zweifellos dann zu erwarten, wenn man zusätzlich einen Sensor für den Pendelwinkel vorsieht, da man damit vom Einfluß der je nach Beladungszustand wechselnden Greifermasse unabhängig wird.

Die zum Bestimmen der Struktur und der Parameter des Beobachters erforderlichen Berechnungen können bei der vorliegenden Regelstrecke fünfter Ordnung nur noch mit einem erheblichen Aufwand analytisch durchgeführt werden, man denke zum Beispiel an die notwendige Inversion der 5×5 -Matrix Q_B . Sie werden daher im folgenden überwiegend numerisch mit Hilfe eines Digitalrechners erledigt. In der Praxis wird man im Interesse einer schnellen, fehlerfreien und gut dokumentierten Problemlösung meist ebenso verfahren.

13.4.1 Vollständiger Beobachter bei Messung der Katzposition

Der Meßvektor bei alleiniger Messung der Katzposition ist

$$c^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

die Beobachtbarkeitsmatrix Q_B wurde für diesen Fall bereits in Abschnitt 13.1.2 berechnet. Die Inversion dieser Matrix und das Herausziehen der letzten Spalte der invertierten Matrix liefert den für die Berechnung der Beobachterverstärkungen gemäß (12.120) benötigten Vektor q_B zu

$$q_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\frac{m_G}{m_K} g \left[\frac{1}{T_M^2} + \frac{g}{r} \right]} \\ \frac{1}{\frac{m_G}{m_K} g T_M \left[\frac{1}{T_M^2} + \frac{g}{r} \right]} \\ \frac{m_K}{\left[\frac{1}{T_M^2} + \frac{g}{r} \right]} \end{bmatrix}. \quad (13.25)$$

Mit den in Abschnitt 13.1 angegebenen Zahlenwerten für die Verladebrücke wird dieser Vektor

$$q_B = [0 \ 0 \ -1,29 \cdot 10^{-2} \ 1,29 \cdot 10^{-2} \ 5,05 \cdot 10^2]^T \quad (13.26)$$

Die sukzessive Multiplikation dieses Vektors mit der Systemmatrix A von links liefert nacheinander die Vektoren

$$A q_B = [0 \ 0 \ 1,29 \cdot 10^{-2} \ 1,26 \cdot 10^{-2} \ -5,05 \cdot 10^2]^T,$$

$$A^2 q_B = [0 \ 0 \ 1,26 \cdot 10^{-2} \ -1,26 \cdot 10^{-2} \ 5,05 \cdot 10^2]^T,$$

$$\begin{aligned} A^3 q_B &= [0 \ 1 - 1,26 \cdot 10^{-2} - 0,112 \ -5,05 \cdot 10^2]^T, \\ A^4 q_B &= [1 - 1 - 0,112 \ 0,112 \ 5,05 \cdot 10^2]^T. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Die Verstärkungsfaktoren des Beobachters kann man nach den Überlegungen in Abschnitt 12.5.2 auf zwei Weisen berechnen: Entweder transformiert man die Regelstrecke mittels der Transformationsmatrix

$$S = T^{-1} = [q_B \ A q_B \ A^2 q_B \ A^3 q_B \ A^4 q_B]$$

gemäß (11.162) auf die Beobachtungsnormalform und berechnet dann die Verstärkungen des Beobachters gemäß (12.117), oder man umgeht diese Transformation durch ein direktes Anwenden von (12.120). Wie sich später zeigen wird, führt bei der vorliegenden Regelstrecke nur der zweite Weg zu einem brauchbaren Beobachter; hier sollen aber des Vergleichs wegen zunächst beide Wege verfolgt werden. Bei der Transformation auf Beobachtungsnormalform erhält man mit der Transformationsmatrix

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1,29 \cdot 10^{-2} & 1,29 \cdot 10^{-2} \\ 1,29 \cdot 10^{-2} & 1,26 \cdot 10^{-2} \\ 5,05 \cdot 10^2 & -5,05 \cdot 10^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1,26 \cdot 10^{-2} & -1,26 \cdot 10^{-2} & -0,112 \\ -1,26 \cdot 10^{-2} & -0,112 & 0,112 \\ 5,05 \cdot 10^2 & -5,05 \cdot 10^2 & 5,05 \cdot 10^2 \end{bmatrix} \quad (13.28)$$

gemäß (13.25) und (13.26) die Matrizen des transformierten Systems zu:

$$A_B = S^{-1} A S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4,91 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4,91 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (13.29)$$

$$b_B = S^{-1} b = [9,81 \cdot 10^{-5} \ 0 \ 10^{-4} \ 0 \ 0] \text{ und } (13.30)$$

$$c_B^T = c^T S = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]. \quad (13.31)$$

Bild 13/12 zeigt die Struktur dieser transformierten Regelstrecke.

Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung der Regelstrecke sind also gemäß (13.29)

$$a_0 = a_1 = 0, \ a_2 = a_3 = 4,91, \ a_5 = 1. \quad (13.32)$$

Legt man nun die Eigenwerte des Beobachters auf den Punkt -2 der s -Ebene, um ihn schneller zu machen als beispielsweise die durch Polvorgabe in Abschnitt 13.2 entworfene Regelung, dann erhält man das Polynom $f(s)$ in diesem Falle zu

