Aufgabe 1:

Bestimmen Sie ohne Berechnung von Integralen die Fourierkoeffizienten sowie das Amplitudenspektrum der beiden Funktionen:

a) $f(x) = 2 + \sin(2\,x) + 3\,\cos(2\,x) + \sin(5\,x)$

b) $f(x) = 2\,\sin(4\,x - 1) - 4\,\cos(3\,x + 2)$

Lösung:

a) Das Amplitudenspektrum A_k ist definiert als $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

k	a_k	b_k	A_k
0	4	0	4
2	3	1	$\sqrt{10}$
5	0	1	1

b) Zuerst bringen wir die gegebene Funktion mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

auf die Form

$$f(x) = 2\,\cos(1)\,\sin(4\,x) + 2\,\sin(1)\,\cos(4\,x) - 4\,\cos(2)\,\cos(3\,x) + 4\,\sin(2)\,\sin(3\,x)$$

k	a_k	b_k	A_k
3	$-4\cos(2)$	$4\sin(2)$	4
4	$-2\sin(1)$	$2\cos(1)$	2

Aufgabe 2:

Gegeben $h \in (0, \pi)$ und die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, h) \\ 0 & \text{für } x \in (h, \pi) \end{cases}$$

a) Setzen Sie diese Funktion so fort, dass Sie gerade ist und die Periode 2π hat. Skizzieren Sie diese Funktion auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$. Bestimmen Sie dann die Kosinus-Fourierreihe.

b) Setzen Sie diese Funktion so fort, dass Sie ungerade ist und die Periode 2π hat. Skizzieren Sie diese Funktion auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$. Bestimmen Sie dann die Sinus-Fourierreihe.

c) *Freiwillig:* Stellen Sie die Fourierentwicklungen für eine endliche Anzahl Glieder grafisch dar (Maple, Matlab, oder sonst was..)

Lösung:

a) Die Funktion wird in eine reine Kosinus-Reihe entwickelt, somit verschwinden alle Sinus-Anteile ($b_k = 0$). Die Periode ist $T = 2\pi$. Für die Koeffizienten a_k muss nur das halbe Integrationsintervall $[0, \pi]$ betrachtet werden, da durch die Kosinusentwicklung die Funktion automatisch gerade fortgesetzt wird.

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \cos(k\,x)\, dx$$

Im ersten Schritt berechnen wir

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{h} 1\, dx = \frac{2\,h}{\pi}$$

dann für $k > 0$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{h} 1\, \cos(k\,x)\, dx = \frac{2}{\pi\,k}\, \sin(k\,h)$$

womit wir das Ergebnis erhalten (Achtung $a_0/2$ und nicht a_0 in der Fourierreihe einsetzen):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \cos(k\,x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\,h)}{k}\, \cos(k\,x)$$

b) Für die Sinus-Reihe funktioniert das auf die gleiche Weise, nur mit dem Unterschied, dass nun alle a_k verschwinden und wir nur die b_k benötigen:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \sin(k\,x)\, dx$$

womit

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{h} 1\, \sin(k\,x)\, dx = \frac{2}{k\,\pi}\,(1 - \cos(k\,h))$$

und daraus

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(k\,h)}{k}\, \sin(k\,x)$$

c) Nun berechnen wir für beide Entwicklungen das Amplitudenspektrum

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

zu a): $A_k = \frac{2|\sin(k\,h)|}{\pi} \cdot \frac{1}{k}$ zu b): $A_k = \frac{2|1-\cos(k\,h)|}{\pi} \cdot \frac{1}{k}$

