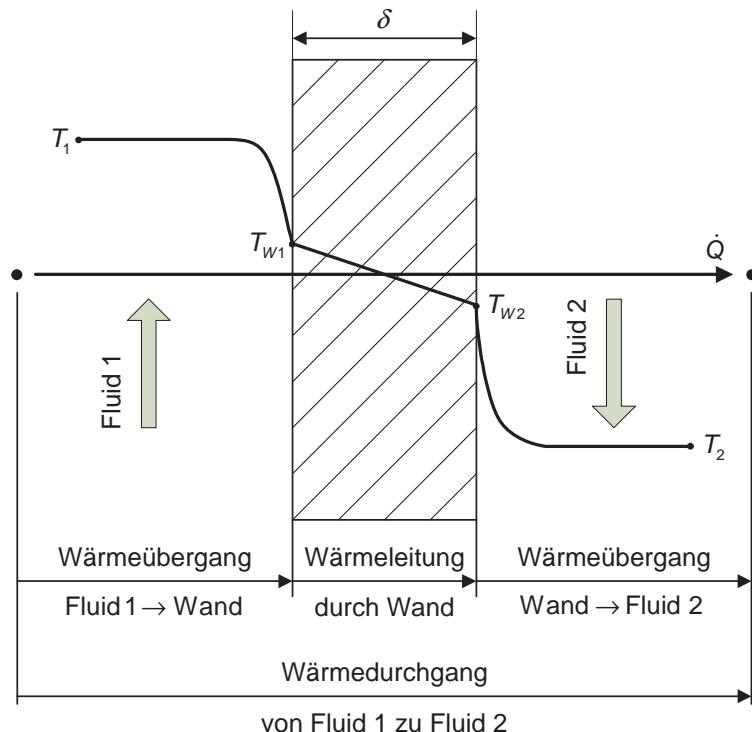


# Kapitel 8

## Wärmeübertragung

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen der Wärmeübertragung sowie Beispiele für deren Anwendung behandelt.



Die Abbildung zeigt einen Temperaturverlauf *quer* zur Strömung beim Wärmedurchgang durch eine ebene Wand.

## 8.1 Arten der Wärmeübertragung

Grundsätzlich kann Wärme auf zwei Arten übertragen werden, durch *Kontakt* und durch *Strahlung*. Im Falle des Kontaktes unterscheidet man zwischen Übertragung durch Leitung und durch Konvektion. Es wird also zwischen den drei Wärmeübertragungsmechanismen Wärmeleitung, Konvektion und Wärmestrahlung unterschieden.

### 1. Wärmeleitung:

Sie findet bei sämtlichen Stoffen statt, wenn Temperaturdifferenzen vorliegen.

Stationäre Wärmeleitung (1. Fourier'sche Gesetz):

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Instationäre Wärmeleitung (2. Fourier'sche Gesetz):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$\lambda$  bezeichnet die Wärmeleitfähigkeit in [W/m K]. Die Gleichung für den instationären Wärmetransport erhält man aus der Energiebilanz durch ein Wandstück der Dicke  $dx$ .

### 2. Konvektive Wärmeübertragung:

Sie tritt bei bewegten Fluiden auf. Es wird zwischen freier und erzwungener Konvektion unterschieden.

Ansatz nach Newton:

$$\dot{q} = \alpha (T_1 - T_2)$$

Die Gleichung von Newton gilt als Definitionsgleichung für den so genannten Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  in [W/m<sup>2</sup> K]. Dieser ist von zahlreichen Faktoren abhängig.

### 3. Wärmestrahlung:

Jeder Körper mit einer Temperatur oberhalb von 0 K sendet thermische Strahlung, also Wärmestrahlung aus (elektromagnetische Strahlung). Die Beschreibung der Strahlungsspektren, welche in der nachfolgenden Abbildung für verschiedene Temperaturen aufgetragen sind, erfolgt durch das Planck'sche Gesetz:

$$E_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{(\frac{c_2}{\lambda T})} - 1)} \text{ [W/m}^2\text{]}$$

$\lambda$  = Wellenlänge

$\nu$  = Frequenz

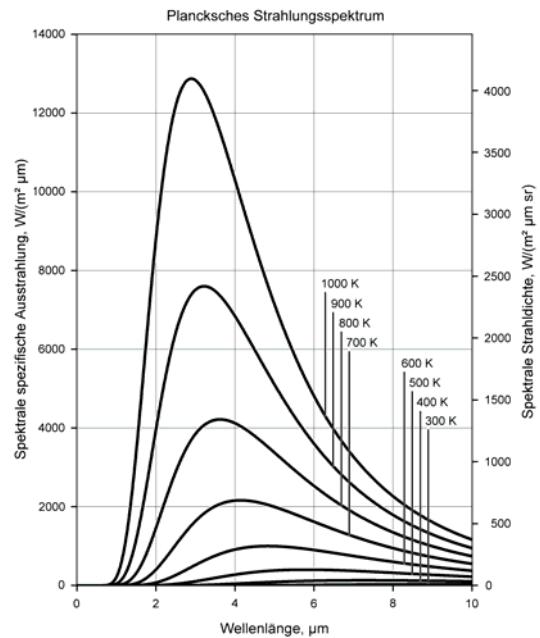
$$c_1 = 2\pi h c^2$$

$$c = \lambda \nu \text{ (Vakuum: } c_0 \approx 300 \cdot 10^6 \text{ m/s)}$$

$h$  = Planck'sches Wirkungsquantum

$$c_2 = \frac{h c}{k}$$

$$k = \text{Ludwig-Boltzmann Konst.} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$



Das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschreibt den physikalischen Zusammenhang:

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma T^4$$

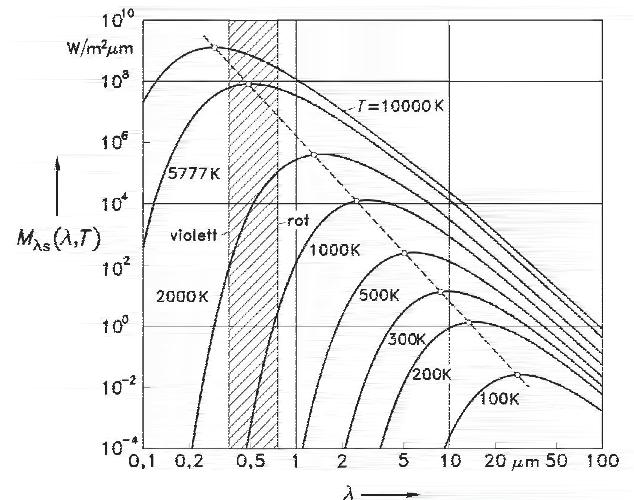
$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \text{ (Stefan-Boltzmann Konstante)}$$

$$\dot{Q} = \varepsilon \sigma A T^4$$

$\sigma$  bezeichnet die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $\varepsilon$  den Emissionsgrad. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschreibt bei steigender Temperatur eine in der vierten Potenz steigende Strahlungsleistung. Die starke Leistungszunahme kann ebenfalls mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz erklärt werden, das die Verschiebung des Emissionsmaximums in Richtung kürzerer Wellenlängen beschreibt.

Wien'sches Gesetz:

$$\lambda_{max} = \frac{2897.8 \text{ } \mu\text{mK}}{T}$$

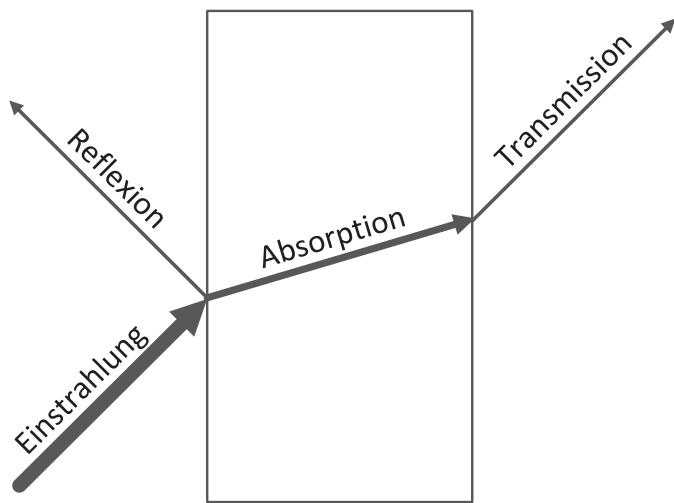


Die Intensität der Strahlung eines schwarzen Körpers wird mit dem Emissionsgrad ausgedrückt.

Emissionsgrad:

$$\varepsilon = \frac{\text{emitierte Strahlung}}{\text{emitierte Strahlung des schwarzen Körpers}} ; \quad \varepsilon < 1$$

Trifft Strahlung auf eine Oberfläche, kann sie absorbiert, reflektiert und transmittiert werden.



Der Einfluss dieser Effekte wird durch die folgenden Kennzahlen beschrieben.

Reflexionsgrad:

$$\rho = \frac{\text{reflektierte Strahlung}}{\text{Einstrahlung}}$$

Absorptionsgrad:

$$\alpha = \frac{\text{absorbierte Strahlung}}{\text{Einstrahlung}}$$

Transmissionsgrad:

$$\tau = \frac{\text{transmittierte Strahlung}}{\text{Einstrahlung}}$$

Die Summe von  $\rho$ ,  $\alpha$  und  $\tau$  ergibt 1.

Für jeden Körper im thermischen Gleichgewicht gilt das Kirchhoffsche Gesetz:

$$\alpha = \varepsilon$$

Für den Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen gilt:

$$\dot{q}_1 = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} (T_1^4 - T_2^4)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn eine Fläche (z.B.  $A_2$ ) besonders gross ist. Dies ist der Fall beim Strahlungsaustausch eines Körpers mit der Umgebung ( $A_2 \gg A_1$ ).

$$\dot{Q}_1 = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

## 8.2 Unmittelbare und mittelbare Wärmeübertragung

### 8.2.1 Unmittelbare Wärmeübertragung (direkter Kontakt)

Wenn zwei Medien verschiedener Temperatur direkt miteinander in Kontakt gebracht werden, spricht man vom unmittelbarer Wärmeübertragung. Es stellt sich bei intensiver Vermischung eine Mischtemperatur  $T_m$  ein, die sich aus dem Energieerhaltungssatz (1. HS) ermitteln lässt. Bei Anwesenheit eines Phasenwechsels müssen die *latenten Wärmen* berücksichtigt werden. Für zwei Gasströme gilt z. B.:

$$\dot{m}_1 c_{p1} T_1 + \dot{m}_2 c_{p2} T_2 = (\dot{m}_1 c_{p1} + \dot{m}_2 c_{p2}) T_m$$

$$T_m = \frac{\dot{m}_1 c_{p1} T_1 + \dot{m}_2 c_{p2} T_2}{\dot{m}_1 c_{p1} + \dot{m}_2 c_{p2}}$$

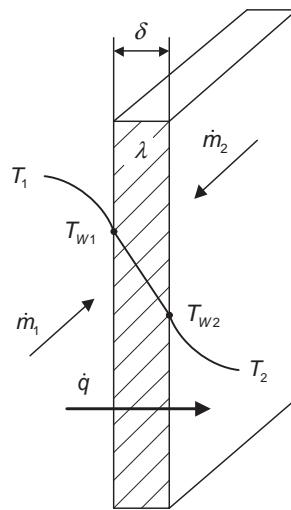
$$CP_1 T_1 + CP_2 T_2 = CP_m T_m$$

$T_m$  liegt zwischen  $T_1$  und  $T_2$ , und näher bei der Temperatur des Mediums mit dem höheren *Wärmekapazitätsstrom*  $CP$  (in W/K). Die unmittelbare Wärmeübertragung ist dann vorteilhaft einzusetzen, wenn zwei Medien aus verfahrenstechnischen Gründen gemischt werden dürfen und anschliessend leicht wieder aufgetrennt werden können (z. B. Gas/Feststoff-Wärmeübertrager oder Mischkondensatoren).

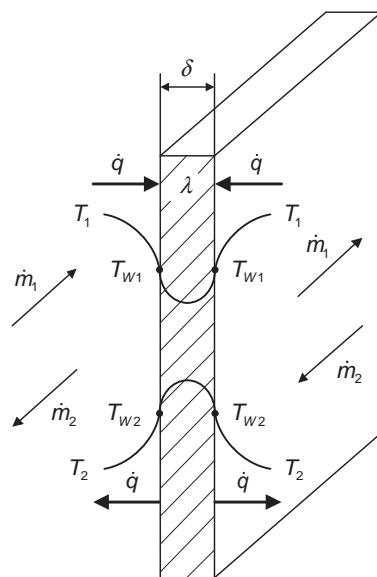
### 8.2.2 Mittelbare Wärmeübertragung

Die mittelbare Wärmeübertragung kann auf zwei Arten erfolgen:

1. Wird Wärme von einem Medium 1 auf ein Medium 2 durch eine Wand hindurch übertragen, spricht man von einem *rekuperativen Wärmedurchgang*. Die in diesem Fall eingesetzten Wärmeübertrager werden als Rekuperatoren bezeichnet (z. B. Platten-Wärmeübertrager).



2. Wird Wärme von einem Medium 1 an eine Wand oder an einen Körper übertragen, dort gespeichert und danach von diesem Speichermedium im periodischen Wechsel auf ein Medium 2 übertragen, handelt es sich um einen *regenerativen Wärmetransport*. In diesem Fall wird von so genannten Regeneratoren gesprochen (z. B. Kühlakkus für Kühlboxen).



### 8.3 Wichtige Begriffe

Wärmemenge  $Q$ : thermische Energie in J

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} A \Delta T \Delta t$$

Wärmestrom  $\dot{Q}$ : pro Zeiteinheit übertragene Wärmemenge in J/s = W

$$\dot{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\delta} A \Delta T$$

Wärmestromdichte  $\dot{q}$ : pro Flächeneinheit übertragener Wärmestrom in J/m<sup>2</sup>s = W/m<sup>2</sup>

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T$$

Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ : Fähigkeit eines Stoffes, Wärme zu transportieren in W/mK

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Temperaturleitfähigkeit  $a$ : Fähigkeit eines Stoffes, Temperatur zu "verteilen" in m<sup>2</sup>/s

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$ : Proportionalitätsfaktor für Wärmetransport über Grundfläche in W/m<sup>2</sup>K

$$\dot{q} = \alpha \Delta T$$

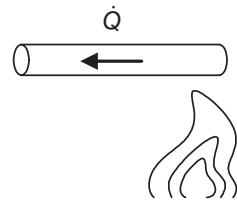
Wärmedurchgangskoeffizient  $k$ : Proportionalitätsfaktor für Wärmetransport zwischen zwei Fluiden durch eine Wand in W/m<sup>2</sup>K (auch  $U$ -Wert genannt)

$$\dot{q} = k \Delta T$$

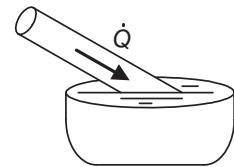
## 8.4 Wärmeleitung

### 8.4.1 Beispiele

Eisenstab in Feuer

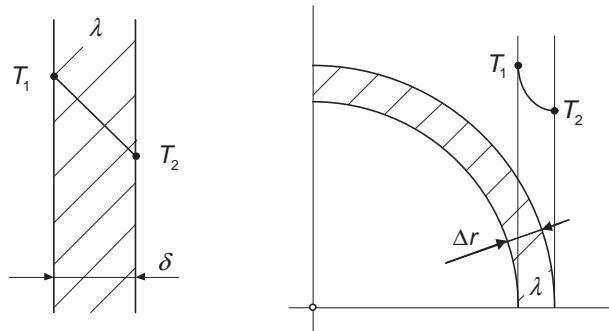


Eisenstab in flüssiger Luft



Bei der eindimensionalen, stationären Wärmeleitung ist das Temperaturgefälle stationär und tritt nur in einer Richtung auf:

- Ebene Platte  $T = T(x)$
- Rohr  $T = T(r)$
- Kugel  $T = T(r)$



### 8.4.2 Wärmeleitung durch eine ebene Wand

$H$ : Höhe,  $B$ : Breite,  $\delta$ : Wanddicke

Wärmestrom durch die Wand:  $\dot{Q} = 100 \text{ J/s} = 100 \text{ W}$

Wärmeübertragerfläche:  $A = 2 \text{ m}^2$

Wärmestromdichte:  $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = 50 \text{ J/m}^2 \text{s}$

Stationär:  $T_1(t) = \text{konst. bei } x = 0$

$T_2(t) = \text{konst. bei } x = \delta$

$\dot{Q}_0 = \dot{Q}_1 = \dot{Q}$

*Wärmeleitungsgesetz* (empirisch ermittelt)

Einflussgrößen von  $\dot{Q}$ :  $T_1, T_2, A, \lambda, \delta$

Temperaturgefälle:  $\frac{dT}{dx}; T = T(x)$

Wärmeleitfähigkeit oder Wärmeleitzahl:  $\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$

$\lambda$  wurde für alle wichtigen Stoffe experimentell ermittelt. Nachfolgend sind für ausgewählte Materialen die Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda$  aufgeführt:

Kupfer Cu	$\lambda = 360$	W/m K
Aluminium Al	$\lambda = 220$	W/m K
Stahl	$\lambda = 50$	W/m K
nicht-rostender Stahl	$\lambda = 10-20$	W/m K
Wärmedämmung	$\lambda = 0.03$	W/m K

Faustregel:  $\lambda_{Metalle} > \lambda_{Flsg.} > \lambda_{Gase}$

$\lambda_{Vakuum} = 0$

$\lambda_{Legierungen} < \lambda_{Reinmetalle}$

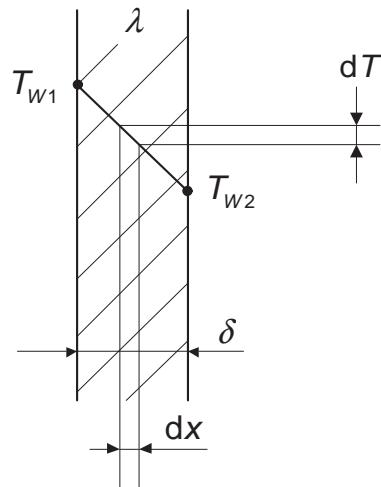
**Beispiel 8.1: Stahlplatte.** Eine Stahlplatte hat die Dicke  $\delta = 10 \text{ mm}$ , eine Querschnittsfläche  $A = 10 \text{ m}^2$  und die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  beträgt 100 K. Die Wärmeleitfähigkeit von Stahl beträgt nach obiger Tabelle  $\lambda = 50 \text{ W/mK}$ . Berechnen Sie die Wärmestromdichte und den Wärmestrom.

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{Q} = 5 \text{ MW}$$

$$\dot{q} = 500 \text{ kW/m}^2$$

**Temperaturverlauf in einer ebenen Wand:**



**Analogie zum Ohm'schen Gesetz:**

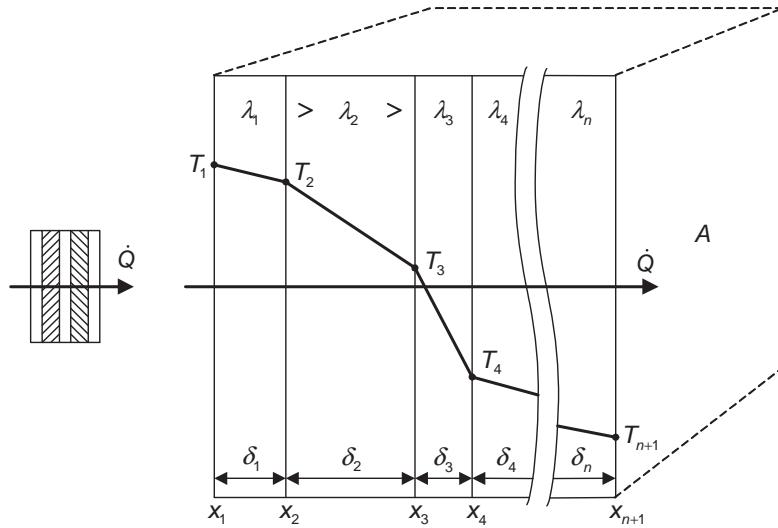
$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} A \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{\delta}{\lambda A} \dot{Q} = r_\lambda \dot{Q}$$

$$I = \frac{1}{R} U \quad \Leftrightarrow \quad U = R I$$

$$R \hat{=} \frac{\delta}{\lambda A} \quad \text{in } [\text{K/W}]$$

### 8.4.3 Wärmeleitung durch eine mehrschichtige Wand

Kennen wir die Außen-Wandtemperaturen beim Wärmestrom durch eine ebene Wand, die aus mehreren Schichten unterschiedlicher Wärmeleitfähigkeit aufgebaut ist, so lässt sich auch der Temperaturverlauf in der Wand ermitteln.



Das Temperaturgefälle ist zur Wärmeleitfähigkeit umgekehrt proportional:

$$\frac{dT}{dx} \sim \frac{1}{\lambda}$$

Der Wärmestrom  $\dot{Q}$  in der Wand ist überall konstant.

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{ges} &= \frac{1}{R_{\lambda ges}} \Delta T \quad ; \quad \dot{q} = \frac{1}{r_{\lambda}} \Delta T \\ R_{\lambda ges} &= R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + \dots + R_{\lambda n} = \sum_1^n R_{\lambda i}\end{aligned}$$

$R_{\lambda i}$  und  $R_{\lambda ges}$  [K/W] werden als Wärmeleitwiderstände bezeichnet.

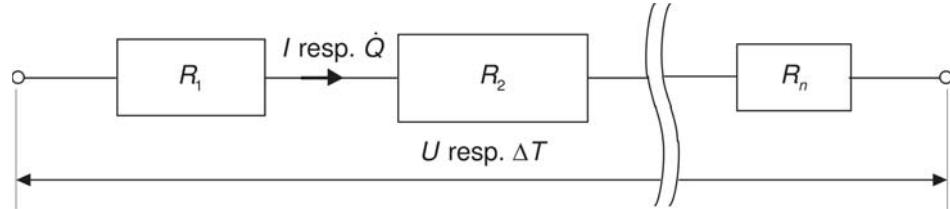
Bei einer Wand aus drei Schichten gilt somit:

$$R_{\lambda ges} = \frac{1}{A} \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right) = \frac{1}{A} \sum_1^3 \frac{\delta_i}{\lambda_i}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda_{ges.}} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots$$

$$\frac{1}{\delta_{ges.}} = \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} + \dots$$

$$k = \frac{1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots}$$

**Analogie zum Ohm'schen Gesetz:**


Im Betrieb von Wärmeübertragern kann es zu Verschmutzungen oder zu Korrosion der Wärmeübertragerflächen kommen. Durch diesen, „Fouling“ genannten Prozess, wird der Wärmedurchgang verschlechtert. Ein Beispiel für die Vergrößerung des Wärmeleitwiderstandes ist nachfolgend gegeben.

**Beispiel 8.2: Wärmeleitung durch Stahlplatte mit Russ- und Kesselsteinschicht.** Untersuchen Sie die vier Betriebsfälle. Die totale Temperaturdifferenz  $\Delta T$  beträgt 100 K.

- a. Stahlplatte beidseitig sauber;  $\delta_S = 50 \text{ mm}$ ,  $\lambda_S = 50 \text{ W/mK}$
- b. Stahlplatte mit Kesselsteinschicht auf der einen Seite;  $\delta_K = 2 \text{ mm}$ ,  $\lambda_K = 2 \text{ W/mK}$
- c. Stahlplatte mit Russschicht auf der einen Seite;  $\delta_R = 0.1 \text{ mm}$ ,  $\lambda_R = 0.1 \text{ W/mK}$
- d. Stahlplatte mit Russschicht und Kesselsteinschicht.

Bestimmen Sie für alle vier Fälle den spezifischen Wärmeleitwiderstand, die Wärmestromdichte und den Temperaturverlauf.

Lösung:

- a. Stahlplatte beidseitig sauber ohne Ablagerungen

$$r_\lambda = r_{\lambda S} = \frac{\delta_S}{\lambda_S} = 0.001 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{r_{\lambda S}} \Delta T = \frac{\lambda_S}{\delta_S} \Delta T = 100'000 \text{ W/m}^2$$

$$\Delta T_S = 100 \text{ K}$$

- b. Stahlplatte mit Kesselsteinschicht

$$r_{\lambda K} = \frac{\delta_K}{\lambda_K} = 0.001 \text{ m}^2 \text{ K/W} \quad r_{\lambda ges} = r_{\lambda S} + r_{\lambda K} = 0.002 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{r_{\lambda ges}} \Delta T = 50'000 \text{ W/m}^2$$

$$\Delta T_S = \dot{q} r_{\lambda S} = 50 \text{ K}$$

$$\Delta T_K = \dot{q} r_{\lambda K} = 50 \text{ K}$$

- c. Stahlplatte mit Russschicht

$$r_{\lambda R} = \frac{\delta_R}{\lambda_R} = 0.001 \text{ m}^2 \text{ K/W} \quad r_{\lambda ges} = r_{\lambda S} + r_{\lambda R} = 0.002 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{r_{\lambda ges}} \Delta T = 50'000 \text{ W/m}^2$$

$$\Delta T_S = \dot{q} r_{\lambda S} = 50 \text{ K}$$

$$\Delta T_R = \dot{q} r_{\lambda R} = 50 \text{ K}$$

- d. Stahlplatte mit Russschicht und Kesselschicht

$$r_{\lambda S} = 0.001 \text{ m}^2 \text{ K/W} \quad r_{\lambda K} = 0.001 \text{ m}^2 \text{ K/W} \quad r_{\lambda R} = 0.001 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

$$r_{\lambda ges} = r_{\lambda S} + r_{\lambda K} + r_{\lambda R} = 0.003 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{r_{\lambda ges}} \Delta T = 33'333 \text{ W/m}^2$$

$$\Delta T_S = \dot{q} r_{\lambda S} = 33.3 \text{ K}$$

$$\Delta T_K = \dot{q} r_{\lambda K} = 33.3 \text{ K}$$

$$\Delta T_R = \dot{q} r_{\lambda R} = 33.3 \text{ K}$$

**Beispiel 8.3: Elektroheizofen.**

Ein Elektroheizofen gibt über eine 5 mm dicke Stahlplatte die konstante Wärmestromdichte 500 kW/m<sup>2</sup> ab. Welche Kesselsteinschicht darf sich darüber maximal ablagern, dass dabei die gesamte Temperaturdifferenz 200 K nicht überstiegen wird?

$$\lambda_{Stahl} = 50 \text{ W/mK}, \lambda_{Kesselstein} = 2 \text{ W/mK}$$

Zeichnen Sie den Temperaturverlauf über die beiden Schichten auf!

Die Wärmestromdichte berechnet sich folgendermassen:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{\delta_{St}}{\lambda_{St}} + \frac{\delta_{Ks}}{\lambda_{Ks}}}$$

Aufgelöst nach  $\delta_{Ks}$  ergibt sich:

$$\delta_{Ks} = \lambda_{Ks} \left( \frac{\Delta T}{\dot{q}} - \frac{\delta_{St}}{\lambda_{St}} \right) = 0.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.6 \text{ mm}$$

$$\dot{q} = \lambda_{St} \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\delta_1}$$

Daraus ergibt sich folgende Temperatur  $\vartheta_1$ :

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 - \dot{q} \frac{\delta_{St}}{\lambda_{St}} = \vartheta_0 - 50 \text{ K}$$

**Beispiel 8.4: Halle aus Leichtbeton.** Eine Halle aus Leichtbeton mit  $1000 \text{ m}^2$  Oberfläche hat eine Wandinnentemperatur von  $9^\circ\text{C}$  bei  $-7^\circ\text{C}$  Wandaussentemperatur. Sie ist 120 mm dick,  $\lambda = 0.93 \text{ W/m K}$ .

- Wie gross ist der Wärmeverlust?
- In welchem Abstand von innen ist  $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ ?
- Wie dicke Steinwolle ist notwendig, um den Wärmeverlust auf  $1/10$  zu reduzieren?  
 $\lambda_{\text{Steinwolle}} = 0.03 \text{ W/m K}$ .

a.

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} A (\vartheta_i - \vartheta_a) = 124 \text{ kW}$$

b.

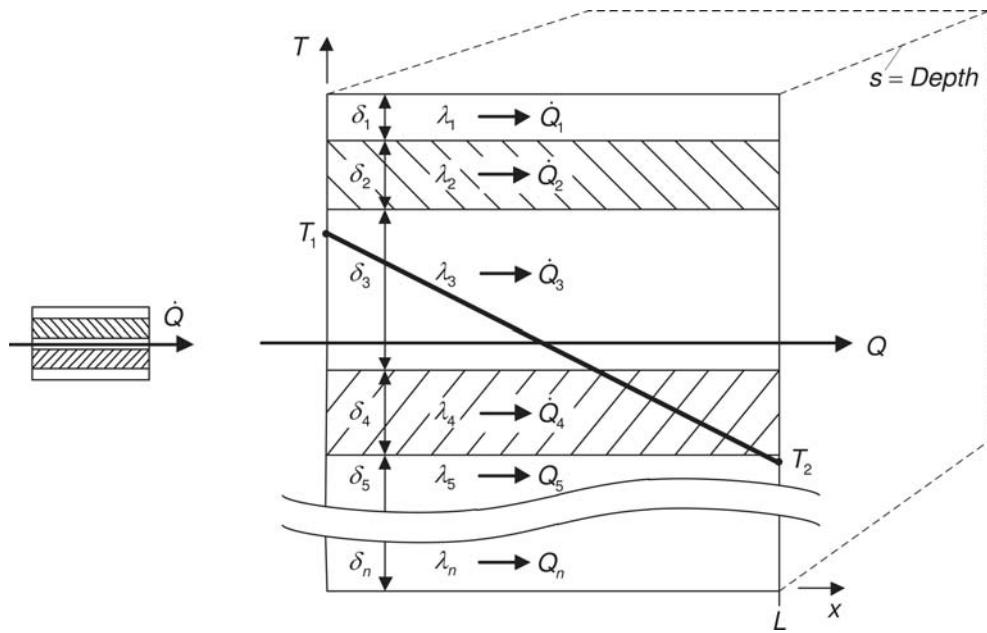
$$\frac{\vartheta_i - \vartheta_\lambda}{\vartheta_i - \vartheta_a} = \frac{x}{\delta} \Rightarrow x = \frac{\vartheta_i - \vartheta_\lambda}{\vartheta_i - \vartheta_a} \delta = 67.5 \text{ mm}$$

c.

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{c)} &= \frac{\dot{Q}}{10} = 12.4 \text{ kW} = \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\frac{\delta_B}{\lambda_B} + \frac{\delta_{iso}}{\lambda_{iso}}} A \\ &\Rightarrow \delta_{iso} = \lambda_{iso} \left( \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\dot{Q}_{c)}} A - \frac{\delta_B}{\lambda_B} \right) = 35 \text{ mm} \end{aligned}$$

→ Effekt der Isolation!

#### 8.4.4 Parallelschaltung ebener Wände



Annahme: Die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  ist über jede Schicht gleich.  $\Rightarrow$  ebenfalls der Gradient.

