Stochastik

Grundbegriffe Wahrscheinlichkeit

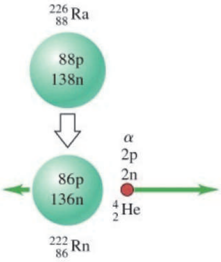
Mirko Birbaumer

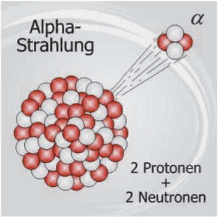
Hochschule Luzern Technik & Architektur

Radioaktiver Zerfall: Alpha Zerfall

- Nahezu 90% der bekannten Nuklide sind radioaktiv und zerfallen nach einer gewissen Zeit in neue Nuklide

- Beim Zerfall emittieren sie Alpha (α) oder Beta (β) Teilchen oder Gamma (γ) Strahlung





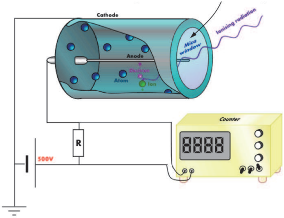
$^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ zerfällt in $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ unter Emission eines Alpha Teilchens

Messgerät für radioaktiven Zerfall: Geigerzähler

- Geigerzähler: mit Argon ($200\mathrm{hPa}$) gefülltes Stahlrohr.

- Radioaktive Strahlung ionisiert Atome des Edelgases.

Sehr dünnes Fenster aus Glimmer oder Mylar



- Anzahl Zerfälle in 10-Sekundenintervall zufällig: es können 16 oder 0 oder 120 Zerfälle gemessen werden

Anzahl Zerfälle von americium 241 in 10 s

Anzahl Zerfälle	Beobachtet in Anzahl Experimente
0-2	18
3	28
4	56
5	105
6	126
7	146
8	164
9	161
10	123
11	101
12	74
13	53
14	23
15	15
16	9
17+	5

- Experiment wurde 1207 Mal wiederholt, jedes Mal wurde die Anzahl Zerfälle in 10 Sekunden gemessen
- In 28 der 1207 Experimente wurden 3 Alphateilchen gemessen

Wahrscheinlichkeitsmodell

- **Zufallsexperimente**: Ausgang ist nicht exakt vorhersagbar, wie
  - Würfelwurf
  - Münzenwurf
  - Anzahl Zerfälle eines Alphastrahlers

- Ein **Wahrscheinlichkeitsmodell** beschreibt, welche Ereignisse in einem solchen Experiment möglich sind und welche Wahrscheinlichkeiten die verschiedenen Ergebnisse haben

- Beispiel: Würfel werfen
  - mögliche Ergebnisse: $1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - W'keit eine dieser Zahlen zu werfen, ist $\frac{1}{6}$, sofern Würfel fair

Wahrscheinlichkeitsmodell

- Ein Wahrscheinlichkeitsmodell hat die folgenden Komponenten:
  - **Grundraum** Ω: enthält alle möglichen **Elementarereignisse** ω
  - **Ereignis** „A“: Teilmenge des Grundraums
  - **Wahrscheinlichkeiten** P
- **Elementarereignisse** sind mögliche Ergebnisse oder Ausgänge eines Experiments
- Elementarereignisse bilden den Grundraum:

$$\Omega = \{\underbrace{\text{mögliche Elementarereignisse } \omega}_{\text{mögliche Ausgänge/Resultate}}\}$$

Beispiele Wahrscheinlichkeitsmodell

- Beim Würfelwurf ist der Grundraum

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Das Element $\omega = 2$ ist ein Elementarereignis $\rightarrow$ beim Würfeln wurde die Zahl 2 geworfen
- Alphazerfall: Grundraum

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

  da beliebig viele Zerfälle in 10-Sekundenintervall möglich
- Elementarereignis $\omega = 6$ $\rightarrow$ in 10 Sek. 6 Zerfälle gemessen

Beispiele Wahrscheinlichkeitsmodell

- 2-maliges Werfen einer Münze : Bezeichnungen K : „Kopf“ und Z : „Zahl“
  - Bezeichnungen K : „Kopf“ und Z : „Zahl“
- Alle möglichen Ergebnisse des Experimentes (Grundraum)

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

- Elementarereignis ist z.B. $\omega = KZ$

Ereignis

- Unter einem **Ereignis** A versteht man eine Teilmenge von Ω:

$$A \subset \Omega$$

  „Ein Ereignis A tritt ein" bedeutet, dass das Ergebnis ω des Experiments zu A gehört.

