F: FELDLEHRE

Die Schwierigkeit ist die **Abstraktheit**: in den Feldern muss sich nichts Materielles bewegen; sie brauchen nicht einmal von Materie erfüllt zu sein.

Feldraum

Örtliche Beschreibung durch die Angabe von Intensität und Richtung des Feldes:

- Feldstärke (Ursache)
- Flussdichte (Wirkung)

⇒ **ortsbezogene Feldgrössen: Vektoren!**

Beschreibung des Feldes in seiner Gesamtheit:

- Potentialdifferenz (Ursache)
- Fluss (Wirkung)

⇒ **integrale Feldgrössen: skalare Grössen!**

INTEGRALE FELDGRÖSSEN

Potentialdifferenz

Ist die Flussantriebsgrösse (Ursache des Feldes).

Flussstärke

Ist die Wirkungsgrösse.

Der Feldraum wird in seiner gesamten Ausdehnung vom betreffenden Fluss durchsetzt.

Teilflüsse: Fluss durch definierte Flächen.

Es gilt das 1. Kirchhoffsche Gesetz (Knotenregel).

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Zusammenhang zw. den integralen Grössen

Flussstärke	=	Leitwert des Feldraumes • Flussantriebsgrösse

Widerstand = Kehrwert des *Leitwerts*

Leitwert im homogenen Feld:

- prop. spezifischer Leitwert des Raumes (oft abh. von der Flussbelastung $\Rightarrow$ nichlinear)
- prop. Feldraumquerschnitt
- umgekehrt prop. Feldraumlänge

ORTSBEZOGENE FELDGRÖSSEN

Feldstärke

In einem Feldpunkt wirksame lokale Teilflussantriebsgrösse (Ursachengrösse).

Flussdichte

Ist die lokale Wirkungsgrösse.

Zusammenhang zw. den ortsbezogenen Grössen

Flussdichte	=	spez. Leitwert des Feldraumes • Feldstärke

ZUSAMMENHANG INTEGR. / ORTSBEZ. GR.

Flussstärke	=	Flächenintegral über die Flussdichte

Flussantriebsgrösse	=	Linienintegral über die Feldstärke

FELDBEGRIFFE

homogene Felder
Überall gleicher Zustand der lokalen Feldgrössen.

inhomogene Felder
Ungleicher Zustand der lokalen Feldgrössen.

Feldlinien
Die Feldstärkevektoren stehen tangential zu den Feldlinien.

Ihr Abstand ist umgekehrt prop. zum Betrag der Feldstärkevektoren.

Aequipotentialflächen
Flächen gleichen Potentials.
Sie stehen senkrecht zu den Feldstärkevektoren.

Quellenfeld
Jede Feldlinie beginnt bei einer "Quelle" und endet in einer "Senke".

Wirbelfeld
Sämtliche Feldlinien sind geschlossen.

Strömungsfeld
Es fliesst Materie (z.B. Ladungsträger).

Zeitabhängigkeit
örtlich und/oder zeitlich konstante bzw. sich ändernde Felder.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

ÜBERSICHTSTABELLE

Vergleich der drei Feldarten der Elektrotechnik:

elektrisches Feld	elektrisches Strömungsfeld	magnetisches Feld

integrale Feldgrössen

Ursachengrössen		
el. Potentialdiff. $U = \frac{W}{Q}$	el. Spannung $U = \frac{W}{Q}$	Durchflutung, magn. Potentialdiff. Θ, V_m
Wirkungsgrössen		
diel. Flussstärke Ψ	el. Stromstärke $I = \frac{Q}{t}$	magn. Flussstärke Φ
Eigenschaft des Feldraumes: Leitwert		
diel. Leitwert G_d: $G_d = \frac{\Psi}{U}$ homogenes Feld: $G_d = \varepsilon \frac{A}{s}$	el. Leitwert G: $G = \frac{I}{U}$ homogenes Feld: $G = \gamma \frac{A}{s}$	magn. Leitwert G_m: $G_m = \frac{\Phi}{V_m} = \Lambda$ homogenes Feld: $G_m = \mu \frac{A}{s}$
Zusammenhang zw. Ursachen- und Wirkungsgrösse		
$\Psi = G_d \cdot U$	$I = G \cdot U$	$\Phi = G_m \cdot V_m$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

elektrisches Feld	elektrisches Strömungsfeld	magnetisches Feld

lokale Feldgrössen

Ursachengrössen		
el. Feldstärke $\vec{E}$	el. Feldstärke $\vec{E}$	magn. Feldstärke $\vec{H}$
$\left\|\vec{E}\right\| = \frac{dU}{ds} = \frac{\left\|\vec{F}\right\|}{Q}$	$\left\|\vec{E}\right\| = \frac{dU}{ds} = \frac{\left\|\vec{F}\right\|}{Q}$	$\left\|\vec{H}\right\| = \frac{dV_m}{ds}$
homogenes Feld: $E = U/s$	homogenes Feld: $E = U/s$	homogenes Feld: $H = V_m/s$
Wirkungsgrössen		
diel. Flussdichte $\vec{D}$	el. Stromdichte $\vec{J}$	magn. Flussdich. $\vec{B}$
$\left\|\vec{D}\right\| = \frac{d\Psi}{dA}$	$\left\|\vec{J}\right\| = \frac{dI}{dA}$	$\left\|\vec{B}\right\| = \frac{d\Phi}{dA}$
homogenes Feld: $D = \Psi/A$	homogenes Feld: $J = I/A$	homogenes Feld: $B = \Phi/A$
Eigenschaft des Feldraumelements: spez. Leitwert		
Permittivität	spez. el. Leitwert	Permeabilität
$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$	γ	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
Zusammenhang zw. Ursachen- und Wirkungsgrösse		
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

elektrisches Feld	elektrisches Strömungsfeld	magnetisches Feld

Zusammenhang integrale und ortsbezogene Gr.

Quellenfeld: $U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ Wirbelfeld: $U = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $\Psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$ homogenes Feld: $U = E \cdot s$ $\Psi = D \cdot A$	Strömungsfeld: $U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ homogenes Feld: $U = E \cdot s$ $I = J \cdot A$	Wirbelfeld: $\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s}$ $\left(V_m = \int_s \vec{H} \cdot d\vec{s}\right)$ $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ homogenes Feld: $\Theta = H \cdot s$ $\left(V_m = H \cdot s\right)$ $\Phi = B \cdot A$

Energie bei stationärem Feld

Gesamtenergie / Leistung		
$W_e = \frac{U \cdot \Psi}{2}$ $P_d = 0$	$W = P \cdot t$ $P = U \cdot I$	$W_m = \frac{\Theta \cdot \Phi}{2}$ $P_m = 0$
Energiedichte / Leistungsdichte		
$\frac{dW_e}{dV} = \frac{E \cdot D}{2}$	$\frac{dP}{dV} = E \cdot J$	$\frac{dW_m}{dV} = \frac{H \cdot B}{2}$

Energie bei veränderlichem Feld

Leistung		
$p_d = u \frac{d\Psi}{dt}$	$p = u \cdot i$	$p_m = \Theta \frac{d\Phi}{dt}$

G1: EL. LEITUNGSMECHANISMEN

Grundlage ist der Aufbau der Materie aus Atomen, nach dem Modell von Niels Bohr und Arnold Sommerfeld (1913) das auf der Quantentheorie von Max Planck beruht:

Um den **Atomkern** aus **Protonen** und **Neutronen** kreisen die **Elektronen** auf bestimmten Bahnen, die diskreten Energiestufen entsprechen. Die Besetzung dieser **Elektronenschalen** folgt speziellen Regeln.

Die Elektronen der unvollständig besetzten äusser-sten Schale sind die **Valenzelektronen**.

Die **Rumpflektronen** sind diejenigen der darunter liegenden Schalen.

Durch die Wechselwirkung mehrerer Atome entste-hen **Energiebänder**, welche durch **verbotene Zo-nen** getrennt werden. Das höchste Band ist das **Valenzband**. Darüber befindet sich das **Leitungs-band**, in dem sich die Elektronen frei bewegen können.

Voraussetzung für elektrische Leitung ist das Vor-handensein **beweglicher Ladungsträger** wie:

- Elektronen: $-e$ $\boxed{e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\, C}$ (Coulomb)
- Protonen: $+e$ (NB: 1 C = 1 As)
- Ionen: entfernen von Elektronen aus der Atomhülle $\Rightarrow$ positives Ion

hinzufügen von Elektronen in die Atomhülle $\Rightarrow$ negatives Ion

(Rekombination: die Ionisierung wird rückgängig gemacht)

ISOLATOREN

Beispiele:

- Vakuum
- Gase (keine freien Elektronen): SF_6
- Flüssigkeiten: Transformatorenöl
- Festkörper: Glas, Keramik, Quarz, Glimmer, Bernstein, Papier, Kunststoffe

Zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband befindet sich eine Energielücke (verbotene Zone):

$$\Delta W \rangle 5 \text{ eV}$$

Nur wenige Valenzelektronen besitzen genug Energie um ins Leitungsband zu gelangen.

HALBLEITER

Beispiele:

- chemische Elemente: Kohlenstoff (C), Selen (Se), Germanium (Ge), Silizium (Si)
- Verbindungen: Galliumarsenid (GaAs), Indiumantimonid (InSb), Zinkoxid (ZnO)

Die Energielücke ist kleiner als bei den Isolatoren:

$$\Delta W \langle 5 \text{ eV}$$

Ladungsträger können Elektronen (n-Leiter) oder Defektelektronen (p-Leiter, Löcher) sein.

Anwendungen:
Diode, Transistor, Thyristor

LEITER

Voraussetzung sind **bewegliche Ladungsträger**: Elektronen, (Protonen) oder Ionen.