Für den Wärmestrom  $\dot{Q}_{ges}$  gilt wieder:

$$\dot{Q}_{ges} = \frac{1}{R_{\lambda ges}} \Delta T$$

Der gesamte Wärmestrom  $\dot{Q}_{ges}$  ist die Summe der Einzelströme  $\dot{Q}_i$ :

$$\dot{Q}_{ges} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dots + \dot{Q}_n = \sum_1^n \dot{Q}_i$$

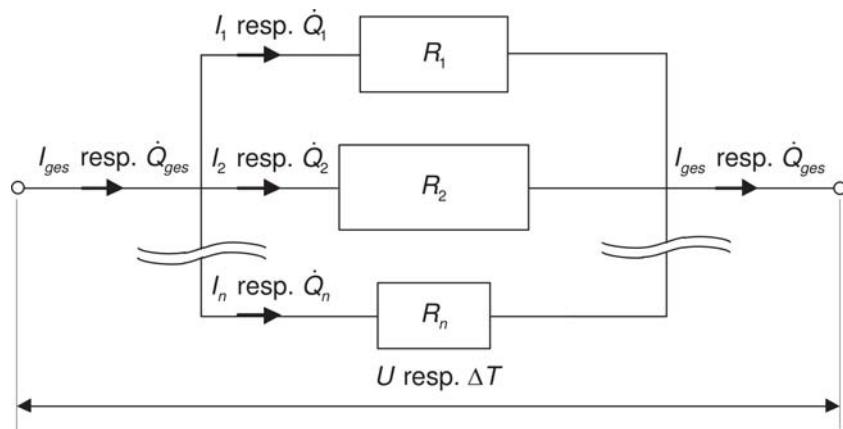
Berechnung des Wärmeleitwiderstandes bei der Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R_{\lambda ges}} = \frac{1}{R_{\lambda 1}} + \frac{1}{R_{\lambda 2}} + \dots + \frac{1}{R_{\lambda n}} = \sum_1^n \frac{1}{R_{\lambda i}}$$

Bei einer Wand aus drei Schichten gilt somit:

$$\frac{1}{R_{\lambda_{ges}}} = \frac{s}{L} (\delta_1 \lambda_1 + \delta_2 \lambda_2 + \delta_3 \lambda_3) = \frac{s}{L} \sum_1^3 \delta_i \lambda_i$$

**Analogie zum Ohm'schen Gesetz:**

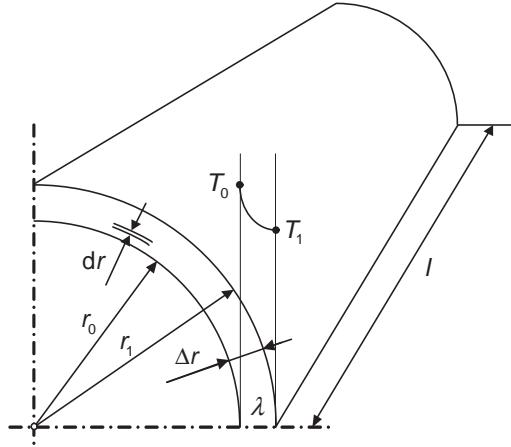


### 8.4.5 Wärmeleitung durch einen Hohlzylinder

Vorgaben:  $r_0, r_1, l, \vartheta_0, \vartheta_1, \lambda$

Bedingungen: Isotherme konzentrische Flächen

Mit zunehmendem  $r$  wird die Fläche, durch die Wärme fliesst immer grösser.  
 $\Rightarrow \dot{q}$  nimmt ab ;  $\frac{dT}{dr}$  nimmt ab



#### Berechnung des Wärmestroms

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -\lambda \underbrace{2\pi r l}_{=A} \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{\dot{Q}}{-2\lambda\pi l} \frac{dr}{r} = dT$$

$$\frac{\dot{Q}}{-2\lambda\pi l} \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r} dr = \int_{T_0}^{T_1} dT$$

$$\frac{\dot{Q}}{-2\lambda\pi l} \ln \frac{r_1}{r_0} = T_1 - T_0$$

$$\dot{Q} = 2\lambda\pi l \frac{T_0 - T_1}{\ln \frac{r_1}{r_0}}$$

$$R_\lambda = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{2\lambda\pi l}$$

Wärmestrom:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_0$$

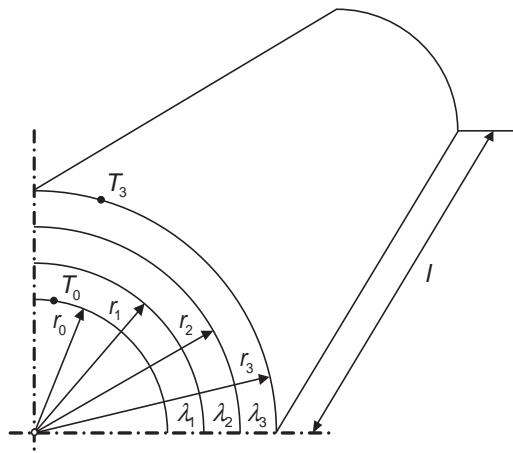
Verhältnis der Wärmestromdichten:

$$\frac{\dot{q}_0}{\dot{q}_1} = \frac{\frac{\dot{Q}}{A_0}}{\frac{\dot{Q}}{A_1}} = \frac{A_1}{A_0}$$

### 8.4.6 Mehrschichtiger Hohlzylinder

Vorgaben:  $r_0, r_1, r_2, r_3, l, \vartheta_0, \vartheta_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Bedingungen: Isotherme konzentrische Flächen  
Serien schaltung von Hohlzylindern  
 $\dot{Q}_r = \dot{Q}_3$



$$\dot{Q} = 2\pi l \frac{(T_0 - T_3)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{r_3}{r_2}} = 2\pi l \frac{(T_0 - T_3)}{\sum_1^3 \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}$$

**Beispiel 8.5: Dampfleitung aus Stahl mit Glaswolle wärmedämmt und Al-Blech-Einbindung.** Es sind folgende Daten bekannt:  $d_0 = 148$  mm,  $\delta_1 = 6$  mm,  $\delta_2 = 70$  mm,  $\delta_3 = 1$  mm,  $l = 10$  m,  $\vartheta_0 = 180^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_3 = 30^\circ\text{C}$ ,  $\lambda_1 = 50 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_2 = 0.046 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_3 = 200 \text{ W/mK}$ .

Berechnen Sie den Wärmestrom einmal mit und einmal ohne Wärmedämmung und Aluminium-Blech-Einbindung.

ohne Dämmung/Einbindung:  $\dot{Q} = 6.04 \text{ MW}$

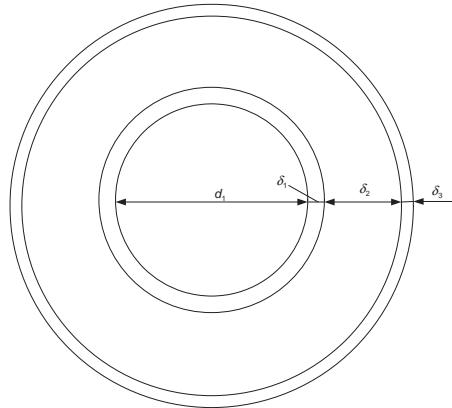
mit Dämmung/Einbindung:  $\dot{Q} = 690 \text{ W}$

→ Der Wärmestrom wurde durch die Dämmung/Einbindung auf 0.1% des ursprünglichen Wertes herabgesenkt! Man beachte, dass hier ausschließlich die Wärmeleitung betrachtet wurde und die in vielen Fällen dominierenden Wärmeübergangswiderstände vernachlässigt wurden.

**Beispiel 8.6: Temperaturverlauf in einem isolierten Rohr.** Eine Stahlleitung, in der Dampf strömt, hat eine Rohrinnentemperatur von 220°C. Die äussere Oberflächentemperatur darf nicht höher sein als 45°C. Die folgenden Daten sind gegeben:

$d_i = 300 \text{ mm}$ ,  $\delta_1 = 3 \text{ mm}$ ,  $\delta_2 = 50 \text{ mm}$ ,  $\delta_3 = 1 \text{ mm}$ ,  $\lambda_{Stahl} = 50 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_{Isol.} = 0.5 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_{Al.-Blech} = 220 \text{ W/mK}$ .

Skizze:



- Wieviel beträgt der Wärmeverlust pro Meter Rohrlänge?
- Der Temperaturverlauf ist zu berechnen und zu zeichnen.
- Wie gross müsste die Isolationsdicke sein, damit der Wärmestromverlust halbiert wird?

Hinweis: Aufgabe c. lässt sich mit einer geringen Vernachlässigung relativ einfach lösen.

a.

$$\frac{\dot{Q}}{l} = \frac{2\pi \Delta T}{\frac{1}{\lambda_{Stahl}} \ln \frac{r_1}{r_i} + \frac{1}{\lambda_{Bol.}} \ln \frac{r_2}{r_i} + \frac{1}{\lambda_{Al.Bloc.}} \ln \frac{r_3}{r_2}} = 1942 \text{ W/m}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_i - \Delta T = \vartheta_i - \frac{\frac{\dot{Q}}{l} \ln \frac{r_1}{r_i}}{2\pi} = 219.9^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + \Delta T = \vartheta_3 + \frac{\frac{\dot{Q}}{l} \ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi} = 45.007^\circ\text{C}$$

b.

$$\frac{\dot{Q}}{l} = \frac{\dot{Q}_{a)}{l_{a)}} = 1942 \text{ W/m}$$

c. Approximation:  $\vartheta_1 = \vartheta_i$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta_3$ , vgl. a.

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\dot{Q}_{a)}}{2} \\ \delta &= r \left( e^{\frac{(\vartheta_i - \vartheta_3) 2\pi \lambda_{isol.}}{\dot{Q}/l}} - 1 \right) \Rightarrow \delta_2 = 116.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

**Beispiel 8.7: Isolierung einer Dampfleitung.** In einer Dampfleitung aus Stahl mit 100 mm Innendurchmesser und 5 mm Wandstärke strömt Wasserdampf mit der Temperatur von 400°C. Im Rohr beträgt die Wärmeübergangszahl 1000 W/m<sup>2</sup>K. Das Rohr muss mit einer Isolation, die aussen mit einem Aluminiumblech von 0.5 mm Wandstärke geschützt wird, versehen werden. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohres ist 47 W/mK, des Aluminums 220 W/mK und des Isolators 0.08 W/mK. Die Sicherheitsvorschriften verlangen, dass bei einer Raumtemperatur von 32°C und einer äusseren Wärmeübergangszahl von 15 W/m<sup>2</sup>K die Außenwand der Aluminiumhülle nicht wärmer als 45°C werden darf.

Prüfen Sie, welche Vereinfachungen gemacht werden können.

Durchmesser der Isolation aussen: 294 mm  $\Rightarrow$  300 mm soll gewählt werden. Vereinfachungen: Wärmedurchgang ohne Metall berechnen, d.h. nur Isolationsschicht und Wärmeübergänge innen und aussen. Das Resultat bleibt identisch. Auch wenn man nur die Isolation betrachtet (das heißtt: ohne Wärmeübergang) bleibt die Dicke der Isolation nahezu identisch (Aussendurchmesser 300 mm statt 294 mm).

$$T_a = 45^\circ\text{C}$$

$$T_r = 32^\circ\text{C}$$

$$T_i = 400^\circ\text{C}$$

$$\dot{Q} = \alpha_i A_i (T_i - T_{St})$$

$$\dot{Q} = \alpha_a A_a (T_a - T_R)$$

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L(T_{St} - T_{iso})}{\frac{1}{\lambda_{iso}} \ln \frac{r_{iso}}{r_{St}}}$$

Nach Vereinfachung:

$$\frac{T_i - T_a}{T_a - T_R} = \frac{\alpha_a r_a}{\lambda_{iso}} \ln \frac{r_a}{r_{St}}$$

Implizite Gleichung für  $r_a$

$$r_a = 0.1477 \text{ m}$$

### 8.4.7 Dünnwandiges Rohr approximiert als ebene Wand

Bestimme den Fehler des Wärmestroms, wenn ein Rohr mit  $r_0 = 25$  mm und  $\delta = 2$  mm als ebene Wand berechnet wird.

Rechnung als Rohr:

$$\dot{Q}_{Rohr} = 2 \lambda \pi l \frac{T_0 - T_1}{\ln \frac{r_0 + \delta}{r_0}}$$

Rechnung als Wand:

$$\dot{Q}_{Wand} = \lambda A \frac{T_0 - T_1}{\delta}$$

Fehler:

$$\frac{\dot{Q}_{Wand} - \dot{Q}_{Rohr}}{\dot{Q}_{Rohr}} = 0.05\%$$

Fazit: Rohre, bei denen die Wandstärke deutlich geringer ist als der Durchmesser ( $\delta \ll d$ ), können als ebene Wände berechnet werden.

$$\frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}_W} = \frac{\frac{2\pi L \Delta T}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_0 + \delta}{r_0}}}{2\pi L (r_0 + \frac{1}{2}\delta) \frac{\lambda}{\delta} \Delta T} = \frac{\delta}{r_0} \cdot \frac{1}{\ln \frac{1 + \frac{\delta}{r_0}}{1} (1 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{r_0})}$$

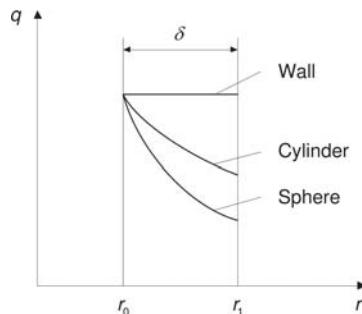
$\frac{\delta}{r_0}$	$\frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}_W}$
1	0.961
0.1	0.999
$\frac{2}{25}$	0.9995

### 8.4.8 Hohlkugel

Mehrschichtig:

$$\dot{Q} = \frac{4\pi(T_0 - T_2)}{\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

- Oberfläche Wand:  $A$
- Oberfläche Zylinder:  $A = 2\pi r l$
- Oberfläche Kugel:  $A = 4\pi r^2$



Einschichtig:

$$\dot{Q} = 4\pi(T_0 - T_1) \frac{\lambda}{\delta} {r_{12}}^2$$

$$r_{12} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$$

$$\delta = r_1 - r_0$$

## 8.5 Konvektive Wärmeübertragung

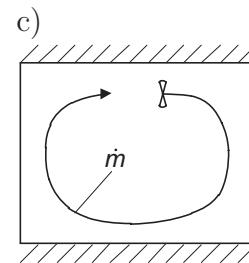
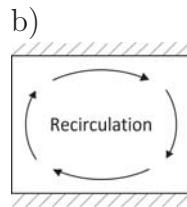
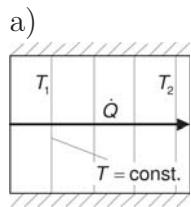
Unter einem Wärmeübergang versteht man die Übertragung von Wärme zwischen einem Fluid und einer Phasengrenzfläche, beispielsweise einer Wand. Ist das Fluid in Bewegung, spricht man von Konvektion. Bei der Wärmeübertragung durch Konvektion existiert senkrecht zur Phasengrenzfläche ein Temperaturgefälle, wodurch das Fluid erhitzt oder abgekühlt wird. Hierbei kann es zu Aggregatzustandsänderungen durch Verdampfung oder Kondensation kommen.

Man unterscheidet auf Grund der Ursachen der Fluidströmung zwischen:

- *erzwungener Konvektion*, falls die Strömung z. B. durch eine Pumpe oder einen Ventilator künstlich erzwungen wurde.
- *freier Konvektion*, falls die Strömung auf Grund von Dichteunterschieden entstanden ist.

### 8.5.1 Beispiele zur Konvektion

**Luft im Raum:**



$$\Delta T = T_1 - T_2 = \text{klein}$$

$\Delta T$  genügend gross  
Warmluft steigt  
Kaltluft sinkt

$\dot{m}$  ist bestimmt durch  
einen Ventilator

$$\dot{m} = \dot{m}(\Delta T \rightarrow \Delta \rho)$$

“Auftrieb”

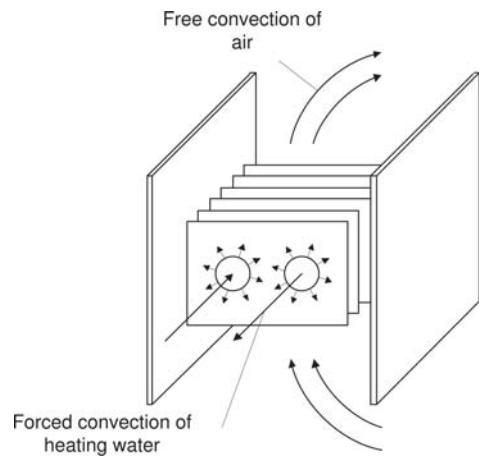
$$\dot{Q} = \dot{Q}(\dot{m}(\Delta T), v, \lambda, \dots)$$

**Wärmeleitung**

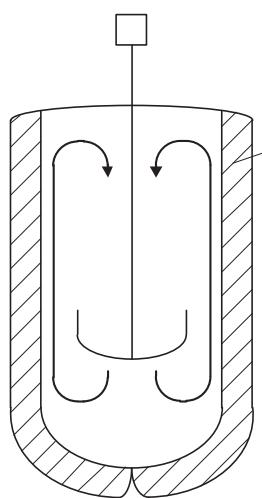
**freie Konvektion**

**erzwungene  
Konvektion**

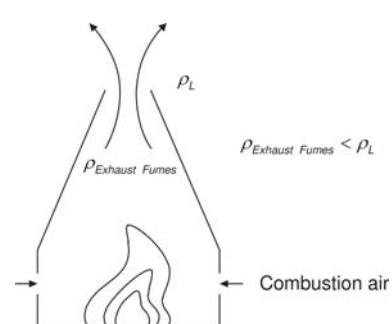
### Raumheizung (Konvektor):



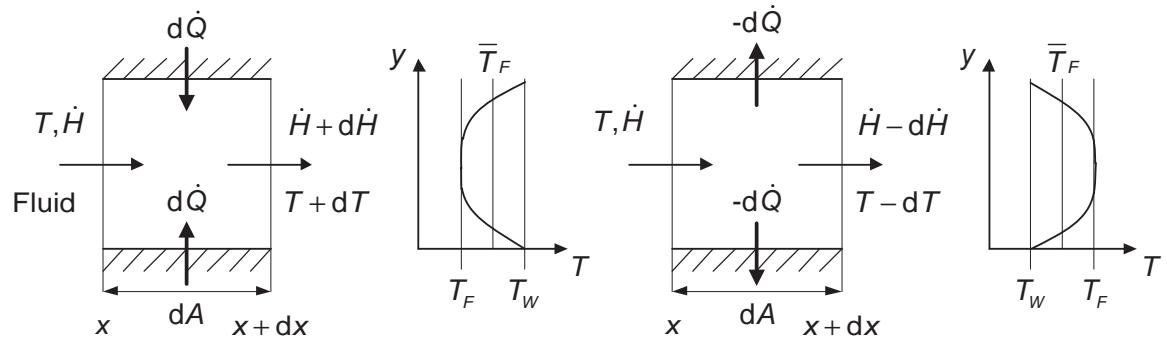
### Rühren:



### Kaminzug:



### 8.5.2 Wärmeübergang und der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha$



$T_w$  Wandtemperatur

$T(y)$  Fluidtemperatur im Abstand  $y$

$\bar{T}_F$  Über den Strömungsquerschnitt gemittelte Temperatur

**Ansatz nach Newton:**

$$d\dot{Q} = \alpha (T_w - T_F) dA$$

$$\dot{q} = \frac{d\dot{Q}}{dA} = \alpha (T_w - T_F)$$

**Zahlenbeispiel:**

Vorgaben:  $\alpha = 1000 \text{ W/m}^2 \text{K}$   
 $T_F - T_w = \Delta T = 5 \text{ K}$

Bestimme: Wärmestromdichte  $\dot{q}$

$$\dot{q} = \alpha \Delta T = 5'000 \text{ W/m}^2$$

### Einflussgrößen auf den Wärmeübertragungskoeffizienten:

- Erzwungene Konvektion

$$\alpha = \alpha(\underbrace{\nu, c, L_{char}}_{Re}, \rho, c_p, \lambda, \dots)$$

- Freie Konvektion

$$\alpha = \alpha(\Delta T, \rho, c_p, \lambda, L, \nu, \dots)$$

Viele Größen haben einen Einfluss auf den Wärmeübergang. Es ist nicht möglich jedes Modell experimentell oder analytisch zu beschreiben. Deshalb werden Erkenntnisse eines Objektes auf physikalisch ähnliche Objekte übertragen.

*E. W. Nusselt (1882-1957)* stellte Differentialgleichungen so um, dass dimensionslose Kenngrößen auftreten, die mehrere Parameter vereinen und das Problem übersichtlicher machen. Diese Arbeiten waren bahnbrechend. Die Kenngrößen sind für ähnliche Probleme gleich.

Die Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten über die Nusselt-Beziehung wird nachfolgend behandelt.

### 8.5.3 Die Nusselt-Zahl $Nu$

Die Nu-Zahl stellt eine Zielkennzahl dar, eine dimensionslose Form einer gesuchten Grösse. In den folgenden Gleichungen steht sie für die Wärmestromdichte, bzw. für den Wärmeübergangskoeffizienten:

$$Nu = \dot{q} \frac{L_{char}}{\lambda \Delta T_{char}} = \frac{\alpha L_{char}}{\lambda}$$

$L_{char}$  charakteristische Länge  
 $\Delta T_{char}$  charakteristische Temperaturdifferenz

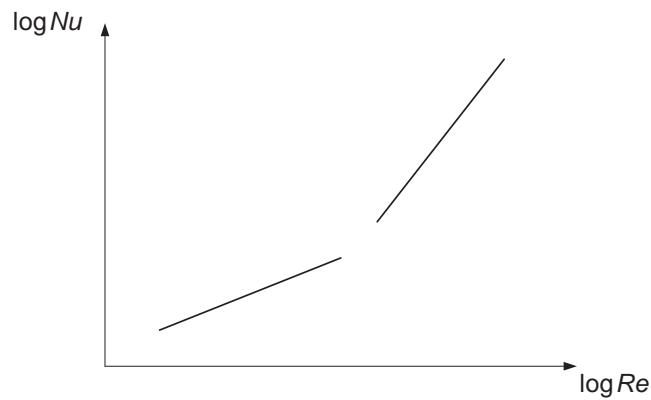
Die Nusselt-Zahl wird vornehmlich bei der Beschreibung des konvektiven Wärmeübergangs verwendet. Je grösser die Nusselt-Zahl, desto besser der Wärmeübergang! In der Regel können verschiedene Nusselt-Zahlen von verschiedenen Geometrien nicht miteinander verglichen werden, z. B. Grenzschichtströmungen und Rohrströmungen, unter anderem da die charakteristische Länge bzw. die charakteristische Temperaturdifferenz für jeweilige Geometrien auf viele Arten definiert werden können. Aus dem Grunde ist es wichtig, die Bedeutung von  $L_{char}$  und  $\Delta T_{char}$  für den jeweiligen Zusammenhang genau zu kennen und konsequent beizubehalten.

Aus der Dimensionsanalyse bei konvektiver Wärmeübertragung folgt

$$Nu = Nu(Re, Pr) \quad \text{für erzwungene Konvektion und}$$

$$Nu = Nu(Gr, Pr) \quad \text{für natürliche Konvektion}$$

Die  $Nu$ -Zahl ist qualitativ gemäss dem folgenden Diagramm mit der  $Re$ -Zahl verknüpft.



Bei erzwungener Konvektion wird häufig der folgende Potenzansatz gewählt:

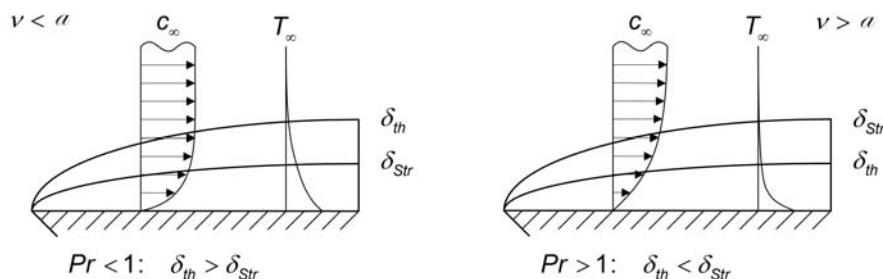
$$Nu = c Re^m Pr^n$$

### 8.5.4 Die Prandtl-Zahl $Pr$

$$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$$

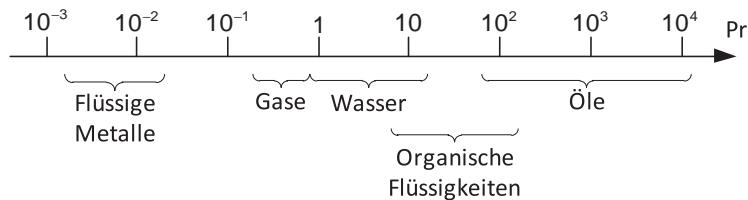
$\eta$	dynamische Viskosität	$\nu$	kinematische Viskosität
$c_p$	spezifische Wärmekapazität	$a$	Temperaturleitfähigkeit
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit		

Bei der Formel  $\nu/a$  werden zwei Transportkoeffizienten ins Verhältnis gesetzt. Die kinematische Viskosität  $\nu$  bestimmt den Impulstransport quer zur Hauptströmungsrichtung und ist ein Mass für die Dicke der Strömungsgrenzschicht. Die Temperaturleitfähigkeit  $a$  kann als Mass für die Dicke der Temperaturgrenzschicht interpretiert werden. Für  $Pr$ -Zahlen im Bereich von 1 sind beide Grenzschichten in etwa gleich gross. Die nachfolgende Abbildung stellt diesen Zusammenhang grafisch dar.



Temperatur	Quecksilber	Luft	Wasser	Motoröl	Wasserdampf
0°C	0.0288	0.72	13.6	47'100	-
20°C	0.0249	0.71	7.02	10'400	-
100°C	0.0162	0.69	1.74	276	0.973

Die folgende Skala zeigt das Prandtl-Zahl-Spektrum von Fluiden:



Gase; Dämpfe:

$$Pr \approx \frac{4\kappa}{9\kappa - 5}$$

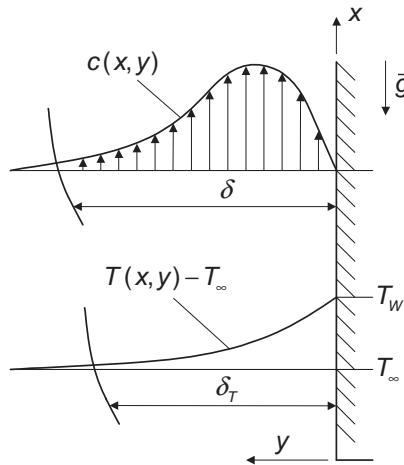
### 8.5.5 Die Grashof-Zahl $Gr$

$$Gr = g \beta \Delta T \frac{L^3}{\nu^2}$$

$$\beta \Delta T = \frac{\rho_\infty - \rho_0}{\rho_\infty} = \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

$g$	Erdbeschleunigung
$\beta$	isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient
$L$	charakteristische Länge
$\nu$	kinematische Viskosität

Die Grashof-Zahl ist, analog zur  $Re$ -Zahl bei erzwungener Konvektion, bei Strömungen relevant, die auf Grund von thermisch bedingten lokalen Dichteunterschieden als Auftriebströmungen entstehen. Da diese Dichtedifferenz eine Folge von Temperaturunterschieden ist, kann diese gleichwertig auch durch eine Temperaturdifferenz, siehe obige Formel, ausgedrückt werden. Wiederum analog zur  $Re$ -Zahl existieren für spezifische Geometrien und thermische Randbedingungen kritische Grashof-Zahlen, die den Umschlag von laminarer zu turbulenter (Grenzschicht-) Strömung markieren.



Natürliche Konvektionsgrenzschicht an der senkrechten, geheizten Platte.

Die Péclet-Zahl beträgt  $Pe = Re Pr$ , die Rayleigh-Zahl  $Ra = Gr Pr$

### 8.5.6 Die Reynolds-Zahl $Re$

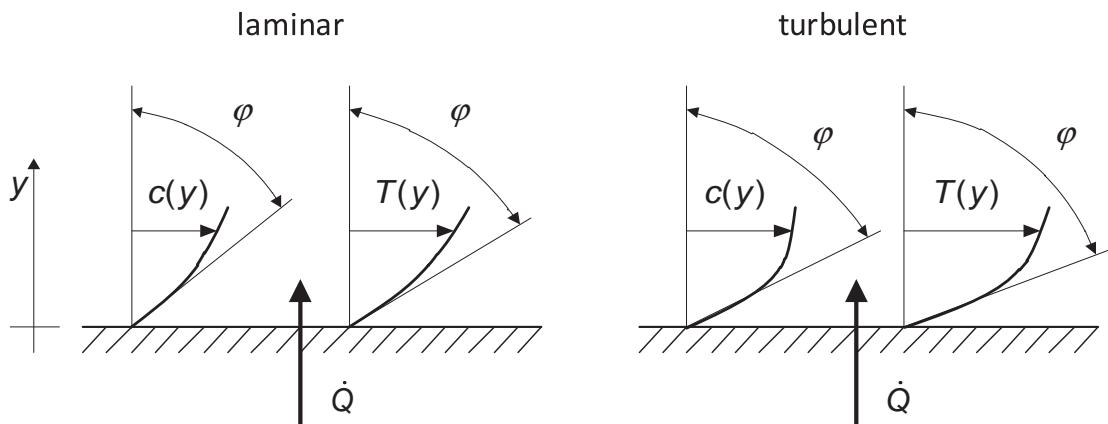
$$Re = \rho c \frac{L_{char}}{\eta} = c \frac{L_{char}}{\nu}$$

$\rho$	charakteristische Dichte des Fluides
$c$	charakteristische Strömungsgeschwindigkeit des Fluides gegenüber dem Körper
$L_{char}$	charakteristische Länge des Gegenstandes
$\eta$	charakteristische dynamische Viskosität des Fluides
$\nu$	charakteristische kinematische Viskosität des Fluides

Die  $Re$ -Zahl stellt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften dar. Daraus ergibt sich, dass das Turbulenzverhalten von Fluiden geometrisch ähnlicher Körpern bei gleicher Reynoldszahl identisch ist. Diese Eigenschaft erlaubt zum Beispiel realitätsnahe Modellversuche im Windkanal.

Die Reynoldszahl kann direkt Aussagen über das Strömungsverhalten ermöglichen. Im Falle einer Strömung durch ein Rohr beispielsweise, wird aus einer laminaren Strömung im Bereich von etwa  $Re = 2300$  eine turbulente Strömung. Das Strömungsverhalten ist für die Wärmeübertragung von grosser Bedeutung. Dies haben *O. Reynolds*, *L. Prandtl* und vor allem *W. Nusselt* beschrieben, die eine Analogie zwischen Fluidströmung und Wärmeübergang hergeleitet haben. Das Strömungsverhalten hat Einfluss auf den Verlauf des Geschwindigkeits- und Temperaturprofils quer zu Strömung.

