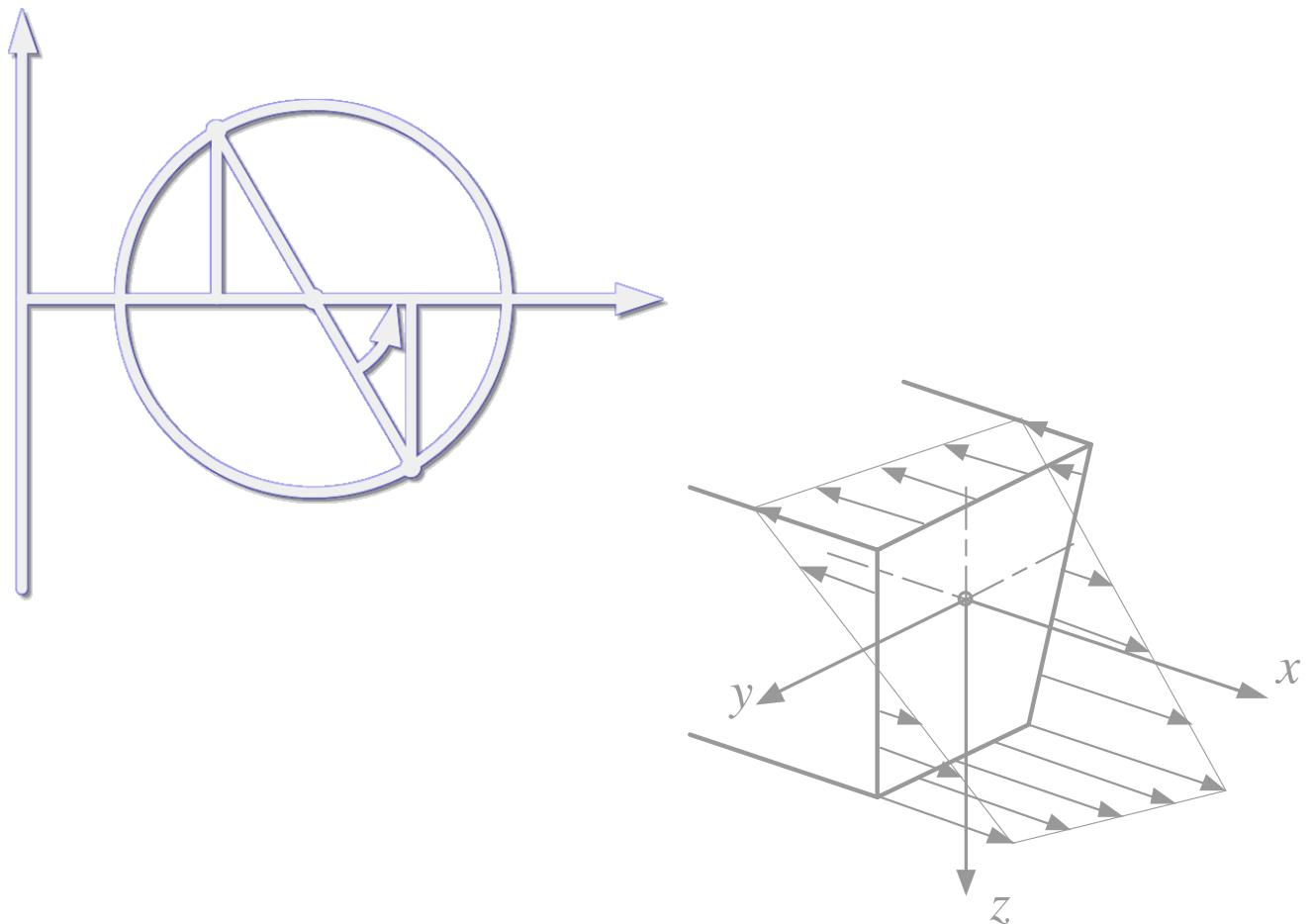


Mechanik & Festigkeit

Festigkeitslehre



Vorlesungsunterlagen in Mechanik & Festigkeit für die Module Produktentwicklung
Komponenten und Produktentwicklung Systeme

Abteilung Maschinentechnik

Prof. R. Bärtsch

Vorwort

Die Ausbildung im Bereich *Mechanik und Festigkeit* innerhalb des Studiengangs Maschinentechnik basiert auf den beiden *Basic* Modulen „Produktentwicklung - Mechanik“ *PRMECH* und „Produktentwicklung - Komponenten“ *PRKOM* sowie dem *Intermediate* Modul „Produktentwicklung - Systeme“ *PR+SY*.

Das vorliegende Skript umfasst die im Rahmen der Module *PRKOM* und *PR+SY* vermittelten Grundlagen der *Festigkeit*, basierend auf den elementaren Kenntnissen der Statik, welche im Modul *PRMECH* erworben werden. Der parallele Besuch der beiden Basic Module im gleichen Semester ist für ein Vollzeitstudium die Regel. Für ein berufsbegleitendes Studium ist der Besuch des Moduls *PRMECH* vor *PRKOM* sinnvoll und zu empfehlen.

Das primäre Lernziel in der *Festigkeitslehre* ist, die Spannungen in einem Bauteil berechnen und beurteilen zu können. Dies wird zunächst im Modul *PRKOM* separat für die vier Grundbeanspruchungen Zug/ Druck, Scherung, Biegung und Torsion an einfachen Bauteilen dargelegt. Das Zusammenwirken von verschiedenen Beanspruchungen in realen Bauteilen wird im Modul *PR+SY* behandelt. Neben der Berechnung von Spannungen gehören auch Fragen der Steifigkeit – z.B. die Durchbiegung einer Welle – und Fragen der Stabilität (Knicken von Stäben) zur Festigkeitslehre.

Neben der Vermittlung von Methoden zur Berechnung von Spannungen und Deformationen wird auch Wert darauf gelegt, ein Gefühl für die Wirkung von Belastungen an verschiedenen Bauteilen zu entwickeln. Das Verstehen der Grundgesetze der Festigkeit ist unabdingbar für den guten Konstrukteur und auch Basis für eine sinnvolle Modellbildung bei der Analyse komplexer Probleme mit Hilfe numerischer Methoden (FEM).

Das Skript ist aus Lehrveranstaltungen hervorgegangen, die vom Verfasser für Studenten in Maschinentechnik gehalten wurden. Es ist als Arbeitsmittel konzipiert und soll dem Studenten Lösungsrezepte für Aufgaben aus der Festigkeit vermitteln. Die beste Methode, die Mechanik zu erlernen, ist Aufgaben zu lösen. Dazu ist am Ende des Skripts eine umfangreiche Aufgabensammlung beigefügt.

Zahlreiche Bücher unter dem Titel „Technische Mechanik“ stehen dem interessierten Studenten ergänzend zur Verfügung, siehe Literatur im Anhang A.

Anregungen und Hinweise, die zur formalen wie inhaltlichen Verbesserung des Skripts beitragen, sind jederzeit willkommen.

Horw, Februar 2016

Prof. R. Bärtsch

Inhalt Festigkeit

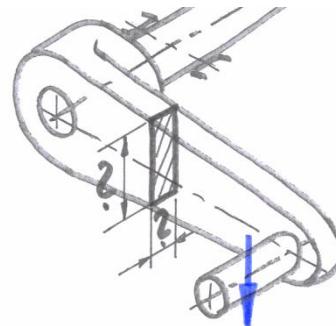
1	Einführung.....	5
2	Grundlagen der Festigkeit	6
2.1	Belastungen	6
2.2	Spannungen	7
2.3	Der einachsige Spannungszustand.....	8
2.4	Der ebene Spannungszustand für Schubspannungen	10
2.5	Belastungsfälle.....	11
2.6	Die Kerbwirkung	13
2.7	Der überschlägige Spannungsnachweis.....	16
2.8	Die Beanspruchungen und Schnittgrößen	16
3	Zug und Druck	19
3.1	Statisch bestimmte Stabsysteme	20
3.2	Statisch unbestimmte Stabsysteme	21
3.3	Flächenpressung	22
4	Biegung	23
4.1	Die Grundgleichung der Biegung.....	24
4.2	Axiale Flächen- und Widerstandsmomente.....	27
4.3	Verformung	31
4.3.1	Integrationsmethode	32
4.3.2	Überlagerung einzelner Belastungsfälle.....	33
4.3.3	Formänderungsarbeit.....	36
4.4	Schiefe Biegung.....	39
4.4.1	Hauptachsen und Hauptflächenmomente	40
4.4.2	Spannungsberechnung.....	42
5	Schub.....	44
5.1	Scherung	44
5.2	Schub bei Querkraftbiegung	45
6	Torsion	50
6.1	Kreisförmige Querschnitte	50
6.2	Beliebige Vollquerschnitte	54
6.3	Hohlquerschnitte.....	56
7	Knickung	58
7.1	Elastische Knickung nach EULER.....	59
7.2	Elastisch-plastische Knickung	61

8	Der ebene Spannungszustand.....	63
8.1	Hauptspannungen	64
8.2	Der MOHRSche Spannungskreis.....	66
8.3	Druckbehälter	68
9	Zusammengesetzte Beanspruchung	70
9.1	Biegung und Normalkraft.....	70
9.2	Festigkeitshypothesen.....	72
9.2.1	Normalspannungshypothese (NH)	72
9.2.2	Schubspannungshypothese (SH)	73
9.2.3	Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)	73
9.2.4	Dimensionierung und Spannungsnachweis.....	74
9.3	Biegung und Torsion	75
9.4	Biegung und Querkraft	76
10	Festigkeitsnachweis.....	77
10.1	Der statische Festigkeitsnachweis.....	78
10.2	Der Dauerfestigkeitsnachweis	81
10.3	Hinweise zur FKM.....	87
10.4	Hinweise zum Betriebsfestigkeitsnachweis	89
11	Statisch unbestimmte Systeme	90
11.1	Überlagerung bekannter Belastungsfälle	91
11.2	Formänderungsarbeit	92
11.3	Hinweise zu n-fach statisch unbestimmten Systemen	94
A	Literatur.....	95
B	Tabellen.....	96
C	Aufgaben.....	104
D	Lösungen.....	142

1 Einführung

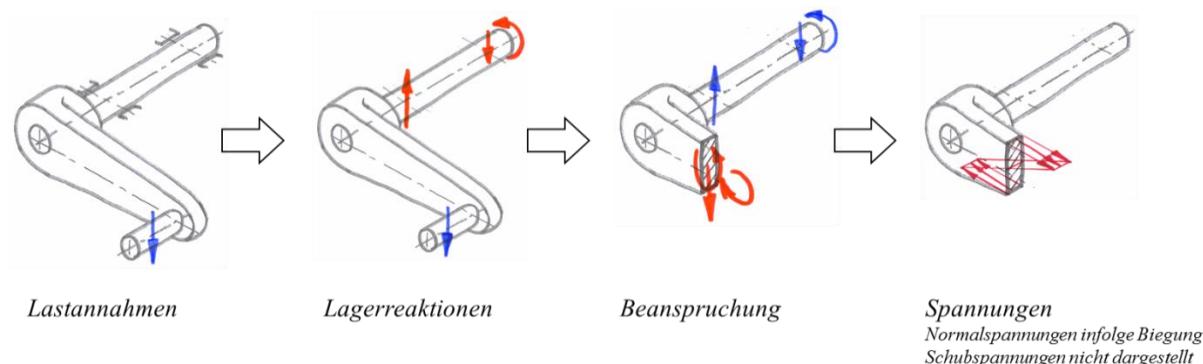
Beim Konstruieren von Bauteilen sind verschiedene Anforderungen bezüglich Funktion, Fertigung, Festigkeit, Kosten und andere mehr zu beachten.

Um eine *festigkeitsgerechte* Gestaltung zu erreichen, müssen Form und Abmessungen von Querschnitten so bestimmt werden, dass das Bauteil den wirkenden Belastungen während der gesamten Lebensdauer standhält. So sind z.B. für die nebenstehende Handkurbel die beiden Masse des rechteckförmigen Querschnitts festzulegen. Man nennt dies das Dimensionieren von Bauteilen.



Dazu müssen alle auf das Bauteil wirkenden Kräfte bekannt sein, d.h. die Belastungen und die Lagerreaktionen. Letztere werden in der Statik durch Gleichgewicht am unverformbaren (starrer) Körper ermittelt.

Die Festigkeitslehre untersucht die inneren Kräfte in Bauteilen und die daraus resultierenden Beanspruchungen und Verformungen. Ein Mass für die Intensität dieser Beanspruchungen ist die Spannung. Durch Vergleich der *vorhandenen* Spannungen mit den *zulässigen* Spannungen (Materialkennwerten) wird die Dimensionierung des Bauteils vorgenommen.



Das Dimensionieren – das Festlegen der Abmessungen – ist nur eine Aufgabe der Festigkeitslehre. Von den vier Parametern Lasten, Werkstoffkennwerte, Sicherheitsfaktoren und Bauteilabmessungen können jeweils drei vorgegeben und der vierte gesucht sein. So spricht man von einem Sicherheitsnachweis, wenn die Konstruktion, der Werkstoff und die Belastung bekannt sind und die Sicherheit berechnet werden soll. Andere Fragestellungen können nach dem Werkstoff oder nach der zulässigen Belastung fragen. Die Festigkeitslehre vermittelt dabei die Grundlagen für eine Berechnung von Bauteilen.

In der Festigkeitslehre wird die Annahme des starren Körpers fallengelassen, da es notwendig ist, die Verformung von Bauteilen zu betrachten. Die Verformungen sind aber in den meisten Fällen sehr klein gegenüber den Bauteilabmessungen. Deshalb können die Lagerreaktionen und Schnittgrößen am unverformten (starrer) Körper ermittelt werden. Eine Ausnahme diesbezüglich stellen Stabilitätsprobleme wie z.B. das Stabknicken (Kapitel 7) dar, bei welchen das Gleichgewicht am verformten System formuliert werden muss.

2 Grundlagen der Festigkeit

2.1 Belastungen

Die Frage nach den Belastungen, die auf ein Bauteil einwirken ist für jede Festigkeitsrechnung von zentraler Bedeutung. Nicht nur Art und Betrag der Lasten (Kräfte, Drücke, Beschleunigungen) sind massgebend, sondern auch deren zeitlicher Verlauf. Wenn die Belastung konstant bleibt (z.B. Eigengewicht), liegt eine *statische Beanspruchung* vor. Aus der Sicht des Werkstoffverhaltens spricht man bei einer einmaligen, aussergewöhnlichen Last ebenfalls von *statischer Beanspruchung*, obwohl diese Last über der Zeit veränderlich auftreten kann; entscheidend ist hier, dass es sich um eine einzelne, seltene Belastungsspitze handelt. So tritt z.B. beim Anfahren einer Maschine (Bild 2-1) ein – pro Betriebszyklus einmaliges – maximales Drehmoment auf, welches als statische Belastung zu werten ist.

Im Gegensatz dazu liegt bei wiederholter, schwingender Belastung eine *dynamische Beanspruchung* vor, deren Erfassung allerdings versuchstechnisch sehr aufwendig ist. Man verwendet deshalb für den dynamischen Festigkeitsnachweis im Allgemeinen auf Erfahrungswerten beruhende Betriebsfaktoren, auch Anwendungsfaktoren K_A genannt. Mit dem Anwendungsfaktor werden die mittleren Abweichungen von der Nennlast angegeben. Damit ist es möglich, eine idealisierte Schwingung um den Nennwert anzugeben, welche die Ersatzlast für die reale dynamische Belastung bildet.

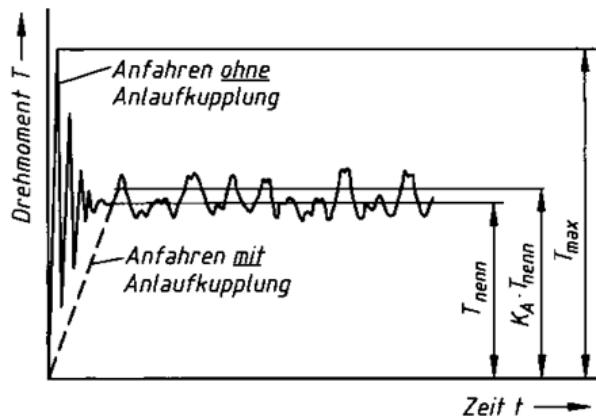


Bild 2-1 Zeitlicher Verlauf Drehmoment einer Antriebswelle

Bauteile wie Wellen, Tragflügel oder Stossdämpfer unterliegen solchen dynamischen Kräften. Da sich der zeitliche Belastungsverlauf auch in den Spannungen widerspiegelt, führen statische Lasten zu Gewaltbrüchen, während dynamische Lasten eine Ermüdung des Materials bewirken.

Oft sind zeitlich veränderliche Belastungen regellos (stochastisch) und es ist notwendig, der Berechnung zugängliche, vereinfachte Lastannahmen zu treffen. Hilfsmittel dazu sind Vorschriften und Normen, Messungen oder Simulationen mit physikalischen Modellen.

In der Regel erfassen die Normen nicht nur die Lastannahmen, sondern auch die Bemessungsverfahren und die zulässigen Spannungen. Beispiele hierfür sind die Kranbaunorm [10], die Sicherheitsanforderungen für Seilbahnen [12] oder die Norm zur Auslegung von Schienenfahrzeugen [13]. Die Belastungsfälle können einerseits maximal statische und andererseits idealisierte dynamische Lasten sein, wobei letztere meistens in Form einer harmonischen Schwingung angenommen werden.

2.2 Spannungen

An einem Bauteil *aussen* angreifende Kräfte haben eine Beanspruchung im *Innern* zur Folge. Um die Frage nach der Beanspruchung im Innern beantworten zu können, muss das Bauteil in Gedanken aufgeschnitten werden. Durch Gleichgewicht am abgeschnittenen Teil können die Schnittkräfte bestimmt werden.

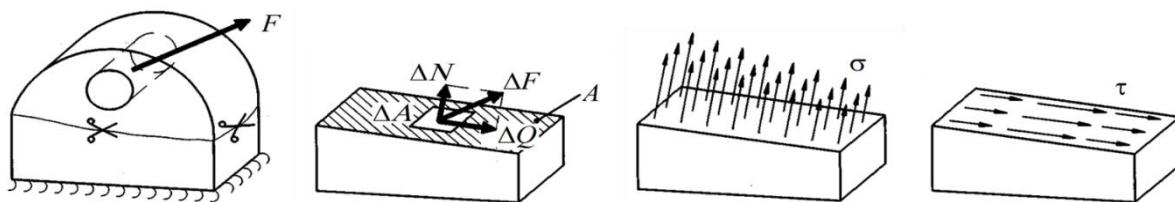


Bild 2-2 Spannungen

Im Allgemeinen sind diese Schnittkräfte nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilt, deshalb soll ein kleines Flächenelement ΔA herausgegriffen werden. An ihm greift die kleine Kraft ΔF an, wobei die Summe aller Kräfte ΔF gleich der Schnittkraft F sein muss. Der Kraftvektor ΔF wird in die normale und tangentiale (parallele) Richtung zerlegt. Mit Bezug auf das Flächenelement ΔA ergeben sich die Definitionen der Spannungen.

$$\text{Normalspannung} \quad \sigma = \frac{\Delta N}{\Delta A}$$

$$\text{Schubspannung} \quad \tau = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

Die Normalspannung – Spannungen normal zur Schnittebene – versucht das Material (bei einem spröden Werkstoff) in Kraftrichtung zu trennen. Die Schubspannung hingegen bewirkt, dass die Kristalle (bei einem duktilen Werkstoff) aufeinander gleiten und abgescherzt werden.

Ein Trennbruch infolge der Normalspannungen ist grundsätzlich nur bei Zug möglich, bei Druck versagt auch ein spröder Werkstoff durch Abgleiten. Deshalb ist für die Richtung der Normalspannung zu unterscheiden:

$\sigma > 0$ Zugspannung

$\sigma < 0$ Druckspannung

Das Vorzeichen der Schubspannung hingegen hat eine rein formale Bedeutung und steht in keinem Zusammenhang mit der Versagensform.

Da die beiden Spannungstypen verschiedene Verformungs- und Schädigungsmechanismen zeigen, sind sie getrennt zu behandeln. Sie dürfen nicht addiert werden, wenn man sie mit zulässigen Spannungen vergleichen will. Die gleichzeitige Wirkung der zwei Spannungsarten wird mit den Festigkeitshypothesen (Kapitel 9.2) erfasst.

2.3 Der einachsige Spannungszustand

Von einem einachsigen Spannungszustand spricht man, wenn in einem Bauteil eine Spannung nur in einer Richtung vorhanden ist. Ein typisches Beispiel ist der aus der Werkstoffprüfung bekannte Probestab für Zugprüfungen.

Zerreißt man einen Probestab aus Grauguss, so verläuft der Bruch quer zur Zugrichtung, bei einer Probe aus Baustahl hingegen verläuft der Bruch unter 45° .

Beim spröden Grauguss verursachen die in Zugrichtung wirkenden Normalspannungen einen Trennbruch, beim duktilen Baustahl führen die Schubspannungen zu einem Abgleiten der Kristalle, d.h. zu einem Gleitbruch. In einem Probestab müssen also gleichzeitig Normal- und Schubspannungen vorhanden sein.

Dies wird im Folgenden durch einen beliebigen Schnitt im Winkel α durch einen Probestab gezeigt.

Für einen Schnitt quer zur Stabachse ($\alpha = 0^\circ$) ergibt sich die Normalspannung

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \quad (2-1)$$

Für einen beliebigen Wickel α wird die Schnittkraft F in eine normale und tangentiale Richtung zerlegt.

$$F_n = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_t = F \cdot \sin \alpha$$

Die Schnittfläche wird grösser, nämlich

$$A = b \cdot \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{A_0}{\cos \alpha}$$

Normal- und Schubspannungen ergeben sich zu

$$\sigma = \frac{F_n}{A} = \frac{F}{A_0} \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

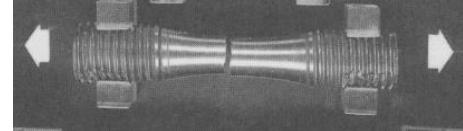
$$\tau = \frac{F_t}{A} = \frac{F}{A_0} \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha$$

Die Maximalwerte im Probestab treten auf

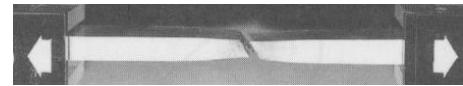
$$\sigma_{max} = \sigma_0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0^\circ$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2} \quad \text{für} \quad \alpha = 45^\circ$$

Spröde Werkstoffe brechen dort, wo die maximale Normalzugspannung auftritt, wogegen duktile Materialien unter 45° abgleiten, weil dort die Schubspannung maximal wird.



Sprödbruch bei Grauguss



Gleitbruch bei Baustahl

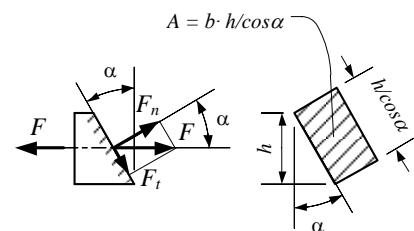
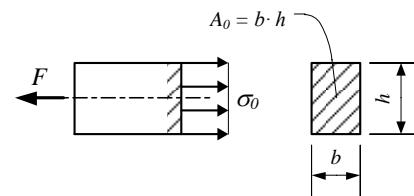


Bild 2-3 Schräger Schnitt

Die Verformung des Probestabs wird ebenfalls im Zugversuch gemessen. Ein Probestab verlängert sich unter Belastung um den Betrag ΔL . Bezogen auf die Ausgangslänge L_0 spricht man von der Dehnung.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Ausserdem kann man eine Reduktion des Durchmessers feststellen, man spricht von einer Querkontraktion. Diese wird auf den ursprünglichen Durchmesser d_0 bezogen.

$$\varepsilon_q = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$$

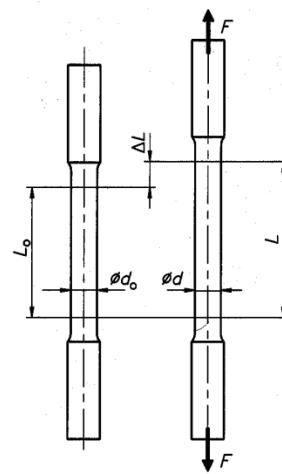


Bild 2-4 Probekörper Zugversuch

Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen wird durch die Stoff- oder Materialgesetze beschrieben und experimentell bestimmt. Aus der Spannungs-Dehnungs-Kurve lassen sich die typischen Kennwerte, wie Zugfestigkeit R_m , Streckgrenze für a) Stähle mit ausgeprägter Streckgrenze R_e bzw. b) für Stähle mit *nicht* ausgeprägter Streckgrenze $R_{p0,2}$, 0,01%-Dehngrenze $R_{p0,01}$, Elastizitätsmodul E und Bruchdehnung A ablesen (Bild 2-5). Die 0,01%-Dehngrenze bezeichnet die Spannung, bei der nach Entlastung noch 0,01% plastische Dehnung bleiben. Für technische Anwendungen ist dies der Grenzwert für den proportionalen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung, dem HOOKEschen Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2-2)$$

Die Querdehnung ist ebenfalls zur Spannung und damit zur Längsdehnung proportional

$$\varepsilon_q = -\nu \cdot \varepsilon \quad (2-3)$$

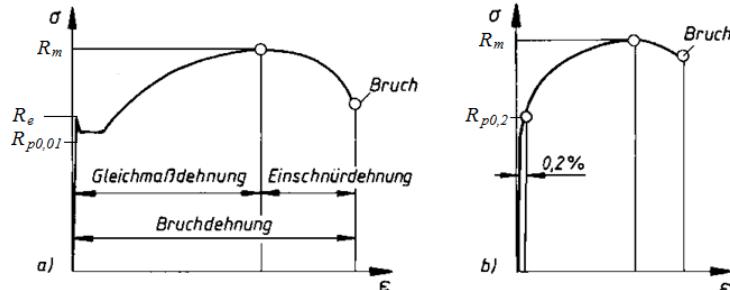


Bild 2-5 Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Der Faktor ν ist materialabhängig und wird Querkontraktions- oder Poisson-Zahl genannt. Für Stahl ist $\nu = 0,3$, weitere Angaben in [4]. Das bereits erwähnte unterschiedliche Verhalten von spröden und duktilen Werkstoffen lässt sich auch aus den Spannungs-Dehnungs-Kurven erkennen.

Die unter der σ - ε -Kurve eingeschlossene Fläche entspricht der zur Zerstörung des Werkstoffes aufgebrachten Arbeit pro Volumeneinheit. Ist diese Arbeit gross, spricht man von einem duktilen Verhalten, so z.B. bei einem Baustahl. Um einen Vergütungsstahl mit hoher Festigkeit zu zerreißen, braucht man hingegen weniger Arbeit; man nennt dieses Verhalten spröde. Ein einfaches Mass zur Unterscheidung spröde/ duktil ist die Bruchdehnung. Gemäss [4] zählen Gusseisen mit Bruchdehnung $< 8\%$ zu den spröden Werkstoffen.

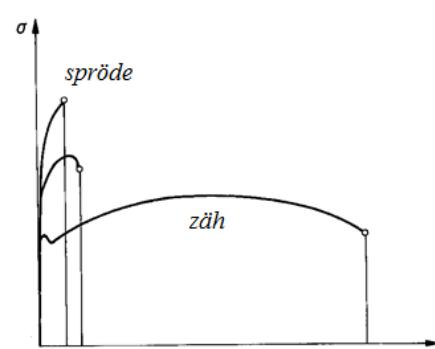


Bild 2-6 Duktile und spröde Werkstoffe

2.4 Der ebene Spannungszustand für Schubspannungen

Ein quaderförmiger Körper, auf dessen Oberfläche eine horizontale Kraft angreift, verformt sich gemäss untenstehendem Bild.

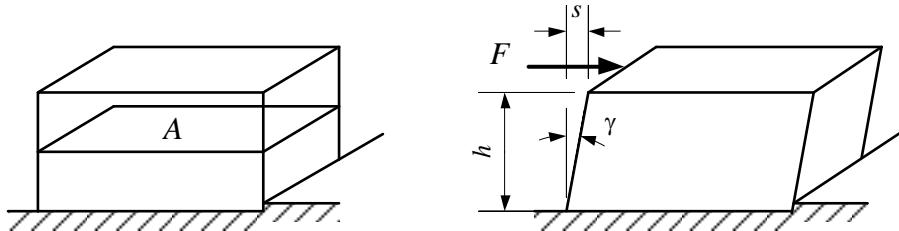


Bild 2-7 Schubverformung eines Quaders

Die Schubspannungen im Innern des Körpers sind nicht konstant, es wird allerdings bei einfachen, kurzen Bauteilen mit einer mittleren Schubspannung gerechnet, siehe dazu auch Kapitel 5.1.

Für ein kleines Volumenelement aus dem Innern des Bauteils lassen sich Verformung, Spannung und deren linearer Zusammenhang wie folgt beschreiben. Die Schubverformung (Verscherung) besteht lediglich aus einer Winkeländerung γ des ursprünglich rechten Winkels. In der Praxis sind die Winkeländerungen sehr klein, so dass mit $\tan \gamma \approx \gamma$ gilt:

$$\gamma = \frac{\Delta s}{\Delta h}$$

Analog dem HOOKEschen Gesetz für Normalspannungen existiert ein linearer Zusammenhang zwischen Schubspannung und Scherwinkel, wobei G der Schubmodul des Materials ist.

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2-4)$$

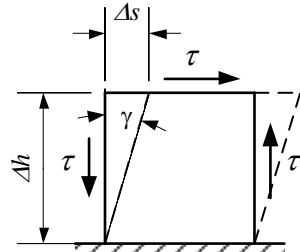


Bild 2-8 Schubverzerrung

Ein linear-elastisches isotropes Material ist durch zwei elastische Konstanten vollständig beschrieben, die dritte ergibt sich durch folgende Beziehung.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Aus Gründen des Gleichgewichts müssen an den vertikalen Flächen Schubspannungen vom gleichen Betrag wie an den horizontalen Flächen wirken.

Dies nennt man das *Prinzip der zugeordneten Schubspannungen*.

Für den quaderförmigen Körper kann damit die Verschiebung s bestimmt werden.

$$s = \gamma \cdot h \cong \frac{\bar{\tau}}{G} \cdot h \quad \text{mit} \quad \bar{\tau} = \frac{F}{A}$$

Dies stellt eine Näherung dar, die beispielsweise für Gummielemente oder Klebefugen mit geringer Höhe gegenüber der Länge zur Anwendung kommt. Bei einem Körper mit beliebigen Abmessungen spielen andere Verformungen mit, die weit grösser sein können als die Schubverformung. Das ist auch der Grund dafür, dass dieser Versuch nicht zur Bestimmung des Schubmoduls verwendet wird; sondern hierfür dienen Torsionsversuche, bei denen eine reine Schubdeformation vorliegt, siehe Kapitel 6.

2.5 Belastungsfälle

In Kapitel 2.1 ist auf die Bedeutung des zeitlichen Verlaufes einer Belastung hingewiesen worden. Da sich der zeitliche Belastungsverlauf auch in den Spannungen widerspiegelt, führen statische Lasten zu Gewaltbrüchen, während dynamische Lasten eine Ermüdung des Materials bewirken. Bei *statisch beanspruchten* Bauteilen sind unzulässige plastische Verformungen durch Fliessen des Materials oder Gewaltbruch zu verhindern. Vereinfacht gesagt erfolgt dies durch Vergleich der vorhandenen mit einer zulässigen Spannung, welche sich aus der Streckgrenze oder der Zugfestigkeit des Werkstoffes unter Berücksichtigung eines Sicherheitsfaktors ergibt. Im Gegensatz dazu liegt bei wiederholter, schwingender Belastung eine *dynamische Beanspruchung* vor.

Eine reale *dynamische Beanspruchung* kann sehr unregelmässig sein und wird häufig als harmonische Schwingung idealisiert. Diese wird durch die Kenngrössen *Mittelspannung* σ_m , *Oberspannung* σ_o , *Unterspannung* σ_u und *Spannungsamplitude* σ_a beschrieben, wobei folgende Zusammenhänge gelten:

$$\text{Mittelspannung} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$$

$$\text{Spannungsamplitude} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$$

$$\text{Spannungsverhältnis} \quad \kappa = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$$

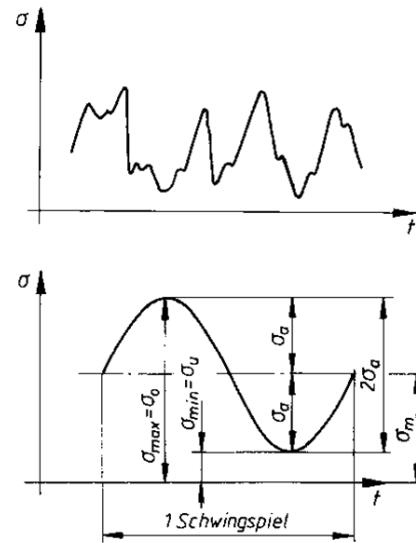


Bild 2-9 Reale und idealisierte Belastung

Zur Beschreibung einer dynamischen Belastung genügen zwei dieser Kenngrössen. Je nach Lage der Mittelspannung und der Grösse des Spannungsverhältnisses unterscheidet man verschiedene Bereiche und Sonderfälle.

Neben der statischen Last (Fall I) kommen im Maschinenbau die schwellende (Fall II) und die wechselnde Beanspruchung (Fall III) oft vor.

Beanspruchungsart				
statisch	dynamisch schwellant		dynamisch wechselnd	
Fall I	allgemein	Fall II	allgemein	Fall III
$\chi = 1$	$1 > \chi \geq 0$	$\chi = 0$	$0 > \chi \geq -1$	$\chi = -1$
Kenngrößen				
$\sigma_a = 0$ $\sigma_o = \sigma_u = \sigma_m$ $\sigma = \text{konst.}$	$\sigma_u > 0$ $\sigma_o = \sigma_u + 2\sigma_a$ $\sigma_m = \sigma_u + \sigma_a$	$\sigma_u = 0$ $\sigma_o = 2\sigma_a$ $\sigma_m = \sigma_o = \sigma_a/2$	$\sigma_m > 0$ $\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a$ $\sigma_u = \sigma_m - \sigma_a$	$\sigma_m = 0$ $ \sigma_o = \sigma_u = \sigma_a $ $\sigma_u = -\sigma_a$

Bild 2-10 Belastungsfälle

Das Werkstoffverhalten unter schwingender Beanspruchung wird u.a. durch die Wöhlerkurve charakterisiert. Sie gibt die Anzahl ertragbarer Lastspiele in Abhängigkeit der Spannung an. Auf der Ordinate ist die Oberspannung oder die Spannungsamplitude aufgetragen. Zur eindeutigen Beschreibung der dynamischen Last ist eine zweite Angabe, z.B. das Spannungsverhältnis κ nötig. In der logarithmischen Darstellung lassen sich die 3 Bereiche Bruchfestigkeit (statisch), Zeitfestigkeit und Dauerfestigkeit mit Geraden annähern. Bei genügend geringer Belastung tritt nach Erreichen der Grenzschwingspielzahl auch bei fortgesetzter Belastung kein Bruch mehr ein. Man liegt im Bereich der Dauerfestigkeit. Die Grenzschwingspielzahl liegt für Stähle bei 2 bis $5 \cdot 10^6$ Zyklen. Für höhere Lastspiele sinken zwar die ertragbaren Spannungen noch geringfügig ab, allerdings in einem für die meisten technischen Anwendungen nicht relevanten Umfang. Die im Maschinenbau gängigen Dauerfestigkeitswerte entsprechen 10^7 Lastwechseln bei einer statistischen Überlebenswahrscheinlichkeit von 97,5% [15].

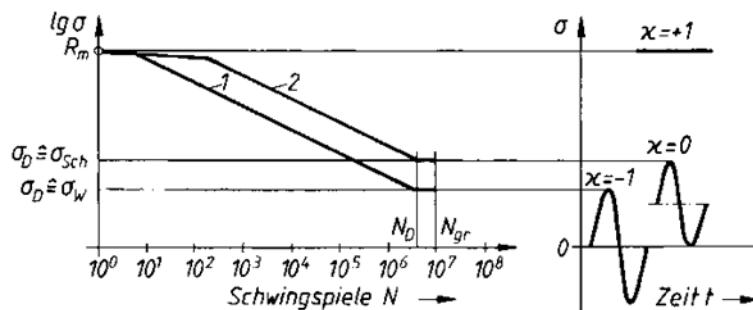


Bild 2-11 Wöhlerkurve

Für die meisten dynamisch belasteten Bauteile im Maschinenbau übersteigt die Lastspielzahl die Grenzschwingspielzahl, so dass – ohne Kenntnis der genauen Lastspielzahl – mit der Dauerfestigkeit gerechnet werden kann. Dauerfestigkeitsschaubilder stellen die Grenzwerte aus den Wöhlerkurven für verschiedene Mittelspannungen zusammen. Die im Maschinenbau übliche Darstellung ist das Smith-Diagramm. Dabei bedeuten:

σ_w = Wechselfestigkeit (Fall III)

σ_{sch} = Schwellfestigkeit (Fall II)

σ_d = Dauerfestigkeit (allgemein)

Wechsel- und Schwellfestigkeiten sind den Tabellen TB 1-1 [4] zu entnehmen.

Unter einer dynamischen Last versteht man auch eine schlagartige Belastung mit sehr hoher Belastungsgeschwindigkeit, z.B. eine Explosion oder ein Kerbschlagbiegeversuch. Für Belastungsgeschwindigkeiten $> 10 \text{ MPa/s}$ sind allenfalls erhöhte Zugfestigkeiten und Streckgrenzen bzw. reduzierte Bruchdehnungen anzusetzen.

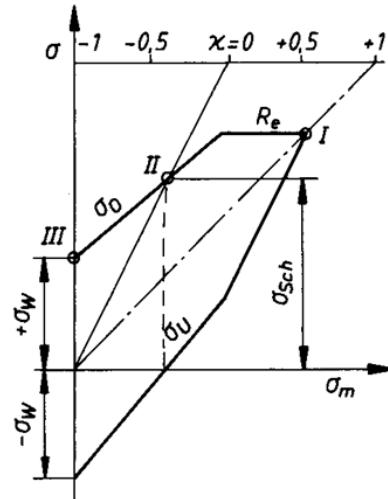


Bild 2-12 Smith-Diagramm

2.6 Die Kerbwirkung

Einen entscheidenden Einfluss auf das Festigkeitsverhalten von Bauteilen haben Querschnittsänderungen wie Übergänge, Einstiche, Bohrungen oder Nuten, welche man als konstruktive Kerben bezeichnet.

Die *Kerbform* ist in erster Linie massgebend für die Festigkeit eines Bauteils, wobei scharfe Kerben sich stärker auswirken als grosszügig ausgerundete Übergänge. Kerben reduzieren die Dauerfestigkeit eines Bauteils zum Teil erheblich. Die statische Festigkeit hingegen wird bei duktilen Werkstoffen kaum, bei sprödem Verhalten massiv beeinflusst.

Bei einem auf Zug belasteten glatten Stab herrscht eine gleichmässig über den Querschnitt verteilte Spannung, Bild 2-13 a). Im Bereich einer Kerbe hingegen verdichten sich die Kraftlinien, was in einer erhöhten Spannung resultiert. Die maximale Spannung tritt dabei im Kerbgrund auf Bild 2-13 b).

Die maximale Spannung wird mit Bezug auf die *Nennspannung* σ_n mit der *Formzahl* α_k erfasst:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (2-5)$$

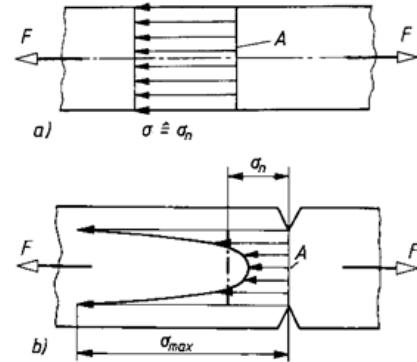


Bild 2-13 glatter und gekerbter Stab

Formzahlen für häufig vorkommende Kerben können den Diagrammen in [4] entnommen werden. Die Nennspannung ist die auf den Nennquerschnitt bezogene mittlere Spannung, in der Regel ist dies der kleinste Querschnitt in der Kerbe, vgl. Angaben im Formzahl-Diagramm. Die Formzahlen sind nicht nur von der Geometrie der Kerbe, sondern auch von der Beanspruchung abhängig. So sind die Formzahlen unter Zug, Biegung oder Torsion für ein identisches Bauteil unterschiedlich.

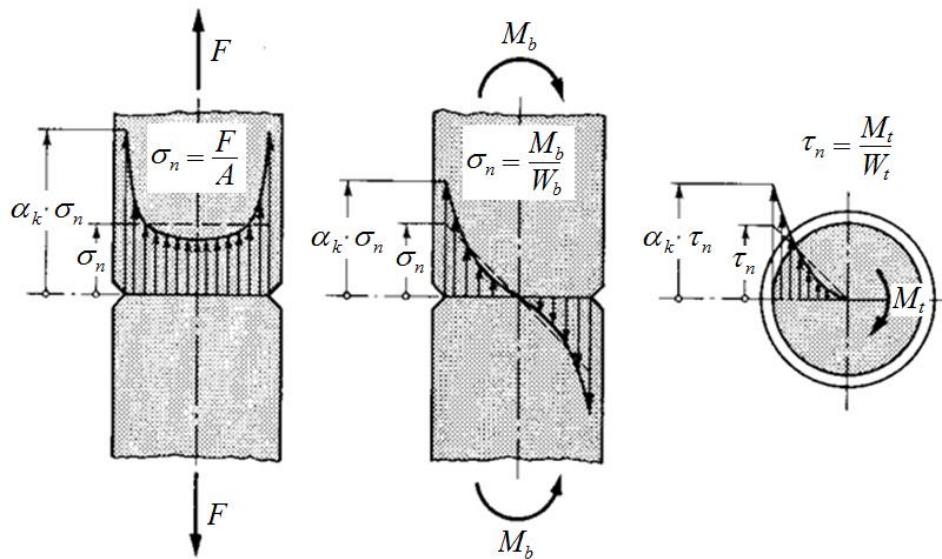


Bild 2-14 Formzahlen bei Zug, Biegung und Torsion

Die Formzahlen und die damit berechneten maximalen Spannungen gelten nur im elastischen Bereich. Kommt es nach Überschreiten der Streckgrenze im Kerbgrund zu Plastifizierungen, ist das duktile Verhalten des Werkstoffes von Bedeutung.

Welchen Einfluss eine Kerbwirkung auf das Festigkeitsverhalten des Bauteils hat, hängt also davon ab, ob sich der Werkstoff duktil oder spröde verhält.

Spröde Werkstoffe unter statischer Belastung

Spröde Werkstoffe verhalten sich – ganz oder nahezu – elastisch bis zum Bruch. Erreicht die maximale Spannung im Kerbgrund die Zugfestigkeit des Werkstoffs, tritt der Bruch ein. Um das Versagen zu verhindern, muss die maximale Spannung auf einen zulässigen Wert begrenzt werden.

$$\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n \leq \sigma_{zul} \quad (2-6) \quad \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_{B,min}} \quad S_{B,min} = \text{Mindestsicherheit gegen Bruch}$$

Eine konstruktive Kerbe wirkt sich beim *spröden* Werkstoff voll auf die Bauteilfestigkeit aus.

Duktile Werkstoffe unter statischer Belastung

Mit zunehmender Duktilität (Verformbarkeit) wird der Kerbeinfluss auf die statische Festigkeit geringer. Im Folgenden werden ein glatter und ein gekerbter Stab unter Zugbelastung miteinander verglichen. Dabei wird ein ideal-elastisch-plastisches Materialverhalten angenommen, d.h. ein Spannungs-Dehnungs-Verlauf mit einem linearen Anstieg bis zur Streckgrenze und einem horizontalen Verlauf im plastischen Bereich (ohne Verfestigung).

Bei einem glatten Stab sind die Spannungen im Querschnitt gleichmäßig verteilt, d.h. das Fliessen setzt hier im ganzen Querschnitt gleichzeitig ein (Linie OAB). Bei einem gekerbten Stab hingegen tritt ein lokales Fliessen im Kerbgrund früher ein, während sich der restliche Querschnitt noch im elastischen Bereich befindet (Punkt 1). Die Last kann weiter erhöht werden, da der grösste Teil des Querschnitts noch elastisch beansprucht ist, die Spannung im plastischen Bereich bleibt jedoch konstant (Punkt 2).