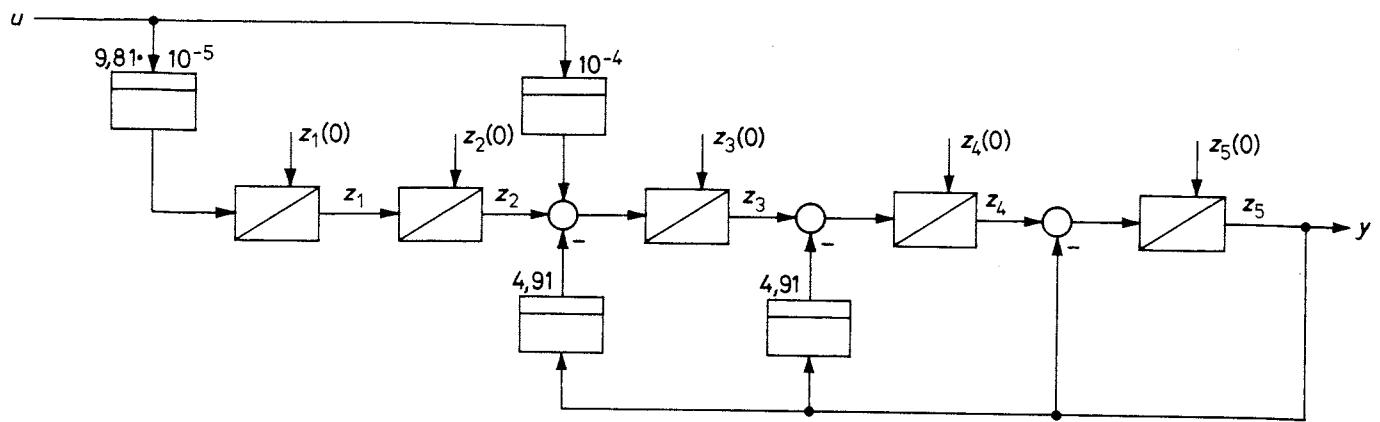


Bild 13/12. Struktur der Regelstrecke in Beobachtungnormalform

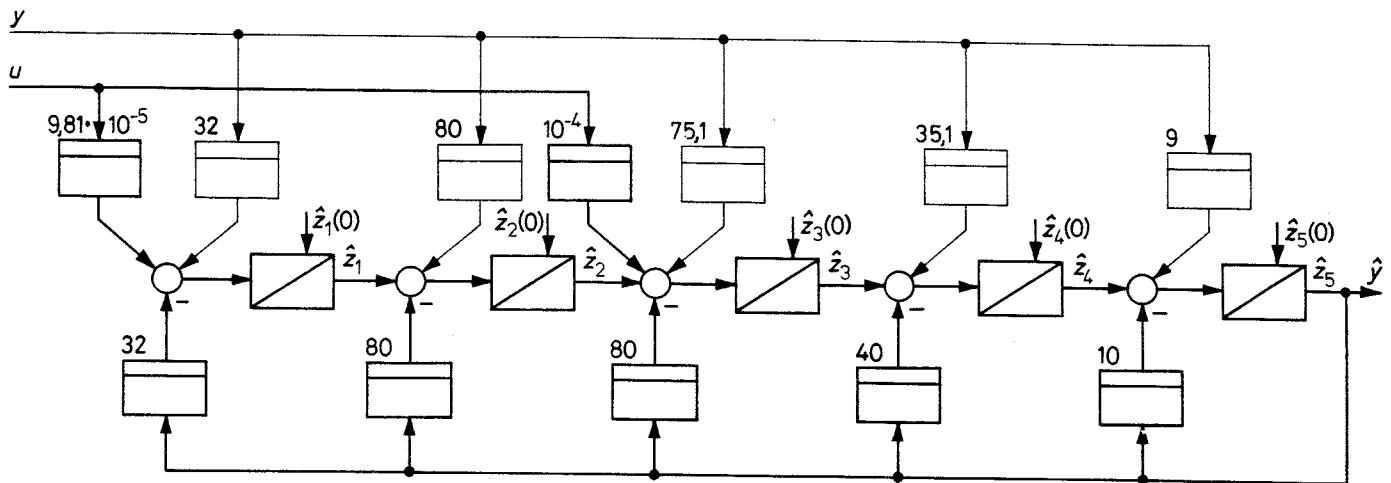


Bild 13/13. Struktur des vollständigen Beobachters in Beobachtungnormalform

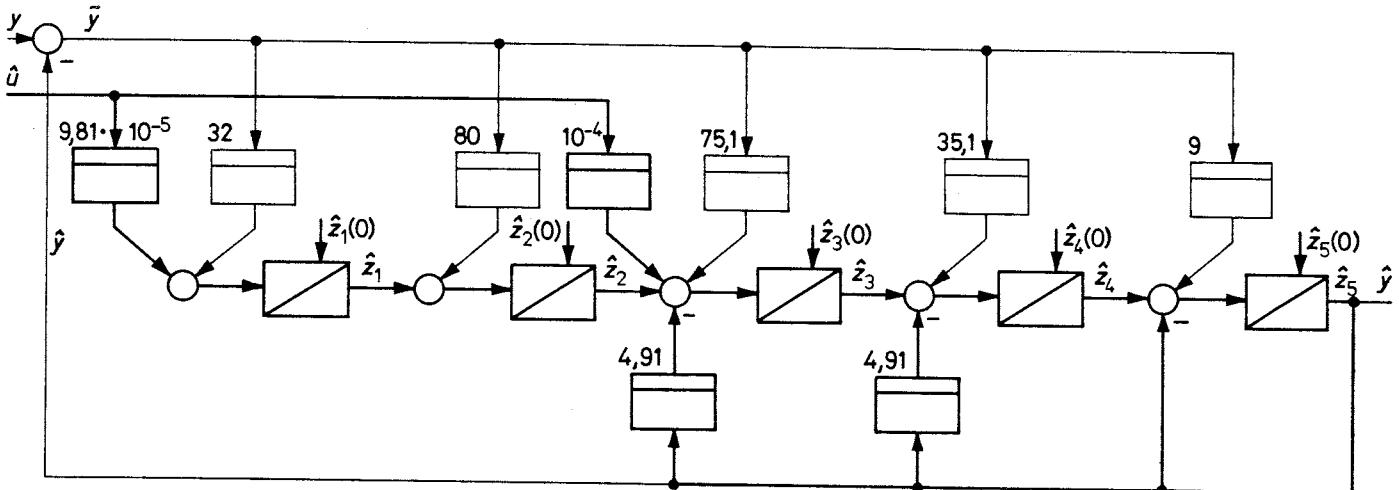


Bild 13/14. Modifizierte Struktur des vollständigen Beobachters in Beobachtungnormalform