Man muss aus diesem Grunde stets das Strömungsverhalten unterscheiden:



T 8.4 Berechnungsgleichungen für den Wärmeübergang<sup>1</sup>

Modell	Gl.Nr.	Gleichung	anggeben von	
<b>1. Erzwungene Strömung</b>				
Rohr innen	8.18	$Nu_m = \sqrt{49 + 4,17 Re Pr \frac{d}{h} K}$	Schüllinder	
Rohr innen	8.19	$Nu_m = 0,0214 (Re^{0,8} - 100) Pr^{0,4} \left[ 1 + \left( \frac{d}{h} \right)^{2,0} \right] K$	Hausen und Gnielinski	
Platte längs oder Zylinder quer angeströmt	8.20	$Nu_m = 0,012 (Re^{0,87} - 280) Pr^{0,4} \left[ 1 + \left( \frac{d}{h} \right)^{2,0} \right] K$	Hausen und Gnielinski	
Platte längs oder Zylinder quer angeströmt	8.21	$Nu_m = 0,664 \sqrt{Re^3 / Pr} K$	Pohlhausen und Krozhilne	
Platte längs oder Zylinder quer angeströmt	8.22	$Nu_m = 0,037 Re^{0,8} Pr$	Petukhov und Popov, Kirischer und Kast	
Rohrbindewärmeübertrager mit Umlentblechen, quer angeströmt	8.23	$Nu_m = C \cdot Re^{0,6} Pr^{0,33} \left( \frac{\eta_t}{\eta_w} \right)^{0,14}$	Donohue	

T 8.4 Berechnungsgleichungen für den Wärmeübergang<sup>1</sup>

337

8.3 Konvektiver Wärmeübergang

Bezugsgrößen	Geltungsbereich	Bezugsgrößen
$t_f = \frac{t_1 + t_2}{2}$ mit $t_1 =$ Eintrittstemperatur des Fluids $t_2 =$ Austrittstemperatur des Fluids $h =$ Rohrlänge $d =$ Rohrdurchmesser oder $d_h = \frac{4A}{U}$ $Pr_f =$ Pr-Zahl der Flüssigkeit bei $t_f$ $Pr_w =$ Pr-Zahl der Flüssigkeit bei $t_w$	laminar; $Re = \frac{wd}{v} \leq 2300$ $Re \cdot Pr \frac{d}{h} = 0,1 \div 10^4$ $K = \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,11}$ $K \approx 1$ bei Flüssigkeiten bei Gasen und Dämpfen	
wie Gl.8.18 $t_f =$ mittl. Kelvin-Temperatur des Gases $T_w =$ mittl. Kelvin-Temperatur der Wand	Übergangs- und Turbulenzgebiet; $Re = \frac{wd}{v} = 2300 \div 10^6$ ; $Pr = 0,5 \div 1,5$ $K = \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,11}$ bei Flüssigkeiten $K = \left( \frac{T_f}{T_w} \right)^n$ bei Gasen und Dämpfen	
$t_f = \frac{t_1 + t_2}{2}$ $t_1 =$ Fluidtemperatur vor Zustromung $t_2 =$ Fluidtemperatur nach Abstromung $w =$ Anströmsgeschwindigkeit $l =$ Länge der Platte $l = \pi r =$ Überströmungslänge beim Zylinder (charakteristische Länge)	Übergangs- und Turbulenzgebiet $Pr = 1,5 \div 500$ sonst wie Gl.8.19	
wie Gl.8.21 $t_f = \frac{t_1 + t_2}{2}$ $t_1 =$ Fluidtemperatur vor Zustromung $t_2 =$ Fluidtemperatur nach Abstromung $w =$ Anströmsgeschwindigkeit $l =$ Länge der Platte $l = \pi r =$ Überströmungslänge beim Zylinder (charakteristische Länge)	turbulent; $Re = \frac{wl}{v}$ Platte: $Re = 5 \cdot 10^4 \div 10^7$ ; $Pr = 0,6 \div 2000$ Zylinder: $Re = 10 \div 10^7$ ; $Pr = 0,6 \div 1000$	
$t_f = \frac{t_1 + t_2}{2}$ $w = \sqrt{w_q \cdot w_1}$ $w_q =$ Geschwindigkeit quer zu den Rohren im engsten Querschnitt $w_1 =$ Geschwindigkeit in Längsrichtung an der Umlenkung $\eta_t =$ Viskosität des Fluids bei $t_f$ $\eta_w =$ Viskosität des Fluids bei $t_w$ $d'$ = Rohrdurchmesser, außen (charakteristische Länge)	$Re = \frac{wd}{v} = 4 \div 50000$ $Pr = 0,5 \div 500$ $C = 0,22$ bei ungebohrtem Mantelrohr $C = 0,25$ bei geborhitem Mantelrohr Für Überschlagsrechnungen Genaue Gleichungen berücksichtigen die Rohr-anordnung, die Leckströmung an den Umlenkblechen und die Bypass-Strömung zwischen Röhren und Mantel, z.B. [10]	

<sup>1</sup> Nach Werten aus Grober, Elkj./Grigull [9]; Stephan/Mayinger [6] und VDI-Wärmeatlas [10]. Alle Glng. gelten für mittlere – nicht örtliche – Nußelt-Zahlen.

T 8.4 Berechnungsgleichungen für den Wärmeübergang (Fortsetzung)

8 Wärmeübertragung

8.3 Konvektiver Wärmeübergang

Modell	Gl Nr.	Gleichung	angegeben von	Geltungsbereich	Bezugsgrößen												
<b>2. Freie Strömung</b> Senkrechte Wand und Kugel	8.24a	$Nu_m = [0.825 + 0.387(Ra \cdot f_1)^{1/6}]^{2/3}$ mit $f_1 = \left[ 1 + \left( \frac{0.492}{Pr} \right)^{1/6} \right]^2$	Churchill und Chu	laminar und turbulent; Senkrechte Wand: $Ra = 0.1 \div 10^{12}$ $Ra = 10^3 \div 10^{12}$ , $Pr = 0.001 \div \infty$	Stoffwerte bei $t = \frac{t_0 + t_w}{2}$ $\gamma$ bei $t_f$ (ideales Gas: $\gamma = \frac{1}{T_f}$ ) $h = h$ = Wandhöhe/Zylinderhöhe $l = d$ (Durchmesser) bei Kugeln												
Senkrechter Zylinder	8.24b	$Nu_{2D,in} = Nu_{plate,in} \cdot \frac{h}{d}$	Fujii und Uehara	wie Gl 8.24a	$h = \text{Zylinderhöhe}$ $d = \text{Zylinderdurchmesser}$ Sonst wie Gl 8.24a												
Horizontale ebene Wärmeabgabe auf der Oberseite	8.25a	$Nu_m = 0.766(Ra \cdot f_2)^{1/5}$ mit $f_2 = \left[ 1 + \left( \frac{0.322}{Pr} \right)^{1/20} \right]^{1/11}$	Churchill	laminar; $Ra \cdot f_2 < 7 \cdot 10^4$ $Pr = 0 \div \infty$	$l = \frac{a \cdot b}{2(a+b)}$ bei Rechteckflächen ( $a, b$ = Seitenlängen) $l = \frac{d}{4}$ bei Kreisseiben												
	8.25b	$Nu_m = 0.15(Ra \cdot f_2)^{1/3}$ mit $f_2$ wie bei Gl 8.25a		turbulent; $Ra \cdot f_2 \geq 7 \cdot 10^4$ $Pr = 0 \div \infty$	Sonst wie Gl 8.24a wie Gl 8.25a												
Horizontale ebene Wand Wärmeabgabe auf der Unterkante	8.25c	$Nu_m = 0.6(Ra \cdot f_1)^{1/5}$ mit $f_1$ wie bei Gl 8.24a	Churchill	laminar; $Ra \cdot f_1 = 10^3 \div 10^{10}$ $Pr = 0.001 \div \infty$ Heizfläche in $\infty$ großer Gesamtfläche	wie Gl 8.25a												
Horizontaler Zylinder	8.26a	$Nu_m = [0.752 + 0.337(Ra \cdot f_3)^{1/6}]^{2/3}$ mit $f_3 = \left[ 1 + \left( \frac{0.559}{Pr} \right)^{0.16} \right]^{1/6}$	Churchill und Chu, Korr. nach Martin	laminar und turbulent; $Ra = 0 \div \infty$ $Pr = 0 \div \infty$	$d = \pi r$ = Überstromlänge (charakteristische Länge) Sonst wie Gl 8.24a												
Kugel	8.26b	$Nu_m = 0.56 \left[ \frac{Pr \cdot Ra}{(0.846 + Pr)} \right]^{1/4} + 2$	Raihby und Hollands	laminar und turbulent; $Ra = 0 \div \infty$ $Pr = 0 \div \infty$	$d = \text{Kugeldurchmesser (charakteristische Länge)}$ Sonst wie Gl 8.24a												
Geneigte Wand	8.27a	$Nu_m$ wie bei senkrechter Wand, jedoch mit $Ra_\varphi = Ra \cos \varphi$	Vlct, Fujii und Imura	laminar; für $\varphi < 60^\circ$ zur Senkrechten Übergang laminar-turbulent bei der kritischen $Ra$ -Zahl $Ra_c$ (Werte s. bei Gl 8.27b)	$I = \text{Wandlänge in Neigungsrichtung}$ (charakteristische Länge)												
	8.27b	$Nu_\varphi = 0.56(Ra_\varphi \cos \varphi)^{1/4} + 0.13(Ra^{1/3} - Ra_c^{1/2})$ Gl 8.27b beruht auf Messungen für Wasser		turbulent; $\varphi$ $Ra_\varphi$	Sonst wie Gl 8.24a <table border="1"><tr><td><math>\varphi</math></td><td><math>0^\circ</math></td><td><math>15^\circ</math></td><td><math>30^\circ</math></td><td><math>45^\circ</math></td><td><math>60^\circ</math></td></tr><tr><td><math>Ra_\varphi</math></td><td><math>8 \cdot 10^8</math></td><td><math>4 \cdot 10^8</math></td><td><math>10^8</math></td><td><math>10^7</math></td><td><math>8 \cdot 10^5</math></td></tr></table>	$\varphi$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$Ra_\varphi$	$8 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^8$	$10^8$	$10^7$	$8 \cdot 10^5$
$\varphi$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$												
$Ra_\varphi$	$8 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^8$	$10^8$	$10^7$	$8 \cdot 10^5$												

T 8.4 Berechnungsgleichungen für den Wärmeübergang (Fortsetzung)

Modell	Gl Nr.	Gleichung		
3. Filmkondensation von ruhenden oder langsam strömenden Dampf*	8.28	$\alpha_m = 0,943 \sqrt{\frac{\lambda^3 \cdot \varrho \cdot g \cdot r}{v \cdot l \cdot (t_s - t_w)}}$	Nußelt	laminare Kondensathaut, $Re < 400$ Satt dampf, beliebiger Stoff $R_e = \frac{w_m \cdot \delta}{v}$ mit $w_m = \text{mittl. Filmgeschwindigkeit}$ $\delta = \text{Filmdicke}$
senkrechte Wand oder senkrechtes Rohr			Grigull	turbulente Kondensathaut, $Re > 400$ Satt dampf, beliebiger Stoff
senkrechte Wand oder senkrechtes Rohr	8.29	$\alpha_m = 0,003 \cdot \sqrt{\frac{2^3 \cdot g \cdot l \cdot (t_s - t_w)}{\varrho \cdot v^3 \cdot r}}$	Nußelt	laminare Kondensathaut, $Re < 400$ Satt dampf, beliebiger Stoff
waagerechtes Rohr, außen	8.30 a	$\alpha_m \text{ waag.} = 0,77 \sqrt{\frac{l}{d} \cdot \alpha_m}$		
waagerechtes Rohr, außen	8.30 b	$\alpha_m \text{ waag.} = 0,725 \sqrt{\frac{\lambda^3 \cdot \varrho \cdot g \cdot r}{v \cdot d \cdot (t_s - t_w)}}$	Kirschbaum	Heißdampf, laminare Kondensathaut, beliebiger Stoff
überheizter Dampf	8.31	$\alpha_0 = \alpha_m \sqrt{\frac{l_0 - h'}{r}}$	Jakob und Linke	Temperaturgefälle: $t_s - t_w$ $h' = \text{Enthalpie des siedenden Wassers (T5.4)}$ $h_a = \text{Enthalpie des überheizten Dampfes (T.5)}$
4. Verdampfen von Wasser waagerechte Heizfläche	8.32 a	$\{x\} = 1,026 \{f\}^{0,26} \{p\}^{0,15}$ in $\frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \text{K}}$		$\dot{q} \text{ in } \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$
	8.32 b	$\{x\} = 1,034 \{t_w - t_s\}^{0,354} \{p\}^{0,338}$ in $\frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \text{K}}$		$p \text{ in bar}$
waagerechte und senkrechte Heizfläche	8.33 a	$\{x\} = 0,274 \{\dot{q}\}^{0,75} \{p\}^{0,25}$ in $\frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \text{K}}$	Fritz	Temperaturgefälle: $t_w - t_s$
	8.33 b	$\{x\} = 5,65 \cdot 10^{-3} \{t_w - t_s\}^3 \{p\}$ in $\frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \text{K}}$		$\dot{q} > 17 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ bis $\dot{q} = \dot{q}_K$ (Blasenverdampfung) $p = (0,5 \dots 20) \text{ bar}$

8.3 Konvektiver Wärmeübergang

341

angegeben von	Geltungsbereich	Bemerkungen
		$r$ bei $t_s$ ; übrige Stoffwerte für die flüssige Phase bei $t = \frac{t_s + t_w}{2}$
		$t_s = \text{Siedetemperatur}$ $l = \text{Wandhöhe bzw. Rohrlänge}$ $r = \text{Verdampfungsenthalpie (T5.4)}$
Nußelt		
Grigull		wie (Gl 8.28)
Nußelt		$d = \text{Rohrdurchmesser sonst, wie (Gl 8.28)}$
Kirschbaum		
Jakob und Linke		
Fritz		wie (Gl 8.32)

**Beispiel 8.8: Erhitzen von Natronlauge.** Ein Natronlaugestrom soll in einem Rohr erwärmt werden. Das Rohr hat einen Innendurchmesser von 35 mm, die Natronlauge eine Temperatur von 65°C, die Strömung eine Geschwindigkeit von 1.2 m/s. Es soll der Wärmeübergangskoeffizient bestimmt werden.

Für die Bestimmung der  $Nu$ -Zahl soll folgende einfache Beziehung verwendet werden:

$$Nu = 0.024 Re^{0.8} Pr^{1/3}$$

(Die Formel von Hausen und Gnielinski berücksichtigt zwar zusätzlich die Einlaufstrecke, vergrößert hier aber unnötig den Rechenaufwand.)

Die für die Berechnung relevanten Stoffdaten von Natronlauge sind:  $\eta = 0.52 \cdot 10^{-3}$  kg/m s,  $\rho = 1020$  kg/m<sup>3</sup>,  $\lambda = 0.7$  W/m K,  $c_p = 3.8$  kJ/kg K.

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = 0.18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = 0.51 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} = 2.83$$

$$Re = \frac{c D_i}{\nu} = 82'384.6 (\rightarrow \text{turbulent})$$

$$Nu = 0.024 Re^{0.8} Pr^{1/3} = 290.8$$

$$Nu = \frac{\alpha L_{char}}{\lambda} \rightarrow \alpha = \frac{Nu \lambda}{L_{char}} = 5815 \text{ W/m}^2\text{K}$$

**Beispiel 8.9: Strömungsgeschwindigkeiten.** Der Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit und des Durchmessers auf die Wärmeübergangszahl soll nachfolgend für die Varianten  $c_1 = 5 \text{ m/s}$ ,  $c_2 = 50 \text{ m/s}$ ,  $d_1 = 10 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 100 \text{ mm}$  ermittelt werden.

Die relevanten Stoffwerte der Luft sind  $\lambda = 0.032 \text{ W/mK}$ ,  $\nu = 2.32 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $Pr = 0.67$

Korrelationen für  $l \gg d$ :

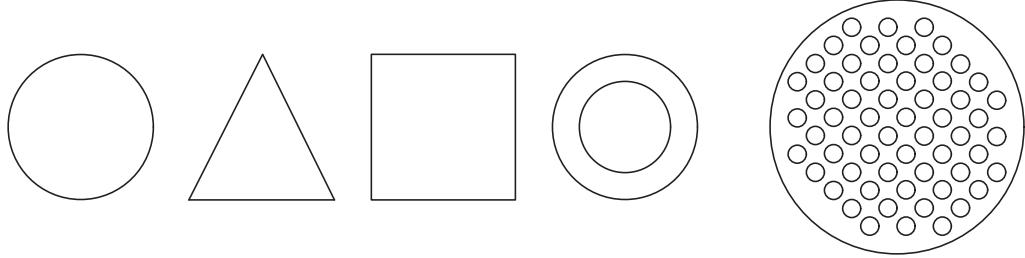
$$Re < 2300: Nu \cong 4 \text{ (laminar)}$$

$$Re > 2300: Nu = 0.024 Re^{0.8} Pr^{1/3}$$

	$c_1 = 5 \text{ m/s}$ $d_1 = 10 \text{ mm}$		$d_2 = 100 \text{ mm}$	$c_1 = 50 \text{ m/s}$ $d_1 = 10 \text{ mm}$	
$Re [-]$	2'160		21'600	21'600	216'000
$Nu [-]$	4	9.8	61.6	61.6	388.9
$\alpha [\text{W/m}^2\text{K}]$	13 laminar	31.4 turbulent	19.7	197	124

Interpretation der Ergebnisse:  $\alpha \uparrow$  wenn Strömung turbulent,  $d \downarrow$  oder  $c \uparrow$ .

**Verschiedene charakteristische Durchmesser:**  
Durchströmen:



Falls im Fluid  $T - T_W$  "nicht zu gross":

$$d_h = \frac{4A}{U}$$

- $A$ : Strömungsquerschnitt
- $U$ : benetzter Umfang
- $d_h$ : hydraulischer Durchmesser

Rohr:

$$d_h = d$$

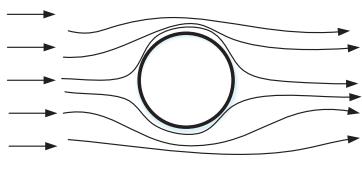
Rohrring:

$$d_h = \frac{4 \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)}{\pi (D + d)} = D - d$$

Rohrbündel:

$$d_h = \frac{4 \frac{\pi}{4} (D^2 - n d^2)}{\pi (D + n d)}$$

Überströmen:



$$L_c = \frac{A}{U_{\text{projektiert}}}$$

$$L_c = \frac{d \pi}{2} \hat{=} \frac{\text{Umfang}}{2} \quad \text{für } Nu \text{ und } Re$$

Platte:  $L_c = l$

Kugel:  $L_c = d$

**Beispiel 8.10: Abkühlen von Wasser in einem Rohr.** Wasser mit 80°C mittlerer Temperatur (zwischen Ein- und Austritt) wird in einem 3 m langen Rohr mit 22 mm Innendurchmesser gekühlt. Die mittlere Wandtemperatur des Rohres beträgt 70°C. Die Wasserdurchflussrate ist 1.2 m/s.

Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizienten.

$$Re = \frac{cd}{\nu_w} = 72329$$

$$\nu_w = 0.365 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr_{Wasser} = \frac{\eta c_p}{\lambda} = 2.22$$

$$Nu = 0.012 (Re^{0.87} - 280) Pr^{0.4} \left[ 1 + (d/l)^{2/3} \right] \left( \frac{Pr_{Wasser}}{Pr_{Wand}} \right)^{0.11} = 280.17$$

$$\alpha = \frac{Nu \lambda}{l} = 8532 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

**Beispiel 8.11: Wärmeübergangszahl in einem Rohr.** Zur Demonstration ihrer Grösse werden die Wärmeübergangszahlen für verschiedene Stoffe in einem Rohr mit 25 mm Innendurchmesser berechnet. Die Rohrwand hat eine Temperatur von 90°C, das Fluid die von 50°C. Die Geschwindigkeiten und Stoffwerte sind:

	Geschwindigkeit m/s	kin. Viskosität $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}$	Wärmeleitfähigkeit W/m K	$Pr$	$Pr_W$
Wasser	2	0.554	0.641	3.57	1.96
Luft 1 bar(a)	20	18.25	0.0279	0.711	0.7018
Luft 10 bar(a)	20	1.833	0.0283	0.712	-
R 134a	2	0.146	0.0751	3.13	3.13

Berechnen Sie die Nusselt- und Wärmeübergangszahlen.

Annahme:  $d/h \ll 1$ , kein Korrekturfaktor für Gasströmungen.

$$Nu = 0.024 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{1/3} \quad (1)$$

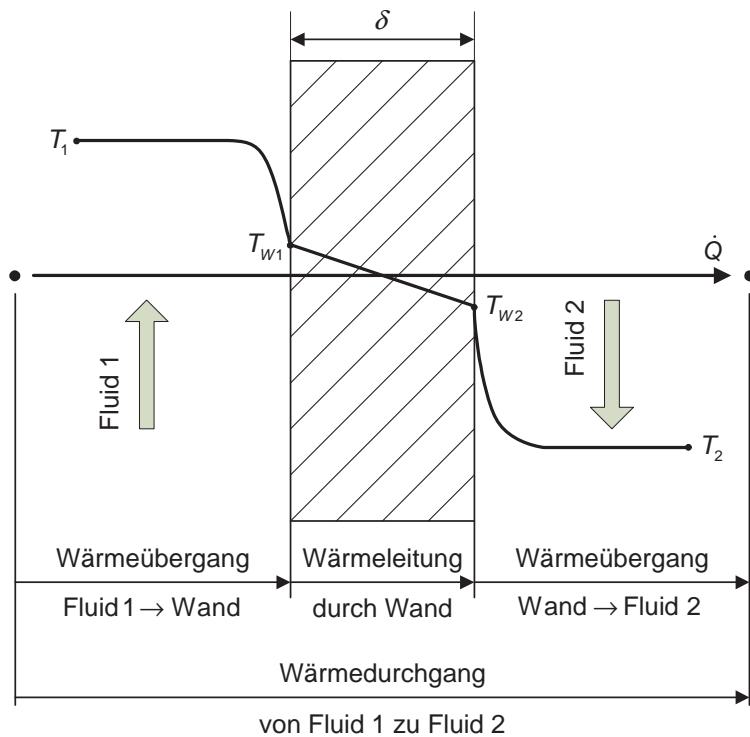
	$\alpha$	$Re$	$Nu(1)$
Wasser	8666	90'252	338
Luft 1 bar(a)	85	27'397	76
Luft 10 bar(a)	541	272'777	478
R134a	2821	342'465	939

## 8.6 Wärmedurchgang

Der *Wärmedurchgang* beschreibt den Wärmetransport von einem Fluid durch eine oder mehrere feste Wände oder durch eine Phasengrenzfläche an ein zweites Fluid, z. B. von einem Fluid 1 durch die Wand eines Wärmeübertragerapparates an ein Fluid 2 (siehe Bild).

### a) Wärmedurchgang durch ebene Wand

In der nachfolgenden Abbildung ist der Temperaturverlauf *quer* zur Strömung beim Wärmedurchgang durch eine ebene Wand dargestellt.



- Wärmeübergang Fluid 1 → Wand:  $\dot{Q}_1 = \alpha_1 A (T_1 - T_{W1})$
- Wärmeleitung durch Wand:  $\dot{Q}_\lambda = \frac{\lambda}{\delta} A (T_{W1} - T_{W2})$
- Wärmeübergang Wand → Fluid 2:  $\dot{Q}_2 = \alpha_2 A (T_{W2} - T_2)$
- Wärmedurchgang Fluid 1 → Fluid 2:  $\dot{Q} = k A (T_1 - T_2)$

$k$  [W/m<sup>2</sup> K] bezeichnet den Wärmedurchgangskoeffizienten. Dieser kann aus den vorherigen Gleichungen  $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_\lambda = \dot{Q}_2 = \dot{Q}$  einfach bestimmt werden:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \quad ; \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient für eine mehrschichtige ebene Wand wird bestimmt mit:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_1^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}$$

**Beispiel 8.12: Motorkühlung.** Bestimmen Sie die Wandtemperaturen eines Zylindermantels sowie die abgeführte Wärmemenge für folgende 2 Fälle:

- a. Wasserkühlung:  $\alpha_{H2O} = 5000 \text{ W/m}^2\text{K}$
- b. Luftkühlung:  $\alpha_L = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$

wobei die Kühlmediumtemperatur immer 360 K beträgt.

Die Wanddicke ist 5 mm. Die Wand darf als ebene Platte betrachtet werden. Die Wärmeleitfähigkeit der Wand beträgt 50 W/mK. Im Zylinder soll mit folgenden Daten für Rauchgas berechnet werden:  $\alpha_{RG} = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{RG} = 1000 \text{ K}$ .

Was kann man über den Wärmeübergangskoeffizienten der beiden Fällen sagen? Der  $k$ -Wert berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} k_w &= \left( \frac{1}{\alpha_{RG}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_w} \right)^{-1} = 24.8 \text{ W/m}^2\text{K} \\ &\left( \approx \frac{1}{\alpha_{RG}} = 25 \text{ W/m}^2\text{K} \right) \\ \dot{q} &= k (T_{RG} - T_W) = 15881 \text{ W/m}^2 \\ &\left( \approx \alpha_{RG} (T_{RG} - T_W) = 16000 \text{ W/m}^2 \right) \end{aligned}$$

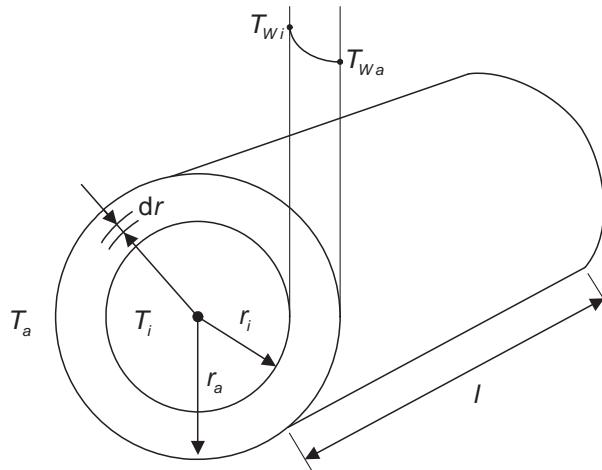
Daraus errechnen sich folgende Temperaturen:

$$\begin{aligned} T_{WRG} &= T_{RG} - \frac{\dot{q}}{\alpha_{RG}} = 364.76 \text{ K} \\ T_{WW} &= T_W + \frac{\dot{q}}{\alpha_w} = 363.18 \text{ K} \\ \Delta T_{Wand} &= 1.6 \text{ K} \\ k_L &= \left( \frac{1}{\alpha_{RG}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_L} \right)^{-1} = 12.48 \text{ W/m}^2\text{K} \\ &\left( \approx \frac{1}{\alpha_{RG}} + \frac{1}{\alpha_L} = \frac{2}{\alpha_{RG}} = 12.5 \text{ W/m}^2\text{K} \right) \\ \dot{q} &= k (T_{RG} - T_L) = 7990 \text{ W} \\ &\left( \approx 2 \alpha_{RG} (T_L - T_W) = 8000 \text{ W} \right) \\ T_{WRG} &= T_{RG} - \frac{\dot{q}}{\alpha_{RG}} = 680.4 \text{ K} \\ T_{WW} &= T_W + \frac{\dot{q}}{\alpha_w} = 679.6 \text{ K} \\ \Delta T_{Wand} &= 0.8 \text{ K} \end{aligned}$$

Bei sehr unterschiedlichen Wärmeübergangskoeffizienten (Rauchgas und Wasser) wird der Wärmedurchgang des geringeren bestimmt ( $k < \min(\alpha_1, \alpha_2, \lambda/\delta)$ ). Die Wandtemperatur liegt immer näher an der Temperatur des Mediums mit dem grösseren  $\alpha$ .

### b) Wärmedurchgang durch Rohr

In der nachfolgenden Abbildung ist der Wärmedurchgang durch ein zylinderförmiges Rohr dargestellt.



Bei Wärmeabgabe eines warmen, durch ein Rohr strömenden Mediums 1 an die Umgebung 2 gilt folgendes:

Vom Stoff an die innere Rohrwand übergebene Wärme:

$$\dot{Q}_i = \alpha_i 2 \pi r_i l (T_i - T_{W,i})$$

Von der Rohraussenwand an die Umgebung übergehende Wärme:

$$\dot{Q}_a = \alpha_a 2 \pi r_a l (T_{W,a} - T_a)$$

Die durch den Ring mit dem Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  fliessende Wärme:

$$\dot{Q} = -\lambda 2 \pi r l \frac{dT}{dr}$$

Problem: Unterschiedliche Bezugsflächen für Wärmeströme.

Die Integration liefert:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda 2 \pi l}{\ln \frac{r_a}{r_i}} (T_{W,i} - T_{W,a})$$

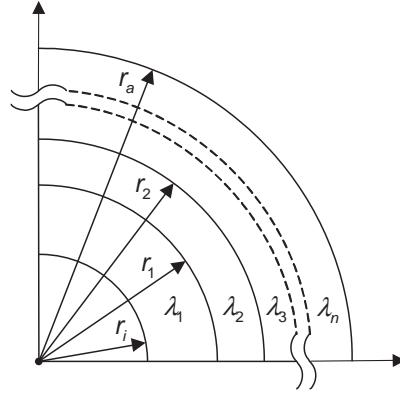
Der Wärmestrom  $\dot{Q}$  wird, wenn der Wärmedurchgangskoeffizient  $k_r$  auf den allgemeinen Radius  $r$  bezogen wird:

$$\boxed{\dot{Q} = k_r 2 \pi r l (T_i - T_a)}$$

worin

$$\boxed{\frac{1}{k_r r} = \frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a}}$$

Besteht die Rohrwand aus mehreren Schichten  $n$ , so ist:



$$\frac{1}{k_r r} = \frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_i} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{r_a}{r_n} + \frac{1}{\alpha_a r_a}$$

Durch Umformen der oben aufgeführten Formeln mit Elimination von  $k$  und Ersatz der Radien durch den Innen- bzw. Aussenrohrdurchmesser ergibt sich:

$$\dot{Q} = \frac{\pi l (T_i - T_a)}{\left( \frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{\ln \frac{d_a}{d_i}}{2 \lambda} + \frac{1}{\alpha_a d_a} \right)}$$

wobei  $d_i$  = Rohrinnendurchmesser [m] und  $d_a$  = Rohraussendurchmesser [m].

Bei dünnwandigen Metallrohren kann das Glied  $\ln \frac{d_a}{d_i} / (2 \lambda)$  vernachlässigt werden.

**Beispiel 8.13: Bestimmung der Wärmedurchgangszahl einer Rohrströmung.** Im Rohr eines Hochdruckvorwärmers strömt Wasser, aussen am Rohr kondensiert Dampf. Die Wärmeübergangszahl innen am Rohr ist  $15000 \text{ W/m}^2\text{K}$  und aussen  $13000 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Der Aussendurchmesser des Rohres beträgt 15 mm, die Wandstärke 2.3 mm. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohrmaterials ist  $40 \text{ W/mK}$ .