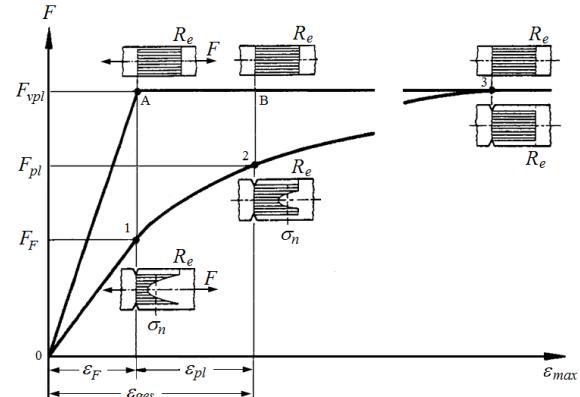


Bild 2-15 Zugversuch gekerbter Probestab

Wird die Last weiter gesteigert, so breiten sich die plastischen Zonen immer mehr aus, bis schliesslich der ganze Querschnitt erfasst ist (Punkt 3). In diesem vollplastischen Zustand ist die Spannung gleichmäßig verteilt und entspricht der Streckgrenze. Die Fliessbedingung ist:

$$\sigma_n \leq \sigma_{zul} \quad (2-7) \quad \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_{F,min}} \quad S_{F,min} = \text{Mindestsicherheit gegen Fliessen}$$

Kerben wirken sich also bei *duktilen* Materialen nicht auf die statische Bauteilfestigkeit aus. Versuche zeigen sogar eine Festigkeitssteigerung gegenüber glatten Stäben, welche allerdings zur Dimensionierung im Allgemeinen nicht ausgenutzt wird.

Für Werkstoffe mit nicht ausgeprägter Streckgrenze kann R_e durch $R_{p0,2}$ ersetzt werden.

Grundsätzlich muss auch für duktile Werkstoffe gegen Bruch ausgelegt werden, es ist also der kleinere Wert für die zulässige Spannung einzusetzen.

$$\sigma_{zul} = \text{MIN} \left(\frac{R_e}{S_{F,min}}; \frac{R_m}{S_{B,min}} \right)$$

Eine exakte Abgrenzung zwischen sprödem und duktilem Verhalten existiert zwar nicht, als einfaches Mass für die Duktilität kann jedoch die Bruchdehnung A herangezogen werden. Nach [4] sind Gusseisen mit $A < 8\%$ als spröde zu bezeichnen.

Kerbwirkung unter dynamischer Belastung

Unter schwingender Belastung verhalten sich *spröde* und *duktile* Werkstoffe nahezu elastisch bis zum Bruch, d.h. sie versagen beide praktisch ohne plastische Verformung. Die Vorstellung, der Bruch müsste dann auftreten, wenn in der Kerbe die maximale Spannung die Dauerfestigkeit des Werkstoffes erreicht hat, stimmt so nicht. Versuche zeigen, dass gekerbte Bauteile eine höhere Schwingbelastung ertragen, als nach der *Formzahl* α_k zu erwarten wäre. Es wird deshalb bei dynamischer Belastung die *Kerbwirkungszahl* β_k der Berechnung zu Grunde gelegt. Sie gibt das Verhältnis der Wechselfestigkeit des glatten Probestabes zur Wechselfestigkeit des gekerbten Probestabes an.

$$\beta_k = \frac{\sigma_w}{\sigma_{wk}}$$

σ_w Wechselfestigkeit glatter Probestab

σ_{wk} Wechselfestigkeit gekerbter Probestab

Die Kerbwirkungszahl wird grundsätzlich durch Dauerschwingversuche bestimmt. Es gibt allerdings verschiedene Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von β_k , siehe Kapitel 10.

Die theoretischen Grenzen der Kerbwirkungszahl ergeben sich aus der Bedingung

$$1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$$

Zum Unterschied Formzahl – Kerbwirkungszahl

Mit der Formzahl lässt sich die Spannungserhöhung infolge Kerbe berechnen. Sie ist nur von der Geometrie, d.h. der Form der Kerbe abhängig und gilt nur im elastischen Bereich. Die Kerbwirkungszahl gibt die Wirkung der Kerbe auf die Dauerfestigkeit an.

Beispiel

Ein gekerbter Flachstahl aus Vergütungsstahl C50E wird wechselnd mit $F = \pm 10$ kN und einmal statisch mit $F = 50$ kN auf Zug belastet. Die Zugfestigkeit und die Wechselfestigkeit dieses Werkstoffes betragen nach TB 1-1 [4] $R_m = 750$ MPa und $\sigma_{zdW} = 300$ MPa. Die Formzahl der Kerbe beträgt $\alpha_k = 3,0$ (TB 3-6 [4]).

Die maximale Spannung in der Kerbe bei $F = 10$ kN ist:

$$\sigma_{max} = \sigma_n \cdot \alpha_k = 100 \cdot 3 = 300 \text{ MPa}$$

Diese Spannung allein ist aber für die Festigkeit nicht relevant, wie folgende Überlegung zeigt:

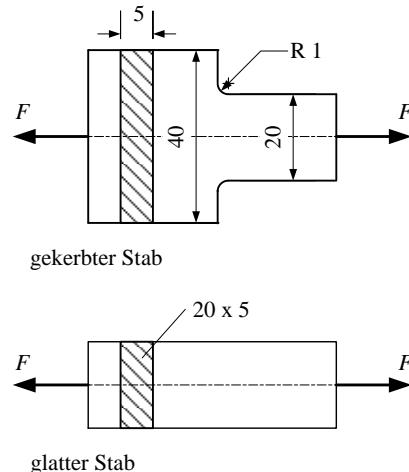
Ein glatter Stab mit $F = \pm 30$ kN hat eine vorhandene Spannung von 300 MPa, also gleich viel wie die Wechselfestigkeit, d.h. er versagt nach 10^7 Zyklen.

Die – effektiv vorhandene – maximale Spannung in der Kerbe von 300 MPa führt jedoch nicht zu einem Dauerbruch. Vielmehr erreicht der gekerbte Stab im Dauerversuch unter einer wechselnden Last von $\pm 11,5$ kN ebenfalls 10^7 Zyklen, d.h. er ist dauerfest mit einer auf den Nennquerschnitt von 100 mm^2 bezogenen Nennspannung von 115 MPa. Somit lässt sich die Kerbwirkungszahl als das Verhältnis der Wechselfestigkeit des glatten zur Wechselfestigkeit des gekerbten Stabes berechnen:

$$\beta_k = \frac{\sigma_w}{\sigma_{wk}} = \frac{300}{115} = 2,6$$

Aus der – messbaren – maximalen Spannung in der Kerbe von 300 MPa kann also nicht direkt auf die Festigkeit des Bauteils geschlossen werden. Wir werden später im Kapitel 10.2 zeigen, dass die Kerbwirkungszahl β_k näherungsweise aus der Formzahl α_k berechnet werden kann.

Ist der Stab nur statisch belastet, so wirkt sich die Kerbe gar nicht auf die Festigkeit des Bauteils aus. Der Stahl ist duktil und die theoretische maximale Spannung von $\sigma_{max} = \sigma_n \cdot \alpha_k = 1500$ MPa wird infolge lokaler Plastifizierung gar nie erreicht. Der Stab kann die statische Last von 50 kN ertragen.



2.7 Der überschlägige Spannungsnachweis

Während der Entwurfsphase einer Konstruktion ist vielfach eine überschlägige Bestimmung von Querschnitten erforderlich. Dies geschieht durch einen einfachen Vergleich der vorhandenen Spannung σ_{vorh} mit einer zulässigen Spannung σ_{zul} .

$$\sigma_{vorh} \leq \sigma_{zul} \quad \text{mit} \quad \sigma_{zul} = \frac{\text{Werkstoffgrenzwert}}{\text{Mindestsicherheit}}$$

Bei *statischer* Belastung ist für die *vorhandene Spannung* die in Kapitel 2.6 dargelegte Unterscheidung zwischen *spröden* und *duktilen* Werkstoffen zu befolgen. Demnach ist eine durch Kerben bedingte Spannungserhöhung nur bei *sprödem* Werkstoff zu berücksichtigen. *Zulässige Spannungen* sind entweder den einschlägigen Normen zu entnehmen, z.B. der DIN 15018 [10] und DIN 18800 [11] oder sie ergeben sich aus den *Werkstoffgrenzwerten* R_e , $R_{p0,2}$ und R_m und den *Mindestsicherheiten*, siehe TB 1-1 und TB 3-14 [4].

Bei *dynamischer* Belastung ist für die *vorhandene Spannung* grundsätzlich die Nennspannung einzusetzen, da die Kerbwirkung mit der *Kerbwirkungszahl* β_k berücksichtigt wird. Beispiele für *zulässige Spannungen* geschweißter Bauteile finden sich in TB 6-13 [4]. Dies sind Erfahrungswerte und beinhalten bereits eine Mindestsicherheit. Im Maschinenbau werden die *Werkstoffgrenzwerte* σ_W , σ_{Sch} oder σ_D oft pauschal um eine *Mindestsicherheit* von 3...4 abgemindert [4]. Diese Mindestsicherheit – auch Sicherheitsfaktor genannt – beinhaltet dabei alle in der Entwurfsphase nicht bekannten Einflüsse. Eine Berechnung über die *Kerbwirkungszahl* β_k in der Entwurfsphase ist zwar möglich aber eher nicht üblich.

Vor allem für den Festigkeitsnachweis (Kapitel 10) wird der Spannungsnachweis zunehmend durch den Sicherheitsnachweis ersetzt. Dabei wird die effektiv vorhandene *Sicherheit* als Verhältnis von *Bauteilfestigkeit* zur *Bauteilbeanspruchung* berechnet. Sie muss grösser als die *Mindestsicherheit* sein und stellt die Reserve des Bauteils gegenüber der max. Belastung dar.

$$\text{Sicherheit} = \frac{\text{Bauteilfestigkeit}}{\text{Bauteilbeanspruchung}} \geq \text{Mindestsicherheit}$$

Die Bauteilbeanspruchung entspricht dabei der vorhandenen Spannung, die Bauteilfestigkeit ist eine unter Berücksichtigung aller Einflussfaktoren berechnete „zulässige Spannung“.

2.8 Die Beanspruchungen und Schnittgrößen

Wir beschränken uns hier auf die Berechnung stabförmiger Bauteile wie Wellen, Bolzen oder Pleuel. Ein solches stabförmiges Bauteil kann grundsätzlich auf vier verschiedene Arten beansprucht werden. Es sind dies Zug (bzw. Druck), Abscheren, Biegung und Torsion. Die Beanspruchung auf Druck erfordert bei schlanken Stäben eine gesonderte Betrachtung, da diese Stäbe ausknicken können. Für Platten und Schalen findet man analytische Lösungen in der Literatur, z.B. [5]. Für dreidimensionale Bauteile, die sich nicht als Stab idealisieren lassen, helfen nur numerische oder experimentelle Verfahren weiter.

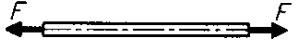
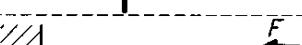
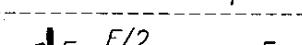
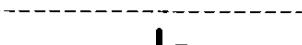
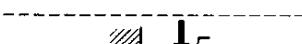
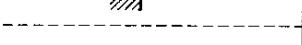
Problemskizze	Beanspruchungsart	Beispiel
	Zug	Fachwerkstab, Seil
	Druck	Stempel, gedrungene Säule
	Knickung	Fachwerkstab, schlanke Säule
	Torsion	Lenksäule, Drehstabfeder
	reine Biegung	Balken, belastet mit einem Einzelmoment bzw. Kräftepaar
	Abscheren	Schneiden, Beanspruchung von Niet und Bolzen
	Querkraftbiegung (Biegung + Schub)	Radachse, Deckenträger, Druckwalze
	Schub (näherungsweise)	Tragpratze
	Beispiel für kombinierte Beanspr. (Knickung, Torsion, Biegung, Schub)	Getriebewelle (Querkraftbiegung + Torsion) exzentrisch gedrückte Säule (Druck bzw. Knickung + Biegung)

Bild 2-16 Beanspruchungen

In realen Bauteilen sind oft Kombinationen der vier Beanspruchungsarten vorhanden, man spricht dann von zusammengesetzter Beanspruchung, siehe Kapitel 9.

Die Spannungen in einem Querschnitt eines Bauteils sind im Allgemeinen nicht konstant. Ein Spezialfall ist das Beispiel eines auf Zug beanspruchten glatten Stabes, bei dem die Spannung im Querschnitt konstant ist, siehe Kapitel 2.3. Beim Beispiel eines auf Scherung beanspruchten Bauteiles (Niet) ist die Schubspannung nicht konstant, siehe Kapitel 5.1.

Die Beanspruchungsart in einem Querschnitt wird durch die *Schnittgrößen* bestimmt. Schnittgrößen sind *inneren Kräfte und Momente*, welche mit den Methoden der Statik berechnet werden, siehe auch Band Statik, Kapitel 6.

Zur Bestimmung dieser Schnittgrößen ist es notwendig, das Bauteil an der interessierenden Stelle (in Gedanken) aufzuschneiden.

In der ebenen Statik werden folgende drei Schnittgrößen eingeführt:

- Normalkraft N
- Querkraft Q
- Biegemoment M_b

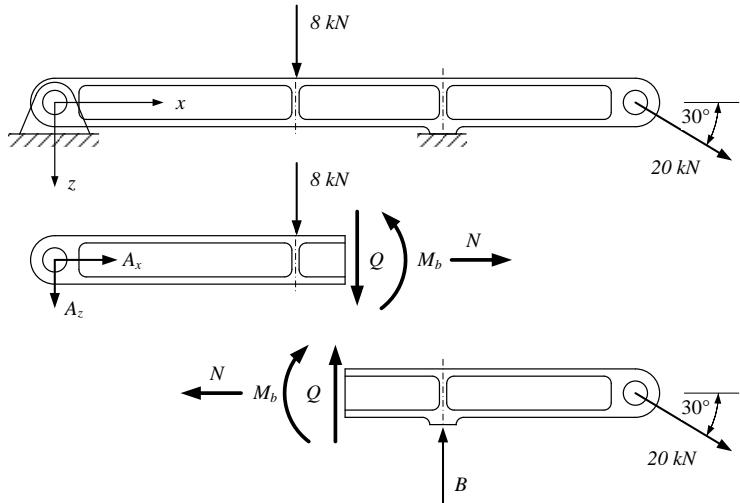


Bild 2-17 Schnittgrößen am Träger in der Ebene

Für 3-dimensional belastete Bauteile ergeben sich insgesamt 6 Schnittgrößen, nämlich zusätzlich eine Querkraft in y -Richtung, ein Biegemoment in z -Richtung und das Torsionsmoment (x -Richtung). Daraus ergeben sich die 4 Beanspruchungen.

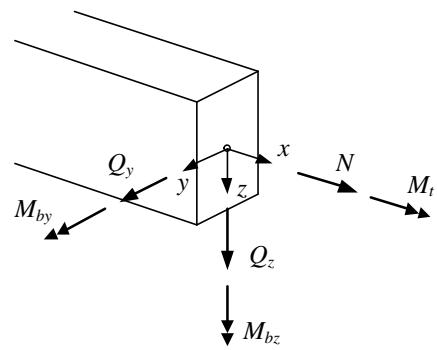


Bild 2-18 Schnittgrößen im Raum

6 Schnittgrößen

<i>Normalkraft N</i>	→ Zug / Druck
<i>Querkraft Q_z</i>	→ Scherung, Schub
<i>Querkraft Q_y</i>	→ Scherung, Schub
<i>Biegemoment M_{by}</i>	→ Biegung
<i>Biegemoment M_{bz}</i>	→ Biegung
<i>Torsionsmoment M_t</i>	→ Torsion

3 Zug und Druck

Bei Zug- und Druckstäben, die statisch bestimmt gelagert sind, kann die *Schnittgrösse* im betrachteten Querschnitt mit den Gleichgewichtsbedingungen aus der Statik bestimmt werden. Für einen Einzelstab heisst das:

$$\sum F = N - F = 0$$

In einem Querschnitt, der nicht im Bereich einer Kerbe liegt, können die *Normalspannungen* als gleichmässig über den Querschnitt A angenommen werden.

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3-1)$$

Bei bekannter Stabkraft N und zulässiger Spannung kann der erforderliche Querschnitt berechnet werden.

$$A_{erf} \geq \frac{N}{\sigma_{zul}} \quad (3-2)$$

Im linearelastischen Bereich ist der Zusammenhang zwischen Kraft und Verlängerung linear.

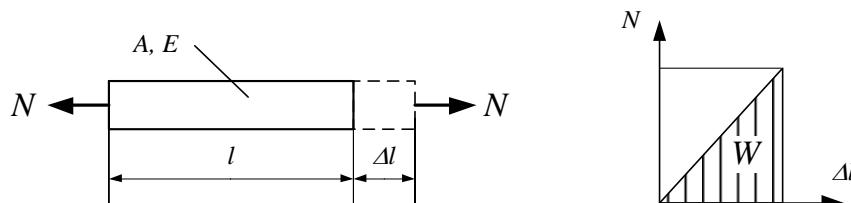


Bild 3-2 Formänderung bei Zug

Ein auf Zug belasteter Einzelstab erfährt gem. dem HOOKEschen Gesetz eine Verlängerung

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (3-3)$$

Die äussere Arbeit, die dabei verrichtet wird entspricht der Fläche unter der Kraft-Weg-Kurve

$$W = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Delta l$$

Diese äussere Arbeit ist nach der Belastung in elastischer Energie gespeichert – analog der Federenergie – und kann aus obigen zwei Beziehungen berechnet werden:

$$W = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad (3-4)$$

Für zusammengesetzte Stäbe oder Stäbe mit unterschiedlichen Querschnitten ist die Formänderungsarbeit als Summe der Energien pro Abschnitt zu rechnen. *Normalkraft*, *Querschnitt*, *E-Modul* und *Länge* können in jedem Abschnitt andere Werte annehmen.

Grundsätzlich gelten die Beziehungen für Zug- und Druckstäbe. Für auf Druck beanspruchte Träger ist aber ausserdem ein Stabilitätsnachweis zu erbringen, da bei langen, schlanken Stäben ein seitliches Ausknicken möglich ist, siehe Kapitel 7.

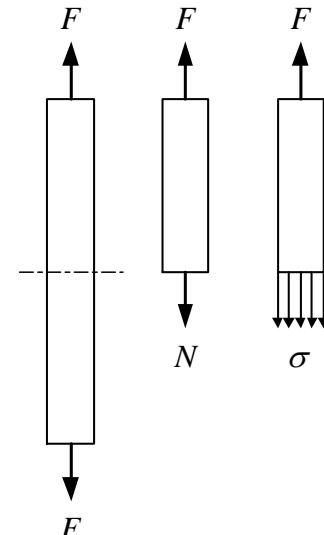


Bild 3-1 Schnitt Zugstab

3.1 Statisch bestimmte Stabsysteme

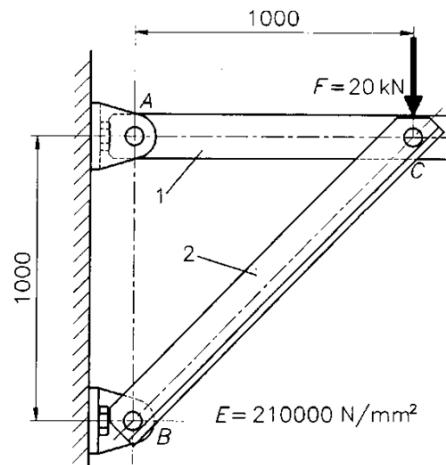
Ist ein aus mehreren Stäben zusammengesetztes Tragwerk statisch bestimmt, so lassen sich die Stabkräfte mit den Gleichgewichtsbedingungen aus der Statik und damit die Spannungen in den Querschnitten bestimmen. Die Gesamtverschiebungen des Tragwerkes ergeben sich durch Überlagerung der Längenänderungen der Einzelstäbe.

Beispiel

Für das Stahlgerüst sind die Spannungen in den Stäben und die vertikale und horizontale Verschiebung des Lastangriffspunktes C zu bestimmen.

Stab 1: Flachstab EN 10058 - 40x6

Stab 2: 2 x Winkel EN 10056 - 40x4



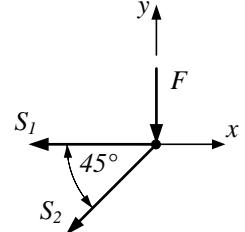
Gleichgewicht am Knoten C

$$\sum F_x = -S_1 - S_2 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = -F - S_2 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

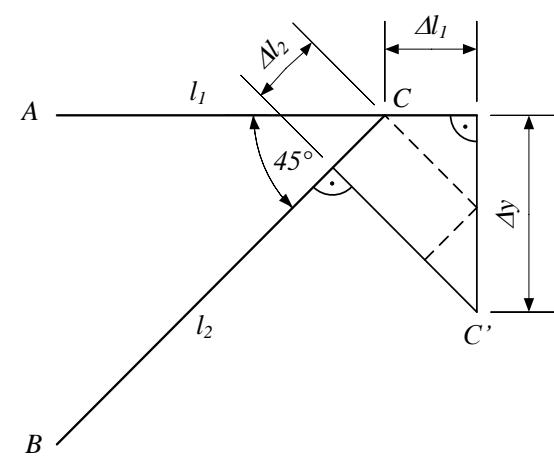
$$\Rightarrow S_2 = -28'284 \text{ N (Druck)}$$

$$\Rightarrow S_1 = +20'000 \text{ N (Zug)}$$



$$\sigma_1 = \frac{20'000}{240} = 83,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{-28'284}{2 \cdot 308} = -45,9 \text{ N/mm}^2$$



Längenänderung der beiden Stäbe

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{20'000 \cdot 1000}{210'000 \cdot 240} = 0,3968 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{-28'284 \cdot 1414}{210'000 \cdot 2 \cdot 308} = -0,3092 \text{ mm}$$

Der verlängerte Stab 1 und der verkürzte Stab 2 treffen sich im Punkt C', im Schnittpunkt der Kreise um A mit Radius $l_1 + \Delta l_1$ und um B mit Radius $l_2 - |\Delta l_2|$. Bezogen auf die Stablängen sind die Deformationen sehr gering, deshalb können die Kreisbögen durch ihre Tangenten ersetzt werden. Aus der Skizze der Deformationen ergeben sich die globalen Verschiebungen des Punktes C in den Punkt C'.

$$\Delta x = \Delta l_1 = 0,3968 \text{ mm} (\rightarrow)$$

$$\Delta y = \Delta l_1 + \frac{|\Delta l_2|}{\sin 45^\circ} = 0,3968 + 0,4373 = 0,834 \text{ mm} (\downarrow)$$

Die zur Verschiebung des Punktes C aufgewendete äußere Arbeit ist gleich der inneren Arbeit in Form von elastischer Energie. Damit kann die vertikale Verschiebung alternativ berechnet werden:

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta y = \frac{S_1^2 \cdot l_1}{2 \cdot E \cdot A_1} + \frac{S_2^2 \cdot l_2}{2 \cdot E \cdot A_2} \Rightarrow \Delta y = 0,834 \text{ mm}$$

Mit dieser Methode kann nur die Verschiebung in Richtung der angreifenden Kraft bestimmt werden, die andere Richtung – hier die horizontale – muss mit Hilfe der geometrischen Zusammenhänge ermittelt werden.

3.2 Statisch unbestimmte Stabsysteme

Lassen sich die Stabkräfte in einem Stabsystem nicht mit den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen, so handelt es sich um ein statisch unbestimmtes Stabwerk. Das Thema „statische Bestimmtheit“ wird im Band Statik, Kapitel 5.5 genauer betrachtet. Für ein solches System sind zusätzliche Bedingungen über die elastische Verformung notwendig, um die in den Stäben wirkenden Kräfte zu berechnen.

Beispiel

Ein aus zwei Rundstäben ($\phi 20 \text{ mm}$) aus Stahl zusammengesetzter Stab ist beidseitig gelenkig gelagert und gem. Skizze mit der Kraft $P = 30 \text{ kN}$ belastet.

Zu bestimmen sind die Spannungen in den beiden Teilen und die Verschiebung des Lastangriffspunktes.

Die Last P teilt sich nicht zu gleichen Teilen in die beiden Stäbe 1 und 2 auf, sondern je nach Steifigkeit, d.h. Länge, Querschnitt und E-Moduli der Einzelstäbe. Die entsprechende Bedingung liefern die Verlängerung bzw. Verkürzung der Stäbe.

Einen Überblick über die Kraftverhältnisse gibt die folgende Darstellung der freigemachten Teile:



Bild 3-4 Freigemachte Einzelteile

Die Summe der Stabkräfte entspricht der Last P . Dies wird mit dem Gleichgewicht formuliert.

Die Verkürzung des Stabes 1 ist betragsmäßig gleich der Verlängerung des Stabes 2.

Da beide Querschnitte und E-Moduli gleich sind, ergeben sich die Normalkräfte in den Stäben als Funktion der Stablängen. Obwohl beide Resultate positiv sind, handelt es sich beim Stab 1 um eine Druckkraft. Diese Information ist durch die Richtung der Normalkraft N_1 in der Skizze vorweggenommen worden. Entsprechend sind die Vorzeichen der Spannungen zu berücksichtigen.

Die Verschiebung des Lastangriffspunktes kann entweder mit der Verlängerung des Stabes 2 oder der Verkürzung des Stabes 1 berechnet werden.

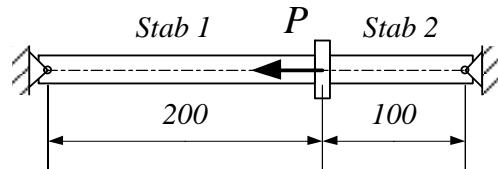


Bild 3-3 Statisch unbestimmtes Stabproblem

$$\sum F_x = N_1 + N_2 - P = 0$$

$$|\Delta l_1| = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A} = |\Delta l_2|$$

$$N_1 = P \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} = 30 \cdot \frac{100}{300} = 10 \text{ kN}$$

$$N_2 = P \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} = 30 \cdot \frac{200}{300} = 20 \text{ kN}$$

$$\sigma_1 = -\frac{N_1}{A} = -\frac{10'000}{314,16} = \underline{\underline{-31,8 \text{ N/mm}^2 (\text{Druck})}}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{20'000}{314,16} = \underline{\underline{+63,7 \text{ N/mm}^2 (\text{Zug})}}$$

$$\Delta x = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A} = \frac{20'000 \cdot 100}{210'000 \cdot 314,16} = \underline{\underline{0,030 \text{ mm} (\leftarrow)}}$$

3.3 Flächenpressung

Werden zwei Bauteile gegeneinander gedrückt, resultiert an der Berührungsfläche infolge der Normalkraft eine Druckspannung, *Flächenpressung* genannt. Berührungsflächen können eben oder gekrümmmt sein. Die wirkliche Druckverteilung kann sehr kompliziert sein, in der Regel genügt es aber, mit dem *Mittelwert der Flächenpressung* p_m zu rechnen.

$$p_m = \frac{F}{A} \quad (3-5)$$

Die zulässigen Werte sind ebenfalls Mittelwerte, die an Bauteilen mit ähnlichen Berührungsflächen ermittelt werden. Dies rechtfertigt diese einfache Betrachtungsweise.

Auch bei gekrümmten Flächen in Gleitlagern oder Bolzen ist die Flächenpressung nicht gleichmäßig verteilt. Die Verteilung ist insbesondere vom Lagerspiel und der Elastizität der Bauteile abhängig und kann rechnerisch nur näherungsweise ermittelt werden. Deshalb rechnet man mit der Projektion der Halbzylinderfläche eine *mittlere Pressung*, welche bei querbelasteten Passschrauben-, Bolzen- oder Nietverbindungen auch *Lochleibung* σ_l genannt wird. Zulässige Werte z.B. in DIN 15018 [10].

$$p_m = \sigma_l = \frac{F}{d \cdot l} \quad (3-6)$$

Zwei gegeneinander gepresste Körper wie Zylinder oder Kugel berühren sich nur linien- oder punktförmig. Auf Grund der Werkstoffelastizität platten sie sich unter Last ab, wobei eine gemeinsame Berührungsfläche resultiert. Die Pressung ist in der Flächenmitte am grössten, weil dort die grösste Verformung auftritt.

Die grösste Pressung kann nach einer von Hertz entwickelten Theorie errechnet werden und wird *Hertzische Pressung* genannt. Die Ergebnisse dieser umfangreichen theoretischen Untersuchungen sind die Hertzischen Gleichungen, von denen hier nur zwei wiedergegeben sind. Sie gelten für $v = 0.3$ (Stahl) und gleichen E-Moduli der beiden Körper.

$$p_H = 0,591 \cdot \sqrt{\frac{F \cdot E}{b \cdot d_1}} \cdot \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right) \quad \text{Zylinder / Zylinder}$$

$$p_H = 0,616 \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot E^2}{d_1^2}} \cdot \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)^2 \quad \text{Kugel / Kugel}$$

Zulässige Werte nach [4] Kapitel 14 (Wälzlagern).

Diese Gleichungen kommen beispielsweise bei der Berechnung von Wälzlagern oder Verzahnungen zur Anwendung. Für gekrümmte gegen ebene Flächen geht $d_2 \rightarrow \infty$, d.h. das Verhältnis (d_1 / d_2) ist 0, bei einer Hohlkrümmung ist der Durchmesser d_2 negativ einzusetzen. Genauere Informationen zur Berührung zweier Körper findet man z.B. im Roark's [5].

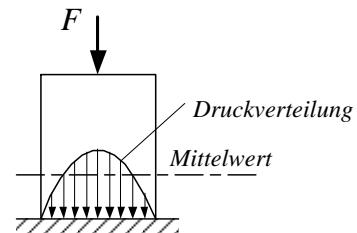


Bild 3-5 Flächenpressung

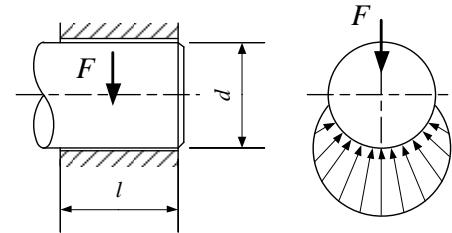


Bild 3-6 Lochleibung

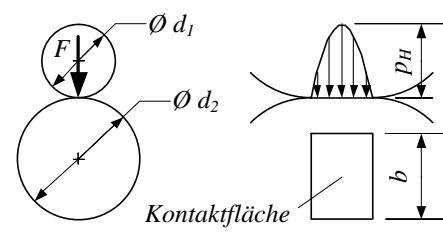


Bild 3-7 Zylinder gegen Zylinder

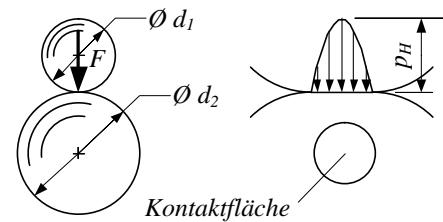


Bild 3-8 Kugel gegen Kugel

4 Biegung

Stabförmige Bauteile, die mit Kräften oder Momenten quer zur Trägerachse belastet werden, sind auf Biegung beansprucht. Die Schnittgrößen im Querschnitt sind das *Biegemoment* und die *Querkraft*, deren Berechnung im Band Statik, Kapitel 6 beschrieben ist.

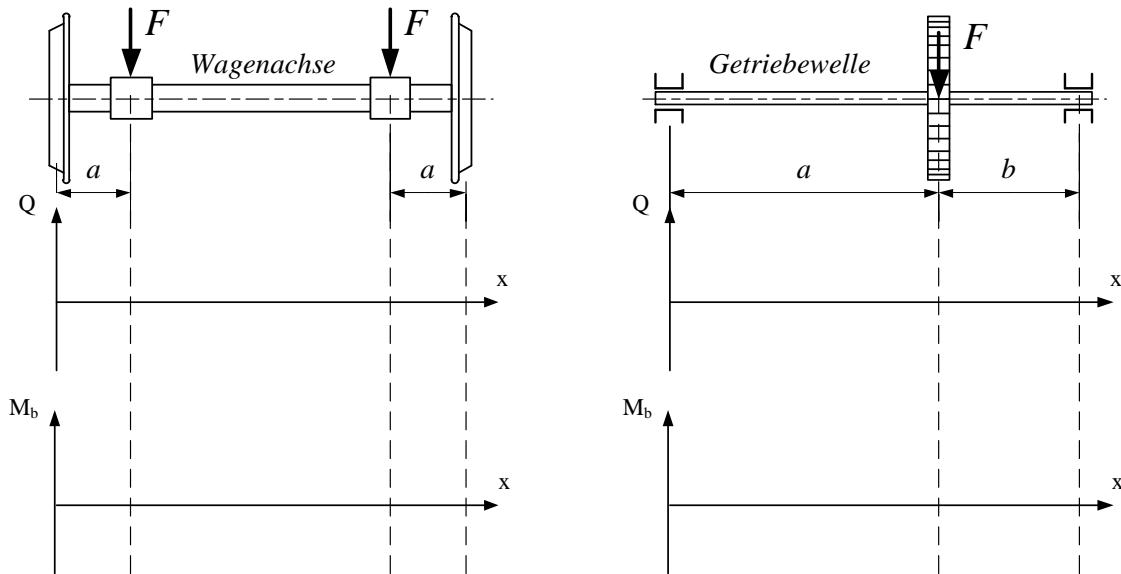


Bild 4-1 Auf Biegung beanspruchte Bauteile

Das Beispiel der Wagenachse zeigt, dass im Bereich zwischen Rad und Lager die beiden Schnittgrößen Biegemoment und Querkraft vorkommen, während zwischen den Lagern nur das Biegemoment vorhanden ist. Im ersten Fall spricht man von *Querkraftbiegung* im letzteren von *reiner Biegung*. Praktisch kommt reine Biegung selten vor, Bauteile sind meistens sowohl auf Biegung als auch auf Querkraft beansprucht, wie beispielweise eine Getriebewelle. Ist die Länge des Trägers wesentlich grösser als die Höhe, so dominiert die Wirkung der Biegung bei weitem und die Wirkung der Querkraft kann vernachlässigt werden. Im Kapitel Biegung wird nur die Wirkung des Biegemomentes betrachtet. Im Gegensatz dazu steht z.B. ein Niet, dessen Durchmesser von der gleichen Größenordnung ist wie seine Länge. In solchen Bauteilen überwiegt die Abscherwirkung der Querkraft und die Biegung kann vernachlässigt werden, siehe Kapitel 5.1.

Die Spannungen eines auf Biegung beanspruchten Trägers werden zunächst für einen Träger bestimmt, dessen Querschnitt *symmetrisch* bezüglich der Belastungsebene ist. In diesem Fall spricht man von *gerader Biegung* und der Zusammenhang zwischen Spannung und Biegemoment wird als *Grundgleichung der Biegung* bezeichnet. Im Gegensatz dazu spricht man von *schiefer Biegung*, wenn diese Symmetrie nicht erfüllt ist.

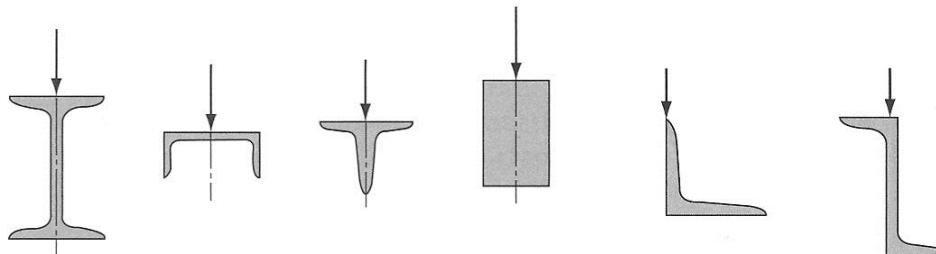


Bild 4-2 Gerade Biegung

Bild 4-3 Schiefe Biegung

4.1 Die Grundgleichung der Biegung

Bei einem an den beiden Enden mit einem Moment belasteten Balken werden die Schichten im oberen Bereich gestaucht und im unteren Bereich gedehnt. Typisch für diese Deformation ist, dass eine zur Trägerachse senkrechte Fläche im verformten Zustand eben bleibt und ebenfalls senkrecht zur verformten Trägerachse liegt. Diese Erkenntnisse gehen auf Jakob Bernoulli (1655 – 1750) zurück und werden deshalb BERNOULLI Hypothese genannt.

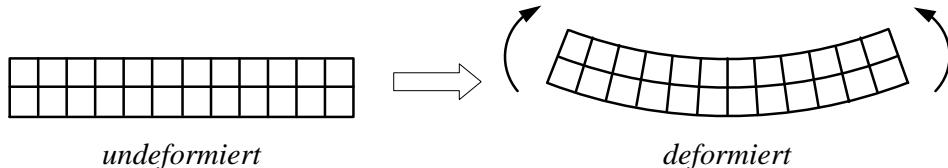


Bild 4-4 Biegedeformation

Es existiert im Balken eine Schicht, die keine Längenänderung erfährt. Sie wird *neutrale Faser* genannt und befindet sich im Flächenmittelpunkt S des Querschnitts. Ist das Biegemoment über die Länge des Balkens konstant, so verbiegt sich die neutrale Faser in Form eines Kreisbogens mit dem Krümmungsradius ρ .

Zur Berechnung der Biegespannung muss zunächst die oben beschriebene Deformation erfasst werden. Dazu wird nebenstehendes Koordinatensystem in den Flächenmittelpunkt des Querschnitts gelegt, wobei die z -Achse Symmetrieachse ist. Äussere Kräfte wirken in der x - z -Ebene, d.h. das Biegemoment liegt in der y -Achse.

Ein Teilstück des Balkens hat unbelastet die Länge dx . Eine Schicht in der Distanz z von der Neutralachse erfährt unter Biegung eine Verlängerung du .

Es gilt der geometrische Zusammenhang:

$$\frac{dx + du}{dx} = \frac{\rho + z}{\rho} \rightarrow \frac{du}{dx} = \varepsilon = \frac{z}{\rho}$$

Somit nimmt die Dehnung mit dem Abstand z linear zu. Aufgrund des Hookeschen Gesetzes gilt dies auch für die Spannung.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot z$$

Ein Biegemoment verursacht also im Querschnitt *Normalspannungen* σ , die von der neutralen Faser aus linear anwachsen. Im Bereich $z > 0$ sind es Zugspannungen und im Bereich $z < 0$ Druckspannungen.

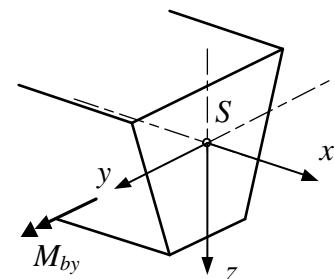


Bild 4-5 Koordinatensystem

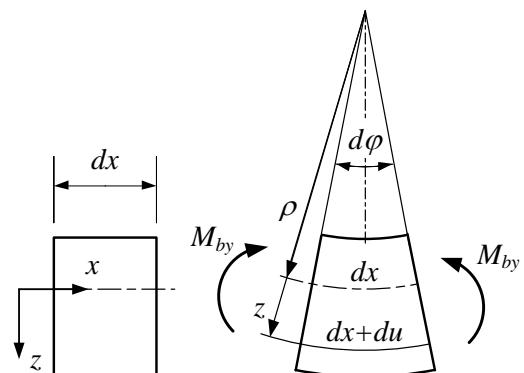


Bild 4-6 Balkenverformung bei Biegung

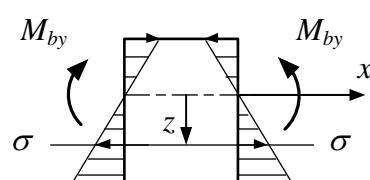


Bild 4-7 Biegespannungsverteilung

Den Zusammenhang zwischen Biegemoment und Spannung erhält man über ein Gleichgewicht zwischen Schnittgrößen und der resultierenden Wirkung der Normalspannungen an der gesamten Querschnittsfläche. Bei reiner Biegung wirkt als Schnittgröße nur ein Biegemoment, d.h. die Normalkraft muss gleich null sein.

$$\sum F_x = \int dF = \int \sigma \cdot dA = \int \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int z \cdot dA = 0$$

Das Integral in obiger Gleichung ist das *statische Moment*. Es dient zur Berechnung des Flächenmittelpunktes, siehe Band Statik, Kapitel 3.2.3. Zur Erfüllung des Gleichgewichtes muss es gleich Null sein, was nur bezüglich der Schwerachse der Querschnittsfläche zutrifft. Damit ergibt sich, dass die Trägerachse x und damit die neutrale Faser durch den *Flächenmittelpunkt S* verläuft. Das Biegemoment als Schnittgröße muss die gleiche Wirkung haben wie die aus den Biegespannungen σ resultierenden inneren Kräfte.

$$M_{by} = \int z \cdot dF = \int z \cdot \sigma \cdot dA = \int z \cdot \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int z^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_y$$

Das Integral ist das *axiale Flächenmoment 2. Ordnung* der Querschnittsfläche und ist ein Mass für die Verteilung der Fläche bezüglich der Koordinatenachsen.

$$I_y = \int z^2 \cdot dA$$

Zusammen mit der bereits gefundenen linearen Spannungsverteilung $\sigma = E / \rho \cdot z$ ergibt sich nun die Grundgleichung der Biegung

$$\boxed{\sigma = \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z} \quad (4-1)$$

Die betragsmässig grösste Spannung tritt beim grössten Randabstand z_{max} von der neutralen Faser auf. Mit der Definition des *Widerstandsmoments* W_y ergibt sich die maximale Spannung

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{|M_{by}|}{W_y}} \quad (4-2) \quad W_y = \frac{I_y}{|z_{max}|}$$

Die Information über das Vorzeichen der Spannung geht dabei verloren. Mit Hilfe von analogen Überlegungen für Biegemomente in z-Richtung M_{bz} ergeben sich für gerade Biegung die folgenden Beziehungen

$$\boxed{\sigma = -\frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y} \quad (4-3) \quad I_z = \int y^2 \cdot dA$$

Das „Minus“ stellt die korrekte Bestimmung des Vorzeichens der Spannung sicher. Für die maximale Spannung geht die Vorzeicheninformation verloren.

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{|M_{bz}|}{W_z}} \quad (4-4) \quad W_z = \frac{I_z}{|y_{max}|}$$

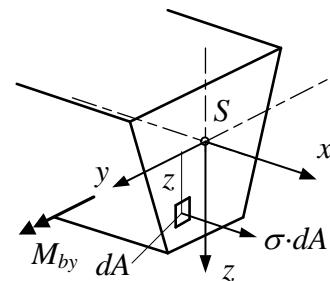


Bild 4-8 Symmetrische Belastung

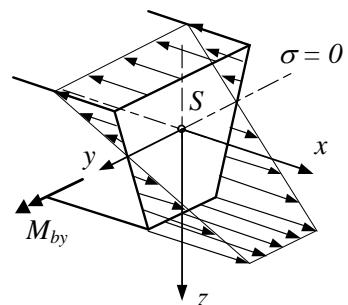


Bild 4-9 Biegespannung bei M_{by}

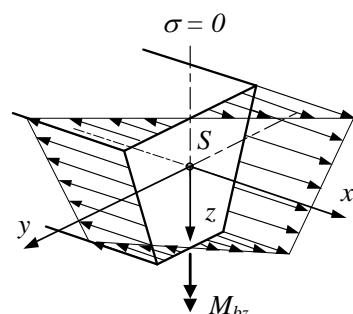


Bild 4-10 Biegespannung bei M_{bz}

Die Grundgleichung der Biegung setzt die Gültigkeit der Hypothese von Bernoulli voraus. Diese ist nur gegeben, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

Die Trägerachse ist gerade oder nur wenig gekrümmmt. In einem stark gekrümmten Träger ist die Spannungsverteilung nicht mehr linear. Außerdem verschiebt sich die neutrale Faser infolge der Krümmung gegen das Krümmungszentrum und es kommt zu einer Spannungskonzentration wie in der Nähe einer Kerbe. Diese Spannungsverteilung lässt sich mit der *Biegetheorie des gekrümmten Trägers* berechnen, siehe z.B. Roark's [5].

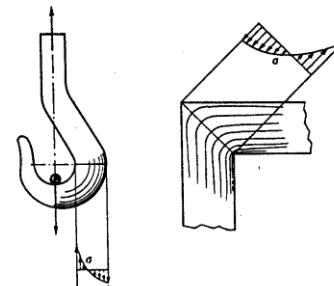


Bild 4-11 Stark gekrümmte Träger

Die berechnete Spannung liegt nicht im Bereich von Querschnittssprüngen oder Kerben. Die Spannungskonzentration infolge der Kerben kann rechnerisch mit der Formzahl α_k berücksichtigt werden, wobei dann die Grundgleichung der Biegung für die Nennspannung gilt. Die Auswirkung der Kerbe auf die Dauerfestigkeit wird mittels der Kerbwirkungszahl β_k berücksichtigt.

