Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

Aufgabe 1: Linearität von Fourierreihen (Superposition)

Skizzieren Sie den Graphen der $2\,T_0$-periodischen Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} A\,|x| & (-T_0 < x < 0), \\ 0 & (0 < x < T_0). \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie $f(x)$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion und bestimmen Sie deren Fourierreihen. Bestimmen Sie dann damit die reelle Fourierreihe von $f(x)$ durch Superposition.

Lösung:

$$f(x) = \frac{A\,T_0}{4} + \frac{A\,T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi\,k^2} \cos\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right) + \frac{(-1)^k}{k} \sin\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right)$$

Aufgabe 2: Komplexe Orthogonalitätsrelationen

Formulieren Sie analog zu den (reellen) Orthogonalitätsrelationen aus Kapitel 1.2.1. eine komplexe Orthogonalitätsrelation und leiten Sie damit direkt die Formel für die komplexen Fourierkoeffizienten c_k für

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\,k\,x}$$

her.

Aufgabe 2: Komplexe Fourierreihe

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = e^{-x}, \quad \text{für } x \in [0, 2\pi).$$

a) Skizzieren Sie diese Funktion im Intervall $[-4\,\pi, 4\,\pi]$.

b) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe.

c) Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k mit Hilfe der komplexen Koeffizienten aus b).

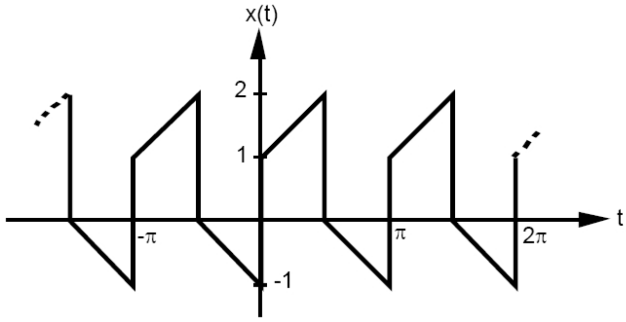
d) Welchen Wert nimmt die Fourierreihe an der Stelle $x = 2\,\pi$ an? *Hinweis:* Skript Seite 6 Kapitel 1.4.1.

Lösung zu b):

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2\,\pi}}{2\,\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - i\,k}{1 + k^2}\, e^{i\,k\,x}$$

Aufgabe 3: Linearität von Fourierreihen

Gegeben ist der Graph der π-periodischen Funktion x(t):



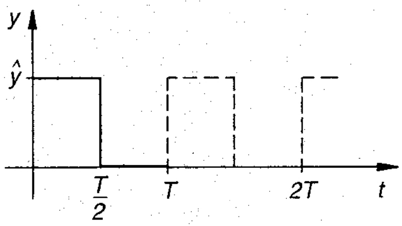
a) Die Funktion $x(t)$ kann als Linearkombination einer Dreiecksfunktion $x_1(t)$ und einer Rechtecksschwingung $x_2(t)$ aufgefasst werden, deren reelle Fourier-Reihen in Abb. 1 aufgeführt sind. Formulieren Sie diese Linearkombination, d.h. finden Sie λ_1 und λ_2 so, dass $x(t) = \lambda_1\, x_1(t) + \lambda_2\, x_2(t)$.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $x(t)$ mit Hilfe der Linearität und den tabellierten reellen Fourier-Reihen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

c) Geben Sie die komplexe Fourierreihe an.

Rechteckskurve

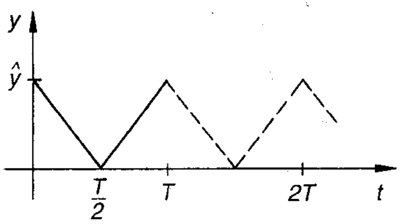
$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5\omega_0 t) + \dots\right)$$

Dreieckskurve

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{2\hat{y}}{T}\,t + \hat{y} & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{2\hat{y}}{T}\,t - \hat{y} & \text{für } \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cdot\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2}\cdot\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\cdot\cos(5\omega_0 t) + \dots\right)$$

Abbildung 1: Rechtecks- und Dreiecksschwingung (aus Papula)

Viel Spass!