Bestimmen Sie die Wärmedurchgangszahl, bezogen auf den Aussen- und Innendurchmesser und prüfen Sie, welchen Fehler man macht, wenn der Rohrwandwiderstand mit der Annahme einer ebenen Wand bestimmt wird.

$$k_i = \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{r_i}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{r_i}{\alpha_a r_a} \right)^{-1} = 5966 \text{ W/m}^2\text{K}$$

mit  $A_i = 2\pi r_i L$

$$\Rightarrow \dot{Q} = k_i A_i \Delta T = 195 L \Delta T$$

$$k_a = \left( \frac{r_a}{\alpha_i r_i} + \frac{r_a}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{\alpha_a} \right)^{-1} = 4137 \text{ W/m}^2\text{K}$$

mit  $A_a = 2\pi r_a L$

$$\Rightarrow \dot{Q} = k_a A_a \Delta T = 195 L \Delta T$$

$$k_{ew} = \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a} \right)^{-1} = 4973 \text{ W/m}^2\text{K}$$

mit  $A_{ew} = 2\pi (r_i + r_a)/2 L$

$$\Rightarrow \dot{Q} = k_{ew} A_{ew} \Delta T = 198 L \Delta T$$

⇒ siehe auch Kap. 8.4.7

$$r_0 + \delta = 15 \text{ mm}$$

$$\delta = 2.3 \text{ mm}$$

$$\frac{\delta}{r_0} = 0.43$$

$$\frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}_W} = 0.9894 \quad (\Delta = 0.011)$$

**Beispiel 8.14: Kondensatorrohr mit Verschmutzung.** In einem Kondensatorrohr aus Titan mit 24 mm Aussendurchmesser und 0.7 mm Wandstärke wird nach einer gewissen Betriebszeit innen eine Schmutzschicht von 0.05 mm Dicke festgestellt. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohres ist 15 W/m K, die der Schmutzschicht 0.8 W/m K. Im Rohr beträgt die Wärmeübergangszahl mit und ohne Verschmutzung 18000 W/m<sup>2</sup> K, aussen 13000 W/m<sup>2</sup> K.

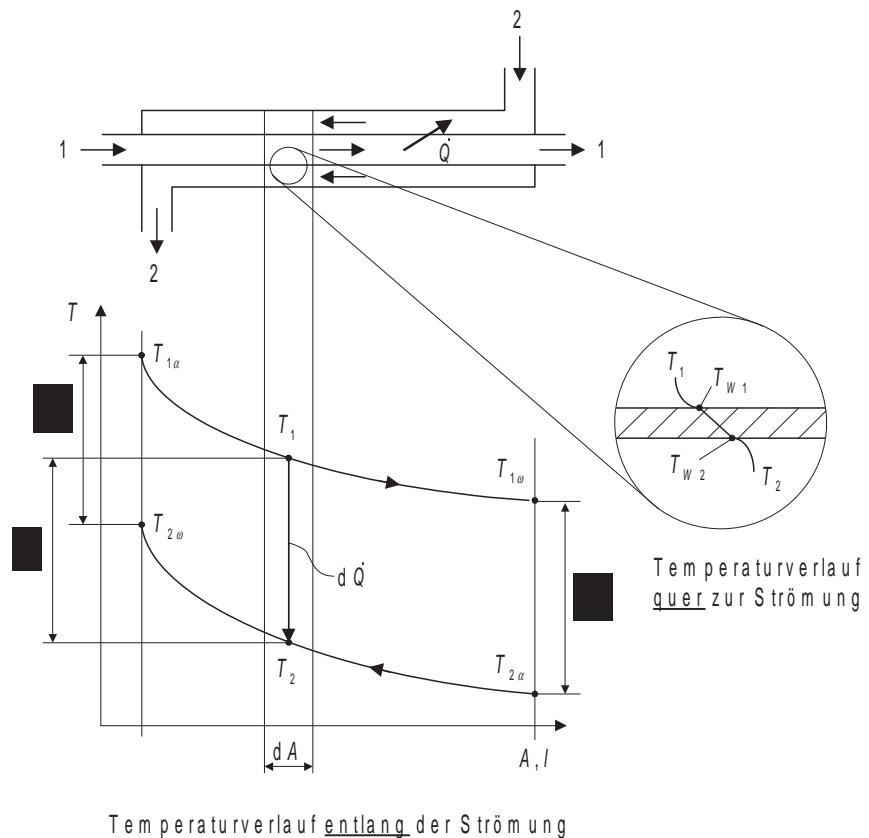
Berechnen Sie die durch Verschmutzung bedingte verringerte Wärmedurchgangszahl (Bezug: Aussendurchmesser).

$$k_a = \left( \frac{r_a}{\alpha_i r_i} + \frac{r_a}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{\alpha_a} \right)^{-1} = 5435 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$k_a' = \left( \frac{r_a}{\alpha_i r_i} + \frac{r_a}{\lambda_{ti}} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{r_a}{\lambda_s} \ln \frac{r_i}{r_s} + \frac{1}{\alpha_a} \right)^{-1} = 3992 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

In der Praxis wählt man die Wandfläche als Bezugsfläche, die den grösste Wärmeübergangswiderstand aufweist.

Der Wärmedurchgangskoeffizient wird sowohl lokal an wärmeübertragenden Wänden als auch global für komplette Wärmeübertrager verwendet.



Für die Auslegung von Wärmeübertragern ist die korrekte Bestimmung des  $k$ -Wertes von entscheidender Bedeutung. Auf den folgenden Seiten ist eine Zusammenstellung von überschlägigen Wärmedurchgangskoeffizienten für verschiedene Wärmeübertragerbauarten zusammengestellt (aus VDI-Wärmeatlas).

$$\dot{Q} = k A \Delta T_m$$

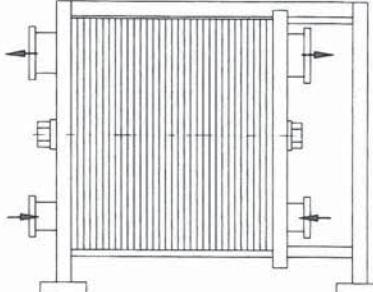
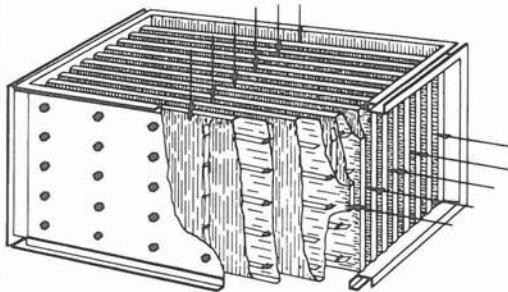
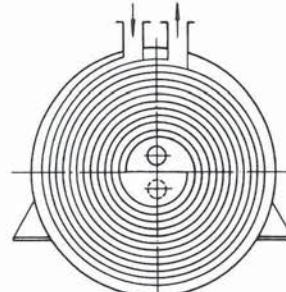
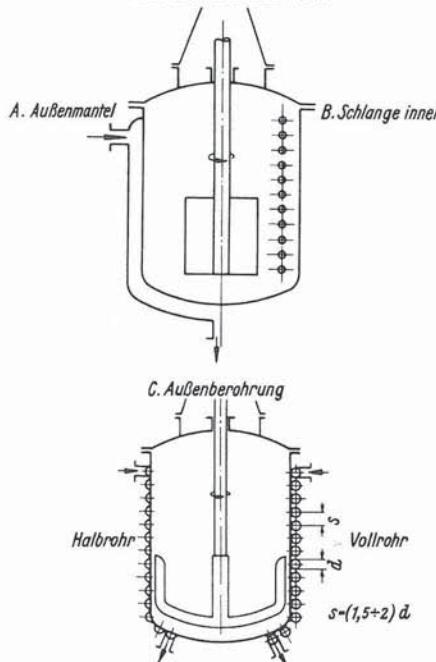
$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}}$$

Die im folgenden zusammengestellten Erfahrungswerte sollen zur überschlägigen Berechnung von Wärmeübertragnern dienen. Die kleineren Werte gelten für verhältnismäßig unvorteilhafte Bedingungen (z. B. bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, zähen Flüssigkeiten, freier Konvektion und bei der Neigung zu Verschmutzungen), die großen Werte sind bei besonders geeigneten Bedingungen (z. B. bei großer Strömungsgeschwindigkeit,

dünnen Flüssigkeitsschichten, optimalen Mengenverhältnissen der beiden Stoffe zueinander und bei sauberen Oberflächen) einzusetzen. Die angegebenen Werte können in Sonderfällen nach oben oder unten überschritten werden; sie sind deshalb mit der nötigen Kritik und Vorsicht zu verwenden. In diesen  $k$ -Werten sind die Wärmeleitwiderstände von Isolier- und Schutzschichten nicht berücksichtigt.

Bauart	Übertragungsbedingungen	überschlägiger $k$ -Wert W/m <sup>2</sup> K
<b>Rohrbündel-Wärmeübertrager</b>	Gas ( $\approx 1$ bar) innerhalb und Gas ( $\approx 1$ bar) außerhalb der Rohre	5 bis 35
	Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) außerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb der Rohre	150 bis 500
	Flüssigkeit außerhalb (innerhalb) und Gas ( $\approx 1$ bar) innerhalb (außerhalb) der Rohre	15 bis 70
	Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Flüssigkeit außerhalb der Rohre	200 bis 400
	Flüssigkeit innerhalb und außerhalb der Rohre	150 bis 1200
	Heizdampf außerhalb und Flüssigkeit innerhalb der Rohre	300 bis 1200
	als Verdampfer und Kondensator siehe unten	
<b>Verdampfer</b>	Heizdampf außerhalb der Rohre 1. mit natürlichem Umlauf a) zähe Flüssigkeiten b) dünne Flüssigkeiten 2. mit Zwangsumlauf	300 bis 900 600 bis 1700 900 bis 3000
	Ammoniak-Verdampfer, mit Sole geheizt	200 bis 800
<b>Kondensator</b>	Kühlwasser innerhalb und organische Dämpfe oder Ammoniak außerhalb der Rohre	300 bis 1200
	Dampfturbinenkondensator (reiner Wasserdampf; dünne Messingrohre)	1500 bis 4000
	$k$ -Wert nimmt mit wachsendem Inertgas-Anteil stark ab.	

Bauart	Übertragungsbedingungen	überschlägiger k-Wert W/m <sup>2</sup> K
<b>Abhitzekekessel</b> 	heiße Gase innerhalb der Rohre und siedendes Wasser außerhalb der Rohre	15 bis 50
<b>Gaserhitzer</b> 	Wasserdampf oder Heißwasser innerhalb der Rippenrohre und Gas außerhalb der Rippenrohre a) freie Strömung (Heizkörper) b) erzwungene Strömung	5 bis 12 12 bis 50
<b>Doppelrohr-Wärmeübertrager</b> 	Gas ( $\approx 1$ bar) innerhalb und Gas ( $\approx 1$ bar) außerhalb der Rohre Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Gas ( $\approx 1$ bar) außerhalb der Rohre Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) außerhalb der Rohre Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb und Flüssigkeit außerhalb der Rohre Flüssigkeiten innerhalb und außerhalb der Rohre	10 bis 35 20 bis 60 150 bis 500 200 bis 600 300 bis 1400
<b>Rieselfilmkühler</b> 	Kühlwasser außerhalb und Gas ( $\approx 1$ bar) innerhalb der Rohre Kühlwasser außerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb der Rohre Kühlwasser außerhalb und Flüssigkeit innerhalb der Rohre Berieselungskondensator, z. B. für Kältemittel: Kühlwasser außerhalb und kondensierender Dampf innerhalb der Rohre	20 bis 60 150 bis 350 300 bis 900 300 bis 1200
<b>Schlangenkühler</b> 	Kühlwasser oder Sole außerhalb und Gas ( $\approx 1$ bar) innerhalb der Rohrschlange Kühlwasser außerhalb und Gas, Hochdruck (200 bis 300 bar) innerhalb der Rohrschlange Kühlwasser oder Sole außerhalb und Flüssigkeit innerhalb der Rohrschlange Kühlwasser oder Sole außerhalb und kondensierender Dampf innerhalb der Rohrschlange	20 bis 60 150 bis 500 200 bis 700 350 bis 900

Bauart	Übertragungsbedingungen	überschlägiger k-Wert W/m <sup>2</sup> K
<b>Platten-Wärmeübertrager</b> 	ebene Kanäle, Gas an Wasser ebene Kanäle, Flüssigkeit an Wasser Profilplatten, Flüssigkeit an Flüssigkeit	20 bis 60 350 bis 1200 1000 bis 4000
<b>Taschen-Wärmeübertrager</b> 	Gas an Gas ( $\approx 1$ bar) Gas an Flüssigkeit	10 bis 35 20 bis 60
<b>Spiral-Wärmeübertrager</b> 	Flüssigkeit an Flüssigkeit kondensierender Dampf an Flüssigkeit	700 bis 2500 900 bis 3500
<b>Rührwerkskessel</b> 	A. Außenmantel kondensierender Dampf außerhalb und Flüssigkeit innerhalb des Kessels kondensierender Dampf außerhalb und siedende Flüssigkeit innerhalb des Kessels Kühlwasser oder Sole außerhalb und Flüssigkeit innerhalb des Kessels B. Schlaue innen kondensierender Dampf innerhalb der Schlaue und Flüssigkeit innerhalb des Kessels kondensierender Dampf innerhalb der Schlaue und siedende Flüssigkeit innerhalb des Kessels Kühlwasser oder Sole innerhalb der Schlaue und Flüssigkeit innerhalb des Kessels C. Außenbohrung auf Mantel aufgeschweißt kondensierender Dampf innerhalb der Heizkanäle und Flüssigkeit innerhalb des Kessels kondensierender Dampf innerhalb der Heizkanäle und siedende Flüssigkeit innerhalb des Kessels Kühlwasser oder Sole innerhalb der Kühlkanäle und Flüssigkeit innerhalb des Kessels	500 bis 1500 700 bis 1700 150 bis 350 700 bis 2500 1200 bis 3500 500 bis 1200 500 bis 1700 700 bis 2300 350 bis 900

### 8.6.1 Fouling

#### Grundlagen

Im Betrieb von Wärmeübertragern kann es zu Ablagerungen (Schlamm, Mineralien, Kalk etc.) oder Korrosion (Oxidschichten, „Rost“ etc.) an den Trennwänden kommen. Dieser unerwünschte Vorgang verschlechtert den Wärmedurchgang und wird als „Fouling“ bezeichnet.

Die folgenden Abbildungen aus der Praxis veranschaulichen die Fouling-Problematik bei der Abwärmenutzung.



Wärmeübertrager vor Inbetriebnahme  
bei der HUG AG, Malters



Wärmeübertrager nach 60 h Einsatzdauer

Fouling spielt in vielen WRG-Anlagen (WRG=Wärmerückgewinnung) eine zentrale Rolle. Die untenstehende Tabelle zeigt verschiedene Möglichkeiten zum Umgang mit Fouling.

„Reinigung“ des Stroms	Fouling im Wärmeübertrager zulassen	Fouling im Wärmeübertrager minimieren
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Massenkraftabscheidung</li> <li>2. Nassabscheidung</li> <li>3. Adsorption</li> <li>4. Thermische oder katalytische Oxidation</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Vergrösserung der Fläche</li> <li>2. Mechanische Reinigung</li> <li>3. Chemische Reinigung</li> <li>4. Teilredundanz</li> <li>5. Redundanz</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Materialauswahl, Oberflächenbeschichtung</li> <li>2. Strömungsoptimierung, Anpassung der Fluidgeschwindigkeit</li> <li>3. Zugabe von Chemikalien</li> <li>4. Mechanische Entfernung der Fouling-Schicht</li> </ol>

### Fouling-Faktor

Rechnerisch kann die Verschlechterung des Wärmedurchgangs durch einen spezifischen Verschmutzungswiderstand  $R_f$  [ $\text{m}^2 \text{K/W}$ ] ausgedrückt werden. Dieser zusätzliche Widerstand wird auch als so genannter “Fouling-Faktor” bezeichnet und folgendermassen berechnet:

$$R_f = \frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_c} = \frac{k_c - k_f}{k_c k_f}$$

Dabei ist  $k_c$  der Wärmedurchgangskoeffizient bei sauberem Wärmeübertrager (Index  $c$  für “clean”) und  $k_f$  der Wärmedurchgangskoeffizient bei verschmutztem Wärmeübertrager (Index  $f$  für “fouling”).

Die bezüglich Fouling betroffenen Wärmeübertrager müssen mit einer Flächenreserve ausgelegt werden, um eine Sicherheit gegenüber dem Leistungsabfall durch Verschmutzung zu haben.

Vielfach strebt der Verschmutzungswiderstand asymptotisch gegen ein Maximum, einem Plateau, ab dem keine weitere Verschlechterung des Wärmedurchgangs entsteht.

Bei Kenntnis des maximalen Foulingwiderstandes kann die Fläche berechnet werden, die benötigt wird, um mit einem verschmutzten Wärmeübertrager die gleiche Leistung zu übertragen wie mit einem sauberen Wärmeübertrager.

$$\frac{A_f}{A_c} = \frac{k_c}{k_f} = 1 + k_c R_f$$

$A_f$  ist die Fläche, die bei Verschmutzung für die Wärmeübertragung benötigt wird,  $A_c$  ist die benötigte Fläche bei sauberem Wärmeübertrager. Die nachfolgende Tabelle liefert Anhaltswerte für die Verschmutzungswiderstände  $R_f$  in Wärmeübertragern.

Fluid	$R_f$ in $10^{-3} \text{ m}^2 \text{K/W}$
Seewasser	0.1 bis 0.5
Flusswasser	0.2 bis 1.0
Abgase	1.8
Heizöl	0.9
Transformatorenöl	0.2
Speiseöl	0.5
Benzin	0.2
Kältemittel	0.2
Wasserdampf	0.1 bis 0.2
Druckluft	0.35
destilliertes Wasser	0.1

**Beispiel 8.15: Doppelrohrwärmeübertrager (flüssig-flüssig).**

Vorgaben:  $\alpha_1 = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\alpha_2 = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\delta = 1 \text{ mm}$ ,  
 $d_i = 25 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 372 \text{ W/mK}$ .

An einer bestimmten Position des Wärmeübertragers betragen die Fluidtemperaturen:  $\vartheta_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_2 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$

Bestimme:  $\dot{Q}/l$ ,  $\dot{q}$ ,  $k$ ,  $\vartheta_{W1}$ ,  $\vartheta_{W2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} &= \frac{1}{a_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \\ \rightarrow k &\approx \frac{\alpha}{2} \approx 997.3 \text{ W/m}^2\text{K} \\ \dot{q} &= k(\vartheta_1 - \vartheta_2) \approx 30 \text{ kW/m}^2 \\ \frac{\dot{Q}}{l} &= \dot{q} d_m \pi \approx 2443 \text{ W/m} \\ \vartheta_{W1} &= \vartheta_1 - \frac{\dot{q}}{\alpha_1} \approx 85.05 \text{ }^\circ\text{C} \\ \vartheta_{W2} &= \frac{\dot{q}}{\alpha_2} + \vartheta_2 \approx 84.96 \text{ }^\circ\text{C}\end{aligned}$$

**Beispiel 8.16: Doppelrohrwärmeübertrager (Luft-Luft).**

Vorgaben:  $\alpha_1 = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\alpha_2 = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\delta = 1 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 372 \text{ W/mK}$ .  
An einer bestimmten Position des Wärmeübertragers betragen die Fluidtemperaturen:  $\vartheta_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_2 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$

Bestimme:  $k$ ,  $\vartheta_{W1}$ ,  $\vartheta_{W2}$

$$\begin{aligned}k &\approx \frac{\alpha}{2} \approx 9.9997 \\ \dot{q} &= 299.992 \text{ W/m}^2 \\ \Delta T_1 = \Delta T_2 &= 14.9996 \text{ K}; \Delta T \approx 0.0008 \text{ K}\end{aligned}$$

**Beispiel 8.17: Doppelrohrwärmeübertrager (Wasser-Luft).**

Vorgaben:  $\alpha_1 = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\alpha_2 = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\delta = 1 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 372 \text{ W/m K}$ .

An einer bestimmten Position des Wärmeübertragers betragen die Fluidtemperaturen:  $\vartheta_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_2 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$

Bestimme:  $k$ ,  $\vartheta_{W1}$ ,  $\vartheta_{W2}$  und zeichne quantitativ die Temperaturverläufe quer zur Strömung.

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{a_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{a_2}$$

$$\rightarrow k \approx 19.8 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\dot{q} = k \Delta T \approx 594 \text{ W/m}^2$$

$$\vartheta_{W1} = \vartheta_1 - \frac{\dot{q}}{\alpha_1} \approx 99.703 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_{W2} = \frac{\dot{q}}{\alpha_2} + \vartheta_2 \approx 99.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

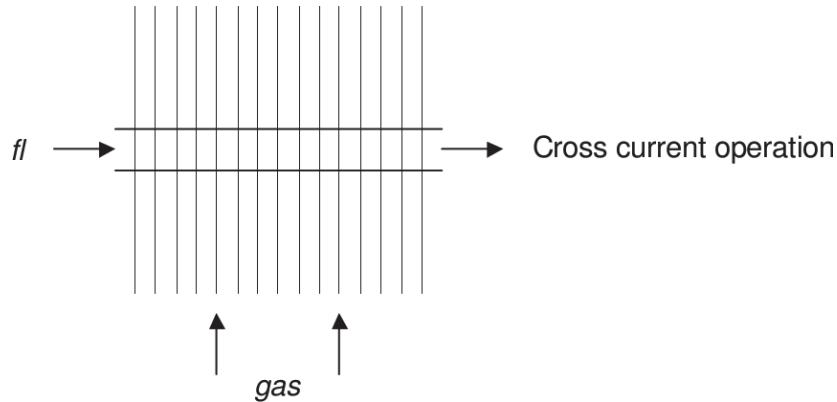
$$\Delta T \approx 0.003 \text{ K}$$

### Wirtschaftliche Gestaltung von (Gas-Flüssig) Wärmeübertragern:

$$\begin{aligned}\alpha_g &\ll \alpha_W \\ |\Delta \dot{H}_g| &= |\dot{Q}_g| = -|\dot{Q}_{fl}| = |\Delta \dot{H}_{fl}| \\ \alpha_g A_g \Delta T_g &= \alpha_{fl} A_{fl} \Delta T_{fl}\end{aligned}$$

$$\Delta T_g \approx \Delta T_{fl} \Rightarrow \frac{A_g}{A_{fl}} = \frac{\alpha_{fl}}{\alpha_g} = m$$

Konstruktive Lösung:

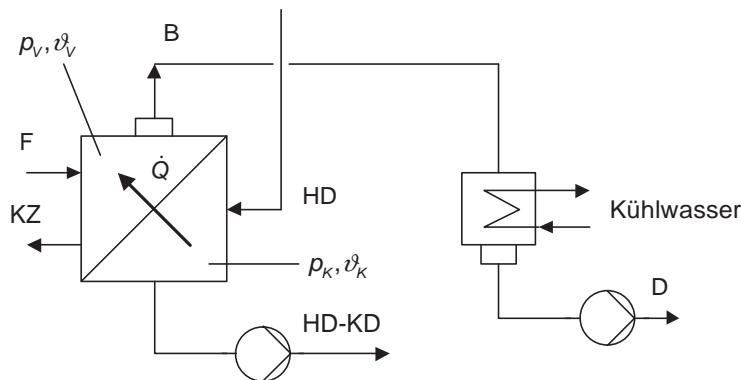


Rippen dienen dazu, die Fläche gasseitig zu erhöhen.

### 8.6.2 Einfache Temperaturverläufe entlang von Wärmeübertragerflächen

**Beispiel 8.18: Wasser durch Verdampfung entmineralisieren.** Es wird mit Sattdampf aus einer Turbine geheizt. Der Dampf kondensiert im Wärmeübertrager.

Anlageschema:



B: Brügendampf (frei von Mineralien)

F: Feed (Wasser)  $\dot{m}_F = 3 \text{ kg/s}$

D: Destillat  $\dot{m}_D = 2 \text{ kg/s}$

KZ: Konzentrat  $\dot{m}_{KZ} = 1 \text{ kg/s}$

HD: Heizdampf

HD-KD: Heizdampf-Kondensat

Kondensatorseite:

$$\vartheta_K = \vartheta_{HD} = \vartheta_{HD-KD} = 50 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p_K = 0.123 \text{ bar(a)}$$

$$r_K = \Delta h_K = h''_{HD} - h'_{HD-KD} = 2383 \text{ kJ/kg}$$

$$\alpha_K = 10'000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Verdampferseite:

$$\vartheta_V = \vartheta_F = \vartheta_{KZ} = 43 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p_V = 0.0864 \text{ bar(a)}$$

$$r_V = \Delta h_V = h''_B - h'_F = 2400 \text{ kJ/kg}$$

$$\alpha_V = 10'000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Apparat:

Rohrwand:  $d_i = 38 \text{ mm}$ ,  $\delta_W = 1 \text{ mm}$ ,  $\lambda_W = 20 \text{ W/m K}$

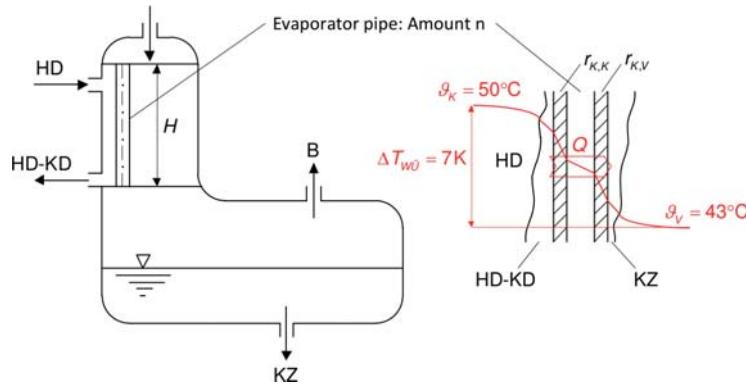
Verdampferhöhe:  $H = 6 \text{ m}$

Verkrustungen:  $r_{K,K} = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K/W}$ ,  $r_{K,V} = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K/W}$

$$k_{K,K} = \frac{1}{r_{K,K}} = 40'000 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad ; \quad k_{K,V} = \frac{1}{r_{K,V}} = 20'000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Wärmedurchgang im Verdampfer:

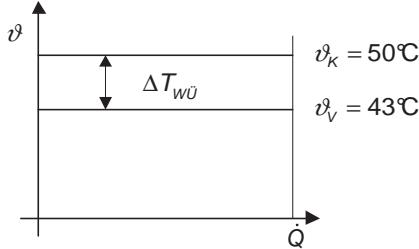
Detailliertes Anlageschema:



Berechnung der Wärmeübertragerfläche:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_K} + r_{K,K} + \frac{\delta_W}{\lambda_W} + r_{K,V} + \frac{1}{\alpha_V}$$

$$\rightarrow k \approx 3077 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$



$$\dot{Q} = \dot{H}_B + \dot{H}_{KZ} - \dot{Q}_F = \dot{m}_B r_V = \dot{m}_D R_V$$

$$\dot{Q} = \int k (\vartheta_K - \vartheta_V) dA = k (\vartheta_K - \vartheta_V) A$$

$$\dot{Q} = 4'800 \text{ kW}$$

$$A = \frac{\dot{Q}}{k (\vartheta_K - \vartheta_V)} = 223 \text{ m}^2$$

Apparate-Dimensionierung:

$$H = 6 \text{ m}, A = \pi d_m H n, d_m = \frac{d_i + d_o}{2}$$

$$n = \frac{A}{\pi d_m H} \approx 303 \text{ Rohre}$$

## 8.7 Wärmeübertrager

In einem Wärmeübertrager (auch Wärmetauscher, Wärmeaustauscher genannt; wir wollen jedoch diesen physikalisch nicht-korrekt Begriff vermeiden) wird Energie in Form von Wärme von einem wärmeren auf einen kälteren Fluidstrom übertragen.

### 8.7.1 Auslegung von Wärmeübertrager-Apparaten

Allgemein braucht es zur Auslegung eines Wärmeübertrager-Apparates mehrere Disziplinen:

Thermische Auslegung: Berechnung von  $\alpha_1, \alpha_2, k, \Delta T_m, A$  aus  $\dot{Q}$   
 $\dot{Q}$  aus Energiebilanz (siehe unten)

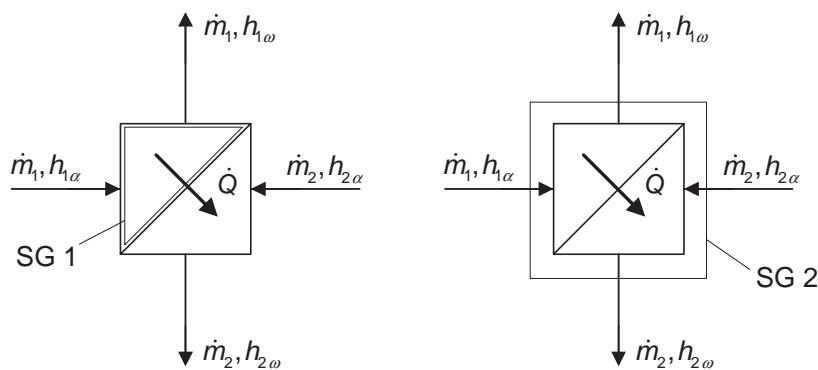
Fluidynamische Auslegung: Berechnung von Druckverlusten der Fluide im Wärmeübertrager

Mechanische Auslegung: Berechnung der Beanspruchung der Werkstoffe aus  $\Delta p, T \rightarrow$  Festigkeitslehre, Dimensionierung

Eine weitere, wichtige Aufgabe ist die Wahl der Werkstoffe, insbesondere wenn chemisch aggressive Fluide im Spiel sind.

### 8.7.2 Energiebilanz

In Schemas verwendet man für Wärmeübertrager oft folgendes Symbol:



Falls der Apparat gut wärmegedämmt ist, gilt für die Systemgrenze SG 1 bei Vernachlässigung der Änderung der kinetischen und potenziellen Energie die folgende Energiebilanz (Leistungsbilanz):

$$\dot{m}_1 h_{1\alpha} = \dot{m}_1 h_{1\omega} + \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \dot{m}_1 (h_{1\alpha} - h_{1\omega})$$

Für eine konstante spezifische Wärmekapazität  $c_{p1}$  ist:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p1} (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}) = CP_1 (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega})$$

$CP_1$  bezeichnet den so genannten Wärmekapazitätsstrom ( $CP_1 = \dot{m}_1 c_{p1}$ ) in W/K. Für die Systemgrenze SG 2 lautet die Leistungsbilanz:

$$\dot{m}_1 h_{1\alpha} + \dot{m}_2 h_{2\alpha} = \dot{m}_1 h_{1\omega} + \dot{m}_2 h_{2\omega}$$

Für konstante spezifische Wärmekapazitäten gilt:

$$\dot{m}_1 c_{p1} (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}) = \dot{m}_2 c_{p2} (\vartheta_{2\omega} - \vartheta_{2\alpha})$$

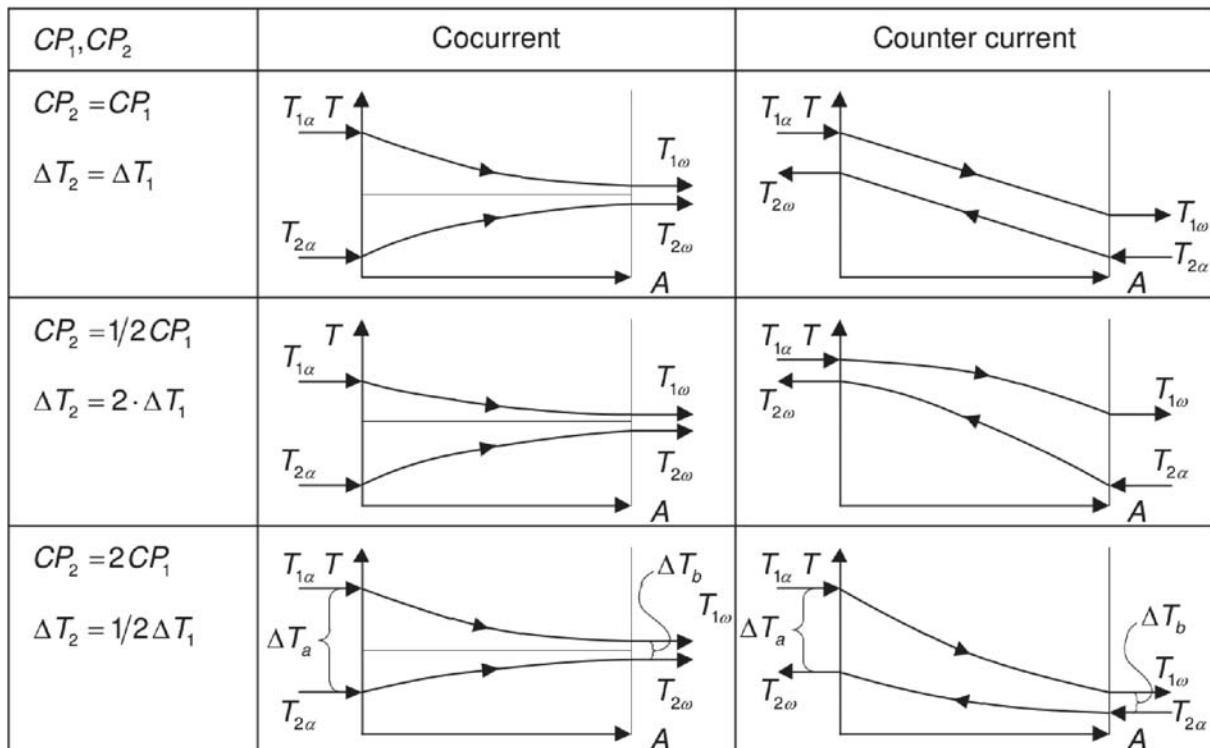
$$CP_1 (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}) = CP_2 (\vartheta_{2\omega} - \vartheta_{2\alpha})$$

$$R_1 = \frac{CP_1}{CP_2} = \frac{\vartheta_{2\omega} - \vartheta_{2\alpha}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}} = \frac{\Delta\vartheta_2}{\Delta\vartheta_1}$$

Es ist offensichtlich, dass die Wahl der Systemgrenze von Bedeutung ist!