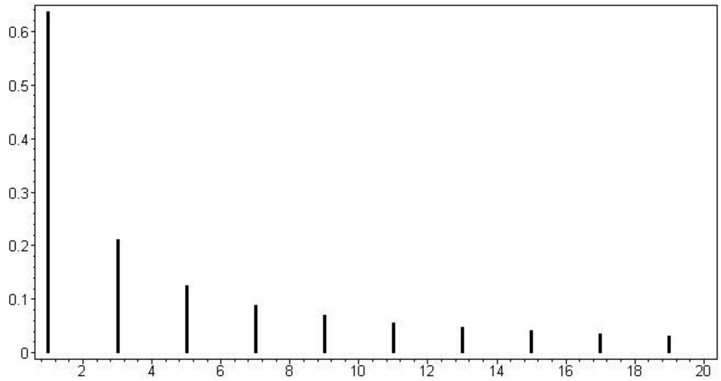

Abbildung 1: Spektrum $A_k = \frac{2|\sin(k\,h)|}{\pi} \cdot \frac{1}{k}$ zu Aufgabe 1a) mit $h = \pi/2$

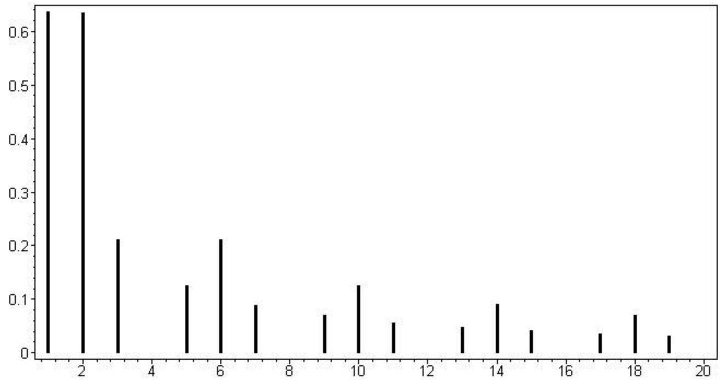

Abbildung 2: Spektrum $A_k = \frac{2|1-\cos(k\,h)|}{\pi} \cdot \frac{1}{k}$ zu Aufgabe 1b) mit $h = \pi/2$

Aufgabe 3:

Gegeben ist die im Intervall $[0, \pi]$ durch

$$f(x) = x\,(\pi - x)$$

definierte Funktion.

a) Entwickle diese Funktion in eine reine Kosinus-Reihe mit Periode 2π (Funktion gerade fortsetzen). Berechnen Sie die auftretenden Integrale von Hand, indem Sie zum Beispiel die *partielle Integration* oder eine *Substitution* verwenden.

b) Benutze das Ergebnis aus a) um die Werte der beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots = \qquad ?$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \ldots = \qquad ?$$

zu bestimmen.

Hinweis: Werte dazu die ermittelte Fourier-Reihe an geeigneten Stellen x aus.

Lösung:

a) Die Koeffizientenformel für die 2π-periodische Kosinusreihe ist identisch wie bei Aufgabe 2a), damit erhält man

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

und

$$a_k = -\frac{2}{k^2}\,(1+\cos(\pi\,k)) = \begin{cases} -\frac{4}{k^2} & ;\text{k gerade} \\ 0 & ;\text{k ungerade} \end{cases}$$

also lautet die Kosinusfourierreihe

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2\,k)^2} \cdot \cos(2\,k\,x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \cos(2\,k\,x)$$

Das Amplitudenspektrum ist

$$A_k = |a_k| = \begin{cases} \frac{4}{k^2} & ;\text{k gerade} \\ 0 & ;\text{k ungerade} \end{cases}$$

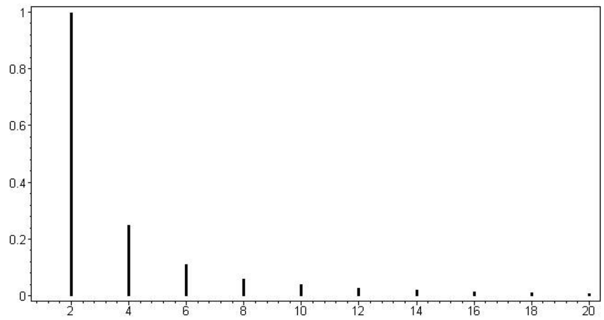

Abbildung 3: Amplitudenspektrum zu 3a)

b) Für die erste Reihe muss die Reihe an der Stelle $x = 0$ oder $x = \pi$ ausgewertet werden

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und für die zweite Reihe an der der Stelle $x = \pi/2$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$