- Beispiel: 2-maliges Werfen einer Münze
  - Ereignis A, wo genau einmal K geworfen wird
  - Ereignis besteht aus den Elementarereignissen KZ und ZK
  - Das Ereignis A ist dann die Menge

$$A = \{KZ, ZK\}$$

  - Würfeln ZZ, so trifft das Ereignis A *nicht* ein

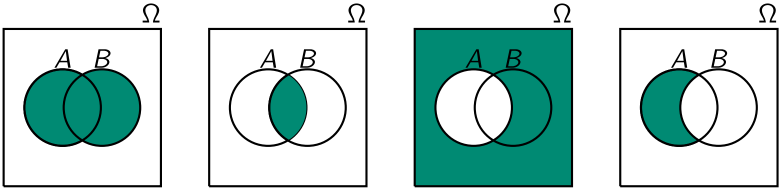
Beispiel: Würfeln

- Ereignis A: „eine ungerade Zahl würfeln"
    - Dann ist
    $$A = \{1, 3, 5\}$$
    - Das Ereignis A tritt ein, wenn z.B. die Zahl 5 gewürfelt wird
- Ereignis B: eine Zahl kleiner als 7 würfeln
    - Das ist natürlich immer der Fall und somit ist
    $$B = \Omega$$
    - B heisst *sicheres* Ereignis
- C das Ereignis „die Zahl sieben würfeln"
    - Dies ist unmöglich
    $$C = \emptyset$$
    - $\emptyset$ ist die leere Menge, die kein Element enthält: *unmögliches* Ereignis

Mengenlehre

- Die Operationen der Mengenlehre (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement) werden für Ereignisse verwendet:

Name	Symbol	Bedeutung
Vereinigung	$A \cup B$	A **oder** B, nicht-exklusives "oder"
Durchschnitt	$A \cap B$	A **und** B
Komplement	$\overline{A}$	**nicht** A
Differenz	$A \backslash B = A \cap \overline{B}$	A **ohne** B



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $\overline{A}$ $\quad$ $A \backslash B$

Beispiel

- Ereignisse
  - A: „morgen scheint die Sonne“
  - B: „morgen regnet es“

- Dann bedeuten folgende Ereignisse:
  - $A \cup B$:
    „morgen scheint die Sonne *oder* morgen regnet es“ (und dies kann auch bedeuten: „morgen scheint die Sonne *und* morgen regnet es“)
  - $A \cap B$:
    „morgen scheint die Sonne *und* morgen regnet es“
  - $\overline{A}$:
    „morgen scheint die Sonne nicht“

Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

Kolmogorov Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Jedem Ereignis A wird eine **W'keit** $P(A)$ zugeordnet, mit:

A1: $P(A) \geq 0$
A2: $P(\Omega) = 1$
A3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls $A \cap B = \emptyset$

- Bezeichnung $P(A)$: W'keit, dass das Ereignis A eintritt
- Ereignis A: „ungerade Zahl würfeln“ (bei fairem Würfel)

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

- Der Buchstabe P steht für das englische *probability*
- $P(\Omega) = 1 \quad \rightarrow \quad$ W'keiten eines Ereignisses zwischen 0 und 1

Beispiel: Münzwurf

- Wurf zweier Münzen: plausibel, dass alle 4 Elemente von

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

  gleich wahrscheinlich sind

- Wegen $P(\Omega) = 1$ müssen sich die Wahrscheinlichkeiten zu eins aufaddieren:

$$P(KK) = P(KZ) = P(ZK) = P(ZZ) = \frac{1}{4}$$

Rechenregeln

Rechenregeln für W'keiten von Ereignissen

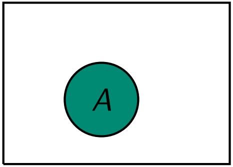
Sind A, B und $A_1, \dots A_n$ Ereignisse, dann gilt

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	für jedes A
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	für beliebige A und B
$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$	für beliebige $A_1, \dots, A_n$
$P(B) \leq P(A)$	für beliebige A und B mit $B \subseteq A$
$P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$	für beliebige A und B mit $B \subseteq A$

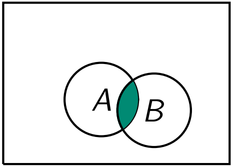
Venn Diagramme: Wahrscheinlichkeit als Fläche

$P(\Omega) = 1$

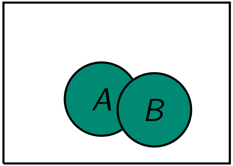
$P(A)$



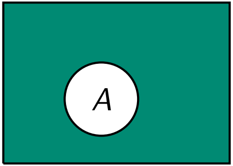
$P(A \cap B)$



$$P(A \cup B) \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

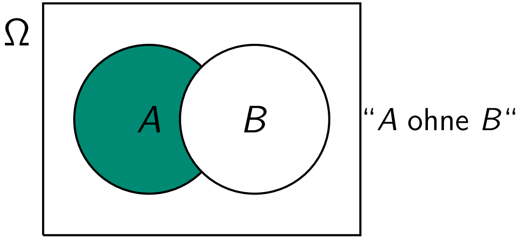


$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



Knobelaufgabe

$$P(A \setminus B) = \dots$$



1. $P(A) - P(B)$
2. $P(A) + P(B)$
3. $P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle

- *Diskrete* Wahrscheinlichkeitsmodelle : Grundraum ist endlich oder unendlich und diskret

- Begriff „diskret“ z.B. Menge

$$\Omega = \{0, 1, \dots, 10\}$$

  die *endlich und deshalb diskret* ist

- *unendliche*, aber trotzdem *diskrete* Menge

$$\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Die Menge $\Omega = \mathbb{R}$ (die Menge aller Zahlen, die man als Dezimalbrüche schreiben kann) ist *nicht* diskret

- $\Omega = \mathbb{R}$ wird später für Messdaten eine sehr wichtige Rolle spielen