### 8.7.3 Mittlere Temperaturdifferenz

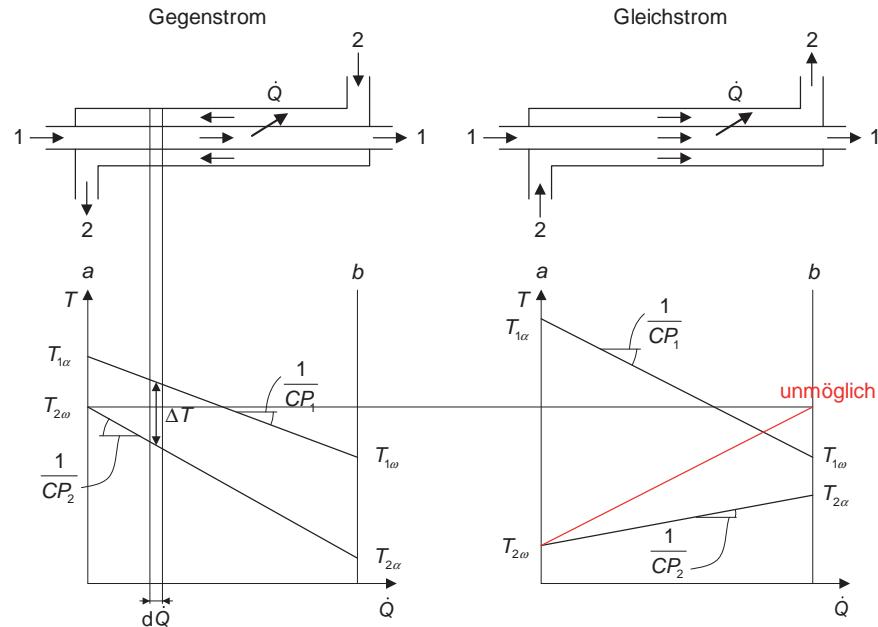
Die Temperaturen der Fluide ändern sich während des Durchströmens im Wärmeübertrager, bei Aggregatzustandsänderungen reiner Stoffe bleibt die Temperatur konstant. Auch die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Fluiden ändert sich entlang der Wärmeübertragungsfläche. Beim Gleichstrom streben beide Fluide der gleichen Austrittstemperatur zu, beim Gegenstrom kann die Austrittstemperatur des kälteren Fluids höher als die des wärmeren sein.



Die mittlere Temperaturdifferenz  $\Delta T_m$  wird für Gleichstrom- und Gegenstrom-Schaltungen über das logarithmische Mittel bestimmt. Die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz ist immer kleiner als die arithmetische und berechnet sich nach der folgenden Gleichung:

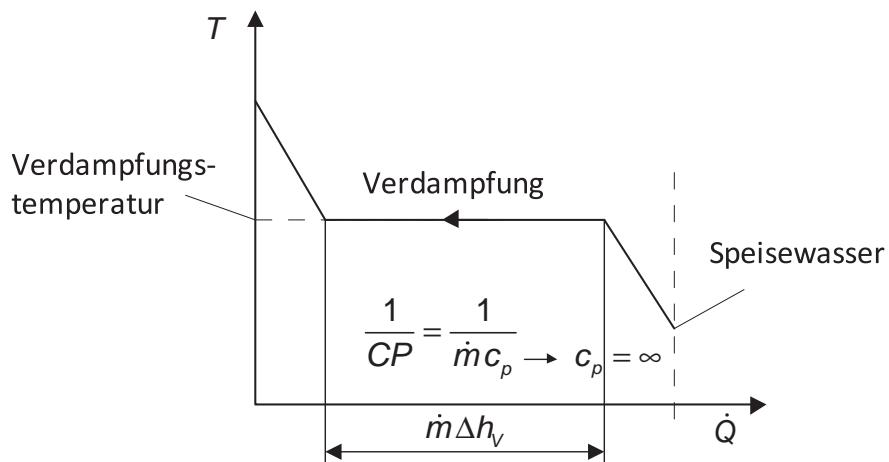
$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}}; \quad \text{Wärmestrom: } \dot{Q} = k A \Delta T_m$$

Dieser Zusammenhang kann sehr einfach hergeleitet werden, wenn die Wärmeübertragung in einem  $T, \dot{Q}$ -Diagramm dargestellt wird: Für Fluid 1 gilt:



$$\dot{Q}_1 = \dot{m}_1 c_{p1} (T_{1\alpha} - T_{1\omega}) \rightarrow \frac{\Delta T_1}{\Delta \dot{Q}_1} = \frac{1}{\dot{m}_1 c_{p1}} = \frac{1}{CP_1} = \frac{T_{1\alpha} - T_{1\omega}}{\dot{Q}_1}$$

Treten Phasenwechsel im WÜ auf, ergibt sich auch im  $T, \dot{Q}$ -Diagramm eine horizontale Gerade.



Zur Erinnerung: Für konstante spezifische Wärmekapazitäten ist die Energiebilanz:

$$CP_1(T_{1\alpha} - T_{1\omega}) = CP_2(T_{2\omega} - T_{2\alpha})$$

Im  $T, \dot{Q}$ -Diagramm (bzw.  $T, \dot{H}$ -Diagramm) ist die Steigung der Temperaturdifferenz zwischen Fluid 1 und Fluid 2 ebenfalls konstant:

$$\frac{\Delta T}{\Delta \dot{Q}} = \frac{d(\Delta T)}{d\dot{Q}} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\dot{Q}}$$

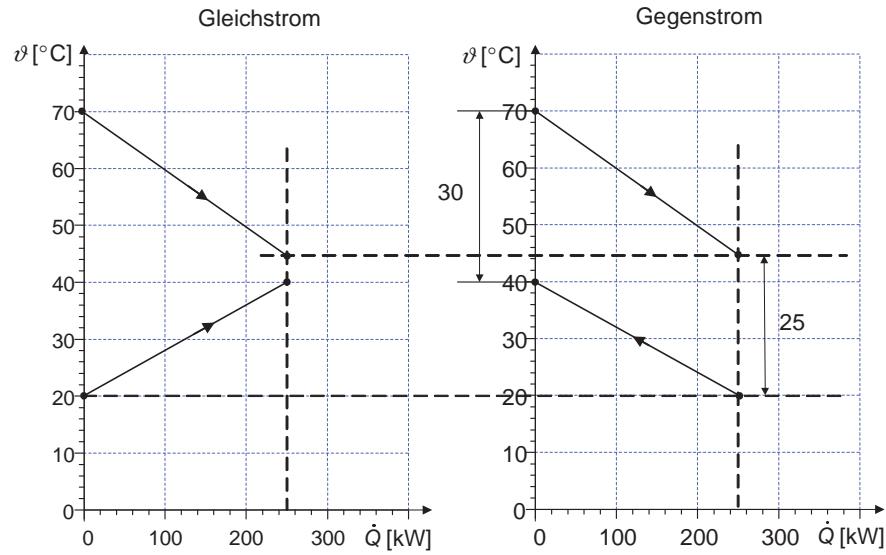
Durch Einsetzen des über das Flächenelement  $dA$  übertragenen Wärmestroms  $d\dot{Q} = k dA \Delta T$  erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta T)}{k dA \Delta T} &= \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\dot{Q}} \\ \int_0^A dA &= \frac{\dot{Q}}{\Delta T_a - \Delta T_b} \frac{1}{k} \int_{\Delta T_a}^{\Delta T_b} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} \end{aligned}$$

Der übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}$  ist somit:

$$\dot{Q} = k A \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}} = k A \Delta T_m$$

**Beispiel 8.19: Vergleich zwischen Gleich- und Gegenstrom-Wärmeübertrager.** Die Ein- und Austrittstemperaturen der beiden Medien und die Wärmedurchgangskoeffizienten des Gleichstrom- und des Gegenstrom-Wärmeübertragers sollen gleich sein. Das heiße Fluid mit  $CP_1 = 10 \text{ kW/K}$  kühlt sich von  $70^\circ\text{C}$  auf  $45^\circ\text{C}$  ab und im Gegenzug wird das kalte Fluid mit  $CP_2 = 12.5 \text{ kW/K}$  von  $20^\circ\text{C}$  auf  $40^\circ\text{C}$  erwärmt. Wie verhalten sich die Wärmeübertragerflächen zueinander, wenn mit beiden Apparaten der gleiche Wärmestrom übertragen werden soll?



$$\dot{Q} = k A_{Gleich} \Delta T_{m,Gleich} = k A_{Gegen} \Delta T_{m,Gegen}$$

$$\frac{A_{Gleich}}{A_{Gegen}} = \frac{\Delta T_{m,Gegen}}{\Delta T_{m,Gleich}}$$

Gleichstrom:

$$\Delta T_{m,Gleich} = 19.54 \text{ K}$$

Gegenstrom:

$$\Delta T_{m,Gegen} = 27.42 \text{ K}$$

Vergleicht man die Wärmeübertragungsflächen für die beiden Fälle, so erhält man:

$$\frac{A_{Gleich}}{A_{Gegen}} = 1.4$$

*Die Fläche des Gleichstromwärmeübertragers muss 40% grösser sein als die Fläche des Gegenstromwärmeübertragers!*

**Beispiel 8.20: Wärmeübertragung im Gleich- und Gegenstrom.** Ein Wassermassenstrom von 0.2 kg/s soll von 5°C auf 45°C erwärmt werden mit einem Luftmassenstrom von 1.113 kg/s mit einer Eintrittstemperatur von:

- a. 120°C
- b. 100°C
- c. 80°C
- d. 60°C

Gegebene Daten:  $k = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $c_{p,H_2O} = 4.19 \text{ kJ/kgK}$ ,  $c_{p,Luft} = 1.004 \text{ kJ/kgK}$

Ermitteln Sie für diese vier Alternativen sowohl für einen Gleich- als auch Gegenstrom-Wärmeüberträger:

- a. Luftaustrittstemperatur
- b. mittlere Temperaturdifferenz  $\Delta T_m$
- c. Fläche  $A$

Stellen Sie die Ergebnisse in der folgenden Tabellen dar! Zeichnen Sie die Verläufe  $\vartheta_1(A)$  und  $\vartheta_2(A)$  für die 8 Fälle in ein Diagramm.

$$\text{Luft: } \dot{Q}_L = \dot{m}_L c_{pl} (\vartheta'_1 - \vartheta''_1)$$

$$\text{Wasser: } \dot{Q}_W = \dot{m}_W c_{pW} (\vartheta''_2 - \vartheta'_2)$$

Wärmeübertragung: Gegenstrom GG

$$\dot{Q}_{GG} = k A \Delta T_{LM,GG}$$

$$\Delta T_{LM,GG} = \frac{\Delta T_{a,GG} - \Delta T_{b,GG}}{\ln \frac{\Delta T_{a,GG}}{\Delta T_{b,GG}}}$$

$$\Delta T_{a,GG} = \vartheta''_1 - \vartheta'_2$$

$$\Delta T_{b,GG} = \vartheta'_1 - \vartheta''_2$$

Wärmeübertragung: Gleichstrom GL

$$\dot{Q}_{GL} = k A \Delta T_{LM,GL}$$

$$\Delta T_{LM,GL} = \frac{\Delta T_{a,GL} - \Delta T_{b,GL}}{\ln \frac{\Delta T_{a,GL}}{\Delta T_{b,GL}}}$$

$$\Delta T_{a,GL} = \vartheta'_1 - \vartheta'_2$$

$$\Delta T_{b,GL} = \vartheta''_1 - \vartheta''_2$$

Gegenstromschaltung

$\vartheta'_1$	$\vartheta''_1$	$\Delta T_a$	$\Delta T_b$	$\Delta T_{LM}$	A
120	89.6	85.0	75	79.9	8.4
100	69.6	65.0	55	59.9	11.2
80	49.8	45.0	35	39.8	16.8
60	29.8	25.0	15	19.6	34.2

Gleichstromschaltung

$\vartheta'_1$	$\vartheta''_1$	$\Delta T_a$	$\Delta T_b$	$\Delta T_{LM}$	A
120	89.6	115	45	74.6	9.0
100	69.6	95	25	52.4	12.8
80	49.8	75	5.0	25.9	25.9
60	29.8	55	Nur mit Gegenstromschaltung möglich!		

Eine Eintrittstemperatur der Luft von 60°C ist nur mit einer Gegenstromschaltung möglich. Bei der Gleichstromschaltung müsste die Austrittstemperatur der Luft tiefer sein als die Austrittstemperatur des Wassers.

Diskutieren Sie die Resultate!

**Beispiel 8.21: Heisse Milch rasch abkühlen.** In einem Doppelrohr-WÜ wird Milch von 100°C auf 60°C abgekühlt, indem ein gleicher Massenstrom von 5°C aufgewärmt wird. Es gelten gleiche und konstante  $c_p$ -Werte.

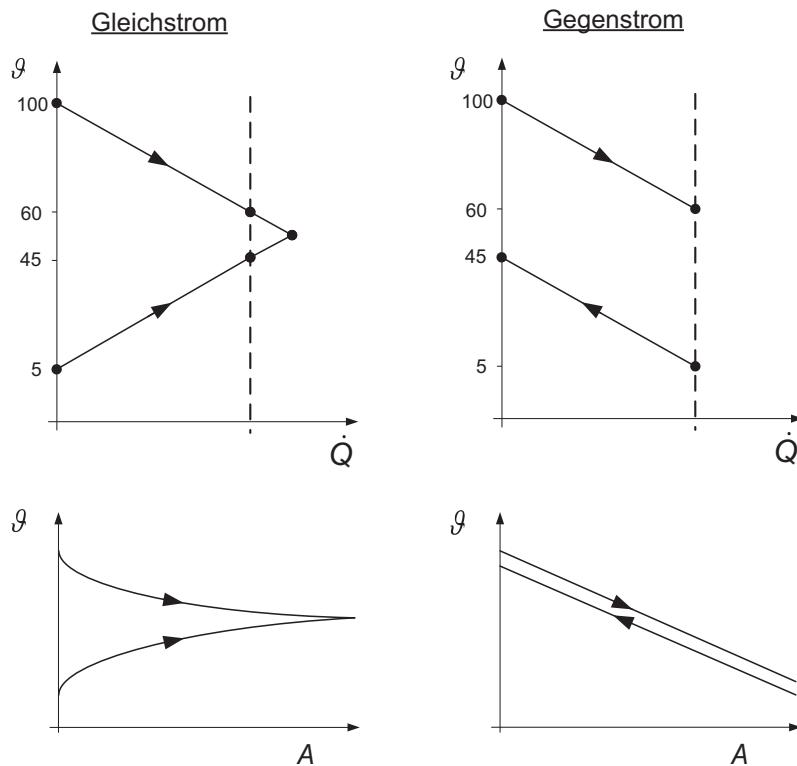
Nach der Beantwortung folgender Fragen wählen Sie hierfür die Schaltung; Kriterium: Rasche Abkühlung der Milch um den Vitamingehalt zu erhalten.

- Zeichnen Sie ein  $\vartheta, \dot{Q}$ -Diagramm für Gleich- und Gegenstrom
- Zeichnen Sie obigen Sachverhalt für beide Schaltungen in ein  $\vartheta, A$ -Diagramm und bezeichnen Sie darin  $\Delta T_{max}$  und  $\Delta T_{min}$ .
- Wie wird der Temperaturverlauf der beiden Ströme für die beiden Schaltungen im  $\vartheta, \dot{Q}$ -Diagramm und  $\vartheta, A$ -Diagramm, falls die beiden Wärmeübertrager-Flächen unendlich gross wären?

Bei der Gleichstromschaltung ist der Temperaturunterschied am Eintritt der zu kühlenden Milch 95°C, bei der Gegenstromschaltung nur 55°C. Die Gleichstromschaltung führt zu einer rascheren Abkühlung der Milch.

Darstellung in einem  $\vartheta, \dot{Q}$ -Diagramm und  $\vartheta, A$ -Diagramm:

- Gleichstrom Gegenstrom
- Gleichstrom Gegenstrom
- Für eine unendlich grosse Wärmeübertragerfläche

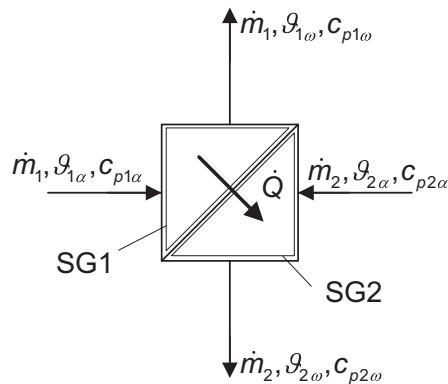


## 8.8 NTU-E

(Number of Transfer Units - Effectiveness)

Im vorherigen Kapitel wurden Gleich- und Gegenstromschaltungen von Wärmeübertragern betrachtet. In der Praxis liegen oftmals keine genauen Angaben wie zum Beispiel Durchgangskoeffizienten  $k$  und Flächenangaben  $A$  vor. Mit der NTU-Methode können je nach Betriebscharakteristik des Wärmeübertragers diese Werte auf einfache Weise ermittelt, oder basierend auf  $k$  und  $A$  der Wärmeübertrager ausgelegt werden. Dadurch sind Auslegungen komplexer Schaltungen von Wärmeübertragern mit wenig Aufwand möglich.

### 8.8.1 Energiebilanz eines Wärmeübertragers



Wird der erste Hauptsatz auf die eingezeichnete Systemgrenze SG1 angewendet, gilt bei Vernachlässigung der Änderung der kinetischen und potenziellen Energie die folgende Energiebilanz (Ein = Aus) bei Annahme eines verlustfreien Apparates:

$$\dot{m}_1 c_{p1\alpha} \vartheta_{1\alpha} = \dot{m}_1 c_{p1\omega} \vartheta_{1\omega} + \dot{Q}$$

Für eine konstante spezifische Wärmekapazität ( $c_{p1\alpha} = c_{p1\omega} = c_p$ ) gilt:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_p (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}) = C P_1 (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega})$$

Mit  $C P_1$  wird der Wärmekapazitätsstrom bezeichnet ( $C P_1 = c_p \dot{m}_1$ ).

Analog gilt für die Systemgrenze SG2 folgende Energiebilanz:

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 c_{p2} (\vartheta_{2\omega} - \vartheta_{2\alpha}) = C P_2 (\vartheta_{2\omega} - \vartheta_{2\alpha})$$

Werden die Gleichungen für Systemgrenze 1 und 2 zusammengefasst so gilt:

$$\frac{CP_1}{CP_2} = \frac{\vartheta_{2\omega} - \vartheta_{2\alpha}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}} = \frac{\Delta\vartheta_2}{\Delta\vartheta_1}$$

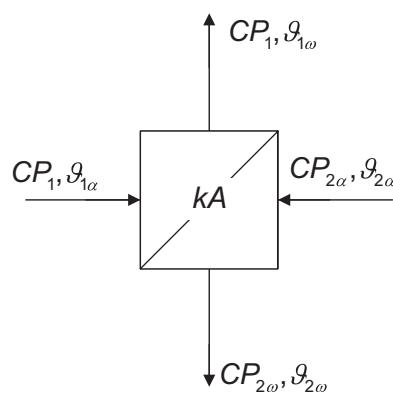
Die Temperaturänderungen der beiden Fluidströme sind durch den ersten Hauptsatz miteinander verknüpft, sie verhalten sich reziprok zum Verhältnis ihrer Wärmekapazitätströme.

### 8.8.2 Auslegung eines Wärmeübertragers mit der NTU-Methode

Im Folgenden wird die NTU-Methode zur Auslegung eines Wärmeübertragers betrachtet. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass das Vorgehen unabhängig vom Aufbau des Wärmeübertragers immer gleich ist. Die NTU-Methode ist also eine Art ‘Rezeptur‘ zur Auslegung und Berechnung von Wärmeübertragern.

### 8.8.3 Dimensionslose Kennzahlen

Zur Berechnung resp. Auslegung eines Wärmeübertragers muss man sich zuerst Gedanken über die massgebenden Einflussgrößen machen. Die Anzahl der Einflussgrößen kann durch Einführung von dimensionslosen Kennzahlen vermindert werden. In der folgenden Abbildung sind die bisher behandelten Größen schematisch abgebildet:



Die Wirksamkeit des Wärmeübertragers ist durch seine Übertragungsfähigkeit  $kA$  gegeben. Beide Stoffströme werden durch ihre Wärmekapazitätsströme  $CP_1$  und  $CP_2$ , ihre Eintrittstemperaturen  $\vartheta_{1\alpha}$  und  $\vartheta_{2\alpha}$  und ihre Austrittstemperaturen  $\vartheta_{1\omega}$  und  $\vartheta_{2\omega}$  gekennzeichnet. Die Einflussgrößen werden nun durch Einführung von drei dimensionslosen Kennzahlen reduziert:

1. Dimensionslose Temperaturänderung:

$$P_1 = \frac{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}} \text{ und } P_2 = \frac{\vartheta_{2\omega} - \vartheta_{2\alpha}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}}$$

Im Nenner steht jeweils die maximale Temperaturdifferenz die im System vorliegt.  $P_i$  ist somit immer  $< 1$  und ein Mass dafür “wieviel“ von einem treibenden Potential genutzt werden kann. Die Dimensionslose Temperaturänderung wird auch als **Rückwärme-** oder **Rückkühlzahl** bezeichnet.

2. Dimensionslose Übertragungsfähigkeit:

$$NTU_1 = \frac{kA}{CP_1} \text{ und } NTU_2 = \frac{kA}{CP_2}$$

$NTU$  bezeichnet in der amerikanischen Literatur die Number of Transfer Unit. In deutscher Literatur wird auch der Begriff **dimensionslose Übertragungsfähigkeit** verwendet.

3. Verhältnis der Wärmekapazitätsströme:

$$R_1 = \frac{CP_1}{CP_2} \text{ und } R_2 = \frac{CP_2}{CP_1}$$

Die drei Kennzahlen ( $NTU$ ,  $P$  und  $R$ ) sind nicht unabhängig voneinander, sondern sie sind über die sog. **“Betriebscharakteristik eines Wärmeübertragers“** miteinander gekoppelt. Sind zwei Kennzahlen gegeben, kann die dritte Kennzahl, sofern die Betriebscharakteristik (Gleichung oder Diagramm) bekannt ist, bestimmt werden.

### 8.8.4 Betriebscharakteristiken

Betriebscharakteristiken von verschiedenen Wärmeübertragern können durch detaillierte Analyse des Temperaturverlaufes der beiden Fluiden berechnet werden. Die Betriebscharakteristiken sind abhängig von der Stromführung und dem Aufbau des Wärmeübertragers.

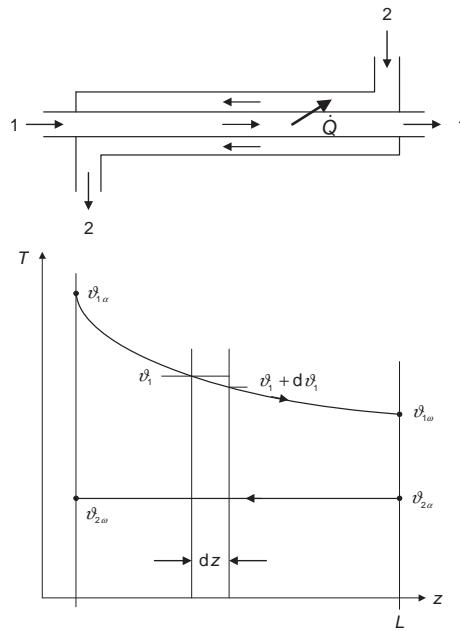
Zu den einfachen Bauformen eines Wärmeübertrager gehörten die Doppelrohr-Wärmeübertrager. In einem solchen Wärmeübertrager werden zwei Rohre in der Regel konzentrisch angeordnet. Das eine Fluid strömt im Innenrohr, das andere Fluid strömt im ringförmigen Raum zwischen Innenrohr und Mantelrohr. Offensichtlich sind zwei Stromführungen möglich: Gegenstrom, bei welchem die beiden Fluide in Gegenrichtung strömen und Gleichstrom, bei welchem die beiden Fluide in die gleiche Richtung strömen.

#### Doppelrohrwärmeübertrager mit konstanter Wandtemperatur:

Wir wollen nun für den Doppelrohrwärmeübertrager die Gleichungen der Betriebscharakteristik herleiten. Das heißt, wir suchen mathematische Beziehungen zwischen den einzelnen Kennzahlen:

$$P_i = f(NTU_i, R_i) \text{ oder } NTU_i = f(P_i, R_i)$$

Dazu betrachten wir zunächst den einfachsten Fall. Wir gehen davon aus, dass sich die Temperatur des kälteren Fluides entlang des Wärmeübertragers nicht ändert. Dieser Fall tritt zum Beispiel ein, wenn das kältere Fluid durch die Aufnahme der Wärme isobar verdampft und nicht überhitzt wird. In der Literatur wird diese Annahme oft als konstante Wandtemperatur bezeichnet. In diesem Fall sieht der Verlauf der Temperaturen entlang der Länge des Wärmeübertragers wie folgt aus:



Mit der Annahme konstanter Wandtemperatur gelten folgende Bedingungen:

- In jedem Querschnitt gilt  $\vartheta_1 > \vartheta_2$ , sofern mit  $\vartheta_2$  die Temperatur des kälteren Fluids bezeichnet wird.
- Die Temperatur  $\vartheta_1$  hängt von der Koordinate  $z$  in Strömungsrichtung des Fluids 1 ab.
- Für die dimensionslose Temperaturänderung des kälteren Stoffstromes gilt:  $P_2 = 0$
- Der Wärmekapazitätsstrom des kälteren Fluides strebt gegen einen unendlich hohen Wert zu (Isobare Verdampfung).
- Daraus folgt:  $R_1 = 0$  und  $R_2 = \infty$

Die Bestimmung der Betriebscharakteristik vereinfacht sich so, da nur noch der Zusammenhang zwischen zwei Kennzahlen, nämlich  $NTU_1$  und  $P_1$ , zu definieren ist.

Wir wollen nun diesen Zusammenhang herleiten:

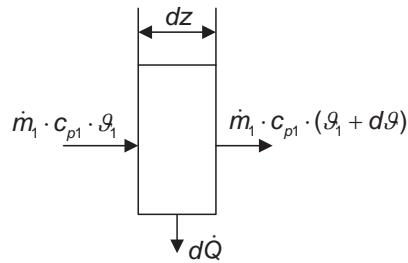
Der durch das Flächenstück  $dA$  übertragene Wärmestrom  $d\dot{Q}$  kann wie folgt beschrieben werden:

$$d\dot{Q} = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)dA = kA(\vartheta_1 - \vartheta_2)\frac{dz}{L}$$

Aus der Energiebilanz wissen wir, dass für den zu übertragenen Wärmestrom gilt:

$$d\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p1} (\vartheta_1 - (\vartheta_1 + d\vartheta_1)) = -CP_1(d\vartheta_1)$$

Nun werden die beiden vorherigen Gleichungen gleichgestellt. Für die Änderung der Fluidtemperatur des wärmeren Fluidstromes gilt dann:



$$d\vartheta_1 = -\frac{kA}{CP_1}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \frac{dz}{L} = -NTU_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) \frac{dz}{L}$$

Durch Division mit  $\vartheta_1 - \vartheta_2$  erhalten wir:

$$\frac{d(\vartheta_1)}{\vartheta_1 - \vartheta_2} = -NTU_1 \frac{dz}{L}$$

Nun wird die Integration von  $z = 0$  bis  $z = L$  durchgeführt:

Beachte:  $\vartheta_2 = const$  ;  $\vartheta_1 = f(z)$

$$\int_{\vartheta_{1\alpha}}^{\vartheta_{1\omega}} \frac{d(\vartheta_1)}{\vartheta_1 - \vartheta_2} = \int_{z=0}^{z=L} -NTU_1 \frac{dz}{L}$$

Daraus kann die folgende Gleichung ermittelt werden:

$$\ln \frac{\vartheta_{1\omega} - \vartheta_2}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_2} = -NTU_1 \underbrace{\frac{L - 0}{L}}_1$$

Es gilt weiter:

$$\vartheta_{1\omega} - \vartheta_2 = \vartheta_{1\alpha} - \vartheta_2 - (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega})$$

Durch das Umschreiben der Temperaturdifferenzen kann die Gleichung der Betriebscharakteristik bestimmt werden:

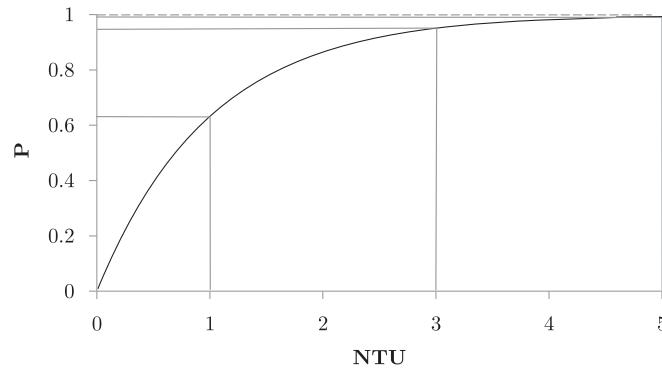
$$-\ln(1 - P_1) = NTU_1$$

Umgestellt nach der dimensionslosen Temperaturannäherung:

$$P_1 = 1 - e^{-NTU_1}$$

Wir haben nun also die einfache Gleichungen der Betriebscharakteristik für einen Doppelrohrwärmeübertrager definiert, wobei wir den einfachen Fall angenommen haben,

dass die eine Wandtemperatur konstant bleibt. Der Zusammenhang zwischen  $NTU$  und  $P$  ist im Folgenden grafisch dargestellt:



$NTU$	$P$	Bedeutung
1	0.64	64% der möglichen Übertragungsleistung
3	0.95	95% der möglichen Übertragungsleistung
5	0.99	99% der möglichen Übertragungsleistung

Ein Wärmeübertrager nach vorgängiger Schaltung mit  $NTU = 5$  ermöglicht eine nahezu vollständige Abkühlung. Möglicherweise ist dies aber keine wirtschaftliche Lösung, da die Fläche "relativ" gross ist.

zur Erinnerung:  $NTU = \frac{kA}{CP_1}$

Ganz sicher macht es keinen Sinn den Apparat mit  $NTU > 5$  auszulegen.