Beispiele:

- Metalle (freie Elektronen):
  Silber (Ag), Kupfer (Cu), Gold (Au),
  Aluminium (Al)
- Gase (bei hohen Temperaturen ionisiert):
  Plasma
- Flüssigkeiten (positive und negative Ionen):
  verdünnte Säuren und Basen,
  wässrige Salzlösungen und Salzschmelzen

Bei Metallen überschneiden sich das Valenz- und das Leitungsband, so dass Elektronen ungehindert vom Valenz- ins Leitungsband gelangen können, d.h. sie können sich frei zwischen den ortsfesten Atomrümpfen des Kristallgitters bewegen.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G2: ELEKTRISCHES STRÖMUNGSFELD

Das elektrost. Feld geht über in ein el. Strömungsfeld, wenn das Dielektrikum **leitend** wird, d.h. **bewegliche** Ladungsträger vorhanden sind (der diel. Fluss Ψ geht über in den el. Leitungsstrom I).

Die Bewegung der Ladungsträger erfolgt aufgrund der el. Feldstärke $\vec{E}$ **entlang der Feldlinien**.

Ein geschlossener, stationärer Zustand der Ladungsströmung kann nur erreicht werden, wenn die wegfliessenden Ladungsträger durch eine el. Quelle dauernd **ersetzt** werden (Potentialdiff. U ist konst.).

Im Gegensatz zum elektrost. Feld, kann der Feldraum eines el. Strömungsfeldes durch Material ohne el. Leitfähigkeit **begrenzt** werden. Das Problem der Streufelder entfällt, und ein homogenes Feld ist leicht realisierbar.

INTEGRALE FELDGRÖSSEN

Ursachengrösse el. Spannung U (skalare Grösse)

elektrisches Potential: $$\boxed{\varphi_1 = -\int_0^1 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Spannung: $\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2}$ $\quad [U] = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}} = \mathrm{V}\ (\mathrm{Volt})$

Wirkungsgrösse Stromstärke I (skalare Grösse)

$\boxed{I = Q/t}$ $\quad [I] = \mathrm{A}\ (\mathrm{Ampère})$

Richtungssinn v. I: pos. für die Bewegung von $+Q$

Eigenschaften des Feldraumes ⇒ Verknüpfung

el. Leitwert: $G = I/U$ el. Widerstand: $R = 1/G$

$\boxed{I = G \cdot U}$ und $\boxed{U = R \cdot I}$ **ohmsches Gesetz**

ORTSBEZOGENE FELDGRÖSSEN

Ursachengrösse el. Feldstärke $\vec{E}$ (Vektor)

$$\boxed{\left|\vec{E}\right| = \frac{dU}{ds}} \qquad [E] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Wirkungsgrösse el. Stromdichte $\vec{J}$ (Vektor)

$$\boxed{\left|\vec{J}\right| = \frac{dI}{dA}} \qquad [J] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

Eigenschaften des Feldraumes ⇒ Verknüpfung

spez. el. Leitwert: γ spez. el. Widerstand: $\rho = 1/\gamma$

$\boxed{\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}}$ und $\boxed{\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}}$ **ohmsches Gesetz**

ZUSAMMENHANG ORTSBEZ. / INTEGR. GR.

$\boxed{U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$ und $\boxed{I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}$

homogenes Feld: $U = E \cdot s$ und $I = J \cdot A$

el. Leitwert allg.: $$\boxed{G = \frac{I}{U} = \frac{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}}$$

homogenes Feld: $G = \dfrac{\gamma \cdot A}{s}$ und $R = \dfrac{\rho \cdot s}{A}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

STRÖMUNGSGESCHWINDIGKEIT

$\vec{v}$ wird durch die Beweglichkeit b der freien Elektronen und der Feldstärke $\vec{E}$ bestimmt:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = b \cdot \vec{E}} \qquad [b] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$$

Strömung durch einen geraden Kupferleiter mit Querschnitt A (homogenes Strömungsfeld):

$n =$ Anzahl freie Elektronen pro Volumeneinheit

(für Kupfer: $n = 8{,}47 \cdot 10^{19}\ \ \mathrm{mm}^{-3}$)

Ladung der freien Elektronen in einer Leiterlänge dl:

$$dQ = n \cdot e \cdot A \cdot dl$$

Driftgeschwindigkeit v bei einem Strom I:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot e \cdot A \frac{dl}{dt} = n \cdot e \cdot A \cdot v$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{I}{n \cdot e \cdot A}}$$

im allgemeinen langsam ($1\,\mathrm{mm/s}$); jedoch:

Signalgeschwindigkeit = Lichtgeschwindigkeit (ca. $300\,000\,\mathrm{km/s}$)

weiter: $$J = \frac{I}{A} = n \cdot e \cdot v = n \cdot e \cdot b \cdot E = \gamma \cdot E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma = n \cdot e \cdot b}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

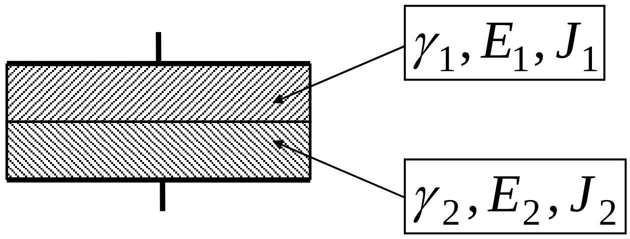
FELDLINIEN AN GRENZFLÄCHEN

Ortsbezogene Feldgrössen beim Übergang von einem isotropen Medium (γ_1) in ein anderes (γ_2).

Mehrschichtleiter quergeschichtet

$$J_1 = J_2 = J = \gamma_1 \cdot E_1 = \gamma_2 \cdot E_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$$

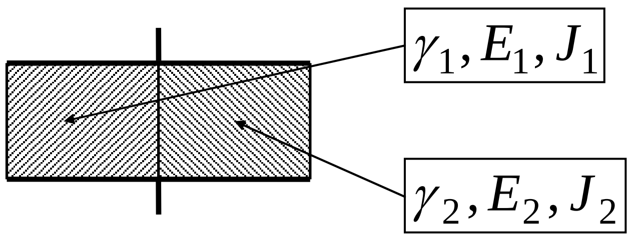


$\Rightarrow$ Im Material mit der kleineren Leitfähigkeit tritt die grössere Feldstärke auf.
Sprunghafte Änderung v. E an der Trennfläche.

Mehrschichtleiter längsgeschichtet

$$E_1 = E_2 = E = \frac{J_1}{\gamma_1} = \frac{J_2}{\gamma_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{J_1}{J_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$



$\Rightarrow$ Im Material mit der grösseren Leitfähigkeit tritt die grössere Flussdichte auf.

Mehrschichtleiter schräggeschichtet

$\Rightarrow$ **Brechung** der Feldlinien.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Zerl. von $\vec{E}$ und $\vec{J}$ in Normal- und Tangentialkomp.

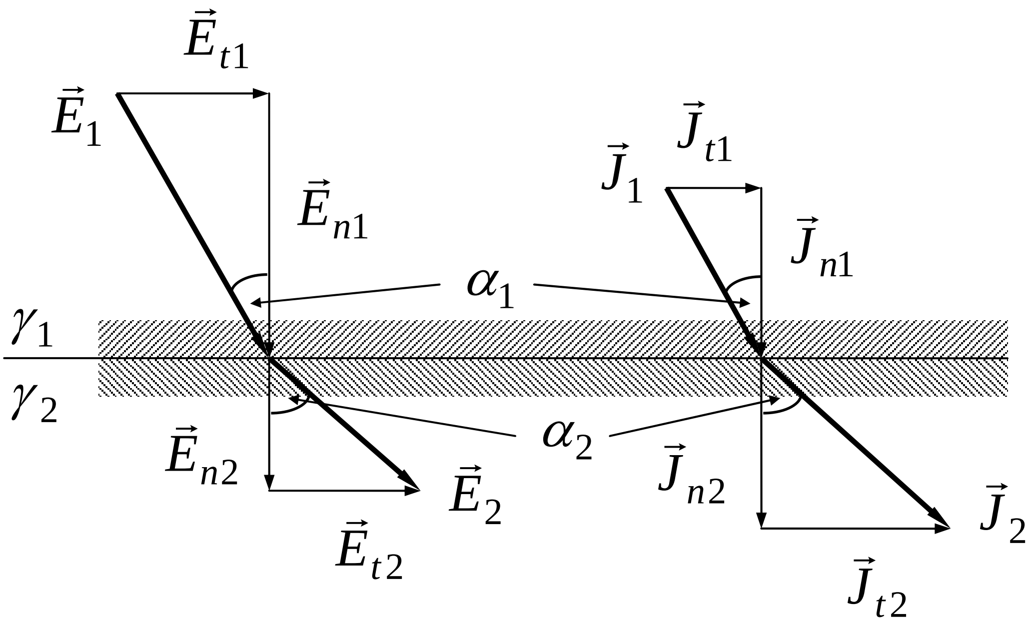
Normalkomp. $\Rightarrow$ quergeschichteter Leiter
E_n umgekehrt prop. zu γ
J_n unverändert: $J_{n1} = J_{n2}$

Tangentialkomp. $\Rightarrow$ längsgeschichteter Leiter
E_t unverändert: $E_{t1} = E_{t2}$
J_t proportional zu γ

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{E_{t1}/E_{n1}}{E_{t2}/E_{n2}} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$ **Brechungsgesetz**

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}} \text{ und } \boxed{\frac{J_1}{J_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}}$$

$\gamma_1 \langle \gamma_2$:



NB: siehe auch *"Stationäres Strömungsfeld"* unter G6: Kirchhoffsche Gesetze.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G3: EL. LEITWERT UND WIDERSTAND

homogene Felder

$$\boxed{G = \frac{I}{U} = \frac{J \cdot A}{E \cdot s} = \frac{\gamma \cdot A}{s} = \frac{1}{R}}$$

$$[G] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \mathrm{S} \quad \text{(Siemens)}$$

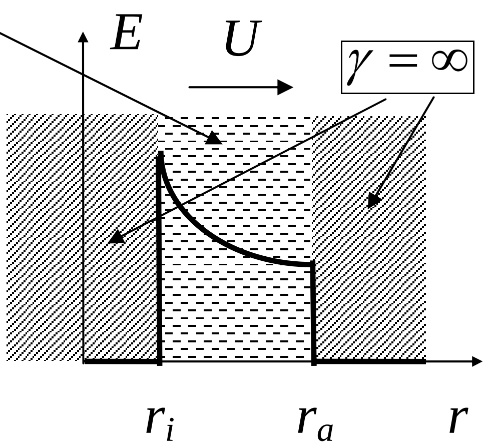
inhomogene Felder

$$[R] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega \quad \text{(Ohm)}$$

$$\boxed{G = \frac{I}{U} = \frac{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{1}{R}}$$