Berechnung von W'keiten für diskrete Modelle

Im diskreten Fall ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

durch die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Elementarereignisse $P(\omega)$ festgelegt:

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_n) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

Beispiel: 2-maliges Münzenwerfen

- Es ist A : „genau einmal K werfen“, also

$$A = \{KZ, ZK\}$$

- W'keit $P(A)$, dass das Ereignis A eintritt

$$P(A) = P(KZ) + P(ZK) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

- Ereignis B: „mindestens einmal Kopf werfen“

- Wegen $B = \{KZ, ZK, ZZ\}$ gilt

$$P(B) = P(KZ) + P(ZK) + P(KK) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Beispiel: 2-maliges Münzenwerfen

- $P(B)$ mit $B = \{KZ, ZK, ZZ\}$: einfacher mit der sogenannten *Gegenw'keit* berechnen

- Das Komplement $\overline{B}$ von B ist

$$\overline{B} = \{KK\}$$

- Aus erster Rechenregel (siehe oben):

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Modell von Laplace

- Annahme: jedes Elementarereignis hat die gleiche W'keit (**Modell von Laplace**)
- Ereignis $E = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_g\}$; Grundraum m Elemente
- Wahrscheinlichkeiten addieren sich zu 1, also

$$P(\omega_k) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{m}$$

> Für ein Ereignis E im Laplace Modell gilt also
>
> $$P(E) = \sum_{k:\ \omega_k \in E} P(\{\omega_k\}) = \frac{g}{m}$$

- Man teilt die Anzahl der **„günstigen“** Elementarereignisse durch die Anzahl der **„möglichen“** Elementarereignisse

Beispiel: Laplace Modell

- Es werden zwei Würfel geworfen
- Wie gross ist die W'keit, dass die Augensumme 7 ergibt?
- Elementarereignis beschreibt die Augenzahlen auf beiden Würfeln
- Dieses Ergebnis in der Form $(1, 4)$ schreiben, wenn der eine Würfel eine 1 und der andere eine 4 zeigt
- Es sind insgesamt 36 Elementarereignisse möglich:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

Beispiel: Laplace Modell

- Ereignis E: die Augensumme 7 wird gewürfelt
- Es gibt davon 6 Elementarereignisse:

$$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

- Da alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich , ist W'keit für das Ereignis E:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Stochastische Unabhängigkeit

- Falls $P(A)$ und $P(B)$ bekannt, lässt sich daraus $P(A \cap B)$ i.A. nicht berechnen
- Spezialfall liegt vor, wenn die Berechnung von $P(A \cap B)$ aus $P(A)$ und $P(B)$ mit Hilfe folgender Produktformel möglich ist

Die Ereignisse A und B heissen **stochastisch unabhängig**, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Beispiel: 2-maliges Werfen einer Münze

- Es sei A: „K im 1. Wurf" und B: „K im 2. Wurf"
- Dann gilt
$$P(A) = P(KK) + P(KZ) = \frac{1}{2}$$
  und analog
$$P(B) = P(KK) + P(ZK) = \frac{1}{2}$$
- Mit $A \cap B$ wird das Ereignis „K im 1. *und* im 2. Wurf" beschrieben

Beispiel: 2-maliges Werfen einer Münze

- Es gilt dann für die W'keit dieses Ereignisses

$$P(A \cap B) = P(KK) = \frac{1}{4}$$

- Da

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

gilt zudem

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- D.h.: Ereignisse A und B sind (stochastisch) unabhängig

Stochastische Unabhängigkeit: Umkehrung

- Viel wichtiger ist jedoch der umgekehrte Schluss
- Wenn zwischen den Ereignissen A und B *kein kausaler Zusammenhang* besteht (d.h. es gibt keine gemeinsamen Ursachen oder Ausschliessungen), dann nehmen wir stochastische Unabhängigkeit an und damit *muss* gelten:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- In diesem Fall kann also $P(A \cap B)$ aus $P(A)$ und $P(B)$ berechnet werden

Beispiel: Würfel und Karte

- Werfen zuerst einen Würfel und ziehen nachher eine Karte aus einem vollständigen Stapel Jasskarten

- Wie gross ist die W'keit zuerst eine 3 zu werfen und nachher einen König zu ziehen?

- Bezeichung dieses Elementarereignis mit $3K$

- Die W'keit eine 3 zu werfen ist $\frac{1}{6}$, also

$$P(3) = \frac{1}{6}$$

Beispiel: Würfel und Karte

- Die Wahrscheinlichkeit einen König zu ziehen ist $\frac{1}{9}$:

$$P(K) = \frac{1}{9}$$

- Würfelwurf hat auf das Ziehen einer Jasskarte keinen Einfluss

$$P(3K) = P(3) \cdot P(K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$$

Beispiel: Münzenwerfen

- Sei wieder A: „K im 1. Wurf“ und B: „K im 2. Wurf“.
- Plausible Annahme:, gibt keinen kausalen Zusammenhang zwischen dem Ergebnis des ersten und des zweiten Wurfs gibt
- Mit anderen Worten hat das Ergebnis des 1. Wurfes (Ereignis A) keinen Einfluss auf das Ergebnis des 2. Wurfes (Ereignis B)
- Die Ereignisse A und B sind also unabhängig
- Deshalb kann man $P(A \cap B)$ wie folgt berechnen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Beispiel: Abhängigkeit beim Würfelwurf