$$f(s) = (s+2)^5 = s^5 + 10s^4 + 40s^3 + 80s^2 + 80s + 32,$$

und damit die Polynomkoeffizienten zu

$$f_0 = 32, f_1 = f_2 = 80, f_3 = 40, f_4 = 10. \quad (13.33)$$

Gemäß (12.117) berechnet man schließlich die Verstärkungsfaktoren k_i des Beobachters aus den Koeffizienten a_i und f_i zu

$$k_1 = f_0 - a_0 = 32 - 0 = 32,$$

$$k_2 = f_1 - a_1 = 80 - 0 = 80,$$

$$k_3 = f_2 - a_2 = 80 - 4,9 = 75,1, \quad (13.34)$$

$$k_4 = f_3 - a_3 = 40 - 4,9 = 35,1 \quad \text{und}$$

$$k_5 = f_4 - a_4 = 10 - 1 = 9.$$

Die Struktur des vollständigen Beobachters für die transformierten Variablen z_i der Verladebrücke mit einem Sensor für die Katzenposition und den oben angegebenen Parametern ist in Bild 13/13 dargestellt. Um den Schätzwert \hat{x} für den eigentlichen Zustandsvektor der Regelstrecke zu erhalten, muß der Vektor \hat{z} schließlich noch mit der Transformationsmatrix S von links multipliziert

werden. Eine einfache Umzeichnung der Struktur dieses Beobachters erbringt die Struktur in Bild 13/14; diese entspricht (12.110) und verdeutlicht die Funktion des Beobachters als Folgeregelkreis für den Schätzfehler $\tilde{y} = y - \hat{y}$ (vergleiche auch Bild 13/12).

Der zweite Weg, also die Anwendung von (12.120), führt dagegen direkt auf den folgenden Verstärkungsvektor des Beobachters:

$$\begin{aligned} k = 32 & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1,29 \cdot 10^{-2} \\ 1,29 \cdot 10^{-2} \\ 5,05 \cdot 10^2 \end{array} \right] + 80 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1,29 \cdot 10^{-2} \\ 1,26 \cdot 10^{-2} \\ -5,05 \cdot 10^2 \end{array} \right] + \\ & + 80 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1,26 \cdot 10^{-2} \\ -1,26 \cdot 10^{-2} \\ 5,05 \cdot 10^2 \end{array} \right] + 40 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1,26 \cdot 10^{-2} \\ -0,112 \\ -5,05 \cdot 10^2 \end{array} \right] + \\ & + 10 \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -0,112 \\ 0,112 \\ 5,05 \cdot 10^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -1 \\ -3,90 \\ 0,112 \\ 0,501 \\ -5,05 \cdot 10^2 \end{array} \right] \\ \text{oder } k = & \left[\begin{array}{c} 9,0 \\ 26,1 \\ 0,111 \\ -2,46 \\ 505,0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (13.35)$$

Da hier keine Variablentransformation durchgeführt wurde, liefert dieser Beobachter unmittelbar die gesuchten Schätzwerte \hat{x}_i für die Zustandsvariablen x_i der Regelstrecke. Die Struktur des Beobachters, den man mit geringerem Aufwand verwirklichen kann, ist in Bild 13/15 dargestellt. Bild 13/16 zeigt das Übergangsverhalten des Beobachters im Vergleich zum Verhalten der Regelstrecke, wobei die Anfangsbedingungen des Beobachters zu

$$\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (13.36)$$

und die der Regelstrecke zu

$$x(0) = [0 \ 0 \ 0,0349 \ 0 \ 0]^T \quad (13.37)$$

vorgegeben wurden; dieses entspricht einer Anfangsauslenkung des Greifers um $\vartheta(0) = 2^\circ$. Dem Kurvenverlauf entnimmt man, daß der Schätzfehler nach etwa drei Sekunden abgeklungen ist, der Beobachter also nach dieser Zeit den Systemzustand exakt wiedergibt.

13.4.2 Reduzierter Beobachter bei Messung der Katzposition

Der vollständige Beobachter schätzt auch die Meßgröße, in diesem Fall also die Katzposition, mit, was an sich überflüssig ist. Nach dem in Abschnitt 12.5.3 angegebenen Verfahren kann man einen reduzierten Beobachter entwerfen, der eine Zustandsgröße weniger enthält und daher etwas günstigere dynamische Eigenschaften aufweist.

