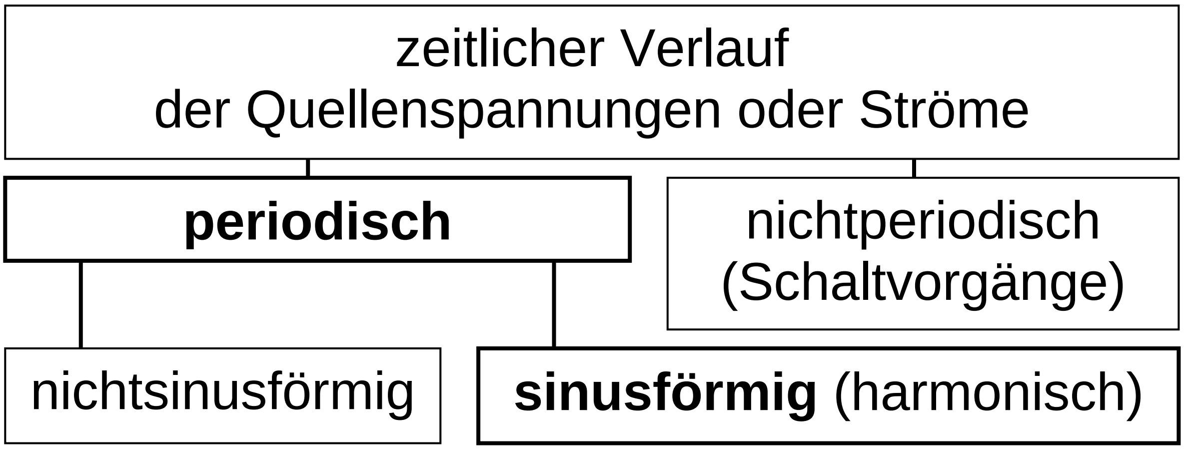
Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W1: EINLEITUNG WECHSELSTROM

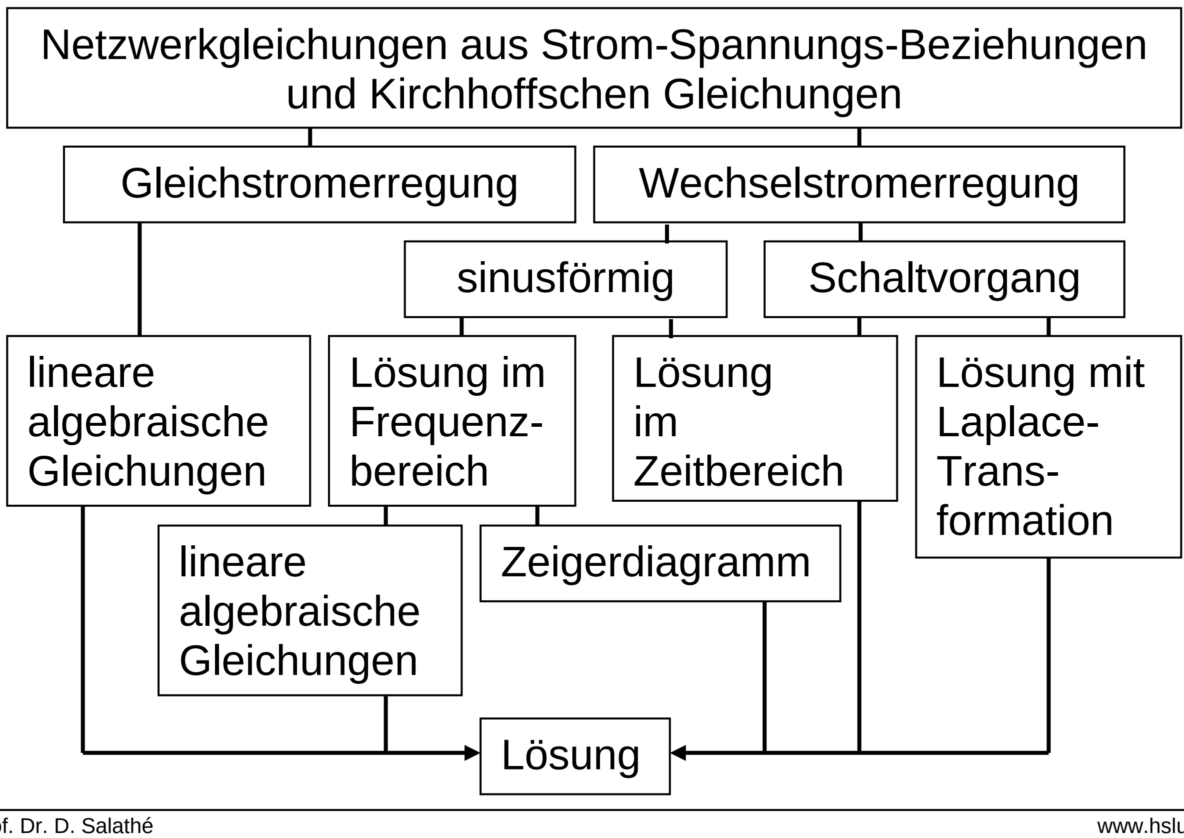
Netzwerk-Eigenschaften

passiv/ aktiv	linear/ nichtlinear	zeitunabhängig/ zeitabhängig

Netzwerk-Erregung



Netzwerk-Berechnung (linearer Fall)



Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Netzwerk-Berechnungsmethoden

(aus der Gleichstromlehre, mit Ergänzungen)

- Strom-Spannungsbeziehungen der Bauelemente
- Kirchhoffsche Gesetze:
  - Maschensatz
  - Knotensatz
- Zweipoltheorie für lineare Elemente:
  - Maschenstromanalyse
  - Knotenpotentialanalyse
  - Ersatzspannungsquellen (Satz von Thévenin)
  - Ersatzstromquellen (Satz von Norton)
- Hilfsverfahren:
  - Überlagerungssatz für lineare Elemente (Superposition)
    (Vorsicht bei gesteuerten Quellen)
  - Ähnlichkeitssatz für lineare Elemente
  - Verschiebungssatz idealer Spannungsquellen
  - Teilungssatz idealer Stromquellen
  - Serie-Parallel-Umwandlung
  - Stern-Dreieck-Umwandlung
- Vierpoltheorie
  (Transformator, gesteuerte Quellen...)

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W2: PERIODISCH ZEITABHÄNGIGE GRÖSSEN

Begriffe

Am Beispiel einer Spannung:

- Momentanwert $u(t)$ bzw. u
- Maximalwert u_{max}
- Minimalwert u_{min}
- Scheitelwert (max. Betrag) $\hat{u}$
- Schwingungsbreite $u_{pp} = u_{max} - u_{min}$
- Periodendauer T
- Frequenz f

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \qquad [\mathrm{f}] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hertz} = \mathrm{Hz}$$

sinusförmige Grössen

$$\boxed{u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)}$$

- Amplitude $\hat{u}$
- Phasenwinkel $\omega t + \varphi_u$
- Nullphasenwinkel φ_u
- Kreisfrequenz ω

$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W3: MITTELWERTE PERIODISCHER GRÖSSEN

Ziel

Grössenangabe eines Wechselstromes oder einer Wechselspannung durch einen **zeitunabhängigen** Wert. $\Rightarrow$ Vergleich der Wirkung von Wechselstromgrössen mit Gleichstromgrössen.

Gleichwert

Bestimmung der durch einen Leiterquerschnitt pro Periode transportierten el. Ladung
$\Rightarrow$ chemische Wirkung
$\Rightarrow$ arithmetischer Mittelwert

$$\boxed{\bar{i} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i \cdot dt} \qquad \text{analog: } \bar{u}$$

- Gleichwert = Null $\Rightarrow$ Wechselgrösse $i_{\sim}$
- sonst Mischgrösse $\Rightarrow$ $i = \bar{i} + i_{\sim}$
- Messung mit Drehspulinstrument

Wirkleistung

$$\boxed{p(t) = u \cdot i}$$

Sind u und i periodisch, so ist es auch die Leistung.

- Periodendauer T_p

- Energie $$W_{T_P} = \int_{t_1}^{t_1+T_p} p(t)\cdot dt$$

- Wirkleistung $$\boxed{P = \frac{W_{T_P}}{T_p} = \frac{1}{T_p}\int_{t_1}^{t_1+T_p} p(t)\cdot dt}$$

  arithmetischer Mittelwert (hier Grossbuchstaben)

Effektivwert

Gleichsetzen der Energie, die ein Wechselstrom an einem ohm'schen Widerstand in Wärme umwandelt, mit der Energieumwandlung eines Gleichstromes I.

$$dW = p(t)\cdot dt = u\cdot i\cdot dt = i^2\cdot R\cdot dt \quad (\text{mit: } u = R\cdot i)$$

$$W_T = \int_{t_1}^{t_1+T} dW = R\int_{t_1}^{t_1+T} i^2\cdot dt = I^2\cdot R\cdot T$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i^2\cdot dt}}$$ quadratischer Mittelwert

- Der Effektivwert (**R**oot **M**ean **S**quare) gilt nur für Spannung und Strom $U\ (bzw.\ U_{eff})$ und $I\ (bzw.\ I_{eff})$
- Messung mit Dreheiseninstrument

Gleichrichtwert

Einweg-Gleichrichtung

Mit einer Diode: pos. oder neg. Signalteil

Zweiweg-Gleichrichtung

Mit einer Brückenschaltung: "Betragbildung"

$\Rightarrow$ Gleichrichtwert

$$\boxed{\overline{|i|} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} |i| \cdot dt}$$

Messung durch Drehspulinstrument mit Gleichrichter

Verhältniszahlen

Scheitelfaktor $$\boxed{k_s = \frac{Scheitelwert}{Effektivwert} = \frac{\hat{i}}{I} \; oder \; \frac{\hat{u}}{U}}$$

Formfaktor $$\boxed{F = \frac{Effektivwert}{Gleichrichtwert} = \frac{I}{\overline{|i|}} oder \frac{U}{\overline{|u|}}}$$

Mittelwerte von sinusförmigen Grössen

Gleichwert $\boxed{\overline{u} = 0}$ immer = Null

Effektivwert $$\boxed{U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}$$

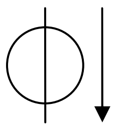
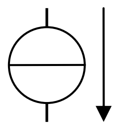
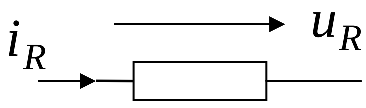
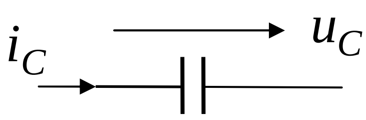
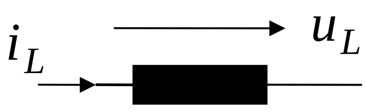
Gleichrichtwert $$\boxed{\overline{|u|} = \frac{2}{\pi}\hat{u}}$$

Scheitelfaktor $$\boxed{k_s = \sqrt{2}}$$

Formfaktor $$\boxed{F = \frac{U}{\overline{|u|}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1{,}111}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W4: NETZWERKELEMENTE

<table>
<tr><th>Spannungsquelle</th><th>Stromquelle</th></tr>
<tr><td colspan="2">konstant: aktive Zweipole</td></tr>
<tr><td> $u_q, \underline{U}_q$</td><td> $i_q, \underline{I}_q$</td></tr>
<tr><td colspan="2">gesteuert: aktive Vierpole</td></tr>
<tr><td>$u_q = f(Steuergrösse)$</td><td>$i_q = f(Steuergrösse)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ohmscher Widerstand R (passiver Zweipol)</td></tr>
<tr><td></td><td>$u_R = R \cdot i_R$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kondensator, Kapazität C (passiver Zweipol)</td></tr>
<tr><td></td><td>$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$
$u_C = \frac{1}{C}\int i_C \cdot dt + U_C(0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Spule, Induktivität L (passiver Zweipol)</td></tr>
<tr><td></td><td>$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$
$i_L = \frac{1}{L}\int u_L \cdot dt + I_L(0)$</td></tr>
</table>

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W5: SINUSFÖRMIGE ERREGUNG

Die harmonische Zeitfunktion ist Grundbauelement aller periodischen Vorgänge.
(Fourier-Analyse und Synthese)

Definition (Bsp. $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$)

Die Sinus- oder Kosinusfunktion ist durch die drei Grössen Amplitude $\hat{u}$, Nullphasenwinkel φ_u und Kreisfrequenz ω definiert (siehe W2).

Differentiation

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \omega \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \omega \cdot \hat{u} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$\Rightarrow$ Eine um 90° voreilende Sinusschwingung gleicher Frequenz und der Amplitude $\omega \cdot \hat{u}$!