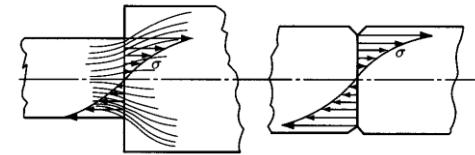


Bild 4-12 Spannungskonzentration

Die berechnete Spannung liegt nicht im Bereich einer Lasteinleitungsstelle. An solchen Stellen ergibt sich aufgrund zusätzlicher Beanspruchungen ein mehrdimensionaler Spannungszustand und dadurch eine Störung des linearen Spannungsverlaufs. Diese Spannungsverteilungen sind rechnerisch schwierig zu erfassen und können nur mit numerischen Methoden bestimmt werden.

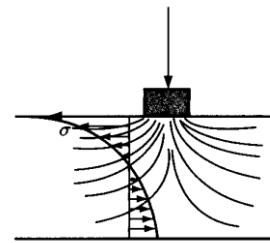


Bild 4-13 Lasteinleitung

Der Werkstoff muss bei der Deformation dem Hooke'schen Gesetz folgen. Wird die Streckgrenze R_p in der äussersten Faser überschritten, setzt dort Fließen ein, vorausgesetzt es handelt sich um einen duktilen Werkstoff, z.B. Baustahl. Unter der Annahme eines ideal-elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens bleibt in den Randzonen die Spannung auf dem Niveau von R_p . Bei weiterer Belastung dehnt sich das Gebiet der plastischen Deformation bis zur neutralen Faser aus. Werkstoffe hingegen, die keinen linearen Spannungs-Dehnungs-Verlauf aufweisen (z.B. Gusseisen) zeigen auch eine nicht-lineare Spannungsverteilung bei Biegung. Ist außerdem ihr Verhalten in Bezug auf Druck und Zugbeanspruchung unterschiedlich, so ist die rechnerische Erfassung der tatsächlichen Spannungsverteilung schwierig. Praktisch rechnet man trotzdem mit der Grundgleichung der Biegung und berücksichtigt die nichtlinearen Effekte durch entsprechende angepasste zulässige Spannungen.

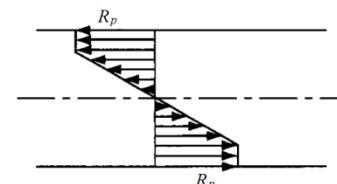


Bild 4-14 Plastifizierung
(ideal elastisch-plastisch)

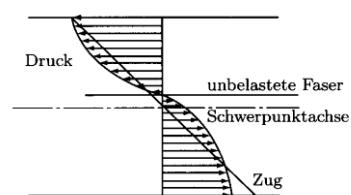


Bild 4-15 Nichtlinearer Spannungsverlauf (Gusseisen)

4.2 Axiale Flächen- und Widerstandsmomente

Die Berechnung der Spannungen eines auf Biegung belasteten Trägers setzt die Kenntnis des *axialen Flächenmomentes 2. Ordnung* der Querschnittsfläche voraus. Es bezieht sich auf die jeweilige Koordinatenachse, in der das Biegemoment liegt. Die Definition basiert auf dem in Kapitel 4.1 hergeleiteten Momentengleichgewicht und lautet für die y- und z-Achse

$$I_y = \int z^2 \cdot dA \quad I_z = \int y^2 \cdot dA$$

Für einfache geometrische Flächen kann das Flächenmoment durch Integration ermittelt werden. Am Beispiel eines Rechteckes soll dies gezeigt werden.

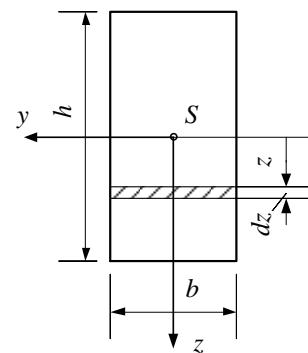
Beispiel

Die Flächenmomente für ein Rechteck der Höhe h und Breite b sind zu bestimmen. Für die Integration wird das infinitesimale Flächenelement $dA = b \cdot dz$ gewählt.

$$I_y = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \cdot b \cdot dz = b \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \cdot dz = \frac{b}{3} \cdot [z^3]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{b}{3} \cdot \left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3 \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

bzw. durch Vertauschen der Achsen

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



Flächenmomente einiger Grundformen sind im Anhang B in Tabelle B-1 zusammengestellt.

Für Normprofile sind die Flächenmomente den Tabellen in [4] zu entnehmen.

Die Angaben beziehen sich jeweils auf Achsen, die im *Flächenmittelpunkt* liegen.

Für Querschnitte, die sich in einzelne Rechtecke aufteilen lassen oder solche, die aus mehreren Normprofilen zusammengesetzt sind, lassen sich die Flächenmomente des Gesamtquerschnitts durch Summation der Flächenmomente der Einzelflächen berechnen. *Die Addition darf aber nur für Flächenmomente gleicher Bezugssachse durchgeführt werden.* Deshalb ist es notwendig, Flächenmomente auf parallele Achsen umzurechnen, wobei eine der Achsen immer die Schwerpunktsachse sein muss. Dies geschieht mit dem

Satz von Steiner

Der nebenstehende Querschnitt der Fläche A habe den Flächenmittelpunkt S. Seine Koordinaten y_s und z_s sind im Koordinatensystem $y^* - z^*$ bekannt. Das y-z Koordinatensystem befindet sich im Flächenmittelpunkt. Mit den geometrischen Zusammenhängen

$$z^* = z + z_s \quad y^* = y + y_s$$

und der Definition der Flächenmomente folgt

$$I_{y^*} = \int (z + z_s)^2 \cdot dA = \int z^2 \cdot dA + 2 \cdot z_s \cdot \int z \cdot dA + z_s^2 \cdot \int dA$$

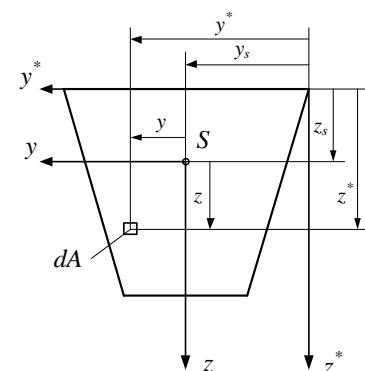


Bild 4-16 Satz von Steiner

Das erste Integral ist das Flächenmoment bez. der Schwerpunktsachse, das zweite muss bezüglich dem Schwerpunkt gleich Null sein (statisches Moment) und das dritte entspricht der Gesamtfläche A. Damit ergibt sich die Umrechnung der Flächenmomente auf eine parallele Achse, bekannt unter dem Namen *Satz von Steiner*.

$$I_{y^*} = I_y + z_s^2 \cdot A \quad I_{z^*} = I_z + y_s^2 \cdot A \quad (4-5)$$

Die Flächenmomente nehmen bezüglich den Schwerachsen einen *minimalen* Wert an.

Flächenmomente zusammengesetzter Flächen

Für Querschnitte, die sich in Rechtecke aufteilen lassen oder für solche, die aus Normprofilen zusammengesetzt sind, lassen sich die Flächenmomente des Gesamtquerschnitts durch Summation der Flächenmomente der Einzelflächen berechnen.

Nach dem Satz von Steiner geht dabei nur der Abstand von *einer Achse* ein, deshalb können Teilflächen parallel zu *dieser Achse* verschoben werden. Außerdem wird der Abstand quadriert, weshalb bezüglich der Achse symmetrische Teilflächen den gleichen Anteil ergeben. Vorhandene „Löcher“ können durch Subtraktion erfasst werden.

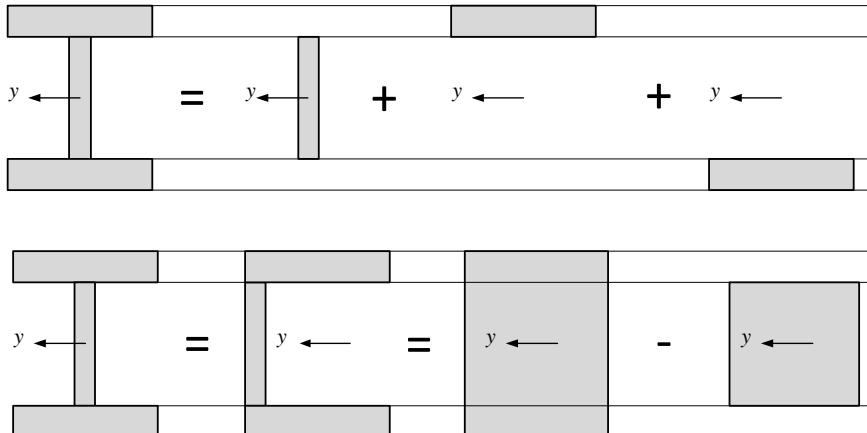


Bild 4-17 Flächenmomente zusammengesetzter Flächen

Beispiel

Für das T-Profil ist das Flächenmoment I_y zu bestimmen.

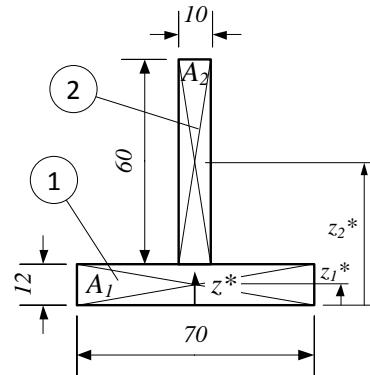
Die Berechnung erfolgt tabellarisch, die Teilflächen werden zu diesem Zweck nummeriert. Da der Schwerpunkt nicht bekannt ist, müssen auch die statischen Momente berechnet werden.

i	z^*	A	z^*A	z	$z^2 A$	I_{y0}
1	6	840	5040	-15.0	189000	10080
2	42	600	25200	21.0	264600	180000
$1+2$		1440	30240		453600	190080

Der Schwerpunkt ergibt sich wie folgt

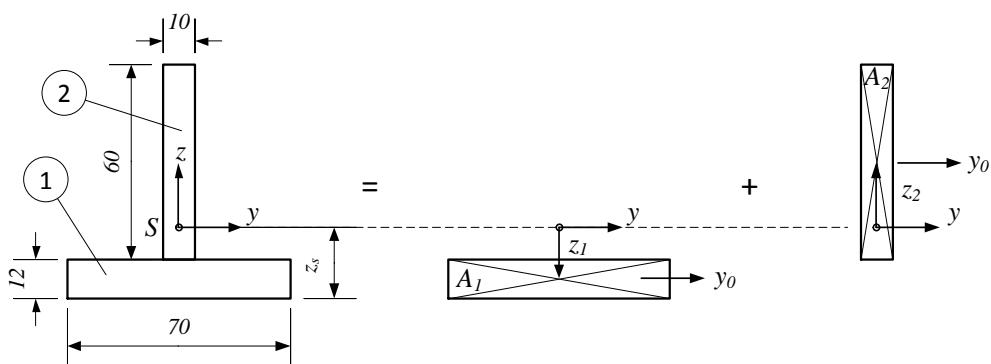
$$z_s = \frac{\sum z^* \cdot A}{\sum A} = \frac{30240}{1440} = 21,0 \text{ mm}$$

$$z = z^* - z_s$$



Die Flächenmomente der beiden Teilflächen werden dabei auf die gleiche Achse, die Schwerachse y bezogen, damit ist die Addition zulässig. Das gesamte Flächenmoment ist also die Summe der einzelnen Flächenmomente und die Summe der Steinerschen Anteile

$$I_y = \sum I_{y0} + \sum z^2 \cdot A = 190080 + 453600 = \underline{\underline{643'680 \text{ mm}^4}}$$



Widerstandsmomente

Die maximale Biegespannung tritt im betragsmässig grössten Abstand von der neutralen Faser auf. Da das Widerstandsmoment mit dem maximalen Randabstand definiert ist, kann damit nur die *betragsmässig* grösste Spannung erfasst werden. Es dient deshalb vor allem der Dimensionierung des erforderlichen Querschnitts.

$$W_{\text{erf}} \geq \frac{|M_b|}{\sigma_{\text{zul}}} \quad (4-6)$$

Bei zusammengesetzten Profilen *nicht* die Widerstandsmomente addiert werden.

Beispiel

Für den gemäss Skizze belasteten Träger ist ein Normprofil der IPB-Reihe nach DIN 1025-2 zu wählen.
Die zulässige Biegespannung ist $\sigma_{\text{zul}} = 120 \text{ N/mm}^2$.
Wie gross wird die maximale Spannung?
Nachträglich wird im kritischen Querschnitt ein Loch mit $\phi 50\text{mm}$ unterhalb der Mitte in den Steg gebohrt. Wo tritt die maximale Spannung auf und wie gross wird sie?

Das maximale Biegemoment beträgt 25 kNm .

Das erforderliche Widerstandsmoment ergibt

$$W_{\text{erf}} \geq \frac{M_b}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{25 \cdot 10^6}{120} = 208,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Aus Tabelle TB 1-11 [4] ist ein IPB 140 erforderlich mit einem Widerstandsmoment von $216 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_b}{W_y} = \frac{25 \cdot 10^6}{216 \cdot 10^3} = 116 \text{ N/mm}^2$$

Durch das Loch verschiebt sich die neutrale Faser nach oben, das Flächenmoment ist neu zu berechnen.

i	z^*	A	z^*A	z	z^2A	I_{y0}
1	0	4300	0	2.2	21100	15100000
2	25	350	8750	27.2	259233	72917
1-2		3950	-8750		-238133	15027083

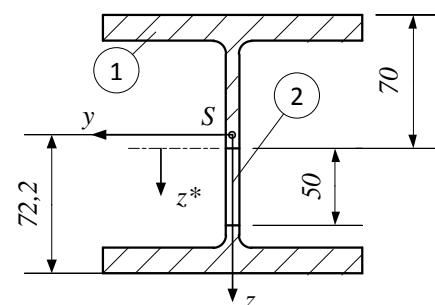
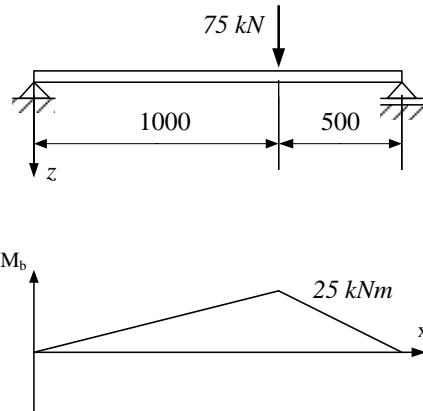
$$z_s = \frac{\sum z^* \cdot A}{\sum A} = \frac{-8750}{3950} = -2,2 \text{ mm} \quad z = z^* - z_s$$

$$I_y = \sum I_{y0} + \sum z^2 \cdot A = 15027083 - 238133 = 1479 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Der maximale Abstand von der neutralen Faser ist an der Unterseite und beträgt $72,2 \text{ mm}$. Die maximale Biegespannung tritt somit dort auf und wird

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_b}{I_y} \cdot z_{\text{max}} = \frac{25 \cdot 10^6}{1479 \cdot 10^4} \cdot 72,2 = 122 \text{ N/mm}^2$$

Zur Erfassung des Vorzeichens wird mit dem Flächenmoment und dem Abstand gerechnet. Das Vorzeichen der Spannung – Zug- oder Druck – kann auch durch Anschauung bestimmt werden, indem man sich die Deformation vorstellt. In obigem Beispiel biegt sich der Träger nach unten durch. Die oberen Schichten werden also gestaucht, die unteren gedehnt. Somit ist an der Unterseite, d.h. auf der $+z$ Seite eine Zugspannung zu erwarten.



Aus der Definition des axialen Flächenmomentes geht hervor, dass bei auf Biegung belasteten Querschnitten möglichst viel Fläche im grossen Abstand von der neutralen Faser angebracht werden soll. Demgegenüber wirkt sich Material, das in der neutralen Faser liegt, fast nicht auf das Flächenmoment aus, ein in die neutrale Faser gebohrtes Loch (a) wirkt sich kaum auf die Festigkeit aus. Neben der Biegung sind aber meistens auch Querkräfte vorhanden, welche hauptsächlich von den Querschnittsflächen in der Nähe der neutralen Faser übertragen werden siehe dazu Kapitel 5.2. Aus diesem Grund sind Löcher im Steg im Bereich grosser Querkräfte zu meiden sowie lange Löcher (b) grundsätzlich nicht zulässig, denn sie unterbrechen den Schub im Steg und beeinträchtigen damit das Festigkeitsverhalten sehr stark.

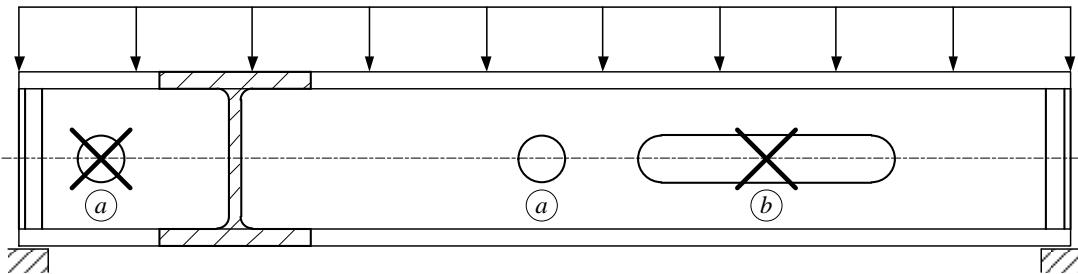


Bild 4-18 Ausschnitte in der neutralen Faser

Werden zur Erhöhung der Biegefestigkeit zusätzliche Teile im Bereich der Flansche angebracht ist allerdings Vorsicht geboten. Nach aussen herausragende Teile (c) wirken sich meist negativ aus, da die Erhöhung des Flächenmomentes durch den grösseren Randabstand übertroffen wird und eine höhere Spannung resultiert als am „unverstärkten“ Profil. Deshalb müssen aussen angebrachte Teile möglichst kompakt liegen (d).

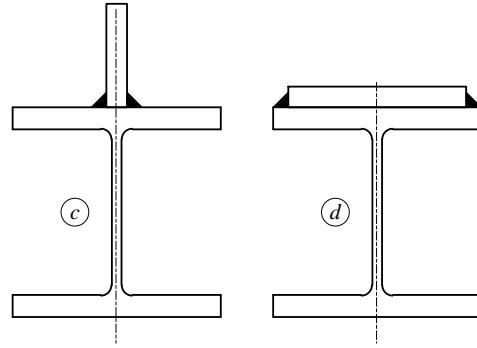


Bild 4-19 Aufgeschweißte Bauteile

Träger gleicher Biegespannung

In vielen Bauteilen ist das Biegemoment nicht konstant. Wird der Querschnitt über die Bauteillänge trotzdem konstant ausgeführt, ist der grösste Teil des Materials schlecht ausgenutzt. Unter einem *Träger gleicher Biegespannung* versteht man ein dem Biegemoment angepasster Verlauf des Querschnitts.

Beispiel

Ein Kragträger soll aus einem Blech der Dicke t ausgeführt werden. Das Widerstandsmoment für den Querschnitt ist

$$W = \frac{t \cdot h^2}{6}$$

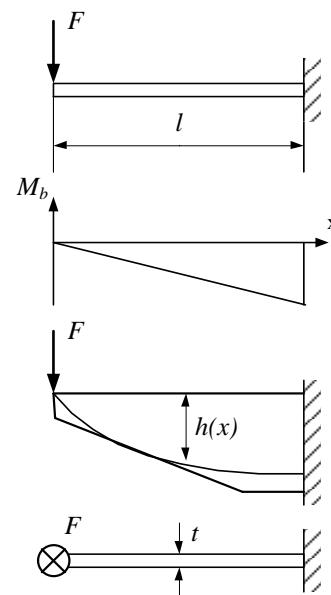
Das Biegemoment ist linear verteilt und somit ergibt sich mit der Grundgleichung der Biegung

$$W = \frac{t \cdot h^2}{6} \geq \frac{M_b}{\sigma_{zul}} = \frac{F \cdot x}{\sigma_{zul}}$$

Damit ergibt sich die Höhe in Funktion der Trägerachse x .

$$h(x) = \sqrt{\frac{6 \cdot F}{t \cdot \sigma_{zul}}} \cdot \sqrt{x}$$

Praktisch wird diese Funktion durch einfache Formen angenähert. Analoge Überlegungen lassen sich für Wellen und Achsen anstellen.



4.3 Verformung

Eine zu hohe Biegeverformung kann die Funktion eines Bauteils genauso beeinträchtigen wie eine zu hohe Spannung. Als Beispiel sei eine Getriebewelle betrachtet, die sich aufgrund der Belastung elastisch verformt. Die Durchbiegung bewirkt eine Unwucht der Welle und kann unerwünschte Schwingungen verursachen. Die Schiefstellung des Zahnrades ergibt eine ungleichmässige Lastverteilung auf den Zahnflanken und eine zu grosse Schiefstellung an den Lagern kann zur Schädigung der Wälzläger führen.

Die deformierte neutrale Faser eines unter Biegung stehenden Trägers nennt man die *Biegelinie*.

An einer bestimmten Stelle x tritt die *Durchbiegung* $w(x)$ und der *Biegewinkel* $\varphi(x)$ auf. Im Folgenden sollen diese beiden Funktionen berechnet werden. Für den *Krümmungsradius* ρ gilt die in Kapitel 4.1 gefundene Beziehung zwischen Biegemoment M_b , E-Modul und axialem Flächenmoment I .

$$\rho = \frac{E \cdot I}{M_b}$$

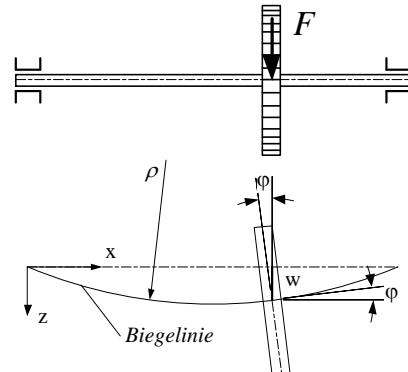


Bild 4-20 Durchbiegung Welle

Je grösser das Biegemoment umso kleiner der Krümmungsradius und je grösser die Biegesteifigkeit – das Produkt aus $E \cdot I$ – umso grösser der Krümmungsradius.

Als *Krümmung* k bezeichnet man den Kehrwert des Krümmungsradius ρ .

Bei einem üblicherweise über der Balkenlänge veränderlichen Biegemoment $M_b(x)$ ist auch die Krümmung, bzw. der Krümmungsradius eine Funktion von x .

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_b(x)}{E \cdot I}$$

Um den Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Krümmung zu beschreiben, wird auf die mathematische Definition der Krümmung einer Funktion zurückgegriffen.

$$k(x) = -\frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

Das negative Vorzeichen resultiert aus der Richtung von w nach unten. Die erste Ableitung w' ist die Neigung der Tangente. Für den Biegewinkel gilt (positiv im Gegenuhrzeigersinn)

$$\varphi \approx \tan \varphi = -\frac{dw}{dx} = -w'$$

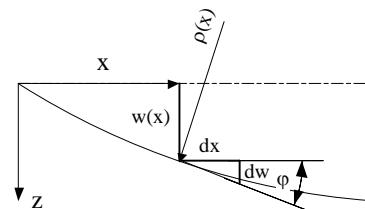


Bild 4-21 Biegeverformung

Aufgrund der im Verhältnis zu den Längen der Bauteile sehr geringen Verformungen sind die Neigungswinkel φ sehr klein ($\varphi \approx \tan \varphi$) und der Term w'^2 kann vernachlässigt werden. Die Differentialgleichung der Biegelinie lautet damit

$$w'' = -\frac{M_b(x)}{E \cdot I} \quad (4-7)$$

Durch zweifache Integration dieser Gleichung lässt sich die Biegelinie $w(x)$ finden. Man spricht bei diesem Verfahren von der Integrationsmethode.

4.3.1 Integrationsmethode

Mit den bekannten Beziehungen zwischen Streckenlast, Querkraft und Biegemoment aus der Statik, Kapitel 6.1 ergeben sich die folgenden Zusammenhänge. Die Biegesteifigkeit $E \cdot I$ wird dabei als konstant über der Trägerachse angenommen.

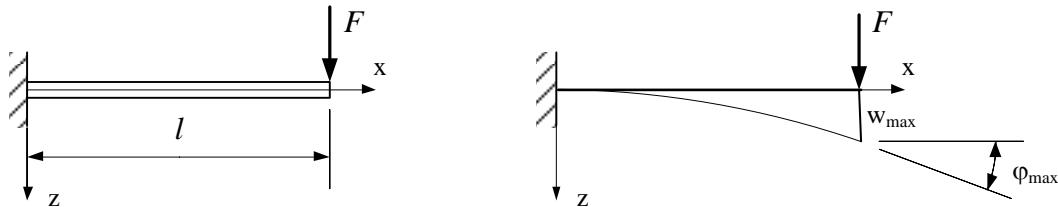
$$Q = - \int q \cdot dx \rightarrow M_b = \int Q \cdot dx \rightarrow \varphi = \int \frac{M_b}{E \cdot I} \cdot dx \rightarrow w = - \int \varphi \cdot dx$$

Es ist also grundsätzlich möglich durch vierfache Integration aus der Belastung $q(x)$ die Biegelinie $w(x)$ zu bestimmen. Die Integrationskonstanten gewinnt man aus den Randbedingungen. Für übliche Lagerungen sind sie der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen.

Lager		w	w'	M_b	Q
Gelenk		0	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Parallelführung		$\neq 0$	0	$\neq 0$	0
Einspannung		0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
Freies Ende		$\neq 0$	$\neq 0$	0	0

Beispiel

Für den einseitig eingespannten Träger sind die Biegelinie, die maximale Durchbiegung und der maximale Biegewinkel zu berechnen.



Das Biegemoment infolge der Kraft F beträgt

$$M_b(x) = -F(l - x)$$

Eingesetzt in der Differentialgleichung

$$w'' = \frac{F}{E \cdot I} \cdot (l - x)$$

Die erste Integration liefert die Neigung der Biegelinie

$$w' = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

Die zweite Integration liefert die Durchbiegung

$$w = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{l \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 \cdot x + C_2$$

An der Einspannstelle bei $x = 0$ sind sowohl der Neigungswinkel $w'(0) = 0$ als auch die Durchbiegung $w(0) = 0$. Daraus ergeben sich die beiden Integrationskonstanten $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$. Der grösste Biegewinkel und die maximale Durchbiegung resultieren für $x = l$.

$$|\varphi_{\max}| = w'(x = l) = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$w_{\max} = w(x = l) = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Auf analoge Weise berechnete Biegelinien, maximale Durchbiegungen und Biegewinkel für die wichtigsten Belastungsfälle sind im Anhang B, Tabelle B-3 zusammengestellt.

Bei Belastungen mit mehreren Einzelkräften, Zwischenlagern oder sich ändernden Streckenlasten muss die Integration in mehreren Teilabschnitten des Trägers erfolgen. Dies erfordert die Berechnung vieler Integrationskonstanten aus den Rand- und Übergangsbedingungen, wodurch der Rechenaufwand sehr schnell ansteigt.

Die Integrationsmethode, also die Berechnung der Durchbiegung mit Hilfe der Lösung der Differentialgleichung stellt deshalb keine praktische Methode dar. Für Standardfälle können die Deformationen der Tabelle B-3 entnommen werden. Sind Träger mit mehreren Belastungen beaufschlagt, so können diese oft auf zwei oder mehrere Belastungsfälle zurückgeführt werden. Die resultierenden Verformungen lassen sich dann durch Überlagerung bekannter Belastungsfälle bestimmen.

4.3.2 Überlagerung einzelner Belastungsfälle

Die Deformationen eines Bauteils sind proportional zur Belastung, wie man der Tabelle B-3 entnehmen kann. Voraussetzung für diesen linearen Zusammenhang sind im Vergleich zu den Bauteilabmessungen *kleine Verformungen*. Dies ist in den meisten technischen Anwendungen gegeben. Deshalb dürfen Einzelverformungen aus verschiedenen Belastungen zu einer Gesamtverformung addiert oder *superponiert* werden. Ein Träger sei mit zwei Einzelkräften F_1 an der Stelle (1) und F_2 an der Stelle (2) belastet. Werden die Belastungen einzeln nacheinander aufgebracht, so ergeben sich die beiden Standardfälle mit je einer Kraft.

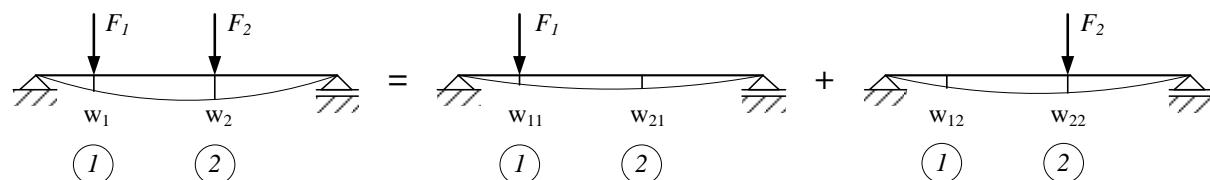


Bild 4-22 Überlagerung einzelner Belastungsfälle

Die Kraft F_1 verursacht allein wirkend die Durchbiegung w_{11} an der Stelle (1) und w_{21} an der Stelle (2). Der erste Index bezieht sich auf den Ort, der zweite Index auf die verursachende Kraft. Analog bewirkt die Kraft F_2 die Durchbiegungen w_{22} an der Stelle (2) und w_{12} bei (1). Die Gesamtdurchbiegung erhält man durch Superposition.

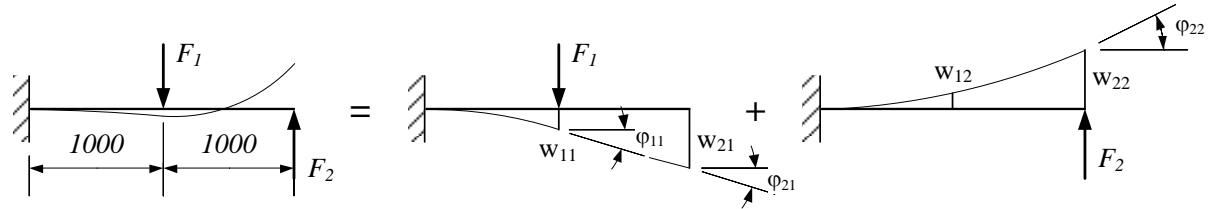
$$w_1 = w_{11} + w_{12}$$

$$w_2 = w_{21} + w_{22}$$

Nach dem gleichen Prinzip lassen sich auch die Biegewinkel, die Lagerreaktionen, Querkräfte und Biegemomente superponieren.

Beispiel

Der eingespannte Träger aus einem IPB-100 ist mit $F_1 = 40 \text{ kN}$ und $F_2 = 15 \text{ kN}$ belastet. Zu bestimmen sind die Durchbiegungen bei F_1 und F_2 und der Biegewinkel am Ende des Trägers.



Die Belastung wird in die zwei Standardfälle aufgeteilt. Die einzelnen Werte sind der Tabelle B-3 entnommen und werden zunächst betragsmäßig berechnet. Die Vorzeichen werden bei der Superposition berücksichtigt. Die Biegesteifigkeit beträgt $EI = 210'000 \cdot 450 \cdot 10^4 = 9,45 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}^2$.

$$w_{11} = \frac{F_1 \cdot l^3}{3 \cdot EI} = \frac{40'000 \cdot 1000^3}{3 \cdot 9,45 \cdot 10^{11}} = 14,11 \text{ mm}$$

$$\varphi_{11} = \frac{F_1 \cdot l^2}{2 \cdot EI} = \frac{40'000 \cdot 1000^2}{2 \cdot 9,45 \cdot 10^{11}} = 21,16 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = \varphi_{21}$$

$$w_{22} = \frac{F_2 \cdot l^3}{3 \cdot EI} = \frac{15'000 \cdot 2000^3}{3 \cdot 9,45 \cdot 10^{11}} = 42,33 \text{ mm}$$

$$\varphi_{22} = \frac{F_2 \cdot l^2}{2 \cdot EI} = \frac{15'000 \cdot 2000^2}{2 \cdot 9,45 \cdot 10^{11}} = 31,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$w_{21} = w_{11} + \varphi_{11} \cdot 1000 = 14,11 + 21,16 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 35,27 \text{ mm}$$

$$w_{12} = \frac{F_2 \cdot l^3}{6 \cdot EI} \left[2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right] = \frac{15'000 \cdot 2000^3}{6 \cdot 9,45 \cdot 10^{11}} [0,625] = 13,23 \text{ mm}$$

Die Superposition berücksichtigt die Vorzeichen der Deformationen.

$$w_1 = w_{11} - w_{12} = 14,11 - 13,23 = 0,88 \text{ mm} \quad (\downarrow)$$

$$w_2 = w_{21} - w_{22} = 35,27 - 42,33 = -7,1 \text{ mm} \quad (\uparrow)$$

$$\varphi_2 = -\varphi_{21} + \varphi_{22} = -21,16 \cdot 10^{-3} + 31,75 \cdot 10^{-3} = 10,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,61^\circ$$

Die einzelnen Durchbiegungen sind proportional zu den verursachenden Kräften. Die Durchbiegung an der Stelle i verursacht durch die Kraft k kann man auch schreiben

$$w_{ik} = \alpha_{ik} \cdot F_k \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{ik} = \frac{w_{ik}}{F_k}$$

Die Faktoren α_{ik} nennt man *Einflusszahlen*. Aus der Überlegung, dass die Lasten nacheinander in beliebiger Reihenfolge aufgebracht werden dürfen, kann man den *Satz von Maxwell* ableiten. Damit lassen sich die Resultate kontrollieren.

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

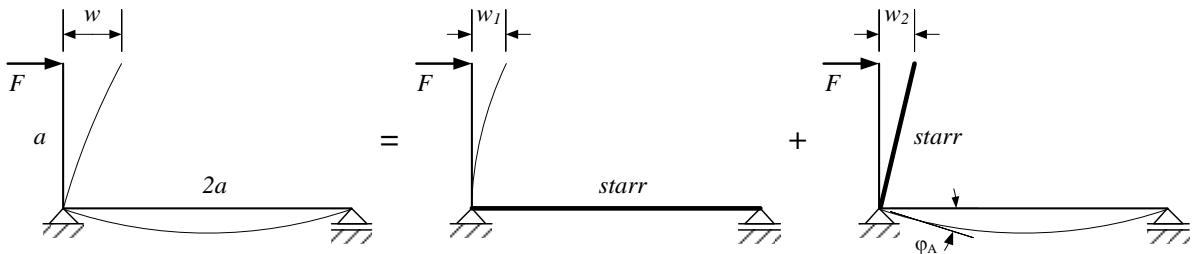
Beispiel (Fortsetzung)

$$\alpha_{21} = \frac{w_{21}}{F_1} = \frac{w_{12}}{F_2} = \alpha_{12} \Rightarrow w_{12} = \frac{F_2}{F_1} \cdot w_{21} = \frac{15}{40} \cdot 35,27 = 13,23 \text{ mm}$$

Die Überlagerungsmethode findet auch bei gekröpften Trägern Anwendung, die aus mehreren Abschnitten zusammengesetzt sind. In diesem Fall werden die einzelnen Abschnitte nacheinander als starr angenommen und die Deformation der elastischen Teile berechnet. Anschliessend werden die so erhaltenen Verformungen addiert.

Beispiel

Für den aus zwei Teilen bestehenden Träger mit konstanter Biegesteifigkeit $E \cdot I$ ist die Deformation des Lastangriffspunktes in allgemeiner Form zu berechnen. Wird der horizontale Teil starr angenommen, so verbiegt sich der vertikale Teil um w_1 . Das am horizontalen Teil angreifende Moment $F \cdot a$ führt zu einem Biegewinkel φ_A . Dieser Biegewinkel resultiert in einer Verschiebung des starren vertikalen Teils um w_2 .



Die einzelnen Deformationen können der Tabelle B-3 entnommen werden.

$$w = w_1 + w_2 = w_1 + \varphi_A \cdot a$$

$$w = \frac{F \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{(F \cdot a) \cdot 2a \cdot a}{3 \cdot E \cdot I} = \underline{\underline{\frac{F \cdot a^3}{E \cdot I}}}$$

4.3.3 Formänderungsarbeit

Eine dritte Methode zur Berechnung von Verformungen basiert auf der Formänderungsarbeit. Dabei wird die Arbeit berechnet, die von einem auf Biegung beanspruchten Träger aufgenommen und gespeichert wird. Wie bereits bei Zugstäben im Kapitel 3 gezeigt, sind solche Energiemethoden sehr elegante Verfahren zur Bestimmung der Verformungen. Einschränkend ist allerdings, dass sie nur zur Berechnung der Deformation an bestimmten, einzelnen Stellen dienen.

Zunächst wird ein eingespannter Träger mit konstanter Biegesteifigkeit $E \cdot I$ betrachtet, welcher am Ende mit einem Moment M belastet ist. Das Biegemoment ist für diesen Belastungsfall über der Trägerachse konstant und der Biegewinkel wird

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I}$$

Elastisches Verhalten vorausgesetzt besteht zwischen Biegemoment ($M_b = M$) und Biegewinkel ein linearer Zusammenhang. Die Arbeit zur Verrichtung dieser Deformation entspricht der Fläche unter der Momenten-Biegewinkel-Kurve.

$$W = \frac{1}{2} \cdot M_b \cdot \varphi = \frac{M_b^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot I}$$

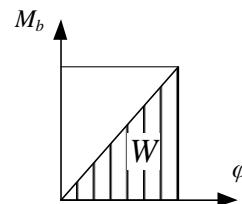
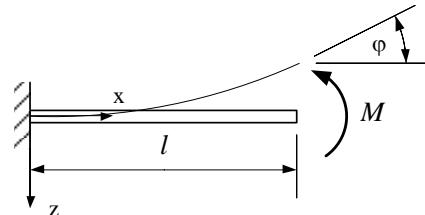


Bild 4-23 Formänderungsarbeit

Im Allgemeinen ist das Biegemoment $M_b(x)$ eine Funktion über der Trägerachse. In diesem Fall beträgt die Formänderungsarbeit

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_b^2}{E \cdot I} \cdot dx \quad (4-8)$$

An dieser Stelle sei auf die Analogie der Formänderungsarbeit bei Zug- und Druckstäben hingewiesen, bei denen anstelle des Biegemomentes M_b die Normalkraft N steht; bei Torsion sind analoge Beziehungen vorhanden, siehe Kapitel 6.1. Ein grosser Vorteil der Energiemethoden liegt auch darin, dass bei zusammengesetzter Beanspruchung die Formänderungsarbeiten addiert werden können, unabhängig davon ob sie aus einer Normalkraft, aus Biegung oder Torsion herrühren.

Aus den Formänderungsarbeiten können die Verformungen wie folgt gefunden werden.

Satz von CASTIGLIANO

Die Ableitung der Formänderungsarbeit nach der Kraft ergibt die Durchbiegung an der Kraftangriffsstelle in Kraftrichtung

$$w = \frac{\partial W}{\partial F}$$

Sind Biegewinkel gesucht gilt analog:

Die Ableitung der Formänderungsarbeit nach dem Moment ergibt den Biegewinkel an der Angriffsstelle des Momentes in Richtung des Momentes

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial M}$$

Zur Erläuterung wird ein eingespannter Balken mit Einzelkraft betrachtet. Die Formänderungsarbeit wird partiell nach der Kraft abgeleitet. Unter Anwendung der Kettenregel folgt bei konstanter Biegesteifigkeit $E \cdot I$.

$$w = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l 2 \cdot M_b \cdot \frac{\partial M_b}{\partial F} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_b \cdot \frac{\partial M_b}{\partial F} \cdot dx$$

Das Biegemoment ist eine lineare Funktion von F , somit kann die Ableitung von M_b nach F als „Biegemoment“ einer gedachten Kraft „1“ interpretiert werden. Die Kraft „1“ wird Einheitskraft genannt und befindet sich an der Stelle wo die Durchbiegung gesucht ist. Die Auswertung des Integrals ergibt

$$w = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l (-F \cdot x) \cdot (-1 \cdot x) dx = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

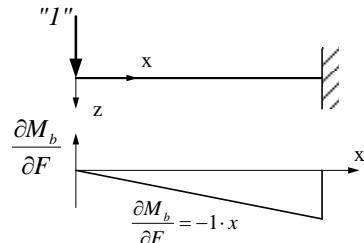
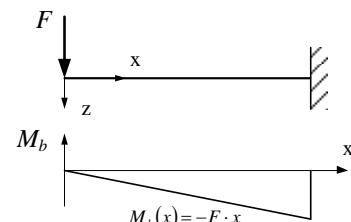


Bild 4-24 Balken mit Einheitslast

Praktisch reduziert sich die Berechnung der Durchbiegung auf die Lösung des Integrals mit einem Produkt aus zwei Funktionen. Die erste Funktion ist die Momentenfläche M_i der realen Belastung, die zweite Funktion ist die Momentenfläche M_k der gedachten Belastung unter der Einheitslast „1“. Das Integral wird zweckmäßig mit Hilfe von Integrationstabellen gelöst.

$$w = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_i \cdot M_k \cdot dx$$

Analog kann die Neigung der Biegelinie an bestimmten Stellen berechnet werden. Dazu wird an der Stelle, wo der Biegewinkel berechnet werden soll ein Einheitsmoment eingeführt. Das Biegemoment infolge dieses Einheitsmomentes ist die Momentenfläche M_k . Zusammen mit der Momentenfläche M_i der realen Belastung kann der Biegewinkel bestimmt werden.

$$\varphi = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_i \cdot M_k \cdot dx$$

#	M_i	M_k *)			
		α	β	γ	δ
1		$s M_i M_k$	$\frac{1}{2} s M_i M_k$	$\frac{1}{2} s M_i M_k$	$\frac{1}{2} s M_i (M_{k1} + M_{k2})$
2		$\frac{1}{2} s M_i M_k$	$\frac{1}{3} s M_i M_k$	$\frac{1}{6} s M_i M_k$	$\frac{1}{6} s M_i (M_{k1} + 2M_{k2})$
3		$\frac{1}{2} s (M_{i1} + M_{i2}) M_k$	$\frac{1}{6} s (M_{i1} + 2M_{i2}) M_k$	$\frac{1}{6} s (2M_{i1} + M_{i2}) M_k$	$\frac{1}{6} s (2M_{i1} M_{k1} + 2M_{i2} M_{k2} + M_{i1} M_{k2} + M_{i2} M_{k1})$
4		$\frac{2}{3} s M_i M_k$	$\frac{1}{3} s M_i M_k$	$\frac{1}{3} s M_i M_k$	$\frac{1}{3} s M_i (M_{k1} + M_{k2})$
5		$\frac{2}{3} s M_i M_k$	$\frac{5}{12} s M_i M_k$	$\frac{1}{4} s M_i M_k$	$\frac{1}{12} s M_i (3M_{k1} + 5M_{k2})$
6		$\frac{1}{3} s M_i M_k$	$\frac{1}{4} s M_i M_k$	$\frac{1}{12} s M_i M_k$	$\frac{1}{12} s M_i (M_{k1} + 3M_{k2})$

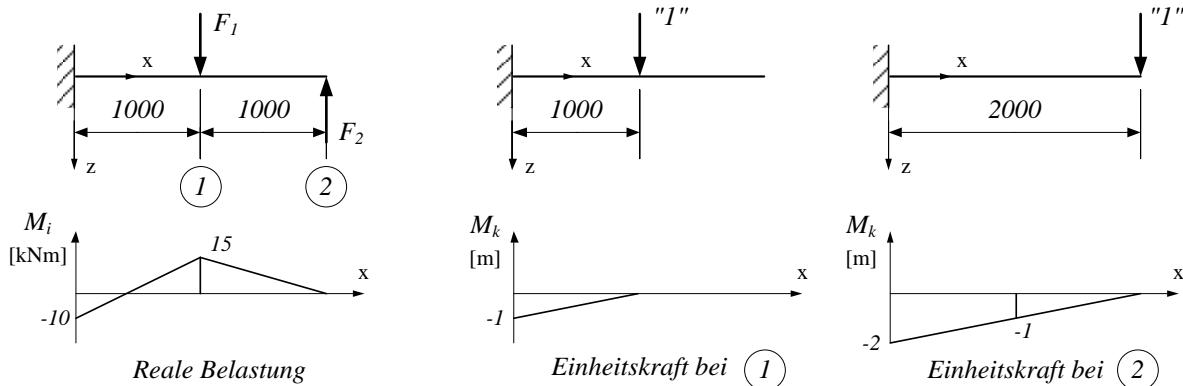
*) M_i und M_k sind vertauschbar

**) quadratische Parabel

Tabelle 4-1 Integrationstafel

Beispiel

Für den Kragträger mit $F_1 = 40 \text{ kN}$ und $F_2 = 15 \text{ kN}$ aus Kapitel 4.3.2 sollen mit Hilfe der Formänderungsarbeit die Durchbiegungen an den beiden Krafeinleitungen und der Biegewinkel am Ende berechnet werden. Biegesteifigkeit $E \cdot I = 210'000 \cdot 450 \cdot 10^4 = 9,45 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}^2$.