Zum Entwerfen dieses reduzierten Beobachters geht man

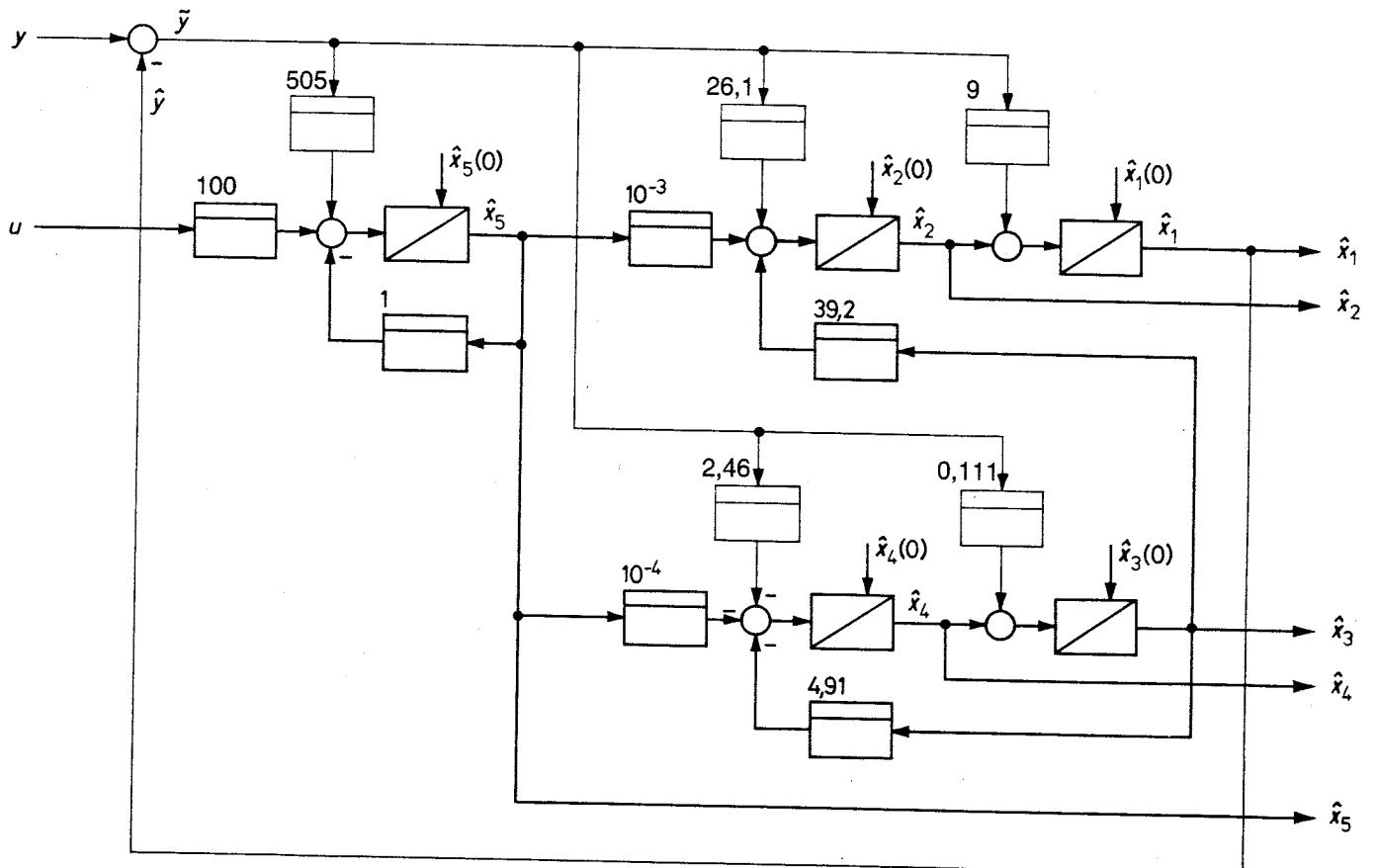


Bild 13/15. Struktur des vollständigen Beobachters in der nicht transformierten Form

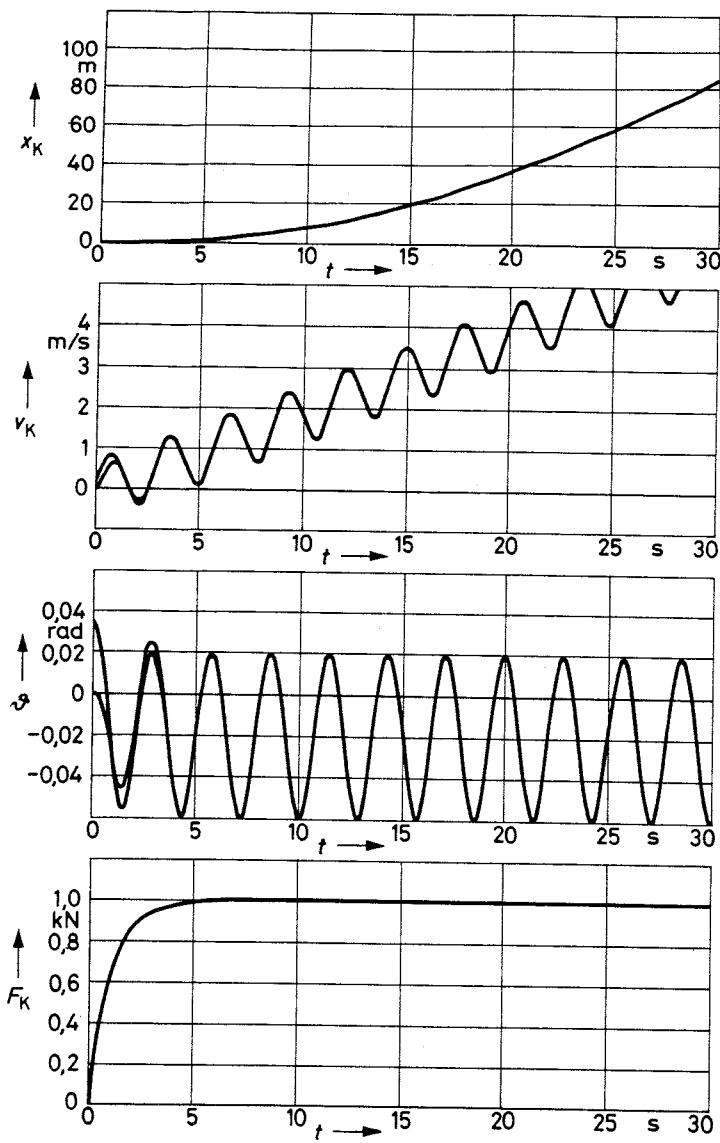


Bild 13/16. Sprungantwort der Regelstrecke und des vollständigen Beobachters

x_K Katzposition
 v_K Katzgeschwindigkeit
 φ Pendelwinkel
 F_K Vortriebskraft

von der durch (13.29) bis (13.31) gegebenen Beobachtungsnormalform der Regelstrecke aus und faßt die transformierten Zustandsvariablen z_1 bis z_4 im verkürzten Zustandsvektor