Integration

$$\boxed{\int u \cdot dt = -\frac{\hat{u}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_u) = \frac{\hat{u}}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$\Rightarrow$ Eine um 90° nacheilende Sinusschwingung gleicher Frequenz und der Amplitude $\hat{u}/\omega$!

Liniendiagramm

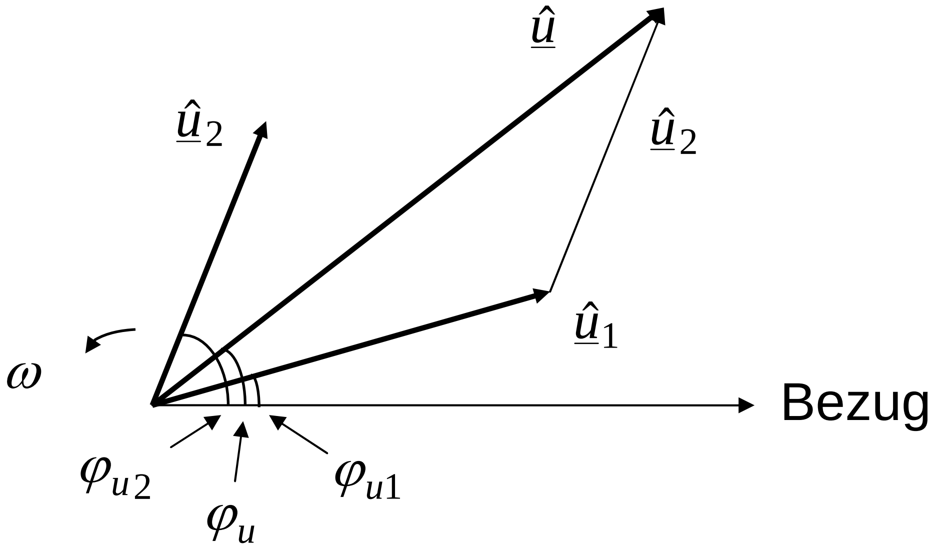
Darstellung durch einen mit ω rotierenden Zeiger:
Projektion auf die x-Achse $\Rightarrow$ Kosinusschwingung
Projektion auf die y-Achse $\Rightarrow$ Sinusschwingung

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Zeigerdiagramm

- Die Zeigerlänge entspricht der Amplitude (oder dem Effektivwert der Wechselgrösse).
- Der Winkel des Zeigers gegen die Bezugsachse entspricht dem Nullphasenwinkel (für $t = 0$).
- Der Zeiger rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω im mathematisch pos. Sinn (Gegenuhrzeigersinn).
- Das Zeigerdiagramm kann mehrere Zeiger enthalten, die aber alle die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben müssen.

Zeigeraddition und Subtraktion



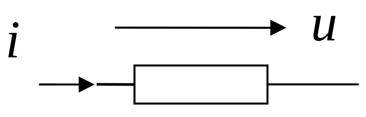
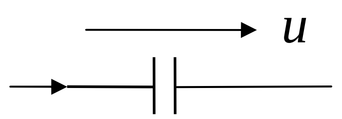
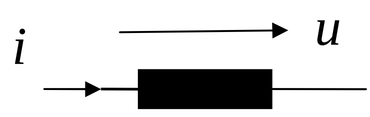
$$\boxed{\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^{\,2} + \hat{u}_2^{\,2} + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_{u1} - \varphi_{u2})}}$$

$$\boxed{\varphi_u = \arctan \frac{\hat{u}_1 \cdot \sin\varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cdot \sin\varphi_{u2}}{\hat{u}_1 \cdot \cos\varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi_{u2}}}$$

Subtraktion: $\hat{u}_2$ durch $-\hat{u}_2$ ersetzen!

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W6: ANALYSE IM ZEITBEREICH

		
angelegte Spannung: $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ Ansatz für Wirkung: $i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$		
$i = \frac{\hat{u}}{R} \cdot$ $\cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$	$i = \omega \cdot C \cdot \hat{u} \cdot$ $\cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)$	$i = \frac{\hat{u}}{\omega \cdot L} \cdot$ $\cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right)$
$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{R}$	$\hat{i} = \omega \cdot C \cdot \hat{u}$	$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\omega \cdot L}$
$\varphi_i = \varphi_u$	$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$	$\varphi_i = \varphi_u - \frac{\pi}{2}$
Impedanz (Scheinwiderstand) $Z = \hat{u}/\hat{i} \; (= U/I)$		
$Z_R = R$	$Z_C = X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$Z_L = X_L = \omega \cdot L$
$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = 0$	$\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi_Z = +\frac{\pi}{2}$
Admittanz (Scheinleitwert) $Y = 1/Z$		
$Y_R = G$	$Y_C = B_C = \omega \cdot C$	$Y_L = B_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$
$\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = 0$	$\varphi_Y = +\frac{\pi}{2}$	$\varphi_Y = -\frac{\pi}{2}$

Begriffe

R	$\Rightarrow$	Wirkwiderstand	Resistanz	Ω
G	$\Rightarrow$	Wirkleitwert	Konduktanz	S
X	$\Rightarrow$	Blindwiderstand	Reaktanz	Ω
B	$\Rightarrow$	Blindleitwert	Suszeptanz	S
Z	$\Rightarrow$	Scheinwiderstand	Impedanz	Ω
Y	$\Rightarrow$	Scheinleitwert	Admittanz	S

Bemerkungen

- Die Impedanz hat keine physikalische Bedeutung, denn die Werte $\hat{u}$ und $\hat{i}$ treten im allgemeinen zu verschiedenen Zeitpunkten auf.
- Ohmsches Gesetz:

$$\boxed{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = Z \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i + \varphi_Z)}$$

- Es können auch Zweipole mit mehreren Elementen durch eine Impedanz oder eine Admittanz beschrieben werden:

Serieschaltung eines Wirk- und Blindwiderstandes

$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X^2}}$ geometrische Addition (rechtwinklig)

$$\boxed{\tan \varphi_Z = \frac{X}{R}}$$

Parallelschaltung eines Wirk- und Blindleitwertes

$\boxed{Y = \sqrt{G^2 + B^2}}$ geometrische Addition (rechtwinklig)

$$\boxed{\tan \varphi_Y = \frac{B}{G}}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Leistungsberechnung

Ohmscher Widerstand

$$p = \hat{u} \cdot \sin\omega t \cdot \hat{i} \cdot \sin\omega t \qquad (\varphi_u - \varphi_i = 0)$$

$$p = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(\omega t - \omega t) - \cos(\omega t + \omega t)\right)$$

$$\boxed{p = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}(1 - \cos 2\omega t) = U \cdot I\,(1 - \cos 2\omega t)}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{T_p}\int_{t_1}^{t_1+T_p} p \cdot dt = U \cdot I}$$

Kapazität

$$p = \hat{u} \cdot \sin\omega t \cdot \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2})$$

$$p = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\left(\omega t - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\omega t + \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{p = -\frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U \cdot I \cdot \sin 2\omega t \Rightarrow P = 0}$$

Induktivität

$$p = \hat{u} \cdot \sin\omega t \cdot \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (\varphi_u - \varphi_i = +\frac{\pi}{2})$$

$$p = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\left(\omega t - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\omega t + \omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{p = -\frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -U \cdot I \cdot \sin 2\omega t \Rightarrow P = 0}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Serieschaltung eines Wirk- und Blindwiderstandes (Parallelschaltung eines Wirk- und Blindleitwertes)

$$p = \hat{u} \cdot \sin \omega t \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \qquad (\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z)$$

$$p = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \frac{1}{2}(\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \omega t - \varphi))$$

$$p = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}(\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi))$$

$$p = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

Gleichanteil d.h. Mittelwert von p

$\Rightarrow$ Wirkleistung P!

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos \varphi}$$

Einheit: W

Wechselanteil Amplitude:

$\Rightarrow$ Scheinleistung S!

$$\boxed{S = U \cdot I}$$

Einheit: VA

$$p = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \left(\cos 2\omega t \cdot \cos \varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi\right)$$

$$p = P(1 - \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t$$

Wirkleistungs-schwingung

Blindleistungsschwingung Amplitude:

$\Rightarrow$ Blindleistung Q!

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi}$$

Einheit: var

Zusammenhang

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Leistungsfaktor

$$\boxed{\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi}$$

W7: ANALYSE IM FREQUENZBEREICH

Die Transformation vom Zeitbereich (mit der Zeit als wesentliche Grösse) in den Frequenzbereich (mit der Frequenz als wesentliche Grösse) wird auch **komplexe oder symbolische Methode** genannt.

Vorteile

- Handliche mathematische Darstellung für sinusförmige Grössen in der komplexen Ebene
- Differentiation geht über in eine Multiplikation mit $j\omega$!
- Integration geht über in eine Division durch $j\omega$!
- Ohmsches Gesetz im Frequenzbereich mit komplexen Widerstands- und Leitwert-Operatoren
- Damit gehen die Netzwerk-Differentialgleichungen in einfache algebraische Gleichungen über

Schritte der Transformation

- Zerlegung von $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ (rotierender Zeiger) mit Hilfe des Additionstheorems:
  $\sin(\omega t \pm \varphi) = \cos\varphi \cdot \sin\omega t \pm \sin\varphi \cdot \cos\omega t$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} u &= \hat{u} \cdot \cos\varphi_u \cdot \sin\omega t + \hat{u} \cdot \sin\varphi_u \cdot \cos\omega t \\ u &= \hat{u}_1 \cdot \sin\omega t + \hat{u}_2 \cdot \cos\omega t \end{aligned}}$$

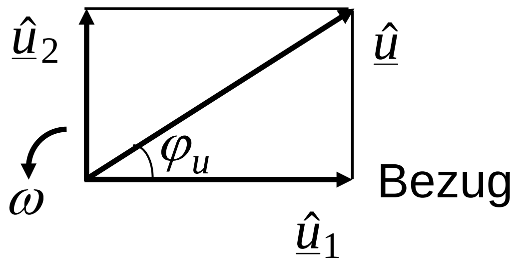
  $\Rightarrow$ Sinus- und Kosinusschwingung ohne Nullphasenwinkel ($\sin\omega t$ und $\cos\omega t$)

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

- Zeigerdiagramm:

  rotierende Zeiger

  $\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2$ (Zeigeraddition)



- Übergang in die **komplexe Ebene**:

  Reelle Achse in Richtung "Bezug" und **imaginäre Achse** senkrecht dazu

  nach Euler: $\boxed{\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}}$

  NB: andere Darstellungsform mit gegenläufig rotierenden (konjugiert komplexen) Zeigern:

  $$u = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \frac{\hat{u}}{2}\left(e^{j(\omega t + \varphi_u)} + e^{-j(\omega t + \varphi_u)}\right)$$

- Übergang zu **ruhendem Zeiger: Transformation**

  Division von $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}$ durch $e^{j\omega t}$

  $\Rightarrow \quad \underline{u}_{stat.} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$ (stationärer Zeiger)

- Scheitelwert durch **Effektivwert** ersetzen:

  $\Rightarrow \quad \boxed{\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}}$ (Transf. von sinusförmigen Signalen)

- komplexe Schreibweise für Zeiger:

  Normalform $\underline{U} = U_1 + jU_2$

  trigonometrische Form $\underline{U} = U(\cos\varphi_u + j\sin\varphi_u)$

  Exponentialform $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$

  oder $\boxed{\underline{U} = U\angle\varphi_u}$ (U Versor φ_u)

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W8: KOMPLEXE OPERATOREN

WIDERSTANDSOPERATOR, IMPEDANZ $\underline{Z}$

Aus der Def. im Zeitbereich $\Rightarrow$ Zeigerdarstellung:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_i}} = Z \cdot e^{j\varphi_Z} = Z(\cos\varphi_Z + j\sin\varphi_Z)$$

$$\underline{Z} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) + j\,\mathrm{Im}(\underline{Z}) = R + jX$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\tan\varphi_Z = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})} = \frac{X}{R}$$

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = \arctan\frac{X}{R}$$

LEITWERTOPERATOR, ADMITTANZ $\underline{Y}$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I \cdot e^{j\varphi_i}}{U \cdot e^{j\varphi_u}} = Y \cdot e^{j\varphi_Y} = Y(\cos\varphi_Y + j\sin\varphi_Y)$$