Bsp: Leitwert eines Hohlzylinders mit konst. γ:

Radius innerer Zyl.: r_i
Radius äusserer Zyl.: r_a
Länge der Anordnung: l
Spannung zw. den Zyl.: U



$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \cdot 2\pi \cdot r \cdot l$$

$$\Rightarrow J(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r \cdot l} \Rightarrow E(r) = \frac{I}{\gamma \cdot 2\pi \cdot r \cdot l}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) \cdot dr = \frac{I}{\gamma \cdot 2\pi \cdot l} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{I}{\gamma \cdot 2\pi \cdot l} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$\boxed{G = \frac{I}{U} = \frac{\gamma \cdot 2\pi \cdot l}{\ln(r_a / r_i)} = \frac{1}{R}}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Bsp. für spez. Leitwert γ_{20} *und Widerstand* ρ_{20} *bei 20*°C *(*$\rho_{20} = 1/\gamma_{20}$*):*

Stoff	$\gamma_{20}, \frac{\text{S m}}{\text{mm}^2}$	$\rho_{20}, \frac{\Omega\,\text{mm}^2}{\text{m}}$
Kupfer	56	0,01786
Aluminium	35	0,02857
Konstantan (WM50)	2	0,5

TEMPERATURABHÄNGIGKEIT V. WIDERST.

Im allg. ist der Widerstand temperaturabhängig. Die Temperaturänderung kann durch Fremd- oder Eigenerwärmung verursacht werden.

- Temperaturerhöhung $\Rightarrow$ **Widerstandszunahme**: bei **Metallen**, weil die Schwingungen der Atome zunimmt und damit die Beweglichkeit der Elektronen abnimmt.
- Temperaturerhöhung $\Rightarrow$ **Widerstandsabnahme**: bei **Halbleitern**, weil die Zahl der beweglichen Ladungsträger zunimmt.

Lineare Temperaturabhängigkeit *(*$\vartheta =$*Temp. in* °C*)*

- mit dem Bezugswiderstand R_{20} bei $20°\text{C}$:

Steigung der Geraden: $m = \frac{dR_\vartheta}{d\vartheta} = \frac{\Delta R}{\Delta\vartheta} = \frac{R_\vartheta - R_{20}}{\vartheta - 20°C}$

Temperaturkoeffizient: $\alpha_{20} = m/R_{20}$ $\qquad [\alpha_{20}] = 1/\text{K}$

$$\Rightarrow \boxed{R_\vartheta = R_{20} + m \cdot \Delta\vartheta = R_{20}\left[1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20°C)\right]}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

- falls R_{20} nicht bekannt ist, jedoch R_A bei ϑ_A und der Temperaturkennwert τ:

$$\boxed{R_\vartheta = R_A \frac{\tau + \vartheta}{\tau + \vartheta_A}}$$

Temperaturkennwert: $\tau = \frac{1}{\alpha_{20}} - 20°\mathrm{C} \quad [\tau] = \mathrm{K}$

Bsp: Kupfer: linearer Bereich von ca. -200°C bis +600°C
α_{20}= 3,92 · 10^{-3} K^{-1} und τ= 235 K

Nichtlineare Temperaturabhängigkeit

- PTC-Widerstände (Kaltleiter) (**P**os. **T**emp. **C**oefficient)

Material: Titanatkeramik ($BaTiO_3$)

Widerstand bei T (in K oder °C) im Nutzbereich:
(starke Widerstandszunahme mit der Temperatur)

$$\boxed{R_T = R_N \cdot e^{\alpha(T - T_N)}}$$

$R_N =$ Nennwiderstand $T_N =$ Nenntemperatur
Gerade im R-T-Diagramm mit logarithmischem Massstab von R und linearem Massstab von T ("einfachlog.")

Temperaturkoeffizient im Nutzbereich:

$$\boxed{\alpha = \frac{\ln R_2 - \ln R_1}{T_2 - T_1} = \frac{dR_T}{dT}\frac{1}{R_T} = \alpha_T = konst.}$$

Anwendungen:
- Temperaturfühler für Wicklungen el. Maschinen,
- Überstromsicherung (für kleine Leistungen),
- Flüssigkeitsniveaufühler.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

- NTC-Widerstände (Heissleiter) (**N**eg. **T**emp. **C**oefficient)

  Material: Eisen-, Nickel-, Titan- Magnesium- oder Cobalt-Oxid (pulverisiert und gesintert).

  Widerstand bei T (in K) im Nutzbereich:

$$\boxed{R_T = R_N \cdot e^{b\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_N}\right)}}$$

$R_N =$ Nennwiderstand bei T_N (meist 293 K oder 298 K)
$b =$ Materialkonstante $[b] = K$ (2000 bis 4000 K)

Temperaturkoeffizient im Nutzbereich:

$$\boxed{\alpha_T = \frac{dR_T}{dT}\frac{1}{R_T} = -\frac{b}{T^2}}$$

Anwendungen:
- Temperaturfühler,
- Einschaltstrombegrenzung,
- Temperaturkompensation in Schaltungen.

SPANNUNGSABHÄNGIGER WIDERSTAND

Varistor VCR (**V**oltage **C**ontrolled **R**esistor)

Material: Siliziumkarbid (SiC) oder Zinkoxid (ZnO)

$$\boxed{U = C \cdot I^{\beta}} \quad \text{oder} \quad \boxed{R = C \cdot I^{(\beta-1)}}$$

$C =$ entspr. Spannungsabfall bei 1 A (500 bis 3000)
$\beta =$ Materialkonstante (Nichtlinearität: 0.05 bis 0.5)

Anwendungen:
- Überspannungsschutz (Funkenlöschung),
- Spannungsstabilisierung.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G4: ENERGIE UND LEISTUNG

Aus der Elektrostatik: Arbeit W für die Verschiebung einer Ladung Q über die Potentialdifferenz U:

$$U = W/Q \quad \Rightarrow \qquad W = Q \cdot U \quad \text{mit} \quad Q = I \cdot t$$

$$W = U \cdot I \cdot t \qquad (I = \text{Stromstärke},\ t = \text{Zeit})$$

Leistung $P = Arbeit\ pro\ Zeiteinheit$

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = U \cdot I} \qquad [P] = \mathrm{VA} = \mathrm{W}\ (\mathrm{Watt})$$

im Widerstand: James Watt (1736-1819)

$$\boxed{P = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R} \qquad 1\mathrm{W} = 1\mathrm{VA} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}$$

Energie $W = Leistung \cdot Zeit$

$$\boxed{W = P \cdot t} \qquad [W] = \mathrm{Ws} = \mathrm{J}\ (\mathrm{Joule})$$

James Prescott Joule (1818-1889))

$$1\mathrm{Ws} = 1\mathrm{J} = 1\mathrm{VAs} = 1\mathrm{Nm} = 1\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$$

NB: Energie wird nicht erzeugt oder verbraucht, sondern nur **umgewandelt**.
Bsp: mechanisch (P_1)$\rightarrow$ elektrisch (P_2) im Generator

Wirkungsgrad η

$$\boxed{\eta = \frac{P_2}{P_1} \leq 1} \qquad P_1 - P_2 = Verlustleistung$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

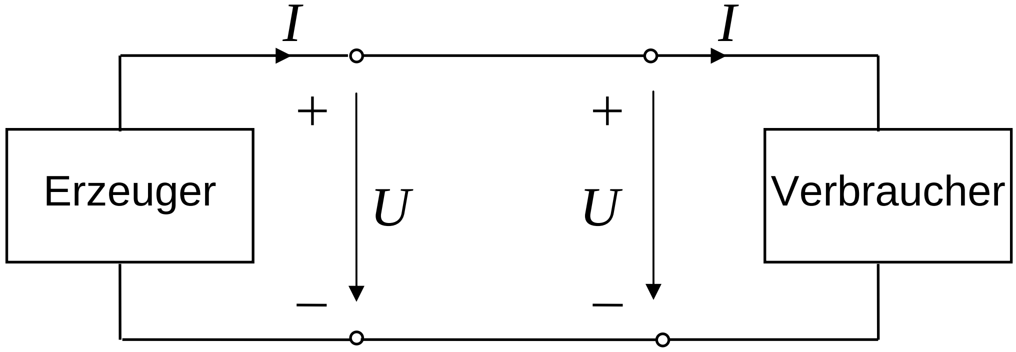
G5: ZÄHLERPFEILSYSTEM

Zweipol (Eintor): Gebilde, das nur an zwei Punkten el. zugänglich ist. Es kann **aktiv** (el. Energieabgabe) oder **passiv** (el. Energieaufnahme) sein.

Die Spannung U und der Strom I sind vorzeichenbehaftete **skalare Grössen**, deren positiver Richtungssinn im Stromkreis durch einen Pfeil angegeben werden muss.

U ist postitiv, wenn der Richtungspfeil vom höheren zum tieferen Potential zeigt.

- **Verbraucher:** I ist positiv, wenn der Richtungspfeil mit der Fliessrichtung der positiven Ladungen übereinstimmt d.h. vom höheren zum tieferen Potential.
  $\Rightarrow$ **Verbraucherpfeilsystem:** I und U gehen vom selben Pol aus.
- **Erzeuger:** umgekehrte Fliessrichtung von I
  $\Rightarrow$ **Erzeugerpfeilsystem:** I und U gehen von unterschiedlichen Polen aus.
- **gemischtes Pfeilsystem** (häufig angewendet):



Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

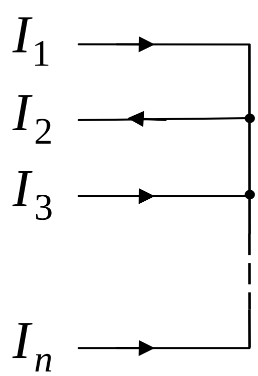
G6: KIRCHHOFFSCHE GESETZE

Gustav Kirchhoff (1824-1887)
Grundlegende Gesetze zur Schaltungsanalyse.
(die Richtungspfeile für I und U müssen festgelegt sein)

1. Kirchhoffsches Gesetz: Knotenregel

In Netzwerkknoten ist die Summe der zufliessenden Ströme gleich der Summe der abfliessenden.

$$\boxed{I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n = \sum_{k=1}^{n} I_k = 0}$$



Vorzeichen-Empfehlung: I positiv einsetzen, wenn der Pfeil zum Knoten zeigt.