$$z' = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4] \quad (13.38)$$

zusammen. (12.124) entsprechend erhält man dann die Gleichungen der Regelstrecke zu

$$z' = A'_B z' - a y + b'_B u \quad \text{mit} \quad (13.39)$$

$$A'_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.40)$$

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,91 \\ 4,91 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (13.41)$$

$$b'_B = [9,81 \cdot 10^{-5} \ 0 \ 10^{-4} \ 0]^T. \quad (13.42)$$

Die Beobachtergleichung für dieses reduzierte System vierter Ordnung, das nicht mehr in Beobachtungsnormalform vorliegt, wird gemäß (12.126) zu

$$\dot{\hat{z}}' = F' \hat{z}' - a y + b'_B u + k' x_4 \quad (13.43)$$

angesetzt, wobei die Matrizen F' und k' des Beobachters als

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & 0 & -f_2 \\ 0 & 0 & 1 & -f_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (13.44)$$

$$k' = f' = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (13.45)$$

zu wählen sind. Legt man die Pole dieses Beobachters ebenfalls auf den Punkt -2 der s -Ebene, dann erhält man das charakteristische Polynom zu

$$\begin{aligned} f(s) &= (s+2)^4 = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16 = \\ &= s^4 + f_3 s^3 + f_2 s^2 + f_1 s + f_0. \end{aligned}$$

Die Matrizen F' und k' werden damit

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (13.46)$$

$$k' = \begin{bmatrix} 16 \\ 32 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}. \quad (13.47)$$

Führt man jetzt die transformierten Variablen

$$w = \hat{z}' - f' y = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 - 16y \\ \hat{z}_2 - 32y \\ \hat{z}_3 - 24y \\ \hat{z}_4 - 8y \end{bmatrix} \quad (13.48)$$

ein, dann erhält man analog (12.133) die Differentialgleichung des reduzierten Beobachters zu

$$\dot{w} = F' w + (F' f' + a_4 f' - a) y + (b'_B - b_4 f') u,$$

die sich wegen $a_4 = 1$ und $b_4 = 0$ auf die einfache Form

$$\dot{w} = F' w + (F' f' + f' - a) y + b'_B u \quad (13.49)$$

bringen lässt. Auswerten dieser Formel liefert die folgende Vektordifferentialgleichung des Beobachters:

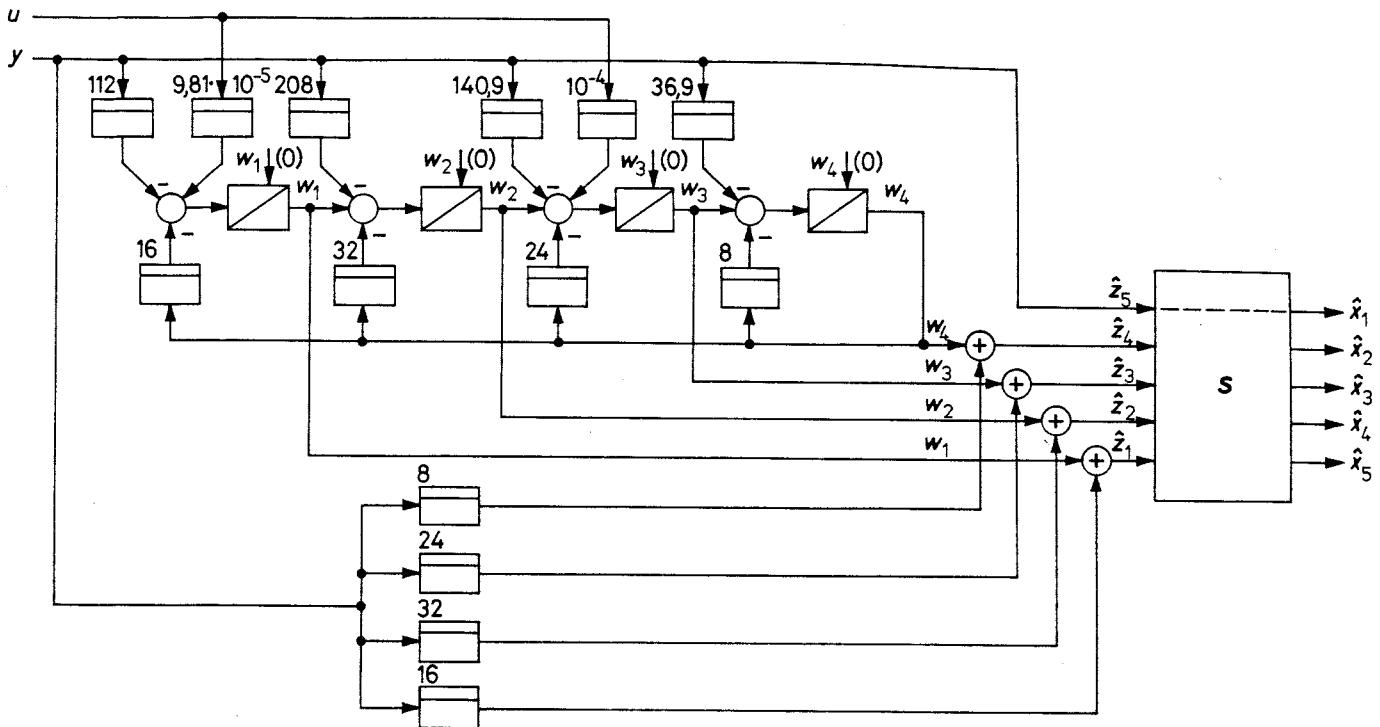


Bild 13/17. Struktur des reduzierten Beobachters in Beobachtungsnormalform

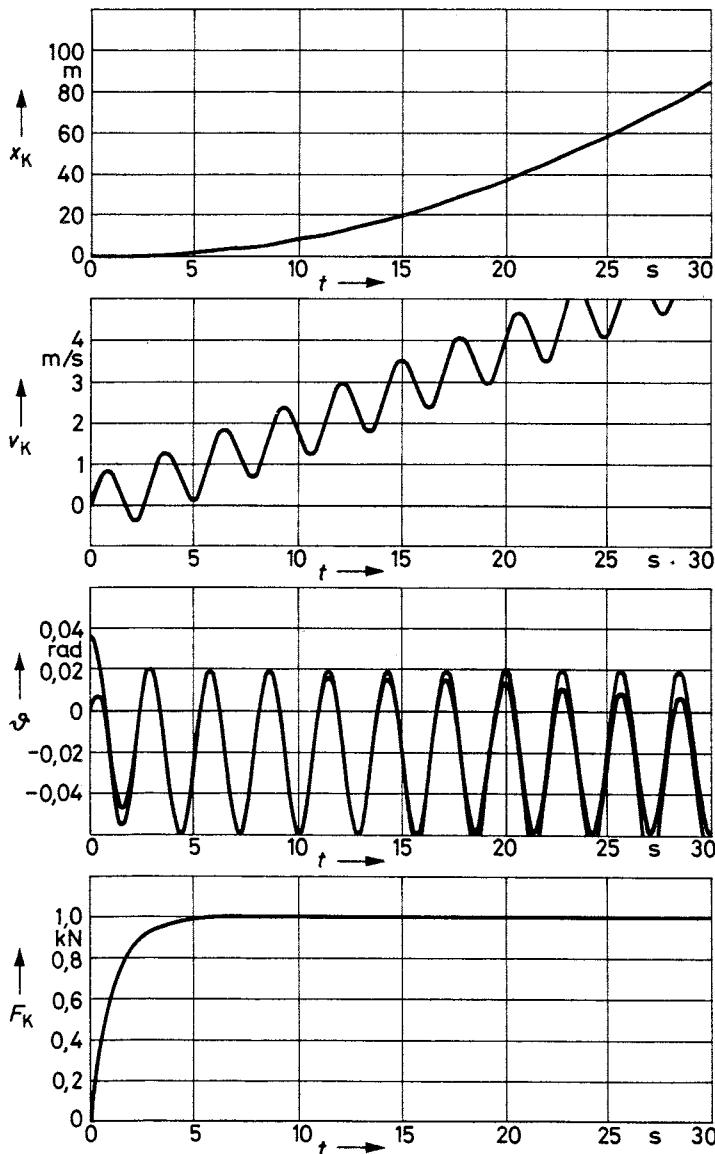


Bild 13/18. Sprungantwort der Regelstrecke und des reduzierten Beobachters

x_K Katzposition
 v_K Katzgeschwindigkeit
 ϑ Pendelwinkel
 F_K Vortriebskraft

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -112 \\ -208 \\ -140,9 \\ -36,9 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 9,81 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (13.50)$$

Um die Schätzwerte für die eigentlichen Systemvariablen x_1 bis x_5 zu erhalten, muß man zu w den Vektor $f'y$ hinzuzaddieren,

$$\hat{z}' = w + f'y, \quad (13.51)$$

und den Vektor \hat{z}' um die Koordinate \hat{z}_5 ergänzen,

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{z}' \\ \hat{z}_5 \end{bmatrix},$$

wobei \hat{z}_5 gemäß (13.31) gleich der Meßgröße y ist. Schließlich muß man den Vektor \hat{z} noch mit der Transformationsmatrix $S = T^{-1}$ gemäß (13.28) von links multiplizieren:

$$\hat{x} = S\hat{z}.$$

Bild 13/17 zeigt die Struktur dieses Beobachters. Das Einstellungverhalten (Bild 13/18) zeigt neben der erwarteten Verbesserung der Dynamik eine Wirkung, die für alle Beobachter von Bedeutung ist, die nicht für die

eigentliche Struktur der Regelstrecke, sondern für eine auf die Beobachtungsnormalform transformierte Struktur entworfen werden: Der Beobachter schwingt zunächst vergleichsweise rasch auf den Zustand der Regelstrecke ein und liefert im betrachteten Zeitintervall genaue Schätzwerte für die Vortriebskraft, die Geschwindigkeit und die Position der Laufkatze. Dagegen entfernen sich die Schätzwerte für den Pendelwinkel und für die – in Bild 13/18 nicht gezeigte – Winkelgeschwindigkeit für $t > 10$ s allmählich vom wirklichen Verlauf. Der Grund für diesen, aus der Theorie der Beobachter zunächst nicht erklärbaren Effekt liegt in der Instabilität des reduzierten Beobachters, dessen Zustandsvariable wegen des am Eingang des transformierten Streckenmodells liegenden Doppel-I-Gliedes für $t \rightarrow \infty$ betragsmäßig immer größere Werte annehmen. Die Schätzwerte für die eigentlichen Prozeßvariablen x_3 und x_4 werden aus diesen Werten durch eine lineare Transformation mit der Matrix S berechnet, wobei Differenzen großer und fast gleicher Zahlen auftreten. Wegen der unvermeidlichen numerischen Ungenauigkeiten dieser Operation werden die Schätzwerte daher für große Zeiten beliebig ungenau. Außerdem würden bei einer analogen Realisierung des Beobachters die Rechenverstärker sehr schnell in die Sättigung gehen, und auch bei einer digitalen Realisierung würde selbst bei Verwenden von Gleitkomma-Arithmetik der zulässige Zahlenspektrum nach einiger Zeit überschritten werden.