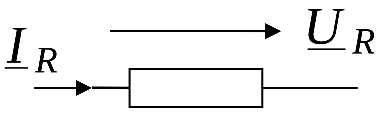
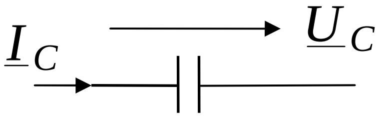
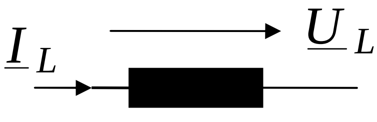
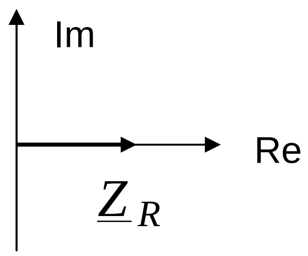
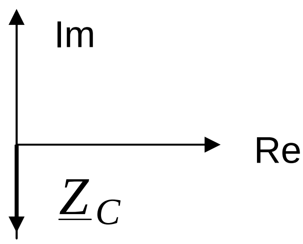
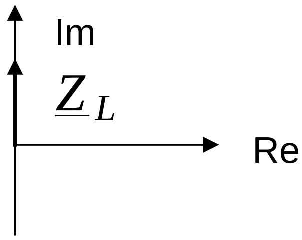
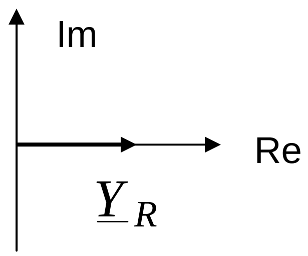
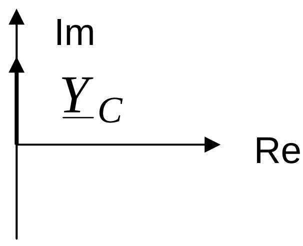
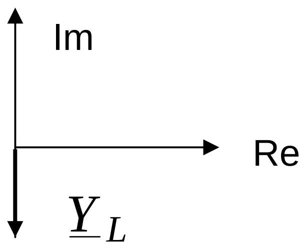
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \mathrm{Re}(\underline{Y}) + j\,\mathrm{Im}(\underline{Y}) = G + jB$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

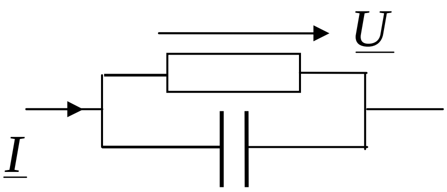
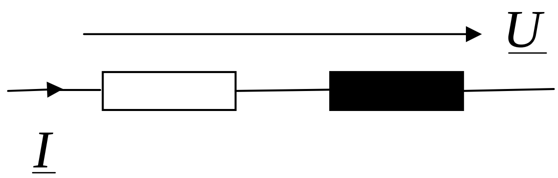
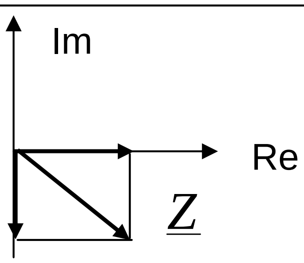
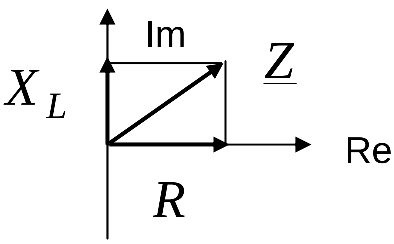
$$\tan\varphi_Y = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Y})}{\mathrm{Re}(\underline{Y})} = \frac{B}{G}$$

$$\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = \arctan\frac{B}{G} = -\varphi_Z$$

OPERATOREN DER NETZWERKELEMENTE

		
Widerstandsoperator, Impedanz $\underline{Z}$		
$\underline{Z}_R = R$ $Z_R = R$ $\varphi_Z = 0$	$\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$ $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ $\varphi_Z = -\pi/2$	$\underline{Z}_L = j\omega L$ $X_L = \omega L$ $\varphi_Z = \pi/2$
		
Leitwertoperator, Admittanz $\underline{Y}$		
$\underline{Y}_R = G$ $Y_R = G$ $\varphi_Y = 0$	$\underline{Y}_C = j\omega C$ $B_C = \omega C$ $\varphi_Y = \pi/2$	$\underline{Y}_L = \frac{-j}{\omega L} = \frac{1}{j\omega L}$ $B_L = -\frac{1}{\omega L}$ $\varphi_Y = -\pi/2$
		

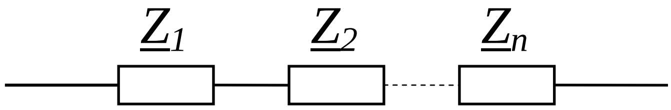
Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Parallelschaltung R und C	Serieschaltung R und L
	
Widerstandsoperator, Impedanz $\underline{Z}$	
$\underline{Z} = \dfrac{1}{G + j\omega C}$ $Z = \dfrac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}}$ $\varphi_Z = -\arctan \dfrac{\omega C}{G}$	$\underline{Z} = R + j\omega L$ $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ $\varphi_Z = \arctan \dfrac{\omega L}{R}$
	
Leitwertoperator, Admittanz $\underline{Y}$	
$\underline{Y} = G + j\omega C$ $Y = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}$ $\varphi_Y = \arctan \dfrac{\omega C}{G}$	$\underline{Y} = \dfrac{1}{R + j\omega L}$ $Y = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ $\varphi_Y = -\arctan \dfrac{\omega L}{R}$

W9: ANWENDUNG DER OPERATOREN

Serieschaltung von Impedanzen

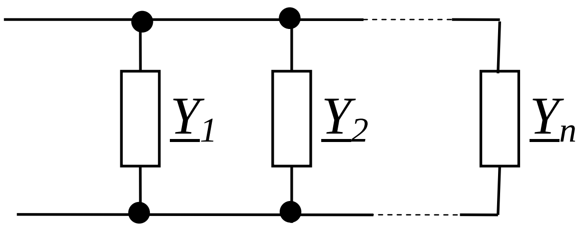
$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$$
$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 \cdots$$
$$\underline{Z}_n = R_n + jX_n$$



$$\boxed{\underline{Z} = \left(R_1 + R_2 + \cdots + R_n\right) + j\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)}$$

Parallelschaltung von Admittanzen

$$\underline{Y}_1 = G_1 + jB_1$$
$$\underline{Y}_2 = G_2 + jB_2 \cdots$$
$$\underline{Y}_n = G_n + jB_n$$



$$\boxed{\underline{Y} = \left(G_1 + G_2 + \cdots + G_n\right) + j\left(B_1 + B_2 + \cdots + B_n\right)}$$

Serie-Parallel-Umwandlung

Eine Parallelschaltung von Wirk- und Blindleitwert lässt sich immer in die gleichwertige Serieschaltung mit Wirk- und Blindwiderstand umwandeln.

Parallelschalt. $\rightarrow$ Serie	Serieschalt. $\rightarrow$ Parallel
$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G_P + jB_P} =$	$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_S + jX_S} =$
$= \frac{G_P - jB_P}{G_P^{\,2} + B_P^{\,2}} = R_S + jX_S$	$= \frac{R_S - jX_S}{R_S^{\,2} + X_S^{\,2}} = G_P + jB_P$
$R_S = \frac{G_P}{\lvert\underline{Y}\rvert^2}$ *und* $X_S = -\frac{B_P}{\lvert\underline{Y}\rvert^2}$	$G_P = \frac{R_S}{\lvert\underline{Z}\rvert^2}$ *und* $B_P = -\frac{X_S}{\lvert\underline{Z}\rvert^2}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Spannungsteiler

Analog zum Gleichstromfall (mit ohmschen Widerständen):

Fall mit zwei Impedanzen:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

allgemein:

$$\boxed{\underline{U}_1 = \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_T} = \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \cdots + \underline{Z}_n}}$$

Stromteiler

Analog zum Gleichstromfall (mit den Leitwerten):

Fall mit zwei Admittanzen:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}\,\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

allgemein:

$$\boxed{\underline{I}_1 = \underline{I}\,\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_T} = \underline{I}\,\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \cdots + \underline{Y}_n}}$$

Gekoppelte Spulen

Strom-Spannungsgleichungen:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{12} \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_{21} \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

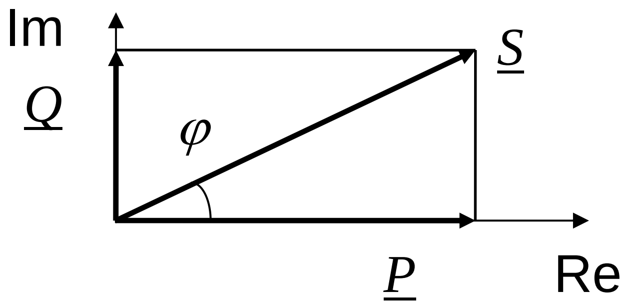
W10: KOMPLEXE LEISTUNG

Aus 6. "Analyse im Zeitbereich" bekannt:

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ und $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctan \dfrac{Q}{P}$

Übergang zu komplexer Schreibweise:

$$\boxed{\underline{S} = P + jQ = S\angle\varphi}$$



Wird zur Berechnung von $\underline{S}$ das Produkt $\underline{U} \cdot \underline{I}$ gebildet, entsteht der falsche Winkel $\varphi = \varphi_u + \varphi_i$.
Der richtige Winkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ entsteht, wenn $\underline{U}$ mit dem **konjugiert kompl. Strom** $\underline{I}^*$ multipliziert wird:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*}$$

$(\underline{I} \cdot \underline{I}^* = I^2, \quad \underline{U} \cdot \underline{U}^* = U^2, \quad \underline{I}^* = (\underline{U} \cdot \underline{Y})^* = \underline{U}^* \cdot \underline{Y}^*)$

$\Rightarrow \qquad \underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = I^2 \cdot \underline{Z} = I^2 \cdot 1/\underline{Y}$

und $\quad \underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} \cdot \underline{U}^* \cdot \underline{Y}^* = U^2 \cdot \underline{Y}^* = U^2 \cdot 1/\underline{Z}^*$

gegeben	Spannung U	Strom I
Impedanz $\underline{Z}$	$\underline{S} = \dfrac{U^2}{\underline{Z}^*}$	$\underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z}$
Admittanz $\underline{Y}$	$\underline{S} = U^2 \cdot \underline{Y}^*$	$\underline{S} = \dfrac{I^2}{\underline{Y}}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

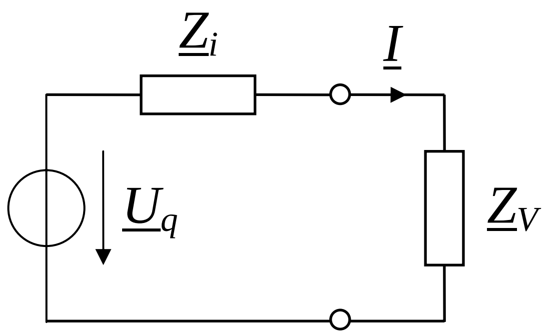
LEISTUNGSANPASSUNG

Anpassung: die Quelle gibt die maximal mögliche Leistung an den Verbraucher ab.

Gleichstrom: Verbraucherwiderstand = Innenwiderstand der Quelle

Wechselstrom

Wirkleistungsanpassung



$$I = \frac{U_q}{\left|\underline{Z}_i + \underline{Z}_V\right|}$$

$$P_V = I^2 \cdot R_V = \frac{U_q{}^2 \cdot R_V}{\left(R_i + R_V\right)^2 + \left(X_i + X_V\right)^2}$$

Optimum bei $\boxed{X_V = -X_i}$ (Nenner minimal)

$$\Rightarrow \quad P_{opt} = \frac{U_q{}^2 \cdot R_V}{\left(R_i + R_V\right)^2}$$ Maximum bei $R_V = ?$

für $$\frac{dP_{opt}}{dR_V} = U_q{}^2 \, \frac{\left(R_i + R_V\right)^2 - 2\left(R_i + R_V\right)R_V}{\left(R_i + R_V\right)^4} = 0$$

Maximum bei $\boxed{R_V = R_i}$ bzw. $\boxed{\underline{Z}_V = \underline{Z}_i{}^*}$ oder $\boxed{\underline{Y}_V = \underline{Y}_i{}^*}$

$$\Rightarrow \quad P_{\max} = \frac{U_q{}^2}{4R_i} = \frac{I_q{}^2}{4G_i}$$ wie bei Gleichstrom

Wirkungsgrad: $\eta = 0.5$

Scheinleistungsanpassung $\boxed{\underline{Z}_V = \underline{Z}_i}$ oder $\boxed{\underline{Y}_V = \underline{Y}_i}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W11: ORTSKURVEN

Darstellung der Wirkung bei veränderlichen Bedingungen im Stromkreis.

Verlauf von **Betrag und Phase** der Impedanz / Admittanz bzw. von Spannung / Strom und Leistung in Funktion der Frequenz oder der Netzwerk-elemente (Widerstand, Kapazität und Induktivität).