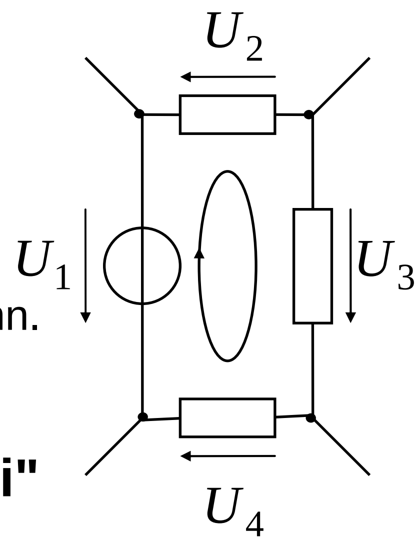
Stationäres Strömungsfeld

$$\boxed{\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0}$$ das Feld ist **"quellenfrei"**

2. Kirchhoffsches Gesetz: Maschenregel

In Netzwerkmaschen ist die Summe aller im Umlauf auftretenden Spannungen gleich Null.

$$\boxed{U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = 0}$$



Vorzeichen-Empfehlung: U positiv, wenn der Pfeil die gleiche Richtung hat wie der Umlaufsinn.

Stationäres Strömungsfeld

$$\boxed{\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0}$$ das Feld ist **"wirbelfrei"**

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G7: SPANNUNG- U. STROMQUELLEN

Im Gegensatz zum el. Widerstand, der einen **passiven Zweipol** darstellt, sind Quellen **aktive Zweipole** (sie trennen Ladungen bzw. geben el. Energie ab).

Bei Benützung des gemischten Pfeilsystems sind die Kennlinien von Quellen und Verbrauchern im 1. oder 3. Quadranten des U-I-Diagramms ($P\rangle 0$).

Grenzfälle (für reale Quellen)

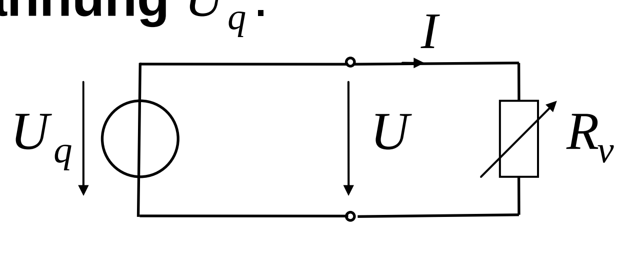
- **Leerlauf: ⇒ Leerlaufspannung** U_0
  Weil $I = 0$ wird der Quelle keine Leistung entnommen.
- **Kurzschluss: ⇒ Kurzschlussstrom** I_k
  Weil $U = 0$ wird der Quelle keine Leistung entnommen.

SPANNUNGSQUELLEN

ideale Spannungsquelle

Die Klemmenspannung U ist unabhängig von I und entspricht der **Quellenspannung** U_q.

Schaltsymbol:



reale Spannungsquelle

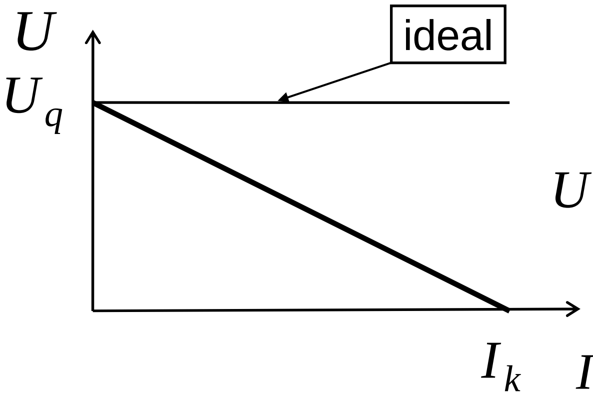
Die Klemmenspannung U sinkt, wenn I ansteigt. Die Abhängigkeit kann **linear** oder **nichtlinear** sein.

lineare Spannungsquelle

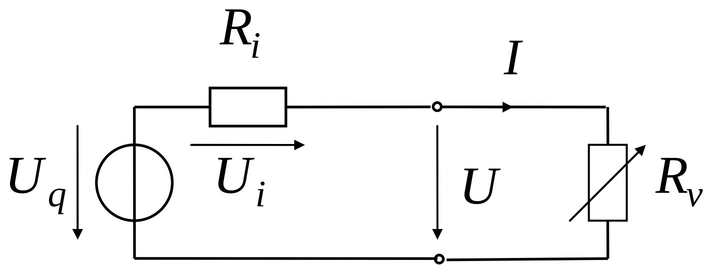
Nachbildung: **ideale Quelle + Innenwiderstand** R_i.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Kennlinie:



Ersatzschaltung:



$$\boxed{U = U_q - U_i = U_q - R_i \cdot I}$$

Leerlauf ($R_v = \infty$): $U_0 = U_q$

Kurzschluss ($R_v = 0$): $I_k = U_q / R_i$

Berechnungsmöglichkeiten für R_i:

$$R_i = \frac{U_q}{I_k} = \frac{Quellenspannung}{Kurzschlussstrom}$$

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{Klemmenspannungsänderung}{Laststromänderung}$$

nichtlineare Spannungsquelle

R_i ist belastungsabhängig.

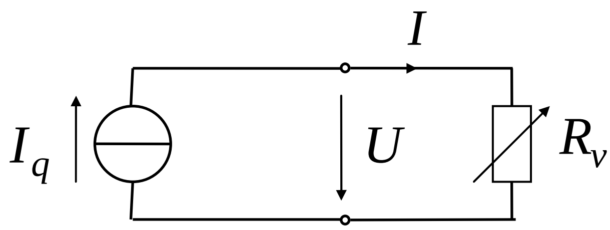
STROMQUELLEN

ideale Stromquelle

Der Laststrom I ist unabhängig von U (bzw. der Belastung) und entspricht dem **Quellenstrom** I_q.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Schaltsymbol:



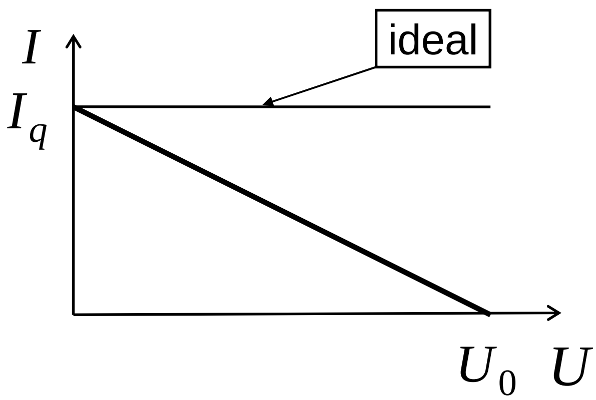
reale Stromquelle

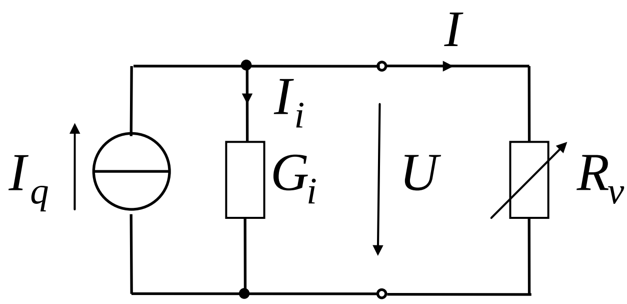
Die Laststrom I sinkt, wenn U ansteigt.
Die Abhängigkeit kann **linear** oder **nichtlinear** sein.

lineare Stromquelle

Nachbildung: **ideale Quelle mit Innenleitwert** G_i.

Kennlinie: Ersatzschaltung:





$$\boxed{I = I_q - I_i = I_q - G_i \cdot U}$$

Leerlauf ($R_v = \infty$): $U_0 = I_q / G_i$

Kurzschluss ($R_v = 0$): $I_k = I_q$

Berechnungsmöglichkeiten für G_i:

$$G_i = \frac{I_q}{U_0} = \frac{Quellenstrom}{Leerlaufspannung}$$

$$G_i = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{Laststromänderung}{Klemmenspannungsänderung}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

nichtlineare Stromquelle

G_i ist belastungsabhängig.

QUELLENUMWANDLUNG

Spannungsquelle in Stromquelle

Kurzschluss: $I_k = \frac{U_q}{R_i} \Rightarrow \boxed{I_q = I_k}$

Leerlauf: $U_0 = U_q = \frac{I_q}{G_i} \Rightarrow \boxed{G_i = \frac{I_q}{U_q} = \frac{1}{R_i}}$

Stromquelle in Spannungsquelle

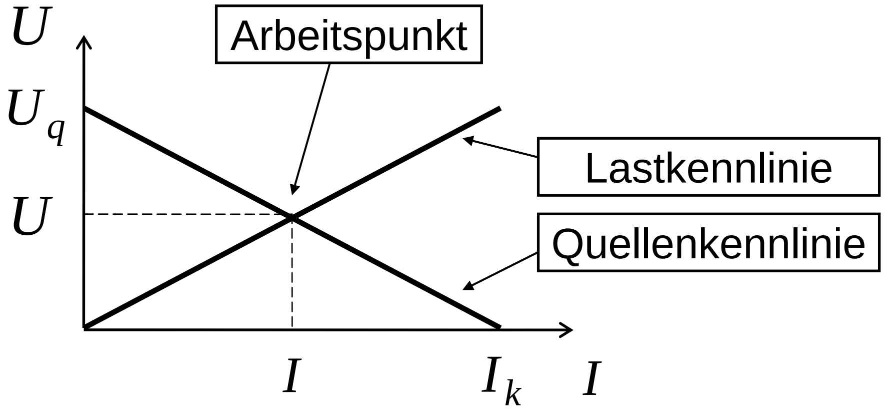
Leerlauf: $U_0 = \frac{I_q}{G_i} \Rightarrow \boxed{U_q = U_0}$

Kurzschluss: $I_k = I_q = \frac{U_q}{R_i} \Rightarrow \boxed{R_i = \frac{U_q}{I_q} = \frac{1}{G_i}}$

VERBINDUNG QUELLE-VERBRAUCHER

Am Beispiel Spannungsquelle mit Lastwiderstand.