Falls die Regelstrecke nicht zufällig bereits in Beobachtungsnormalform vorliegt, ist daher bei allen Beobachterentwürfen, die eine Variablentransformation beinhalten, Vorsicht geboten: Es ist immer zu untersuchen, ob der oben beschriebene Effekt der Differenzbildung fast gleicher Zahlen auftreten kann, wobei Regelstrecken mit I-Anteilen besonders gefährdet sind. So wichtig die Transformation auf Beobachtungsnormalform für *theoretische* Betrachtungen wegen der häufig möglichen starken Vereinfachung der Beweisführung auch ist, sollte man sie doch für die *praktische* Anwendung möglichst vermeiden. Man entfernt sich häufig mit ihr von der Physik des Prozesses auf eine nur schwer zu durchschauende Weise und führt an Stelle der physikalischen Größen, deren Verhalten man meist gut übersehen kann, synthetische Variable ein, die keinerlei physikalische Bedeutung haben müssen. Die Regelstrecke und das im Beobachter enthaltene Modell der Regelstrecke sollten daher nach Möglichkeit die gleiche Struktur haben.

13.5 Verhalten der vollständigen Regelung

Durch Verwendung eines Beobachters zur Schätzung der nicht direkt messbaren Zustandsgrößen wird die Dynamik der Regelung im allgemeinen verschlechtert, da die Pole des Beobachters zu denen der Regelstrecke hinzutreten. Im folgenden soll daher das Verhalten des mittels der Verfahren der Polvorgabe und des Entwurfs auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreises untersucht werden, wenn die nicht messbaren Zustandsvariablen der Strecke mittels des in Abschnitt 13.4.1 abgeleiteten nichtreduzierten Beobachters geschätzt werden.

13.5.1 Verhalten der durch Polvorgabe entworfenen Regelung

Die Struktur des durch Polvorgabe entworfenen Regelkreises mit Beobachter ist die gleiche wie in Bild 13/6,

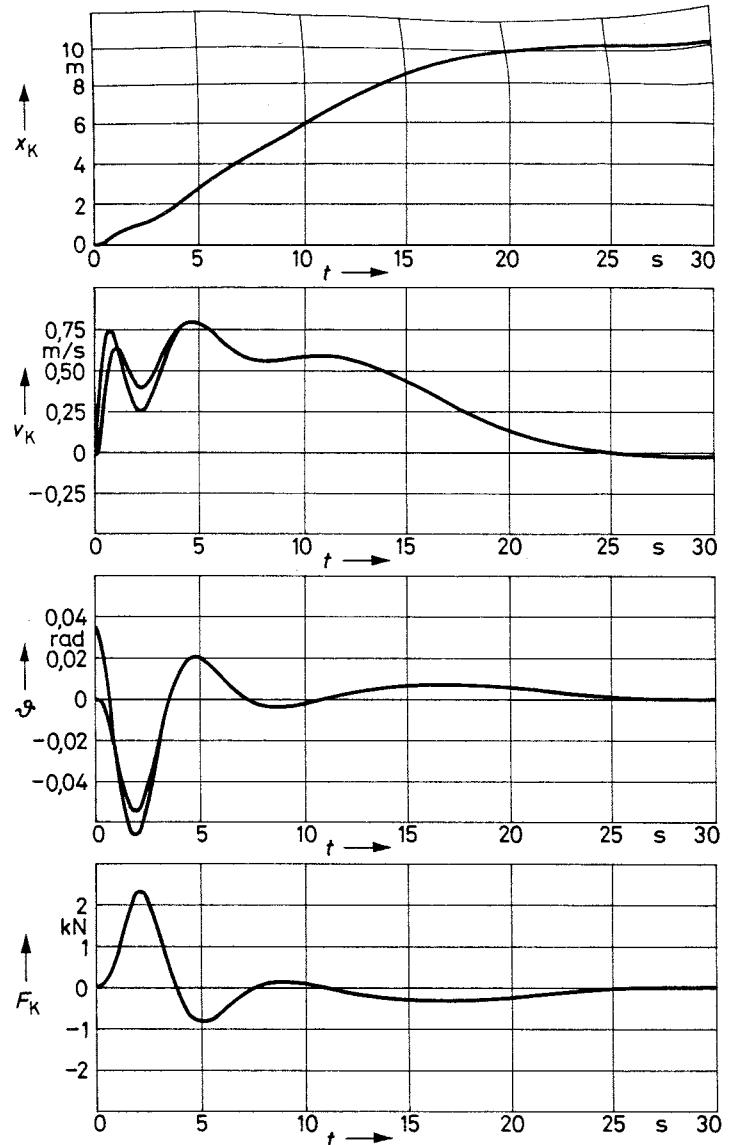


Bild 13/19. Sprungantwort des durch Polvorgabe entworfenen Regelkreises mit vollständigem Beobachter

- x_K Katzenposition
- v_K Katzen Geschwindigkeit
- θ Pendelwinkel
- F_K Vortriebskraft

nur daß man an Stelle der Prozeßvariablen x_1 bis x_5 jetzt die durch den Beobachter erzeugten Schätzwerte \hat{x}_1 bis \hat{x}_5 zurückführt. Die Reglerparameter selbst behalten ihre in Abschnitt 13.2.2 berechneten Werte, da Regler und Beobachter nach den Betrachtungen in Abschnitt 12.5.7 unabhängig voneinander entworfen werden können, wobei man nur den Beobachter schneller machen muß als die Regelung.