Zunächst wird die Momentenfläche für die reale Belastung M_i berechnet. Für die Durchbiegung an der Stelle (1) wird dort die Einheitskraft "I" eingeführt und die Momentenfläche M_k gezeichnet. Die Einheit des Momentes M_k ist $[l \cdot m]$, also $[m]$. Die Auswertung des Integrals erfolgt mit Hilfe der Tabelle, Zeile 3 / Spalte γ . Es ist auf konsistente Einheiten zu achten.

$$w_1 = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} \cdot 1000 \cdot (2(-10 \cdot 10^6) + 15 \cdot 10^6) \cdot (-10^3) \right\}$$

$$w_1 = \underline{\underline{0,88 \text{ mm}}} \quad (\downarrow)$$

Für die Durchbiegung an der Stelle (2) wird dort die Einheitskraft "I" eingeführt und die Momentenfläche M_k gezeichnet. Die Richtung der Einheitskraft ist beliebig; das negative Resultat bedeutet, dass die Verformung entgegengesetzt der Richtung der Einheitskraft auftritt.
Die Auswertung des Integrals erfolgt in zwei Schritten.

Für den ersten Abschnitt gilt: Zeile 3 / Spalte δ , für den zweiten Abschnitt: Zeile 2 / Spalte β .

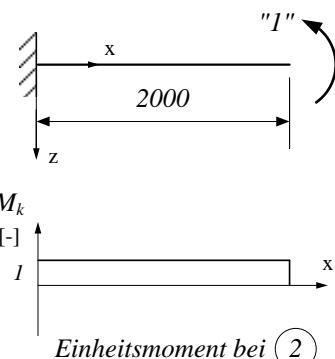
$$w_2 = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{6} \cdot 1000 \cdot (2(-10 \cdot 10^6) \cdot (-2 \cdot 10^3) + 2 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot (-10^3) + (-10 \cdot 10^6) \cdot (-10^3) + 15 \cdot 10^6 \cdot (-2 \cdot 10^3)) + \frac{1}{3} \cdot 1000 \cdot (15 \cdot 10^6 \cdot (-10^3)) \right\}$$

$$w_2 = \underline{\underline{-7,1 \text{ mm}}} \quad (\uparrow)$$

Für den Biegewinkel an der Stelle (2) wird dort das Einheitsmoment "I" eingeführt und die Momentenfläche M_k gezeichnet. Die Einheit des Momentes M_k ist $[1]$, also keine Einheit. Für den ersten Abschnitt gilt: Zeile 3 / Spalte α , für den zweiten Abschnitt: Zeile 2 / Spalte α .

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (-10 \cdot 10^6 + 15 \cdot 10^6) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 1 \right\}$$

$$\varphi_2 = \underline{\underline{10,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,61^\circ}}$$



4.4 Schiefe Biegung

Für einen Träger mit mindestens *einfach symmetrischem* Querschnitt können die Biegespannungen auch für Belastungen mit einem Biegemoment in beliebiger Richtung berechnet werden. Man zerlegt dazu den Biegemomentvektor in die y- und z-Achse und addiert die in Kapitel 4.1 gefundenen Beziehungen (Grundgleichung der Biegung).

$$\sigma = \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z - \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y \quad (4-9)$$

Liegt nur eine Biegung M_{by} um die y-Achse vor, so resultiert eine lineare Spannungsverteilung über der Höhe z. Aufgrund der Symmetrie der Querschnittsfläche verschwindet in diesem Fall das aus den Spannungen resultierende Biegemoment M_{bz} um die z-Achse. Zu jedem Flächenelement dA im Abstand $+y$ gibt es ein gleiches Element dA im Abstand $-y$, wobei die Momente der beiden inneren Kräfte sich aufheben.

$$M_{bz} = - \int y \cdot dF = - \int y \cdot \sigma \cdot dA = 0$$

Für einen *nicht symmetrischen* Querschnitt mit Belastung durch M_{by} ist das nicht mehr der Fall. Es ist deshalb nicht zulässig, die Biegespannungen mit der Grundgleichung der Biegung in obiger Form zu berechnen.

Die Bedingung, dass die aus den Biegespannungen resultierenden inneren Kräfte gleich dem Biegemoment sein müssen, ergibt für den allgemeinen, nicht symmetrischen Querschnitt:

$$M_{bz} = - \int y \cdot \sigma \cdot dA = - \int y \cdot \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot dA = - \frac{E}{\rho} \cdot \int y \cdot z \cdot dA$$

Das Integral ist das *baxiale Flächenmoment* oder *Deviationsmoment* des Querschnitts.

$$I_{yz} = - \int y \cdot z \cdot dA$$

Das *Minus* Vorzeichen entspricht der Schreibweise nach DIN 13316. Es wird aber auch diejenige mit dem *positiven* Vorzeichen verwendet, vor allem im englischen Sprachraum. Bei der Anwendung im Zusammenhang mit schiefer Biegung ist deshalb äusserste Vorsicht geboten, wenn verschiedene Bücher und Formelsammlungen nebeneinander benutzt werden!

Für nicht symmetrische Querschnitte ist das *baxiale Flächenmoment* I_{yz} nicht Null. Eine Belastung durch eine Kraft in z-Richtung bewirkt also nicht nur ein Biegemoment M_{by} um die y-Achse, sondern gleichzeitig auch ein Biegemoment M_{bz} um die z-Achse. Dies hat zur Folge, dass sich der Träger auch quer zur Kraft in y-Richtung verbiegt, man spricht daher von schiefer Biegung.

Das *baxiale Flächenmoment* I_{yz} kann positiv, negativ oder Null sein. In letzteren Fall liegt ein symmetrischer Querschnitt, also gerade Biegung vor.

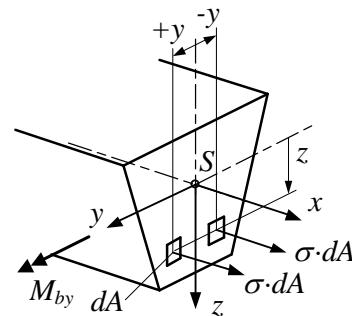


Bild 4-25 Symmetrische Belastung

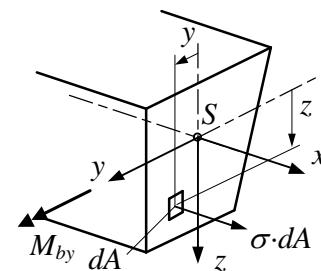
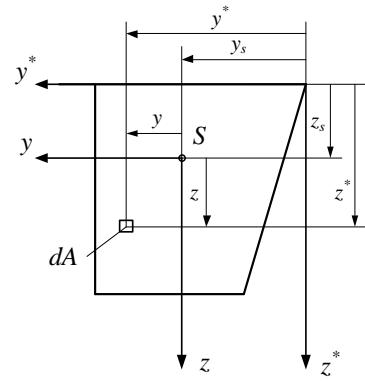


Bild 4-26 Unsymmetrische Belastung

Soll das biaxiale Flächenmoment bezüglich parallel verschobener Achsen berechnet werden, gilt analog dem axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Satz von Steiner, siehe Kapitel 4.2.

$$I_{yz^*} = I_{yz} - y_s \cdot z_s \cdot A \quad (4-10)$$

Gleiche Bezugsachsen vorausgesetzt lassen sich auch die biaxialen Flächenmomente addieren. Dies wird bei Querschnitten ausgenutzt, die sich in mehrere Teilflächen aufteilen lassen.



4.4.1 Hauptachsen und Hauptflächenmomente

Für jeden beliebigen Querschnitt existieren zwei Achsen, für die das *biaxiale Flächenmoment* verschwindet. Die beiden Achsen stehen *senkrecht* aufeinander und die dazugehörigen Flächenmomente bezüglich dieser Achsen nehmen *Extremwerte* ein. Man spricht in diesem speziellen Fall von *Hauptachsen* und *Hauptflächenmomenten*.

Eine Symmetriearchse und deren Senkrechte durch den Schwerpunkt sind immer Hauptachsen.

Bei der Biegung um Hauptachsen handelt es sich demnach um gerade Biegung. Die Berechnung der Spannungen bei schiefer Biegung lässt sich auf ein Problem von gerader Biegung um die beiden Hauptachsen zurückführen. Dazu muss für einen beliebigen Querschnitt zunächst die Lage der Hauptachsen bestimmt werden.

Bekannt seien die Flächenmomente I_y , I_z und I_{yz} bezüglich dem Schwerpunkt S. Wird das Bezugssystem gedreht, so ändern sich die Flächenmomente. Für ein um den Winkel α gedrehtes η - ζ -Achsensystem werden die entsprechenden Flächenmomente bestimmt. Für die Transformation der Koordinaten eines Flächenelementes dA gilt:

$$\eta = y \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha$$

$$\zeta = z \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

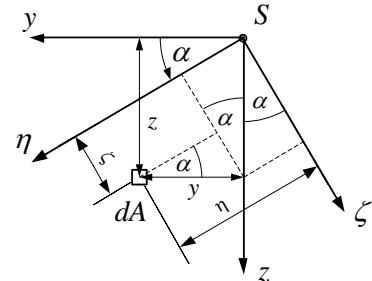


Bild 4-27 Drehung Bezugssachsen

Für das Flächenmoment bezüglich der um α gedrehten η -Achse ergibt sich

$$I_\eta = \int \zeta^2 \cdot dA = \int (z \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA = \cos^2 \alpha \cdot \int z^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \int z \cdot y \cdot dA + \sin^2 \alpha \cdot \int y^2 \cdot dA$$

$$I_\eta = \cos^2 \alpha \cdot I_y + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot I_{yz} + \sin^2 \alpha \cdot I_z$$

Auf analoge Weise lassen sich auch die Flächenmomente I_ζ und $I_{\eta\zeta}$ berechnen.

Mit Hilfe der folgenden trigonometrischen Beziehungen kann weiter vereinfacht werden.

$$\cos^2 \alpha = 1/2 \cdot (1 + \cos 2\alpha) \quad 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad \sin^2 \alpha = 1/2 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

Die Flächenmomente für ein um den Winkel α gedrehtes η - ζ -Achsensystem sind dann:

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{yz} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{yz} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{yz} \cdot \cos 2\alpha$$

Um den Winkel zu bestimmen, für den das *biaxiale Flächenmoment* verschwindet, wird die letzte Beziehung gleich Null gesetzt. Daraus ergibt sich die Richtung der Hauptachsen mit dem Winkel α_1 – positiv gemessen zwischen der y-Achse und der η -Achse. Aufgrund der Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion ergeben sich für die Lösungen der Hauptrichtungen die Werte $2\alpha_1 \pm 180^\circ$ bzw. $\alpha_1 \pm 90^\circ$. Die beiden Hauptachsen stehen also senkrecht aufeinander.

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \quad \text{bzw.} \quad \tan \alpha_1 = \frac{I_{yz}}{I_1 - I_2} \quad (4-11)$$

Mittels trigonometrischen Umformungen kann aus der Formel für $\tan 2\alpha_1$ die Formel (4-11) für $\tan \alpha_1$ gewonnen werden. Die Mehrdeutigkeit der ersten Formel kann damit umgangen werden. Es zeigt sich außerdem, dass für diese Winkel das Flächenmoment I_η maximal und das Flächenmoment I_ζ minimal werden. Sie heißen *Hauptflächenmomente* I_1 und I_2 und werden durch Einsetzen des berechneten Winkels α_1 in die obigen Gleichungen gewonnen.

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (4-12)$$

Die Gleichungen lassen sich am sogenannten MOHRSchen Trägheitskreis darstellen. Auf der Abszisse sind die axialen Flächenmomente, auf der Ordinate die biaxialen Flächenmomente aufgetragen. Lässt man die Achsen in einem Querschnitt mit dem Winkel α rotieren, so liegen die entsprechenden Wertepaare der axialen und biaxialen Flächenmomente auf einem Kreis, wobei hier der doppelte Winkel 2α vorkommt.

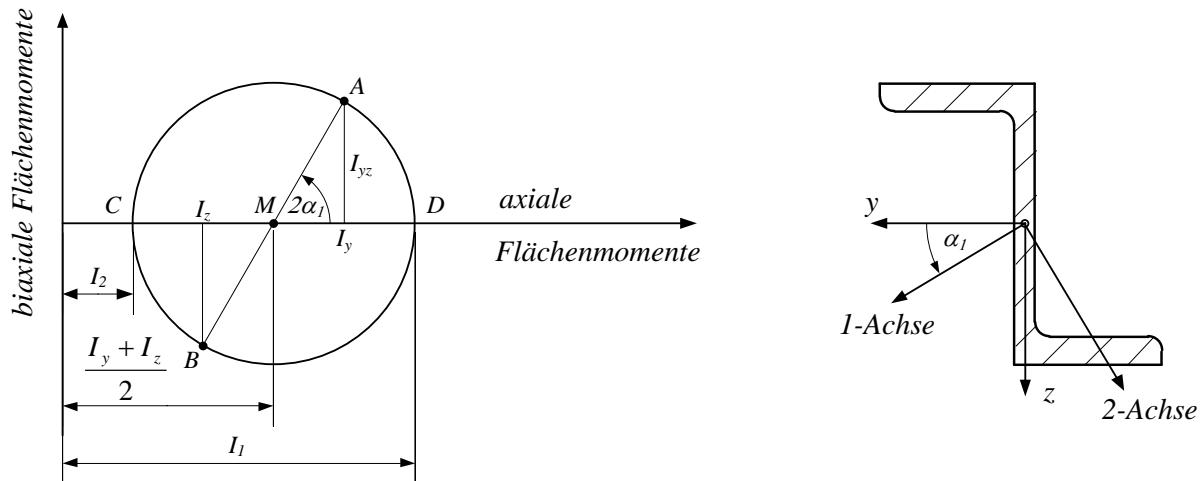


Bild 4-28 Flächenmomente am MOHRSchen Trägheitskreis

Als Konstruktionsregel gilt, dass das biaxiale Flächenmoment I_{yz} vorzeichengerecht über I_y abgetragen wird; das entspricht dem Punkt A. Die Wertepaare I_z und $-I_{yz}$ werden durch den Punkt B dargestellt. Sie liegen um 180° versetzt gegenüber, die entsprechenden y- und z-Achsen im Querschnitt stehen senkrecht aufeinander. Der Mittelpunkt M des Kreises liegt im Mittelpunkt von I_y und I_z . Der Radius entspricht der Wurzel aus obiger Formel. Die Schnittpunkte des Kreises mit der Abszisse sind die maximalen und minimalen Flächenmomente I_1 (Punkt D) und I_2 (Punkt C).

4.4.2 Spannungsberechnung

Sind die Hauptachsen und Hauptflächenmomente eines Querschnitts bekannt, so reduziert sich die Spannungsberechnung auf ein Problem mit gerader Biegung um die beiden Hauptachsen. Das Biegemoment wird analog der Koordinatentransformation umgerechnet.

$$M_1 = M_y \cdot \cos \alpha_1 + M_z \cdot \sin \alpha_1$$

$$M_2 = M_z \cdot \cos \alpha_1 - M_y \cdot \sin \alpha_1$$

Im Koordinatensystem der Hauptachsen können die Koordinaten η und ζ berechnet werden, für die die Spannungen zu ermitteln sind.

$$\eta = y \cdot \cos \alpha_1 + z \cdot \sin \alpha_1$$

$$\zeta = z \cdot \cos \alpha_1 - y \cdot \sin \alpha_1$$

Im η - ζ System gilt die Grundgleichung der Biegung

$$\boxed{\sigma = \frac{M_1}{I_1} \cdot \zeta - \frac{M_2}{I_2} \cdot \eta} \quad (4-13)$$

Die Richtung der neutralen Faser erhält man, indem man die Spannungsgleichung gleich Null setzt.

$$\tan \beta = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{M_2 \cdot I_1}{M_1 \cdot I_2}$$

Der Winkel β wird von der Hauptachse 1 im positiven Sinn bis zur neutralen Faser gemessen.

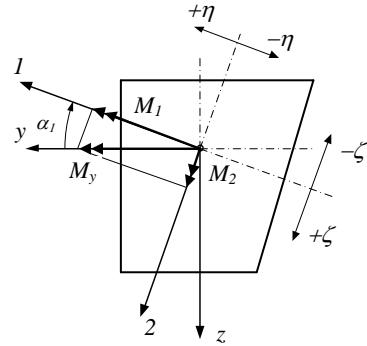


Bild 4-29 Zerlegung Biegemoment

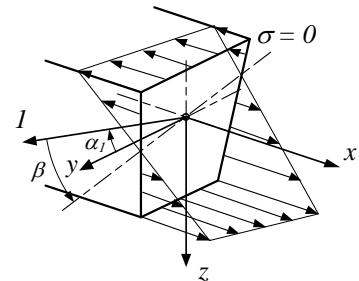
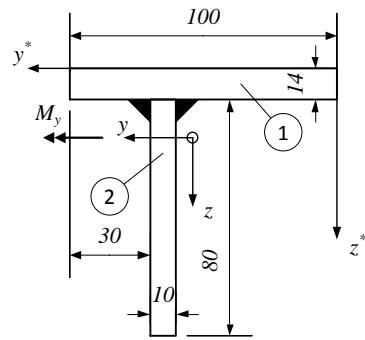


Bild 4-30 Spannungsverteilung

Beispiel

Der zusammengeschweißte Träger wird durch ein Biegemoment $M_y = 2000 \text{ Nm}$ belastet. Zu bestimmen sind die maximalen Spannungen in den Eckpunkten.

Zunächst werden der Schwerpunkt und die Flächenmomente im y-z Koordinatensystem berechnet. Dazu werden die beiden Teilflächen nummeriert und deren Abstände und Flächen mit den Hilfskoordinaten y^* und z^* tabellarisch erfasst.



i	z^*	y^*	A	z^*A	y^*A	z	z^2A	I_{y0}	y	y^2A	I_{z0}	yzA
1	7	50	1400	9800	70000	-17.1	408939	22867	-5.5	41653	1166667	130512
2	54	65	800	43200	52000	29.9	715643	426667	9.5	72893	6667	228397
$I+2$			2200	53000	122000		1124582	449533		114545	1173333	358909

$$z_s = \frac{\sum z^* \cdot A}{\sum A} = \frac{53000}{2200} = 24,1 \text{ mm} \quad z = z^* - z_s$$

$$y_s = \frac{\sum y^* \cdot A}{\sum A} = \frac{122000}{2200} = 55,5 \text{ mm} \quad y = y^* - y_s$$

$$I_y = \sum I_{y0} + \sum z^2 \cdot A = 449533 + 1124582 = 157,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \sum I_{z0} + \sum y^2 \cdot A = 1173333 + 114545 = 128,8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = -\sum y \cdot z \cdot A = -35,89 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Die beiden Hauptflächenmomente

$$I_{1,2} = \frac{157,4 \cdot 10^4 + 128,8 \cdot 10^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{157,4 \cdot 10^4 - 128,8 \cdot 10^4}{2}\right)^2 + (-35,89 \cdot 10^4)^2}$$

$$I_1 = 181,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = 104,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Die Richtung der 1. Hauptachse

$$\tan \alpha_1 = \frac{-35,89 \cdot 10^4}{181,7 \cdot 10^4 - 128,8 \cdot 10^4} \Rightarrow \alpha_1 = -34,1^\circ$$

Das Biegemoment muss ins η - ζ System transformiert werden

$$M_1 = 2000 \cdot 10^3 \cdot \cos \alpha_1 = 1656 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

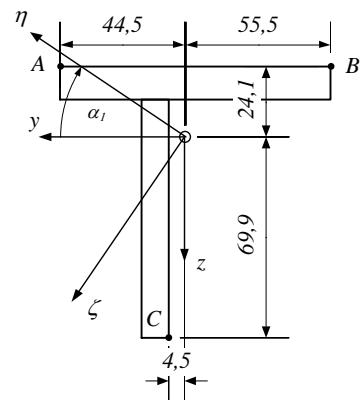
$$M_2 = -2000 \cdot 10^3 \cdot \sin \alpha_1 = 1122 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

Für die 3 Eckpunkte werden die y und z Koordinaten ebenfalls ins η - ζ System transformiert

	y	z	η	ζ	σ
A	44.5	-24.1	50.4	5.0	-49.5
B	-55.5	-24.1	-32.4	-51.1	-11.7
C	4.5	69.9	-35.5	60.4	93.1

Mit Hilfe der Grundgleichung der Biegung können die Spannungen berechnet werden, z.B. für den Punkt C

$$\sigma = \frac{M_1}{I_1} \cdot \zeta - \frac{M_2}{I_2} \cdot \eta = \frac{1656 \cdot 10^3}{181,7 \cdot 10^4} \cdot 60,4 - \frac{1122 \cdot 10^3}{104,5 \cdot 10^4} \cdot (-35,5) = 93,1 \text{ N/mm}^2$$



5 Schub

Werden Bauteile durch Querkräfte belastet, treten in den Querschnitten Schubspannungen auf. Bei langen Bauteilen – im Vergleich zur Höhe – kann die Wirkung dieser Schubspannungen meistens vernachlässigt werden, da die Biegebeanspruchung wesentlich grösser ist. Sind die Bauteile hingegen kurz, werden die Schubspannungen dominant und man spricht von Abscheren oder Scherung. Zur Abgrenzung lang / kurz siehe Kapitel 9.4.

5.1 Scherung

Von einer Beanspruchung auf Scherung spricht man, wenn an einem Bauteil ein Kräftepaar mit kleinem Abstand der Kräfte wirkt. Beispiele hierfür sind Bolzen, Stifte, Nieten, Klebe- oder Schweißverbindungen und das Stanzen von Blechen.

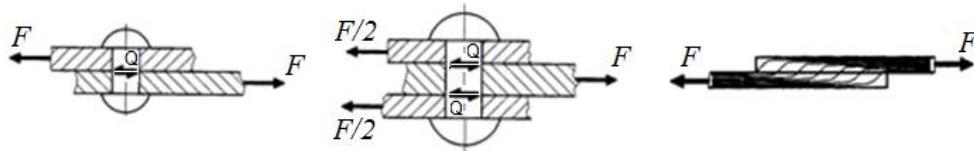


Bild 5-1 Abscheren bei Nieten und Klebeverbindungen

Obwohl die Schubspannungen nicht konstant über dem Querschnitt A verteilt sind, wird mit einer *mittleren Schubspannung*, der sogenannten *Abscherspannung* gerechnet.

$$\tau_a = \frac{Q}{A} \quad (5-1)$$

Diese Vereinfachung ist sinnvoll, da die zulässigen Abscherspannungen an Bauteilen ermittelt werden. Zulässige Werte findet man z.B. in der DIN 15018 [10].

Die Querkraft im gefährdeten Querschnitt ist abhängig von der Art der Verbindung.

$$Q = F \quad \text{für einschnittige, bzw.} \quad Q = \frac{F}{2} \quad \text{für zweischnittige Verbindungen}$$

Beispiel

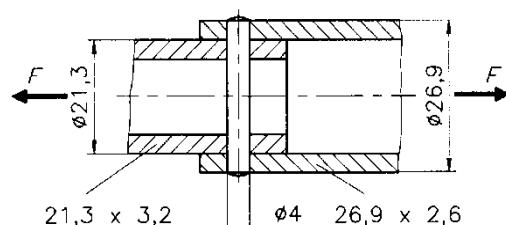
Eine Rohrverbindung ist mit einem Scherstift realisiert. Welche Kraft kann übertragen werden?

Abscheren: $\tau_{a,zul} = 112 \text{ N/mm}^2$

Lochleibung: $\sigma_{l,zul} = 280 \text{ N/mm}^2$

Querkraft im Scherstift: $Q = F/2$

$$F = 2 \cdot A \cdot \tau_a = 2 \cdot 12,57 \cdot 112 = 2814 \text{ N}$$



Kontrolle Lochleibung

$$\sigma_l = \frac{F/2}{d \cdot l} = \frac{2814/2}{4 \cdot 2,6} = 135,3 \leq 280 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow F = \underline{\underline{2814 \text{ N}}}$$

Das beschriebene einfache Verfahren eignet sich vor allem für statische Belastungen, wobei auf verlässliche zulässige Spannungen abgestützt wird. Für im Maschinenbau typische Bolzenverbindungen - auch unter dynamischer Belastung - sind genauere Verfahren üblich, siehe dazu Kapitel 5.2, sowie [4] Kapitel 9.2 Bolzen.

5.2 Schub bei Querkraftbiegung

Ein auf Biegung beanspruchtes Bauteil ist meistens ebenfalls durch Querkräfte belastet, man spricht dann von *Querkraftbiegung*. Bei - im Vergleich zu ihrer Höhe - langen Bauteilen sind die Schubspannungen infolge Querkraft gegenüber den Biegespannungen vernachlässigbar. Bei kurzen Trägern, bei Querschnitten mit relativ dünnen Stegen oder bei Verbundquerschnitten mit auf Schub beanspruchten Verbindungsmittern kann diese Vereinfachung nicht mehr gemacht werden. Im Folgenden sollen die Schubspannungen in einem auf Querkraft beanspruchten Querschnitt berechnet werden.

Der einseitig eingespannte Balken ist auf Querkraftbiegung belastet. Ein herausgeschnittenes Balkenstück erfährt infolge Querkraft im Querschnitt A Schubspannungen τ in vertikaler Richtung. Wegen dem Prinzip der zugeordneten Schubspannungen liegen die gleichen Schubspannungen auch in Längsschnitten vor, siehe Kapitel 2.4. Auf Ober- und Unterseite des Trägers verschwinden diese Schubspannungen und somit auch im Querschnitt A in unmittelbarer Nähe zur oberen und unteren Kante. Ein aus dem Innern des Balkenstücks herausgeschnittener Quader hingegen zeigt auf allen vier Seiten betragsmäßig gleiche Schubspannungen. Die Schubspannungen können also nicht konstant über den Querschnitt A verteilt sein.

Zur Bestimmung der Schubspannungsverteilung wird an einem zweifach abgestützten Balken ein Balkenstück der Länge dx herausgegriffen. Am linken Ufer wirke das Biegemoment M und am rechten Ufer $M+dM$. Die Änderung des Biegemomentes über der Länge dx entspricht der Querkraft.

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

Von diesem Balkenstück wird in der Höhe z das untere Element der Fläche A^* abgeschnitten, wobei der Flächenmittelpunkt von A^* in der Höhe z_s^* liegt. Kräftegleichgewicht an diesem Element in x-Richtung

$$\sum F_x = \int_{A^*} \sigma_r \cdot dA - \int_{A^*} \sigma_l \cdot dA - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

Die Biegespannungen betragen

$$\sigma_r = \frac{M + dM}{I_y} \cdot z \quad \text{und} \quad \sigma_l = \frac{M}{I_y} \cdot z$$

Eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingung

$$\int_{A^*} \frac{dM}{I_y} \cdot z \cdot dA - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

I_y und dM hängen nur von x ab und können vor das Integral gestellt werden.

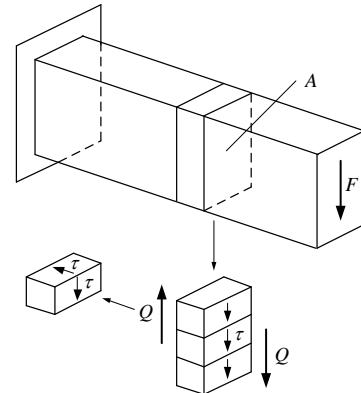


Bild 5-2 Schubspannungen bei Querkraft

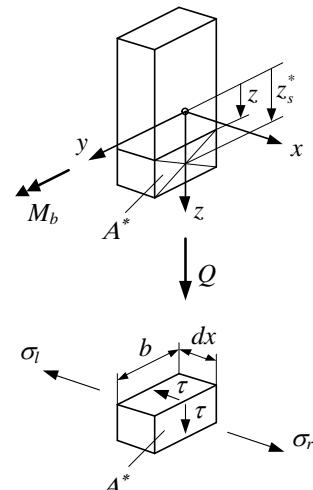
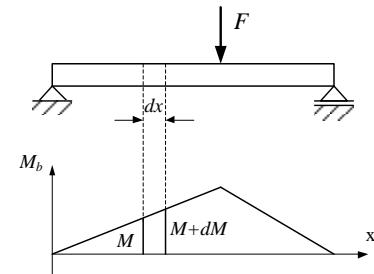


Bild 5-3 Zur Herleitung der Schubspannungen

Division durch dx und auflösen nach τ ergibt

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{I_y \cdot b} \cdot \int_{A^*} z \cdot dA$$

Das Integral ist das statische Moment S der Teilfläche A^* bezüglich der y-Achse. Es entspricht dem Produkt des Schwerpunktes der Teilfläche z_s^* mit der Teilfläche A^* . Zusammengefasst ergibt sich für die Schubspannungsverteilung infolge Querkraft über der Höhe z

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I_y \cdot b} \quad (5-2)$$

mit

$$S = \int_{A^*} z \cdot dA = z_s^* \cdot A^* \quad (5-3)$$

Manchmal ist es einfacher mit der Teilfläche A^{**} zur Berechnung von S oberhalb des Schnittes zu arbeiten. Da das statische Moment bezüglich des Schwerpunktes gleich Null sein muss sind die statischen Momente betragsmässig gleich, haben aber unterschiedliches Vorzeichen.

$$z_s^* \cdot A^* + z_s^{**} \cdot A^{**} = 0$$

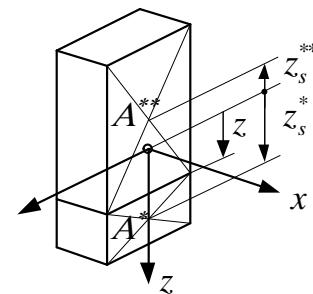


Bild 5-4 Statisches Moment

Die im Querschnitt wirkenden Schubspannungen sind auch in Längsschnitten vorhanden! Diese Längsschubspannungen lassen sich durch einen Versuch verifizieren. Ein aus zwei übereinanderliegenden Balken bestehender Träger wird auf Querkraftbiegung belastet. Sind die Balken lose aufeinander und haben glatte Oberflächen, so verschieben sie sich gegeneinander. Werden die Balken untereinander verbunden, z.B. durch Kleben, Schweißen oder Nieten, so verbiegt sich der Träger als Ganzes. An den Verbindungsstellen wirken also Schubspannungen, die die Längsverschiebung verhindern.

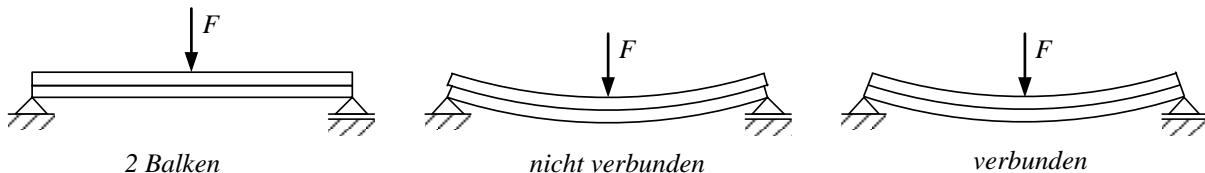


Bild 5-5 Zur Anschauung der Längsschubspannungen

Beispiel

Für den Rechteckquerschnitt der Höhe h und Breite b soll die Schubspannungsverteilung bestimmt werden.

$$S(z) = z_s^* \cdot A^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + z \right) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

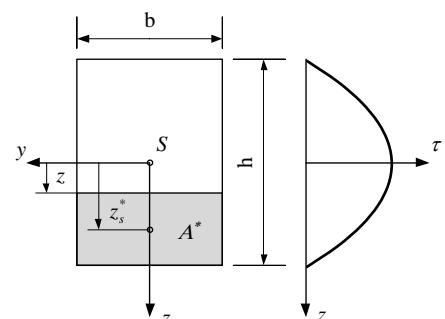
$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\tau(z) = \frac{Q \cdot S}{I_y \cdot b} = \frac{6 \cdot Q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Die Schubspannung ist parabolisch über z verteilt und verschwindet an Ober- und Unterkante; der maximale Wert wird für $z=0$ erreicht.

$$\tau_{\max} = \tau(z=0) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \bar{\tau} \quad \text{mit} \quad \bar{\tau} = \frac{Q}{A}$$

Die maximale Schubspannung ist also 1,5 mal grösser als die mittlere Schubspannung.



Mit analogen Überlegungen lässt sich für kreisförmige Querschnitte die *maximale Schubspannung* τ_{\max} im Verhältnis zur *mittleren Schubspannung* $\bar{\tau}$ bestimmen. Die maximale Schubspannung tritt in Höhe der neutralen Faser auf, also genau dort wo die Biegespannung verschwindet. Für im Maschinenbau übliche Bolzenverbindungen werden neben den Biegespannungen diese maximalen Schubspannungen zur Dimensionierung herangezogen, siehe [4] Kapitel 9.2 Bolzen. Bei Verwendung von Hohlbolzen, z.B. Kolbenbolzen kann die Schubspannung entsprechend hoch werden.

Dünnwandige Querschnitte

Die Schubspannungen sind über der Wandstärke nahezu konstant und sie verlaufen parallel zur Wand. Letzteres wird klar, wenn wir uns ein Element aus dem Flansch eines I-Trägers herausschneiden, siehe Bild 5-6. Die Längsspannungen infolge Biegung sind auf Vorder- und Rückseite unterschiedlich, deshalb muss eine Längsschubspannung zur Erhaltung des Kräftegleichgewichts wirken. Wegen dem Prinzip der zugeordneten Schubspannung wirkt auch eine gleichgrosse Schubspannung parallel zur Wand.

Bei der Anwendung der Formel (5.2) ist also für die Breite b die Wandstärke t einzusetzen:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I_y \cdot t} \quad (5-4)$$

Damit ergibt sich die für den I-Träger typische Schubspannungsverteilung. Im Flansch nimmt sie von aussen linear zu, im Steg ist sie parabolisch mit dem Maximum im Schwerpunkt.

Die Darstellung der Schubspannungen im dünnwandigen Querschnitt erinnert an einen Fluss in einem Kanal, siehe Bild 5-8.

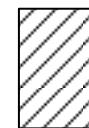
Tatsächlich wird mit dem Begriff *Schubfluss* q

$$q = \tau \cdot t \quad [N/mm]$$

ein in Analogie zur Strömungslehre anschaulicher Begriff eingeführt. Damit kann (5.4) auch wie folgt geschrieben werden:

$$q = \frac{Q \cdot S}{I_y}$$

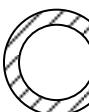
Der Schubfluss fliesst von der Seite positiver Normalspannung durch die neutrale Faser in Richtung negativer Normalspannungen.



$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \bar{\tau}$$



$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \bar{\tau}$$



$$\tau_{\max} = 2 \cdot \bar{\tau}$$

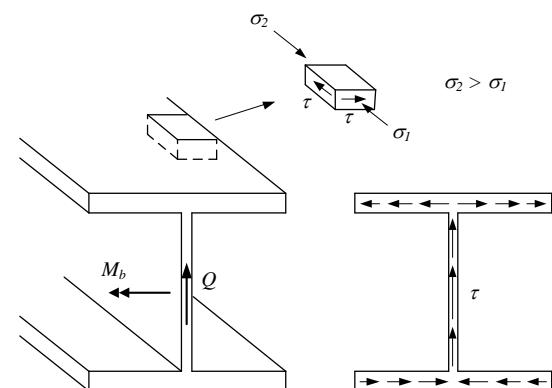


Bild 5-6 Zur Richtung der Schubspannungen

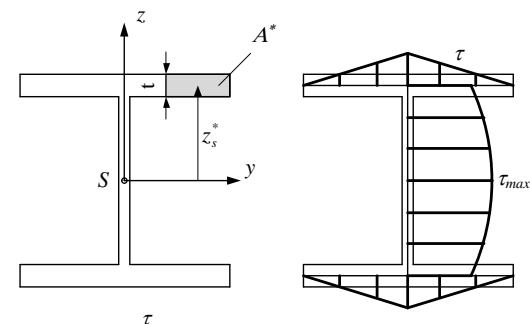


Bild 5-7 Schubspannungsverteilung im I-Träger

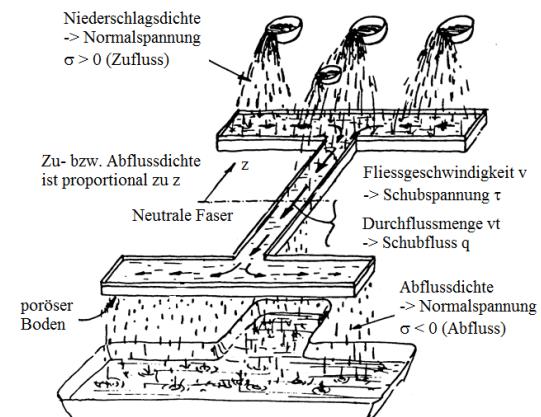


Bild 5-8 Schubfluss und Wasseranalogie

Der Schubmittelpunkt

Für einfach symmetrische Querschnitte können die Schubspannungen analog berechnet werden. Am Beispiel des U-Profiles zeigt sich, dass die aus den Schubspannungen resultierenden Kräfte in den drei Flächen oberer Flansch, Steg und unterer Flansch ein resultierendes Moment bezüglich des Schwerpunktes S ergeben. Ein durch eine Querkraft im Schwerpunkt belastetes U-Profil verdreht sich deshalb.

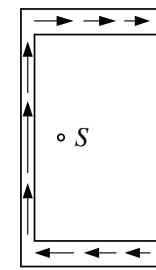


Bild 5-9 Schubspannungen

Lässt man den Angriffspunkt der Querkraft von links nach rechts wandern, so zeigt sich, dass für einen ausgezeichneten Punkt der Querschnitt nicht verdreht, also torsionsfrei ist. Diesen Punkt nennt man den *Schubmittelpunkt M*.

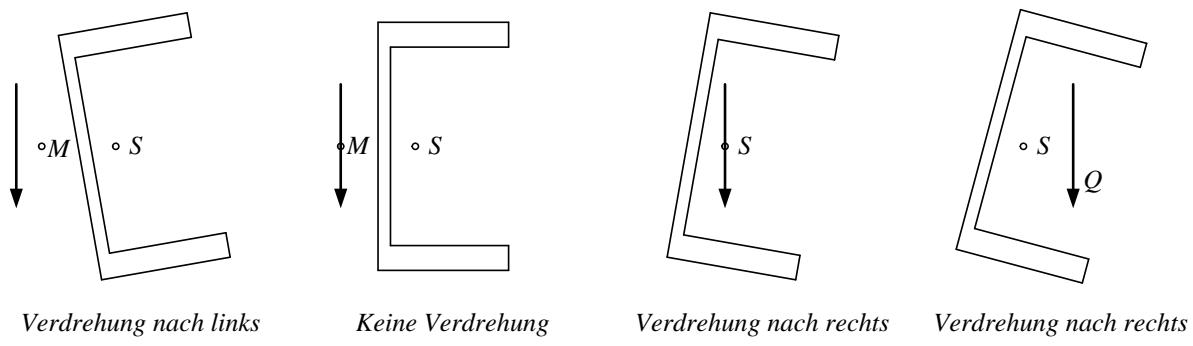


Bild 5-10 Zur Lage des Schubmittelpunktes

Die Lage des Schubmittelpunktes M ergibt sich über ein Momentengleichgewicht der im Schubmittelpunkt angreifenden Querkraft und den aus den Schubspannungen resultierenden Kräften. Für Standard U-Profile kann die Lage des Schubmittelpunkts [4] TB 1-10, für andere dünnwandige Querschnitte der Tabelle B-4 im Anhang B entnommen werden.

Will man diese Verdrehung vermeiden, müssen die Lasten konstruktiv im Schubmittelpunkt eingeleitet werden.

Dies kann beispielsweise durch eine angeschweißte Rippe geschehen, siehe Bild 5-11.

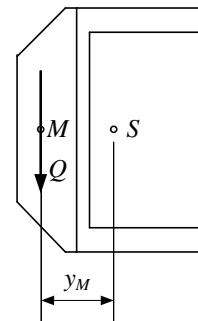


Bild 5-11 Kraft im Schubmittelpunkt

Ist dies nicht möglich, so sind die zusätzlichen Schubspannungen infolge Torsion zu berücksichtigen. Diese können für dünnwandige offene Profile sehr gross werden, siehe Kapitel 6.2. Das massgebende Torsionsmoment ist mit dem Abstand der Kraftwirkungslinie bezüglich des Schubmittelpunktes zu bestimmen.

Im Beispiel für eine Krafteinleitung in der Mitte des Steges wird somit das wirkende Torsionsmoment

$$M_t = Q \cdot \left(y_M - e_y + \frac{t}{2} \right)$$

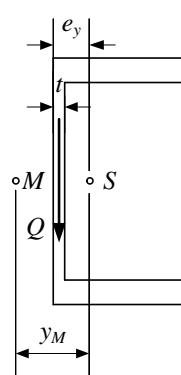


Bild 5-12 Kraft im Steg

Verbundquerschnitte

Bei Biegeträgern mit aus mehreren Teilen zusammengesetzten Querschnitten sind die Verbindungsstellen (Kleben, Schweißen, Nieten) durch Schubkräfte belastet. Zur Dimensionierung der Verbindungsstellen dient ebenfalls die Formel (5.2). An Stelle der Breite b wird die Schweissnahtdicke (a -Mass) eingesetzt.

Beispiel

Auf einen I-Träger IPB 220 ist eine Kranschiene 40x50mm angeschweisst. Es wirkt eine Querkraft $Q = 350 \text{ kN}$.

Wie gross muss die Kehlnaht gewählt werden, wenn die zulässige Schubspannung 72 N/mm^2 beträgt.

Zunächst müssen der Schwerpunkt und das gesamte axiale Flächenmoment bestimmt werden.

i	z^*	A	z^*A	z	z^2A	I_{y0}
1	0	9100	0	23.4	4992777	80900000
2	-130	2000	-260000	-106.6	22717133	266667
$1+2$		11100	-260000		27709910	81166667

$$z_s = \frac{\sum z^* \cdot A}{\sum A} = \frac{-260000}{11100} = -23,4 \text{ mm} \quad z = z^* - z_s$$

$$I_y = \sum I_{y0} + \sum z^2 \cdot A = 8117 \cdot 10^4 + 2771 \cdot 10^4 = 10890 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

An der Stelle der Schweissnähte wird geschnitten. Das statische Moment der abgetrennten Fläche 2 ist

$$S = 106,6 \cdot 2000 = 213200 \text{ mm}^3$$

Mit dem a -Mass pro Kehlnaht ergibt sich die Schubspannung

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I_y \cdot 2a} \Rightarrow a \geq \frac{Q \cdot S}{I_y \cdot 2 \cdot \tau} = \frac{350000 \cdot 213200}{10890 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 72} = 4,8 \text{ mm}$$

Die Doppel-Kehlnaht muss mit 5mm ausgeführt werden.

Für Verbindungen mit einzelnen Elementen wie Nieten, Schrauben oder Nägeln müssen die diskreten Elemente den Schubfluss übertragen und werden deshalb auf Scherung beansprucht.

Der wirksame Schubfluss in der Trennfläche ist

$$q = \frac{Q \cdot S}{I_y}$$

Ein I-Träger aus Holz sei aus drei Brettern zusammengenagelt. Der Abstand der Nägel in Längsrichtung sei s . Ein Verbindungselement muss die Kraft F übertragen, welche auf der Länge s als Schubfluss q wirksam ist.

$$F = q \cdot s$$

Das statische Moment der abgeschnittenen Fläche

$$S = z_s^* \cdot A^*$$

Damit kann je nach Aufgabenstellung der erforderliche Abstand s , die Scherfestigkeit F_{zul} der Nägel (Nieten, Schrauben) oder die zulässige maximale Querkraft bestimmt werden.