Arbeitspunkt



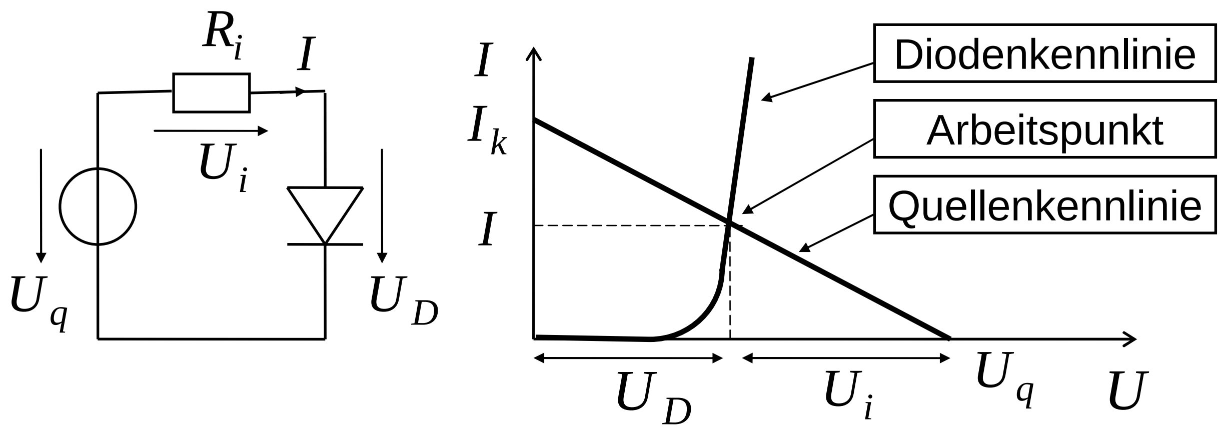
Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G8: NICHTLINEARE ELEMENTE

Beschreibung durch U-I-**Kennlinie**

$\Rightarrow$ Die Spannungen und Ströme werden oft grafisch bestimmt.

Bsp: Schaltung mit Diode: gesucht sind U_D und I:



Quellenkennlinie: (evtl. Ersatzspannungsquelle)

$$U = U_D = U_q - U_i = U_q - R_i \cdot I$$

Leerlauf ($R_v = \infty$): $U_0 = U_q$

Kurzschluss ($R_v = 0$): $I_k = U_q / R_i$

Diodenkennlinie: nichtlinear (grafische Darst.)

Bedingungen: I überall gleich (Serieschaltung)

$U_q = U_i + U_D$ (Maschenregel)

Schnittpunkt $\Rightarrow$ **Arbeitspunkt** $\Rightarrow$ U_D und I

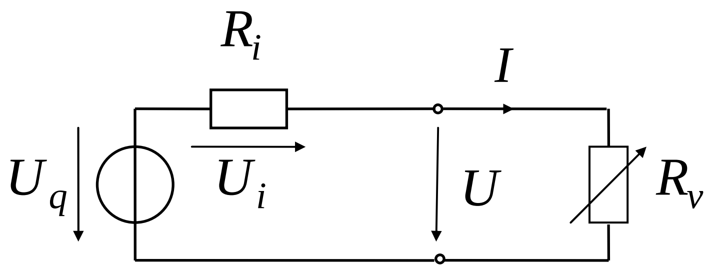
differentieller Leitwert oder Widerstand

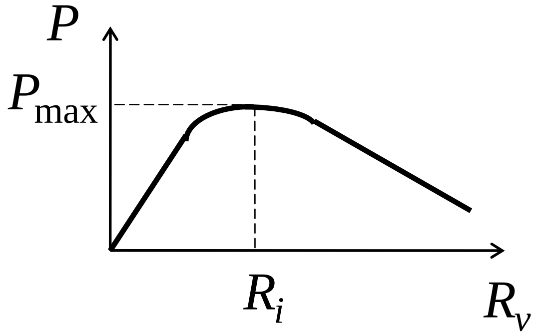
Steigung der Tangente an einem Punkt der nicht-linearen Kennlinie (z.B. am Arbeitspunkt):

$$\boxed{g = \frac{dI}{dU}} \quad \text{und} \quad \boxed{r = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{g}}$$ (für kleine ΔU und ΔI)

G9: LEISTUNGSANPASSUNG

Fragestellung: wie gross muss R_v sein, damit die aufgenommene Leistung $P = U \cdot I$ maximal wird?





Grenzfälle: $R_v = 0 \;\Rightarrow\; U = 0 \;\Rightarrow\; P = 0$

$R_v = \infty \;\Rightarrow\; I = 0 \;\Rightarrow\; P = 0$

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_v} \quad \text{und} \quad U = R_v \cdot I = R_v \frac{U_q}{R_i + R_v}$$

$$P = U_q^{\,2} \frac{R_v}{\left(R_i + R_v\right)^2} = f\left(R_v\right)$$

$P_{\max}$: bei R_v, wo die Ableitung von $P = f\left(R_v\right)$ Null ist:

$$\frac{dP}{dR_v} = U_q^{\,2} \frac{\left(R_i + R_v\right)^2 - 2R_v\left(R_i + R_v\right)}{\left(R_i + R_v\right)^4} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{R_v = R_i}$ **Leistungsanpassung** $\boxed{P_{\max} = \frac{U_q^{\,2}}{4R_i}}$

Bemerkungen:

- Energieumsatz in R_i und R_v gleich gross $\Rightarrow \eta = 0{,}5$
- Für grosse Leistungen nicht anwendbar;
  jedoch in der Nachrichtentechnik.

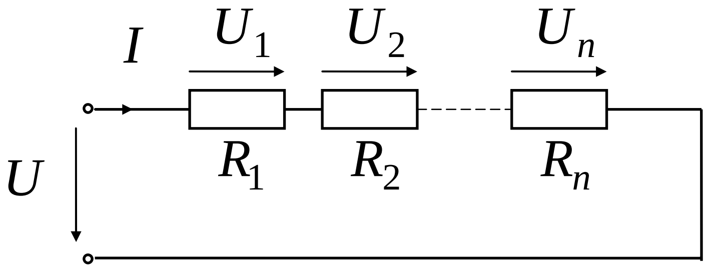
Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G10: ERSATZWIDERSTAND

Serieschaltung

$$I_1 = I_2 = \cdots = I_n = I$$

$$U_1 = R_1 \cdot I$$
$$U_2 = R_2 \cdot I$$
$$\cdots$$
$$U_n = R_n \cdot I$$



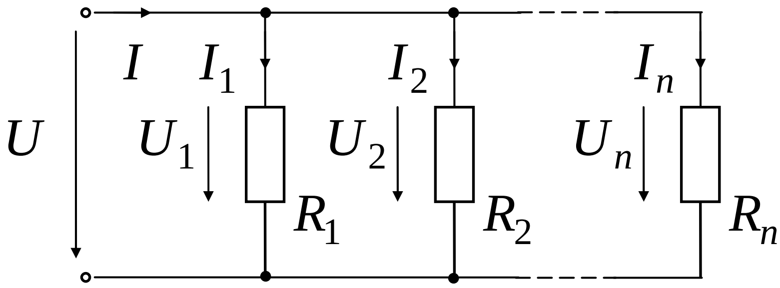
mit Maschenregel:

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{I} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n}$$

Parallelschaltung

$$U_1 = U_2 = \cdots = U_n = U$$

$$I_1 = U / R_1$$
$$I_2 = U / R_2$$
$$\cdots$$
$$I_n = U / R_n$$



mit Knotenregel:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2 + \cdots + I_n}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$ oder

$$\boxed{G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$$ (Summe der Leitwerte)

bei **zwei** Widerständen: $$\boxed{R = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

gemischte Schaltungen

Ermittlung des Ersatzwiderstandes durch schrittweises Zusammenfassen von Widerständen, die in Serie oder parallel liegen.

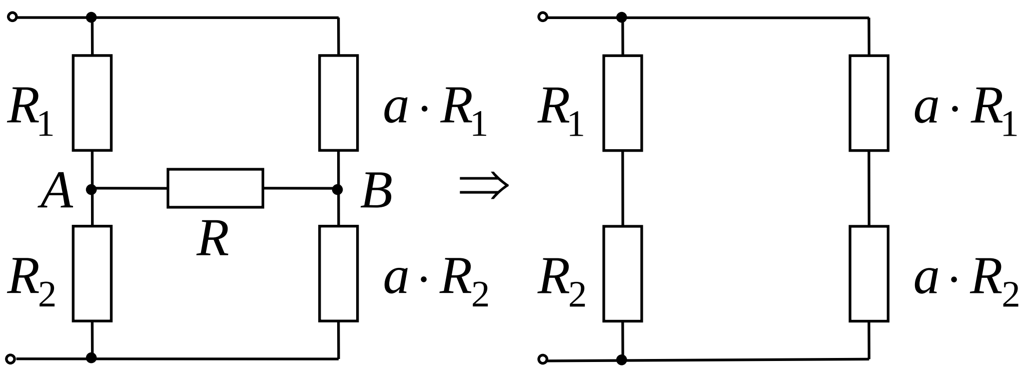
Schaltungsvereinfachungen

Für komplizierte, symmetrische Schaltungen.