Bei einem Sollwertsprung von $w = 10$ m und den Anfangsbedingungen

$$x(0) = [0 \ 0 \ 0,035 \ 0 \ 0]^T \quad (13.52)$$

der Regelstrecke und

$$\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (13.53)$$

des Beobachters ergeben sich die in Bild 13/19 gezeigten Übergangsvorgänge. Zunächst muß der Beobachter den

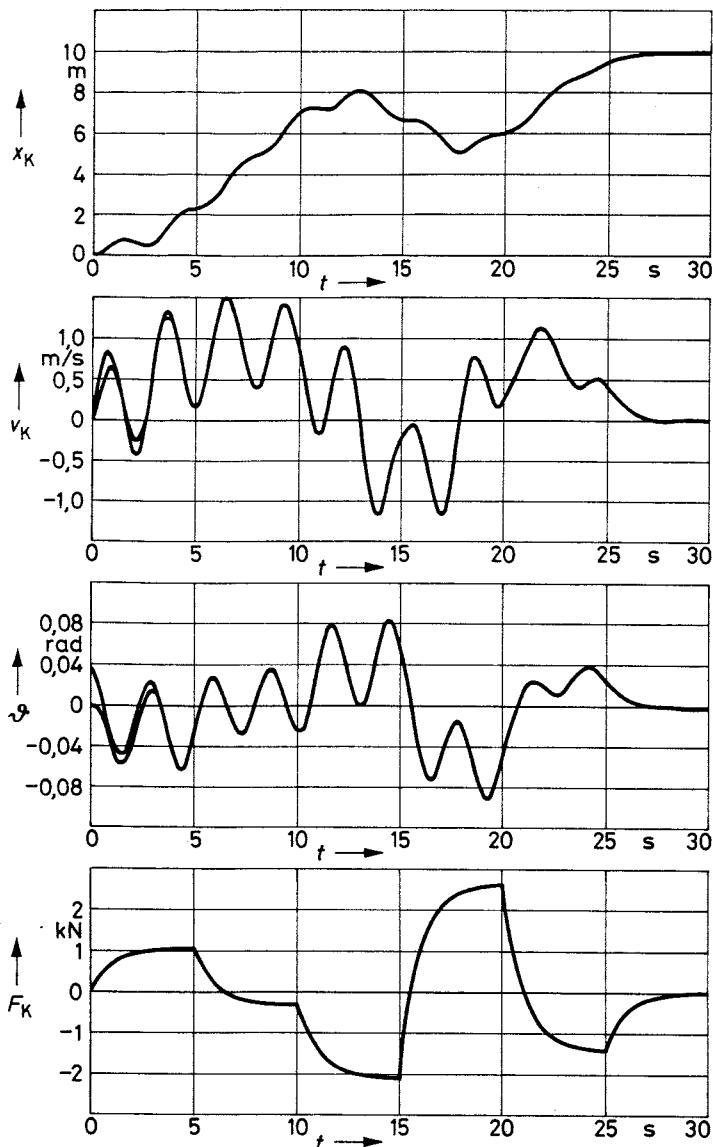


Bild 13/20. Sprungantwort des auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreises mit vollständigem Beobachter

x_K Katzposition
 v_K Katzgeschwindigkeit
 θ Pendelwinkel
 F_K Vortriebskraft

Anfangsfehler des Pendelwinkels von $0,035 \text{ rad} (\approx 2^\circ)$ abbauen, was nach etwa drei Sekunden geschehen ist. In diesem Zeitintervall führt der Regelkreis vergleichsweise hochfrequente, aber gut gedämpfte Schwingungen aus, die durch die Beobachterpole hervorgerufen werden;

wegen des glättenden I-Anteils schlagen diese Schwingungen aber nur geringfügig auf die Katzposition durch. Der anschließende Übergangsvorgang verläuft ähnlich wie der des Regelkreises mit direkter Messung der Zustandsvariablen (Bild 13/7), sieht man von den etwas anderen Anfangsbedingungen ab; in beiden Fällen ist der Übergangsvorgang nach etwa 25 Sekunden abgeschlossen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, daß das Verhalten des nach dem Verfahren der Polvorgabe entworfenen Regelkreises durch das Hinzufügen eines hinreichend schnellen Beobachters nur zu Beginn des Einschwingvorgangs merklich beeinflußt wird; Einschwingzeit und stationärer Endwert werden dagegen praktisch nicht verändert.

13.5.2 Verhalten des auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreises

Übergangsverhalten des auf endliche Einstellzeit entworfenen Regelkreises bei den gleichen Anfangsbedingungen zeigt einen viel unruhigeren Verlauf (Bild 13/20) als das des durch Polvorgabe entworfenen (Bild 13/19): Durch den nichtstetigen Eingriff der Stellgröße werden Pendelungen des Greifers angestoßen, die erst zum Ende des Regelvorgangs abgebaut werden. Ein Vergleich mit dem Übergangsverhalten des Regelkreises mit direkter Messung der Zustandsvariablen (Bild 13/10) zeigt, daß durch das Einführen des Beobachters der Einstellvorgang um eine Abtastperiode, also um fünf Sekunden, verlängert wird. Dieses geänderte Verhalten ist leicht zu erklären: Beim ersten Abtasten zum Zeitpunkt $t=0$ wird die Stellgröße $u(0)$ nicht mit dem Anfangszustand der Regelstrecke, sondern mit dem hiervon abweichenden Anfangszustand des Beobachters gebildet. Erst beim zweiten Abtasten ($t=5 \text{ s}$) stimmt der geschätzte Zustand $\hat{x}(5)$ hinreichend genau mit dem wahren Zustand $x(5)$ überein, so daß der eigentliche Einstellvorgang erst jetzt beginnen kann. Diesen unerwünschten Effekt kann man bei der Verladebrücke leicht dadurch beseitigen, daß man den Einschwingvorgang des Beobachters abwartet – hier also etwa drei Sekunden – bevor man die erste Stellgröße berechnet und dem System aufschaltet.

Festzuhalten ist, daß der auf endliche Einstellzeit entworfene Regelkreis auch dann ordnungsgemäß arbeitet, wenn ein Teil der Zustandsvariablen durch einen Beobachter ermittelt wird, wobei man allerdings eine Verlängerung der Einstellzeit um die Einschwingzeit des Beobachters in Kauf zu nehmen hat. Im Vergleich zu dem durch Polvorgabe entworfenen Regelkreis ergibt sich außerdem bei etwa der gleichen höchsten Stellgröße ein merklich höherer Stellauflauf.