

4.1 Einleitung

Einleitung

Eine der herausragenden Stärken von MATLAB ist das numerische (näherungsweise) Auflösen von Differentialgleichungen. In diesem kurzen Kapitel werden wir uns mit einigen Funktionen zum Lösen von gewöhnlichen Differenzialgleichungen vertraut machen. Die englische Abkürzung für gewöhnliche Differentialgleichungen lautet **ODE** (*ordinary differential equation*). Wir werden im Folgenden diese Abkürzung verwenden, da die meisten MATLAB Befehle zum Lösen von Differentialgleichungen mit „ode“ beginnen.

In der Mathematikvorlesung haben Sie gelernt, wie Differentialgleichungen „von Hand“ gelöst werden können. Für die allermeisten Dgl. gibt es gar keine Lösungsmethoden. MATLAB muss daher solche Gleichung auch numerisch lösen. Dazu gibt es verschiedene numerische Verfahren. Die bekanntesten sind die Runge-Kutta-Verfahren. Wenn Sie im Help von MATLAB nachschauen, so sind die folgenden Verfahren aufgeführt:

- ode 45 (Runge-Kutte mit Formelpaar der Konvergenzordnung 4 und 5)
- ode 23
- ode 113
- ode 15s
- ode 15i
- ode 23s
- ode 23t
- ode 23tb

Je nach Ausgangslage der Differentialgleichung wählt man ein geeignetes Verfahren aus (siehe z.B. Überhuber et. al. **MATLAB 7, eine Einführung**, Springer Verlag, ISBN 3-211-21137-3, S. 250 ff.). In Rahmen von unserem Modul Ing-Tool, arbeiten wir – wenn nichts anderes erwähnt wird – mit ode45.

4.2 ODE's erster Ordnung

Beispiel 4.1: Wir lösen numerisch die ODE

$$y'(x) = -2 \cdot x \cdot y(x)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ im Intervall $x \in [0; 5]$.

Hinweise zur Lösung in MATLAB:

- Die Anfangsbedingung(en) müssen sich auf den Intervallanfang beziehen.
- Die Anfangsbedingung muss sich somit nicht auf „Null“ beziehen
- Die Differenzialgleichung muss nach y' aufgelöst sein.

Lösung:

Für die Lösung der obigen Gleichung in MATLAB schreiben wir ein m-File `Bsp_31.m` :

```
clear

% Intervallgrenzen festlegen (Anfang und Ende)
xa = 0; xe = 5;

%Anfangsbedingung
y0 = 1;

%ODE definieren (nach der höchsten Ableitung aufgelöst)
ode_bsp=@(x,y) -2*x*y;

%ODE lösen
[x, y] = ode45(ode_bsp, [xa xe], y0,1e-6);

%Lösung plotten
plot(x,y)
xlabel('x'), ylabel('y')
```

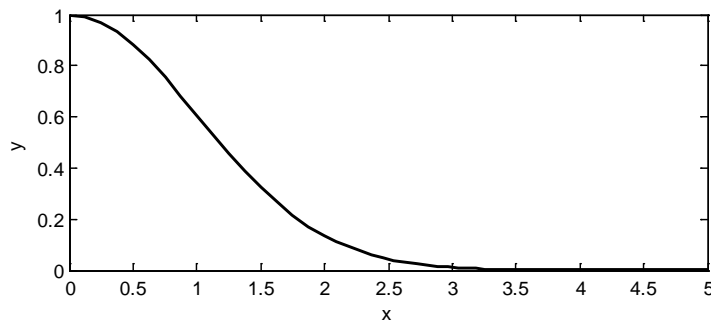


Abb.: Plot zu Beispiel 4.1

Der hier verwendete Befehl zur numerischen Lösung der ODE ist `ode45`. mit den Inputs

`ode45(„Definition der ode“ , „Intervall“ , „Anfangsbedingung“ , „Fehlertoleranz“)`

Hinweis: Die Fehlertoleranz ist optional. Ohne Angabe dieser Toleranz wird `1e-3` gesetzt.

Aufgabe 4.2: Lösen Sie numerisch mit `ode45` die Differentialgleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{t} \cdot x(t)^2 = 5$$

mit der Anfangsbedingung $x(-3) = 2$ auf dem Intervall $t \in [-3; 6]$. Zur Kontrolle ist die Lösungskurve unten dargestellt.

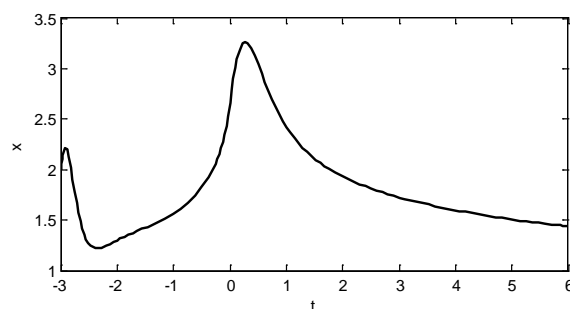


Abb.: Lösung von $\frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{t} \cdot x(t)^2 = 5$

4.3 System von ODE's erster Ordnung

Beispiel 4.3: Gesucht sind die zwei Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$, welche die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) \cdot (1 - y_2(t)) \\ \dot{y}_2(t) = -y_2(t) \cdot (1 - y_1(t)) \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1.1$ und $y_2(0) = 1.8$ im Intervall $t \in [0; 15]$. erfüllen.

Lösung: Die Idee besteht darin, einen Spaltenvektor mit den beiden gesuchten Funktionen zu definieren

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Die Differentialgleichung lautet dann (1. Zeile = 1. Dgl, 2. Zeile = 2. Dgl.)