Vorgehen, falls zwei Punkte A und B das **gleiche Potential** haben und durch einen beliebigen Widerstand R verbunden sind:

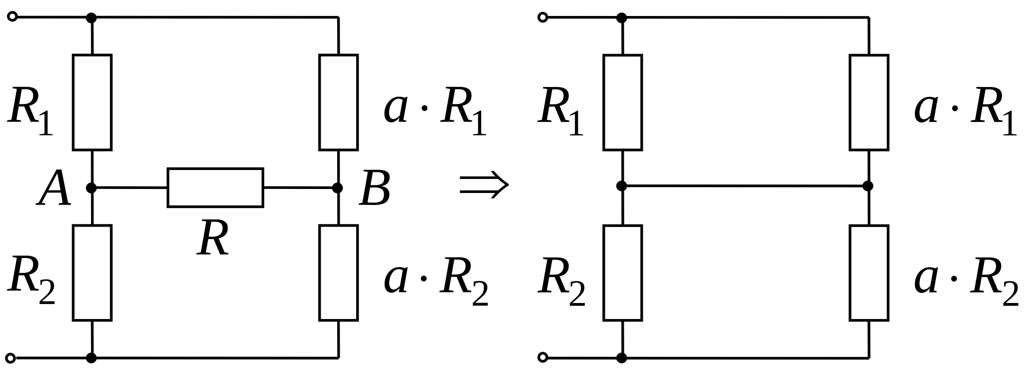
- R kann **weggelassen** werden:

  Bsp:



- A und B können **direkt verbunden** werden:

  Bsp:



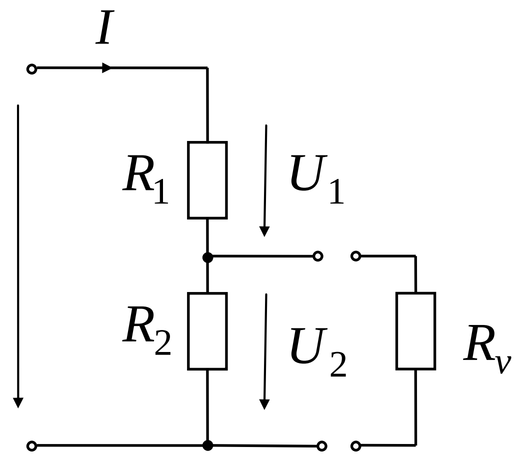
Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G11: SPANNUNGS- U. STROMTEILER

Spannungsteiler

Fall Leerlauf mit zwei Widerständen R_1 und R_2

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \Rightarrow$$



$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}} \text{ und } \boxed{U_2 = U\,\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Fall Belastung mit R_v

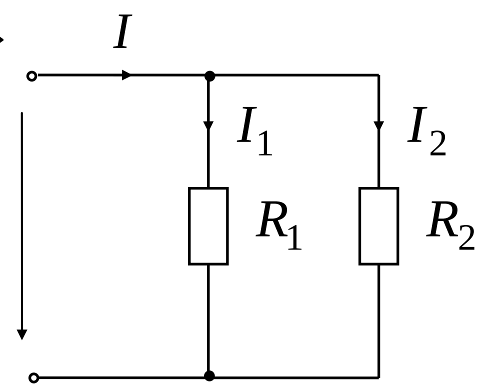
$$\boxed{U_2 = U\,\frac{R_2 \| R_v}{R_1 + \left(R_2 \| R_v\right)}}$$

Allgemein $$\boxed{U_m = U\,\frac{R_m}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}}$$

Stromteiler

Fall zwei parallele Widerstände R_1 und R_2

$$U = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 \Rightarrow$$



$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}} \text{ und } \boxed{I_2 = I\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Allgemein $$\boxed{I_m = I\,\frac{G_m}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G12: STERN↔DREIECK-TRANSF.

Einsatzbereich

Reduktion von Netzwerken auf einfache Grundschaltungen.

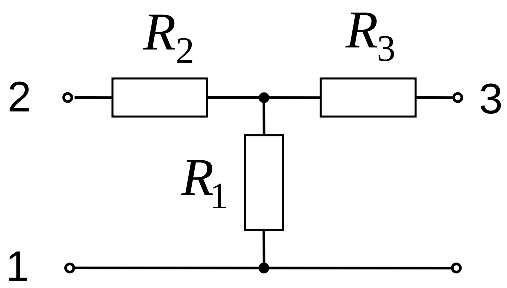
Prinzip

Umwandlung der beiden Schaltungstypen, so dass von „aussen“ (von den Anschlüssen) aus gesehen kein Unterschied feststellbar ist. Dazu müssen die beteiligten Widerstände umgerechnet werden.

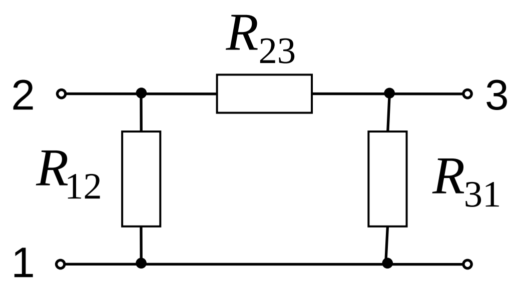
Vorgehen

Umwandlungsformeln für Sternschaltung (T-Schaltung) in Dreieckschaltung (Π-Schaltung) u. umgek.:

Sternschaltung:



Dreieckschaltung:



Stern → Dreieck: mit $S = R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1$

$$R_{12} = S/R_3 \qquad R_{23} = S/R_1 \qquad R_{31} = S/R_2$$

Dreieck → Stern: mit $D = R_{12} + R_{23} + R_{31}$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{D} \qquad R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{D} \qquad R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{D}$$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G13: ÄHNLICHKEITSREGEL

Einsatzbereich

Lineares Netzwerk mit **einer** Quelle.
Berechnungen in Netzwerken mit Zahlenwerten.

Prinzip

Wenn die Ursachengrösse in einem **linearen** Netzwerk ändert, so ändern sich die Wirkungen im gleichen Verhältnis.

Vorgehen

Beispiel: Netzwerk mit einer Spannungsquelle:

Man nimmt einen gesuchten Zweigstrom als bekannt an: I_a, und berechnet damit schrittweise alle übrigen Zweigspannungen und -ströme. Somit ergibt sich anstelle der richtigen Quellenspannung U_{qr} eine angenommene Quellenspannung U_{qa}.

Der von der richtigen Quellenspannung verursachte richtige Zweigstrom I_r ist:

$$\boxed{\frac{I_r}{I_a} = \frac{U_{qr}}{U_{qa}} \Rightarrow I_r = I_a \frac{U_{qr}}{U_{qa}}}$$ **Ähnlichkeitsregel**

Bemerkung

Falls das Netzwerk mehrere Quellen enthält, kommt die Superpositionsregel zum Einsatz.
Dabei kann die Ähnlichkeitsregel dazu dienen, die Teilwirkungen der einzelnen Quellen zu berechnen.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G14: SUPERPOSITIONSGESETZ

Einsatzbereich

Lineares Netzwerk mit **mehreren** Quellen.

Prinzip

In einem **linearen** physikalischen System, auf das mehrere Ursachen (Spannungs- und Stromquellen) einwirken, ergibt sich die Gesamtwirkung durch Superposition (Überlagerung) der Wirkungen der einzelnen Ursachen.

Vorgehen

- In einem Netzwerk mit mehreren Quellen wird zuerst die Wirkung nur einer Quelle betrachtet:
  - alle anderen (idealen) Spannungsquellen werden nicht beachtet: **kurzgeschlossen**,
  - alle anderen (idealen) Stromquellen werden offen gelassen: **unterbrochen**,

  NB: Innenwiderstände berücksichtigen!
  Für diese Situation werden die interessierenden Teilspannungen und -ströme in den Zweigen des Netzwerkes berechnet.
- Mit allen Quellen wird der Reihe nach gleich vorgegangen.
- Die gesuchten Grössen in den einzelnen Zweigen ergeben sich durch **Addition** der Teilspannungen und -ströme, wobei der **Richtungssinn** berücksichtigt werden muss.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G15: ERSATZQUELLEN

Ersatz-Spannungsquelle: Thévenin-Theorem
Ersatz-Stromquelle: Norton-Theorem

Einsatzbereich

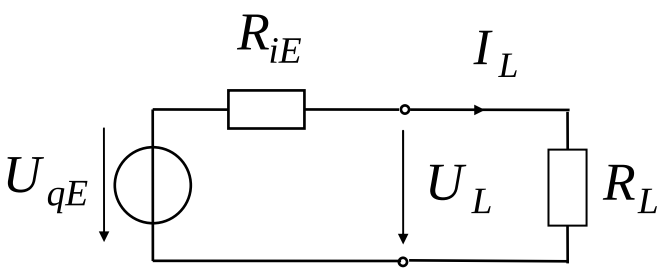
Lineares Netzwerk mit **passiven und aktiven** Elementen, wenn die Spannung oder der Strom nur in **einem** Netzzweig gesucht wird.

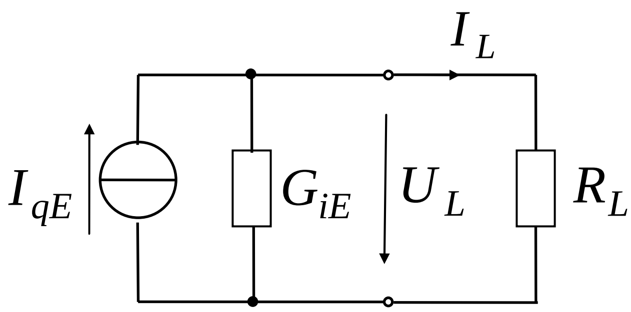
Prinzip

Das Netzwerk wird in eine Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle umgewandelt. Der Netzzweig mit den gesuchten Grössen stellt die Last dar.

Vorgehen

Bestimmung der Ersatzquellen-Grössen:





Fall:	**Spannungsquelle**	**Stromquelle**
Leerlauf	$\boxed{U_{L0} = U_{qE}}$	U_{L0}
Kurzschluss	$\boxed{R_{iE} = U_{L0}/I_k}$	$\boxed{I_k = I_{qE}}$ $\boxed{G_{iE} = I_k/U_{L0}}$
mit Last	$U_L = U_{qE} \dfrac{R_L}{R_{iE} + R_L}$	$I_L = I_{qE} \dfrac{1/R_L}{G_{iE} + 1/R_L}$

übliche Bestimmung von R_{iE} (bzw. von G_{iE}):

= Widerstand des Netzwerks von der Last aus "gesehen", mit Spannungsquellen kurzgeschlossen und Stromquellen offen!

