Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN
Technik & Architektur

TA.ING+TO.FS16

Matrizenrechnung- Übungsblatt 2

Testatbedingung: Die gelöste Übung ist <u>zu Beginn</u> der nächsten Vorlesung abzugeben (bitte heften Sie die Blätter)

Inhalt: Anwendungen der Matrizenmultiplikation, die Inverse Matrix, allgemeine Rechenregeln, Beispiel Markovprozess

---

Aufgabe 2.1: Gegeben sind die zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie, sofern dies möglich ist, die Produkte $A \cdot B,\ \ B \cdot A,\ \ A^2 = A \cdot A,\ \ B^2 = B \cdot B,\ B \cdot B^T$.

Aufgabe 2.2: Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

Aussagen	richtig	falsch
a) Ist A ein Zeilenvektor, so ist $A \cdot A^T$ ein Skalar!		
b) Ist B eine 3x2 –Matrix und A eine 2x3-Matrix, dann ist das Produkt $A \cdot B^T$ definiert!		
c) Für *quadratische* Matrizen A und B gilt $(B \cdot A)^T = B^T \cdot A^T$		
d) Ist D eine 2x2-Diagonalmatrix und B eine beliebige 2x2-Matrix, so gilt $B \cdot D = D \cdot B$		
e) $A \cdot A^T$ ist für eine beliebige Matrix A definiert!		

Aufgabe 2.3: Zeigen Sie, dass die Inverse der allgemeinen (invertierbaren) 2x2-Matrix

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben ist durch $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Was bedeutet der Term *ad-bc*?

Aufgabe 2.4: In diesem Beispiel betrachten wir ein vereinfachtes Modell zur Beschreibung der jährlichen Ein- und Auswanderungen von/nach Italien (I) ← → Schweiz (CH). Wir nehmen an, dass die prozentualen Anteile sich zeitlich nicht ändern und betrachten die beiden Länder isoliert (keine Wechselwirkungen mit anderen Staaten). Eine Untersuchung (!) soll gezeigt haben, dass sich die Einwohnerzahlen jährlich wie folgt verschieben:

- 95% der Bevölkerung bleibt in CH und 5% wandern jährlich nach I ab
- 80% der Bevölkerung bleibt in I und 20% wandern jährlich nach CH ab

Wir setzen voraus, dass sich die Gesamtbevölkerung (I+CH) nicht ändert und zum Startzeitpunkt (n=0) 1'000 für CH und 10'000 für I beträgt. Das fassen wir in einem Vektor („Populationsvektor") zusammen:

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{0,CH} \\ P_{0,I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'000 \\ 10'000 \end{pmatrix}$$

a) Wieviel betragen die Populationen nach einem Jahr? $P_1 = \begin{pmatrix} P_{1,CH} \\ P_{1,I} \end{pmatrix} = ?$

b) Finden Sie eine Matrix T (Übergangsmatrix), so dass $P_1 = T \cdot P_0$ resp. $P_{n+1} = T \cdot P_n$.

c) Wie entwickeln sich die Populationen nach n= 2, 5, 10, 50 und 100 Jahren? Was stellen Sie fest?