Eigenschaften

- Die Grundschaltungen führen zu Ortskurven vom **Geraden-** oder vom **Kreistyp**.
- Die reelle und die imaginäre Achse haben den gleichen Massstab.
- Die Ortskurve ist der geometrische Ort aller **Endpunkte** (Zeigerspitzen) der komplexen Grösse, die sich in Funktion eines Parameters ändert.
- In erster Linie interessiert der Verlauf von $\underline{Z}$ und von $\underline{Y}$, davon kann der Verlauf von $\underline{U}$, von $\underline{I}$ und von $\underline{S}$ abgeleitet werden.
- Die Ortskurve von $\underline{Z}$ geht durch **Inversion** in diejenige von $\underline{Y}$ über:
  OK vom Geradentyp (nicht durch Nullpunkt)
  $\Leftrightarrow$ OK vom Kreistyp (berührt den Nullpunkt)
  der Phasenwinkel ändert das Vorzeichen (Spiegelung).

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

KREISDIAGRAMM

Es ermöglicht eine rasche **Inversion** komplexer Zahlen und die grafische Ermittlung von $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ von Netzwerken, sowie der Ortskurven.

Eigenschaften

- Konforme, d.h. winkeltreue Doppelebene
  $\underline{Z}$-Ebene $\Leftrightarrow$ $\underline{Y}$-Ebene
  $\Rightarrow$ die Geraden eines rechtwinkligen Koordinatensystems gehen über in Kreise und Halbkreise.
  NB: das Verhältnis Im/Re bleibt gleich gross!
- In der **Grundebene** (parallele Geraden) werden die Punkte durch **Koordinaten** x, y beschrieben.
- In der **invertierten Ebene** (Kreise) werden die Punkte durch die **Parameter** $(x), (y)$ (eingekreist) beschrieben.
- Einfachste Anwendung: Inversion, wobei
  $\underline{Z}$ und $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ am selben Ort sind!
- Empfehlung: bei der Anwendung so vorgehen, dass das Resultat in der Grundebene liegt.
- Anpassung der Werte an das Kreisdiagramm durch Abspaltung eines Zahlenfaktors:

$$\underline{Z} = \underline{z} \cdot m \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{z} \cdot m} = \underline{y}\frac{1}{m} \text{ oder}$$

$$\underline{Y} = \underline{y} \cdot n \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{y} \cdot n} = \underline{z}\frac{1}{n}$$

W12: FREQUENZGANG

Grundsätzlich ist damit jede **Frequenzabhängigkeit** gemeint, so auch die entsprechenden Ortskurven.

Oft wird mit Frequenzgang aber das Übertragungsverhalten eines passiven **Vierpols** bezeichnet, nämlich Spannungs- und Stromverhältnisse.

Beispiel

eine sinusförmige Eingangsspannung $\underline{U}_1$

$\Rightarrow$ sinusförmige Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ mit anderer Amplitude und Phase (eingeschwungener Zustand)

Frequenzgang $\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}}$

Amplitudengang $\boxed{\left|\underline{H}(\omega)\right| = \frac{U_2}{U_1}}$

Darstellung in logarithmischem Massstab

$$\boxed{\left|\underline{H}(\omega)\right| = 20 \cdot \log \frac{U_2}{U_1}}$$

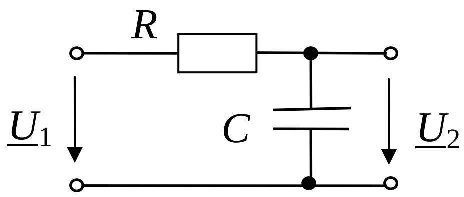
dimensionslose Grösse: "Dezibel", dB
(oft Angabe in $dB/Dekade$ der Frequenz)

Phasengang $\boxed{\varphi(\omega) = \angle\left(\underline{U}_2, \underline{U}_1\right) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\left(\underline{H}\right)}{\mathrm{Re}\left(\underline{H}\right)}}$

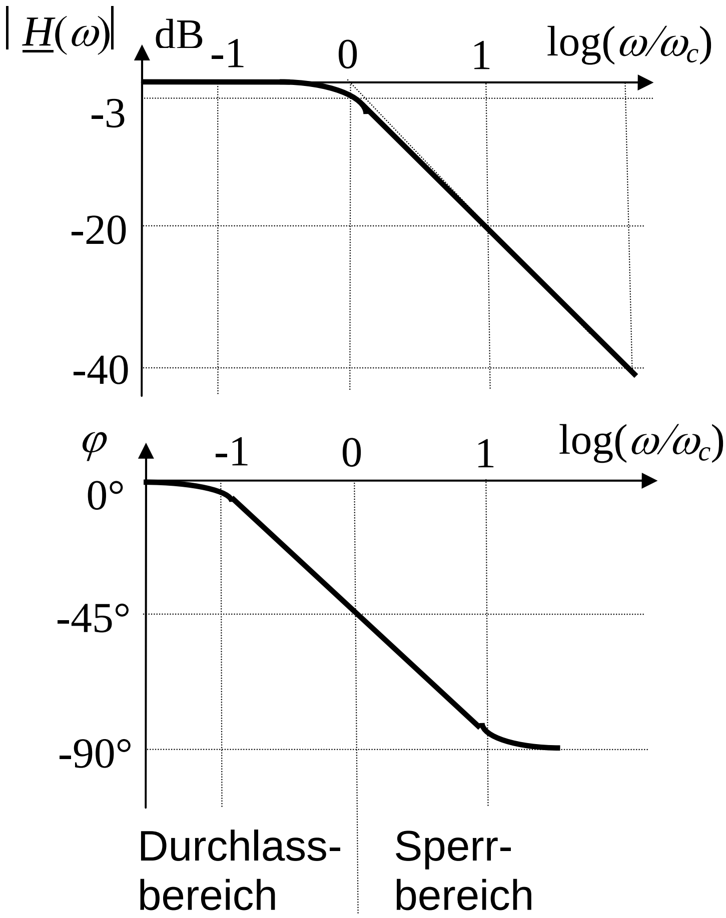
Bodediagramm

Amplituden- und Phasengang separat dargestellt.

TIEFPASS



$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{jX_C}{R + jX_C} = \frac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



Amplitudengang

$$\left|\underline{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Phasengang

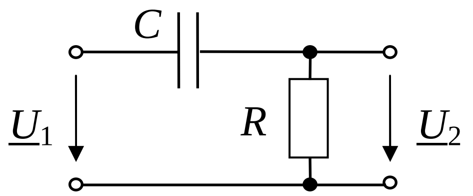
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j\frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}(\underline{H})}{\mathrm{Re}(\underline{H})} = -\arctan(\omega RC)$$ $\underline{U}_2$ nacheilend

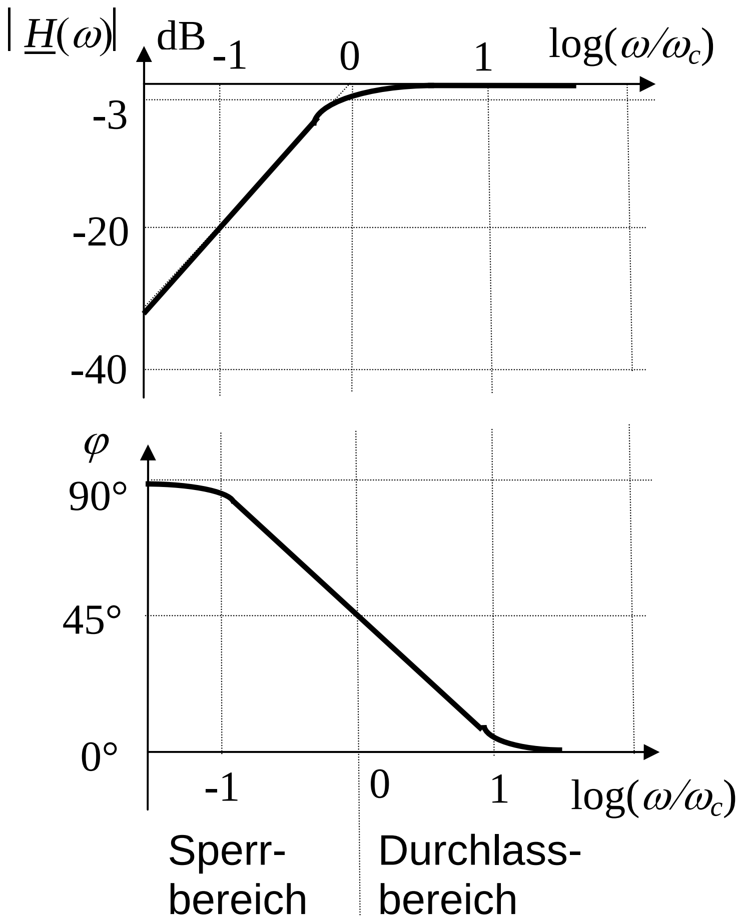
Grenzfrequenz f_c (cut-off frequency)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\,dB \Rightarrow \omega_c\, RC = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \; und \; \left|X_C\right| = R$$

HOCHPASS



$$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}=\frac{R}{R+jX_C}=$$
$$=\frac{R}{R-j\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega RC}}$$



Amplitudengang

$$\left|\underline{H}(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

Phasengang

$$\underline{H}(\omega)=\frac{1+j\dfrac{1}{\omega RC}}{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}+j\frac{\dfrac{1}{\omega RC}}{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}$$

$$\boxed{\varphi(\omega)=\arctan\frac{\mathrm{Im}(\underline{H})}{\mathrm{Re}(\underline{H})}=\arctan\frac{1}{\omega RC}}$$ $\underline{U}_2$ voreilend

Grenzfrequenz f_c (cut-off frequency)

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=-3\,dB\Rightarrow\frac{1}{\omega_c RC}=1\Rightarrow\omega_c=\frac{1}{RC}\;und\;\left|X_C\right|=R$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W13: RESONANZKREISE

SCHWINGUNG

Ein System ist schwingfähig, wenn es mindestens zwei artverschiedene Energiespeicher enthält, die untereinander Energie austauschen können.

Schwingung

- **ungedämpft**: konstante Amplitude, verlustfrei
- **gedämpft**: abnehmende Amplitude, verlustbehaftet
- **erzwungen**: die Frequenz entspricht derjenigen der angeschlossenen Quelle
- **frei**: Schwingung mit der Eigenfrequenz (entspricht im verlustfreien Fall der Resonanzfrequenz des Systems)

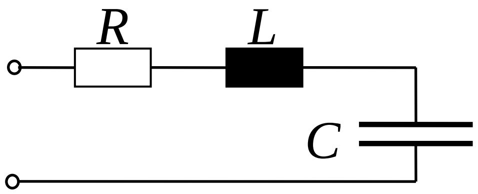
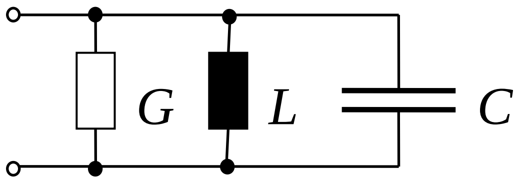
Elektrotechnik

Die Energiespeicher sind der Kondensator (statisch) und die Spule (dynamisch).

Die Verluste entstehen durch den ohmschen Widerstand.