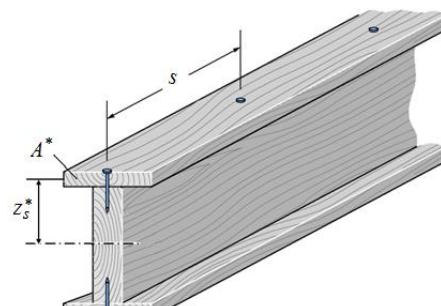
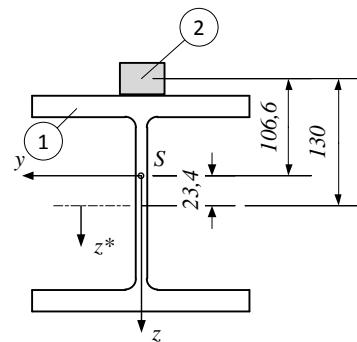
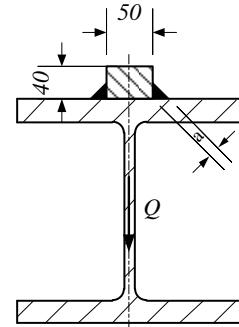


Bild 5-13 Auf Schub belastete Verbindungselemente

6 Torsion

Ein in Richtung eines Stabes wirkendes Moment verursacht eine Verdrehung desselben und wird Torsionsbeanspruchung genannt. Das Torsionsmoment M_t als Schnittgrösse unterliegt den gleichen Vorzeichenkonventionen wie die Normalkraft oder das Biegemoment.

Ein durch ein Kräftepaar belasteter Stab (Bild 6-1) wird in seinem Querschnitt auf Torsion beansprucht. Reine Torsion kommt in der Praxis eher selten vor, doch in Kombination mit Querkraftbiegung trifft man sie bei Getriebewellen (Bild 6-2) oder zusammen mit Zug bei Schrauben an. Im Folgenden werden die Spannungen und Verformungen infolge reiner Torsion behandelt, die Überlagerung mit anderen Beanspruchungen behandelt Kapitel 9.3.

Bei der Untersuchung torsionsbeanspruchter Bauteile ist grundsätzlich zwischen *kreisförmigen* und *nicht-kreisförmigen* Querschnitten zu unterscheiden. Während kreisförmige Querschnitte sich unter Torsion „nur“ verdrehen, können bei beliebigen Querschnitten zusätzliche Längsverschiebungen, sogenannte Verwölbungen auftreten.

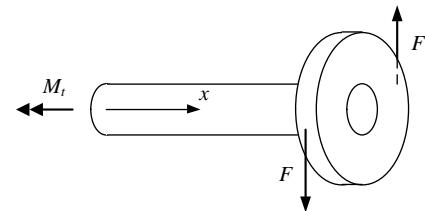


Bild 6-1 reine Torsion

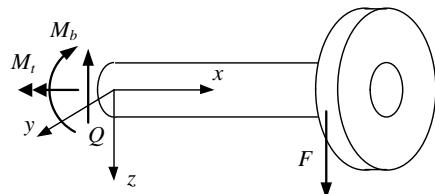
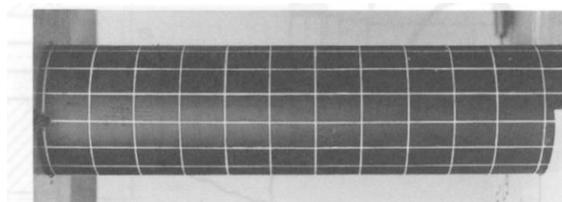


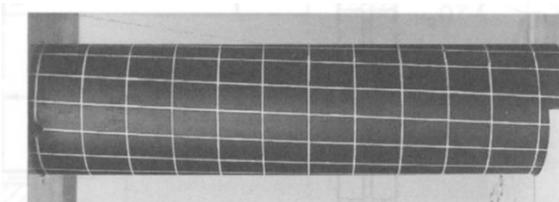
Bild 6-2 Torsion und Querkraftbiegung

6.1 Kreisförmige Querschnitte

Die Verformung eines auf Torsion beanspruchten Stabes mit kreisförmigem Querschnitt zeigt folgendes Verhalten. Aus den geraden Mantellinien parallel zur Stabachse werden Schraubenlinien. Die Umfangsverschiebung ist proportional zur Abstand von der Einspannung.



undeformiert



deformiert

Bild 6-3 Verformung eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitt

Die Umfangslinien und damit die ganzen Querschnitte verdrehen sich wie starre Scheiben. Es treten keine Verschiebungen in Stabrichtung auf, die Querschnitte bleiben eben. Eine Verschiebung in Stabrichtung tritt nur bei nicht kreisförmigen Querschnitten auf, man nennt sie Verwölbung.

Ein auf der Oberfläche gezeichnetes rechteckiges Element erfährt eine Schubverformung (Verscherung), die nur aus einer Winkeländerung γ des ursprünglich rechten Winkels besteht. Es liegen demnach Schubspannungen vor und nach Kapitel 2.4 gilt das Hookesche Gesetz für den ebenen Spannungszustand für Schubspannungen.

$$\tau = G \cdot \gamma$$

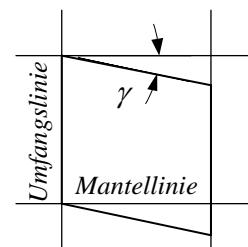


Bild 6-4 Schubverformung

Ein Torsionsmoment M_t versucht benachbarte Querschnitte um einen kleinen Winkel zu verdrehen und verursacht dabei im Querschnitt Schubspannungen. Zur Ermittlung dieser Spannungen sowie des gesamten Drehwinkels φ eines Stabes der Länge l betrachten wir ein Stabelement der Länge dx .

Sowohl Scherwinkel γ als auch Drehwinkel $d\varphi$ sind sehr klein, es gilt demnach

$$\gamma \cdot dx = R \cdot d\varphi \rightarrow \gamma = \frac{d\varphi}{dx} \cdot R$$

Mit φ' für den *Drehwinkel pro Länge*

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow \gamma = \varphi' \cdot R$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz folgt

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \varphi' \cdot R$$

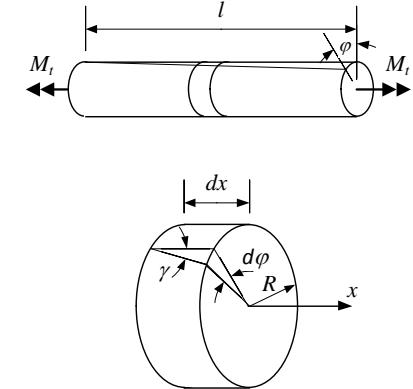


Bild 6-5 Verformung eines Stabelementes

Es handelt sich hier um die Schubspannung auf der Oberfläche des Stabes (*Radius* R). Diese Beziehung gilt aber auch für jeden beliebigen *Radius* r .

$$\tau(r) = G \cdot \varphi' \cdot r$$

Die Schubspannung ist auf der Achse Null und nimmt linear mit dem Radius r zu. Der Maximalwert befindet sich auf der Oberfläche im maximalen Abstand R . Das resultierende Moment aus allen Schubspannungen muss gleich der Schnittgrösse M_t sein. An einer dünnen Ringfläche dA wirkt die Kraft $dF = \tau(r) \cdot dA$, somit das resultierende Drehmoment

$$M_t = \int_0^R r \cdot dF = \int_0^R r \cdot \tau(r) \cdot dA = \int_0^R G \cdot \varphi' \cdot r^2 \cdot dA = G \cdot \varphi' \cdot \int_0^R r^2 \cdot dA$$

Das Integral ist das polare Flächenmoment I_p , ein Mass für Torsionssteifigkeit des Querschnitts.

$$I_p = \int r^2 \cdot dA$$

Die Bezeichnung polares Flächenmoment I_p bezieht sich auf das obige Integral und gilt nur für kreisförmige Querschnitte. Mit Rücksicht auf einheitliche Bezeichnungen für beliebige Querschnittsformen wird auch der Begriff Torsionsflächenmoment I_t verwendet. Für den kreisförmigen Querschnitt gilt somit $I_t = I_p$. Für den nicht kreisförmigen Querschnitt hat das Integral von I_p keine Bedeutung, die Berechnung von I_t erfolgt auf andere Weise. Angaben für übliche Querschnittsformen enthält Tabelle B-5.

Damit ergibt sich der Drehwinkel pro Länge φ' , bzw. der absolute Drehwinkel φ

$$\varphi' = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \int_0^l \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot dx$$

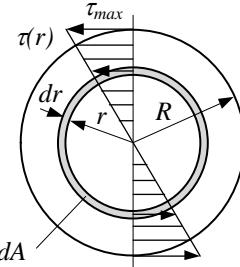


Bild 6-6 Spannungsverteilung

In den meisten Anwendungen ist das Torsionsmoment konstant, mindestens abschnittsweise. In diesem Fall wird der absolute Drehwinkel in [rad] in einem Abschnitt der Länge l

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \quad (6-1)$$

Unter Verwendung von $\tau(r) = G \cdot \varphi' \cdot r$ folgt die lineare Schubspannungsverteilung mit der maximalen Schubspannung am Rand (Radius R). Sie gilt nur beim Kreis (I_p).

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \quad \text{mit} \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R$$

Unter Verwendung des Widerstandsmomentes gegen Torsion erhält man die allgemein gültige Grundgleichung der Torsion

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (6-2) \quad \text{für den Kreis-Querschnitt: } W_t = W_p = \frac{I_p}{R}$$

Aufgrund der linearen Spannungsverteilung ist das Material in Achsen Nähe schlecht genutzt. Ist ein torsionssteifes und gleichzeitig leichtes Bauteil gefragt, so ist das kreisförmige Rohr der ideale Querschnitt.

Analog wie bei der Biegung können auch die polaren Flächenmomente – nicht aber die Widerstandsmomente – addiert und subtrahiert werden. Für das kreisförmige Rohr ergibt sich, vergleiche Tabelle B-5.

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_a^4}{32} - \frac{\pi \cdot d_i^4}{32} = \frac{\pi \cdot (d_a^4 - d_i^4)}{32}$$

Zur Dimensionierung von Querschnitten folgt aus (6-2)

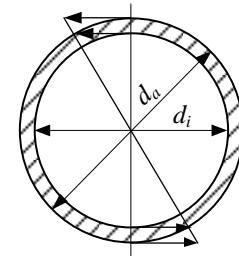


Bild 6-7 kreisförmiges Rohr

$$W_{t,erf} \geq \frac{M_t}{\tau_{zul}} \quad (6-3)$$

Zulässige Schubspannungen für übliche Werkstoffe finden sich in [4], TB 1-1 oder durch Umrechnung aus den Zugfestigkeitswerten gemäß TB 3-2, siehe dazu auch Kapitel 10.

Die bisher berechneten Schubspannungen liegen in Flächen, die senkrecht zur Achse verlaufen. Wegen des Prinzips der zugeordneten Schubspannungen wirken die gleichen Spannungen aber auch in Flächen parallel zur Stabachse. Diese Längsschubspannungen spielen bei Bauteilen mit unterschiedlichen Festigkeiten in Quer- und Längsrichtung eine entscheidende Rolle, beispielsweise bei längs geschweißten Rohren oder bei orthotropen Materialien (CFK, Holz) bei denen die geringe Schubfestigkeit in Längsrichtung zum Versagen des Verbundes führen kann.

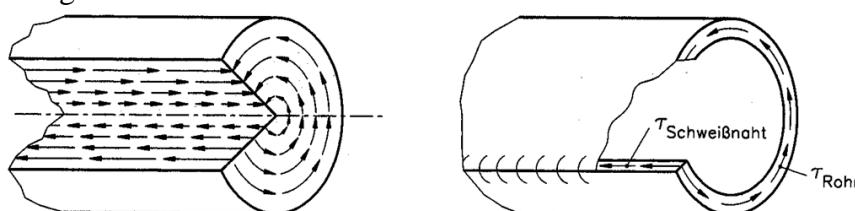


Bild 6-8 Zugeordnete Schubspannungen in Längsrichtung

Bei nicht rotationssymmetrischen Profilen können diese Längsschubspannungen zu einer Längsverschiebung und damit zu einer Verwölbung der Querschnitte führen.

Beispiel

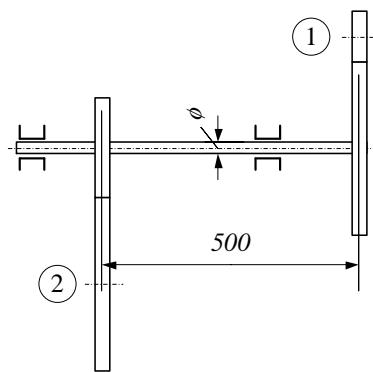
Eine Zwischenwelle überträgt eine Leistung von 40 kW von Welle 1 auf Welle 2. Die Drehzahl beträgt 200 U/min. Die zulässige Schubspannung ist mit 80 N/mm^2 , die zulässige Verdrehung mit 1° vorgegeben.

Zu bestimmen ist der Durchmesser der Welle mit Vollquerschnitt auf ganze mm gerundet.

Das übertragene Torsionsmoment

$$P = M_t \cdot \omega \Rightarrow M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{40000}{20,944} = 1909,9 \text{ Nm}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{200}{60} = 20,944 \text{ rad/s}$$



Festigkeitsbedingung:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{zul} \Rightarrow W_t \geq \frac{M_t}{\tau_{zul}} = \frac{1909,9 \cdot 10^3}{80} = 23873 \text{ mm}^3$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_t}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 23873}{\pi}} = 49,5 \text{ mm}$$

Steifigkeitsbedingung:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \leq \varphi_{zul} \Rightarrow I_t \geq \frac{M_t \cdot l}{G \cdot \varphi_{zul}} = \frac{1909,9 \cdot 10^3 \cdot 500}{80769 \cdot 17,45 \cdot 10^{-3}} = 677550 \text{ mm}^4$$

$$I_t = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \Rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_t}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 677550}{\pi}} = 51,3 \text{ mm}$$

Der erforderliche Durchmesser beträgt 52mm.

Formänderungsarbeit

Beim Torsionsstab besteht zwischen Drehmoment M_t und Drehwinkel φ eine Proportionalität. Die äussere Arbeit zur Verdrehung ist gleich der als Federenergie gespeicherten inneren Arbeit.

Analog zum Zugstab, wo die Verlängerung proportional zur Kraft zunimmt, kann die äussere Arbeit hier als Fläche unter der Moment-Drehwinkel-Kurve berechnet werden.

$$W = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \varphi$$

Der Drehwinkel wird nach (6-1) ersetzt und es folgt die innere Arbeit am Torsionsstab mit $M_t = \text{konstant}$

$$W = \frac{M_t^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_t} \quad (6-4)$$

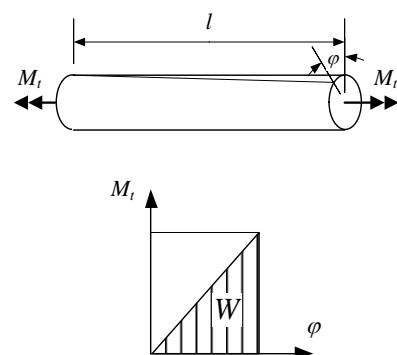


Bild 6-9 Formänderungsarbeit bei Torsion

Für den in der Praxis eher selten vorkommenden Fall nicht konstanter Torsionsmomente muss über die Länge integriert werden.

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M_t^2}{G \cdot I_t} \cdot dx$$

6.2 Beliebige Vollquerschnitte

Die Verformungen eines Stabes mit beliebigem Querschnitt unterscheiden sich grundsätzlich von denjenigen eines Kreiszylinders. Während beim Kreiszylinder die Querschnitte eben bleiben, treten bei beliebigen Querschnitten Längsverschiebungen (Verwölbungen) auf. Im Beispiel eines quaderförmigen Profils sind diese zusätzlichen Verformungen relativ gering, im Fall eines geschlitzten Rohres (Bild 6-11) können sie aber sehr gross werden.

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass bei kreisförmigen Querschnitten der Scherwinkel auf der Oberfläche konstant ist, während beim beliebigen Querschnitt auf der Oberfläche variable Scherwinkel und damit auch variable Schubspannungen auftreten.

Werden die Verwölbungen durch konstruktive Massnahmen behindert, z.B. durch das Anschweissen eines Endes des Profils, so entstehen dort zusätzliche Längsspannungen. Die Berechnung muss dann nach der Theorie der *Wölkrafttorsion* erfolgen. Sie kann sehr aufwendig sein und wird hier nicht behandelt.

Im Übrigen gibt es - nebst den kreisförmigen - noch andere wölfreie Querschnitte, nämlich zweiflächige Profile wie Winkel oder T-Profile und sogenannte Kreistangentenprofile mit konstanter Wandstärke.



Bild 6-12 zweiflächige Profile

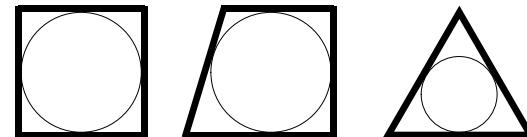
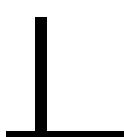


Bild 6-13 Kreistangentenprofile

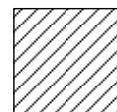
Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sich die Enden der betrachteten Stäbe frei verwölben können *oder* dass es sich um wölfreie Querschnitte handelt. Unter diesen Voraussetzungen können der Drehwinkel und die maximale Schubspannung im torsionsbelasteten Querschnitt mit den beiden bekannten Formeln (6-1) und (6-2) berechnet werden.

Formal wird das polare Flächenflächenmoment durch das Torsionsflächenmoment ersetzt. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass für den nicht kreisförmigen Querschnitt das polare Flächenmoment I_p keine Bedeutung hat. Material, das weit aussen von der Drehachse platziert ist, trägt nicht zwingend zur Torsionssteifigkeit bei und die maximale Schubspannung tritt auch nicht im maximalen Abstand auf, siehe untenstehendes Beispiel. Damit reduziert sich das Torsionsproblem auf die Frage, wie die Werte für I_t bzw. W_t ermittelt werden.

Mathematisch lässt sich das Problem mit Hilfe einer Torsionsfunktion Ψ lösen, welche die Potentialgleichung, eine partielle Differentialgleichung erfüllt. Allerdings lassen sich damit nur wenige, einfache Querschnittsformen berechnen; für komplizierte Formen sind nur numerische Lösungen möglich. Die Resultate solcher Berechnungen für die Torsionsflächenmomente sind in Tabellen für die gängigen Querschnitte zusammengestellt, siehe Tabelle B-5.

Beispiel

Für die zwei rechteckigen Vollquerschnitte gleicher Querschnittsfläche sollen Ort und Betrag der maximalen Schubspannung sowie die Torsionssteifigkeiten verglichen werden.



10 x 10



20 x 5

Die erwähnte Differentialgleichung gilt auch für andere physikalische Vorgänge, insbesondere in der Strömungslehre. Daraus lassen sich zwei Analogien ableiten, die auf anschauliche Art die Verhältnisse in einem torsionsbelasteten Querschnitt abbilden.

Das Seifenhautgleichnis basiert auf der Tatsache, dass eine an einem Rand festgehaltene Seifenhaut, die von einer Seite unter Druck gesetzt wird, sich so deformiert, dass die Verschiebung der Differentialgleichung $\Psi(y,z)$ genügt. Der Rand der Öffnung entspricht dabei dem Rand des Profils, die Höhenlinien des Seifenhauthügels den Schubspannungslinien und das Volumen des Hügels dem Torsionsflächenmoment. Die maximale Schubspannung tritt dort auf, wo die Steigung des Hügels am grössten ist.

Die zweite Analogie, das Strömungsgleichnis geht davon aus, dass die Strömung einer in einem offenen Gefäß zirkulierenden Flüssigkeit durch die Potentialgleichung beschrieben wird. Die Strömungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkt entspricht dabei der Schubspannung.

Daraus lassen sich folgende Erkenntnisse ableiten, die für die konstruktive Gestaltung von Bedeutung sind.

Die maximale Spannung bei Rechtecken liegt in der Mitte der langen Seite. Herausragende Ecken sind praktisch spannungsfrei (Dreieck), einspringende Ecken oder Kerben hingegen zeigen maximale Schubspannungen (Welle mit Nut, I-Profil).

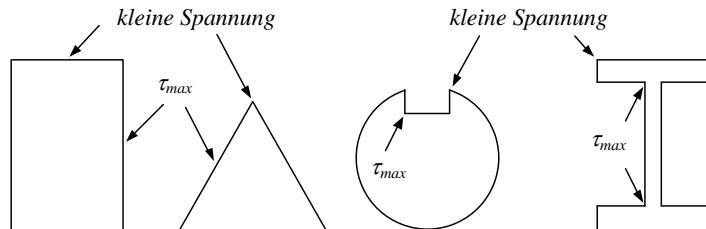


Bild 6-16 Ort maximaler Schubspannungen

Torsionsflächenmomente spezieller Wellenformen, z.B. Polygonwellen findet man in [4], TB 11-3. Zur Berechnung von Wellen und Nabenvorbindungen mittels Passfederverbindungen sind die Kerbfaktoren der Nuten ebenfalls in [4], TB 3-9 tabelliert. Bei der Konstruktion torsionsbelasteter Querschnitte, beispielweise I-, T-, L- oder Z-Profil ist auf grosszügige Ausrundungsradien zu achten.

Gedrungene Querschnitte sind gegenüber schlanken Querschnitten torsionssteifer. Für dünnwandige Querschnitte, die sich in Rechtecke aufteilen lassen, kann das Torsionsflächenmoment abgeschätzt werden, siehe auch Tabelle B-5.

$$I_t \cong \frac{1}{3} \cdot \sum h_i \cdot t_i^3$$

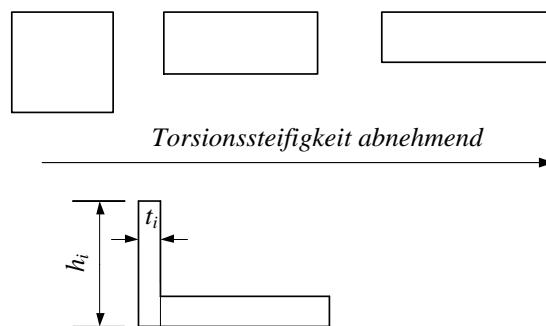
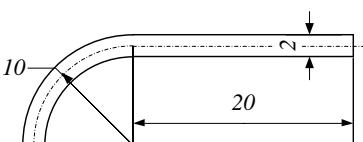


Bild 6-17 Torsionssteife und -weiche Querschnitte

Beispiel

Für das abgebildete Strangpressprofil sind I_t bzw. W_t zu bestimmen.

$$I_t \cong \frac{1}{3} \cdot (20 \cdot 2^3 + 15,7 \cdot 2^3) = \underline{\underline{95,2 \text{ mm}^4}} \quad W_t \cong \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{95,2}{2} = \underline{\underline{47,6 \text{ mm}^3}}$$



6.3 Hohlquerschnitte

Wie bereits im Kapitel 6.1 gesehen ist das dünnwandige, kreisförmige Rohr der ideale Querschnitt für eine Torsionsbelastung. Dies gilt auch für *dünnwandige Hohlquerschnitte* mit anderen Formen. Sie weisen gegenüber Vollquerschnitten sehr gute Torsioneigenschaften bei gleichzeitigem geringem Gewicht auf und werden deshalb im Leichtbau effizient eingesetzt.

Mit Hilfe der Strömungsanalogie lässt sich die Überlegenheit geschlossener gegenüber offenen Formen anschaulich erklären. Die Strömungslinien der im Gefäß zirkulierenden Flüssigkeit entsprechen Spannungslinien. Im offenen, dünnwandigen Vollquerschnitt sind die Abstände der gegenläufigen Spannungen bzw. Kräften gering, d.h. die übertragbaren Torsionsmomente klein. Im geschlossenen Hohlquerschnitt laufen die Spannungslinien um, was zu grossen Abständen der Kräfte und damit zu grossen Momenten führt.

Der Volumenstrom in einem Kanal als Produkt von Strömungsgeschwindigkeit mal Querschnitt ist konstant. Analog ist auch das Produkt von Schubspannung mal Wandstärke in jedem Punkt konstant. Gemäss Bild 6-19 gilt für zwei beliebige Stellen mit unterschiedlichen Schubspannungen $\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \text{konstant}$. Die Grösse τt ist die resultierende Schubkraft, die pro Länge übertragen wird, sie wird *Schubfluss* q genannt:

$$q = \tau \cdot t$$

Unter der Voraussetzung dünnwandiger, einzelliger Hohlquerschnitte mit *variabler Wandstärke* t entlang der *Umfangskoordinate* s lassen sich die Schubspannungen mit Hilfe des Momentengleichgewichts bestimmen. Die *Umfangskoordinate* s liegt auf der Mittellinie.

Am infinitesimalen Flächenelement der Länge ds wirkt die Kraft $dF = \tau t \cdot ds$. Das Moment dieser Kraft dF bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes B wird

$$dM_t = r \cdot dF = r \cdot \tau \cdot t \cdot ds$$

wobei r der senkrechte Abstand von B zur Wirkungslinie der Kraft dF ist. Die Summe aller Momente muss das wirkende Torsionsmoment ergeben. Da das Produkt τt konstant ist, darf es vor das Integral gestellt werden.

$$M_t = \oint r \cdot dF = \oint r \cdot \tau \cdot t \cdot ds = \tau \cdot t \cdot \oint r \cdot ds$$

Mit der schraffierten Dreiecksfläche $dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot ds$ ergibt sich das Integral als *das Doppelte* der von den Mittellinien umschlossenen Fläche A_m

$$M_t = \tau \cdot t \cdot 2 \cdot \oint dA = \tau \cdot t \cdot 2 \cdot A_m$$

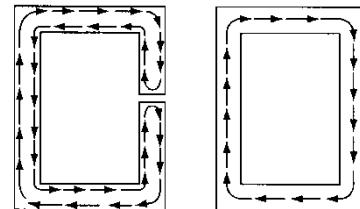


Bild 6-18 Strömungsgleichnis

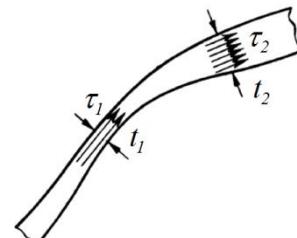


Bild 6-19 Schubfluss

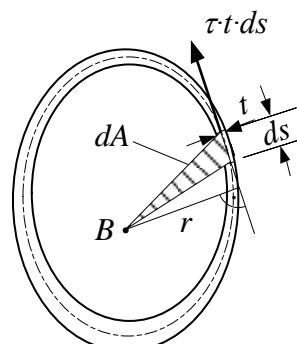


Bild 6-20 Hohlprofil

Damit ergibt sich die erste Bredtsche Formel

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t} \quad (6-5)$$

Die maximale Schubspannung tritt an der Stelle der kleinsten Wandstärke auf. Unter Berücksichtigung von Formel (6-2) ergibt sich das Widerstandsmoment für Hohlquerschnitte

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{min}} = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{mit} \quad W_t = 2 \cdot A_m \cdot t_{min}$$

Mit der zweiten Bredtschen Formel lässt sich das Torsionsflächenmoment I_t und unter Verwendung der Formel (6-1) der Drehwinkel für ein Hohlprofil berechnen

$$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\phi \frac{ds}{t}} \quad (6-6)$$

In den meisten technischen Anwendungen ist die Wandstärke mindestens bereichsweise konstant, so dass das Linienintegral durch die entsprechende Summe ersetzt werden kann.

$$\oint \frac{ds}{t} \rightarrow \sum \frac{\Delta s_i}{t_i}$$

Beispiel

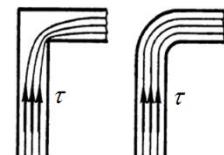
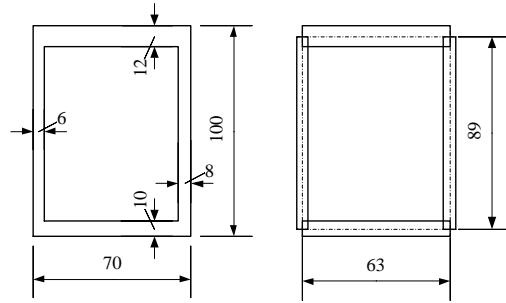
Für das nebenstehende Hohlprofil sind das Torsionsflächenmoment und das Widerstandsmoment zu bestimmen.

Für die 4 Bereiche mit konstanter Wandstärke werden die Längen bis zur Mittellinie gerechnet.

$$I_t = \frac{4 \cdot (89 \cdot 63)^2}{\left(\frac{63}{12} + \frac{89}{8} + \frac{63}{10} + \frac{89}{6} \right)} = \underline{\underline{335 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}}$$

$$W_t = 2 \cdot (89 \cdot 63) \cdot 6 = \underline{\underline{67,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3}}$$

In Analogie mit einer Strömung in einem Kanal um eine Ecke sind bei scharfkantigen Ecken hohe Schubspannungen zu erwarten. Diese sind entsprechend auszurunden, siehe auch Standardrohre.



7 Knickung

Das Versagen eines Bauteiles aus Sicht der Festigkeit tritt bei einem duktilen Werkstoff nach Überschreiten der Streckgrenze und bei einem spröden Werkstoff nach Erreichen der Zugfestigkeit ein. Für kurze, gedrungene Bauteile gilt das sowohl bei Zug- als auch bei Druckbeanspruchung. Ein auf Druck belasteter langer, dünner Stab hingegen versagt schlagartig durch seitliches Ausknicken. Das Erreichen dieser Grenzlast (Knicklast) kann je nach Geometrie des Stabes bei Druckspannungen auftreten, die viel kleiner sind als die Streckgrenze bzw. die Festigkeit des Materials. Der Grund für das Versagen liegt also nicht in der ungenügenden Festigkeit, sondern weil die ursprünglich geradlinige Form instabil wird. Es handelt sich nicht um ein *Festigkeitsproblem*, sondern um ein *Stabilitätsproblem*. Ähnliche Phänomene lassen sich bei auf Druck belasteten dünnen Blechen (Beulen) oder bei auf Biegung belasteten schmalen Biegeträgern (Biegendrillknicken) beobachten.

Die Instabilität von Druckstäben soll am folgenden Versuch erläutert werden.

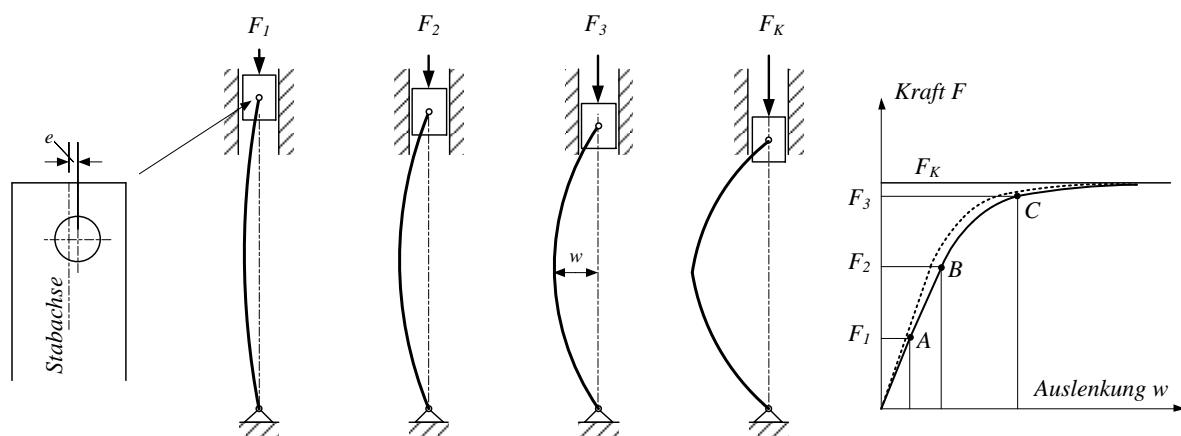


Bild 7-1 Der Knickvorgang im Versuch

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Stab mit einer kleinen Exzentrizität e bezüglich der Stabachse (Fertigungstoleranzen) wird auf Druck belastet. Die Belastung F wird schrittweise erhöht und die seitliche Auslenkung w gemessen und graphisch dargestellt. Für geringe Lasten ist das Biegemoment im Stab gleich der Kraft mal der Exzentrizität e und es ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Last und Deformation (Punkt A). Mit zunehmender Last wird der Anteil der seitlichen Verformung w im Vergleich zu e grösser, die gemessene Deformation wird überproportional grösser, es herrscht aber immer noch Gleichgewicht zwischen der äusseren Last F und dem Biegemoment (Punkt B). Dieser nicht-lineare Effekt verstärkt sich weiter (Punkt C) und die Kurve im Diagramm wird sehr flach. Bei einem weiteren, geringfügigen Anstieg der Last wird die Deformation sehr gross, es stellt sich kein Gleichgewicht mehr ein und der Stab versagt bei einer kritischen Last F_K . Wiederholt man den Versuch mit geringerer Exzentrizität, ergibt sich zwar eine etwas steilere Kurve (---), aber die kritische Last F_K bleibt gleich. Ist die Exzentrizität $e = 0$, so ergibt sich während der Belastung keine seitliche Auslenkung und das Ausknicken erfolgt bei der Knicklast schlagartig. Für Lasten $< F_K$ ist der Stab stabil, für solche $> F_K$ ist er instabil.

Die kritische Last, auch Knicklast F_K genannt darf für technische Anwendungen nie überschritten werden. Zur Bestimmung dieser Knicklast muss das Gleichgewicht am *verformten* Stab formuliert werden. Bei üblichen Festigkeitsproblemen haben wir das Gleichgewicht stets am *unverformten* Bauteil aufgestellt, siehe Statik am starren Körper.

7.1 Elastische Knickung nach EULER

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Stab der Länge l , dessen eines Ende axial verschiebbar ist, wird durch die Kraft F belastet. Der Stab weist infolge einer kleinen Störung (Exzentrizität, Vorkrümmung) unter der Wirkung von F eine kleine Deformation auf.

In diesem Gleichgewichtszustand herrscht an der Stelle x mit der Durchbiegung w ein Biegemoment $M_b = F \cdot w$. Unter Verwendung der Differentialgleichung der Biegelinie (4-7)

$M_b = -w'' \cdot E \cdot I$ ergibt sich

$$w'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot w = 0$$

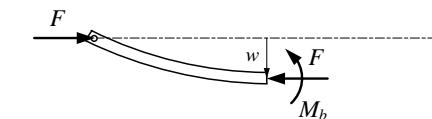
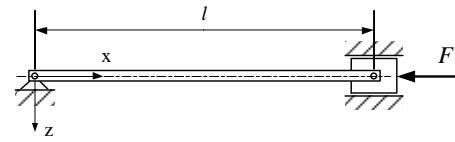


Bild 7-2 Knicklast nach EULER

bzw. mit der Abkürzung $k^2 = \frac{F}{E \cdot I}$ folgt die harmonische Differentialgleichung

$$w'' + k^2 \cdot w = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad w(x) = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x)$$

mit den Randbedingungen

$$w(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \rightarrow B = 0$$

$$w(l) = A \cdot \sin(k \cdot l) = 0 \rightarrow k \cdot l = n \cdot \pi \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

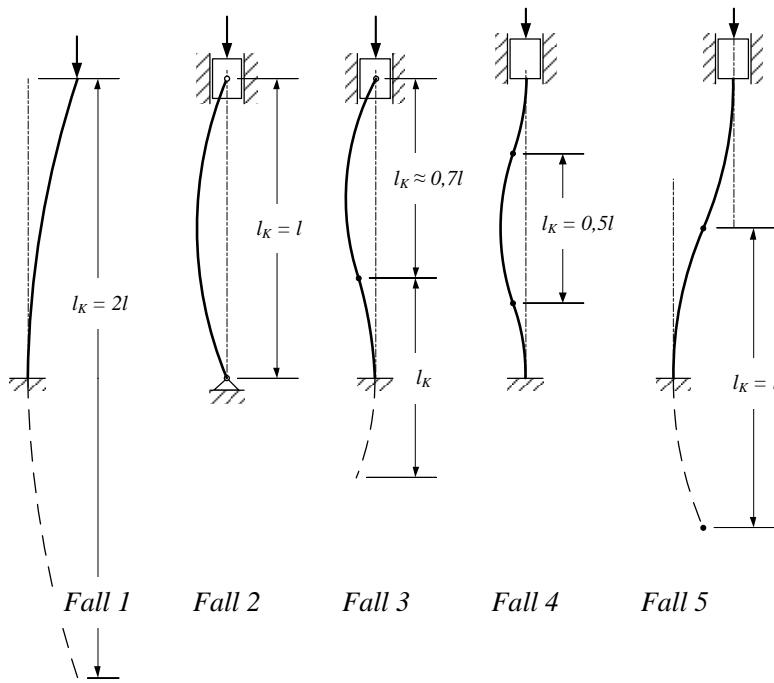
Da weder l noch F Null sind, scheidet $n=0$ als Lösung aus. Mit $n=1$ ergibt sich die Knicklast nach EULER, die theoretischen Lösungen $n=2, 3 \dots$ haben in der Praxis keine Bedeutung.

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Die Biegelinie entspricht einer halben Sinuslinie, die Amplitude A lässt sich nicht bestimmen. Andere Lagerungen bedeuten andere Randbedingungen und verändern die Knicklast.

Wenn anstelle der effektiven Länge die Knicklänge verwendet wird, behält die Formel nach EULER ihre Gültigkeit

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2} \quad (7-1)$$



Beim Grundfall 2 geht die halbe Sinuswelle über die effektive Länge des Stabes, d.h. $l_K = l$. Bei den anderen Fällen entspricht die Länge der halben Sinuskurve der kritischen Knicklänge l_K .

Bild 7-3 Knickfälle und Knicklängen

Ein EULER-Knicken nach der Formel (7-1) gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Spannungen bis zum Versagen im elastischen Bereich bleiben. Dies ist bei langen, dünnen Stäben der Fall, während gedrungene Stäbe infolge zu hoher Druckspannungen (Quetschen) versagen. Welche Versagensart eintritt, hängt vom Schlankheitsgrad ab.

$$\boxed{\text{Schlankheitsgrad } \lambda = \frac{l_K}{i} = l_K \cdot \sqrt{\frac{A}{I}}} \quad (7-2)$$

Der *Trägheitsradius* i ist ein Mass dafür, wie viel Material vom Flächenmittelpunkt des Querschnitts weg ist.

$$\boxed{\text{Trägheitsradius } i = \sqrt{\frac{I}{A}}} \quad (7-3)$$

Mit diesen Definitionen und Division der Formel (7-1) durch die Querschnittsfläche A ergibt sich die kritische Spannung bei *elastischer Knickung*.

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{l_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad \boxed{\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}} \quad (7-4)$$

Die Funktion $\sigma_K(\lambda)$ heisst EULER-Hyperbel und hängt nur vom Schlankheitsgrad λ und vom Elastizitätsmodul E ab, d.h. sie ist also unabhängig von der Festigkeit des Werkstoffes.

Die EULER-Hyperbel gilt maximal bis zur Druck-Proportionalitätsgrenze σ_{dP} , bzw. bis zum Grenzschlankheitsgrad λ_P . Für sehr kleine Schlankheitsgrade liegt Versagen durch Quetschen vor, wobei σ_{dF} die Druck-Fliessgrenze, auch Quetschgrenze genannt und λ_F den dazugehörigen Schlankheitsgrad darstellen. Im Bereich zwischen Quetschen und elastischer Knickung liegt der Übergangsbereich des elastisch-plastischen Knickens, siehe Kapitel 7.2.

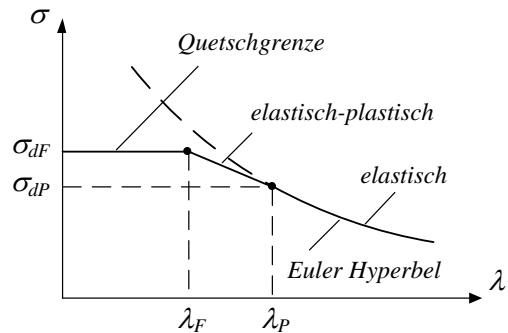


Bild 7-4 Euler Hyperbel

Bei der Anwendung der Formel (7-1) nach EULER ist immer zu prüfen, ob diese aufgrund der Geometrie des Stabes auch gültig ist. Die Gültigkeit ist gegeben für Schlankheitsgrade grösser λ_P . Angaben zu diesen Grenzschlankheitsgraden findet man in Tabelle 7-1.

Dimensionieren von Druckstäben

Soll ein Querschnitt bei vorgegebener Belastung F und Sicherheit gegen Knicken S_K ausgewählt werden, so geschieht dies auf Basis der Formel (7-1).

$$\text{Sicherheit gegen Knicken } S_K = \frac{F_K}{F}$$

Das minimal erforderliche axiale Flächenmoment I_{min} ergibt sich dann mit

$$I_{min} = \frac{F \cdot l_K^2 \cdot S_K}{\pi^2 \cdot E}$$

Es ist zu beachten, dass je nach Lagerung an den Enden des Stabes die Knicklängen für die beiden möglichen Achsen unterschiedlich sein können.

Beispiel

Eine Stütze mit einem I-100 Querschnitt aus Baustahl S235 wird mit 20 kN auf Druck belastet. In der Mitte ist ein Ausknicken in y-Richtung durch seitliche Anschläge verhindert, in z-Richtung ist der Träger jedoch frei. Knotenbleche oben und unten sollen eine Verdrehung um die z-Achse verhindern, eine solche um die y-Achse soll jedoch möglich sein. Wie gross ist die Sicherheit gegen Knicken?

Die Knicklängen für y- oder z-Achse sind aufgrund der Randbedingungen unterschiedlich.

Beim Knicken um die y-Achse liegt Fall 2 für $l = 6\text{m}$, beim Knicken um die z-Achse hingegen Fall 3 für $l = 3\text{m}$ vor. Zur Anschauung sind die möglichen Biegelinien einzuziehen.

Knicklast um y-Achse

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210'000 \cdot 171 \cdot 10^4}{6000^2} = 98,4\text{kN}$$

Kontrolle des Schlankheitsgrades

$$\lambda = 6000 \cdot \sqrt{\frac{1060}{171 \cdot 10^4}} = 149 > 104 \Rightarrow \text{Euler}$$

Knicklast um z-Achse

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210'000 \cdot 15,9 \cdot 10^4}{2100^2} = 74,7\text{kN}$$

Kontrolle des Schlankheitsgrades

$$\lambda = 2100 \cdot \sqrt{\frac{1060}{15,9 \cdot 10^4}} = 169 > 104 \Rightarrow \text{Euler}$$

Sicherheit gegen Knicken

$$S_K = \frac{74,7}{20} = \underline{\underline{3,7}}$$

Der Schlankheitsgrad gibt nicht nur an, ob ein Knicken nach EULER vorliegt, sondern zeigt auch um welche der beiden Achsen zuerst ein Knicken zu erwarten ist. Im obigen Beispiel tritt ein Versagen um die z-Achse wegen des höheren Schlankheitsgrades ein.

7.2 Elastisch-plastische Knickung

Der Bereich zwischen elastischem Knicken nach EULER und reinem Versagen aufgrund der Festigkeit wird im Maschinenbau üblicherweise mit der TETMAJER-Geraden angegeben.

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda \quad (7-5)$$

Ergibt die Überprüfung des Schlankheitsgrades einen Wert kleiner als λ_P , so ist die TETMAJER-Gerade anzuwenden; bei $\lambda < \lambda_F$ liegt sogar ein reines Festigkeitsproblem vor. Die Koeffizienten der Geradengleichung, sowie die Grenzschlankheitsgrade sind Tabelle 7-1 zu entnehmen. Für Grauguss gilt anstelle der Geraden eine Parabel.