- Zwei Würfel werden geworfen
- Sei E das Ereignis, dass der erste Würfel die Augenzahl 4 zeigt und F das Ereignis, dass die Augen*summe* 6 ist
- Sind die Ereignisse E und F unabhängig voneinander?
- Um dies festzustellen $\quad\rightarrow\quad$ gilt Produktformel oder nicht?

$$P(E \cap F) \stackrel{?}{=} P(E) \cdot P(F)$$

- Ereignis $E \cap F$ besteht nur aus Elementarereignis $(4, 2)$

- Damit gilt für dessen Wahrscheinlichkeit

$$P(E \cap F) = P((4,2)) = \frac{1}{36}$$

- Es gilt natürlich $P(E) = \frac{1}{6}$
- Das Ereignis F besteht aus den Elementen

$$F = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

- Es gilt

$$P(F) = \frac{5}{36}$$

- Produktformel überprüfen:

$$P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36} = P(E \cap F)$$

- Deshalb sind E und F nicht unabhängig.

- Abhängigkeit der beiden Ereignisse E und F auch ohne Rechnung leicht einsehen
- Werfen den ersten Würfel und erhalten eine 6
- Keine Möglichkeit mehr in zwei Würfen die Augensumme 6 zu erreichen (die W'keit ist 0)
- Zuerst irgendeine andere Zahl werfen, so Möglichkeit (W'keit ungleich 0) auf die Augensumme 6 zu kommen
- W'keit die Augensumme 6 zu erzielen hängt von der Augenzahl des ersten Wurfes ab
- Also können E und F nicht unabhängig voneinander sein

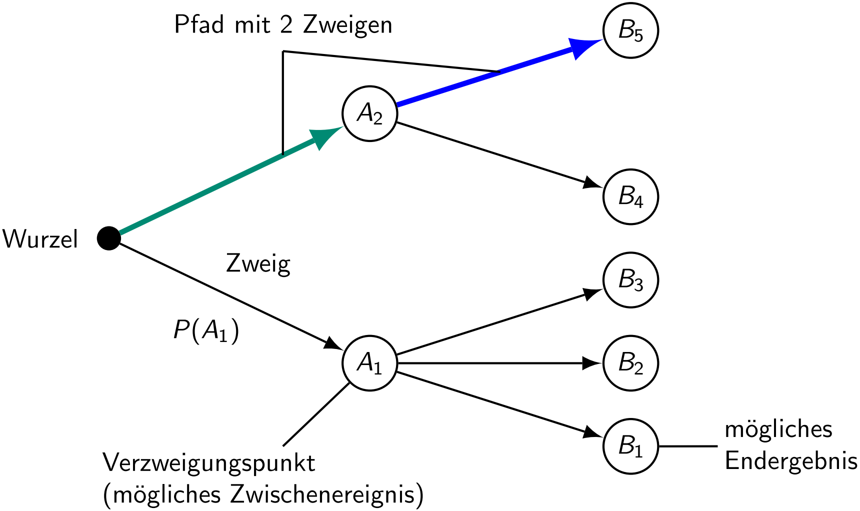
Mehrstufiges Zufallsexperiment

- *Mehrstufiges Zufallsexperiment* : Zufallsprozess, der aus mehreren nacheinander ablaufenden Zufallsexperimenten besteht
- Beispiele:
  - Münze wird zweimal geworfen $\rightarrow$ *2-stufiges* Zufallsexperiment
  - Wird zuerst ein Würfel geworfen und danach eine Jasskarte aus einem Stapel gezogen $\rightarrow$ 2-stufiges Zufallsexperiment

Wahrscheinlichkeitsbaum

- *Wahrscheinlichkeitsbaum* : äusserst anschauliches Hilfsmittel bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei *mehrstufigen* Zufallsexperimenten
- Weitere Bezeichnungen: *Ereignisbaum* oder *Baumdiagramm*
- Er besteht aus:
  - einer *Wurzel* (Ausgangspunkt)
  - mehreren *Verzweigungspunkten*
  - Vielzahl von *Zweigen*

Wahrscheinlichkeitsbaum: Schematisch



Wahrscheinlichkeitsbaum

- Verzweigungspunkte A_1 und A_2: mögliche Zwischenergebnisse nach der 1. Stufe.
- Von A_1 und A_2 ausgehende Zweige führen zu den jeweils möglichen Ergebnissen der nachfolgenden 2. Stufe
- Hier sind es die möglichen *Endergebnisse* B_1 bis B_5
- Die W'keit eines bestimmten Ereignisses schreibt man an den betreffenden Zweig.
- So ist z.B. $P(A_1)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_1.
- Ein mögliches *Endergebnis* erreicht man dann immer von der Wurzel ausgehend längs eines bestimmten Pfades.
- Dieser besteht meistens aus mehreren Zweigen, wie z.B. der in Abbildung dick eingezeichnete Pfad, der von der Wurzel über das Zwischenergebnis A_2 zum Endergebnis B_5 führt