G16: QUELLENVERSCHIEBUNG

Einsatzbereich

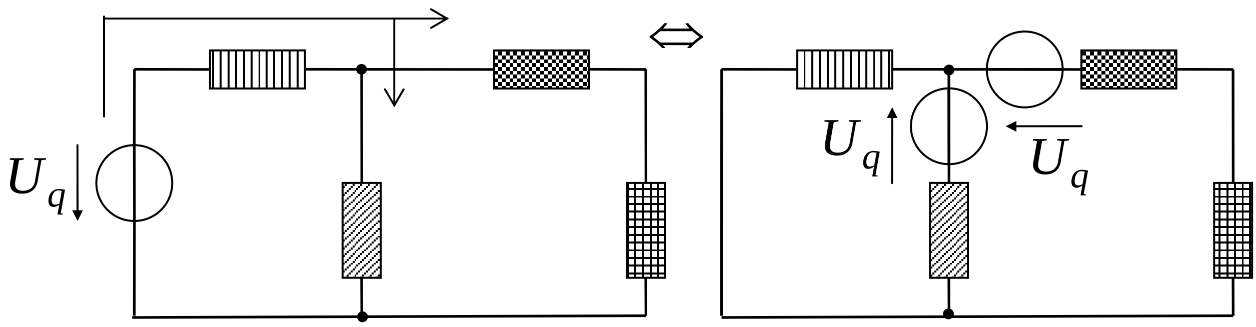
Zusammenfassen von idealen Quellen.

Prinzip

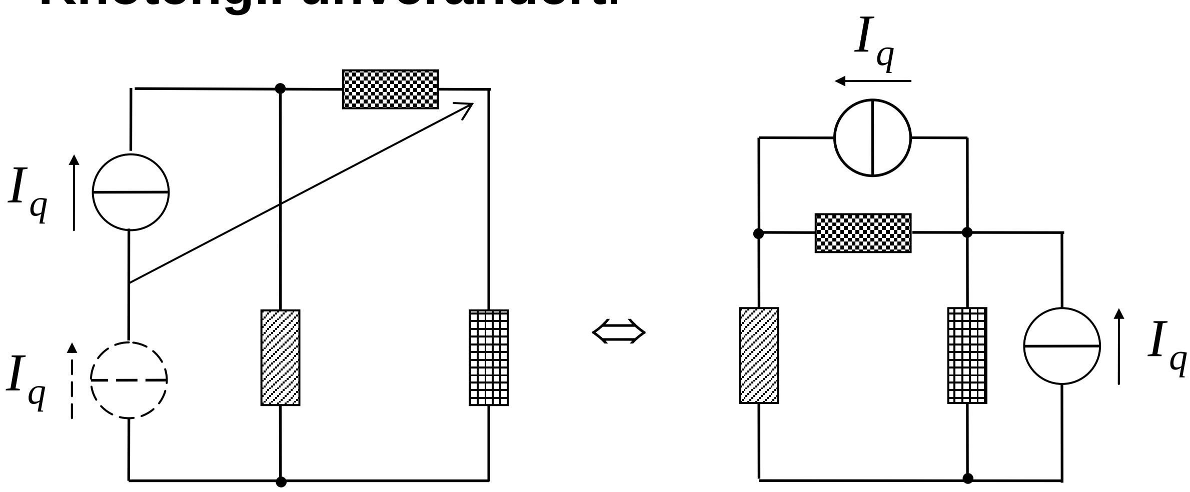
Unveränderte Maschen- und Knotengleichungen.

Vorgehen

- *Versetzung idealer Spannungsquellen*
  Sie können gemäss Bild über Knoten hinweg verschoben werden ⇒ **Maschengl. unverändert**.



- *Teilung idealer Stromquellen*
  Sie können gemäss Bild "umgehängt" werden ⇒ **Knotengl. unverändert**.



Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G17: NETZWERKANALYSE: BEGRIFFE

Ziel

Systematische Berechnung der Spannungen und Ströme in einem Netzwerk.

Begriffe

- ***Netzwerk:*** Zusammenschaltung von idealisierten Bauelementen.
  lineares Netzwerk: in den Bauelementen herrscht Proportionalität zwischen Spannung und Strom.
- ***Zweig (z):*** Verbindungsleitung, die mindestens ein aktives oder passives Element enthält.
- ***Knoten (k):*** Verbindungspunkt von Zweigen.
- ***Zweigspannung und Zweigstrom:*** über die Zweiggleichung verknüpfte Grössen.
- ***Graph:*** grafische Darstellung des Netzes ohne die Bauelemente.
- ***Netzwerkanalyse:*** Ermittlung der unbekannten Zweigspannungen und Ströme.
  dazu braucht es $2 \cdot z$ linear unabh. Gleichungen:

z	Zweiggleichungen
$k-1$	Knotengleichungen
m	Maschengleichungen
	$m = z - (k-1) = z - k + 1$

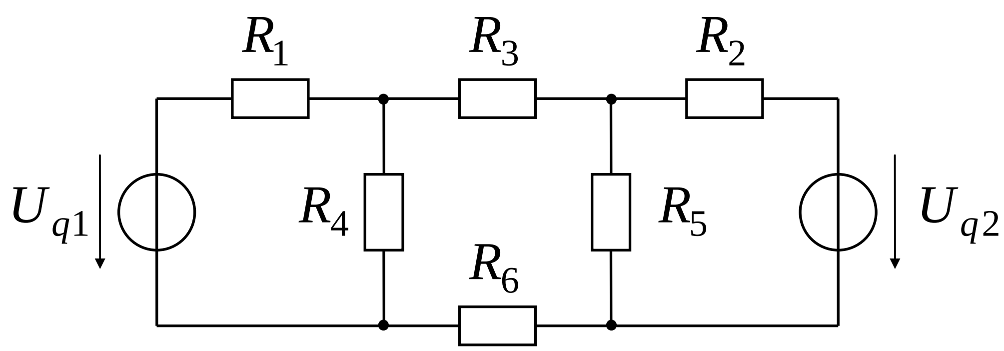
$\Rightarrow 2 \cdot z$ Gl.: ***vollständiges Gleichungssystem***

NB: Lösung des Gleichungssystems mit den Hilfsmitteln der Mathematik:

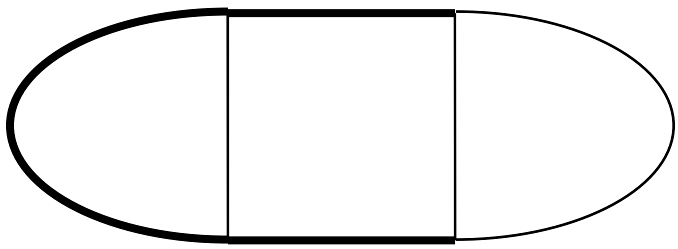
- schrittweise Reduktion der Unbekannten durch Einsetzen
- Addition oder Subtraktion von Gl. (Eliminationsverfahren)
- Matrizen- bzw. Determinantenrechnung
- Algorithmus nach Gauss

- ***reduziertes Gleichungssystem:*** wenn im vollständigen Gleichungssystem die Zweiggleichungen eingesetzt werden $\Rightarrow z$ Gleichungen.
- ***vollständiger Baum:*** Linienzug zwischen den Knoten, der alle Knoten erfasst, jedoch ohne einen geschlossenen Umlauf zu enthalten.
- ***Baumzweig:*** Zweig eines Baumes.
- ***Verbindungszweig:*** Zweig, der nicht zum Baum gehört.

Beispiel



Graph mit Bsp. für vollständigen Baum (dicke Linien) und Verbindungszweige (dünne Linien):



Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G18: MASCHENSTROM-VERFAHREN

Ziel

Reduktion der Anzahl Gleichungen, indem die Auswertung der Knotengleichungen umgangen wird:

$\Rightarrow$ $\boxed{m = z - k + 1}$ Gleichungen
die Lösung liefert die **Maschenströme**.

Vorgehen (siehe auch "Ergänzungen" S.2 und Beispiel Vorl.)

1. *Bildung eines vollständigen Baumes:*
gesuchte Ströme, wenn möglich, in Verbindungszweige (VZ) legen.
2. *Bildung der Maschen:*
pro Masche **ein** VZ = **Maschenstrom**
Umlaufsinn der Masche entsprechend der Zählrichtung des Maschenstromes.
3. *Nummerierung der Verbindungszweige:*
Nummer entspr. Index von Masche und Strom.
4. *Aufstellen des Koeffizientenschemas: R-Matrix*
Grundlage: $[R] \cdot [I] = [U]$

Ströme	I_1	I_2	I_3	...	I_n	rechte Seite
Masche 1						
Masche 2						
Masche 3						
...						
Masche n						

5. *Elemente der Hauptdiagonalen der Widerstandsmatrix $[R]$:*

   Summe der Widerstände der Masche (Umlauf).

6. *andere Elemente der Widerstandsmatrix $[R]$:*

   Widerstände, die den entsprechenden Maschen gemeinsam sind. z.B: Zeile 3 (Masche 3) und Spalte 2 (Strom I_2, entspr. Masche 2).

   Vorzeichen der Widerstände in der Summe:

   positiv bei gleichem Umlaufsinn d. Maschen,
   negativ bei entgegengesetztem Umlaufsinn.

   $\Rightarrow$ **Symmetrie** der Matrix zur Hauptdiagonalen!

7. *Rechte Seite des Gleichungssystems $[U]$:*

   alle Quellenspannungen der jeweiligen Masche.
   Vorzeichen der Spannungen in der Summe:

   positiv bei Spannungsrichtung entgegen Umlaufsinn der Masche,
   negativ bei Spannungsrichtung gleich wie Umlaufsinn der Masche.

8. *Berechnung der unbekannten Ströme $I_1, I_2, I_3 \cdots I_n$:*

   Matrizenber., Taschenrechner oder Computer.

Ergänzungen

- Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln.
- ideale Spannungsquellen bieten keine Probleme.
- ideale Stromquellen müssen in VZ liegen.
  Andere Möglichkeit: Umwandlung in lineare Stromquellen durch Quellenversetzung gem. Kapitel G16.