Werkstoff	$E [\text{N/mm}^2]$	λ_F	λ_P	$a [\text{N/mm}^2]$	$b [\text{N/mm}^2]$
S235	210'000	65	104	310	1,14
E295 / E335	210'000	-	89	335	0,62
5%-Ni-Stahl	210'000	-	86	470	2,30
Nadelholz	10'000	-	100	29,3	0,194
Grauguss	100'000	-	80	$\sigma_K = 776 - 12 \cdot \lambda + 0,053 \cdot \lambda^2$	

Tabelle 7-1 Materialwerte zum elastisch-plastischen Knicken [6]

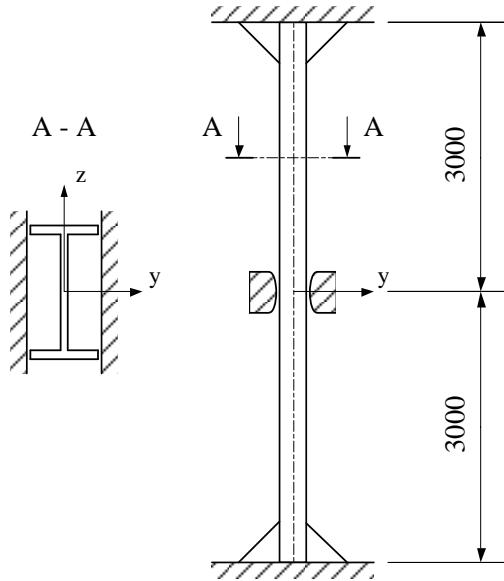


Bild 7-5 Stütze aus I100

Mit der TETMAJER-Gleichung können keine Stäbe ausgelegt, sondern nur bereits bekannte Querschnitte nachgerechnet werden. Eine Dimensionierung ist bei elastisch-plastischer Knickung nur iterativ möglich, wobei für die erste Schätzung von EULER ausgegangen wird. Der Nachweis wird dann über die Spannungen geführt mit der Sicherheit gegen Knicken

$$S_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{vorh}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{vorh} = \frac{F}{A}$$

Beispiel

Für eine beidseitig gelenkig gelagerte Schubstange der Länge 1650 mm aus Stahl E335 ist ein runder Vollquerschnitt zu wählen. Die Betriebslast beträgt 215 kN, die Sicherheit soll mindestens 8 betragen.

Im ersten Schritt wird basierend auf EULER der minimal erforderliche Querschnitt bestimmt.

$$I_{\min} = \frac{F \cdot l_K^2 \cdot S_K}{\pi^2 \cdot E} = \frac{215'000 \cdot 1650^2 \cdot 8}{\pi^2 \cdot 210'000} = 226 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \quad \text{mit} \quad I_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

Der Durchmesser wird damit (erste Schätzung)

$$I_{\min} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I_{\min}}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 226 \cdot 10^4}{\pi}} = 82,4 \text{ mm} \Rightarrow \text{Wahl: } d = 83 \text{ mm}$$

Die Querschnittswerte sind neu zu berechnen

$$A = \frac{\pi \cdot 83^2}{4} = 5411 \text{ mm}^2 \quad I = \frac{\pi \cdot 83^4}{64} = 233 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Die Kontrolle des Schlankheitsgrades ergibt

$$\lambda = l_K \cdot \sqrt{\frac{A}{I}} = 1650 \cdot \sqrt{\frac{5411}{233 \cdot 10^4}} = 79,5 < 89 \Rightarrow \text{Tetmajer}$$

Die Nachrechnung für elastisch-plastische Knickung ergibt eine ungenügende Sicherheit

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda = 335 - 0,62 \cdot 79,5 = 286 \text{ N/mm}^2$$

$$S_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{vorh}} = \frac{286}{39,7} = 7,2 < 8 \quad \text{mit} \quad \sigma_{vorh} = \frac{215'000}{5411} = 39,7 \text{ N/mm}^2$$

Eine Erhöhung des Durchmessers auf 90 mm bringt die geforderte Sicherheit

$$A = \frac{\pi \cdot 90^2}{4} = 6362 \text{ mm}^2 \quad I = \frac{\pi \cdot 90^4}{64} = 322 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\lambda = 1650 \cdot \sqrt{\frac{6362}{322 \cdot 10^4}} = 73,3$$

$$\sigma_K = 335 - 0,62 \cdot 73,3 = 290 \text{ N/mm}^2$$

$$S_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{vorh}} = \frac{290}{33,8} = 8,6 > 8 \quad \text{mit} \quad \sigma_{vorh} = \frac{215'000}{6362} = 33,8 \text{ N/mm}^2$$

Die Berechnung der Knickung geht von idealen Verhältnissen wie perfekt geraden Stäben und idealen Randbedingungen aus. Bei realen Strukturen treten Abweichungen von den idealen Annahmen auf, beispielsweise durch Vordeformationen oder Eigenspannungen (Schweißen). Folglich kann die theoretische Knicklast nie ganz erreicht werden und es liegt von Anfang an ein Spannungsproblem vor. Dem wird im Stahlbau mit der DIN 18800 [11] und aktuell mit der EN 1993-1-1 [14] Rechnung getragen. Gestützt auf viele Versuche mit realen Strukturen werden dort Knickdiagramme angeboten mit über den ganzen Schlankheitsbereich stetigen Kurven, siehe dazu auch [4], Kapitel 6.3. Durch diese genaueren Verfahren können die Sicherheiten im Stahlbau tiefer angesetzt werden. Die im Maschinenbau üblichen hohen Sicherheiten (3...5) decken also die Unsicherheiten in den Annahmen ab.

8 Der ebene Spannungszustand

Die Vorstellung, dass Spannungen in Bauteilen nur in einer Richtung wirken, ist eine Vereinfachung, die als Sonderfall für einfache Bauteile zutrifft. Man spricht dann von einem *einachsigen Spannungszustand*, siehe Kapitel 2.3. Probestäbe zur Gewinnung von Werkstoffkennwerten sind ein Beispiel dafür. Bei komplexeren Bauteilen, wie Kolben oder Motorengehäuse liegt im Allgemeinen ein räumlicher Spannungszustand vor, dessen Spannungskomponenten man sich an einem herausgeschnittenen Würfel vorstellen kann. Die Kantenlänge des Würfels soll so klein sein, dass die Spannungen an gegenüberliegenden Seiten gleich gross sind.

Es treten in den 3 Raumrichtungen 3 verschiedene

Normalspannungen σ_x , σ_y und σ_z auf.

Die Normalspannung ist durch den Index der Richtung der Flächennormalen eindeutig gekennzeichnet.

Für die Schubspannungen sind zwei Indizes nötig, der erste gibt die Richtung der Flächennormale, der zweite die Richtung des Spannungspfeils an.

So sind an der Fläche, deren Flächennormale in x-Richtung zeigt, die beiden Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} vorhanden.

Wegen dem Satz der zugeordneten Schubspannungen, Kapitel 2.4 sind immer zwei Schubspannungen paarweise gleich. Der allgemeine, *räumliche Spannungszustand* ist also durch folgende 6 unabhängige Spannungen, 3 Normal- und 3 Schubspannungen gegeben.

$$\sigma_x \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_y \text{ und } \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\sigma_z \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Sind in einer Richtung die Spannungen gleich oder nahezu gleich Null, so spricht man von einem *ebenen Spannungszustand*. Dies ist bei dünnwandigen, flächenförmigen Bauteilen der Fall. Praktisch heisst das, dass eine Dimension viel kleiner ist als die anderen beiden oder dass senkrecht zur Oberfläche keine oder allenfalls sehr kleine Spannungen wirken.

Damit reduziert sich die Anzahl unabhängiger Spannungen auf zwei Normalspannungen und eine Schubspannung. Liegt das Bauteil in der xy-Ebene, so sind dies:

$$\sigma_x$$

$$\sigma_y$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$$

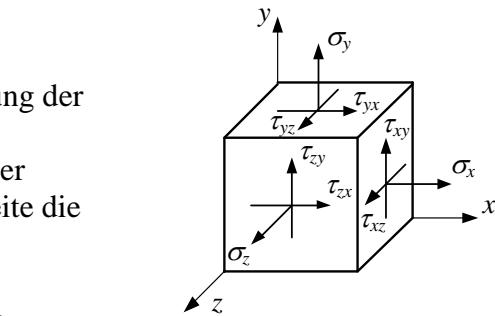


Bild 8-1 Spannungswürfel

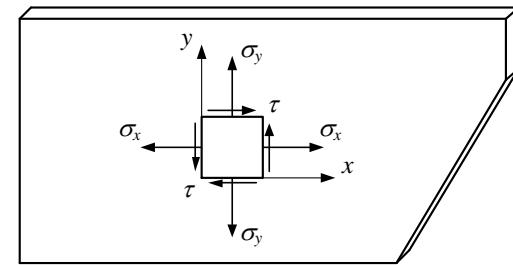


Bild 8-2 Ebener Spannungszustand

Da der ebene Spannungszustand für Maschinenbauteile eine grosse Bedeutung hat, sollen im Folgenden die in einem dünnen Blech vorhandenen Normal- und Schubspannungen untersucht und insbesondere deren Wirkung auf das Versagen des Werkstoffes diskutiert werden. Wie bereits im Kapitel 2.3 gesehen, erfolgt die Zerstörung des Werkstoffes insbesondere in Schnittflächen mit maximalen Normalspannungen (Sprödbruch) oder in solchen mit maximalen Schubspannungen (Gleitbruch).

Es geht im nächsten Kapitel darum, die Richtungen der Schnittflächen mit den Spannungsmaxima und diese Maxima selbst zu finden.

8.1 Hauptspannungen

Ausgehend von einem beliebigen, ebenen Spannungszustand mit den bekannten Spannungen σ_x , σ_y und τ werden zunächst die in einem um den Winkel α gedrehten Schnitt auftretenden Spannungen berechnet. An diesem Schnitt wirken die unbekannte Normalspannung σ_α in der Normalrichtung n und die Schubspannung τ_α in der Tangentialrichtung t .

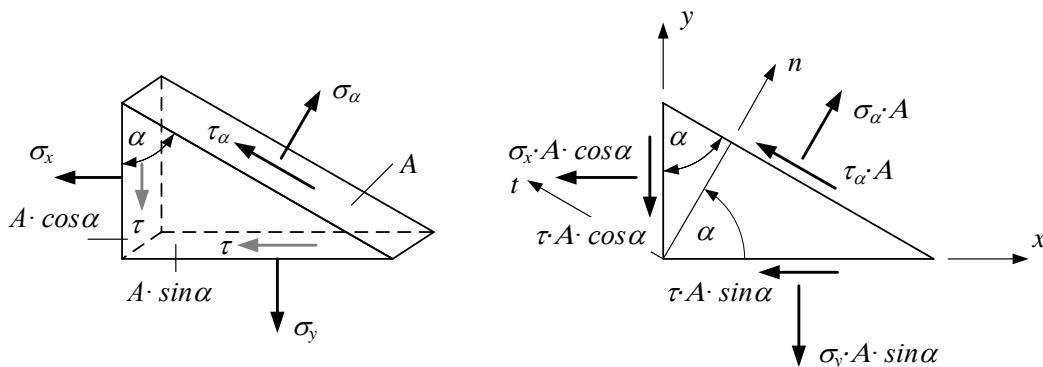


Bild 8-3 Kräftegleichgewicht am Teilelement

Mit Hilfe der Schnittfläche A wird das Kräftegleichgewicht in n - und t -Richtung aufgestellt.

$$\sum F_n = \sigma_\alpha \cdot A - \sigma_x \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sigma_y \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \tau \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \tau \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \tau \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sum F_t = \tau_\alpha \cdot A + \sigma_x \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \sigma_y \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \tau \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \tau \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\rightarrow \tau_\alpha = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Mit Hilfe der folgenden trigonometrischen Beziehungen kann weiter vereinfacht werden.

$$\cos^2 \alpha = 1/2 \cdot (1 + \cos 2\alpha) \quad 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad \sin^2 \alpha = 1/2 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

Die beiden Spannungen für ein um den Winkel α gedrehtes Achsensystem sind dann

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau \cdot \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha$$

Die Winkel α , für welche die Normalspannung maximal bzw. minimal wird, können durch Ableiten und gleich Null setzen gefunden werden.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Aufgrund der Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion ergeben sich für die Lösungen der Richtungen die Werte $2\alpha \pm 180^\circ$ bzw. $\alpha \pm 90^\circ$, d.h. zwei Richtungen, die senkrecht aufeinander stehen. Es zeigt sich ausserdem, dass für diese Winkel die Schubspannungen verschwinden. Man nennt diese beiden Richtungen *Hauptachsen* und die zugehörigen Spannungen *Hauptspannungen*. Die beiden Hauptachsen stehen also senkrecht aufeinander und weisen an ihren Schnittflächen keine Schubspannungen auf.

Die Werte der beiden Hauptspannungen ergeben sich durch Einsetzen des Ausdrückes $\tan 2\alpha$ in der Formel für die Spannung σ_α im gedrehten Achsensystem. Die Herleitung unter Verwendung trigonometrischer Beziehungen findet man in der Literatur, z.B. in [3].

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (8-1)$$

Die beiden Hauptspannungen stehen senkrecht aufeinander und es gilt $\sigma_1 > \sigma_2$.

Die bereits angesprochene Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion kann umgangen werden, indem die Beziehung für den Winkel 2α weiter umgeformt wird.

Zur praktischen Bestimmung der Hauptrichtung α_1 resultiert die eindeutige Beziehung

$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1 - \sigma_y} \quad (8-2)$$

Das Vorzeichen der Schubspannung τ kann wie folgt festgelegt werden: Eine Schubspannung an der Schnittfläche mit der Flächennormalen x ergibt am Flächenelement ein mathematisch positives Moment (Gegenuhrzeigersinn), siehe Bild 8-3. Der Winkel α_1 wird damit positiv gemessen zwischen der x -Achse und Richtung mit der maximalen Hauptspannung σ_1 .

Die Frage der maximalen Schubspannungen lässt sich auf analoge Weise lösen. Es ergibt sich, dass gegenüber den Hauptrichtungen um 45° gedrehte Schnitte maximale Schubspannungen aufweisen, deren Betrag gegeben ist durch

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (8-3)$$

An den Schnittflächen mit maximalen Schubspannungen wirken auch Normalspannungen

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (8-4)$$

Beispiel

Die Berechnung eines auf Torsion und Zug belasteten Rohres ergibt eine Schubspannung $\tau = 20 \text{ N/mm}^2$ und eine Zugspannung von $\sigma = 50 \text{ N/mm}^2$. Zu bestimmen sind Betrag und Richtung der maximalen Normalspannung und die maximale Schubspannung. Die x -Achse wird in Längsrichtung gewählt.

Die beiden Hauptspannungen lauten

$$\sigma_{1,2} = \frac{50+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50-0}{2}\right)^2 + 20^2} = 25 \pm 32 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = +57 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 = -7,0 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

Die Richtung der maximalen Hauptspannung

$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{-20}{57 - 0} \Rightarrow \alpha_1 \approx -19^\circ$$

Die maximale Schubspannung liegt gegenüber der Hauptrichtung um 45° verdreht und beträgt

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{50-0}{2}\right)^2 + 20^2} = \frac{57 - (-7)}{2} = 32 \text{ N/mm}^2$$

Die Normalspannungen an diesen Schnitten

$$\sigma_M = \frac{50+0}{2} = 25 \text{ N/mm}^2$$

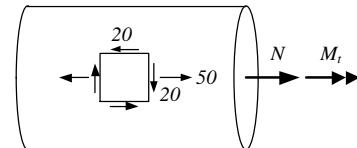


Bild 8-4 Spannungen [N/mm^2]

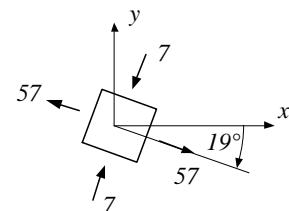


Bild 8-5 Hauptspannungszustand

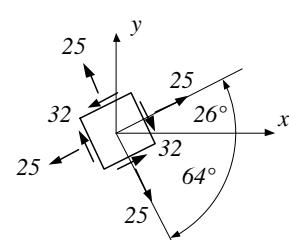


Bild 8-6 Spannungszustand τ_{max}

8.2 Der MOHRsche Spannungskreis

Die Gleichungen der Hauptspannungen und -richtungen sind analog aufgebaut wie diejenige für die Hauptflächenmomente und Hauptachsen bei schiefer Biegung (Kapitel 4.4.1) und lassen sich am sogenannten MOHRschen Spannungskreis darstellen. Auf der Abszisse sind die Normalspannungen, auf der Ordinate die Schubspannungen aufgetragen. Lässt man die Achsen in einem ebenen Bauteil mit dem Winkel α rotieren, so liegen die entsprechenden Wertepaare der Normal- und Schubspannungen auf einem Kreis, wobei hier der doppelte Winkel 2α vorkommt.

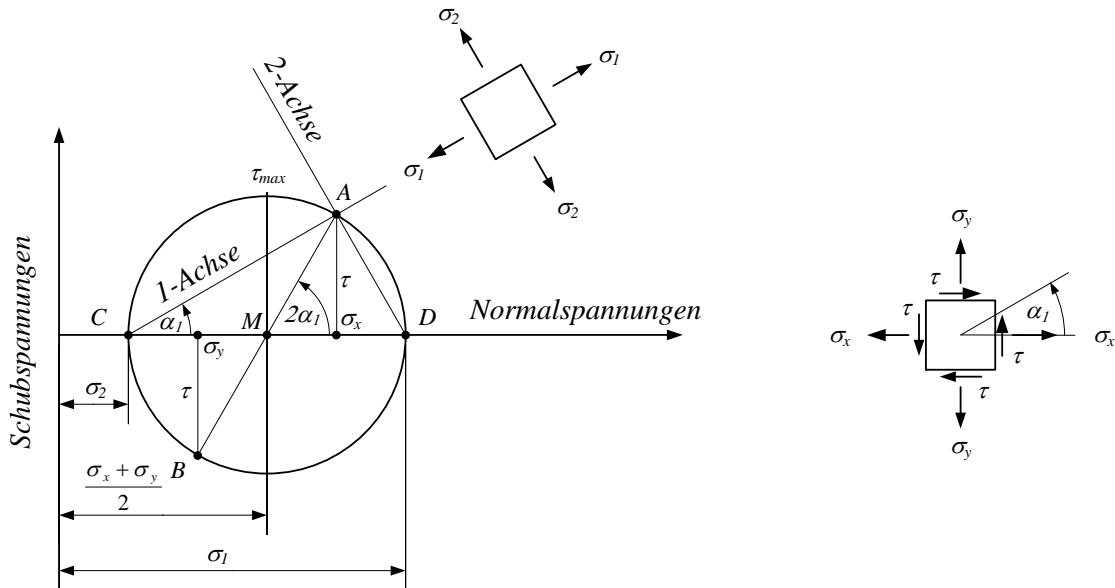


Bild 8-7 Spannungskreis nach MOHR

Mit den Bezeichnungen Punkt A für das Wertepaar (σ_x, τ) , Punkt B für das Wertepaar $(\sigma_y, -\tau)$ sowie Punkt C für die minimale und Punkt D für die maximale Hauptspannung gilt für die beiden Hauptrichtungen: Die Gerade CA entspricht der Richtung der maximalen Hauptspannung σ_1 und die Gerade DA derjenigen der minimalen Hauptspannung σ_2 . Nach dem Satz von Thales stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander.

Beispiel

Für den Spannungszustand aus vorherigem Beispiel soll der MOHRsche Kreis konstruiert werden.

Der Mittelpunkt M ergibt sich aus

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 25 \text{ N/mm}^2$$

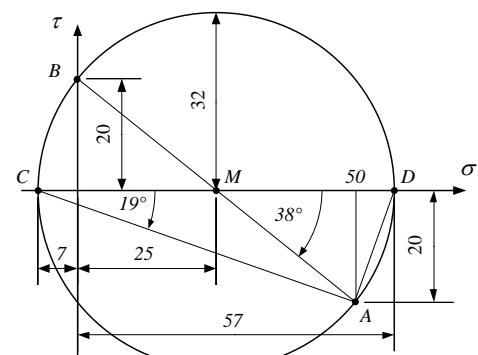
Die Schubspannung τ über σ_x abtragen (Vorzeichen!) ergibt den Punkt A, bzw. $-\tau$ über σ_y ergibt den Punkt B, und damit den Kreis mit Radius

$$\tau_{\max} = \sqrt{25^2 + 20^2} = 32 \text{ N/mm}^2$$

Die Schnittpunkte mit der Abszisse sind die Hauptspannungen, die Hauptrichtungen aus

Gerade CA = Richtung maximale Hauptspannung

Gerade DA = Richtung minimale Hauptspannung



Spezielle Spannungszustände im MOHRSchen Kreis

Beim *einachsigen Zug* ist die maximale Hauptspannung gleich der Spannung in Zugrichtung, die minimale gleich Null. Der MOHRSche Kreis tangiert die Ordinate, Bild 8-8. Die maximale Schubspannung wirkt in Schnitten unter 45° und ist halb so gross wie die Hauptspannung. Bei duktilen Werkstoffen verursacht sie ein Abgleiten unter 45° . Spröde Werkstoffe versagen in Schnitten quer zur maximalen Hauptspannung.

Ein auf Zug belasteter *gekerbter Stab* weist im Bereich des Kerbgrundes aufgrund von Querdehnungsbehinderungen einen dreiachsigen Spannungszustand auf [7]. Maximale und minimale Hauptspannungen können sehr nahe liegen, wodurch die maximale Schubspannung im Vergleich zum glatten Stab kleiner wird, Bild 8-9. Der gekerbte Stab aus duktilem Werkstoff kann deshalb eine höhere, statische Kraft aufnehmen; dies wird bei der Dimensionierung allerdings nicht berücksichtigt.

Für *einachsigen Druck* sieht der MOHRSche Kreis analog zum einachsigen Zug aus. Die minimale Hauptspannung ist die Druckspannung in Längsrichtung, die maximale Hauptspannung ist gleich Null. Da selbst bei spröden Werkstoffen kein Trennbruch senkrecht zur Hauptspannung auftreten kann, tritt sowohl bei duktilen als auch spröden Werkstoffen ein Abgleiten unter 45° auf.

Bei *allseitigem Druck* muss der Spannungszustand räumlich betrachtet werden, wobei gilt $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Im ebenen Spannungszustand ist eine Hauptspannung immer gleich Null, wobei dies je nach Spannungen σ_1 , σ_2 oder σ_3 sein kann. Sind aber alle drei Spannungen gleich und negativ, schrumpft der MOHRSche Kreis auf einen Punkt zusammen und die Schubspannung verschwindet, Bild 8-11. Im Versuch ist bei dieser Belastung eine Zerstörung nicht möglich.

In einem auf Torsion beanspruchten Querschnitt sind beide Normalspannungen gleich Null, deshalb liegt der Mittelpunkt des MOHRSchen Kreises im Ursprung des Koordinatensystems. Die Hauptspannungen wirken in Schnitten unter 45° als Zug- bzw. Druckspannungen, Bild 8-12. Die Zugspannungen führen bei spröden Werkstoffen zu Brüchen in diesen Schnittebenen. Duktile Werkstoffe versagen in Schnitten mit den max. Schubspannungen, also quer zur Längsachse.

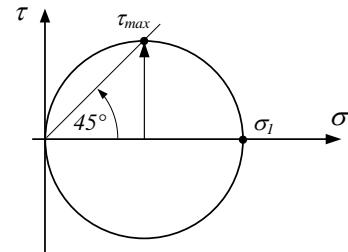


Bild 8-8 Einachsiger Zug

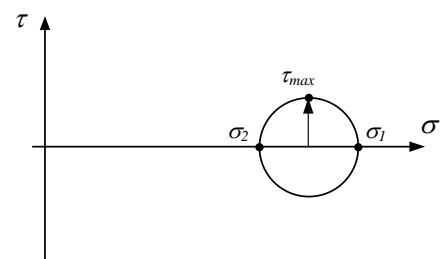


Bild 8-9 Zugstab mit Kerbe

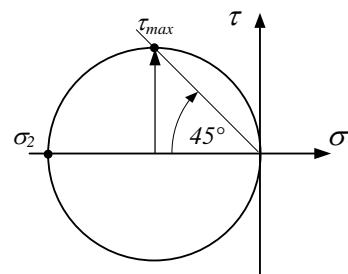


Bild 8-10 Einachsiger Druck

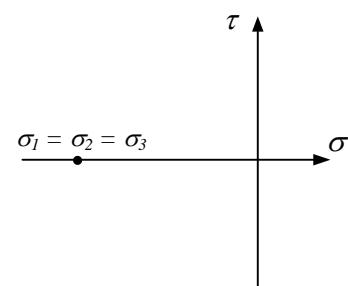


Bild 8-11 Allseitiger Druck

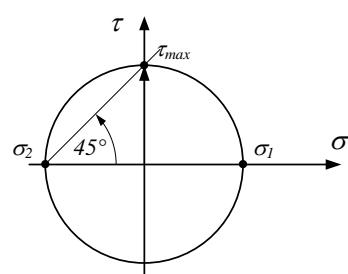


Bild 8-12 Torsion

8.3 Druckbehälter

Ein Anwendungsbeispiel für den ebenen Spannungszustand sind dünnwandige, zylindrische und kugelförmige Behälter unter Innendruck. Dünnwandig heisst, dass die Wandstärke t im Vergleich zum Durchmesser d viel kleiner ist ($t \ll d$). Dies hat zur Folge, dass erstens Spannungen quer zur Wandung vernachlässigt werden können und zweitens die Spannungen gleichmässig über der Wandstärke verteilt sind, also reine Zugspannungen darstellen. Praktisch stimmen die folgenden Formeln für Verhältnisse $t/d < 0,1$ sehr gut, ab etwa $t/d > 0,2$ sollte mit dem dickwandigen Behälter gerechnet werden.

Zylindrischer Kessel

Ein beidseitig geschlossener, zylindrischer Behälter steht unter Innendruck, Bild 8-13 a.

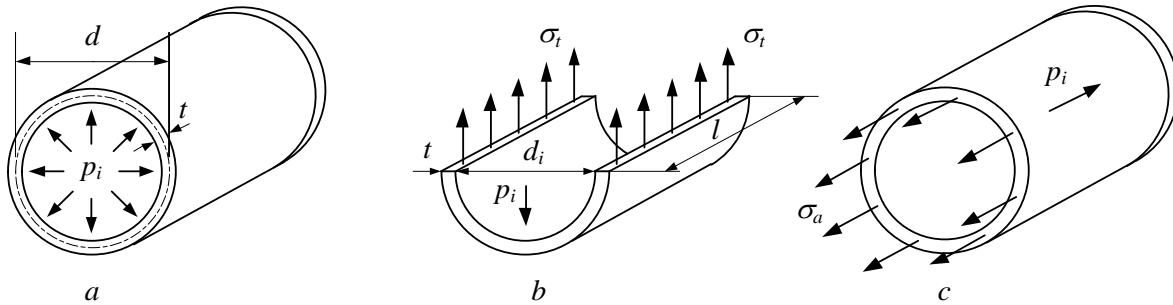


Bild 8-13 Dünwandiger, zylindrischer Behälter unter Innendruck

Kräftegleichgewicht an der freigemachten Halbschale der Länge l ergibt gemäss Bild b

$$2 \cdot \sigma_t \cdot l \cdot t = p_i \cdot d_i \cdot l \rightarrow \sigma_t = \frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot t}$$

Für Aussendruck resultieren analog mit d_a in tangentialer Richtung Druckspannungen

$$\sigma_t = -\frac{p_a \cdot d_a}{2 \cdot t}$$

In guter Näherung kann mit dem *mittleren Durchmesser* $d \approx d_i \approx d_a$ gerechnet werden. Damit ergibt sich die tangentiale Spannung bei einem Überdruck $\Delta p = p_i - p_a$ wie folgt:

$$\sigma_t \cong \frac{\Delta p \cdot d}{2 \cdot t} \quad (8-5)$$

Die axialen Spannungen ergeben sich durch Gleichgewicht in Längsrichtung, Bild c

$$\sigma_a \cdot \pi \cdot d \cdot t = p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} \rightarrow \sigma_a = \frac{p_i \cdot d_i^2}{4 \cdot d \cdot t}$$

Für dünnwandige Zylinder gilt wiederum $d \approx d_i \approx d_a$ und somit die axiale Spannung

$$\sigma_a \cong \frac{\Delta p \cdot d}{4 \cdot t} \quad (8-6)$$

Die beiden Formeln für tangentiale und axiale Spannungen werden *Kesselformeln* genannt. Wegen $t \ll d$ sind die *radialen Spannungen* $\sigma_r \ll \sigma_t$ und damit vernachlässigbar.

Bei dünnwandigen Behältern unter Aussendruck kann es infolge der Druckspannungen zum Beulen kommen. Dies ist eine Form der Instabilität ähnlich wie das Knicken bei schlanken Stäben. Angaben zu kritischen Beulspannungen findet man z.B. in Roark's [5].

Da in beiden Schnitten keine Schubspannungen auftreten, sind σ_t und σ_a Hauptspannungen, wobei sie sich um den Faktor 2 unterscheiden

$$\sigma_a = \frac{\sigma_t}{2} \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \sigma_t$$

$$\sigma_2 = \sigma_a$$

Es handelt sich um einen ebenen Spannungszustand, d.h. die dritte Hauptspannung σ_3 ist Null. Zur Dimensionierung eines Druckbehälters wird die in Kapitel 9.2 beschriebene Festigkeitshypothese der maximalen Schubspannung verwendet. Damit resultiert für den Druckbehälter eine für die Festigkeit relevante Vergleichsspannung von $\sigma_v = \sigma_1$.

Für die Berechnung und Ausführung von Druckbehältern gelten die Vorschriften der AD-Merkblätter (AD = Arbeitsgemeinschaft Druckbehälter), siehe AD 2000-Regelwerk [9].

Kugelförmiger Kessel

Bei einem kugelförmigen Behälter kann zwischen axialer und tangentialer Richtung nicht mehr unterschieden werden. Der dünnwandige Kugelbehälter wird in 2 Hälften geschnitten.

Mit Hilfe des Kräftegleichgewichts und des mittleren Durchmesser d resultieren folgende Spannungen

$$\sigma_a \cdot \pi \cdot d \cdot t = p_i \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \rightarrow \sigma_a = \frac{p_i \cdot d}{4 \cdot t}$$

Die Spannung ist in allen Richtungen gleich gross und beträgt bei einem Überdruck $\Delta p = p_i - p_a$

$$\boxed{\sigma \cong \frac{\Delta p \cdot d}{4 \cdot t}} \quad (8-7)$$

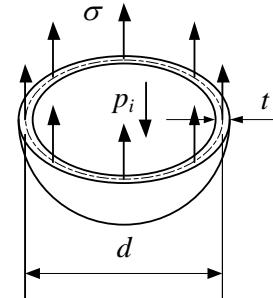


Bild 8-14 Kugelbehälter

Der kugelförmige Druckbehälter stellt demnach die optimale Form dar. Zylindrische Druckbehälter sind an ihren Enden meistens durch gewölbte Flächen abgeschlossen. Bei Verwendung von Halbkugelformen ergeben sich am Übergang Zylinder/Halbkugel aufgrund der Kesselformeln theoretisch Spannungssprünge. In Wirklichkeit treten solche Sprünge nicht auf. Die Spannungen in Übergangsbereich liegen allerdings höher als die mit der Kesselformel berechneten Werte. Mit speziellen Behälterformen wie Korbbodenform können die Spannungen reduziert werden, siehe dazu Normen über Druckbehälter, z.B. DIN 28013.

Dickwandige Druckbehälter

Beim dickwandigen Zylinder sind die tangentialen Spannungen nicht mehr konstant über der Wandstärke und es treten radiale Spannungen auf, die nicht mehr vernachlässigbar sind. Unter Vernachlässigung eines eventuellen Aussendrucks sind die Spannungsverläufe nach [6].

$$\sigma_a = p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_t = p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$$

$$\sigma_r = -p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)$$

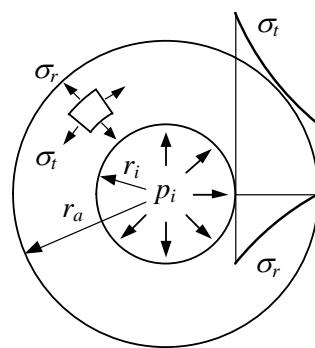


Bild 8-15 Dickwandiger Zylinder

Die maximale Spannung tritt an der Innenseite in tangentialer Richtung auf.

9 Zusammengesetzte Beanspruchung

Wirken in einem Querschnitt gleichzeitig mindestens zwei der bekannten vier Grundbeanspruchungen Zug/Druck, Biegung, Querkraftschub und Torsion, so spricht man von *zusammengesetzter Beanspruchung*. Linear-elastisches Verhalten vorausgesetzt, können für beliebige Kombinationen von Lastfällen Kräfte, Verformungen und Spannungen durch Superposition berechnet werden. Sind beispielsweise die Normalspannungen aus Zug und Biegung zu überlagern, so geschieht dies durch algebraische Addition, siehe Kapitel 9.1. Für eine Überlagerung von Schubspannungen gilt das gleiche. Die Wirkung von gleichzeitig vorhandenen Normal- und Schubspannungen kann nur über *Festigkeitshypothesen* erfolgen, Kapitel 9.2. Ein typisches Beispiel dafür ist Biegung und Torsion bei einer Getriebewelle.

9.1 Biegung und Normalkraft

Die Beanspruchung im Flächenmittelpunkt des Querschnitts bestehend aus Normalkraft und Biegemoment zeigt Bild 9-1. Beide erzeugen im Querschnitt Normalspannungen. Da diese Spannungen in die Längsrichtung des Trägers wirken, können sie algebraisch addiert werden. Die Vorzeichen sind in den Schnittgrößen N und M_b bereits berücksichtigt.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_b}{I_y} \cdot z \quad (9-1)$$

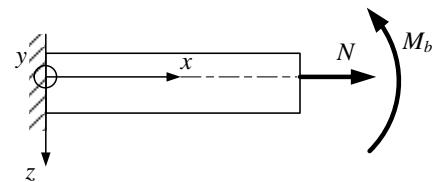


Bild 9-1 Normalkraft und Biegemoment

Zugunsten einer besseren Übersicht werden hier nur Biegemomente um die y-Achse betrachtet. Normalspannungen können aber auch aus Biegemomenten um die z-Achse resultieren, siehe Kapitel 4.4. Die Spannungsverteilungen infolge Normalkraft und Biegemoment werden gemäß Bild 9-2 superponiert.

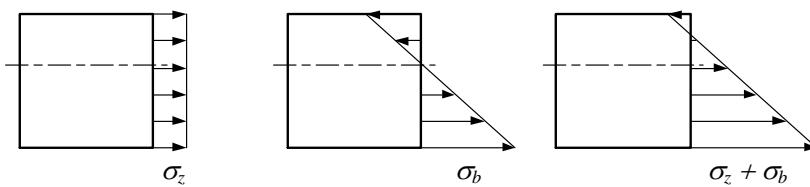


Bild 9-2 Spannungen infolge Normalkraft σ_z , Biegung σ_b und deren Kombination

Die neutrale Faser geht bei der Überlagerung nicht mehr durch den Flächenmittelpunkt. An den beiden Randfasern ergeben sich je nach Normalkraft und Biegung Zug- oder Druckspannungen. Es sind prinzipiell drei Spannungsverteilungen möglich, Bild 9-3.

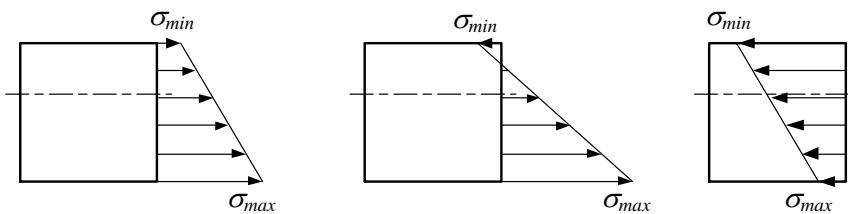


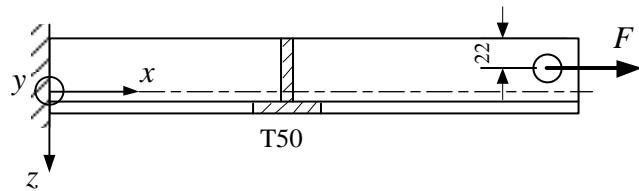
Bild 9-3 Mögliche Spannungsverteilungen

Es ist stets zu prüfen, auf welcher Seite die maximale Spannung auftritt. Je nachdem, ob verschiedene zulässige Werte für Zug- und Druck existieren, sind beide Nachweise zu führen.

Beispiel

Ein Träger aus einem T-Stahl T50 wird gemäss Skizze durch die Kraft $F = 20 \text{ kN}$ belastet.

Zu bestimmen sind die Spannungen in den beiden Randfasern



Die exzentrische Normalkraft bewirkt ein Biegemoment

$$M_b = -F \cdot (50 - 22 - 13,9) = -20000 \cdot 14,1 = -282 \text{ Nm}$$

Die Querschnittswerte für das T50 Profil sind:

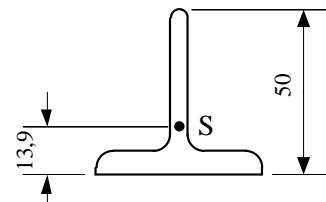
$$A = 566 \text{ mm}^2, I_y = 121'000 \text{ mm}^4, e = 13,9 \text{ mm}$$

Die Spannung am oberen Rand mit $z = -36,1 \text{ mm}$

$$\sigma = \frac{20000}{566} + \frac{-282000}{121000} \cdot (-36,1) = 35,3 + 84,1 = \underline{\underline{119,4 \text{ N/mm}^2}}$$

Die Spannung am unteren Rand mit $z = +13,9 \text{ mm}$

$$\sigma = \frac{20000}{566} + \frac{-282000}{121000} \cdot (+13,9) = 35,3 - 32,4 = \underline{\underline{2,9 \text{ N/mm}^2}}$$



Das Beispiel zeigt, dass schon eine kleine Exzentrizität in der Krafteinleitung zu wesentlichen Spannungserhöhungen in einem Zug- oder Druckstab führen. Sind exzentrisch belastete Träger zu dimensionieren, so kann zunächst die Normalkraft vernachlässigt und mit der Biegung allein ein Querschnitt ausgewählt werden. Anschliessend sind die Spannungen zu prüfen, wobei eventuell iterativ ein neuer Querschnitt gewählt werden muss.

Beispiel

Ein eingespannter, gekröpfter Träger soll aus einem U-Profil gebogen werden. Die Last beträgt $F = 800 \text{ N}$ und die zulässige Spannung 80 N/mm^2 . Zu wählen ist ein U-Profil DIN 1026.

Die Spannungen sind in den beiden Randfasern zu berechnen.

Zunächst wird nur das Biegemoment berücksichtigt

$$M_b \geq 800 \cdot 200 = 160000 \text{ Nmm}$$

Das minimal erforderliche Widerstandsmoment ist

$$W_{\text{eff}} \geq \frac{M_b}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{160000}{80} = 2000 \text{ mm}^3$$

Gewählt wird ein U 60 x 30 mit den Querschnittswerten

$$W_y = 2160 \text{ mm}^3, A = 646 \text{ mm}^2, I_y = 45100 \text{ mm}^4, e = 9,1 \text{ mm}$$

Das Biegemoment wird mit dem exakten Abstand bis zum Schwerpunkt des gewählten Querschnitts gerechnet

$$M_b = 800 \cdot (200 + 9,1) = 167280 \text{ Nmm}$$

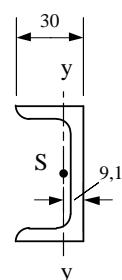
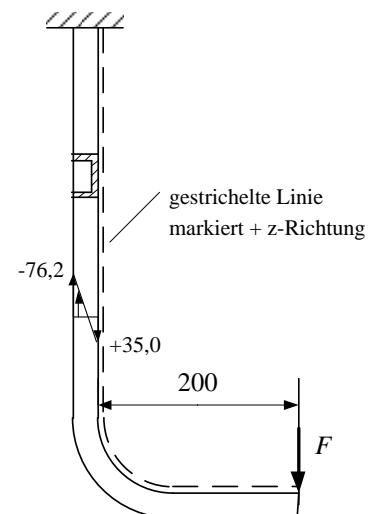
Die maximale Spannung wird geprüft auf der Aussenseite

$$\sigma = \frac{800}{646} - \frac{167280}{2160} = 1,2 - 77,4 = \underline{\underline{-76,2 \text{ N/mm}^2}}$$

und auf der Innenseite

$$\sigma = \frac{800}{646} + \frac{167280}{45100} \cdot 9,1 = 1,2 + 33,8 = \underline{\underline{+35,0 \text{ N/mm}^2}}$$

Mit U 60 x 30 ist der Spannungsnachweis erbracht.



9.2 Festigkeitshypothesen

Die Beanspruchung einer Getriebewelle besteht typischerweise aus Biegung und Torsion. Es sind also gleichzeitig Normal- und Schubspannungen vorhanden, man spricht von einem zweiachsigen Spannungszustand. Die Werkstoffkennwerte wie Streckgrenze oder Dauerfestigkeit werden allerdings an einachsigen Versuchen bestimmt. Ein Vergleich der vorhandenen mit den zulässigen Spannungen ist deshalb nicht direkt möglich. Die vorhandenen Normal- und Schubspannungen werden in eine Rechengröße – der sogenannten *Vergleichsspannung* – umgerechnet. Diese Vergleichsspannung σ_v ist eine rechnerische Spannung, welche die gleiche Beanspruchung des Werkstoffs verursacht, wie wenn man sie an einem Zugstab aufbringen würde. Durch einen Vergleich dieser Vergleichsspannung mit der zulässigen Spannung kann die zusammengesetzte Beanspruchung beurteilt werden.

Wie in Kapitel 2.8 gesehen, können in räumlichen Bauteilen bis zu 6 unabhängige Spannungs-komponenten auftreten, die auf eine Normalspannung umgerechnet werden müssen. Die Vorschriften zur Berechnung dieser Vergleichsspannung beruhen auf Erfahrung und zahlreichen Versuchen. Es sind keine exakten Methoden, sondern Festigkeitshypothesen. In der Praxis werden drei verschiedene Hypothesen verwendet, je nach Werkstoffverhalten und Belastungsart. Im Folgenden werden diese drei Festigkeitshypothesen vorgestellt, wobei wir uns auf den ebenen Spannungszustand beschränken, die Angaben für den räumlichen Fall sind in Anhang B, Tabelle B-6 zu finden.

9.2.1 Normalspannungshypothese (NH)

Die *Normalspannungshypothese* geht davon aus, dass die grösste Normalspannung für das Versagen des Werkstoffes verantwortlich ist. Die grösste Normalspannung ist die erste Hauptspannung und berechnet sich nach Kapitel 8.1 für den ebenen Spannungszustand

$$\sigma_v = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (9-2)$$

Die Normalspannungshypothese stimmt gut mit Versuchen an *spröden* Werkstoffen überein. Außerdem findet sie Anwendung bei Schweißnähten, bei dreiachsigem Zug oder bei stossartiger Belastung von duktilen Werkstoffen. Das Versagen tritt durch Trennbruch senkrecht zur Richtung der maximalen Hauptspannung ein. Am Beispiel einer Kreide mit ausgesprochen sprödem Verhalten kann dies veranschaulicht werden.

Eine auf Torsion belastete Kreide bricht unter 45° zur Längsachse, das ist die Richtung der maximalen Hauptspannung, siehe Bild 9-4. Wird die Kreide auf Biegung belastet, so resultieren Normalspannungen und der Trennbruch erfolgt senkrecht zur Längsachse, Bild 9-5.



Bild 9-4 Trennbruch bei Torsion Kreide



Bild 9-5 Trennbruch bei Biegung Kreide

9.2.2 Schubspannungshypothese (SH)

Die Schubspannungshypothese besagt, dass die grösste Schubspannung für das Versagen des Werkstoffes verantwortlich ist. Die Frage ist nun, wie gross müsste beim Zugversuch die Vergleichsspannung sein, welche die gleiche maximale Schubspannung verursacht wie der mehrachsige Spannungszustand. Die Normalspannung beim einachsigen Zug entspricht zweimal der maximalen Schubspannung, also ergibt sich die Vergleichsspannung $\sigma_v = 2 \cdot \tau_{max}$. Beim allgemeinen Spannungszustand mit $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ beträgt also die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = 2 \cdot \tau_{max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (9-3)$$

Im ebenen Spannungszustand ist eine Hauptspannung gleich Null, wobei dies je nach Vorzeichen der Spannungen σ_1 , σ_2 oder σ_3 sein kann. Die Auswertung der Wurzel in Gleichung (9-3) ist problematisch, weil sie nur gilt ist, wenn die beiden Hauptspannungen unterschiedliches Vorzeichen haben [7]. Sind beide Hauptspannungen positiv, so wird $\sigma_3 = 0$, Bild 9-6.

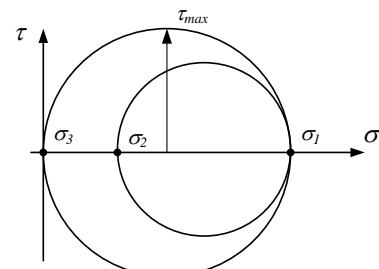


Bild 9-6 Schubspannungshypothese

In diesem Fall ist die Vergleichsspannung aus der Differenz von maximaler zu minimaler Hauptspannung zu berechnen, siehe Gleichung (9-3). Die Schubspannungshypothese findet beispielsweise bei Druckbehältern Anwendung und im Allgemeinen für spröde Werkstoffe unter reiner Druckbelastung. In letzterem Fall treten keine positiven Hauptspannungen auf und deshalb tritt anstelle eines Trennbruches ein Gleitbruch unter 45° ein.