Netzwerke können auf eine **Serie-** oder **Parallelschaltung** der drei Grundelemente zurückgeführt werden.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

SERIE	PARALLEL
	
$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$	$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$
$\lvert\underline{Z}\rvert = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$\lvert\underline{Y}\rvert = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$
$\varphi_Z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$	$\varphi_Y = \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$

RESONANZ $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = \mathrm{Im}(\underline{Y}) = 0$

Resonanzfrequenz ω_0

Serie	Parallel
$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$	$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}}$$

Kennwiderstand $X_0 \; (= Z_0)$
= Blindkomponenten bei ω_0

Serie	Parallel
$\boxed{X_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (= Z_0)}$	$\boxed{B_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Güte Q = $Blindkomponente / Wirkkomponente$ bei ω_0

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} \qquad \boxed{Q = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

obere und untere Grenzfrequenz ω_{c_o} und ω_{c_u}
= 45°- oder 3dB-Frequenzen
(Z und Y steigen auf den $\sqrt{2}$-fachen Wert von ω_0)

$$\omega_c = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \qquad \omega_c = \pm\frac{G}{2C} + \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\boxed{\omega_{c_{o,u}} = \omega_0\left(\pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)}$$

NB: $\omega_0 = \sqrt{\omega_{c_o} \cdot \omega_{c_u}}$ und für $Q \rangle\rangle 1 \Rightarrow \omega_c = \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$

Bandbreite:	$\boxed{b = \omega_{c_o} - \omega_{c_u} = \frac{\omega_0}{Q}}$
relative Bandbreite:	$\boxed{d = \frac{b}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$ = Verlustfaktor
Verstimmung:	$\boxed{v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \Omega - 1/\Omega}$
45°-Verstimmung:	$\boxed{v_{c_{o,u}} = \pm\frac{1}{Q} = \pm d}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

FREQUENZABHÄNGIGKEIT VON I UND U

Seriekreis an idealer Spannungsquelle $\underline{U}_q$	Parallelkreis an idealer Stromquelle $\underline{I}_q$

$$\frac{I(\Omega)}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\Omega-1/\Omega)^2}} = \frac{U(\Omega)}{U_0}$$

mit $I_0 = \frac{U_q}{R}$ und mit $U_0 = \frac{I_q}{G}$

NB: $\frac{I_{c_{o,u}}}{I_o} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{U_{c_{o,u}}}{U_0}$

$$\frac{U_R(\Omega)}{U_q} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\Omega-1/\Omega)^2}} = \frac{I_G(\Omega)}{I_q}$$

$$\frac{U_L(\Omega)}{U_q} = \frac{Q\cdot\Omega}{\sqrt{1+Q^2(\Omega-1/\Omega)^2}} = \frac{I_C(\Omega)}{I_q}$$

Maximum: $\Omega_{L_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2\cdot Q^2}}} = \Omega_{C_{\max}}$

$$\frac{U_C(\Omega)}{U_q} = \frac{Q}{\Omega\cdot\sqrt{1+Q^2(\Omega-1/\Omega)^2}} = \frac{I_L(\Omega)}{I_q}$$

Maximum: $\Omega_{C_{\max}} = \sqrt{1-\frac{1}{2\cdot Q^2}} = \Omega_{L_{\max}}$

Kurvenformen: siehe Beilage.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W14: ÜBERTRAGER

Es handelt sich um Stromkreise, die durch ein gemeinsames Magnetfeld linear gekoppelt sind (Luftspulen oder Kern mit Luftspalt), zwecks

- Realisierung besonderer Übertragungsfunktionen,
- Netzwerkanpassung,
- Energieübertragung.

Aufbau der gekoppelten Spulen gemäss Kapitel "Gegeninduktion" (Magnetismus).

VERLUSTLOSER ÜBERTRAGER

Beschreibung im Frequenzbereich:

$$\underline{U}_1 = j\,\omega\,L_1\,\underline{I}_1 + j\,\omega\,L_{12}\,\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = j\,\omega\,L_{21}\,\underline{I}_1 + j\,\omega\,L_2\,\underline{I}_2$$

Umformung mit $L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1\,L_2}$

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\underline{U}_2 - j\omega\frac{1-k^2}{k}\sqrt{L_1 L_2}\,\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{j\omega k\sqrt{L_1 L_2}}\underline{U}_2 - \frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\underline{I}_2$$

Übersetzungsverhältnis

- *im Leerlauf*, d.h. $I_2 = 0$:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

- *bei Belastung* mit $\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2}$:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} + j\omega \frac{1-k^2}{k}\sqrt{L_1 L_2}\,\frac{1}{\underline{Z}_2}$$

- *bei ideal fester Kopplung* mit $|k| = 1$:
  belastungsunabhängiges Übersetzungsverhältnis
  $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \operatorname{sgn} k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$ + gleichsinnig bzw. - gegensinnig

Fall gleichsinnig:

$$\boxed{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{N_1^{\,2} G_m}{N_2^{\,2} G_m}} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}_{12}}$$

Stromübersetzung

Übertrager verlustlos und mit ideal fester Kopplung:

$$\underline{U}_1\,\underline{I}_1^{\,*} + \underline{U}_2\,\underline{I}_2^{\,*} = 0 = \underline{U}_1\left(\underline{I}_1^{\,*} + \frac{1}{\ddot{u}_{12}}\,\underline{I}_2^{\,*}\right)$$

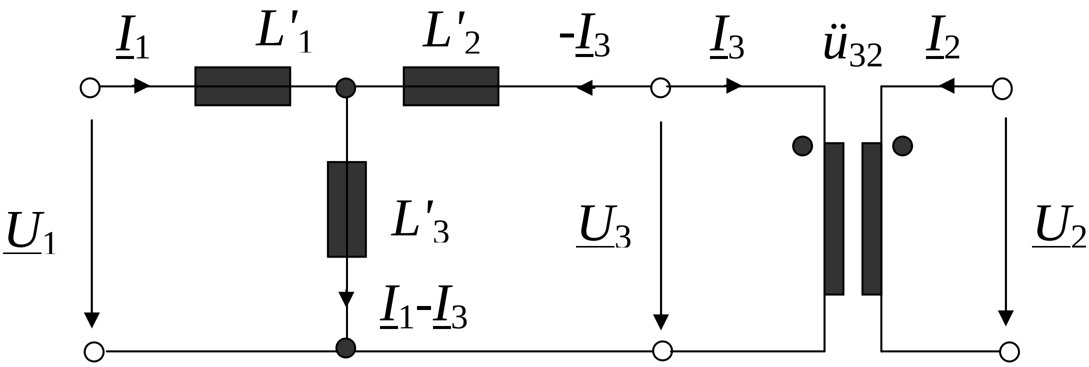
$$\boxed{\frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} = \frac{1}{\ddot{u}_{12}}}$$

Netzwerktransformation

$$\boxed{\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\ddot{u}_{12}^{\,2}\,\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} = \ddot{u}_{12}^{\,2}\,\underline{Z}_2} \quad \text{oder} \quad \boxed{\underline{Y}_1 = \frac{1}{\ddot{u}_{12}^{\,2}}\,\underline{Y}_2}$$

Vierpolersatzschaltungen

Ziel: Kettenschaltung von idealen induktiven Zweipolen mit einem idealen Übertrager, wobei dieser nach einer Netzwerktransformation auch weggelassen werden kann (keine galvanische Trennung mehr vorhanden).



aus den Gleichungen für gekoppelte Spulen

$$\underline{U}_1 = j\,\omega\,L_1\,\underline{I}_1 + j\,\omega\,L_{12}\,\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = j\,\omega\,L_{21}\,\underline{I}_1 + j\,\omega\,L_2\,\underline{I}_2$$

und einem idealen Übertrager $ü_{32}$, folgt:

$$\underline{U}_1 = j\,\omega\,L_1\,\underline{I}_1 - j\,\omega\,L_{12}\,ü_{32}\,\underline{I}_3$$

$$\underline{U}_3 = ü_{32}\,\underline{U}_2 = ü_{32}\left(j\,\omega\,L_{12}\,\underline{I}_1 - j\,\omega\,L_2\,ü_{32}\,\underline{I}_3\right)$$

Maschengleichungen:

$$\underline{U}_1 = j\,\omega\,L'_1\,\underline{I}_1 + j\,\omega\,L'_3\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_3\right)$$

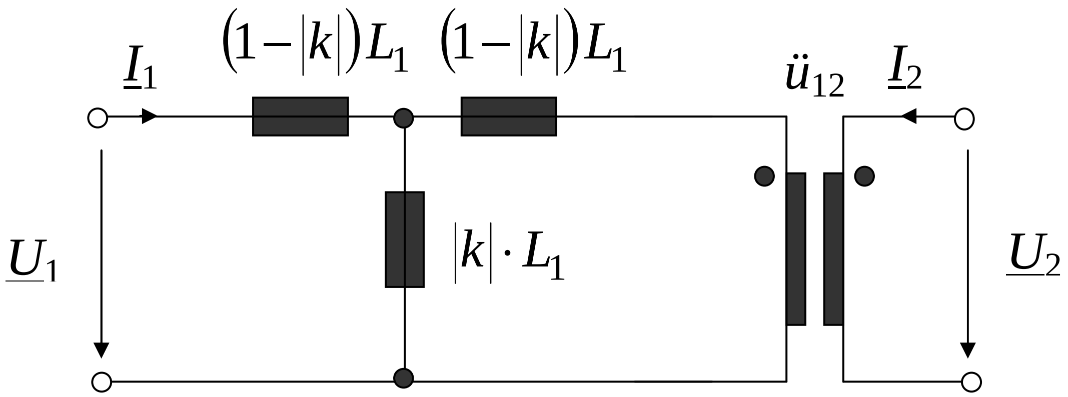
$$\underline{U}_3 = j\,\omega\,L'_3\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_3\right) - j\,\omega\,L'_2\,\underline{I}_3$$

Koeffizientenvergleich:

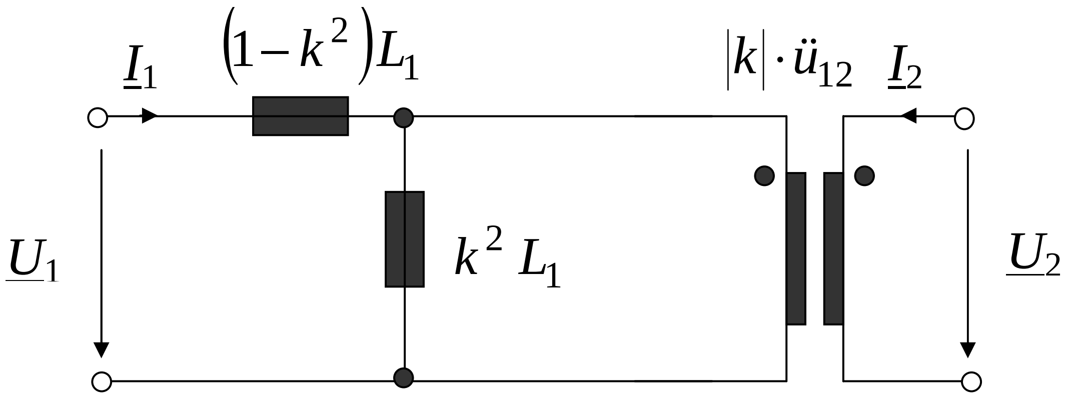
$$\boxed{L'_1 = L_1 - ü_{32}\,L_{12} \qquad L'_2 = ü_{32}{}^2\,L_2 - ü_{32}\,L_{12} \qquad L'_3 = ü_{32}\,L_{12}}$$

$ü_{32}$ ist frei wählbar!

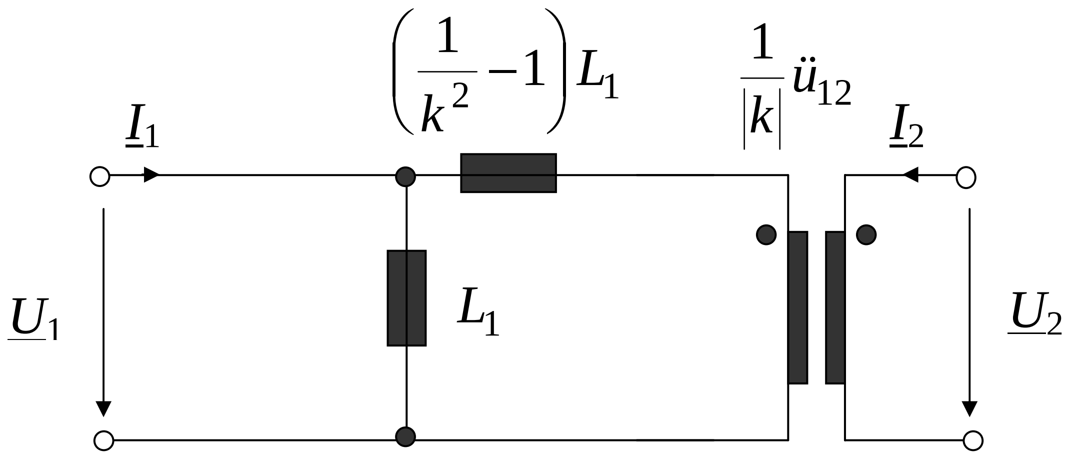
- Fall $\ddot{u}_{32} = \ddot{u}_{12} \Rightarrow$ symmetrische Ersatzschaltung:



- Fall $L_2' = 0 \Rightarrow$ unsymmetrische Ersatzschaltung:



- Fall $L_1' = 0 \Rightarrow$ unsymmetrische Ersatzschaltung:



Streufaktor

$$\boxed{\sigma = 1-k^2}$$

W15: TRANSFORMATOR

Im Gegensatz zum Übertrager wird der Transformator bei einer festen Frequenz eingesetzt.

Zur magn. Kopplung wird ein geblechter Kern aus weichmagnetischem, meist kornorientiertem Stahl eingesetzt.

Grundsätzliche Bauarten: Kerntyp und Manteltyp.

Als Nennleistung wird die zulässige Scheinleistung bezeichnet.