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \cdot (1 - y_2(t)) \\ -y_2(t) \cdot (1 - y_1(t)) \end{pmatrix}$$

→ MATLAB `ode_2gl=[Y(1)*(1-Y(2));-Y(2)*(1-Y(1))]`

MATLAB-Lösung:

Die Lösung als m-File `Bsp_43.m`:

```
clear
% Intervallgrenzen festlegen (Anfang und Ende)
ta = 0;
te = 15;

%Anfangsbedingungen
y1_0 = 1.1;
y2_0 = 1.8;

%ODE definieren (nach der höchsten Ableitung aufgelöst)
ode_2gl=@(t,y) [y(1)*(1-y(2));-y(2)*(1-y(1))];

%ODE lösen (Anfangsbedingungen als Spaltenvektor!)
[t, y] = ode45(ode_2gl,[ta te], [y1_0; y2_0]);

%Lösungen plotten
plot(t,y); xlabel('t'); ylabel('y')
legend('y1','y2')
```

Hinweis: Die MATLAB-Lösung y besitzt zwei Spalten. Die erste Spalte $y(:,1)$ entspricht der Lösung $y_1(t)$ und die zweite Spalte $y(:,2)$ der Lösung $y_2(t)$,

4.4 ODE's höherer Ordnung

Wir betrachten hier nur ein Beispiel mit einer ODE zweiter Ordnung. Das Vorgehen für höhere Ordnung wird ganz analog sein.

Beispiel 4.4:

Gesucht ist die Lösung der ODE

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 9y(t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 2$ im Intervall $t \in [0; 10]$.

Lösung: In MATLAB können nur ODE's erster Ordnung gelöst werden. Natürlich kann auch dieses Problem gelöst werden! Die Idee besteht darin, dass man eine gegebene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung umschreibt und danach wie im Kapitel 4.3 vorgeht.

Für unser Beispiel heisst das, dass wir aus der ODE zweiter Ordnung zwei ODE's erster Ordnung machen. Wir machen das, indem wir zwei neue Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ einführen, definiert durch

$$y_1(t) = y(t)$$

$$y_2(t) = \dot{y}_1(t)$$

Leiten wir $y_2(t)$ nach t ab und nehmen die gegebene ODE zu Hilfe, so ergibt sich:

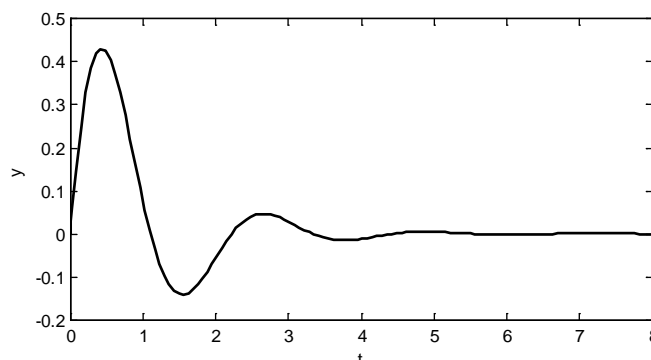
$$\dot{y}_2(t) = \ddot{y}_1(t) = \ddot{y}(t) = -2\dot{y}(t) - 9y(t) = -2y_2(t) - 9y_1(t)$$

Zusammengefasst erhalten wir das System erster Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -2y_2(t) - 9y_1(t) \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 2$.

Aufgabe: Lösen Sie dieses System in MATLAB und plotten Sie die Lösung $y(t)$ (Lösung unten)



Testataufgaben

Diese Aufgaben gehören zu den Testatbedingungen und sind bis Mittwoch, 11. Mai 2016, auf Ilias in den Ordner

> Briefkasten > Abgabe Matlab > Serie4

als hochzuladen. Packen Sie **alle Übungen in ein File (m-File oder pdf)**. Testate die zu spät hochgeladen werden, werden nicht berücksichtigt.

Übung 4.1:

Bestimmen und plotten Sie die Lösung $y(t)$ für die ODE

$$y'(t) = -2y(t) + \sin(t) + e^{-t}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ im Intervall $t \in [0; 8]$.

Übung 4.2:

Bestimmen und plotten Sie die Lösung $x(t)$ der gedämpften Schwingung

$$x''(t) + 0.2x'(t) + x(t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0)=1$ und $x'(0)=0$ im Intervall $t \in [0; 10]$.

Übung 4.3 (Wettbewerbsmodell):

Wenn zwei Populationen P_1 und P_2 von den gleichen Ressourcen leben, findet ein *Wettbewerb* um die gleiche Ressource statt, und jede Population behindert damit das Wachstum der anderen, was mit dem folgenden System von zwei Differentialgleichungen für P_1 und P_2 beschrieben werden kann:

$$\dot{P}_1(t) = \alpha_1 \cdot P_1(t) - \beta_1 \cdot P_1^2(t) - \gamma_1 \cdot P_1(t) \cdot P_2(t)$$

$$\dot{P}_2(t) = \alpha_2 \cdot P_2(t) - \beta_2 \cdot P_2^2(t) - \gamma_2 \cdot P_1(t) \cdot P_2(t)$$

Zusammen mit den Parametern

$$\alpha_1 = 10, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 2$$

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 0.4, \quad \gamma_2 = 0.01$$

und den Anfangspopulationen $P_1(0) = 5$, $P_2(0) = 10$.

Aufgabe: Lösen Sie dieses System mit `ode45` für $t=0..10$ und stellen Sie die zeitlichen Verläufe beider Populationen $P_1(t)$ und $P_2(t)$ in einem Plot mit Legende dar.