9.2.3 Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

Die Gestaltänderungsenergiehypothese besagt, dass die elastische Energie, die zur Änderung der Gestalt – bei gleichbleibendem Volumen – aufgebracht wird, verantwortlich für das Versagen ist. Ein Vergleich dieser Energie mit dem einachsigen Fall liefert für die Vergleichsspannung beim ebenen Spannungszustand, zur Herleitung siehe [1].

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (9-4)$$

Bei duktilen Werkstoffen unter mehrachsiger statischer und schwingender Beanspruchung stimmt die Gestaltänderungsenergiehypothese sehr gut mit Versuchen überein.

Die Vergleichsspannung nach dieser Hypothese wird auch mit *von Mises Spannung* bezeichnet, benannt nach einem der drei Begründer Huber, von Mises und Hencky.

Es sei noch mal darauf hingewiesen, dass sich obige Formeln zur Berechnung der Vergleichsspannung auf den ebenen Spannungszustand beschränken. Sind Spannungskomponenten in allen drei Raumrichtungen vorhanden, ist zu beachten, dass für die Hauptspannungen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ gilt, siehe Tabelle B-6.

Typische Beanspruchungen von Maschinenelementen weisen meist nur *eine* Normal- und *eine* Schubspannung auf, so dass sich obige Formeln weiter vereinfachen.

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

Im Fall reiner Torsion ist nur noch eine Schubspannung vorhanden, so dass gilt $\sigma_v = \sqrt{3} \cdot \tau$.

In der Praxis wird in diesem Fall direkt die *vorhandene* mit der *zulässigen Schubspannung* geprüft, wobei die Festigkeitswerte für Schubspannungen direkt den einschlägigen Normen entnommen werden, siehe Festigkeitswerte in [4].

$$\tau_{vorh} \leq \tau_{zul}$$

9.2.4 Dimensionierung und Spannungsnachweis

Die in den vorherigen Kapiteln vorgestellten Festigkeitshypothesen und die dazugehörigen Vergleichsspannungen gelten nur, wenn alle Spannungskomponenten dem gleichen Lastfall angehören, d.h. den gleichen Spannungs-Zeit-Verlauf haben. Das ist immer dann der Fall, wenn alle Spannungen aus ruhender Belastung (Fall I) oder alle aus schwelender Belastung (Fall II) oder alle aus wechselnder Belastung (Fall III) stammen. Die Belastung einer Getriebewelle besteht dagegen aus einem wechselnden Biegemoment und – je nach Einsatz – einem ruhenden, schwelenden oder wechselnden Torsionsmoment. Dem wird mit dem Anstrengungsverhältnis α_0 nach BACH Rechnung getragen, mit dem die einzelnen Lastfälle gewichtet werden.

$$\alpha_0 = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\sigma_{\text{Probe beim Lastfall von } \sigma}}{\tau_{\text{Probe beim Lastfall von } \tau}} \quad \text{mit} \quad \varphi = \begin{cases} 1 & \text{NH} \\ 2 & \text{SH} \\ \sqrt{3} & \text{GEH} \end{cases}$$

α_0 ist ein Gewichtungsfaktor für τ . Ist z.B. die Normalspannung wechselnd, dann hat eine ruhende Schubspannung einen kleineren Einfluss als eine wechselnde Schubspannung.

Für σ_{Probe} und τ_{Probe} sind die entsprechenden Festigkeitswerte (Wechsel-, Schwell- oder statische Festigkeit) einzusetzen. Dauerfestigkeitswerte sind den einschlägigen Normen [15], bzw. der Tabelle 1-1 in [4] zu entnehmen.

Bei ruhender Belastung sind die statischen Festigkeitswerte R_m (Bruch) oder R_e (Fliessen) einzusetzen, bzw. die *Schubfliessgrenze* τ_F oder *Schubfestigkeit* τ_B

$$\begin{aligned} \tau_F &= 0,58 \cdot R_e && \text{für Stahl, andere Faktoren siehe TB 3-2 [4]} \\ \tau_B &= 0,58 \cdot R_m \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von plastischen Reserven können bei duktilen Rundstäben nach DIN 743 [15] näherungsweise die Werte für Biegung auf $1,2 \cdot R_e$ und für Torsion auf $1,2 \cdot 0,58 \cdot R_e$ erhöht werden. Zur genaueren Berechnung der plastischen Reserven siehe Kapitel 10.1.

Unter Berücksichtigung der Lastfälle der einzelnen Beanspruchungen ergeben sich die Vergleichsspannungen für den häufig vorkommenden Fall mit *einer* Normalspannung σ und *einer* Schubspannung τ nach (9-5).

$\sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (\alpha_0 \cdot \tau)^2}$	NH	(9-5)
$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau)^2}$	SH	
$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau)^2}$	GEH	

Der Spannungsnachweis wird dann nach (9-6) geführt.

$$\sigma_v \leq \sigma_{\text{zul}} \quad (9-6)$$

Der Spannungsnachweis auf Basis der Vergleichsspannung benutzt als Werkstoffkenngrösse die zulässige Spannung. Die zulässige Spannung bezieht sich auf den Lastfall der Normalspannung. Für eine überschlägige Berechnung (Dimensionierung) werden dazu die Dauerfestigkeiten pauschal durch eine Mindestsicherheit von 3...4 dividiert.

Vor allem bei schwingender Belastung wird der Spannungsnachweis zunehmend durch den Festigkeitsnachweis ersetzt, bei dem die einzelnen Einflüsse auf die Festigkeit für jede Spannungskomponente einzeln erfasst werden, siehe Kapitel 10. Zur Dimensionierung von Querschnitten wird die Vergleichsspannung aber aufgrund ihrer Einfachheit verwendet.

9.3 Biegung und Torsion

Die kombinierte Beanspruchung auf Biegung und Torsion zeigt das Bauteil in Bild 9-7. Maximale Normal- und Schubspannungen treten bei der Einspannung in den beiden Randfasern oben und unten auf. Die beiden Schnittgrößen können wie folgt berechnet werden.

$$M_b = F \cdot l$$

$$M_t = F \cdot a$$

Die Spannungen aus der Querkraft sind wegen des grossen Verhältnisses l/d vernachlässigbar. Die Widerstandsmomente für Biegung und Torsion unterscheiden sich für den kreisförmigen Vollquerschnitt um den Faktor 2

$$W_b = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 2 \cdot W_b$$

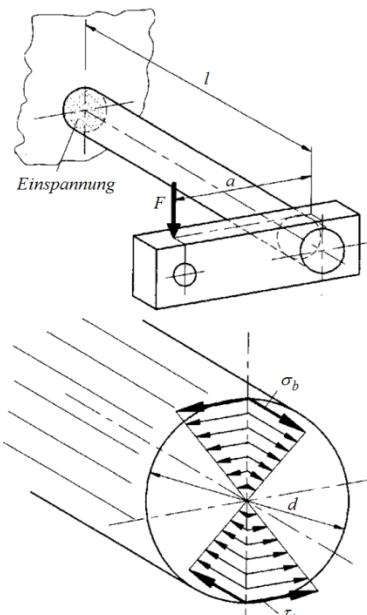


Bild 9-7 Biegung und Torsion

Mit Hilfe der Grundgleichungen für Biegung und Torsion ergeben sich die Normal- und Schubspannungen. Duktile Material vorausgesetzt, kommt die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) zur Anwendung.

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W_b}\right)^2 + 3 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \frac{M_t}{W_t}\right)^2} = \frac{1}{W_b} \cdot \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} \cdot (\alpha_0 \cdot M_t)^2}$$

Mit der Abkürzung für das Vergleichsmoment

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} \cdot (\alpha_0 \cdot M_t)^2}$$

folgt für den Spannungsnachweis

$$\sigma_v = \frac{M_v}{W_b} \leq \sigma_{zul}$$

Unter Verwendung des Widerstandsmomentes gegen Biegung kann nach dem erforderlichen Durchmesser aufgelöst werden

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_v}{\pi \cdot \sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot \sigma_{zul}} \cdot \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} \cdot (\alpha_0 \cdot M_t)^2}}$$

Beispiel

Eine Welle aus E335 wird auf Biegung wechselnd mit $M_b = 300 \text{ Nm}$ und auf Torsion schwellend mit $M_t = 500 \text{ Nm}$ belastet. Der Durchmesser ist für eine zulässige Spannung von 75 N/mm^2 anzugeben.

Die Dauerfestigkeiten betragen nach [4]

Biegewechselfestigkeit $\sigma_{bw} = 290 \text{ N/mm}^2$

Torsionsschwellfestigkeit $\tau_{tsch} = 230 \text{ N/mm}^2$

Das Anstrengungsverhältnis ist nach BACH

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{290}{230} = 0,73$$

Der erforderliche Durchmesser wird

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot 75} \cdot \sqrt{300'000^2 + \frac{3}{4} \cdot (0,73 \cdot 500'000)^2}} = \underline{\underline{39 \text{ mm}}}$$

9.4 Biegung und Querkraft

Biegespannungen und Querkraftschub treten in der Regel in den meisten Querschnitten von Trägern, Wellen und Achsen gleichzeitig auf. Die maximalen Normalspannungen infolge Biegung treten am Rand auf, dort wo die Schubspannungen infolge Querkraft gleich Null sind. Andererseits sind die Normalspannungen in der neutralen Achse gleich Null, wobei die Schubspannungen dort maximal sind, siehe Bild 9-8.

Für elementare Querschnittsformen (Kreis, Rechteck...) genügt es in diesem Fall, die Normal- und Schubspannungen an den Stellen ihrer Maxima getrennt nachzuweisen. Es ist nicht notwendig, eine Vergleichsspannung zu berechnen, siehe auch [4], Kapitel 9.2 Bolzen.

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$$

$$\tau_{max} \leq \tau_{zul}$$

Bei langen Trägern ($l > 10 \cdot h$) sind nur die Biegespannungen, bei kurzen Trägern ($l < h$) nur die Schubspannungen massgebend.

Im Stahlbau (I-, T-, U-Profilen) wird näherungsweise die Vergleichsspannung mit der maximalen Biegespannung und der mittleren Schubspannung τ_m verwendet, wobei τ_m eine über den Stegquerschnitt A_w gemittelte Spannung ist.

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{b,max}^2 + 3 \cdot \tau_m^2}$$

Nach DIN 18800 [11] wird die wirksame Schubfläche gemäß Bild 9-9 mit $A_w = (h - t) \cdot s$ angesetzt.

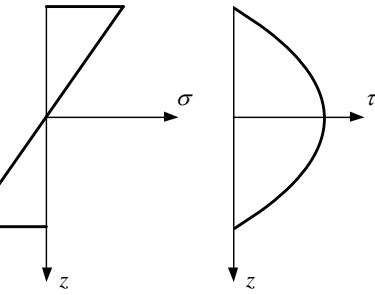


Bild 9-8 Biegung und Querkraft

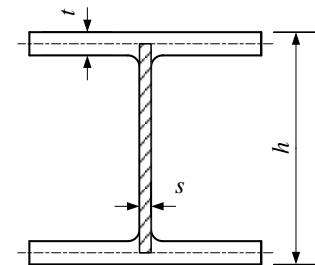


Bild 9-9 Wirksame Schubfläche

Nur bei komplex aufgebauten Querschnitten (Leichtbau) muss die Vergleichsspannung in verschiedenen Höhen ermittelt werden, wobei Biegespannungen nach (4-13) und Schubspannungen nach (5-2) berechnet werden.

Beispiel

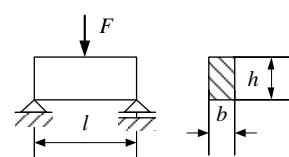
Ein kurzer Träger aus Baustahl mit rechteckigem Vollquerschnitt wird in der Mitte mit einer Einzelkraft F belastet. Für welche Länge l werden die Vergleichsspannungen in der Randfaser und in der neutralen Faser gleich gross?

Die Vergleichsspannung am Rand entspricht der max. Biegespannung

$$\sigma_v = \sigma_b = \frac{M}{W_b} = \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{6}{b \cdot h^2} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot b \cdot h^2}$$

Die Vergleichsspannung in der neutralen Faser ist nach der GEH

$$\sigma_v = \sqrt{3 \cdot \tau_{max}^2} = \sqrt{3} \cdot \tau_{max} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot F}{4 \cdot b \cdot h}$$



Gleichsetzen der beiden Vergleichsspannungen ergibt für die Länge

$$l = \frac{\sqrt{3} \cdot h}{2} = 0,87 \cdot h$$

10 Festigkeitsnachweis

Für jedes Bauteil muss nachgewiesen werden, dass die über die gesamte Lebensdauer wirkenden Belastungen mit ausreichender Sicherheit ertragen werden und die vorgesehene Funktion der Konstruktion gewährleistet bleibt. Dabei kommen nicht nur festigkeitsbedingte Versagensformen wie Gewaltbruch, Fliessen oder Dauerbruch in Frage, sondern auch unzulässig grosse Verformungen, Instabilität (Knicken, Beulen...) oder mechanische Abnutzung. Das vorliegende Kapitel befasst sich ausschliesslich mit den rein festigkeitsbedingten Versagensformen. Die in den vorausgehenden Kapiteln dargestellten Festigkeitsberechnungen sind einfache Verfahren, die für Überschlagsrechnungen in der Konstruktionsphase geeignet und ausreichend sind. Sie basieren im Prinzip auf einem Vergleich von *vorhandenen* mit *zulässigen* Spannungen, man bezeichnet sie auch als *Spannungsnachweis*. Für den Nachweis der Festigkeit der definitiven Konstruktion wird der Spannungsnachweis zunehmend durch den Festigkeitsnachweis ersetzt, bei dem die einzelnen Einflüsse auf die Festigkeit in Form einer *Bauteilstfestigkeit* erfasst werden. Das Vorgehen ist in Bild 10-1 grundsätzlich dargestellt.

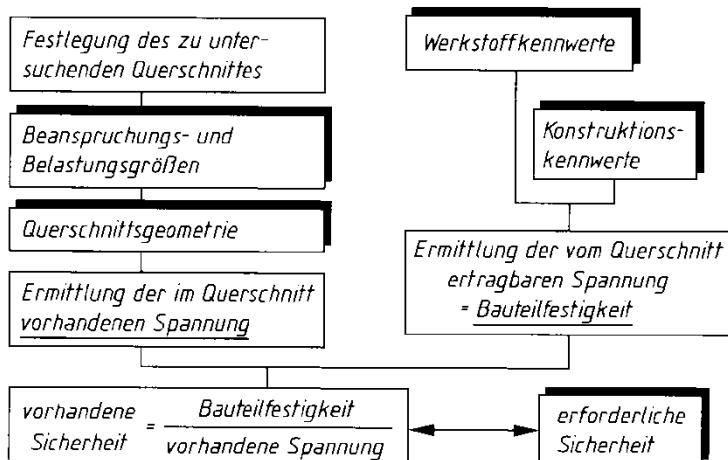


Bild 10-1 Allgemeiner Festigkeitsnachweis

Die auf Basis der Querschnittsgeometrie und mit Hilfe der Grundgleichungen der Festigkeit berechneten Spannungen sind Nennspannungen. Spannungserhöhung infolge Kerben bleibt in den Nennspannungen unberücksichtigt. Diese wird mit Hilfe von Konstruktionskennwerten erfasst und führt zu einer gegenüber den Werkstoffkennwerten reduzierten Bauteilstfestigkeit. Die berechnete *vorhandene Sicherheit* wird verglichen mit der erforderlichen *Mindestsicherheit*. Dieses Verfahren setzt voraus, dass klar definierte Querschnitte zur Bestimmung der Nennspannungen vorhanden sind. Es wird *Nennspannungskonzept* genannt und findet üblicherweise bei stabförmigen Bauteilen Anwendung. Sind Bezugsquerschnitte nicht vorhanden (volumenförmige Bauteile) oder ist ein lokales Fliessen in einer Kerbe nicht möglich (statische Festigkeit bei spröden Werkstoffen), so muss das *Konzept der örtlichen Spannungen* angewendet werden, wobei die Spannungen mit numerischen Methoden (FEM) berechnet werden können. Der Rechengang auf Basis des Nennspannungskonzeptes findet in der DIN 743 [15] Anwendung und wird in den folgenden Kapiteln beschrieben. Für das *Konzept der örtlichen Spannungen* sei auf die FKM-Richtlinie [16] verwiesen.

Die *Mindestsicherheiten* sind in einigen Branchen wie Schienenfahrzeuge, Seilbahnen oder Krane durch Vorschriften und Normen festgelegt. Diese Werte sind dann auch an einen vorgeschriebenen Rechengang gebunden. Im allgemeinen Maschinenbau existieren meist keine Vorschriften, so dass auf Literaturangaben zurückgegriffen werden muss, z.B. TB 3-14 in Maschinenelemente [4].

10.1 Der statische Festigkeitsnachweis

Die aus Zugversuchen an Probestäben ermittelten statischen Festigkeitswerte sind die Zugfestigkeit R_{mN} und die Streckgrenze R_{eN} bzw. $R_{p0,2N}$, im folgenden kurz R_{pN} genannt. Mit zunehmender Bauteilgrösse ist ein technologisch bedingter Festigkeitsabfall zu beobachten. Bei Bauteilen, die vom Normdurchmesser d_N abweichen, müssen die Festigkeitswerte mit Hilfe des technologischen Grösseneinflussfaktors K_t umgerechnet werden.

$$\boxed{\begin{aligned} R_p &= K_t \cdot R_{pN} \\ R_m &= K_t \cdot R_{mN} \end{aligned}} \quad (10-1) \quad K_t \text{ nach TB 3-11 [4]}$$

Wie in Kapitel 2.6 dargelegt, hat eine Kerbe je nach Werkstoffverhalten – spröd oder duktil – unterschiedliche Auswirkungen auf die statische Festigkeit des Bauteils. Duktile Werkstoffe haben die Eigenschaft, lokal zu fliessen, ohne dass global die Bauteilfestigkeit eingeschränkt wird. Die Spannungsspitzen werden an der höchstbelasteten Stelle durch eine geringe plastische Verformung abgemindert. Dies führt bei gekerbten Stäben bzw. bei glatten Stäben unter Biegung oder Torsion (Spannungsgradient) zu einer erhöhten Bauteilfestigkeit. Rechnerisch wird diese Tragreserve über die *plastische Stützzahl* n_{pl} erfasst.

$$\boxed{n_{pl} = \sqrt{\frac{R_{p,max}}{R_p}} \leq \alpha_p} \quad (10-2) \quad \alpha_p \text{ nach TB 3-3 [4]}$$

Die Beziehung beruht auf der Kerbspannungstheorie nach Neuber, siehe z.B. [7]. Wird die ertragbare, örtliche Dehnung auf 5% (Stahl und GS) bzw. 2% (GJS und GJM) beschränkt, so ergeben sich folgende Werte für $R_{p,max}$:

$$R_{p,max} = 1050 \text{ N/mm}^2 \text{ (Stahl und GS)}$$

$$R_{p,max} = 320 \text{ N/mm}^2 \text{ (GJS)}$$

$$R_{p,max} = 400 \text{ N/mm}^2 \text{ (Aluminium Knetlegierungen)}$$

Für Gusseisen mit Lamellengraphit (GJL) sowie GJM und GJS-Werkstoffe mit Bruchdehnungen < 8% ist wegen des spröden Werkstoffverhaltens $n_{pl} = 1$ zu setzen.

Gleichung (10-2) gilt nur für Biegung oder Torsion; für Zug/Druck und Schub ist aufgrund der gleichmässigen Spannungsverteilung $n_{pl} = 1$.

Die obere Grenze für die plastische Stützzahl n_{pl} bildet die *plastische Formzahl* α_p , die das Verhältnis von vollplastischer Traglast zu elastischer Traglast definiert und von der Form des Querschnitts abhängig ist. Die für den statischen Festigkeitsnachweis notwendige *Bauteilfestigkeit gegen Fliessen* bzw. gegen *Gewaltbruch* berechnet sich wie folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_F &= f_\sigma \cdot n_{pl} \cdot R_p \\ \sigma_B &= f_\sigma \cdot n_{pl} \cdot R_m \end{aligned}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} \tau_F &= f_\tau \cdot n_{pl} \cdot R_p \\ \tau_B &= f_\tau \cdot n_{pl} \cdot R_m \end{aligned}} \quad (10-3)$$

Mit dem Faktor f_τ werden die aus den Zugproben gewonnen mechanischen Kennwerte in Schubfestigkeiten umgerechnet. Der Faktor f_σ dient der Berücksichtigung von eventuellen erhöhten Druckfestigkeiten bei Gusswerkstoffen. Beide Faktoren sind in TB 3-3 [4] tabelliert.

Die plastische Stützzahl berücksichtigt, dass die Fliessgrenze bei duktilen Werkstoffen lokal überschritten werden darf, ohne dass das Bauteil versagt. Formal werden die Bauteilfestigkeiten gegenüber den Werkstoffkenngrössen um den Faktor n_{pl} erhöht.

Sind hohe Anforderungen bezüglich Deformationen an das Bauteil gestellt, so sind diese gesondert zu verifizieren.

Durch die Berücksichtigung der plastischen Stützzahl lassen sich höhere statische Tragfähigkeiten ausnutzen. Die Frage, wann diese plastischen Reserven zu beachten sind, hängt von der Anwendung und auch vom Querschnitt ab. Im Bauingenieurwesen mit den typischen I-Querschnitten ist der Nachweis mit Ausnutzung der plastischen Querschnittstragfähigkeit üblich [8]. Die Grenzen der Anwendung sind in der Norm EN 1993-1-1 [14] klar geregelt. Für Wellen und Achsen werden sie nach DIN 743 [15] grundsätzlich für den statischen Nachweis verwendet, wobei die plastischen Stützzahlen in der Norm angegeben sind. Bei harten (spröden) Randschichten dürfen sie jedoch nicht verwendet werden.

Der Vorgang der Plastifizierung und die Bedeutung der plastischen Stütz- und Formzahlen soll anhand eines auf Biegung belasteten Trägers mit rechteckigem Vollquerschnitt der Höhe h und Breite b veranschaulicht werden.

Das reale nicht-lineare Werkstoffverhalten wird durch ein ideal-elastisch-plastisches Werkstoffverhalten idealisiert.

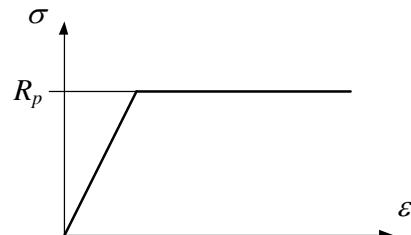


Bild 10-2 Ideal-elastisch-plastisches Material

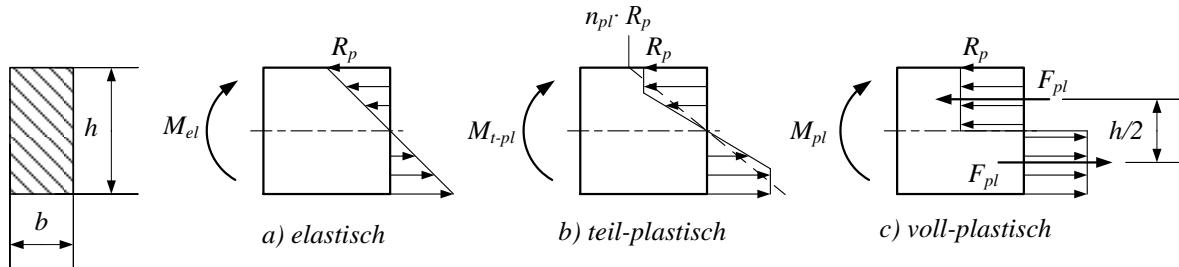


Bild 10-3 Zur Definition der plastischen Stützzahl und plastischen Formzahl

Wird die Streckgrenze R_p an der Randfaser erreicht, ist das übertragbare elastische Moment

$$M_{el} = R_p \cdot W_b = R_p \cdot \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Kommt es in der Randfaser zum Fliessen, so bleibt die maximale Spannung wegen des ideal-plastischen Materials konstant auf R_p , der Bereich der plastischen Zone wird aber grösser. Begrenzt wird das übertragbare plastische Moment durch die vom Werkstoff ertragbare Dehnung. Als plastische Stützzahl gilt das Verhältnis von (teil-) plastischer zu elastischer Last

$$n_{pl} = \frac{M_{t-pl}}{M_{el}}$$

Als obere Grenze für die plastische Stützzahl gilt der voll plastifizierte Querschnitt. Das maximal übertragbare Moment ergibt sich für diesen Grenzfall aus dem Kräftepaar der resultierenden Kräfte der Spannungsverteilung

$$M_{pl} = F_{pl} \cdot \frac{h}{2} = \left(R_p \cdot b \cdot \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{h}{2} = R_p \cdot \frac{b \cdot h^2}{4}$$

Als plastische Formzahl gilt das Verhältnis von voll-plastischer zu elastischer Last. Es ergibt sich ein Wert 1,5 für den Rechteck-Vollquerschnitt; andere Querschnitte nach TB 3-3 [4].

$$\alpha_p = \frac{M_{pl}}{M_{el}} = R_p \cdot \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \frac{1}{R_p} \cdot \frac{6}{b \cdot h^2} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Für den statischen Festigkeitsnachweis werden die Sicherheiten aus Bauteilstfestigkeit und vorhandenen Nennspannungen σ_n gebildet und den Mindestsicherheiten gegenübergestellt.

$$\boxed{\begin{aligned} S_F &= \frac{\sigma_F}{\sigma_n} \geq S_{F,min} \\ S_B &= \frac{\sigma_B}{\sigma_n} \geq S_{B,min} \end{aligned}} \quad (10-4) \quad \text{für duktile Werkstoffe}$$

Für Schubspannungen sind die entsprechenden Werte τ_F bzw. τ_B in (10-4) einzusetzen.

Die Nennspannungen σ_n können aus den vier Grundbeanspruchungen berechnet werden.

σ_{zd}	Zug/Druck	nach Formel (3-1)
σ_b	Biegung	nach Formel (4-2)
τ_s	Schub	nach Formel (5-2)
τ_t	Torsion	nach Formel (6-2)

Liegt eine zusammengesetzte Beanspruchung vor, ergibt sich die Festigkeitsbedingung für duktile Werkstoffe auf Basis der Gestaltänderungsenergiehypothese. Sie lautet dann für den Nachweis gegen Fliessen (für Bruch analog unter Verwendung der Indizes B statt F)

$$\boxed{S_F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zd}}{\sigma_{zdF}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{bF}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_s}{\tau_{sF}} + \frac{\tau_t}{\tau_{tF}}\right)^2}} \geq S_{F,min}} \quad (10-5) \quad \text{für duktile Werkstoffe}$$

Sind Mindestsicherheiten nicht durch eine Vorschrift oder Norm vorgegeben, so können sie im allgemeinen Maschinenbau der TB 3-14 in [4] entnommen werden.

Der statische Festigkeitsnachweis für spröde Werkstoffe muss grundsätzlich nach dem *Konzept der örtlichen Spannungen* geführt werden. An Stelle der Nennspannungen treten die maximalen Spannungen in der Kerbe. Ein Nachweis ist nur gegen Bruch erforderlich, da eine Streckgrenze praktisch nicht existiert.

$$\boxed{S_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{max}} \geq S_{B,min}} \quad (10-6) \quad \text{für spröde Werkstoffe}$$

Die Mindestsicherheiten sind für *spröde* Gusswerkstoffe höher anzusetzen als diejenigen für *duktile* Gusswerkstoffe gemäss TB 3-14 in [4]. Die Festlegung der Mindestsicherheit erfolgt dann in Abhängigkeit der Bruchdehnung, siehe dazu FKM [16].

Für zusammengesetzte Beanspruchung ergibt sich die Festigkeitsbedingung für spröde Werkstoffe grundsätzlich auf Basis der Normalspannungshypothese. Einige Werkstoffe und insbesondere Gusseisen verhalten sich allerdings unter Betriebsbedingungen weder absolut spröde noch absolut duktil. Man verwendet deshalb z.B. für duktile Gusseisen mit $A \geq 6\%$ eine sogenannte „gemischte Hypothese“, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

Für überschlägige Berechnungen sei auf das Kapitel 9.2.4 verwiesen. Sind statische Festigkeitsnachweise für spröde Werkstoffe, z.B. GJL zu führen, wird das *Konzept der örtlichen Spannungen* in der FKM-Richtlinie [16] empfohlen.

10.2 Der Dauerfestigkeitsnachweis

Die auf ein Maschinenbauteil wirkenden dynamischen Lasten werden nach Kapitel 2.5 durch eine der Berechnung zugängliche einfache harmonische Schwingung idealisiert. Auf Basis der dort definierten Begriffe *Mittelspannung* σ_m und *Spannungssamplitude* σ_a sind für die vier Grundbeanspruchungen die vorhandenen Nennspannungen bestimmt. Für die meisten Bauteile im Maschinenbau übersteigt die Lastspielzahl die Grenzschwingspielzahl bei Stahl von 2 bis $5 \cdot 10^6$ Zyklen, so dass eine Rechnung im Dauerfestigkeitsbereich üblich ist. Hinweise zum Nachweis im Bereich der *Zeitfestigkeit* (10^2 - 10^6 Lastwechsel) sowie der *Betriebsfestigkeit* mit Lasten auf verschiedenen Niveaus und verschiedenen Lastspielzahlen werden im Kapitel 10.4 gegeben.

Der Dauerfestigkeitsnachweis wird sowohl für duktile als auch für spröde Werkstoffe meist nach dem *Nennspannungskonzept* geführt. Die „Dauerfestigkeit des Bauteiles“, seine *Gestalfestigkeit* wird auf Grundlage der Dauerfestigkeit des Werkstoffes bestimmt. Alle Einflüsse, die zur Abweichung der Gestalfestigkeit von der Dauerfestigkeit des Probestabes führen, werden durch sogenannte *Konstruktionsbeiwerte* berücksichtigt.

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte zum Nachweis der Dauerfestigkeit basierend auf der Norm DIN 743 [15] dargelegt. Sie gilt zwar für die Festigkeitsberechnung von Wellen und Achsen, doch kann das Verfahren sinngemäß auch für andere Bauteile angewandt werden. Eine allgemeine Vorschrift für den Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile bietet die FKM Richtlinie [16]. Die FKM basiert auf den gleichen Grundlagen der Festigkeitsrechnung, hat aber gegenüber der DIN ein paar Eigenheiten, auf die im Kapitel 10.3 eingegangen wird.

Werkstoffkennwerte

Die für den Dauerfestigkeitsnachweis erforderlichen Werte der *Wechselfestigkeit* können direkt der Norm DIN 743 [15], bzw. der TB 1-1 in [4] entnommen werden. Die Dauerfestigkeiten gelten für die Grenzlastspielzahl von 10^7 und basieren auf einer Überlebenswahrscheinlichkeit von 97,5%.

Wie bereits bei den statischen Festigkeitswerten müssen bei Bauteilen, die vom Normdurchmesser d_N abweichen, die Wechselfestigkeiten mit Hilfe des technologischen Größeneinflussfaktors K_t umgerechnet werden, wobei die Kurven für Zugfestigkeit gelten.

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_W &= K_t \cdot \sigma_{WN} \\ \tau_W &= K_t \cdot \tau_{WN}\end{aligned}} \quad (10-7) \quad K_t \text{ nach TB 3-11 a) und b) [4]}$$

Für Bauteile mit nicht kreisförmigen Querschnitten kann nach TB 3-11 e) auf einen gleichwertigen Durchmesser umgerechnet werden.

Basis für den Dauerfestigkeitsnachweis sind *immer* die Wechselfestigkeiten und zwar unabhängig von der effektiven Belastung. Eine eventuell vorhandene Mittelspannung wird später über die Mittelspannungsempfindlichkeit berücksichtigt, siehe Formel (10-15). Für die vier Grundbeanspruchungen Zug/Druck, Biegung, Schub und Torsion ergeben sich grundsätzlich vier verschiedene Wechselfestigkeiten, wobei Schubspannungen infolge Querkraft τ_s oft eine untergeordnete Bedeutung spielen und in der DIN 743 nicht vorkommen.

σ_{zdW} Zug/Druck

σ_{bW} Biegung

τ_{sW} Schub

τ_{tW} Torsion

Kerbwirkung und Stützwirkung

Versuche an gekerbten Probestäben zeigen, dass sie im Allgemeinen eine höhere Schwingbelastung ertragen, als nach der Formzahl α_k eigentlich zu erwarten wäre, siehe Kapitel 2.6. Es wird deshalb bei dynamischer Belastung die *Kerbwirkungszahl* β_k der Berechnung zu Grunde gelegt. Sie gibt das Verhältnis der Wechselfestigkeit des glatten Probestabes zur Wechselfestigkeit des gekerbten Probestabes bei vergleichbaren Bedingungen an.

$$\boxed{\beta_k = \frac{\sigma_W}{\sigma_{Wk}}} \quad (10-8)$$

Neben der experimentellen Bestimmung gibt es verschiedene Verfahren zur Berechnung der Kerbwirkungszahl. Hier wird die auch in der DIN 743 verwendete *Methode nach Stieler* vorgestellt. Sie geht davon aus, dass das Spannungsgefälle im Bereich der Kerbe eine entscheidende Rolle spielt. Wie bei der statischen Festigkeit, führen *Spannungsgefälle* zu einer *Stützwirkung* der unter den Randschichten liegenden, geringer belasteten Bereiche.

Die Höhe der Stützwirkung hängt vom Spannungsgradienten an der Stelle der maximalen Spannung ab.

Der Spannungsgradient ($d\sigma/dy$) hängt allerdings von der maximalen Spannung σ_{max} ab, so dass das auf die maximale Spannung *bezogene Spannungsgefälle* G' als Bezugsgröße definiert wird.

$$G' = \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \left(\frac{d\sigma}{dy} \right)$$

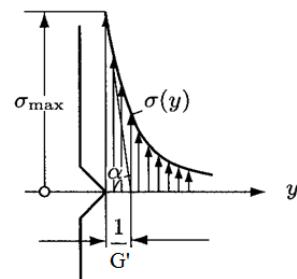


Bild 10-4 Spannungsgefälle G'

Wie stark sich der Spannungsgradient auf die *Kerbwirkungszahl* β_k auswirkt, wird durch die *Stützzahl* n quantifiziert, ein Mass für die Kerbempfindlichkeit des Werkstoffes.

Der Zusammenhang zwischen *Stützzahl* n und *bezogenem Spannungsgefälle* G' sowie die Werte G' für häufige Kerbfälle wird durch die Diagramme TB 3-7 in [4] dargestellt.

Mit der so gefundenen Stützzahl n kann man die *Kerbwirkungszahl* β_k aus der Formzahl α_k berechnen. Mit den direkt aus DIN 743 stammenden Wechselfestigkeiten gilt dann

$$\boxed{\beta_k = \frac{\alpha_k}{n}} \quad (10-9)$$

Sind die Ausrundungsradien sehr klein, beispielsweise bei Passfedernuten oder Keilwellen, sind die *Formzahlen* nicht oder nur schwierig zu bestimmen. In diesen Fällen verwendet man direkt die aus Versuchen bestimmten *Kerbwirkungszahlen*. Auch eine auf eine Welle gepresste Nabe weist infolge des abrupten Querschnittsprungs eine Kerbwirkung auf, für die experimentell bestimmte Daten vorliegen, siehe TB 3-9 b) und c) in [4]. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die in TB 3-9 a) dargestellten Daten aus Hänchen/Decker [17] stammen und nicht konsistent mit DIN 743 oder FKM sind und deshalb zu meiden sind.

Spannungsgefälle treten auch bei glatten Stäben unter Biegung und Torsion auf. Sie sind verantwortlich dafür, dass beispielsweise die Wechselfestigkeit für Biegung grösser ist als diejenige für Zug/Druck sowie, dass Rundstäbe mit kleineren Durchmessern grössere Biegewechselfestigkeiten aufweisen als solche mit grösseren Durchmessern. Rechnerisch wird das in der DIN über den geometrischen Grösseneinflussfaktor K_g berücksichtigt.

Die verschiedenen Grösseneinflussfaktoren und deren Bedeutung werden weiter unten beim Einfluss der *Bauteilgrösse* diskutiert.

Werden experimentell bestimmte β_k -Werte verwendet, deren Probendurchmesser vom vorhandenen Bauteildurchmesser abweicht, sind diese wegen der Größenabhängigkeit der Kerbwirkung auf den vorhandenen Bauteildurchmesser umzurechnen.

$$\boxed{\beta_k = \beta_{k,Probe} \cdot \frac{K_{\alpha,Probe}}{K_{\alpha}}} \quad (10-10) \quad K_{\alpha,Probe} \text{ und } K_{\alpha} \text{ nach TB 3-11 d) [4]}$$

Hauptsächlich bei dynamisch hochbelasteten Bauteilen ist es sinnvoll, die Bauteilfestigkeit über die konstruktive Gestaltung zu beeinflussen. Große Radien und kontinuierliche Querschnittsübergänge begünstigen den Verlauf der Kraftlinien und ergeben damit günstige Form- und Kerbwirkungszahlen. Die Wirkung nicht vermeidbarer Kerben kann durch zusätzliche Entlastungskerben gemindert werden, da sie den Kraftfluss insgesamt sanfter umlenken. Zu vermeiden sind auch zwei Kerben in einer Ebene, siehe Passfeder in Wellenabsatz. Sie sind um mindestens 2·Kerbradius zu trennen.

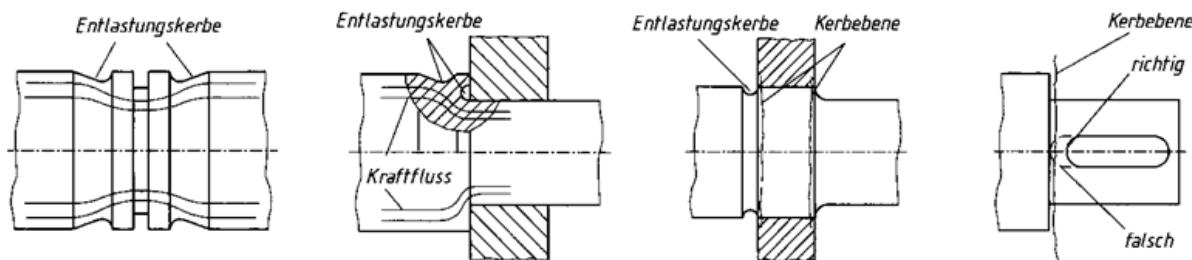


Bild 10-5 Gestaltung von Kerbstellen

Bauteilgröße

Bei Bauteilen, die größer als die Probestäbe sind, wird der Einfluss der Bauteilgröße auf die Dauerfestigkeit über 3 Faktoren berücksichtigt.

Der **technologische Größeneinflussfaktor K_t** nach Formel (10-7) berücksichtigt die Auswirkungen der Härt- bzw. Vergütbarkeit. Unterschiedliche Abkühlbedingungen an der Oberfläche und im Inneren des Bauteils führen zu unterschiedlichen Festigkeitswerten.

Der **geometrische Größeneinflussfaktor K_g** resultiert aus dem Spannungsgefälle bei Belastung auf Biegung oder Torsion. Bild 10-6 zeigt zwei verschiedene biegebeanspruchte Rundstäbe bei gleicher maximaler Spannung am Rand. Das kleinere bezogene Spannungsgefälle beim kleineren Stab begünstigt die Stützwirkung und resultiert in einer höheren Biegewechselfestigkeit.

Werte für K_g nach TB 3-11 c) [4].

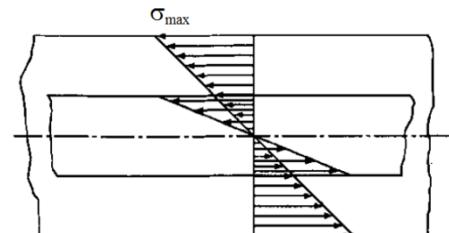


Bild 10-6 Stützwirkung und Bauteilgröße

Der **formzahlabhängige Größeneinflussfaktor K_{α}** kommt nur bei experimentell ermittelten Kerbwirkungszahlen zur Anwendung, siehe Gleichung (10-10).

Oberflächengüte

Die höchste Spannung tritt fast immer an der Bauteilloberfläche auf und damit hat ein Dauerbruch auch meist seinen Ursprung dort. Der Oberflächenzustand beeinflusst somit die Dauerfestigkeit des Bauteils erheblich.

Oberflächenrauheiten wirken wie eine Reihe kleiner Kerben, die Spannungsspitzen hervorrufen und die Dauerfestigkeit des Bauteils mindern. Der Einfluss der Rauheit wächst mit zunehmender Zugfestigkeit des Werkstoffs und wird durch den Einflussfaktor der Oberflächenrauheit K_O berücksichtigt, siehe TB 3-10 in [4]. Die Werte sind gesondert für Normalspannungen $K_{O\sigma}$ und Schubspannungen $K_{O\tau}$ zu bestimmen.

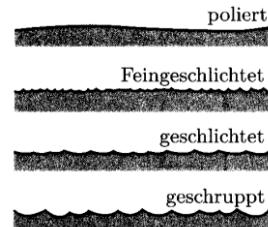


Bild 10-7 Oberflächenrauheit

Bei Verwendung von experimentell bestimmten Kerbwirkungszahlen, z.B. bei Welle-Nabe-Verbindungen, entfällt nach DIN 743 [15] die Berechnung des Oberflächenfaktors.

Oberflächenverfestigung

Verfahren wie Härteln, Kugelstrahlen, Rollen, Nachpressen von Bohrungsrändern u.a. führen zu Druckeigenspannungen in den Oberflächenbereichen der so behandelten Bauteile. Da diese beim Aufbringen von Zugbelastungen zuerst abgebaut werden, resultiert unter Last auf der gefährdeten Zugseite ein geringeres Spannungsniveau und damit eine Verbesserung der Dauerfestigkeit. Der Einfluss ist vor allem von der Dicke und Härte der verfestigten Schicht abhängig und nimmt mit der Bauteildicke ab. Die Erhöhung der Dauerfestigkeit wird mit dem Oberflächenverfestigungsfaktor K_V berücksichtigt, siehe TB 3-12 in [4].

Konstruktionsfaktor (Gesamteinflussfaktor)

Der Konstruktionsfaktor K_D erfasst die Gesamtwirkung der konstruktionsbedingten Einflüsse nach DIN 743 wie folgt, wobei für die vier Grundbeanspruchungen Zug/Druck, Biegung, Schub und Torsion sich grundsätzlich vier verschiedene Konstruktionsfaktoren ergeben:

$$K_D = \left(\frac{\beta_k}{K_g} + \frac{1}{K_O} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \quad (10-11)$$

Gestaltfestigkeit des Bauteils

Unter der Gestaltfestigkeit versteht man die Dauerfestigkeit eines beliebig gestalteten Bauteils bei Berücksichtigung aller festigkeitsmindernden Einflüsse. Sie ist massgebend für den Dauerfestigkeitsnachweis und unterscheidet sich erheblich von der Dauerfestigkeit des Probestabes. Zunächst kann mit dem Konstruktionsfaktor die Gestaltwechselfestigkeit σ_{GW} bzw. τ_{GW} des gekerbten Bauteils bestimmt werden.

$$\sigma_{GW} = \frac{\sigma_W}{K_D} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{GW} = \frac{\tau_W}{K_D} \quad (10-12)$$

Für beliebige Belastungen mit von Null verschiedenen Mittelspannungen muss die Gestaltausschlagfestigkeit σ_{GA} bestimmt werden. Bild 10-8 zeigt die Verhältnisse im Smith Diagramm. Die Wechselfestigkeit σ_W und Ausschlagfestigkeit σ_A sind Werkstoffkennwerte, wogegen sich die Gestaltwechselfestigkeit σ_{GW} und die Gestaltausschlagfestigkeit σ_{GA} auf das Bauteil beziehen. σ_a ist die vorhandene Spannungsamplitude bei gegebener Mittelspannung σ_m .