Wahrscheinlichkeitsbaum: Allgemeine Regel

Regeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbaumes

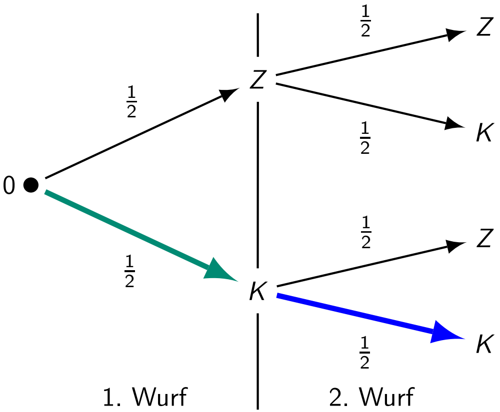
Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Endergebnisse erfolgt dabei mit Hilfe der folgenden Regeln:

1. Die Wahrscheinlichkeiten längs eines *Pfades* werden miteinander *multipliziert*.
2. Führen *mehrere* Pfade zum *gleichen* Endergebnis, so *addieren* sich ihre Wahrscheinlichkeiten.

Wahrscheinlichkeitsbaum: Beispiel

- Es sei A: „K im 1. Wurf“ und B: „K im 2. Wurf“.
- Wir möchten mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbaumes die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E = A \cap B$ berechnen.
- Die Wahrscheinlichkeit für „K im 1. Wurf“ beträgt $\frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit für „K im 2. Wurf“ beträgt wieder $\frac{1}{2}$.
- Somit ist die Wahrscheinlichkeit des Endergebnisses E (K im 1. Wurf *und* K im 2. Wurf) gegeben durch die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades, also

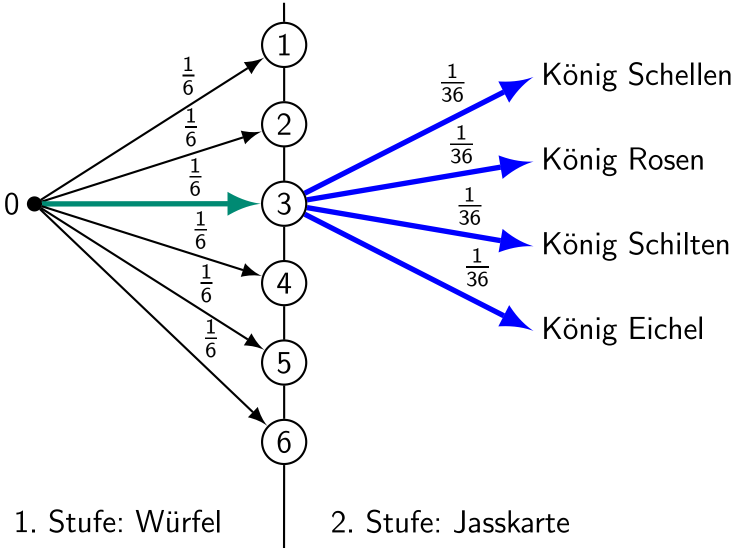
$$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



- Aus W'keitsbaum: Für die W'keit von „K im 2. Wurf“ spielt es keine Rolle, ob wir im 1. Wurf „Z“ oder „K“ erhalten haben.
- Ereignisse „K im 1. Wurf“ und „K im 2. Wurf“ sind stochastisch unabhängig.

Wahrscheinlichkeitsbaum: Beispiel

- Zufallsversuch:
  - Zuerst einen (fairen) Würfel werfen
  - dann eine Jasskarte ziehen
- Uns interessiert die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine 3 zu werfen und nachher einen König zu ziehen.
- Mit Wahrscheinlichkeitsbaum die gesuchte W'keit berechnen.


0
1
2
3
4
5
6
1/6
1/6
1/6
1/6
1/6
1/6
1/36
1/36
1/36
1/36
König Schellen
König Rosen
König Schilten
König Eichel
1. Stufe: Würfel
2. Stufe: Jasskarte

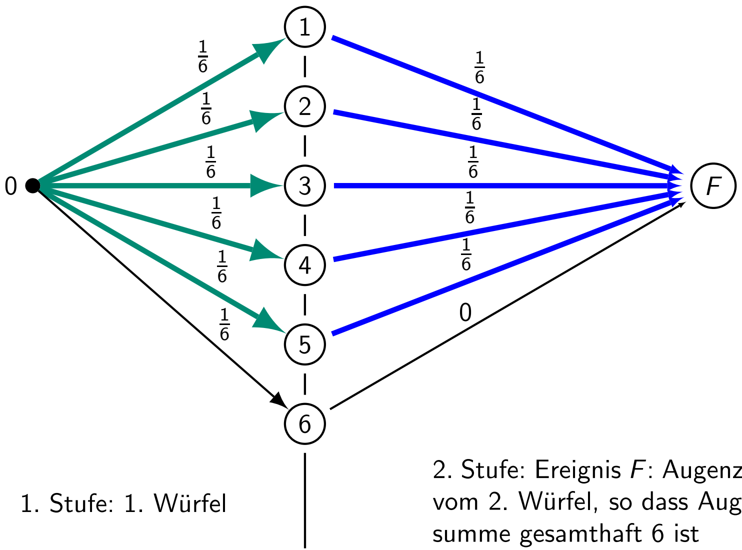
- In diesem Fall *vier* Endergebnisse: auf der 2. Stufe sind „König Schellen", „König Schilten", „König Eichel" und „König Rosen" Elemente des Ereignisses, zuerst eine 3 zu werfen und nachher einen König zu ziehen.
- Daher addieren wir die W'keiten aller Pfade, die zum selben Endergebnis führen.
- Dies ergibt dann die W'keit