Nach dem gleichen Vorgehen können die Gleichungen der Betriebscharakteristik für einen Doppelrohr-Wärmeübertrager bei Gleichstromschaltung oder Gegenstromschaltung definiert werden, für den Fall, dass keine der beiden Temperaturen entlang des Wärmeübertragers konstant bleibt oder  $R \neq 0$  ist. Auf die Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet (siehe Wärmeatlas).

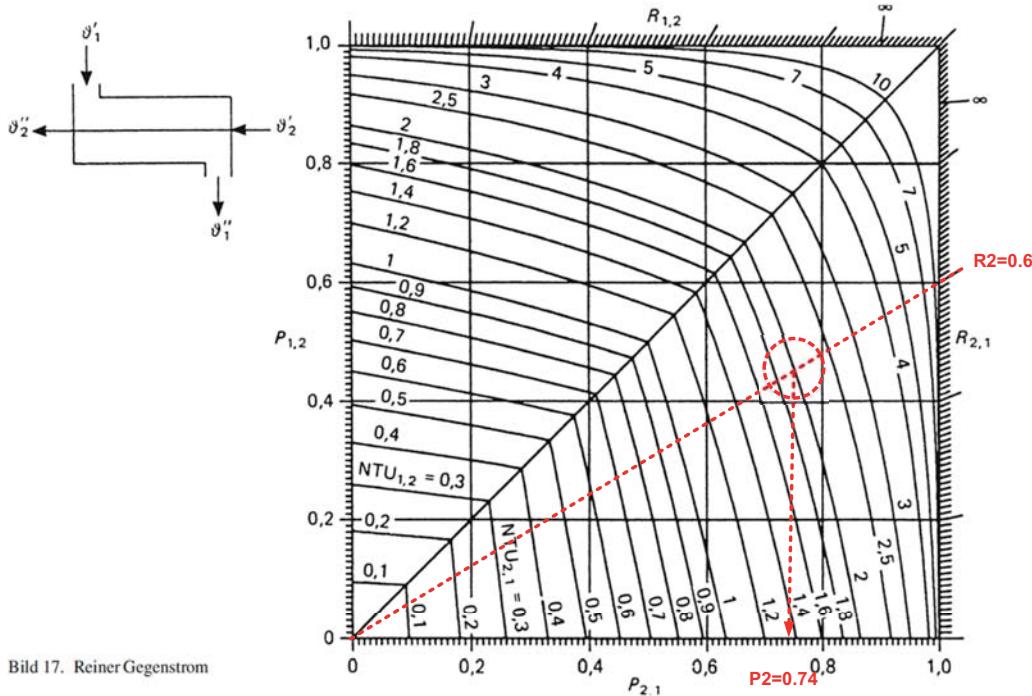
Für den Doppelrohr-Wärmeübertrager mit **Gegenstromführung** sind die Gleichungen der Betriebscharakteristik wie folgt definiert:

$$P_i = \frac{1 - e^{(R_i - 1)NTU_i}}{1 - R_i e^{(R_i - 1)NTU_i}}$$

$$\text{oder umgestellt: } NTU_i = \frac{1}{1 - R_i} \ln \left( \frac{1 - R_i P_i}{1 - P_i} \right)$$

Die Betriebscharakteristik wird oft auch in Diagrammen dargestellt. In der folgenden

Abbildung ist die Betriebscharakteristik für Gegenstromführung dargestellt.



Auf den Koordinatenachsen sind die dimensionlosen Temperaturänderungen  $P_1$  und  $P_2$  der Stoffströme 1 und 2 aufgetragen. Auf dem Randmassstab oben und unten sind die Wärmekapazitätsstromverhältnisse  $R_1$  und  $R_2$  (0 bis 1) aufgetragen.  $NTU_1$  und  $NTU_2$  sind als Kurvenscharen eingetragen. Sind zwei dimensionslose Kennzahlen gegeben, kann die dritte dimensionslose Kennzahl grafisch bestimmt werden.

Beispiel:

$$R_2 = 0.6 \quad (R_1 = \frac{1}{0.6} \text{ ist nicht ablesbar})$$

$$NTU_2 = 2$$

Vorgehen:  $R_2$  mit Ursprung verbinden,  $NTU$ -Linie Verfolgen und Schnittpunkt senkrecht auf die Abszisse abtragen. Aus dem Diagramm kann anschliessend  $P_2 = 0.74$  abgelesen werden.

### Doppelrohrwärmeübertrager mit Gleichstromführung:

Für den Doppelrohr-Wärmeübertrager mit **Gleichstromführung** sind die Gleichungen der Betriebscharakteristik nachfolgend definiert. Es wird hier ebenfalls auf die Herleitung verzichtet.

$$P_i = \frac{1 - e^{-(1+R_i)NTU_i}}{1 + R_i}$$

$$NTU_i = \frac{-\ln(1 - P_i(1 + R_i))}{1 + R_i}$$

In der folgenden Abbildung ist die Betriebscharakteristik für Gleichstromführung dargestellt:

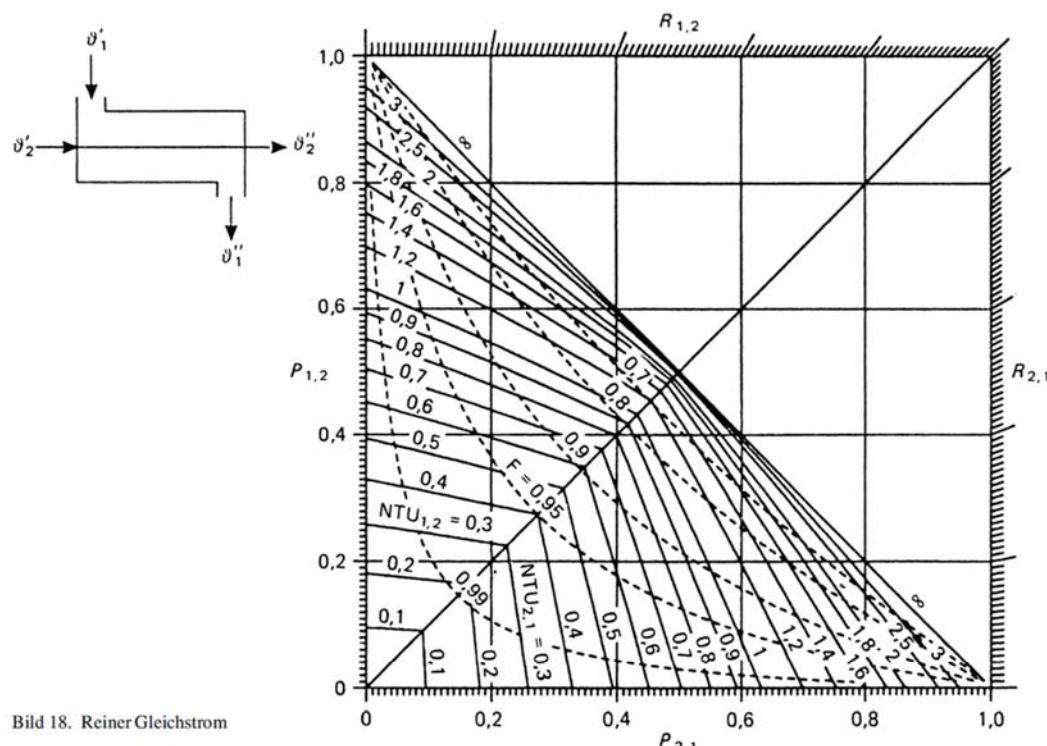


Bild 18. Reiner Gleichstrom

Bei Gegenstromführung treten die beiden Fluide an verschiedenen Enden des Wärmeübertragers aus. Deswegen kann die Austrittstemperatur  $\vartheta_{2\omega}$  grösser sein als die Austrittstemperatur  $\vartheta_{1\omega}$ . Eine derartige Erwärmung des kalten Fluids kann mit der Gleichstromschaltung nicht erreicht werden. Dies ist also ein Nachteil der Gleichstromschaltung gegenüber der Gegenstromschaltung. Bei der Gleichstromschaltung ist eine vorgegebene Temperaturänderung nämlich nur möglich, wenn in der Gleichung der Gleichstromführung das Argument des Logarithmus positiv ist. Es muss also gelten:

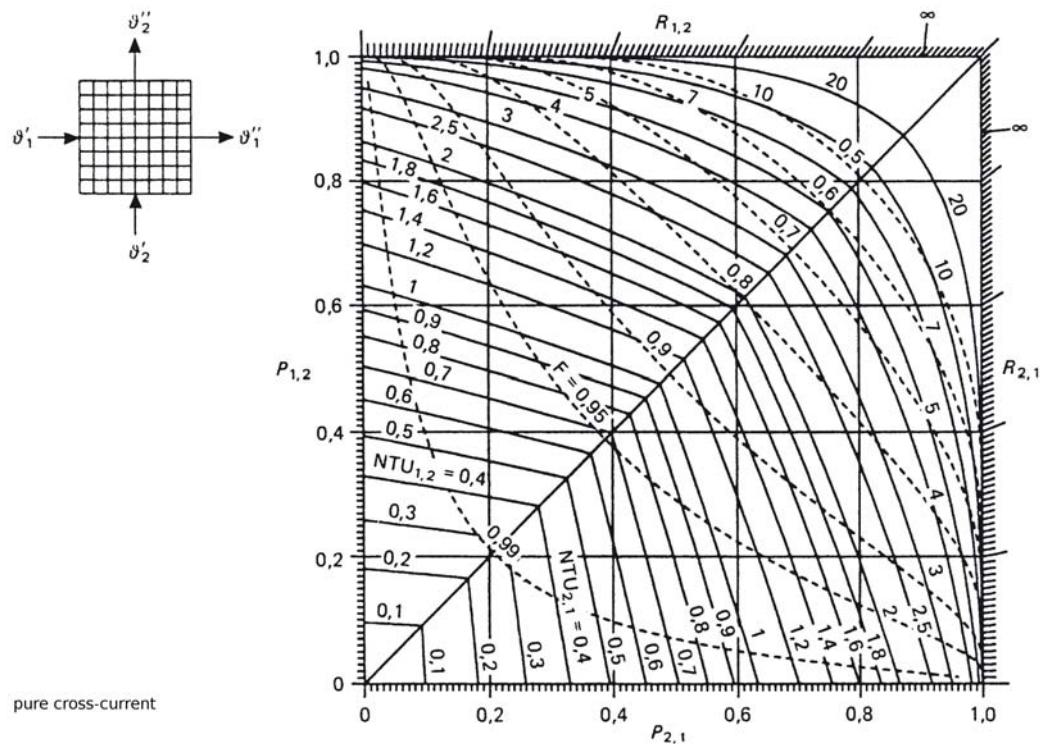
$$(1 - P_i(1 + R_i)) > 0$$

Dies ist aber nur, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$P_i < \frac{1}{1+R}$$

Die Temperaturannäherung ist bei Gleichstromschaltung deshalb eingeschränkt.

3 weitere Beispiele für *NTU*-Diagramme:



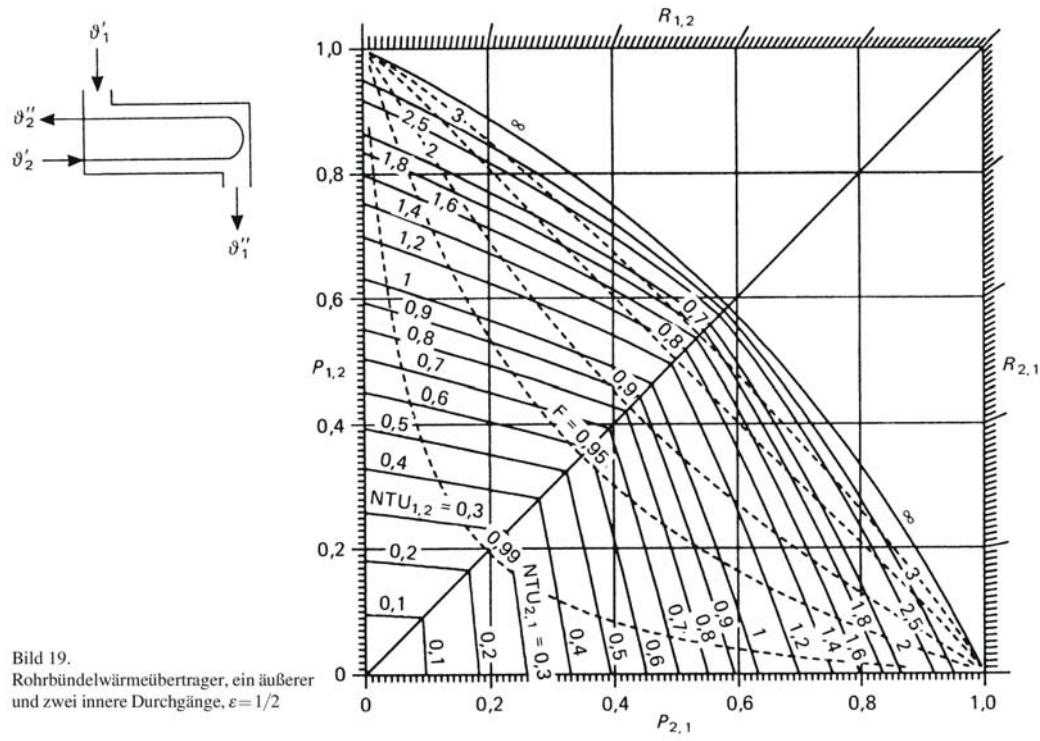


Bild 19.  
Rohrbündelwärmeübertrager, ein äußerer und zwei innere Durchgänge,  $\varepsilon = 1/2$

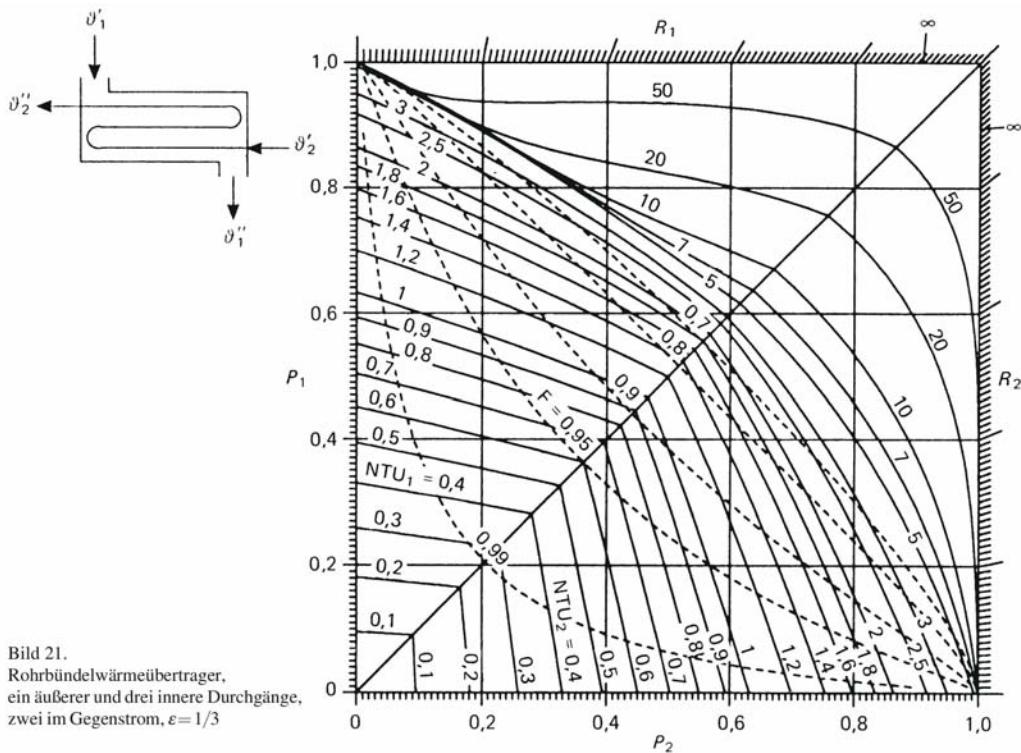


Bild 21.  
Rohrbündelwärmeübertrager,  
ein äußerer und drei innere Durchgänge,  
zwei im Gegenstrom,  $\varepsilon = 1/3$

### 8.8.5 Auslegung

Durch die Einführung der dimensionslosen Kennzahlen können nun Wärmeübertrager einfach ausgelegt werden. Bei der Auslegung von Wärmeübertragern treten zwei Typen von Fragestellungen auf:

#### Fall A: (Leistung eines gegebenen Wärmeübertragers)

Gegeben ist der Wärmeübertrager und seine Übertragungsfähigkeit  $kA$ . Ebenfalls liegen die Eintrittstemperaturen oder zumindest die Differenz der Eintrittstemperaturen ( $\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}$ ) und die Wärmekapazitätsströme  $CP_1$  und  $CP_2$  vor. Mit den gegebenen Größen lassen sich die Kennzahlen  $NTU_1$  und  $R_1$  berechnen. Wenn die Betriebscharakteristik bekannt ist, kann damit  $P_1$  und daraus die Leistung des Wärmeübertragers berechnet werden. Das Vorgehen kann folgendermassen zusammengefasst werden (die gesuchten Größen sind gestrichelt markiert):

Ges:  $\vartheta_{1\omega}, \vartheta_{2\omega}$  und  $\dot{Q}$

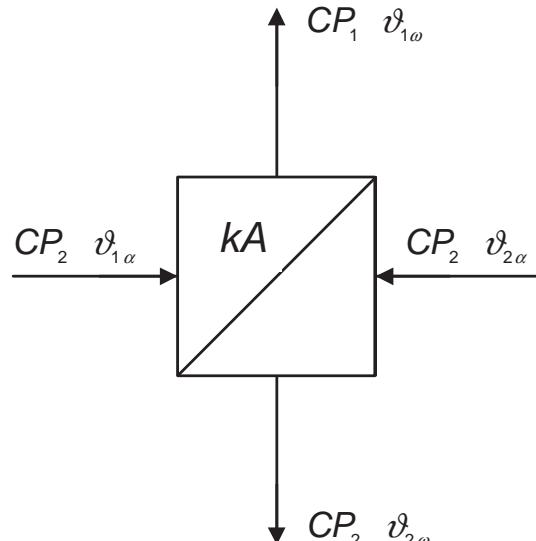
Geg:  $kA, (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}), CP_1, CP_2$

Daraus berechnen:  $R_i, NTU_i$

Über Betriebscharakteristik Berechnen:  $P_i$

Daraus berechnen:  $\vartheta_{1\omega}, \vartheta_{2\omega}$

Energiebilanz:  $\dot{Q}$



#### Fall B: (Dimensionierung für eine geforderte Leistung)

Für die Auslegung wird die Übertragungsfähigkeit  $kA$  für eine bestimmte Leistung gesucht. Ebenfalls liegen die Eintrittstemperaturen und die Wärmekapazitätsströme  $CP_1$  und  $CP_2$  vor. Da die Leistung vorgegeben ist, lassen sich die Austrittstemperaturen über die Energiebilanz bestimmen. Mit den gegebenen Größen können die Kennzahlen  $P_1$  und  $R_1$  berechnet werden. Wenn die Betriebscharakteristik bekannt ist, kann damit  $NTU_1$  und somit die Übertragungsfähigkeit  $kA$  berechnet werden. Daraus kann wiederum die Fläche  $A$  des Wärmeübertragers berechnet werden. Das Vorgehen kann folgendermassen zusammengefasst werden (die gesuchten Größen sind gestrichelt markiert):

Ges:  $A$

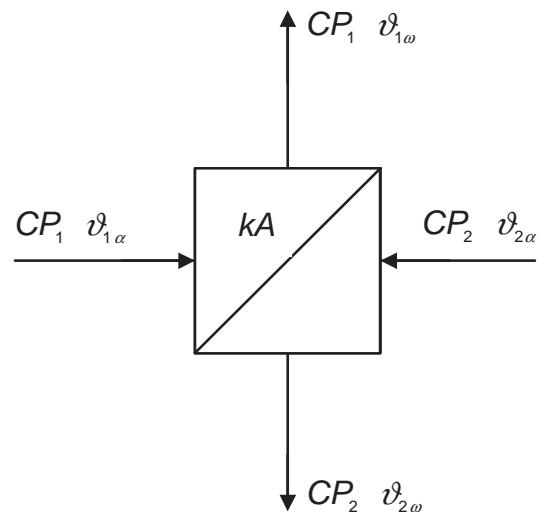
Geg:  $\dot{Q}, \vartheta_{1\alpha}, \vartheta_{2\alpha}, CP_1, CP_2$

Aus Energiebilanz:  $\vartheta_{1\omega}, \vartheta_{2\omega}$

Daraus Berechnen:  $R_i, P_i$

Über Betriebscharakteristik berechnen:  $NTU_1$

Daraus berechnen:  $kA, k, A$



Beide Aufgaben können also gelöst werden, sofern die Betriebscharakteristik des Wärmeübertragers vorliegt. Der Vorteil der NTU-Methode liegt darin, dass mit diesem Konzept verschiedene Arten von Wärmeübertragern mit dem gleichen Vorgehen ausgelegt werden können. Dazu werden lediglich die Gleichungen der Betriebscharakteristiken benötigt. Im VDI-Wärmeatlas sind die Gleichungen der Betriebscharakteristiken von über 40 verschiedenen Wärmeübertragerbauarten und Stromführungen aufgeführt. Nur für einige wenige Stromführungen, für die keine geschlossenen Gleichungen bekannt sind, wurden numerische iterative Methoden verwendet.

**Beispiel 8.22: Gegenstromwärmeübertrager (NTU-E-Methode).** Zum besseren Verständnis wird die NTU-E-Methode anhand eines Beispiels dargestellt.

Heisse Abgase werden genutzt, um Druckwasser aufzuheizen. Die Wärme soll dabei mit einem vorhandenen Rippenrohr im Gegenstrom übertragen werden. Die Wärmeübertragungsfläche des Rippenrohrs beträgt  $40 \text{ m}^2$ .

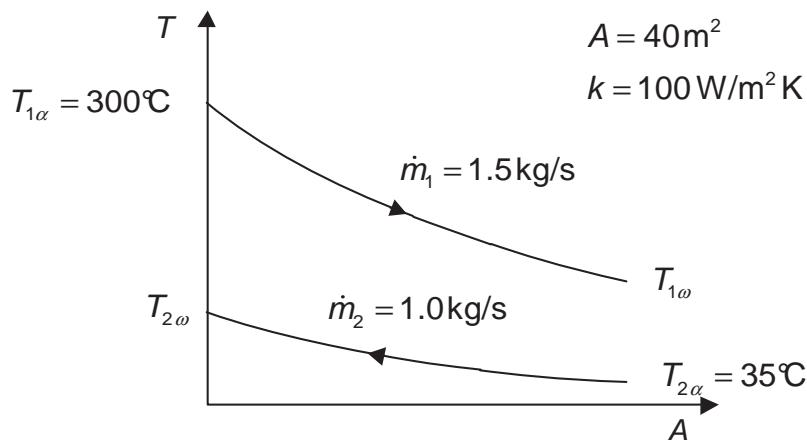
Der Abgasstrom fliesst mit  $1.5 \text{ kg/s}$  und tritt mit  $300^\circ\text{C}$  in den Wärmeübertrager ein. Das Wasser fliesst mit  $1 \text{ kg/s}$  und hat eine spezifische Wärmekapazität von  $4197 \text{ J/kg K}$ . Die Eintrittstemperatur des Wassers beträgt  $35^\circ\text{C}$ .

Die spezifische Wärmekapazität der Abgase ist ungefähr  $1000 \text{ J/kg K}$  und der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  liegt bei  $100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .

Bestimmen Sie den übertragenen Wärmestrom und die Austrittstemperaturen der beiden Ströme mit Hilfe der NTU-E-Methode!

Gegeben:  $\vartheta_{1\alpha}, \vartheta_{2\alpha}, A, k$

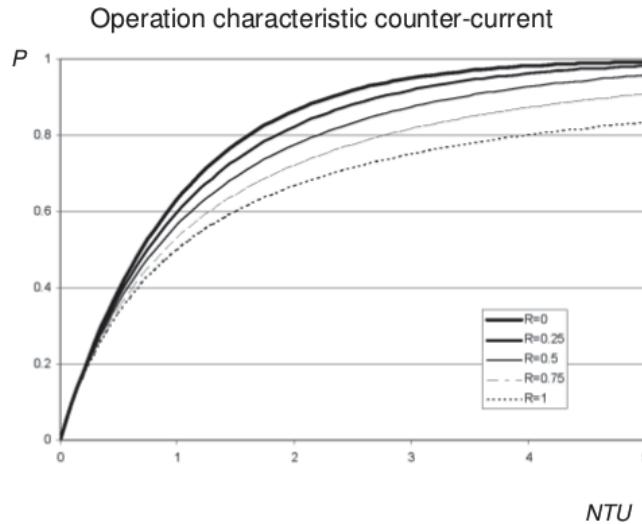
Gesucht:  $\dot{Q}, \vartheta_{1\omega}, \vartheta_{2\omega}$



#### Annahmen:

- keine Wärmeverluste an die Umgebung
- Änderungen der kinetischen und potenziellen Energie sind vernachlässigbar
- Stoffeigenschaften bleiben konstant

**Vorgabe:**



**Lösung:**

$$\dot{m}_1 c_{p1} = 1'500 \text{ W/K} = CP_1$$

$$\dot{m}_2 c_{p2} = 4'197 \text{ W/K} = CP_2$$

wodurch

$$R_1 = \frac{CP_1}{CP_2} = 0.357$$

Die bezogene Übertragungsfähigkeit für Fluidstrom 1 beträgt:

$$NTU_1 = \frac{k A}{CP_1} = 2.67$$

Aus dem Diagramm der Betriebscharakteristik Gegenstrom ergibt sich daraus eine Rückwärmezahl  $P \approx 0.88$  und der maximal möglich übertragbare Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{max} = CP_1 (\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}) = 397.5 \text{ kW}$$

Der tatsächlich übertragene Wärmestrom beträgt:

$$\dot{Q}_1 = P_1 \dot{Q}_{max} = 349.8 \text{ kW}$$

Es ist nun einfach, die Austrittstemperatur der beiden Ströme aus den Leistungsbilanzen zu bestimmen:

$$\vartheta_{1\omega} = \vartheta_{1\alpha} - \frac{\dot{Q}_1}{\dot{m}_1 c_{p1}} = 66.7^\circ\text{C}$$

und

$$\vartheta_{2\omega} = \vartheta_{2\alpha} + \frac{\dot{Q}_1}{\dot{m}_2 c_{p2}} = 118.4^\circ\text{C}$$

**Beispiel 8.23: Doppelrohrwärmeübertrager (NTU-E-Methode).**

- a. Ein Wassermassenstrom von 0.2 kg/s soll von 10°C soll mit einem Doppelrohrwärmeübertrager auf eine möglichst hohe Temperatur erwärmt werden. Dazu soll ein Abluftstrom von 0.5 kg/s und einer Temperatur von 80°C verwendet werden. Ihnen steht ein Wärmeübertrager mit einer Fläche von 30 m<sup>2</sup> zur Verfügung. Es ist nun ihre Aufgabe zu bestimmen, ob dafür eine Gegenstromführung oder eine Gleichstromführung verwendet werden soll.

Folgende Stoffeigenschaften sind bekannt:

$$c_{p_{Luft}} = 1.004 \text{ kJ/kgK} \text{ und } c_{p_{Wasser}} = 4.19 \text{ kJ/kgK}$$

Für den Wärmedurchgangskoeffizienten können Sie in erster Annäherung einen Wert von  $k = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$  annehmen. Zeichnen Sie qualitativ die resultierenden  $T - A$  Diagramme, sowohl für Gegenstrom, als auch für Gleichstrom.

$$\text{Gegenstrom: } P_i = \frac{1 - e^{(R_i - 1)NTU_i}}{1 - R_i e^{(R_i - 1)NTU_i}} \quad \text{Gleichstrom: } P_i = \frac{1 - e^{-(1 + R_i)NTU_i}}{1 + R_i}$$

**Lösung:**

- a. Temperaturen:

$$\begin{aligned} \vartheta_{1\alpha} &= 80^\circ\text{C} & ; & \quad \vartheta_{2\alpha} = 10^\circ\text{C} \\ \vartheta_{1\omega} &=? & ; & \quad \vartheta_{2\omega}=? \end{aligned}$$

Massenströme:

$$\dot{m}_1 = 0.5 \text{ kg/s} \quad ; \quad \dot{m}_2 = 0.2 \text{ kg/s}$$

Wärmeübertrager:

$$k = 50 \text{ W/m}^2\text{K} \quad ; \quad A = 30 \text{ m}^2$$

Stoffeigenschaften:

$$c_{p_{Wasser}} = 4190 \text{ J/kgK} \quad ; \quad c_{p_{Luft}} = 1004 \text{ J/kgK}$$

Wärmekapazitätsströme:

$$CP_1 = 502 \text{ W/K} \quad ; \quad CP_2 = 838 \text{ W/K}$$

Dimensionslose Kennzahlen:

$$R_1 = 0.60 \quad ; \quad R_2 = 1.67$$

$$NTU_1 = 2.99 \quad ; \quad NTU_2 = 1.79$$

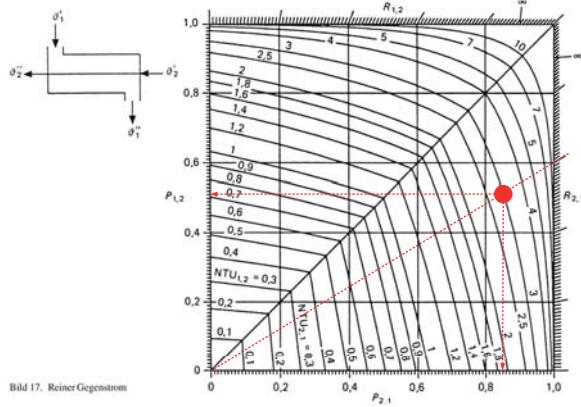


Bild 17. Reiner Gegenstrom

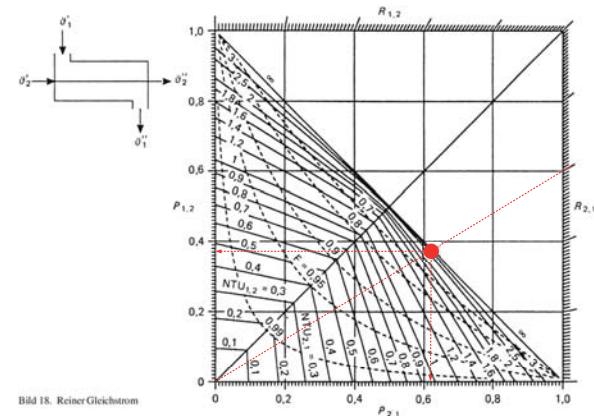


Bild 18. Reiner Gleichstrom

Die Werte  $P_i$  für Gegenstrom und Gleichstrom können numerisch mit den angegebenen Formeln berechnet oder aus den Diagrammen herausgelesen werden.