Zweck

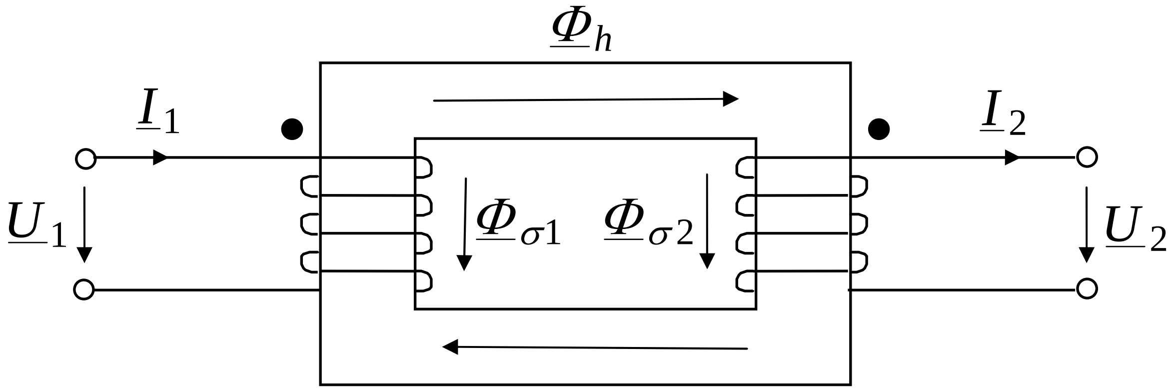
Umwandlung einer Wechselspannung in eine andere, mit dem Ziel der Reduktion der Verluste beim Energietransport über grosse Distanzen.

Galvanische Trennung von Netzen.

Typen

- Trenntransformator
- Kleintransformator (einige VA)
  (Trockentransformator)
- Maschinentransformator (bis 1100 MVA)
  (Öltransformator)
- Einphasentransformator
  (Oberspannungs- und Unterspannungswicklung)
- Dreiphasentransformator

ERSATZSCHALTUNG



magn. Fluss im Transformator

Hauptfluss $\underline{\Phi}_h$

Fluss, der mit beiden Spulen verkettet ist,
Annahme: konst. magn. Leitwert des Kerns G_{mh}:

$$\underline{\Phi}_h = G_{mh}\left(N_1 \cdot \underline{I}_1 - N_2 \cdot \underline{I}_2\right)$$

primärer Streufluss $\underline{\Phi}_{\sigma 1}$

Fluss, der nur mit der Primärspule verkettet ist,
mit dem Leitwert des Streuraumes $G_{m\sigma 1}$:

$$\underline{\Phi}_{\sigma 1} = G_{m\sigma 1} \cdot N_1 \cdot \underline{I}_1$$

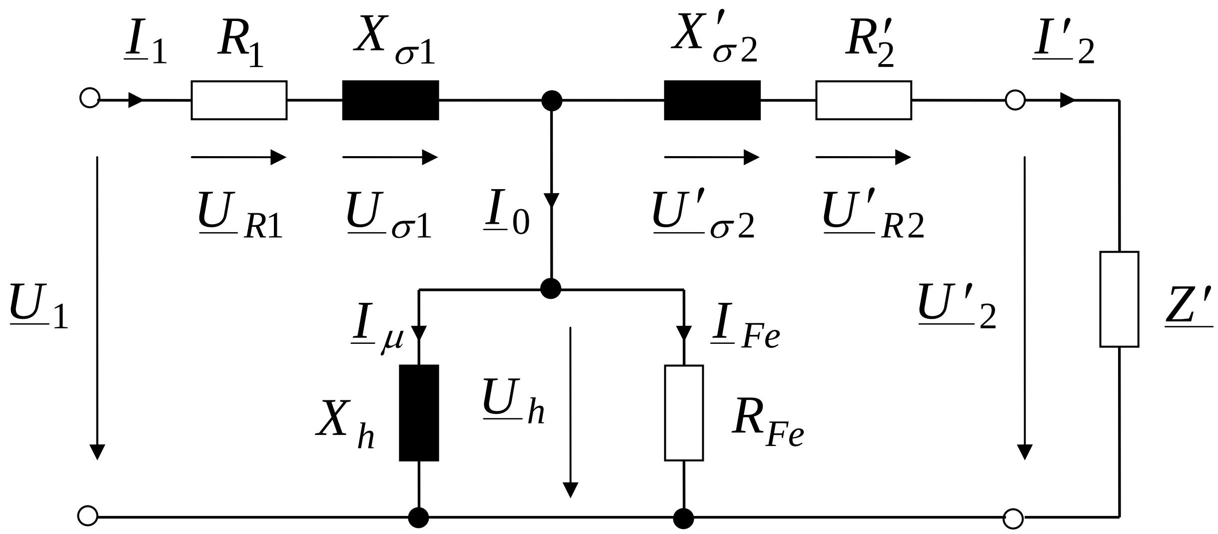
sekundärer Streufluss $\underline{\Phi}_{\sigma 2}$

Fluss, der nur mit der Sekundärspule verkettet ist,
mit dem Leitwert des Streuraumes $G_{m\sigma 2}$:

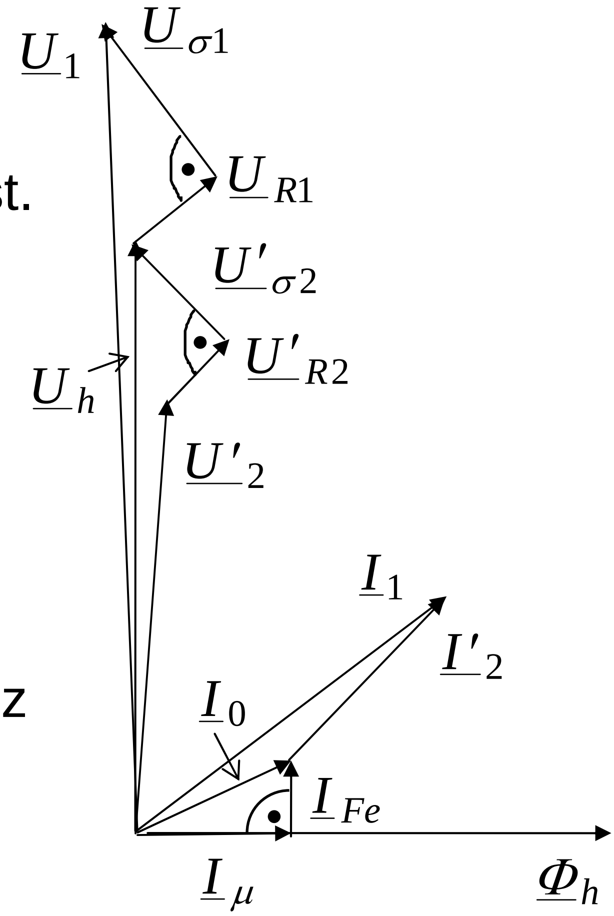
$$\underline{\Phi}_{\sigma 2} = G_{m\sigma 2} \cdot N_2 \cdot \underline{I}_2$$

NB: Weitere Zusammenhänge gemäss Kapitel
"Übertrager".

vollständige Ersatzschaltung



Zeigerdiagramm



$R_1 =$ prim. Cu-Widerstand

$R'_2 = \ddot{u}^2 \cdot R_2 =$ sek. Cu-Widerst.

$X_{\sigma 1} = \omega(L_1 - \ddot{u} \cdot M) =$ prim. Streureaktanz

$X'_{\sigma 2} = \omega\left(\ddot{u}^2 \cdot L_2 - \ddot{u} \cdot M\right) =$ sek. Streureaktanz

$R_{Fe} =$ Eisenwiderstand

$X_h = \omega \cdot \ddot{u} \cdot M =$ Hauptreaktanz

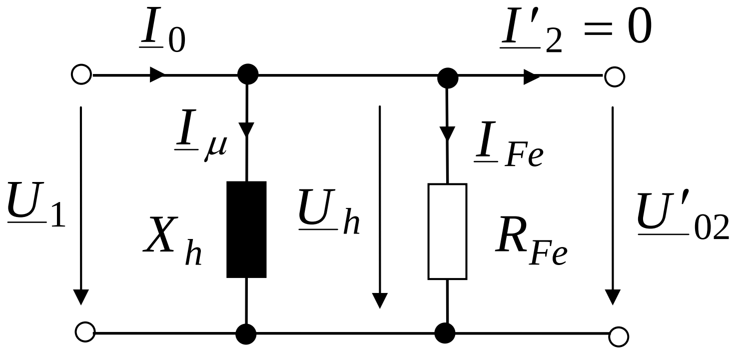
$\underline{Z}' = \ddot{u}^2 \cdot \underline{Z} =$ Lastimpedanz

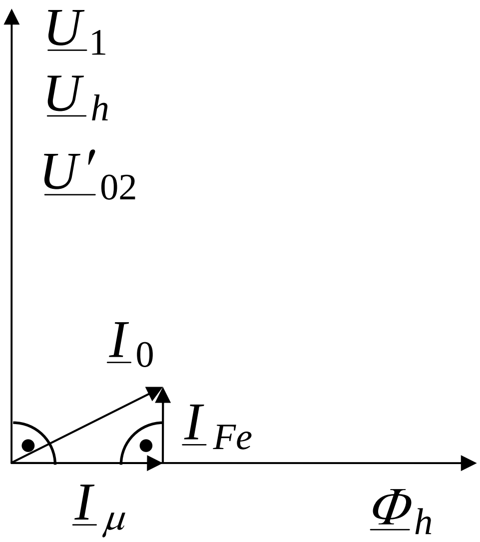
$\underline{U}_h =$ Hauptfeldspannung

$\underline{I}_0 =$ Leerlaufstrom $\quad \underline{I}_\mu =$ Magnetisierungsstrom

$\underline{U}'_2 = \ddot{u} \cdot \underline{U}_2, \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}_2 / \ddot{u} \quad (\ddot{u} = N_1 / N_2\,,\; M = L_{12} = L_{21})$

Transformator im Leerlauf





R_1 und $X_{\sigma 1}$ sind vernachlässigbar gegenüber R_{Fe} und X_h

Nennspannungen

primäre Spannung U_{N1} und
sekundäre Leerlaufspannung $U_{02} = U_{N2}$

Transformator-Hauptgleichungen:

$$\boxed{U_{N1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi \cdot f \cdot N_1 \cdot \hat{\Phi}_h \textit{ und } U_{N2} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi \cdot f \cdot N_2 \cdot \hat{\Phi}_h}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{U_{N1}}{U_{N2}} = \ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \text{(NB: } \hat{\Phi}_h = \hat{B} \cdot A_{Fe}\text{)}$$

Leerlaufverluste P_0

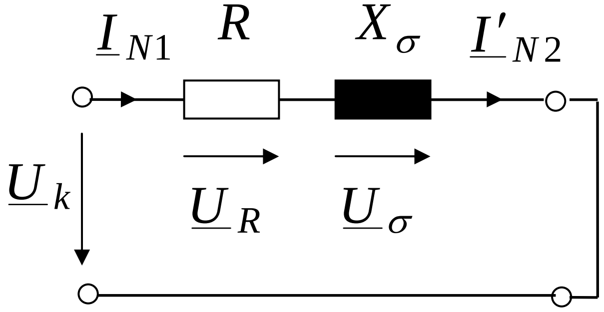
Sie entsprechen praktisch den Eisenverlusten bei Nennbetrieb.

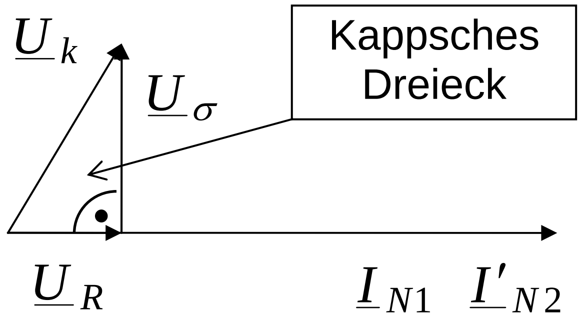
Nennleistung S_N

$$\boxed{S_N = U_{N1} \cdot I_{N1} = U_{N2} \cdot I_{N2}}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Transformator im Kurzschluss





mit $R = R_1 + R_2'$ und $X_\sigma = X_{\sigma 1} + X'_{\sigma 2}$

Kurzschlussspannung U_k

Eingangsspannung, bei welcher der primäre und sekundäre Nennstrom fliesst:

$$U_k = I_{N1}\sqrt{R^2 + X_\sigma{}^2}$$

$$\boxed{\frac{I_{N1}}{I_{N2}} = \frac{1}{ü} = \frac{N_2}{N_1}}$$

relative Kurzschlussspannung $\boxed{u_k = \frac{U_k}{U_{N1}}}$

Dauerkurzschlussstrom $\boxed{I_{dk} = \frac{I_{N1}}{u_k}}$

Kurzschlussverluste $P_k \approx$ Kupferverl. bei Nennbetr.