$$4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{54}$$

- Würden wir den W'keitsbaum vervollständigen, wäre ersichtlich, dass die W'keit, auf der 2. Stufe einen König zu ziehen, unabhängig vom Zwischenergebnis der 1. Stufe ist.
- Augenzahl auf der 1. Stufe und die gezogene Jasskarte sind unabhänige Ereignisse.

Wahrscheinlichkeitsbaum: Beispiel

- Es werden zwei Würfel geworfen
- Uns interessiert das Endergebnis, wo die *Augensumme* der beiden Würfel 6 beträgt.
- Wir bezeichnen mit F das Ereignis „Augenzahl des 2. Würfels, so dass Augensumme der beiden Würfel gleich 6 ist".



1. Stufe: 1. Würfel

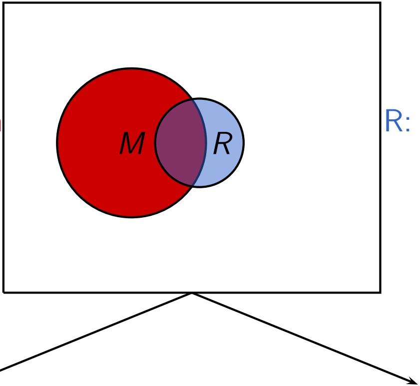
2. Stufe: Ereignis F: Augenzahl vom 2. Würfel, so dass Augensumme gesamthaft 6 ist

- Nun sehen wir, dass die Wahrscheinlichkeiten für die Zweige auf der 2. Stufe vom Ausgang der vorangehenden Stufe abhängen.
- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F am Zweig nach dem Zwischenergebnis „6 beim 1. Würfel“ beträgt 0, während die Wahrscheinlichkeit für F an den übrigen Zweigen $\frac{1}{6}$ beträgt.
- Es handelt sich hier um *bedingte* Wahrscheinlichkeiten, auf die wir nun im folgenden Kapitel eingehen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ω: Studenten dieser VL

M: Männlich
$P(M)$



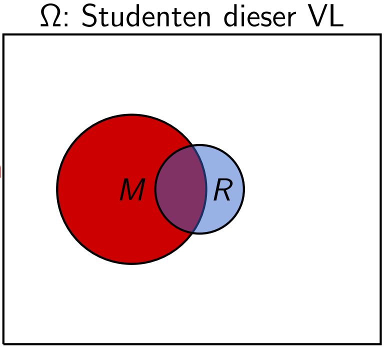
R: Raucher
$P(R)$

$P(R|M)$
Wa. für Raucher
wenn ein Mann gewählt wurde

$P(M|R)$
Wa. für Mann
wenn ein Raucher gewählt wurde

Bedingte Wahrscheinlichkeit

M: Männlich
$P(M)$

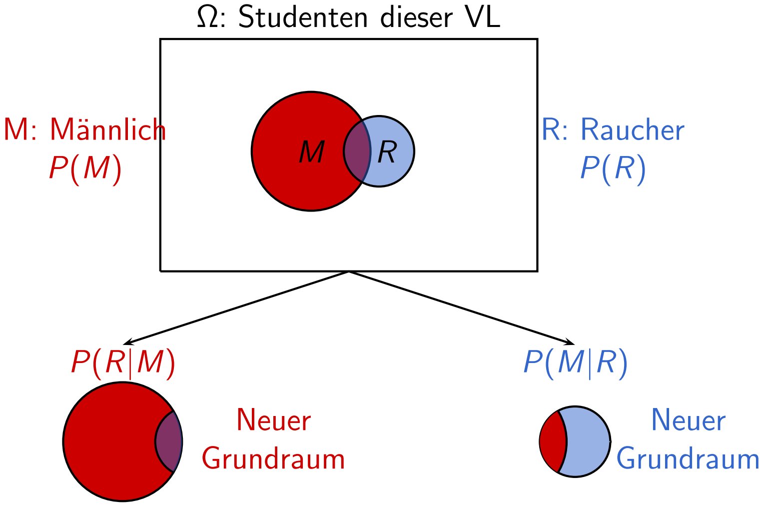


R: Raucher
$P(R)$

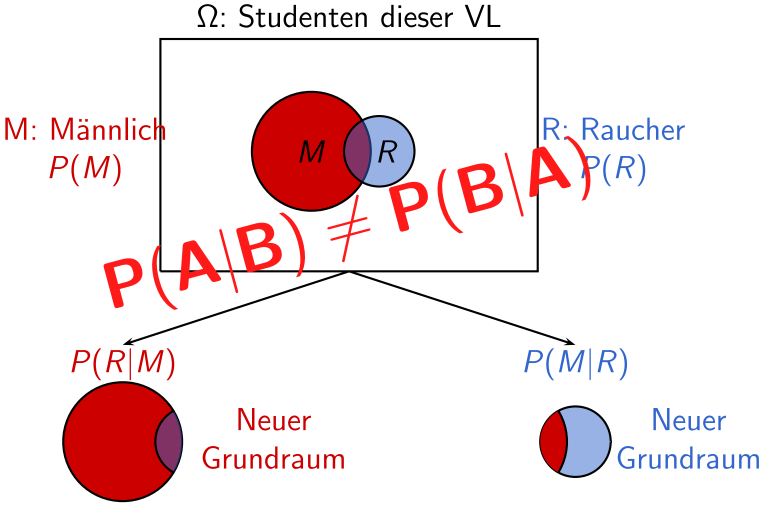
Welche Aussagen sind korrekt?

