Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Technik & Architektur

Mehrfach-Integrale - Übung II

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Semesterwoche 2

Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein. **Abgabetermin: Am Ende der Semesterwoche 3 (z.B. in meinen Briefkasten).**

Aufgabe 1: Jacobische, Transformation, FEM

In der Finite-Element-Methode unterteilt man ein 2D-Gebiet oft in Dreiecke (finite Elemente) und führt Funktionen ein, die auf diesen finiten Elementen linear verlaufen, d.h. über dem Dreieck D mit den Ecken $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$ und $\vec{x}_2 = (x_2, y_2)$ betrachten wir die linearen Funktion ϕ_i, die wie folgt definiert sind:

$$\phi_i(\vec{x}_k) = \delta_{ik}$$

wobei δ_{ik} das Kronecker-Delta darstellt, welches wie folgt definiert ist:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{falls } i \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktionen ϕ_i, $(i = 0, 1, 2)$ über dem Dreieck. (b) Berechnen Sie die in der FEM oft vorkommenden Integrale der Form

$$C_{ik} = \iint\limits_D \phi_i(x, y)\phi_k(x, y)\mathrm{d}A$$

indem Sie eine Koordinatentransformation durchführen welche das gegebene Dreieck D auf das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ abbildet.

Aufgabe 2: Jacobische, Transformation, FEM

Führen Sie obige Rechnung im 3D-Fall für Tetraheder durch!

Aufgabe 3: Zylinderkoordinaten

Schreiben Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{1-x^2-y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$$

in Zylinderkoordinaten und berechnen Sie es dann.

Lösung: $\pi^2/8$.

Aufgabe 4: Zylinderkoordinaten

Berechnen Sie folgendes Integral in Zylinderkoordinaten:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)^2}^{16} x^2\, dz.$$

Lösung: 32π.

Aufgabe 5: Volumenberechnung

Berechne das Volumen des Hohlzylinders, der durch die Flächen $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ und $z = 4/(x^2 + y^2)$ begrenzt wird. Verwenden Sie geeignete Koordinaten!

Lösung: $8\pi \ln 2$.

Viel Spass!