Kappsches Dreieck bei Belastung

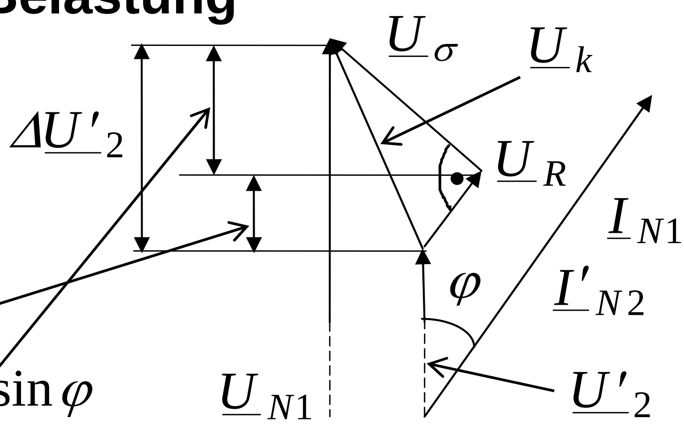
Nennbetrieb mit Vernachlässigung von $\underline{I}_0$

$\Rightarrow$ Ersatzschalt. wie oben

mit $\Delta U_2' = U'_{N2} - U_2'$

je nach φ der Last

$$\Delta U_2' \approx U_R \cdot \cos\varphi + U_\sigma \cdot \sin\varphi$$



Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W16: DREIPHASEN-SYSTEM

Drehstromsystem mit drei Strängen gleicher Frequenz, jedoch verschiedenen Nullphasenwinkeln.

Vorteile

- Bei Verwendung eines Sternpunktleiters stehen zwei Spannungswerte zur Verfügung (230/400 V).
- Auf der Verbraucherseite kann mit drei räumlich um 120° versetzt angeordneten Spulen ein Drehfeld erzeugt werden.
- Verglichen mit einem Einphasensystem wird für gleiche Verluste bei der Energieübertragung nur 75% des Leitermaterials benötigt.

Erzeugung

Synchrongenerator (zweipolig):
Stator: drei Wicklungsstränge, 120° versetzt,
Rotor: Erregerwicklung (Gleichstrom).

Bezeichnung der Anschlüsse von el. Maschinen

Anfang eines Stranges der Drehstromwicklung:
U1, V1 und W1; und das Ende: U2, V2 und W2.

Verkettung

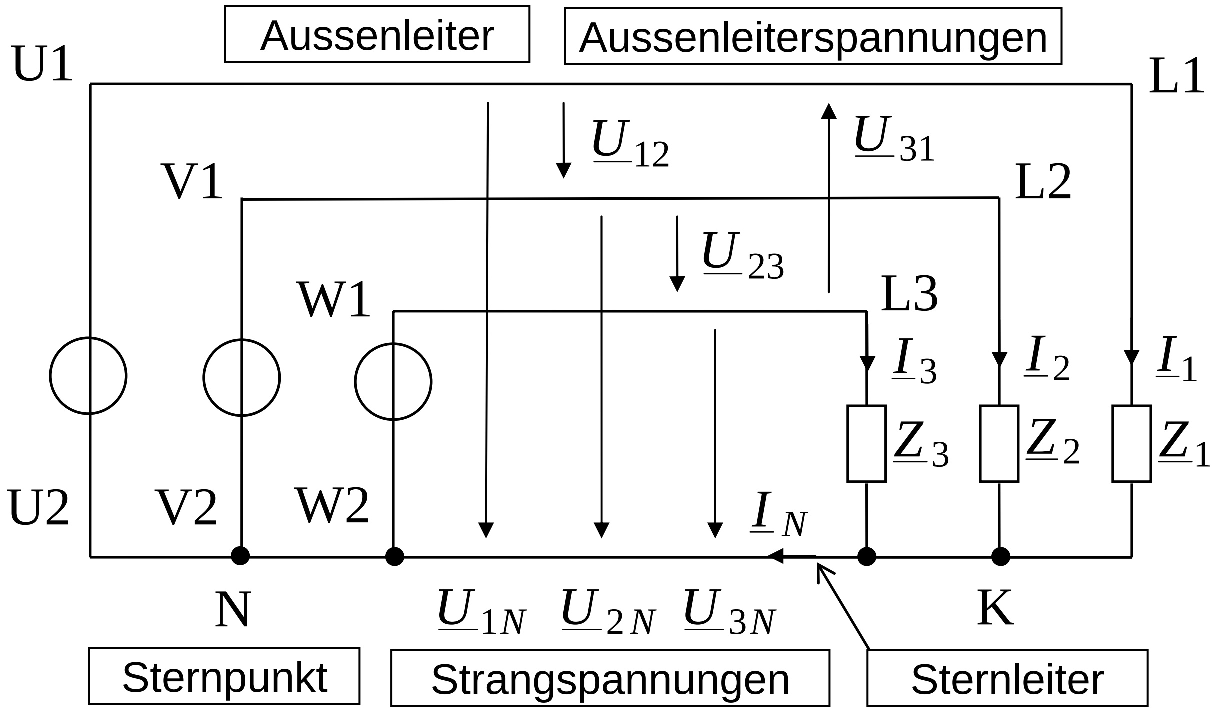
Verbindung der drei Spannungsquellen zu einem System.

Die Summe der Wechselspannungen ist Null!

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

STERNSCHALTUNG

Verbindung von U2, V2 und W2 zum Sternpunkt N.



Vierleitersystem: mit Sternpunktleiter
Dreileitersystem: ohne Sternpunktleiter

Zeigerdiagramm

U_S = Stern- bzw. Strangsp.

$$\underline{U}_{1N} = U_S \angle 0^\circ$$

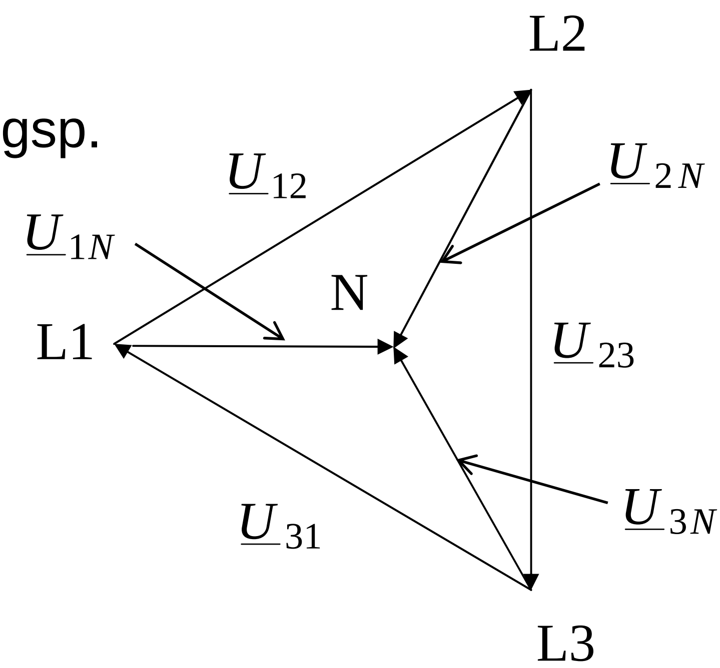
$$\underline{U}_{2N} = U_S \angle -120^\circ$$

$$\underline{U}_{3N} = U_S \angle 120^\circ$$

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot U_S \angle 30^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = \sqrt{3} \cdot U_S \angle -90^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = \sqrt{3} \cdot U_S \angle 150^\circ$$



symmetrische Belastung $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z\angle\varphi$

Stern- bzw. Strangströme $I_S = \dfrac{U_S}{Z}$

$$\underline{I}_1 = I_S\angle-\varphi, \quad \underline{I}_2 = I_S\angle-120^\circ-\varphi, \quad \underline{I}_3 = I_S\angle 120^\circ-\varphi$$

Stromsumme: $\boxed{\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0}$

Wirkleistung: $\boxed{P = 3\cdot U_S \cdot I_S \cdot \cos\varphi}$

Blindleistung: $\boxed{Q = 3\cdot U_S \cdot I_S \cdot \sin\varphi}$

Scheinleistung: $\boxed{\underline{S} = P + jQ = 3\cdot U_S \cdot I_S\angle\varphi}$

mit den Aussenleitergrössen U und I:

$$\boxed{\underline{S} = \sqrt{3}\cdot U \cdot I\ \angle\varphi}$$

unsymmetrische Belastung $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$

- *Vierleitersystem (mit Sternleiter)*

Stromsumme: $\boxed{\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \neq 0}$

Scheinleistung: $\boxed{\underline{S} = \underline{U}_{1N}\,\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N}\,\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N}\,\underline{I}_3^*}$

- *Dreileitersystem (ohne Sternleiter)*

Zwischen dem Knotenpunkt K des Verbrauchers und dem Sternpunkt N tritt die Sternpunktspannung $\underline{U}_{KN}$ auf:

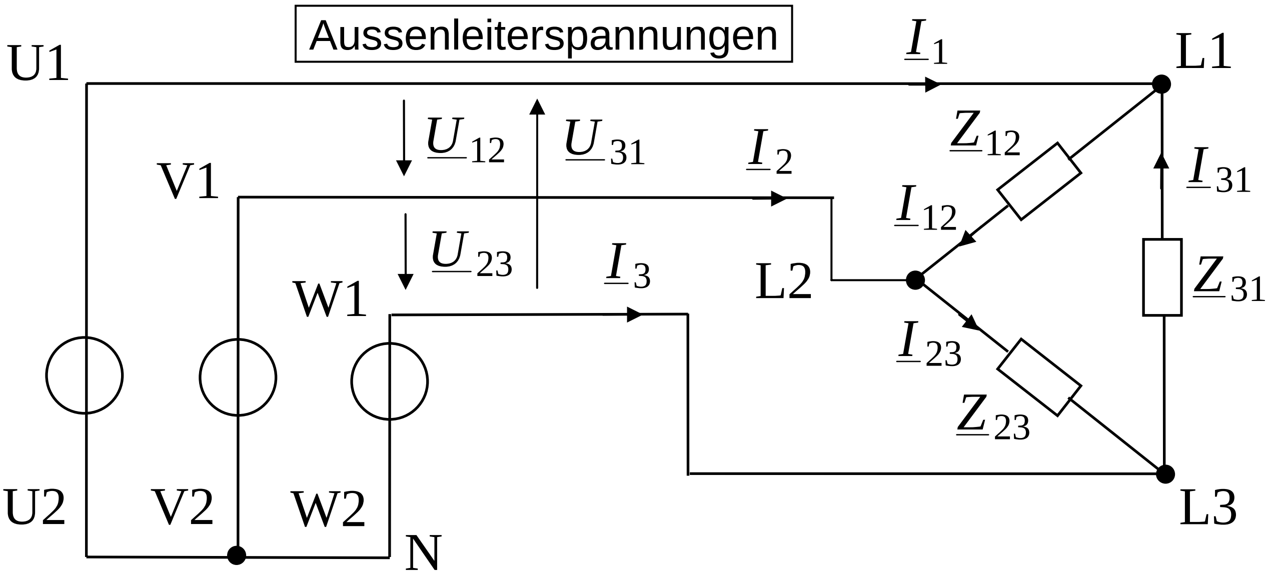
$$\boxed{\underline{U}_{KN} = \frac{\underline{Y}_1\,\underline{U}_{1N} + \underline{Y}_2\,\underline{U}_{2N} + \underline{Y}_3\,\underline{U}_{3N}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}}$$

Scheinleistung: $\boxed{\underline{S} = \underline{U}_{13}\,\underline{I}_1^* + \underline{U}_{23}\,\underline{I}_2^*}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

DREIECKSCHALTUNG

Strangspannung = Dreiecksp. $U_\Delta = U = \sqrt{3} \cdot U_S$



$$\underline{U}_{12} = U_\Delta \angle 30^\circ, \quad \underline{U}_{23} = U_\Delta \angle -90^\circ, \quad \underline{U}_{31} = U_\Delta \angle 150^\circ$$

symmetr. Belastung $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = Z\angle\varphi$

Dreieck- bzw. Strangströme $I_\Delta = \dfrac{U_\Delta}{Z}$

$$\underline{I}_{12} = I_\Delta \angle 30^\circ - \varphi, \underline{I}_{23} = I_\Delta \angle -90^\circ - \varphi, \underline{I}_{31} = I_\Delta \angle 150^\circ - \varphi$$

Aussenleiterströme:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \sqrt{3} \cdot I_\Delta \angle -\varphi$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \sqrt{3} \cdot I_\Delta \angle -120^\circ - \varphi \qquad \boxed{I = \sqrt{3} \cdot I_\Delta}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \sqrt{3} \cdot I_\Delta \angle 120^\circ - \varphi$$

Scheinleistung: $\boxed{\underline{S} = 3 \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \angle\varphi = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \angle\varphi}$

unsymmetrische Belastung $\underline{Z}_{12} \neq \underline{Z}_{23} \neq \underline{Z}_{31}$

Scheinleistung: $\boxed{\underline{S} = \underline{U}_{13}\, \underline{I}_1^{\,*} + \underline{U}_{23}\, \underline{I}_2^{\,*}}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

W17: PERIODISCHE, NICHTSINUSFÖRMIGE SIGNALE

HARMONISCHE SYNTHESE

Zusammensetzung einer periodischen, nichtsinusförmigen Schwingung aus Sinusgrössen.