1. $P(M|R) = P(R|M)$
2. $P(M|R) > P(R|M)$
3. $P(M|R) < P(R|M)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit



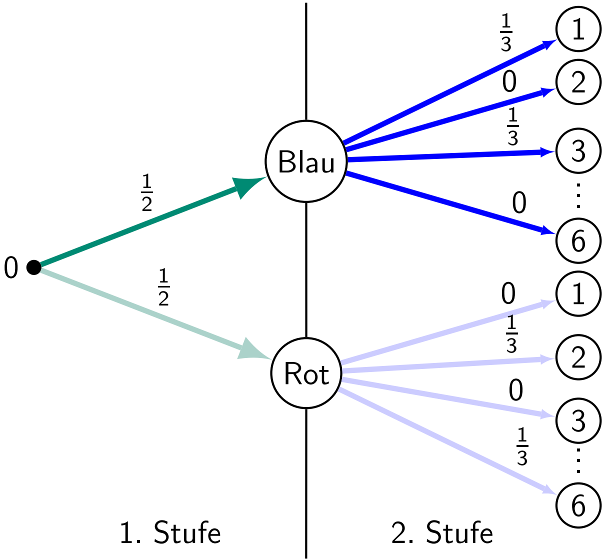
Bedingte Wahrscheinlichkeit



Bedingte Wahrscheinlichkeit

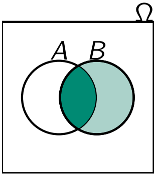
- Die **bedingte W'keit** ist die W'keit, dass das Ereignis A eintritt, wenn wir schon wissen, dass B eingetreten ist
- Bezeichnung:
$$P(A|B)$$
- Der Längsstrich wird als „unter der Bedingung“ gelesen
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ wird definiert durch
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
- Interpretation: $P(A|B)$ ist die W'keit für das Ereignis A, wenn wir wissen, dass das Ereignis B schon eingetroffen ist

Bedingte Wahrscheinlichkeit als Baumdiagramm



Verdeutlichung der Formel mit Flächen

- Graphisch



- Es ist $|\Omega| = 1$
- $P(A|B)$ Flächeninhalt der dunkel gefärbten Flächen
- $P(B)$ Flächeninhalt der gesamten gefärbten Fläche B
- Der Anteil der dunkelgefärbten Fläche zur gefärbten Fläche ist dann

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Beispiel: Medizinischer Test

- Ein medizinischer Test soll für eine Krankheit feststellen, ob eine Person an dieser Krankheit erkrankt ist oder nicht
- Natürlich ist dieser Test nicht ganz genau:
  - Zeigt manchmal die Krankheit an, obwohl die Person gesund ist
  - Er zeigt die Krankheit nicht an, obwohl die Person krank ist
- Uns interessiert folgende Frage: Sie gehen zum Arzt und machen diesen Test auf eine tödliche Krankheit Der Test ist positiv (Sie haben gemäss dem Test die Krankheit, müssen aber nicht unbedingt krank sein)
- Wie gross ist die W'keit, dass Sie wirklich krank sind?

- Bezeichnungen:
  - D: Krankheit ist vorhanden; $\overline{D}$: Krankheit ist nicht vorhanden
  - $+$: Test zeigt Krankheit an; $-$: Test zeigt Krankheit nicht an

- W'keiten in Tabelle sind durch Versuche bekannt

	D	D^c
$+$	0.009	0.099
$-$	0.001	0.891

- Z.B.: W'keit, dass die Krankheit vorhanden ist *und* der Test positiv ausfällt

$$P(D \cap +) = 0.009$$

- Diese Wahrscheinlichkeit ist recht klein

- Grund: nur kleiner Prozentsatz der Bevölkerung hat Krankheit

- Verschiedene bedingte W'keiten:
  - $P(+|D)$: W'keit, dass ein Kranker auch wirklich positiv getestet wird
  - $P(-|\overline{D})$: W'keit, dass ein Gesunder richtigerweise negativ getestet wird
  - $P(D|+)$: W'keit, dass positiv Getesteter auch wirklich krank ist
  - etc.