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

G19: KNOTENPOTENTIAL-VERFAHREN

Ziel

Reduktion der Anzahl Gleichungen, indem die Auswertung der Maschengleichungen umgangen wird:
$\Rightarrow$ $\boxed{k-1}$ Gleichungen. Lösung $\Rightarrow$ **Knotenpotentiale**

Vorgehen (siehe auch "Ergänzungen" S.2 und Beispiel Vorl.)

1. *Bildung eines vollständigen Baumes:*
   - Wahl eines **Bezugsknotens** $\Rightarrow$ Bezugspot. φ_0.
     $\Rightarrow$ Knotenpotentiale $U_{10}, U_{20}, U_{30} \cdots U_{n0}$,
   - Baum **sternförmig** vom Bezugsknoten aus,
   - falls keine direkte Verbindung zum Bezugsknoten möglich ist: Verbindung mit $G = 0$.
2. *Zählpfeilrichtungen der Knotenpotentiale:*
   auf den Bezugsknoten gerichtet.
3. *Nummerierung der Baumzweige:*
   Nummer entspr. Index vom Knoten und K.-Pot.
4. *Aufstellen des Koeffizientenschemas: G-Matrix*
   Grundlage: $[G]\cdot[U]=[I]$

Spannungen	U_{10}	U_{20}	U_{30}	...	U_{n0}	rechte Seite
Knoten 1						
Knoten 2						
Knoten 3						
...						
Knoten n						

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

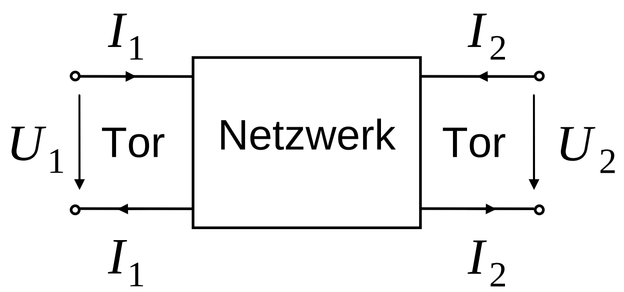
5. *Elem. der Hauptdiag. der Leitwertmatrix* $[G]$*:*
   Summe der Leitwerte des Knotens.
6. *andere Elemente der Leitwertmatrix* $[G]$*:*
   Leitwert eines Verbindungszweiges zwischen einem Knoten, z.B. Zeile 3 (Knoten 3) und einem Knotenpotential z.B. Spalte 2 (Spannung U_{20}, entspr. Knoten 2).
   Vorzeichen:
   immer negativ,
   Null, wenn keine direkte Verbindung vorh.
   $\Rightarrow$ **Symmetrie** der Matrix zur Hauptdiagonalen!
7. *Rechte Seite des Gleichungssystems* $[I]$*:*
   alle Stromquellen am entsprechenden Knoten:
   Vorzeichen der Ströme in der Summe:
   positiv wenn Strom in Knoten hineinfliesst,
   negativ wenn Strom aus Knoten herausfliesst.
8. *Berechnung der unbekannten Spannungen* $U_{10}, U_{20}, U_{30} \cdots U_{n0}$:
   Matrizenber., Taschenrechner oder Computer.

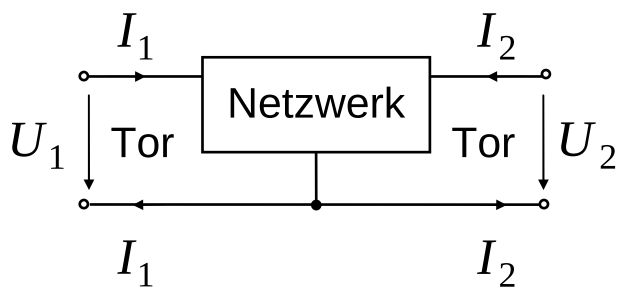
Ergänzungen

- Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln.
- ideale Stromquellen bieten keine Probleme.
- ideale Spannungsquellen müssen in einem Baumzweig (bzw. am Bezugsknoten) liegen.
  Andere Möglichkeit: Umwandlung in lineare Spannungsquellen durch Quellenverschiebung gem. Kapitel G16.

G20: VIERPOLE ODER ZWEITORE

Netzwerk mit zwei Klemmenpaaren (Tore), oder auch ein solches mit bloss drei Klemmen (s. Bild).





Aufgabe: Übertragung, Aufbereitung oder Verstärkung el. Energie.

Beispiele: Zweidrahtleitung, Koaxleitung, Transformator, Filter, Verstärker...

Typen: **passiv** / aktiv, **linear** / nichtlinear, **zeitunabhängig** / zeitabhängig.

Bedingung: An jedem Tor: der Strom, der bei der einen Klemme hineinfliesst, muss an der anderen Klemme herausfliessen.

Energiefluss: in der Regel von links nach rechts.

Eingang: Primärseite (U_1, I_1)
Anschluss eines Quellenzweipols
Eingangsleistung: $P_1 = U_1 \cdot I_1$

Ausgang: Sekundärseite (U_2, I_2)
Anschluss eines Verbraucherzweipols
Ausgangsleistung: $P_2 = U_2 \cdot I_2$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Beziehungen zw. den Vierpolgr. U_1, I_1, U_2, I_2

Prinzip: jeweils zwei Grössen sind die **abhängigen** Grössen und zwei die **unabhängigen** Grössen.

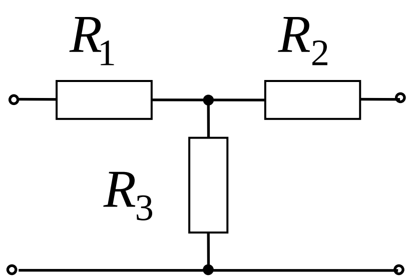
Verknüpfung: über **Matrizen**, die durch das Netzwerk des Vierpols bestimmt sind:

$$\boxed{[\text{abhängige Gr.}] = [\text{Vierpolmatrix}] \cdot [\text{unabhängige Gr.}]}$$

Widerstandsmatrix (dc) oder Impedanzmatrix (ac)

- Vierpolgleichungen: $U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$
  $U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$
- Widerstandsparameter: Z_{xy}
  Index $x =$ Index der abhängigen Variablen
  Index $y =$ Index der unabhängigen Variablen
  (z.B. Z_{12} beschreibt den Einfluss von I_2 auf U_1)
- Matrixschreibweise: $$\boxed{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}$$
- Vorwärtsbetrieb, d.h. Leerlauf am Ausgang: $I_2 = 0$
  $\boxed{Z_{11} = U_1 / I_1}$ und $\boxed{Z_{21} = U_2 / I_1}$
- Rückwärtsbetrieb, d.h. Leerlauf am Eingang: $I_1 = 0$
  $\boxed{Z_{22} = U_2 / I_2}$ und $\boxed{Z_{12} = U_1 / I_2}$
- T-Ersatzschaltung:

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$



Leitwertmatrix (dc) oder Admittanzmatrix (ac)

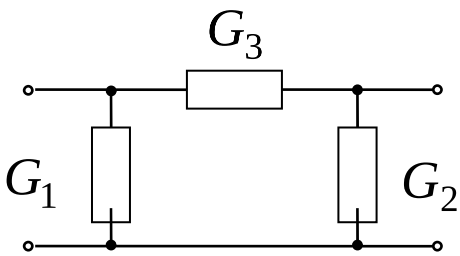
- Vierpolgleichungen: $I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2$
  $I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2$
- Leitwertparameter: Y_{xy}

  Die Umrechnung der Z- in die Y-Parameter kann mit Hilfe der **Tabelle** (Beilage) erfolgen.
  (Die Vierpolgleichungen werden nach den Strömen aufgelöst)
- Matrixschreibweise: $\boxed{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}}$
- Kurzschluss am Ausgang: $U_2 = 0$

  $\boxed{Y_{11} = I_1 / U_1}$ und $\boxed{Y_{21} = I_2 / U_1}$
- Kurzschluss am Eingang: $U_1 = 0$

  $\boxed{Y_{22} = I_2 / U_2}$ und $\boxed{Y_{12} = I_1 / U_2}$
- Π-Ersatzschaltung:

$$[Y] = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}$$



Hybridmatrix (für Verstärkerschaltungen mit Transistoren)

- Vierpolgleichungen: $U_1 = H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2$
  $I_2 = H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2$
- Hybridparameter: H_{xy} (Umrechnung: Tabelle)
- Matrixschreibweise: $\boxed{\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}}$

Lucerne University of Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE LUZERN

Kettenmatrix

- Vierpolgleichungen: $U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12}(-I_2)$
  $I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22}(-I_2)$
- Hybridparameter: A_{xy} (Umrechnung: Tabelle)
- Matrixschreibweise: $\boxed{\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}}$

Schaltungen mit zwei Vierpolen (s. Beilage)

- Serie-Serie: $[Z] = [Z_1] + [Z_2]$
- Parallel-Parallel: $[Y] = [Y_1] + [Y_2]$
- Serie-Parallel: $[H] = [H_1] + [H_2]$
- Kettenschaltung: $[A] = [A_1] \cdot [A_2]$

Umkehrbare Vierpole (reziprok)

Eigenschaften: Eine Spannungsquelle am Eingang $\Rightarrow I_2$ am Ausgang. Die gleiche Quelle am Ausgang $\Rightarrow I_1$ am Eingang. Umkehrbar bedeutet $I_1 = I_2$.

Bedingung: $\boxed{Z_{12} = Z_{21}}$ oder $\boxed{Y_{12} = Y_{21}}$

NB: alle passiven Vierpole sind umkehrbar.

Symmetrische Vierpole (richtungssymmetrisch)

Eigenschaften: Gleiches Übertragungsverhalten bei Vorwärts- und Rückwärtsbetrieb.

Bedingungen: $\boxed{\begin{matrix} Z_{11} = Z_{22} \\ Z_{12} = Z_{21} \end{matrix}}$ oder $\boxed{\begin{matrix} Y_{11} = Y_{22} \\ Y_{12} = Y_{21} \end{matrix}}$