Teilschwingungen

Sinusschwingungen, die zusammengesetzt eine periodische Schwingung ergeben.

Grundschwingung

grösster gemeinsamer Teiler der Frequenzen sämtlicher Teilschwingungen: f_1 oder ω_1

Oberschwingungen

harmonische Schwingungen mit $f = k \cdot f_1, \quad k \rangle 1$

Gleichwert

existiert, falls eine Mischgrösse vorhanden ist: $k = 0$

FOURIER-REIHE

$$\boxed{y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{y}_k \cdot \sin\left(k\omega_1 t + \varphi_k\right)}$$ oder

$$\boxed{y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos k\omega_1 t + b_k \cdot \sin k\omega_1 t\right)}$$

mit $a_k = \hat{y}_k \cdot \sin\varphi_k$ und $b_k = \hat{y}_k \cdot \cos\varphi_k$

weiter gilt: $\hat{y}_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}$ und $\boxed{\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k}}$

- **Synthese mit cos-Gliedern**

Ist der Fall, wenn $\varphi_k = -\pi/2$ oder $\varphi_k = \pi/2$:

$a_k \neq 0; \quad b_k = 0$

$\Rightarrow$ **gerade Zeitfunktion**: $y(t) = y(-t)$

- **Synthese mit sin-Gliedern**

Ist der Fall, wenn $\varphi_k = 0$ oder $\varphi_k = \pi$:

$Y_0 = 0; \quad a_k = 0; \quad b_k \neq 0$

$\Rightarrow$ **ungerade Zeitfunktion**: $y(t) = -y(-t)$

- **Synthese mit cos- und sin-Gliedern ungerader Ordnungszahl** $k = 1; 3; 5 \cdots$

Jeder Funktionswert tritt jeweils nach $T/2$ mit umgekehrtem Vorzeichen auf:

$\Rightarrow$ **alternierende Zeitfunktion**: $y(t) = -y\left(t + \frac{T}{2}\right)$

- **Synthese mit cos- und sin-Gliedern gerader Ordnungszahl** $k = 2; 4; 6 \cdots$

Die Grundschwingung ist in der Funktion nicht enthalten. Typisch für Schwingungen, die aus Teilen von Sinuskurven bestehen.

SPEKTRUM

Aufteilung in Amplituden- und Phasenspektrum.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Linienspektrum

Bei periodischen, nichtsinusförmigen Signalen.

Amplitude und Nullphasenwinkel sind diskrete, senkrechte Linien über der Frequenzachse.

kontinuierliches Spektrum

Bei nichtperiodischen Signalen $(T \to \infty)$.

EFFEKTIVWERT UND LEISTUNG

Effektivwert

Strom mit einem Gleichanteil und Teilschwingungen. Die jeweiligen Effektivwerte sind I_k.

Leistung der Teilsignale an einem Widerstand R:

$$P_k = R \cdot I_k^{\,2}$$

die gesamte Wirkleistung des Stromes ist somit:

$$P = R \cdot I^2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = R \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{\,2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{I = \sqrt{I_0^{\,2} + I_1^{\,2} + I_2^{\,2} + \cdots}}$$

oder $\boxed{U = \sqrt{U_0^{\,2} + U_1^{\,2} + U_2^{\,2} + \cdots}}$ für die Spannung

Wirkleistung

allgemein gilt: $p = u \cdot i$ und $P = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i \cdot dt$

u und i werden als Fourier-Reihen dargestellt:

$$u = U_0 + \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_{1u}) + \hat{u}_2 \cdot \sin(2\omega_1 t + \varphi_{2u}) + \cdots$$
$$i = I_0 + \hat{i}_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_{1i}) + \hat{i}_2 \cdot \sin(2\omega_1 t + \varphi_{2i}) + \cdots$$

die Integrale der Produkte mit der Form:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}_m \cdot \sin(m\omega_1 t + \varphi_{mu}) \cdot \hat{i}_n \cdot \sin(n\omega_1 t + \varphi_{ni}) \cdot dt$$

werden für $m \neq n$ Null!

Für $m = n$ gilt gemäss W6/S.4 (gleiche Frequenz $n\omega_1$):

$$P_n = \frac{\hat{u}_n \cdot \hat{i}_n}{2} \cos(\varphi_{nu} - \varphi_{ni}) = U_n \cdot I_n \cdot \cos\varphi_n \quad \Rightarrow$$

Wirkleistung $\boxed{P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k}$

Scheinleistung $\boxed{S = U\,I}$

Leistungsfaktor $\boxed{\lambda = P/S}$

Blindleistung $|Q| = \sqrt{S^2 - P^2}$

HARMONISCHE ANALYSE

Bestimmung der Teilschwingungen eines Signals:

Mittelwert $\boxed{Y_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t) \cdot dt}$

Fourier-Koeffizienten

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos k\omega_1 t \cdot dt \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin k\omega_1 t \cdot dt}$$

W18: AUSGLEICHSVORGÄNGE

In der Regel durch einen Schaltvorgang verursachter Übergang von einem eingeschwungenen Zustand in einen anderen.

Die Lösung besteht aus der Überlagerung des eingeschwungenen Vorganges mit dem flüchtigen.

Berechnung mit Hilfe der im Kapitel "Netzwerkelemente" behandelten Gleichungen,
zusammen mit Maschen- und Knotengleichungen.

$\Rightarrow$ Netzwerkdifferentialgleichung

Ordnung der Differentialgleichung

Sie ist gegeben durch die Anzahl der unabhängigen Energiespeicher.

Zustandsgrössen

Die Grösse, die den Inhalt eines Energiespeichers bestimmt kann nicht sprunghaft ändern:

u für die Kapazität und i für die Induktivität

eingeschwungener Zustand

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.
Entspricht der Lösung eines Gleich- oder Wechselstromproblems.

flüchtiger Vorgang

Allgemeine Lösung der homogenen DGL, mit Bestimmung der Konstanten.

LÖSUNGSSTRATEGIE

Schaltvorgang bei einer Gleich- oder Wechselspannung.

1. Aufstellen der DGL ab dem Schaltzeitpunkt $t = 0$ für i_L oder u_C.
   Die DGL kann auch von der symbolischen Methode für sinusförmige Erregung abgeleitet werden.
2. Berechnung des eingeschwungenen Zustandes für $t \to \infty$. Entspricht dem stationären Endwert.
3. Lösung der homogenen DGL mit dem Ansatz:
   $i_f = K \cdot e^{\lambda \cdot t}$ (charakteristische Gl.)
   DGL 1. Ordnung: $i_f = K \cdot e^{-t/\tau}$
   $$\tau = \frac{Koeff.\,der\ Ableitung}{Koeff.\,der\ Stammfunktion}$$
4. Bestimmung der Konstanten mit den Anfangsbed.
   $$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_{Le}(0_+) + i_{Lf}(0_+)$$
   $$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_{Ce}(0_+) + u_{Cf}(0_+)$$
   einsetzen in die allgemeine Lösung.
5. Der Ausgleichsvorgang ist die Überlagerung des eingeschwungenen und des flüchtigen Vorgangs.
6. Weitere Berechnungen,
   Liniendiagramme,
   usw.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

GEWINNUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

Aus dem Spezialfall der Netzwerkanalyse im Frequenzbereich (Kapitel W7 und W8):

Ausgehend vom rotierenden Zeiger: $\underline{a} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi_a)}$

Ableitung: $\frac{d\underline{a}(t)}{dt} = j\omega \cdot \underline{a}(t)$ bzw. $\frac{d^n \underline{a}(t)}{dt} = (j\omega)^n \underline{a}(t)$

$\Rightarrow$ ruhender Zeiger: $\boxed{\frac{d^n \underline{a}(t)}{dt} \rightarrow (j\omega)^n \underline{A}}$

Integration: $\int \underline{a}(t) \cdot dt = \frac{\underline{a}(t)}{j\omega}$ bzw.

$$\int_n \cdots \int \underline{a}(t) \cdot dt \cdots dt = \frac{\underline{a}(t)}{(j\omega)^n}$$

$\Rightarrow$ ruhender Zeiger: $\boxed{\int_n \cdots \int \underline{a}(t) \cdot dt \cdots dt \rightarrow \frac{\underline{A}}{(j\omega)^n}}$

Beispiel einer Netzwerkgleichung im Frequenzber.

$$\underline{I}_L \left(R + j\omega L - \omega^2 RLC\right) = \underline{U}_q (1 + j\omega RC) - R\underline{I}_q$$

Rücktransformation in den **Zeitbereich**:

mit $(j\omega)^2 \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}$ und $j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}$ sowie

$\underline{I}_L \rightarrow i_L(t)$ $\underline{U}_q \rightarrow u_q(t)$ $\underline{I}_q \rightarrow i_q(t)$ $\rightarrow$ **DGL:**

$$RLC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + L \frac{di_L(t)}{dt} + R \cdot i_L(t) = RC \frac{du_q(t)}{dt} + u_q(t) - R \cdot i_q(t)$$

AUSGLEICHSVORGÄNGE MIT EINEM SPEICHER

Einschränkung: Im Netzwerk befinden sich nur Gleichspannungs- bzw. Gleichstromquellen.

1. Analyse der Schaltung:
   Zustandsgrösse (kann nicht sprunghaft ändern):
   Kapazität: $u_C(t)$ Induktivität: $i_L(t)$
2. Zustand vor dem Schaltzeitpunkt: $t = 0_-$
3. Zustand nach dem Ausgleichsvorgang: $t = \infty$
   entspricht in der Praxis dem Bereich $t \geq 5\tau$
4. Zustand gleich nach dem Schaltzeitpunkt: $t = 0_+$
   Die **Zustandsgrösse bleibt gleich** wie bei $t = 0_-$
5. Beschreibung des Ausgleichsvorgangs einer beliebigen Grösse im Bereich $0_+ \leq t \leq 5\tau$:
   abklingende e-Funktion: $K \cdot e^{-t/\tau}$

$$y(t) = eingeschwungener + flüchtiger\ Vorgang$$

$$y(t) = y(\infty) + \left(y(0_+) - y(\infty)\right)e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{y(t) = Endwert + (Startwert - Endwert)e^{-t/\tau}}$$

$$y(t) = Endwert - Aenderung \cdot e^{-t/\tau}$$

Beschreibung der Grösse im Bereich $t \leq 0_-$ mit Hilfe der "Vorgeschichte" und dem Wert bei $t = 0_-$.

$\Rightarrow$ **analytische Formulierung** der Signale und **grafische Darstellungen** im typischen Zeitbereich von $-\tau \leq t \leq 5\tau$.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

6. Bestimmung der **Zeitkonstante** τ: (3 Mögl.)

- aus der DGL (siehe Seite 2):

$$\boxed{\tau = \frac{\textit{Koeffizient der Ableitung}}{\textit{Koeffizient der Stammfunktion}}}$$

- aus der Anfangssteigung der Zustandsgrösse bei $t = 0_+$:

für die Kapazität: $i_C(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$

$$\boxed{\tau = C\frac{u_C(\infty) - u_C(0_+)}{i_C(0_+)}}$$

für die Induktivität: $u_L(t) = L\dfrac{di_L}{dt}$

$$\boxed{\tau = L\frac{i_L(\infty) - i_L(0_+)}{u_L(0_+)}}$$

- aus den Beziehungen:

für die Kapazität: $\boxed{\tau = RC}$

für die Induktivität: $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R}}$

Bestimmung von R:

Betrachtung des Netzwerkes von der Kapazität oder der Induktivität aus (entspricht einer Spannungs- bzw. Stromquelle). Berechnung von R, indem die Spannungsquellen des Netzwerks kurzgeschlossen und die Stromquellen unterbrochen werden.