TA.ING+TO.FS16

Matrizenrechnung- Übungsblatt 6

Testatbedingung: Die gelöste Übung ist zu Beginn der nächsten Vorlesung abzugeben (bitte heften Sie die Blätter)

Inhalt: Eigenwerte und Eigenvektoren mit Anwendungen

Aufgabe 6.1:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der beiden 2x2 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

und weisen Sie nach, dass das Produkt der Eigenwerte jeweils gleich der Determinante ist.

Aufgabe 6.2:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden elementaren Abbildungen in der Ebene.

a) Projektion auf die x-Achse
b) Spiegelung an der y-Achse
c) Streckung der x-Komponenten mit Faktor 2 und y-Komponenten mit Faktor 5

Hinweis: Kann auch ohne Rechnung ermittelt werden, indem man sich die Definitionen der Eigenwerte und Eigenvektoren veranschaulicht. Welche Vektoren bleiben bei den Abbildungen fest resp. werden nur gestreckt und nicht „gedreht".

Aufgabe 6.3: Grenzwert eines Markovprozesses (vgl. Aufgabe 2.4)

In diesem Beispiel betrachten wir ein vereinfachtes Modell zur Beschreibung der jährlichen Ein- und Auswanderungen von/nach Italien (I) ← → Schweiz (CH). Wir nehmen an, dass die prozentualen Anteile sich zeitlich nicht ändern und betrachten die beiden Länder isoliert (keine Wechselwirkungen mit anderen Staaten). Eine Untersuchung (!) soll gezeigt haben, dass sich die Einwohnerzahlen jährlich wie folgt verschieben:

- 88% der Bevölkerung bleibt in CH und 12% wandern jährlich nach I ab
- 95% der Bevölkerung bleibt in I und 5% wandern jährlich nach CH ab

Wir setzen voraus, dass sich die Gesamtbevölkerung (I+CH) nicht ändert und zum Startzeitpunkt (n=0) 1'000 für CH und 10'000 für I beträgt. Das fassen wir in einem Vektor („Populationsvektor") zusammen:

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{0,CH} \\ P_{0,I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'000 \\ 10'000 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T, so dass $P_1 = T \cdot P_0$ resp. $P_{n+1} = T \cdot P_n$. (vgl. 2.4)

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte- (λ_1, λ_2) und Eigenvektoren ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$) von T

c) Zerlegen Sie den Anfangsvektor P_0 mit Hilfe der Eigenvektoren. D.h. finden Sie a und b so dass $P_0 = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2$ gilt.

d) Verwenden Sie die Zerlegung aus c) um den Grenzwert

$$P_\infty = \lim_{n \to \infty} T^n \cdot P_0$$

zu bestimmen. Denken Sie dabei daran, wie Eigenwerte und Eigenvektoren definiert sind!

e) Zusatz: Weshalb funktioniert diese Grenzwertbestimmung bei Markovmatrizen und nicht ganz allgemein für Matrizen?