Gegenstrom:

$$P_1 = 0.85 \quad ; \quad P_2 = 0.51$$

Gleichstrom:

$$P_1 = 0.62 \quad ; \quad P_2 = 0.37$$

Austrittstemperaturen Gegenstrom:

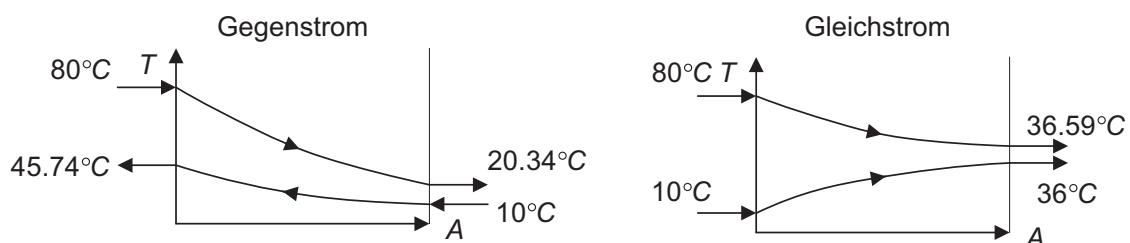
$$\vartheta_{1\omega} = 20.34^\circ\text{C} \quad ; \quad \vartheta_{2\omega} = 45.74^\circ\text{C}$$

Austrittstemperaturen Gleichstrom:

$$\vartheta_{1\omega} = 36.59^\circ\text{C} \quad ; \quad \vartheta_{2\omega} = 36.00^\circ\text{C}$$

Leistungen:

$$\dot{Q}_{\text{Gegenstrom}} = 29.95 \text{ kW} \quad ; \quad \dot{Q}_{\text{Gleichstrom}} = 21.79 \text{ kW}$$

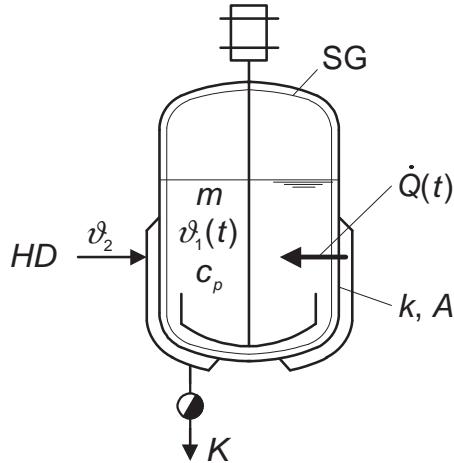


**Beispiel 8.24: Aufwärmen eines Behälters.**

Ein Rührkessel ist mit 500 Liter Wasser gefüllt. Das Wasser wurde vom Grundwassernetz mit einer Temperatur von 10°C bezogen. Durch Heissdampf eines parallel laufenden Prozesses fällt Heissdampf an welcher genutzt wird. Der Heissdampf kondensiert im Doppelmantel des Rührkessels unter Druck bei einer konstanten Temperatur von 120°C und heizt das Wasser auf. Das Wasser soll für diese Charge auf knapp 120°C erhitzt werden.

Annahmen: Die Temperatur im Inneren des Kessels wird durch das Rührwerk gleichmässig verteilt. Das Wasser hat eine spezifische Wärmekapazität von  $c_p = 4.18 \text{ kJ/kgK}$  und die Dichte beträgt  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

- Zeichnen Sie den Temperaturverlauf über die Zeit auf.
- Berechnen Sie  $kA$ .
- Berechnen Sie die Relaxationszeit und stellen Sie diese grafisch dar.



**Lösung:**

Energiebilanz:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{E}_{\alpha} - \sum_{\omega} \dot{E}_{\omega}$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}(t)$$

$$\frac{d}{dt} (m c_p \vartheta_1(t)) = kA (\vartheta_2 - \vartheta_1(t))$$

$$m c_p \frac{d\vartheta_1}{dt} = kA (\vartheta_2 - \vartheta_1(t))$$

$$\frac{kA}{m c_p} dt = \frac{d\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1(t)}$$

$$-\frac{kA}{m c_p} dt = \frac{d\vartheta_1}{\vartheta_1(t) - \vartheta_2}$$

$$\int_{t=0}^t -\frac{kA}{m c_p} dt = \int_{\vartheta_1(t=0)}^{\vartheta_1(t)} \frac{d\vartheta_1}{\vartheta_1(t) - \vartheta_2}$$

$$-\frac{kA}{m c_p} t = \ln \frac{\vartheta_{1\omega} - \vartheta_2}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_2}$$

mit     $\Theta = \frac{\vartheta_{1\omega} - \vartheta_2}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_2}$

$$-\frac{kA}{m c_p} t = \ln \Theta$$

zur Erinnerung:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{kA}{m c_p} t \quad [-]$$

zum Vergleich:

$$\frac{kA}{m c_p} = NTU \quad [-] ; \quad \dot{m} = \frac{dm}{dt} \hat{=} \frac{m}{\tau}$$

Dies führt zu:

$$\begin{aligned} -\frac{t}{\tau} &= \ln \Theta \\ \Theta &= e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{kA}{m c_p} t} \end{aligned}$$

Beziehung Zwischen  $P$  und  $\Theta$ :

$$P = \frac{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}} \quad ; \quad \Theta = \frac{\vartheta_{1\omega} - \vartheta_2}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_2} \quad (\text{hier: } \vartheta_2 = \vartheta_{2\alpha} = \text{konstant})$$

Mit  $+\vartheta_{2\alpha} - \vartheta_{2\alpha}$  Erweitern:

$$P = \frac{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{1\omega} + \vartheta_{2\alpha} - \vartheta_{2\alpha}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}}$$

$$P = \underbrace{\frac{\vartheta_{2\alpha} - \vartheta_{1\omega}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}}}_{-\Theta} + \underbrace{\frac{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}}{\vartheta_{1\alpha} - \vartheta_{2\alpha}}}_1$$

$$P = 1 - \Theta$$

$$P = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{kA}{m c_p} t}$$

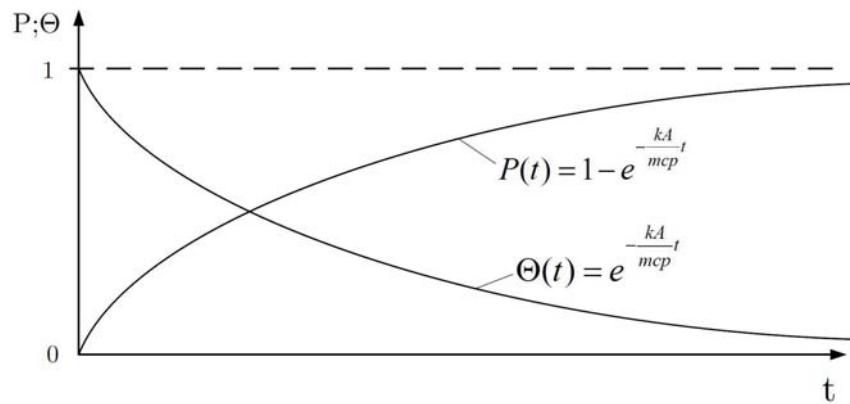
$\Rightarrow$  Vorgang zu 99% abgeschlossen bei  $\frac{t}{\tau} \geq 5$  (siehe auch S. 375)

$\tau$  = Relaxationszeit in [s]

$$\tau = \frac{m c_p}{kA}$$

Folgende Erkenntnisse können mittels Relaxationszeit evaluiert werden:

Grosse thermische Masse  $\Rightarrow$  Trägheit  
Guter Wärmeübergang  $\Rightarrow$  schnelles Abklingenverhalten



Der Betriebsleiter teilt mit, dass nach etwa 45 min der Behälter vollständig aufgeheizt ist;  $\frac{t}{\tau} \geq 5$

$$\Rightarrow \tau = \frac{45 \cdot 60}{5} = 540 \text{ s}$$

Überschlägig berechnen Sie den Durchmesser des Behälters mit 0.9 m. Mit der Regel  $a = \frac{A}{V} = \frac{5}{D}$  und  $V = 0.5 \text{ m}^3$  ergibt sich für  $A$  ca.  $2.78 \text{ m}^2$

$$\Rightarrow k = \frac{mc_p}{A\tau} = \frac{500 \cdot 4180}{2.78 \cdot 540} = 1392 \text{ W/m}^2\text{K}$$

### 8.8.6 Temperaturdifferenzen bei komplexen Schaltungen - Korrekturfaktor $F_T$

In der Praxis hat man oft nicht "reine" Gegenstrom- oder Gleichstrom-Wärmeübertrager, sondern komplexere Schaltungen. In diesen Fällen wird die mittlere Temperaturdifferenz  $\Delta T_m$  für den reinen *Gegenstrom* mit dem Faktor  $F_T$  korrigiert:

$$\dot{Q} = k A \Delta T_m F_T \quad 0 < F_T < 1$$

$F_T$  ist wie  $NTU$  abhängig von den dimensionslosen Verhältnissen  $R$  und  $P$ :  $A = \frac{\dot{Q}}{k \Delta T_m F_T}$

$$F_T = f(R, P)$$

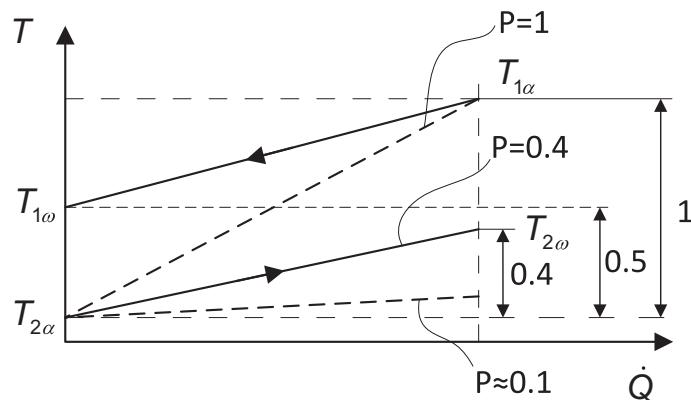
Verhältnis der Wärmekapazitätsströme  $R$ :

$$R = \frac{\dot{m} c_{p2}}{\dot{m} c_{p1}} = \frac{CP_2}{CP_1} = \frac{T_{1\alpha} - T_{1\omega}}{T_{2\omega} - T_{2\alpha}}$$

Rückwärmzahl  $P$  des kalten Fluids:

$$P_2 = \frac{T_{2\omega} - T_{2\alpha}}{T_{1\alpha} - T_{1\omega}} \leq 1$$

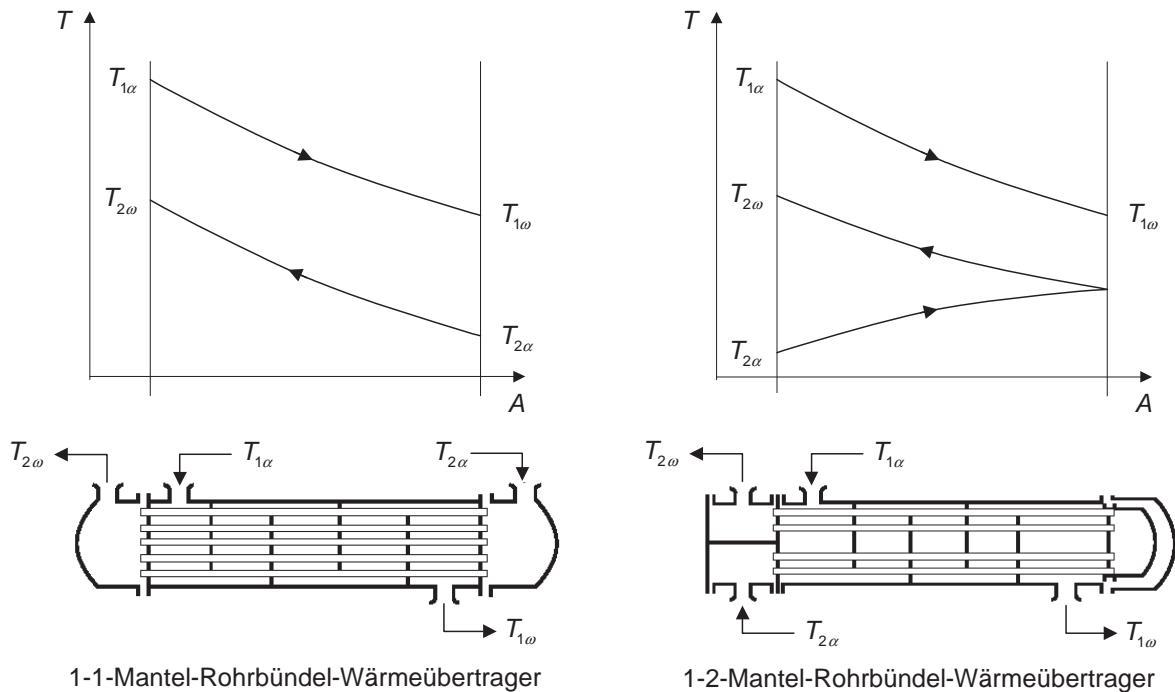
Zusammenhang zum  $T/\dot{Q}$ -Diagramm für  $R = 1$ , Gegenstrom und  $P = 0.4$ :



Hinweis: Sobald die Rückwärmzahl  $P$  bei  $R = 1$  den Wert 0.5 erreicht, entsteht Temperaturüberschneidung.

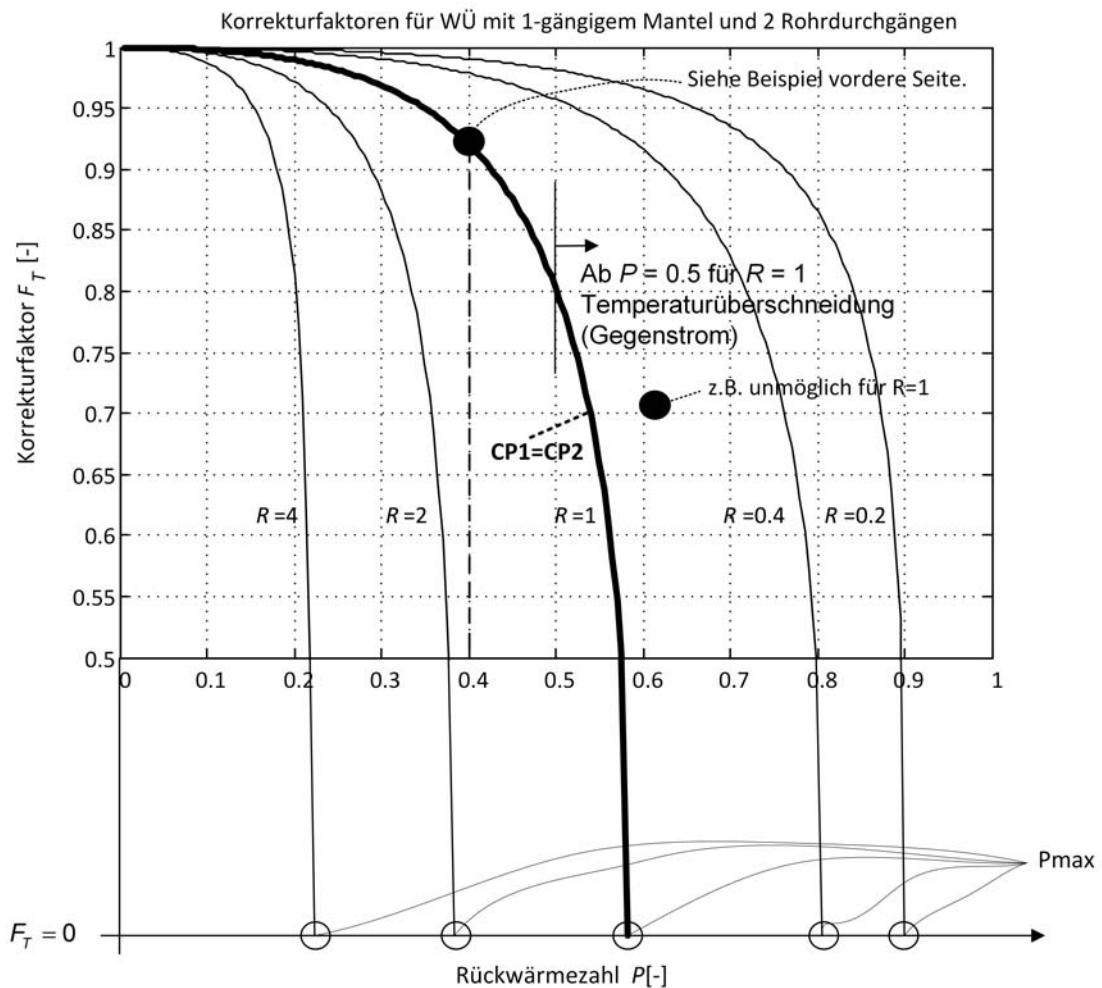
$F_T$ -Faktoren für verschiedene Schaltungen findet man in der Literatur. Es gilt folgendes:

- Für eine vorgegebene thermische Leistung benötigt ein 1-1-Mantel-Rohrbündel-Wärmeübertrager die geringste Wärmeübertragerfläche → reiner Gegenstrom.
- Alle anderen Designs haben Gleichstromanteile, wodurch die logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz  $\Delta T_m$  vermindert wird.



$F_T$  ist also NUR von den Ein- und Ausgangstemperaturen der beiden Massenströme abhängig! Für das 1-2-Design (1 mantelseitiger Durchgang; 2 rohrseitige Durchgänge oder Vielfache von 2) gilt der folgende mathematische Zusammenhang (für  $R \neq 1$ ):

$$F_T = \frac{\sqrt{R^2 + 1} \ln \left[ \frac{(1 - P)}{(1 - R P)} \right]}{(R - 1) \ln \left[ \frac{(2 - P(R + 1 - \sqrt{R^2 + 1}))}{(2 - P(R + 1 + \sqrt{R^2 + 1}))} \right]}$$



zur Erinnerung:

$$A = \frac{\dot{Q}}{k\Delta T_m F_T}$$

$$P_{max} \text{ für } F_T \Rightarrow 0$$

Bei gegebenem  $R$  können bestimmte Rückwärmezahlen  $P$  nicht überschritten werden.

Werden jedoch  $P > P_{max}$  benötigt, braucht man mehr Manteldurchgänge, z. B. 2-4-Design (siehe nächstes Diagramm)

Man beachte:

- Je grösser  $P$  bei konstantem Verhältnis  $R$  der beiden Wärmekapazitätsströme wird, desto geringer wird  $F_T$  und desto grösser wird die benötigte Wärmeübertragerfläche  $A$ .
- Je niedriger  $F_T$  wird, desto ineffizienter wird der Wärmeübertrager. Fazit: Bereiche im Diagramm mit steiler Kurve von  $F_T$  sind zu vermeiden!

Da  $P_{max}$  viel zu grosse Flächen zur Folge hätte, wird die maximal zulässige Rückwärmezahl  $P$  angegeben als:

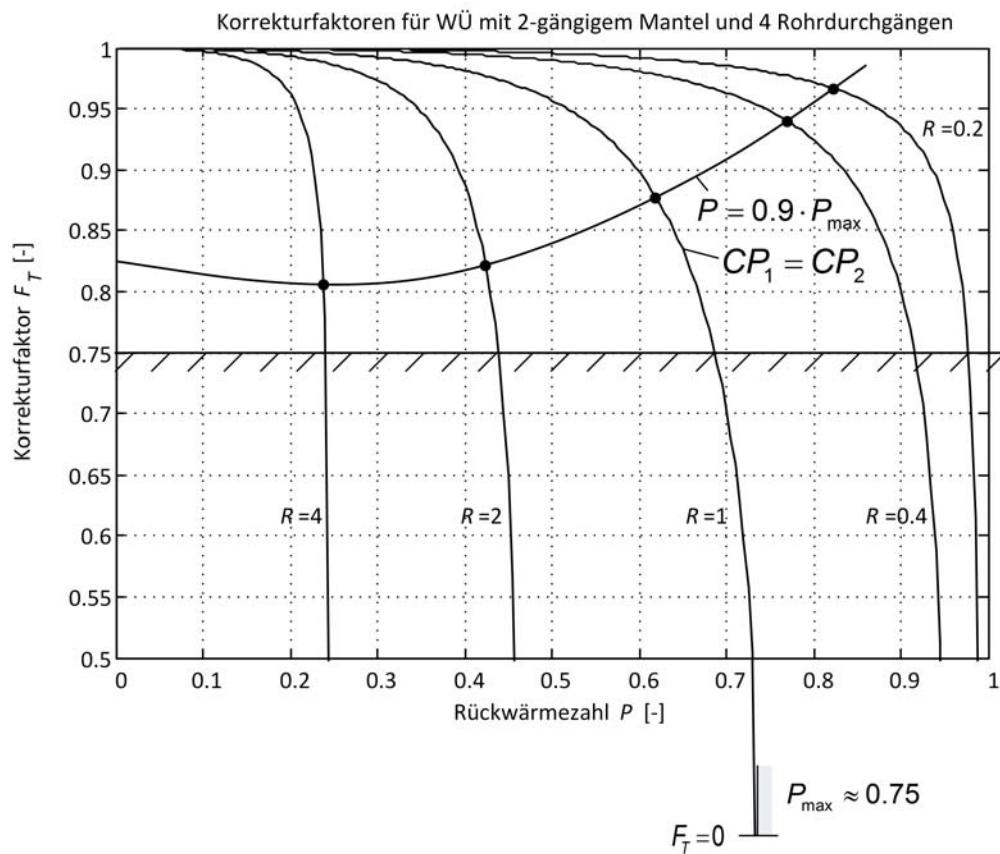
$$P = X_p P_{max}$$

$$0 < X_p < 1$$

Für das 1-2-Design gilt beispielsweise:

$$P_{max} = \frac{2}{R + 1 + \sqrt{R^2 + 1}}$$

Als Faustregel gilt: ein  $F_T = 0.75$  sollte nicht unterschritten werden!



Als Vergleich die Korrekturfaktoren  $F_T$  für ein 2-4-Design: Die Kurven von  $F_T$  sind im Vergleich zum 1-2-Design im Diagramm nach rechts verschoben.

Mit  $X_p$  können besser als mit  $F_T \geq 0.75$  steile Bereiche der  $F_T$ -Kurven vermieden werden.

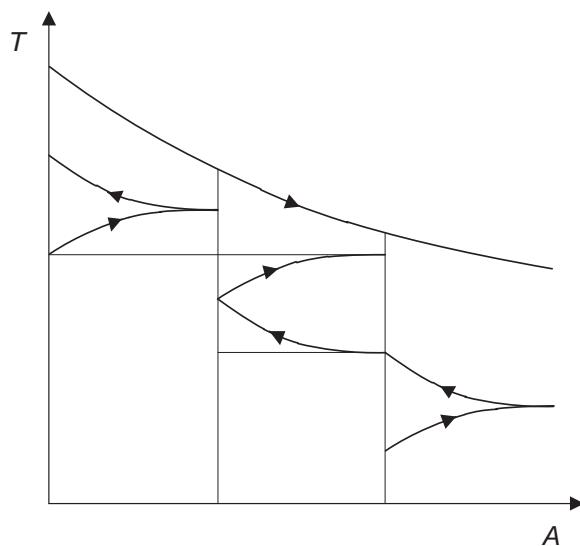
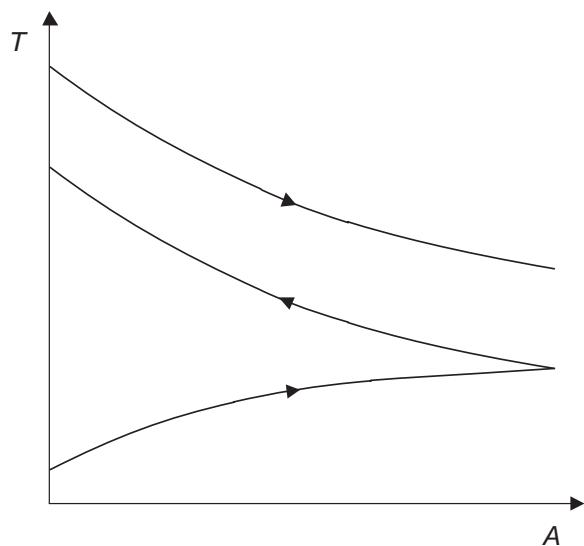
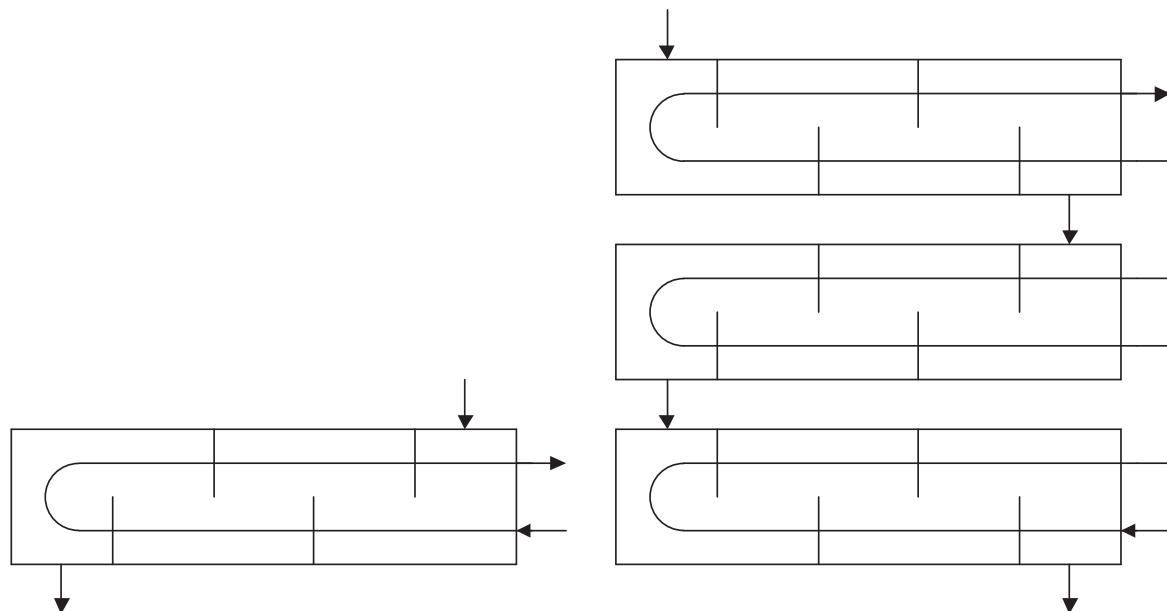
Pro Mantelanzahl bleiben die  $F_T$  für verschiedene Anzahlen an Rohrdurchgängen nahezu konstant:

$$F_T(2-4) \approx F(2-6) \approx F(2-8) \dots$$

$$F_T(4-8) \approx F(4-10) \approx F(4-12) \dots$$

Je grösser die Mantelzahl wird, desto grösser werden die  $F_T$ , da sich die Strömungsführung immer mehr dem reinen Gegenstrom annähert (siehe nachfolgende Abbildung).

$$F_T(1-2) < F(2-4) < F(3-6) \dots$$



## 8.9 Übungen

### Übung 8.1: Testfragen Wärmeübertragung.

1. Die Dicke einer einschichtigen Wand wird halbiert. Was verdoppelt sich dabei?
  - a) Die Wärmeleitfähigkeit
  - b) Der Wärmedurchgangskoeffizient
  - c) Der Wärmewiderstand
  - d) Die Wärmestromdichte
2. Man möchte eine stetige, lineare Temperaturabnahme über eine mehrschichtige ebene Wand erreichen. Welche Massnahme ist dabei erforderlich?
  - a) Keine, es ergibt sich von selber
  - b) Die Dicke der Schichten muss gleich sein
  - c) Die Wärmeleitfähigkeit der Schichten muss gleich sein
  - d) Der Wärmewiderstand der Schichten muss gleich sein
3. Bei erzwungener Konvektion ist die Nusselt Zahl u.a. von Korrekturfaktoren abhängig. Wann sind diese relevant?
  - a) Bei grossem Druck und grosser Dichte
  - b) Bei unsicheren Zustandsgrössen
  - c) Bei grossen Temperaturunterschieden
  - d) Bei grossen Geschwindigkeiten
4. Ein Wärmeübertrager soll Luft mit Wasser erwärmen (beidseitig erzwungene Konvektion). Welche Massnahme können Sie treffen, um den Wärmedurchgang zu verbessern?
  - a) Fläche wasserseitig vergrössern (z.B. Rippen)
  - b) Fläche luftseitig vergrössern (z.B. Rippen)
  - c) Wärmeleitfähigkeit der Wand erhöhen
  - d) Dicke der Wand verkleinern
5. Nach mehreren Monaten Betrieb verschmutzt sich ein Wärmeübertrager an der Innenseite mit einer dünnen Algenschicht ( $\lambda_{Algen} << \lambda_{Metall}$ ). Welche Wirkung hat das auf die Funktionsfähigkeit des Wärmeübertragers?
  - a) Die übertragene Wärme nimmt zu, weil die Algen eine raue Oberfläche erzeugen
  - b) Die übertragene Wärme nimmt ab, weil die Dicke der Algenschicht sehr dünn ist
  - c) Die übertragene Wärme nimmt ab, weil die Algenschicht schlecht leitet
  - d) Die übertragene Wärme nimmt zu, weil die Algenschicht gut leitet

6. Eine metallische Wand trennt Öl und Luft, die Wärme austauschen sollen. Beidseitig herrscht erzwungene Konvektion. In welchem Bereich liegt die Wandtemperatur luftseitig?
  - a) Näher an der Lufttemperatur, weil  $\alpha_{Luft} < \alpha_l$
  - b) Näher an der Lufttemperatur, weil  $\alpha_{Luft} > \alpha_l$
  - c) Näher an der Öltemperatur, weil  $\alpha_{Luft} < \alpha_l$
  - d) Praktisch in der Mitte, da die Wand sehr gut leitet
7. Bei erzwungener Konvektion kann die Nusselt Zahl aus anderen dimensionslosen Kennzahlen bestimmt werden. Welche der folgenden "Beziehungen" ist *falsch*?
  - a)  $Nu = f(Re, Pr)$
  - b)  $Nu = f(Re, Pe)$
  - c)  $Nu = f(Re, Ra)$
  - d)  $Nu = f(Pe, Pr)$
8. Bei erzwungener Konvektion in Flüssigkeiten ist die Nusselt Zahl von verschiedenen Größen abhängig. Von welcher der folgenden Größen ist sie in diesem Fall weitgehend *unabhängig*?
  - a) Druck
  - b) Temperatur
  - c) Wärmekapazität
  - d) Dynamische Viskosität
9. Wieso ist der Temperaturverlauf in einer krummen (z.B. zylindrischen) Wand nicht linear wie in einer ebenen Wand?
  - a) Weil die Wärmeleitfähigkeit vom Radius abhängt
  - b) Weil die Flächengröße vom Radius abhängt
  - c) Weil der Temperaturgradient vom Radius abhängt
  - d) Weil der Wärmestrom vom Radius abhängt

### Stoffwerte von Wasser bei 1 bar(a)

(Quelle: VDI-Wärmeatlas, 6. Aufl. (1991), p. Db2)

Temp. t [°C]	Dichte $\rho$ [kg/m³]	isobare spez. Wär- mekapazität $c_p$ [kJ/(kg·K)]	Wärmeleit- fähigkeit $\lambda$ [W/(m · K)]	dyn. Visko- sität $\eta$ [kg/(m · s)]	kin. Viskosi- tät $\nu$ [m²/s]	Pradtl- Zahl Pr [–]
0	999.84	4.218	5.610E-01	1.7923E-03	1.793E-06	13.480
5	999.97	4.203	5.705E-01	1.5187E-03	1.519E-06	11.190
10	999.70	4.192	5.800E-01	1.3064E-03	1.307E-06	9.443
15	999.10	4.185	5.893E-01	1.1380E-03	1.139E-06	8.082
20	998.21	4.181	5.984E-01	1.0020E-03	1.004E-06	7.001
25	997.05	4.179	6.072E-01	8.9045E-04	8.930E-07	6.128
30	995.65	4.177	6.155E-01	7.9768E-04	8.010E-07	5.414
35	994.03	4.177	6.233E-01	7.1962E-04	7.240E-07	4.823
40	992.22	4.177	6.306E-01	6.5325E-04	6.580E-07	4.328
45	990.21	4.178	6.373E-01	5.9632E-04	6.020E-07	3.909
50	988.04	4.180	6.436E-01	5.4708E-04	5.540E-07	3.553
55	985.69	4.182	6.492E-01	5.0419E-04	5.120E-07	3.248
60	983.20	4.184	6.544E-01	4.6659E-04	4.750E-07	2.983
65	980.55	4.187	6.590E-01	4.3344E-04	4.420E-07	2.754
70	977.77	4.190	6.631E-01	4.0406E-04	4.130E-07	2.553
75	974.84	4.193	6.668E-01	3.7790E-04	3.880E-07	2.376
80	971.79	4.197	6.700E-01	3.5449E-04	3.650E-07	2.221
85	968.61	4.201	6.728E-01	3.3348E-04	3.440E-07	2.082
90	965.31	4.206	6.752E-01	3.1453E-04	3.260E-07	1.959
95	951.89	4.211	6.773E-01	2.9740E-04	3.090E-07	1.849
99.63	958.61	4.216	6.789E-01	2.8295E-04	2.950E-07	1.757

### Übung 8.2: Gegenstrom-Wärmeübertrager.

Ein Wasser/Wasser-Doppelrohrwärmeübertrager in Gegenstrom soll ausgelegt werden. Die übertragene Wärmeleistung beträgt 50.16 kW. Der Warmwasser-Massenstrom im Innenrohr  $\dot{m}_1$  beträgt 0.8 kg/s und der Kaltwasser-Massenstrom  $\dot{m}_2 = 1.4$  kg/s. Die Eintrittstemperaturen sind  $\vartheta_{1\alpha} = 55^\circ\text{C}$  bzw.  $\vartheta_{2\alpha} = 30^\circ\text{C}$ . Die Temperaturmessung der Ausstrittstemperatur ergibt bei dem Warmwasser-Massenstrom  $\vartheta_{1\omega} = 40^\circ\text{C}$ .