- Berechnen zuerst die W'keit $P(+|D)$:

$$P(+|D) = \frac{P(+ \cap D)}{P(D)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.001} = 0.9$$

- Dabei haben wir für $P(D)$ folgende Tatsache benützt

$$P(D) = P(D \cap +) + P(D \cap -) = 0.009 + 0.001$$

- Summe der Einträge in der Tabelle in der Spalte unter D

- Die Kranken sind entweder positiv oder negativ getestet

- Bedingte W'keit $P(-|\overline{D})$:

$$P(-|\overline{D}) = \frac{P(- \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.891}{0.891 + 0.099} = 0.9$$

- Scheinbar ist dieser Test recht genau

- Kranke Personen werden zu 90 % als positiv eingestuft, und gesunde Personen werden zu 90 % als negativ eingestuft

- Fragestellung aber auch umkehren

- Angenommen, Sie gehen zu einem Test und dieser wird als positiv eingestuft

- Wie gross ist die W'keit, dass Sie die Krankheit wirklich haben?

- Die meisten Leute würden 0.9 antworten
- Müssen Sie sich also grosse Sorgen machen und das Testament schreiben oder einer Sterbehilfeorganisation beitreten?
- Die *richtige* Antwort ist die bedingte W'keit $P(D|+)$:

$$P(D|+) = \frac{P(+ \cap D)}{P(+)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} = 0.08$$

- Was bedeutet nun dieses Resultat?
- Die bedingte W'keit $P(D|+)$ ist die W'keit, dass man bei einem positiven Test auch wirklich krank ist
- Diese beträgt aber nur 8 %
- Man hat bei einem positiven Test also nur zu 8 % auch wirklich die Krankheit
- Ein positiver Test sagt hier also sehr wenig darüber aus, ob man die Krankheit hat oder nicht

Bayes' Theorem

Bayes' Theorem

Das **Bayes Theorem** liefert einen oft nützlichen Zusammenhang zwischen $P(A|B)$ und $P(B|A)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Beispiel: Das Bayes Theorem liefert die gleiche Lösung wie unsere obige Rechnung:

$$P(D|+) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+)} = \frac{0.9 \cdot (0.009 + 0.001)}{0.009 + 0.099} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} = 0.08$$

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

- Ein weiterer nützlicher Begriff ist die *totale Wahrscheinlichkeit*
- Menge A in Mengen $A_1, \ldots, A_k$ unterteilt, die miteinander keine Schnittmenge haben und zusammen (Vereinigung) die ganze Menge A bilden
- Eine solche Aufteilung nennen wir eine **Partitionierung**
- Für den Würfelwurf ist folgende Partitionierung möglich:

$$A_1 = \{1\}, \qquad A_2 = \{2, 4\}, \qquad A_3 = \{3, 5, 6\}$$

- Es gilt also

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset; \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset; \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset$$

und

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$

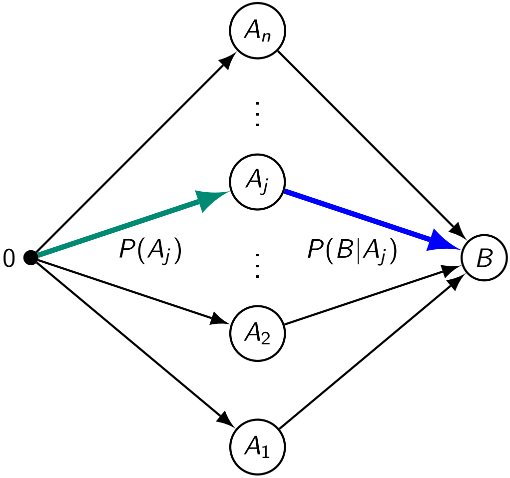
- Es gilt dann das

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Für die Partionierung $A_1, \ldots, A_k$ und für jedes beliebige Ereignis B gilt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_k)P(A_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B|A_k)P(A_k) \end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeit als Baumdiagramm



Beispiel: Spam-Mail

- Teilen Emails in drei Kategorien ein:

  A_1 : „spam“, A_2 : „niedrige Priorität“, A_3 : „hohe Priorität“

- Aus früheren Beobachtungen bekannt:

  $$P(A_1) = 0.7, \qquad P(A_2) = 0.2, \qquad \text{und} \qquad P(A_3) = 0.1$$

- Es gilt

  $$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

  wie es bei einer Partitionierung auch sein sollte

- Ereignis B: das Wort „free“ taucht in der Email auf

- Dieses Wort kommt sehr oft in Spam-Mails vor, aber auch in den anderen

- Von früheren Beobachtungen bekannt

$$P(B|A_1) = 0.9, \quad P(B|A_2) = 0.01, \quad \text{und} \quad P(B|A_3) = 0.01$$

- Hier ergibt die Summe nicht 1
- Dies sind die W'keiten, mit der das Wort „free“ in den drei Mailkategorien vorkommt
- Angenommen, es kommt eine Email an, die das Wort „free“ enthält
- Wie gross ist die W'keit, dass es sich um Spam handelt?

- Das Bayes Theorem zusammen mit dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit liefert die Lösung:

$$
\begin{aligned}
P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.7}{(0.9 \cdot 0.7) + (0.01 \cdot 0.2) + (0.01 \cdot 0.1)} \\
&= 0.995
\end{aligned}
$$

- Viele Spamfilter basieren tatsächlich auf diesem Prinzip
- Die Mails werden nach Worten wie „free“, „credit“, etc. durchsucht, die häufig in Spam-Mails vorkommen, in den anderen aber eher nicht