Aufgabe 1: Linearität von Fourierreihen

Zeichnen Sie den Graphen der $2\,T_0$-periodischen Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} A\,|x| & (-T_0 < x < 0), \\ 0 & (0 < x < T_0). \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}$ Schreiben Sie $f(x)$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion und bestimmen Sie deren Fourierreihen. Bestimmen Sie dann damit die reelle Fourierreihe von $f(x)$ durch Superposition.

Lösung:

Wir zerlegen die gegebene Funktion durch $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$ in eine ungerade Funktion $f_1(x) = -A/2\,x$ und eine gerade Funktion $f_2(x) = A/2\,|x|$. Die Periode von $f(x)$ beträgt $T = 2\,T_0$. Für die Fourierreihenzerlegung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ benötigen wir nur die halbe Periode T_0. Die ungerade Fourierreihe von $f_1(x)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{2\,T_0} \int_0^{T_0} -\frac{A}{2}\,x\,\sin\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right)\,dx = -\frac{A}{T_0}\int_0^{T_0} x\,\sin\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right)\,dx \\ &= \frac{A\,T_0}{k\,\pi}\,\cos(\pi\,k) = \frac{A\,T_0}{k\,\pi}\,(-1)^k \\ f_1(x) &= \frac{A\,T_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,\sin\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right) \end{aligned}$$

Und die gerade Fourierreihe von $f_2(x)$ ist:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A\,T_0}{2} \\ a_k &= \frac{4}{2\,T_0}\int_0^{T_0}\frac{A}{2}\,x\,\cos\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right)\,dx = \frac{A}{T_0}\int_0^{T_0} x\,\cos\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right)\,dx \\ &= \frac{A\,T_0}{\pi^2\,k^2}\,(\cos(\pi\,k)-1) = \frac{A\,T_0}{\pi^2\,k^2}\,\left((-1)^k - 1\right) \\ f_2(x) &= \frac{A\,T_0}{4} + \frac{A\,T_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\,\cos\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right) \end{aligned}$$

Damit folgt aufgrund der Linearität die Fourierreihe für $f(x)$ durch Addition der beiden Fourierreihen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{A\,T_0}{4} + \frac{A\,T_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi\,k^2}\,\cos\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right) + \frac{(-1)^k}{k}\,\sin\left(\frac{\pi}{T_0}\,k\,x\right)$$

Aufgabe 2: Komplexe Orthogonalitätsrelationen

Formulieren Sie analog zu den (reellen) Orthogonalitätsrelationen aus Kapitel 1.2.1. eine komplexe Orthogonalitätsrelation und leiten Sie damit direkt die Formel für die komplexen Fourierkoeffizienten c_k für

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\,k\,x}$$

her.

Lösung:

Dazu betrachten wir für beliebige ganze Zahlen m und n das Integral:

$$\int_0^{2\,\pi} e^{i\,m\,x} \cdot e^{i\,n\,x}\,dx \tag{1}$$

Das Integral liefert für $m = -n$ den Wert $2\,\pi$ und für alle anderen Kombinationen 0 (nachrechnen!). Nun multiplizieren wir für ein fixes m den Ausdruck $exp(i\,m\,x)$ auf beiden Seiten der Definition der komplexen Fourierreihe und integrieren über ein Intervall der Länge $2\,\pi$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\,k\,x} \\ \int_0^{2\,\pi} f(x)\,e^{i\,m\,x}\,dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \int_0^{2\,\pi} e^{i\,m\,x} \cdot e^{i\,k\,x}\,dx \\ \int_0^{2\,\pi} f(x)\,e^{i\,m\,x}\,dx &= c_{-m} \cdot 2\,\pi \end{aligned}$$

Woraus sofort die Darstellung für die komplexen Fourierkoeffizienten folgt:

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx$$

Aufgabe 3: Komplexe Fourierreihe

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = e^{-x}, \quad \text{für } x \in [0, 2\pi).$$

a) Skizzieren Sie diese Funktion im Intervall $[-4\,\pi, 4\,\pi]$.

b) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe (Integration von Hand). Berechnen Sie die reellen Koeffizienten mit Hilfe der komplexen Koeffizienten.

c) Welchen Wert nimmt die Fourierreihe an der Stelle $x = 2\,\pi$ an?

Lösung:

b)

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} e^{-x}\, e^{-i\,k\,x}\, dx = \frac{1 - i\,k}{2\,\pi(1 + k^2)} \left(1 - e^{-2\,\pi}\right)$$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2\,\pi}}{2\,\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - i\,k}{1 + k^2}\, e^{i\,k\,x}$$

c) Mit $a_0 = 2\,c_0$, $a_k = 2\,\Re(c_k)$ und $b_k = -2\,\Im(c_k)$ erhält man die reellen Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1 - e^{-2\,\pi}}{\pi} \qquad a_k = \frac{1 - e^{-2\,\pi}}{\pi(1 + k^2)} \qquad b_k = \frac{k\left(1 - e^{-2\,\pi}\right)}{\pi(1 + k^2)}$$

d) Bei $x = 2\pi$ hat die periodisch fortgesetzte Funktion einen Sprung, also nimmt die Fourierreihe den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Wertes an:

$$f(2\,\pi) = \frac{1}{2}(f(2\,\pi^+) + f(2\,\pi^-)) = \frac{1}{2}\left(e^{-2\,\pi} + 1\right) \cong 0.501$$

Aufgabe 4: Linearität von Fourierreihen

a) Die gegebene Funktion lässt sich schreiben als Linearkombination (wobei $\hat{y} = 1$ gesetzt wird):

$$f(t) = 2\,x_2(t) - 1\,x_1(t)$$

b) Die Periode beträgt $T = \pi$ somit ist die Grundfrequenz $\omega_0 = 2\,\pi/T = 2$. Nach den tabellierten Fourierreihen gilt nun

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\omega_0\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0\,t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0\,t) + \dots\right)\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\omega_0\,t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\,\omega_0\,t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\,\omega_0\,t) + \dots\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi\,k}\sin(k\,\omega_0\,t) - \frac{4}{\pi^2\,k^2}\cos(k\,\omega_0\,t)
\end{aligned}$$

Daraus können wir direkt die reellen Fourierkoeffizienten ablesen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_k &= \frac{4}{\pi\,k} && \text{(falls } k \text{ ungerade und 0 sonst)} \\
b_k &= -\frac{4}{\pi^2\,k^2} && \text{(falls } k \text{ ungerade und 0 sonst)}
\end{aligned}$$

c) Die komplexen Fourierkoeffizienten sind definiert als:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - j\,b_k)$$
$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + j\,b_k)$$

Damit folgt in einem ersten Schritt sofort, dass $c_k = 0$ und $c_{-k} = 0$ für gerade k. Für ungerade k erhält man:

$$c_0 = \frac{1}{2}$$
$$c_k = \frac{2}{\pi\,k}(1 - j\,\frac{1}{\pi\,k})$$
$$c_{-k} = \frac{2}{\pi\,k}(1 + j\,\frac{1}{\pi\,k})$$