Für die Auslegung sollen konstante Stoffwerte angenommen werden.

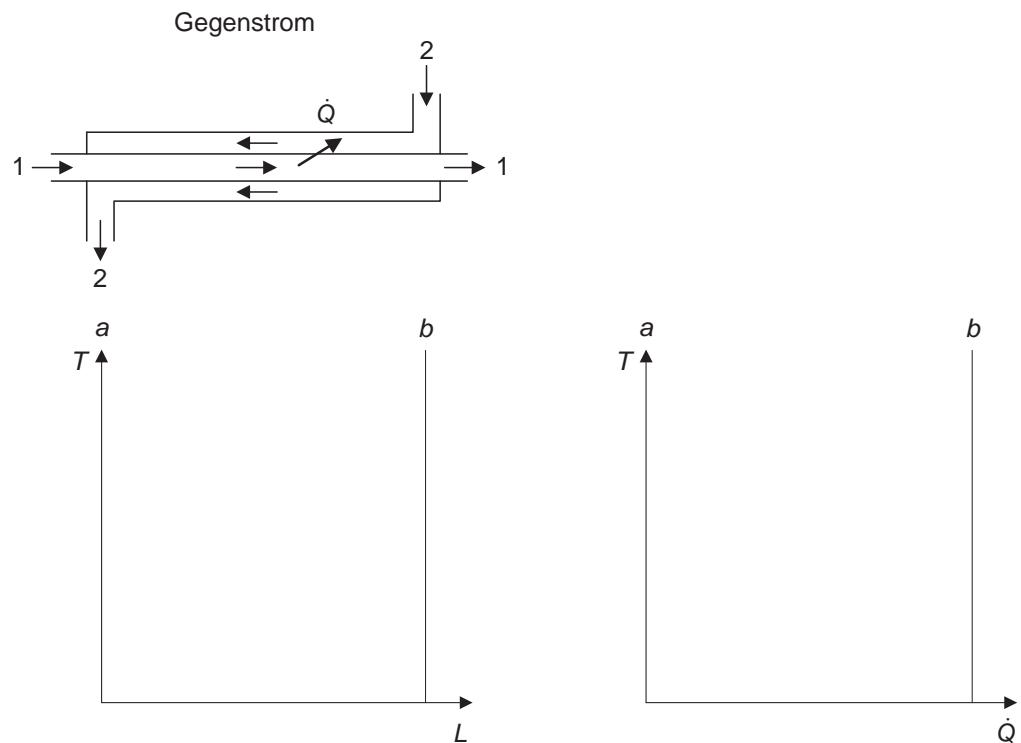
#### Zusammenfassung der Daten

- Stoffdaten des Wassers:  $\rho_{H2O} = 992 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_{pH2O} = 4.18 \text{ kJ/kg K}$ ,  $Pr_{H2O} = 4.33$ ,  $\lambda_{H2O} = 0.63 \text{ W/m K}$ , kinematische Viskosität  $\nu_{H2O} = 6.6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
- Doppelrohrwärmeübertrager Innenrohr:  $d_i = 3 \text{ cm}$  (Innendurchmesser),  $\delta_{Wand} = 1.5 \text{ mm}$ ,  $\lambda_{Rohr} = 30 \text{ W/m K}$ ; Außenrohr:  $D_i = 5 \text{ cm}$  (Innendurchmesser)
- Zur Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten kann eine vereinfachte Korrelation für die Nu-Zahl verwendet werden:

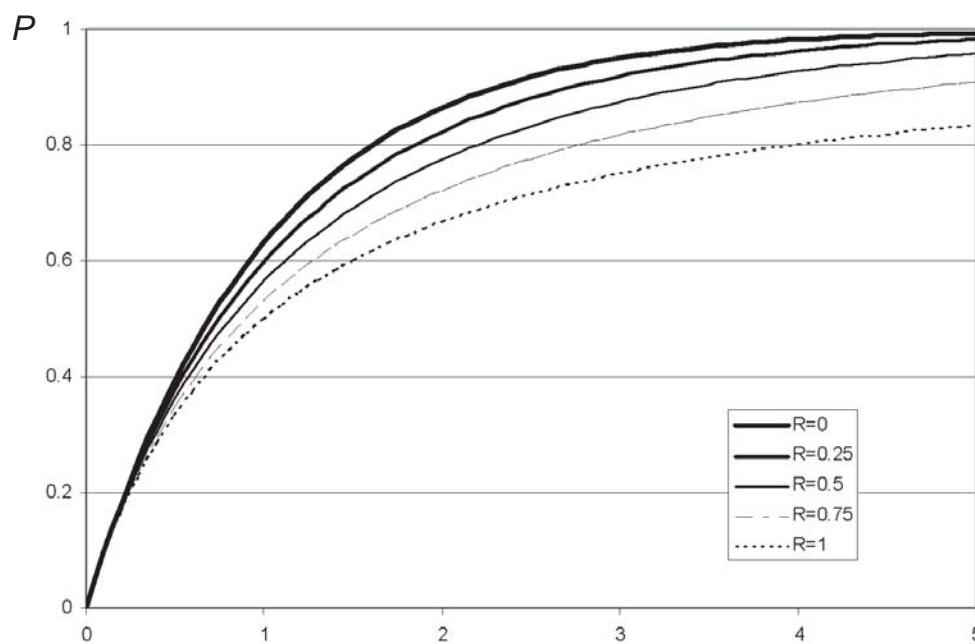
$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3}$$

#### Aufgaben:

- Skizzieren Sie in die Diagramme auf der nächsten Seite den Temperaturverläufe im Wärmeübertrager über die Länge und über die Leistung.
- Bestimmen Sie die Austrittstemperatur des kalten Wassers  $\vartheta_{2\omega}$ .
- Bestimmen Sie die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz  $\Delta T_m$ .
- Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ .
- Bestimmen Sie den Wärmedurchgangskoeffizient (Annahme: ebene Wand)  $k$ .
- Bestimmen Sie die Wärmeübertragerfläche  $A$ .
- Warmwasserseitig wird der Massenstrom  $\dot{m}_{1,neu}$  auf 0.5 kg/s abgesenkt. Der  $k$ -Wert verändert sich auf einen Wert von  $k_{neu} = 1730 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Bestimmen Sie anhand der NTU-Methode und der Betriebscharakteristik Gegenstrom die neuen Ausgangstemperaturen  $\vartheta_{1\omega,neu}$  und  $\vartheta_{2\omega,neu}$ .
- Bestimmen Sie den unter diesen neuen Bedingungen übertragenen Wärmestrom  $Q, \dot{neu}$ .

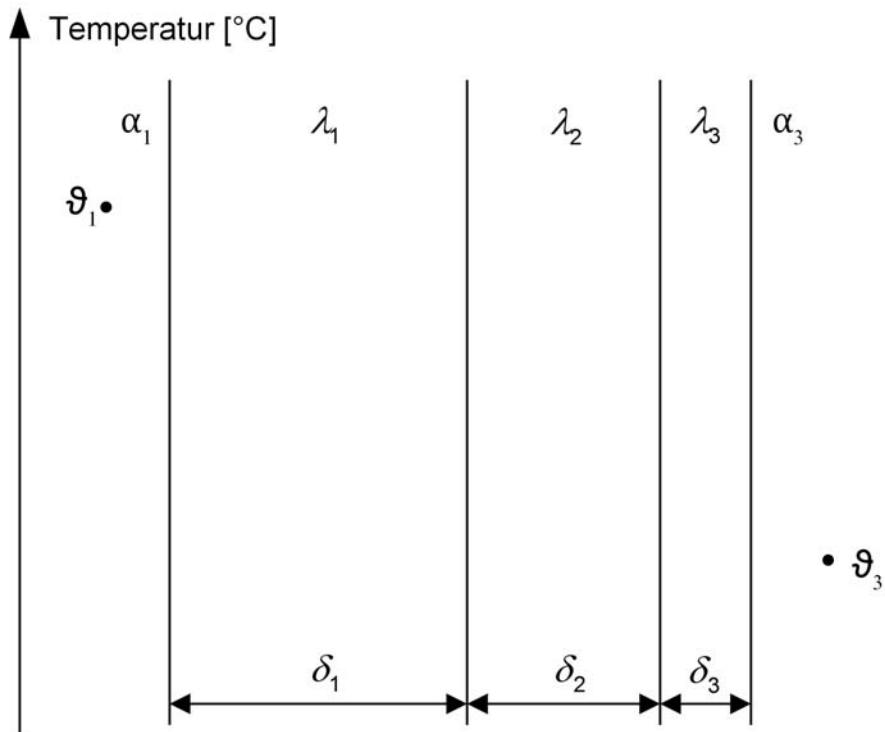


Betriebscharakteristik Gegenstrom

 $NTU_1$

### Übung 8.3: Bestimmung der Wandtemperatur in einem Kühlhaus.

Die Wand eines Kühlhauses besteht aus einer äusseren Mauer von  $\delta_1 = 200$  mm Dicke und einer Isolationsschicht mit einer inneren Kunststoffverkleidung von  $\delta_3 = 5$  mm Dicke. Die Wärmeleitfähigkeit der Mauer beträgt  $1 \text{ W}/(\text{m K})$ , die des Kunststoffs  $1.5 \text{ W}/(\text{m K})$  und die der Isolation  $0.05 \text{ W}/(\text{m K})$ . Im Kühlhaus herrscht eine Temperatur von  $-22^\circ\text{C}$ . Die Wärmeübergangskoeffizient innen ist  $8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Der äussere Wärmeübergangskoeffizient hat einen Wert von  $5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Für eine Gebäudeanalyse muss die thermische Eigenschaft der Wand für einen Sommertag mit einer Aussentemperatur von  $35^\circ\text{C}$  berechnet werden.



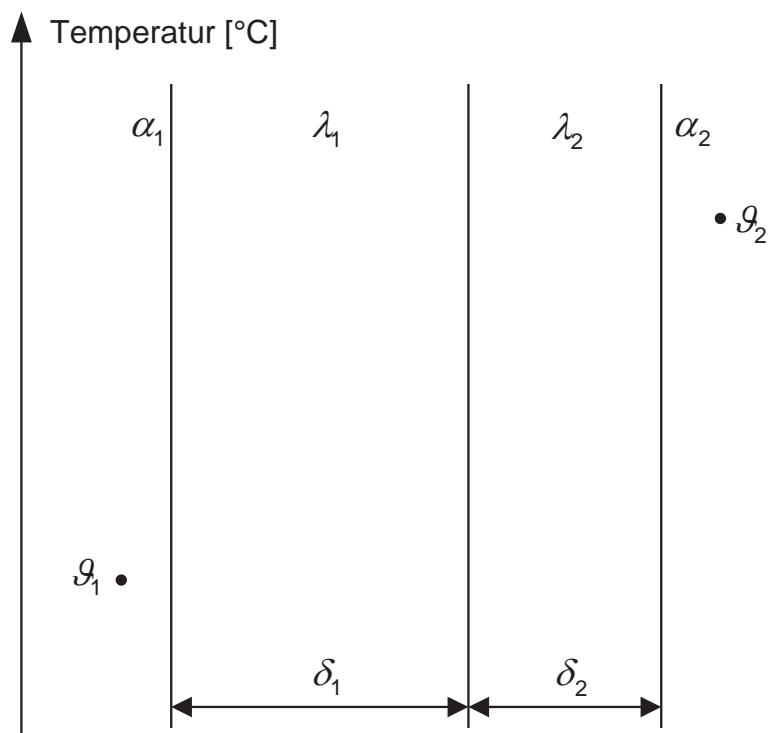
#### Zusammenfassung der Daten

- Schicht 1:  $\delta_1 = 200 \text{ mm}$ ,  $\lambda_1 = 1 \text{ W}/\text{m K}$ ,  $\alpha_1 = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
- Schicht 2:  $\delta_2 = 100 \text{ mm}$ ,  $\lambda_2 = 0.05 \text{ W}/\text{m K}$
- Schicht 3:  $\delta_3 = 5 \text{ mm}$ ,  $\lambda_3 = 1.5 \text{ W}/\text{m K}$ ,  $\alpha_3 = 8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
- Temperaturen:  $\vartheta_1 = 35^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_3 = -22^\circ\text{C}$ ,

#### Aufgaben:

- a. Bestimmen Sie den Wärmedurchgangskoeffizient  $k$ .
- b. Bestimmen Sie den spezifischen Verlustwärmestrom  $\dot{q}$  durch die Wand des Kühlhauses.
- c. Bestimmen Sie die Temperaturen an den Wänden und zwischen den Schichten und zeichnen Sie den Temperaturverlauf im Diagramm ein.

**Übung 8.4: Bestimmung der Isolationsschicht eines Gebäudes.** Die Wand eines Gebäudes besteht aus einer äusseren Mauer von  $\delta_1 = 200$  mm Dicke und einer Isolationsschicht. Die Wärmeleitfähigkeit der Mauer beträgt  $1 \text{ W}/(\text{m K})$  und die der Isolation  $0.05 \text{ W}/(\text{m K})$ . Im Gebäude herrscht eine Temperatur von  $25^\circ\text{C}$ . Die Wärmeübergangskoeffizient innen ist  $10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Der äussere Wärmeübertragungskoeffizient hat einen Wert von  $7 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Für eine Gebäudeanalyse muss die thermische Eigenschaft der Wand für einen Wintertag mit einer Aussentemperatur von  $-20^\circ\text{C}$  berechnet werden. Der spezifische Verlustwärmestrom beträgt  $30 \text{ W}/\text{m}^2$ .



### Zusammenfassung der Daten

- Schicht 1:  $\delta_1 = 200$  mm,  $\lambda_1 = 1 \text{ W}/(\text{m K})$ ,  $\alpha_1 = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
- Schicht 2:  $\delta_2 = ?$  mm,  $\lambda_2 = 0.05 \text{ W}/(\text{m K})$ ,  $\alpha_2 = 7 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
- Temperaturen:  $\vartheta_1 = -20^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_2 = 25^\circ\text{C}$ ,
- Spezifischer Verlustwärmestrom:  $\dot{q} = 30 \text{ W}/\text{m}^2$

### Aufgaben:

- a. Bestimmen Sie die notwendige Isolationsschichtdicke  $\delta_2$
- b. Bestimmen Sie die Temperaturen an den Wänden und zwischen den Schichten zeichnen Sie den Temperaturverlauf im Diagramm ein.

**Übung 8.5: Auslegung eines Doppelrohr-Wärmeübertragers.** Sie sollen einen im Gegenstrom betriebenen Doppelrohr-Wärmeübertrager für den Einsatz in Island auslegen. In dem Wärmeübertrager aus zwei konzentrischen Rohren soll der Brauchwassermassenstrom  $\dot{m}_2 = 1.5 \text{ kg/s}$  mit der spezifischen Wärmekapazität  $c_{p2} = 4.18 \text{ kJ/kg K}$  von der Eintrittstemperatur  $T_{2\alpha} = 20^\circ\text{C}$  auf die Austrittstemperatur  $T_{2\omega} = 80^\circ\text{C}$  erwärmt werden, wozu Geothermalwasser mit einer Temperatur von  $T_{1\alpha} = 170^\circ\text{C}$  (spezifische Wärmekapazität  $c_{p1} = 4.31 \text{ kJ/kg K}$ , Massenstrom  $\dot{m}_1 = 2.2 \text{ kg/s}$ ) zur Verfügung steht. Der Wärmeübergangskoeffizient am Innenrohr des Wärmeübertragers (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 15 \text{ W/m K}$ , Innendurchmesser  $d_i = 15 \text{ mm}$ , Wandstärke  $s = 2.5 \text{ mm}$ ) beträgt  $\alpha_i = 900 \text{ W/m}^2 \text{K}$ . An der Rohraussenseite tritt der konstante Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_A = 1'350 \text{ W/m}^2 \text{K}$  auf.

**Aufgaben:**

- Bestimmen Sie den übertragenen Wärmestrom  $\dot{Q}$  und die Austrittstemperatur  $T_{1\omega}$  des Geothermalwassers.
- Bestimmen Sie die notwendige Übertragungsfähigkeit  $k A$  des Wärmeübertragers.
- Bestimmen Sie den auf die Innenfläche bezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k_i$ .
- Welche Rohrlänge  $l_R$  ist erforderlich?
- Durch Ablagerungen (Fouling) bildet sich im Betrieb an der Rohrinnenseite der zusätzliche Wärmeübergangswiderstand  $R_{f,i} = 0.0004 \text{ m}^2 \text{K/W}$  aus. An der Rohraussenseite tritt der Foulingwiderstand  $R_{f,a} = 0.0001 \text{ m}^2 \text{K/W}$  auf. Wie gross ist der dadurch veränderte Wärmedurchgangskoeffizient  $k'_i$ ?
- Welche Auswirkungen hat dies auf die erforderliche Rohrlänge  $l'_R$ ?

**Übung 8.6: Alternativer Berechnungsweg zur Auslegung des Doppelrohr-Wärmeübertragers.** Bei dem Doppelrohr-Wärmeübertrager aus der vorherigen Übung soll nun eine alternative Berechnung mit dimensionslosen Kennzahlen ohne Verwendung der logarithmisch gemittelten Temperaturdifferenz durchgeführt werden.

- Geben Sie den maximal möglichen Wärmestrom  $\dot{Q}_{max}$  an.
- Berechnen Sie den Wirkungsgrad des Doppelrohr-Wärmeübertragers und vergleichen Sie ihn mit der Rückwärmeszahl  $P_2$  auf der Brauchwasserseite.
- Wie gross ist die bezogene Übertragungsfähigkeit  $NTU_2$  auf der Brauchwasserseite?
- Bestimmen Sie damit die erforderliche Länge  $l$  des Wärmeübertragers.

**Vorgabe:**

$$NTU_2 = \frac{1}{1 - R_2} \ln \left( \frac{1 - P_2 R_2}{1 - P_2} \right)$$

**Übung 8.7: Korrekturfaktor  $F_T$ .** Ein Fluidstrom soll von 300°C auf 100°C mit Hilfe eines kühleren Fluidstroms, der hierdurch von 60°C auf 200°C aufgeheizt wird, abgekühlt werden. Hierzu sollen Wärmeübertrager des 1-2-Designs, für die ein  $X_p = 0.9$  angegeben ist, hintereinandergeschaltet werden. Die gesamte thermische Leistung beträgt 3.5 MW. Für den Wärmedurchgangskoeffizienten ist  $k = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  anzusetzen.

Berechnen Sie:

- die Anzahl erforderlicher Mäntel.
- die Rückwärmezahl für jeden Mantel.
- den Korrekturfaktor für die Serienschaltung an Mänteln.
- die Wärmeübertragerfläche.

**Vorgaben:**

$$P = \frac{T_{C\omega} - T_{C\alpha}}{T_{H\alpha} - T_{C\alpha}}$$

$$R = \frac{CP_C}{CP_H}$$

$$N_{Mantel} = \frac{\ln \left( \frac{1 - RP}{1 - P} \right)}{\ln W}$$

mit

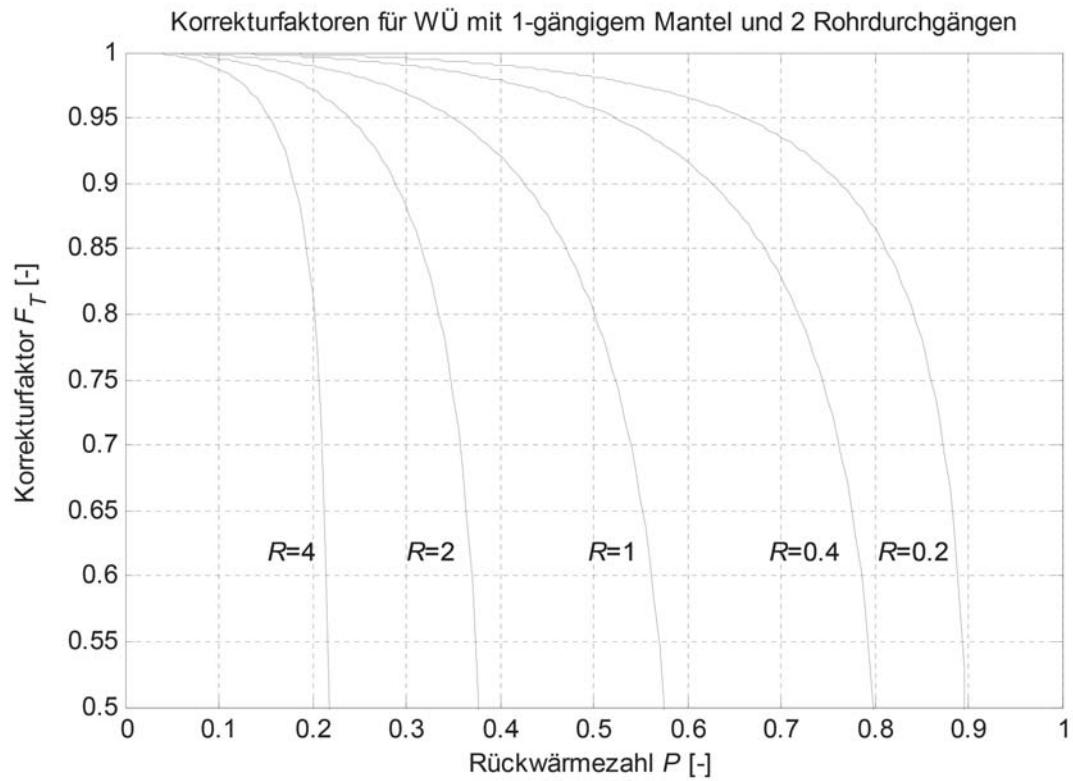
$$W = \frac{R + 1 + \sqrt{R^2 + 1} - 2RX_p}{R + 1 + \sqrt{R^2 + 1} - 2X_p}$$

Berechnung der Rückwärmezahl für einen Mantel mit  $R \neq 1$ :

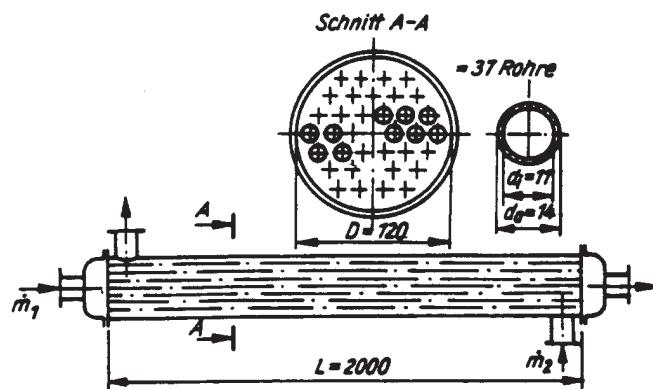
$$P_{1-2} = \frac{Z^{1/N_{Mantel}} - 1}{Z^{1/N_{Mantel}} - R}$$

$$Z = \frac{1 - P_{N-2N} R}{1 - P_{N-2N}}$$

$$F_T = \frac{\sqrt{R^2 + 1} \ln \left[ \frac{(1 - P)}{(1 - RP)} \right]}{(R - 1) \ln \left[ \frac{(2 - P(R + 1 - \sqrt{R^2 + 1}))}{(2 - P(R + 1 + \sqrt{R^2 + 1}))} \right]}$$



**Übung 8.8: Luftpühlung in einem Rohrbündel-Wärmeübertrager.**



Im oben abgebildeten Rohrbündel-Wärmeübertrager soll ein rohrinnenseitig strömender Luftstrom von 250°C und 7.85 bar(a) mit Kühlwasser abgekühlt werden. Der Luftmassenstrom beträgt 1292 kg/h. Das Kühlwasser - rohraussenseitig strömend - hat einen Massenstrom von 2500 kg/h und eine Eintrittstemperatur von 20°C.

Berechnen Sie mit einer Annahme von  $\vartheta_1''$  der Luft, die Austrittstemperatur  $\vartheta_2''$  des Kühlwassers sowie den übertragenen Wärmestrom!

Es gelten folgende Beziehungen: (wir verwenden einfache Korrelationen; sie geben hier gute Approximationen)

- für turbulente Rohrströmung ( $Re > 2300$ ):  $Nu = 0.024 Re^{0.8} Pr^{1/3}$
- für laminare Rohrströmung ( $Re < 2320$ ):  $Nu = (3.66^3 + 1.63^3 Re Pr \frac{d}{l})^{1/3}$
- hydraulischer Durchmesser:  $d_h = \frac{4A_q}{U}$

Stoffdaten: Luft:  $c_p 1 = 1.004 \text{ kJ/kg K}$ ,  $\lambda_1 = 0.037 \text{ W/m K}$ ,  $Pr_1 = 0.69$ ,  
 $\nu_1(p = 7.85 \text{ bar(a)})[\text{m}^2/\text{s}] = 8.1 \cdot 10^{-9}$ .  $\vartheta_1 [\text{°C}] + 3.3 \cdot 10^{-6}$

Wasser:  $c_p 2 = 4.18 \text{ kJ/kg K}$ ,  $\lambda_2 = 0.616 \text{ W/m K}$ ,  $\rho_2 = 996 \text{ kg/m}^3$ ,  $Pr_2 = 0.008 \cdot \vartheta_1 [\text{°C}] + 4.73$   
 $\nu_2 [\text{m}^2/\text{s}] = 10^{-9} \cdot \vartheta_2 [\text{°C}] + 0.71 \cdot 10^{-6}$

Hinweis: Entwickeln Sie als erstes eine Lösungsstrategie! Die beiliegenden Blätter zeigen einen möglichen manuellen Berechnungsgang.

Gleichung	Einheit	Zahlenwerte		
Annahme: Luftaustritt $\vartheta''_1$	°C	150	100	50
mittlere Lufttemperatur: $\bar{\vartheta}_1 =$	°C			
Luftabkühlung $\Delta T_1 =$	K			
$c_{p,1}$	kJ/kg K			
$c_{p,2}$	kJ/kg K			
Luftmassenstrom $\dot{m}_1 = 1292 \text{ kg/h}$	kg/s			
Kühlwassermassenstrom $\dot{m}_2 = 2500 \text{ kg/h}$	kg/s			
(1) Gleichung: $\Delta \dot{H}_1 = \dot{m}_1 \cdot c_{p,1} \cdot \Delta T_1$	kW			
Wassererwärmung $\Delta T_2 =$	K			
Wasseraustrittstemperatur $\vartheta''_2 =$	°C			
<b>Luftseitiger Wärmeübergangskoeffizient</b>				
kinematische Viskosität bei $p_1 = 7.85 \text{ bar(a)}$ und $\bar{\vartheta}_1 = \vartheta_1 =$	$\text{m}^2/\text{s}$			
Wärmeleitfähigkeit $\lambda_1$ bei $\vartheta_1$	W/m K			
Prandtlzahl $Pr_1$ bei $\vartheta_1$	-			
Dichte bei $\bar{\vartheta}_1$ : $\rho_1 =$	kg/ $\text{m}^3$			
Mittlerer Luftvolumenstrom $\dot{V}_1 =$	$\text{m}^3/\text{s}$			
Mittlere Luftgeschwindigkeit: $c_1 =$	m/s			
Reynoldszahl: $Re_1 =$	-			
Nusseltzahl: $Nu_1 = 0.024 Re_1^{0.8} Pr_1^{1/3}$	-			
Wärmeübergangskoeffizient: $\alpha_1 =$	W/ $\text{m}^2 \text{K}$			
Luftaustrittstemperatur: $\vartheta''_1$				
<b>Wasserseitiger Wärmeübergangskoeffizient</b>				
mittlere Wassertemperatur $\vartheta_2 =$	°C			
kinematische Viskosität bei $\vartheta_2$	$\text{m}^2/\text{s}$			
Wärmeleitfähigkeit $\lambda_2$	W/m K			
Prandtlzahl $Pr_2$	-			
Dichte $\rho_2$	kg/ $\text{m}^3$			
Strömungsgeschwindigkeit $c_2 =$	m/s			
Reynoldszahl $Re_2 =$	-			
Nusseltzahl				
$Nu_2 = (3.99^3 - 1.63^3 Re_2 Pr_2 \frac{dh_2}{l})^{1/3} -$				
Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_2 =$	W/ $\text{m}^2 \text{K}$			
$k$ -Wert $k =$	W/ $\text{m}^2 \text{K}$			
$\Delta T_{max} =$	K			
$\Delta T_{min} =$	K			
$\Delta T_m =$	K			
$\Delta \dot{H}_1 = \dot{m}_1 \cdot c_{p,1} \cdot \Delta T_1$	kW			
$\dot{Q} =$	kW			