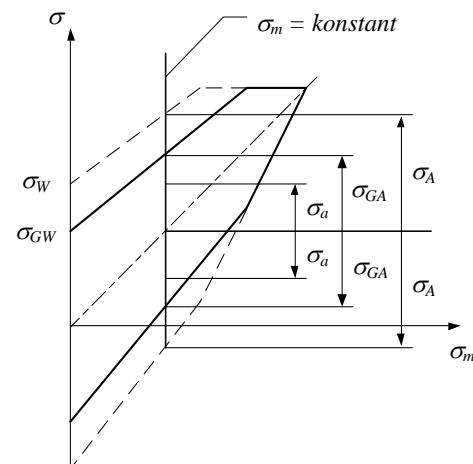


Bild 10-8 Smith Diagramm

Überlastungsfälle

Die in Bild 10-8 dargestellten Verhältnisse gehen davon aus, dass bei Erhöhung der dynamischen Last die Mittelspannung konstant bleibt ($\sigma_m = \text{konst.}$). Das ist z.B. bei einer feststehenden Achse einer Seil-Umlenkscheibe der Fall, da sich die Mittelspannung aus der Seilspannung ergibt. Die Spannungsamplitude jedoch ist eine dynamische Größe, welche mit den Betriebsverhältnissen (Seilgeschwindigkeit) ändert.

Bei einer Getriebewelle allerdings sind die Verhältnisse anders. Sowohl Mittelspannung – verursacht durch Torsion – als auch Spannungsamplitude – infolge Biegung – wachsen bei zunehmender Last proportional an ($\kappa = \text{konst.}$). Es gibt auch Anwendungen, bei denen die untere Spannung bei Lasterhöhung konstant bleibt ($\sigma_u = \text{konst.}$). Zur Berechnung der jeweiligen Gestaltausschlagfestigkeit muss also bekannt sein, wie sich statische und dynamische Spannungsanteile bei einer Belastung über der Nennlast (Überlastung) ändern. Dies wird mit den folgenden drei Überlastungsfällen berücksichtigt, Bild 10-9.

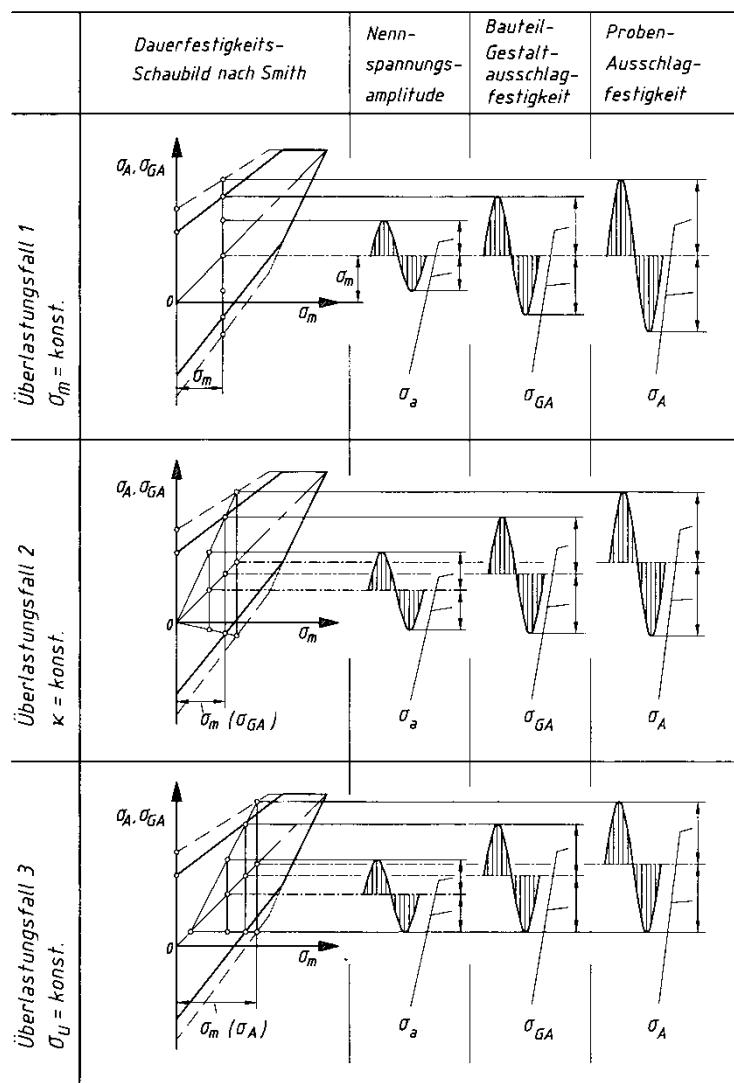


Bild 10-9 Gestaltausschlagfestigkeit für die 3 Überlastungsfälle

Entsprechend dem gewählten Überlastungsfall können die ertragbaren Ausschlagsspannungen – die Gestaltausschlagfestigkeiten – bei bekannter Mittelspannung den Smith-Diagrammen in Bild 10-9 entnommen, bzw. nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{GA} &= \sigma_{GW} - \psi_\sigma \cdot \sigma_{mv} \\ \tau_{GA} &= \tau_{GW} - \psi_\tau \cdot \tau_{mv}\end{aligned}\quad (10-13) \quad \text{für } \sigma_m = \text{konst.}$$

Der häufig vorkommende Überlastungsfall mit $\kappa = \text{konst.}$ (Getriebewelle) sollte auch angewendet werden, wenn die Belastung keinem Fall eindeutig zugeordnet werden kann.

$$\begin{aligned}\sigma_{GA} &= \frac{\sigma_{GW}}{1 + \psi_\sigma \cdot (\sigma_{mv}/\sigma_a)} \\ \tau_{GA} &= \frac{\tau_{GW}}{1 + \psi_\tau \cdot (\tau_{mv}/\tau_a)}\end{aligned}\quad (10-14) \quad \text{für } \kappa = \text{konst.}$$

Für Spannungsverhältnisse $\kappa > 0$ kommt es im Smith-Diagramm je nach Werkstoff zu einem Knick, so dass beide Gleichungen (10-13) und (10-14) angepasst werden müssen. Bei duktilen Werkstoffen kann dies im Allgemeinen vernachlässigt werden, so dass die Gleichungen ihre Gültigkeit behalten; genauere Berechnungen nach DIN 743 [15] oder FKM-Richtlinie [16]. Bei hohen Mittelspannungen kann die Oberspannung die Fließgrenze erreichen, so dass zwingend immer auch ein statischer Festigkeitsnachweis erforderlich ist.

Die *Mittelspannungsempfindlichkeit* ψ_σ bzw. ψ_τ ergeben sich nach [4] mit:

$$\begin{aligned}\psi_\sigma &= a_M \cdot R_m + b_M \\ \psi_\tau &= f_\tau \cdot \psi_\sigma\end{aligned}\quad (10-15) \quad a_M \text{ und } b_M \text{ nach TB 3-13 und } f_\tau \text{ nach TB 3-2 [4]}$$

Mit der *Vergleichsmittelspannung* σ_{mv} wird die bei kombinierter Belastung auftretende gegenseitige Beeinflussung der Mittelspannungen berücksichtigt. Sie ergibt sich je nach Festigkeitshypothese; für die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) lautet sie

$$\begin{aligned}\sigma_{mv} &= \sqrt{(\sigma_{zdm} + \sigma_{bm})^2 + 3 \cdot \tau_{tm}^2} \\ \tau_{mv} &= f_\tau \cdot \sigma_{mv}\end{aligned}\quad (10-16) \quad \text{für GEH}$$

Für andere Festigkeitshypothesen und hier nicht behandelte Überlastungsfälle s. FKM [16].

Sicherheiten

Für den Dauerfestigkeitsnachweis werden die Sicherheiten aus Gestaltausschlagfestigkeiten und vorhandenen Spannungsamplituden σ_a bzw. τ_a auf Basis von Nennspannungen gebildet und den Mindestsicherheiten gegenübergestellt.

$$S_D = \frac{\sigma_{GA}}{\sigma_a} \geq S_{D,min} \quad \text{bzw.} \quad S_D = \frac{\tau_{GA}}{\tau_a} \geq S_{D,min} \quad (10-17)$$

Gleichung (10-17) ist für Einzelbeanspruchungen anzuwenden, d.h. wenn eine der vier Grundbeanspruchungen dynamisch wirkt. Ist ein Bauteil durch zwei oder mehr Beanspruchungen dynamisch belastet, ergibt sich die Festigkeitsbedingung auf Basis der Gestaltänderungsenergiehypothese. Sie lautet dann für den Nachweis gegen Dauerbruch:

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zda}}{\sigma_{zdGA}} + \frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bGA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{sa}}{\tau_{sga}} + \frac{\tau_{ta}}{\tau_{tga}}\right)^2}} \geq S_{D,min} \quad (10-18) \quad \text{für GEH}$$

Aufgrund vorhandener Unsicherheiten bei den Lastannahmen, beim Berechnungsverfahren und bei den Werkstoffkennwerten wird die erforderliche Mindestsicherheit gegen Dauerbruch im Allgemeinen mit $S_{D,min} = 1,5$ angenommen. Abweichungen davon können durch branchenspezifische Vorschriften oder nach TB 3-14 in [4] vorgenommen werden.

Der Dauerfestigkeitsnachweis für *duktile und spröde Gusswerkstoffe* wird analog zum statischen Nachweis nach der „gemischten Hypothese“ geführt, siehe FKM [16].

10.3 Hinweise zur FKM

Die Wechselfestigkeiten für Zug/Druck und Schub können nach FKM [16] aus der Zugfestigkeit wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{zdWN} &\cong f_{W\sigma} \cdot R_{mN} \\ \tau_{sWN} &\cong f_{W\tau} \cdot f_{W\sigma} \cdot R_{mN}\end{aligned}\quad (10-19) \quad f_{W\sigma} \text{ und } f_{W\tau} \text{ nach TB 3-2 [4]}$$

Mit dieser Formel können nur die Wechselfestigkeiten für *Zug/Druck* und *Schub* bestimmt werden. Die Wechselfestigkeiten für *Biegung* und *Torsion* sind grundsätzlich für den Nachweis nach FKM nicht notwendig, sie können aber mit Hilfe der Stützzahl des glatten Probestabes n_0 berechnet werden, siehe weiter unten.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Wechselfestigkeiten nach FKM sich von denjenigen nach DIN 743 geringfügig unterscheiden. Es ist deshalb dringend zu empfehlen, den Festigkeitsnachweis entweder konsequent nach DIN oder nach FKM durchzuführen.

Spannungsgefälle treten auch bei glatten Stäben unter Biegung und Torsion auf. Sie sind verantwortlich dafür, dass beispielsweise die Wechselfestigkeit für Biegung grösser ist als diejenige für Zug/Druck. Rechnerisch wird das in der FKM über die Stützzahl n_0 bzw. das *bezogene Spannungsgefälle* G'_0 des glatten Stabes berücksichtigt, siehe Bild 10-10.

$$G'_0 = \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \left(\frac{\sigma_{max}}{d/2} \right) = \frac{2}{d}$$

Der Zusammenhang zwischen *Stützzahl* und *bezogenem Spannungsgefälle* wird nach FKM in Bild 10-11 dargestellt, wobei die Bezeichnungen in der FKM von denjenigen in der DIN wie folgt abweichen:

$$G_\sigma = G'$$

$$n_\sigma = n$$

Die Kurven unterscheiden sich geringfügig vom Diagramm der DIN, siehe TB 3-7 in [4].

Für gekerbte Bauteile gelten die bekannten Zusammenhänge zwischen *Stützzahl* und *bezogenem Spannungsgefälle*.

Nach FKM folgt die *Kerbwirkungszahl* β_k aus der Formzahl α_k – in Abweichung zur DIN – sinngemäss:

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_0 \cdot n} \quad (10-20)$$

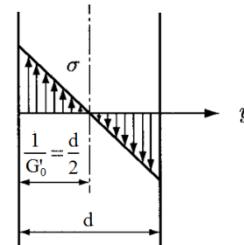


Bild 10-10 Spannungsgefälle G'_0

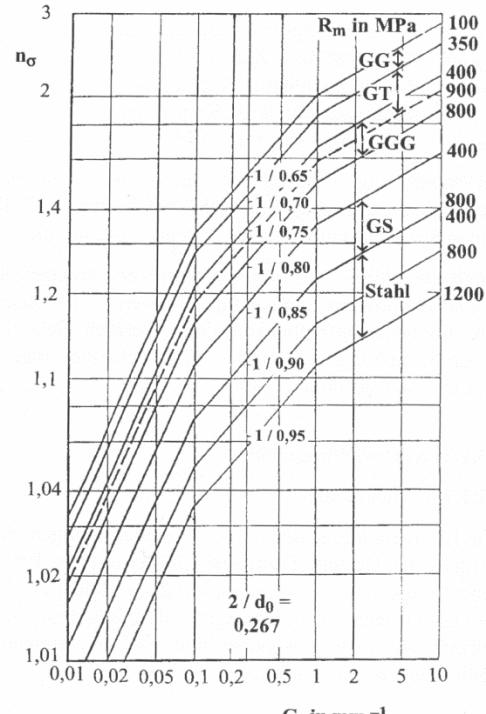


Bild 10-11 Stützzahl nach FKM

Sowohl die Stützzahl n (Kerbe) als auch die Stützzahl n_0 (glatter Stab) werden aus Bild 10-11 bestimmt. In der FKM sind zusätzlich Gleichungen der Kurven angegeben.

Werden die Wechselfestigkeiten nach Formel (10-19) bestimmt, so werden beide Anteile der Stützwirkung, die des glatten und die des gekerbten Stabes berücksichtigt. Aus diesem Grund fehlt in der FKM der *geometrische Größeneinflussfaktor* K_g bzw. bei der Bestimmung des Konstruktionsfaktor K_D wird $K_g = 1$ gesetzt.

$$K_D = \left(\beta_k + \frac{1}{K_O} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \quad (10-21)$$

Der Zusammenhang zwischen der Wechselfestigkeit für Biegung und Zug/Druck bzw. Torsion und Schub ist gegeben durch

$$\sigma_{bw} = n_0 \cdot \sigma_{zdw} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{tw} = n_0 \cdot \tau_{sw}$$

Diese Beziehungen sind rein informativ und für den rechnerischen Nachweis nicht notwendig.

Beispiel

Ein Flachstahl 18 x 6 mm aus Vergütungsstahl C55E mit Bohrung Ø 8 mm wird wechselnd mit $F = 5\text{kN}$ belastet. Die Bohrung ist geschruppt ($R_z \approx 200\mu\text{m}$). Wie gross ist die Sicherheit gegen Dauerbruch?

Die Wechselfestigkeit von C55E ist

$$\sigma_{zawN} = f_{w\sigma} \cdot R_{mN} = 0,45 \cdot 800 = 360 \text{ N/mm}^2$$

mit dem technologische Größeneinflussfaktor K_t

$$\sigma_{zdw} = K_t \cdot \sigma_{zawN} = 1,0 \cdot 360 = 360 \text{ N/mm}^2$$

Formzahl aus FKM, Abb. 5.2-18

$$r/b = 4/10 = 0,4$$

$$t/r = 4/4 = 1,0$$

$$\rightarrow K_{t,zd} = \alpha_k = 2,2$$

Nach FKM ist das bezogene Spannungsgefälle

$$G_\sigma = G' = \frac{2,3}{r} = \frac{2,3}{4} = 0,575$$

Aus Bild 10-11 mit $R_m = 800 \text{ N/mm}^2$

$$\rightarrow n = 1,12$$

Die Kerbwirkungszahl wird $\beta_k = \frac{\alpha_k}{n} = \frac{2,2}{1,12} = 1,96$

Der Rauheitsfaktor nach TB 3-10 in [4] mit $R_m = 800 \text{ N/mm}^2 \rightarrow K_{O\sigma} = 0,7$

Der Konstruktionsfaktor wird damit $K_D = \left(\beta_k + \frac{1}{K_{O\sigma}} - 1 \right) = \left(1,96 + \frac{1}{0,7} - 1 \right) = 2,4$

Die Gestaltwechselfestigkeit $\sigma_{GW} = \frac{\sigma_{zdw}}{K_D} = \frac{360}{2,4} = 150 \text{ N/mm}^2$

Die vorhandene Nennspannung $\sigma_{zda} = \frac{F}{s \cdot (B - 2t)} = \frac{5000}{6 \cdot (18 - 8)} = 83,3 \text{ N/mm}^2$

Die Sicherheit gegen Dauerbruch wird $S_D = \frac{\sigma_{GW}}{\sigma_{zda}} = \frac{150}{83,3} = 1,8$

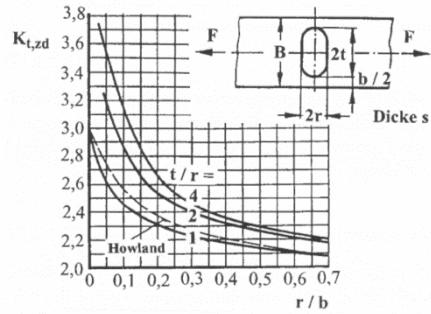
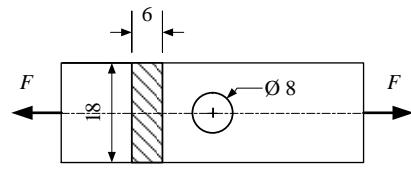


Abb. 5.2-18 Formzahlen für den Flachstab mit Bohrung oder quer liegendem Langloch bei Zugdruck, nach Peterson (Ref. Frocht und Leven), spannungsoptisch. Kreisförmige Bohrung außerdem nach Peterson (Ref. Howland), elastizitätstheoretisch. Bohrung: $t / r = 1$; Grenzwert für grosse Werte r / b : $K_{t,z} = 2$.

$$\text{Nennspannung: } S_{zd} = \frac{F}{s \cdot (B - 2t)} \quad . \quad (5.2.19)$$

10.4 Hinweise zum Betriebsfestigkeitsnachweis

Der in Kapitel 10.2 beschriebene Dauerfestigkeitsnachweis geht davon aus, dass alle dynamischen Beanspruchungen unterhalb der Dauer- bzw. Gestaltfestigkeit liegen. Ausserdem wird bei der Anwendung der auf Festigkeitshypothesen beruhenden Gleichung (10-19) von synchronen Belastungsverläufen ausgegangen, d.h. Spannungsmaxima aus verschiedenen Belastungen treten immer zeitgleich auf.

Treffen diese Annahmen nicht zu, so können mit einem Betriebsfestigkeitsnachweis auch allgemeine dynamische Lastverläufe analysiert werden. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass der Last- bzw. Spannungsverlauf bekannt ist und durch Auszählen und Klassifizieren ein Lastkollektiv erstellt werden kann. Ein Lastkollektiv ist eine Folge von Schwingspielen auf bestimmtem Lastniveau $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ und von definierter Anzahl Lastspielen $n_1, n_2 \dots$.

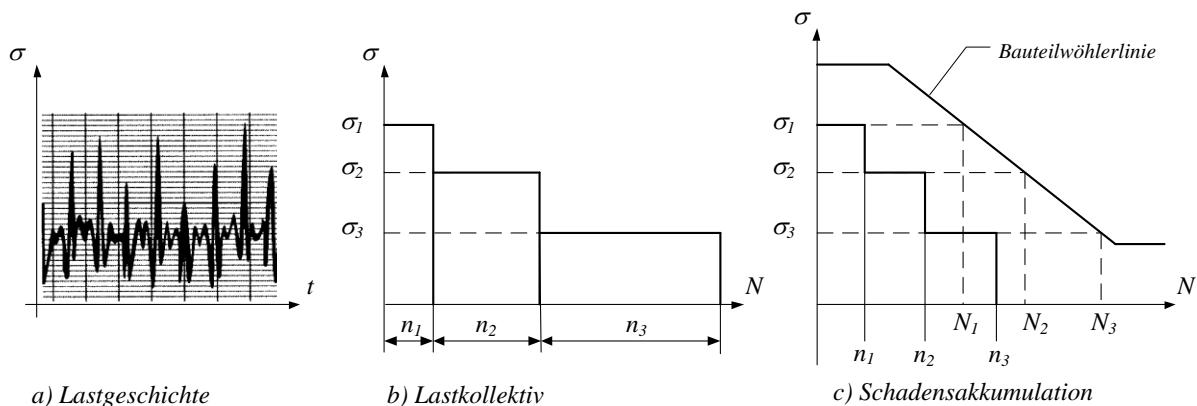


Bild 10-12 Betriebsfestigkeitsnachweis

Das Lastkollektiv wird in ein Wöhlerdiagramm übertragen, welches mit allen Einflussgrössen auf das Bauteil umgerechnet ist und somit die Gestaltfestigkeit darstellt (Bauteilwöhlerlinie). Darin ist abzulesen, dass die Ausschlagsspannung σ_l insgesamt n_l mal vorkommt, aber N_l mal ertragen werden könnte. Nach der Theorie von Palmgren-Miner ist die Schadenssumme

$$S = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots$$

Theoretisch ist der Bruch bei $S = 1$ zu erwarten.

Statistische Untersuchungen haben aber gezeigt, dass S deutlich unter 1 liegen kann.

Gemäss DIN 743 [15] und FKM [16] wird empfohlen, die Schadenssumme auf $S \leq 0,3$ zu begrenzen.

Neben der Betriebsfestigkeit ist auch ein Nachweis der Zeitfestigkeit möglich, siehe Bild 10-13.

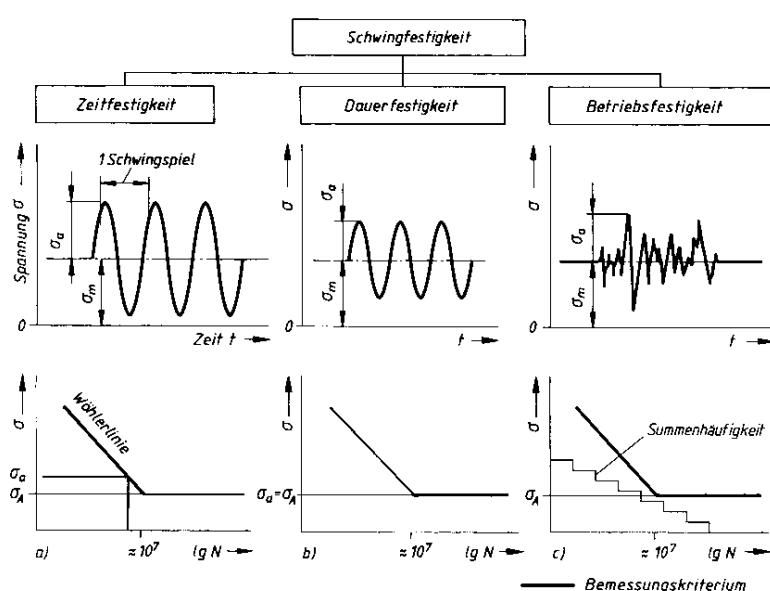


Bild 10-13 Arten der Ermüdungsnachweise

11 Statisch unbestimmte Systeme

In der Statik, Kapitel 5.5 sind die Begriffe „statisch bestimmt“ und „statisch unbestimmt“ eingeführt worden. Danach ist die Lagerung eines Bauteils *statisch bestimmt*, wenn man aus den verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen die unbekannten Auflagerreaktionen berechnen kann. Anschaulich heisst das, dass genau so viele Lager vorhanden sind, wie zur Verhinderung einer Bewegung (Mechanismus) erforderlich sind. Da für statisch unbestimmt gelagerte Systeme nicht genügend Gleichungen aus dem Gleichgewicht vorhanden sind, müssen zusätzliche Bedingungen aus der Deformation der Bauteile beigezogen werden. Als Beispiel sei das im Kapitel 1 gelöste, statisch unbestimmte Stabproblem, Bild 3-1, betrachtet. Zusätzlich zum Gleichgewicht in Längsrichtung wird die Verformung, hier mit Hilfe des HOOKEschen Gesetzes benötigt. Bei auf Biegung belasteten Trägern werden zusätzliche Aussagen über die Durchbiegung verwendet. Ein statisch unbestimmtes System ist also grundsätzlich lösbar, allerdings steigt der Rechenaufwand gegenüber statisch bestimmten Systemen – je nach Grad der statischen Unbestimmtheit – beträchtlich an.

Als Grad der statischen Unbestimmtheit wird die Anzahl der überzähligen Auflagerreaktionen bezeichnet. Diese berechnet sich aus der Differenz der Anzahl Unbekannten (U) minus der Anzahl Gleichungen (G). Der einseitig eingespannte Träger mit einem gelenkigen Auflager nach Bild 11-1 ist 1-fach statisch unbestimmt, da $(U - G) = (4 - 3) = 1$. Der Grad der statischen Unbestimmtheit ergibt sich für die anderen beiden abgebildeten Systeme sinngemäß. Man kann den ersten Träger durch Wegnahme des rechten Lagers auf ein statisch bestimmtes System zurückführen. Man nennt dies ein *reduziertes System*.

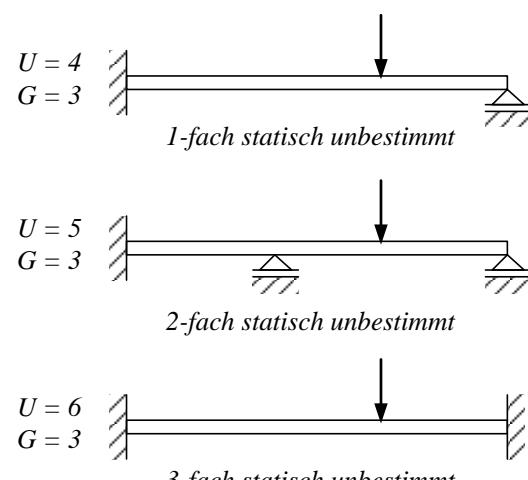


Bild 11-1 Grad der statischen Unbestimmtheit

Über dieses reduzierte System führen die üblichen Methoden zur Lösung statisch unbestimmter Probleme. Handelt es sich beim reduzierten System um einen Standardlastfall, so kann mit der *Überlagerung bekannter Lastfälle*, Kapitel 11.1 gearbeitet werden. Im Allgemeinen werden die Verformungen mit Hilfe der *Formänderungsarbeit*, Kapitel 11.2 berechnet. Im Folgenden beschränken wir uns auf Biegeprobleme, doch sind die beiden Methoden für alle Belastungen und auch für zusammengesetzte Beanspruchungen sinngemäß anwendbar. Für statisch unbestimmte, reine Biegeprobleme können die Biegelinie und damit auch die Biegemomente grundsätzlich auch aus den Integrationsbeziehungen gewonnen werden, siehe Kapitel 4.3.1, Integrationsmethode. Dieser Weg kann allerdings sehr aufwendig sein und hat in der Praxis wenig Bedeutung.

Bei der konstruktiven Gestaltung der Lagerung wird im Allgemeinen eine statisch bestimmte Lagerung bevorzugt, z.B. Los- und Festlager einer Welle. Wird eine Welle drei- oder mehrfach gelagert, so können sich die Lagetoleranzen negativ auf die Lagerkräfte und die Beanspruchung auswirken, je nachdem, wie gut die Lager fluchten, siehe Bild 11-2. Lagetoleranzen beanspruchen die Welle bereits ohne äussere Last!

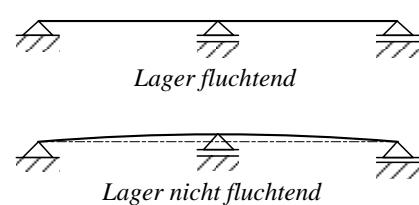


Bild 11-2 Einfluss der Lagetoleranzen

Liegen nicht zwingende Gründe für eine statisch unbestimmte Lagerung – beispielsweise zu grosse Durchbiegung – vor, sollte grundsätzlich statisch bestimmt konstruiert werden.

11.1 Überlagerung bekannter Belastungsfälle

Diese anschauliche Methode eignet sich sehr gut für einfache Systeme. Sie wird im Folgenden anhand eines statisch unbestimmten Biegeproblems dargelegt. Der Träger ist links eingespannt (A) und rechts gelenkig gelagert (B) und damit 1-fach statisch unbestimmt.

Zur Lösung des statisch unbestimmten Systems wird dieses zunächst durch Entfernen eines Auflagers auf ein reduziertes System zurückgeführt.

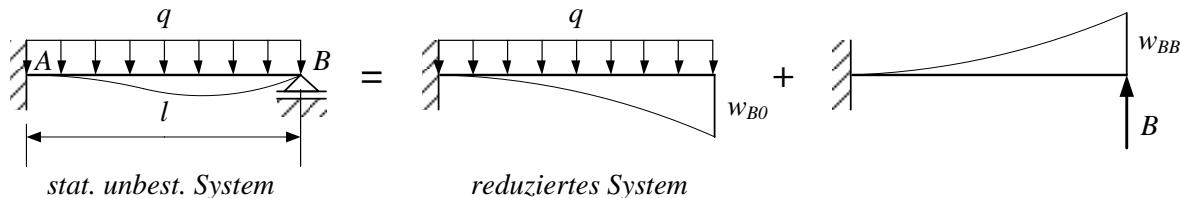


Bild 11-3 Reduktion des statisch unbestimmten Systems auf zwei statisch bestimmte Systeme

Für das reduzierte System ist die Durchbiegung w_{B0} an der Stelle, wo das Lager entfernt wurde bekannt (Standardfall). An der Stelle des entfernten Lagers wird nun an einem weiteren System die unbekannte Lagerkraft B mit der Durchbiegung w_{BB} eingeführt (Standardfall). Da die Durchbiegung am Lager B effektiv Null ist, müssen die beiden Durchbiegungen w_{B0} und w_{BB} gleich gross sein. Das statisch unbestimmte System ergibt sich also als *Überlagerung* der beiden bekannten, statisch bestimmten Belastungsfälle.

$$w_{B0} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot EI} = \frac{B \cdot l^3}{3 \cdot EI} = w_{BB} \rightarrow B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

Die Reduktion kann alternativ erfolgen, indem die 3-wertige Einspannung durch ein 2-wertiges Gelenk ersetzt wird. Der an der Stelle A im reduzierten System auftretende Biegewinkel φ_{A0} muss in diesem Fall durch einen infolge des Einspannmomentes M_A verursachten Biegewinkel φ_{AA} kompensiert werden.

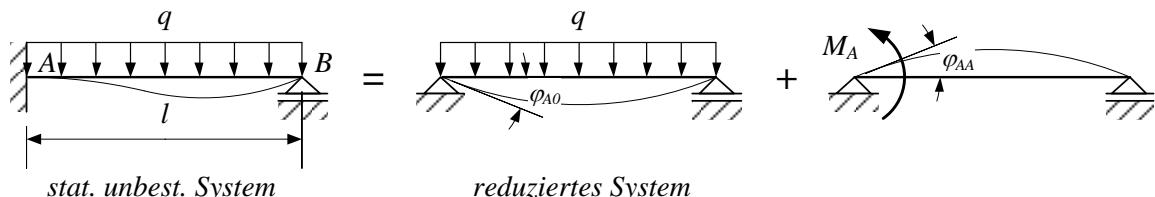


Bild 11-4 Reduktion des statisch unbestimmten Systems auf zwei statisch bestimmte Systeme (Variante)

$$\varphi_{A0} = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI} = \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot EI} = \varphi_{AA} \rightarrow M_A = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$$

Beide Varianten erlauben schliesslich die Berechnung sämtlicher Auflagerreaktionen über die Gleichgewichtsbedingungen.

$$A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l \quad B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \quad M_A = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$$

Sind diese erst einmal bekannt, können die Schnittgrössen Querkraft und Biegemoment berechnet werden. Diese können grundsätzlich wie bei statisch bestimmten Trägern gemäss Statik, Kapitel 6.1 ermittelt werden, wobei die Lagerkraft B als äussere Last betrachtet wird. Da es sich hier um Standardfälle nach Tabelle B-2 handelt, für welche Querkraft und Biegemoment bekannt sind, können die Schnittgrössen am statisch unbestimmten System ebenfalls durch Überlagerung der Schnittgrössen der beiden statisch bestimmten Systeme gewonnen werden.

11.2 Formänderungsarbeit

Bei komplexeren Systemen, die sich nicht in statisch bestimmte Standardfälle aufteilen lassen, berechnet man die Deformationen mit Hilfe der Formänderungsarbeit. Diese Methode basiert darauf, dass die durch äussere Kräfte verrichtete Arbeit in elastische Formänderungsenergie übergeht. Man nennt sie deshalb auch etwa Energiemethode oder Arbeitssatz.

Die Überlegungen sind analog dem Kapitel 11.1, es lässt sich aber aufgrund des Formalismus auf n-fach statisch unbestimmte Systeme ausbauen. Das Vorgehen sei hier am gleichen Beispiel wie im vorigen Abschnitt erläutert. Durch Entfernen der *Unbestimmten* X_1 an der Stelle 1 wird ein reduziertes System, das sogenannte 0-System definiert. An der Stelle 1 wird an einem weiteren statisch bestimmten System die Einheitskraft „1“ eingeführt (1-System).

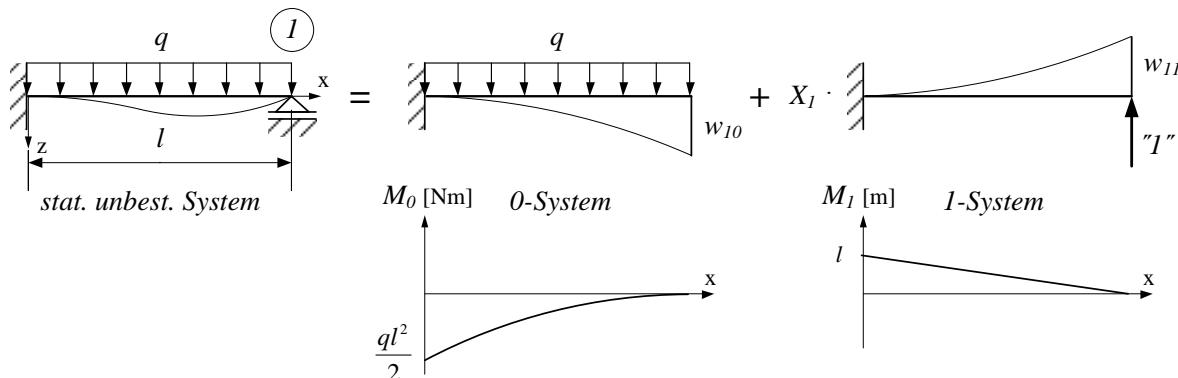


Bild 11-5 Superposition und Momentenverlauf für 0- und 1-System

Die Biegemomente M_0 im 0-System und M_1 im 1-System können berechnet werden.

Die Verschiebung w_{10} an der Stelle 1 infolge der Belastung im 0-System berechnet sich nach Kapitel 4.3.3 unter Verwendung der Integrationstafel Tabelle 4-1 wie folgt.

$$w_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l M_0 \cdot M_1 \cdot dx \quad (11-1) \quad \text{hier} \quad w_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{4} \cdot l \cdot \left(-\frac{q \cdot l^2}{2} \right) \cdot l = -\frac{q \cdot l^4}{8 \cdot EI}$$

Die Verschiebung w_{11} an der Stelle 1 infolge Einheitslast berechnet sich sinngemäss.

$$w_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l M_1 \cdot M_1 \cdot dx \quad (11-2) \quad \text{hier} \quad w_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot l \cdot l = \frac{l^3}{3 \cdot EI}$$

Soll die Verschiebung am Lager 1 verschwinden muss folgende Beziehung gelten.

$$w_{10} + X_1 \cdot w_{11} = 0$$

Damit kann die Unbestimmte X_1 berechnet werden.

$$X_1 = -\frac{w_{10}}{w_{11}} \quad (11-3) \quad \text{hier} \quad X_1 = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

Die Unbestimmte X_1 entspricht der Lagerreaktion B im Beispiel im vorigen Abschnitt. Anstelle der Grössen w können auch Winkel φ eingesetzt werden, siehe Kapitel 4.3.3.

Mit den Gleichgewichtsbedingungen können die übrigen Lagerreaktionen berechnet werden. Das Biegemoment am statisch unbestimmten System kann als Superposition der beiden statisch bestimmten Systeme berechnet werden.

$$M_{ges} = M_0 + X_1 \cdot M_1 \quad (11-4)$$

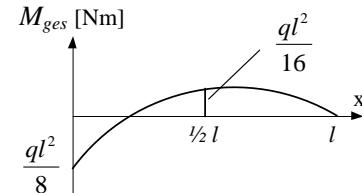


Bild 11-6 gesamtes Biegemoment

Zur Berechnung der Deformationen eines statisch unbestimmt gelagerten Trägers greifen wir ebenfalls auf die Methode der Formänderungsarbeit zurück.

Der Biegemomentverlauf M_{ges} infolge der realen Belastung ist mit Hilfe des 1-Systems berechnet worden und wird als bekannt vorausgesetzt. An der Stelle der gesuchten Deformation wird in einem beliebigen, statisch bestimmt gelagerten System eine weitere Einheitskraft „ $\bar{1}$ “ eingeführt. Daraus ergibt sich der Biegemomentverlauf \bar{M}_1 im $\bar{1}$ -System. Die Verschiebung ergibt sich dann nach Kapitel 4.3.3

$$w = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l M_{ges} \cdot \bar{M}_1 \cdot dx \quad (11-5)$$

Die Tatsache, dass für das $\bar{1}$ -System nicht die statisch unbestimmte Lagerung, sondern eine beliebige statisch bestimmte Lagerung verwendet werden darf, beruht auf folgender Überlegung. Nach dem Lösen des statisch unbestimmten Systems ist die Unbestimmte X_1 bekannt. Man denkt sich nun das statisch unbestimmte System durch ein statisch bestimmtes System ersetzt, an dem neben den gegebenen äusseren Lasten zusätzlich die jetzt bekannte Unbestimmte X_1 – wie eine äussere Last – angreift. Für dieses reduzierte System können die Verschiebungen nach den bekannten Regeln berechnet werden, die für statisch bestimmte Systeme gelten.

Beispiel

Für einen Träger (IPB-180) gemäss Skizze soll die Durchbiegung am freien Ende berechnet werden. Die Unbestimmte X_1 – hier die Lagerkraft beim Gelenk – und das Biegemoment M_{ges} werden mit Hilfe der Formänderungsarbeit berechnet. Es folgt $X_1 = 17,5 \text{ kN}$ und das Biegemoment gemäss Bild 11-7.

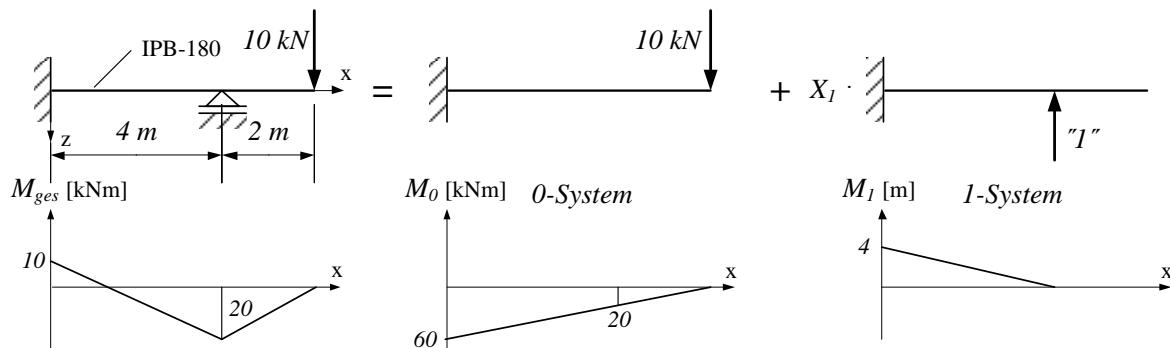


Bild 11-7 Momentenverlauf für 0-System, 1-System und Gesamtsystem

Zur Berechnung der Durchbiegung wird am reduzierten System die Einheitskraft $\bar{1}$ eingeführt.

Querschnittswert IPB-180

$$I = 3830 \text{ cm}^4$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

Es ist auf einheitliche Einheiten zu achten, hier z.B. kN und m.

$$EI = 8043 \text{ kNm}^2$$

Integration mit der Tabelle 4-1

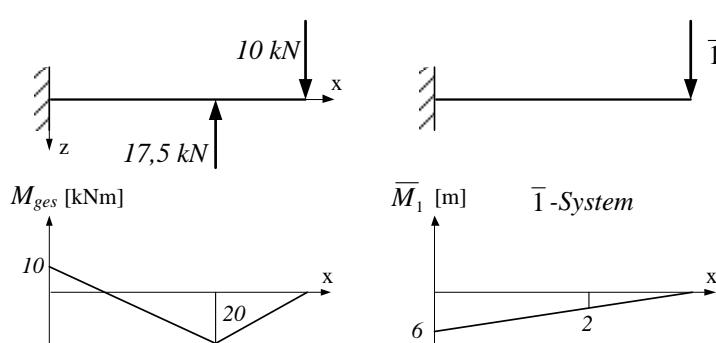


Bild 11-8 Momentenverlauf für Gesamtsystem und $\bar{1}$ -System

$$w = \frac{1}{8043} \left\{ \frac{1}{6} \cdot 4(2 \cdot 10(-6) + 2(-20)(-2) + 10(-2) + (-20)(-6)) + \frac{1}{3} \cdot 2(-20)(-2) \right\} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{\underline{8,3 \text{ mm}}}$$

11.3 Hinweise zu *n-fach statisch unbestimmten Systemen*

Das Verfahren mit Hilfe der Formänderungsarbeit eignet sich ebenfalls zur Lösung mehrfach statisch unbestimmt gelagerter Bauteile.

Bei einem *n-fach statisch unbestimmten System* müssen zunächst n Bindungen gelöst werden. Dadurch entsteht ein statisch bestimmtes 0-System. Die n Unbestimmten X_i erfordern n zusätzliche Hilfssysteme. In jedem Hilfssystem wirkt eine Einheitslast an der Stelle, wo die Bindung gelöst wurde. Die Unbestimmten erhält man dann aus den n Bedingungen für die Verschiebungen in den Lagern:

$$w_{10} + X_1 \cdot w_{11} + X_2 \cdot w_{12} + \dots + X_n \cdot w_{1n} = 0$$

$$w_{20} + X_1 \cdot w_{21} + X_2 \cdot w_{22} + \dots + X_n \cdot w_{2n} = 0$$

.....

$$w_{n0} + X_1 \cdot w_{n1} + X_2 \cdot w_{n2} + \dots + X_n \cdot w_{nn} = 0$$

Die Verformungen werden über die Formänderungsarbeit bestimmt.

Im 0-System lauten die Beziehungen: $w_{k0} = \frac{1}{EI} \int M_k \cdot M_0 \cdot dx$

und in den weiteren Systemen: $w_{ki} = \frac{1}{EI} \int M_k \cdot M_i \cdot dx$

Das *2-fach statisch unbestimmte System* wird aufgeteilt in ein statisch bestimmtes 0-System sowie ein „1“-System und ein „2“-System. X_1 und X_2 sind die Lagerkräfte bei (1) und (2).

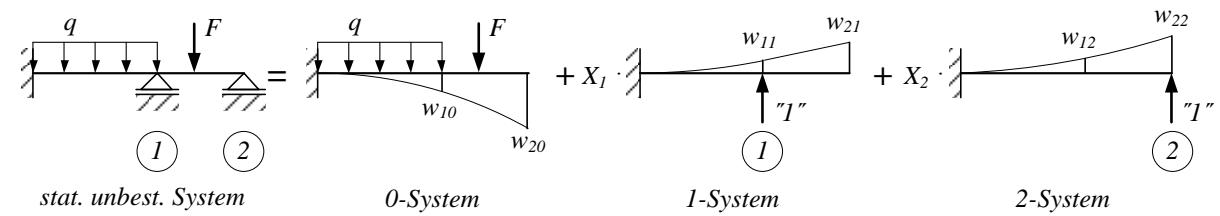


Bild 11-9 2-fach statisch unbestimmtes System

Die Verschiebungen in den Lagern bei (1) und (2) sind:

$$w_{10} = \frac{1}{EI} \int M_1 \cdot M_0 \cdot dx \quad w_{20} = \frac{1}{EI} \int M_2 \cdot M_0 \cdot dx$$

$$w_{11} = \frac{1}{EI} \int M_1 \cdot M_1 \cdot dx \quad w_{21} = w_{12} = \frac{1}{EI} \int M_2 \cdot M_1 \cdot dx \quad w_{22} = \frac{1}{EI} \int M_2 \cdot M_2 \cdot dx$$

Die Bedingungen für die zwei Verschiebungen in den beiden Lagern bei (1) und (2) lauten:

$$w_{10} + X_1 \cdot w_{11} + X_2 \cdot w_{12} = 0$$

$$w_{20} + X_1 \cdot w_{21} + X_2 \cdot w_{22} = 0$$

Damit lassen sich die Unbestimmten X_1 und X_2 berechnen.

A Literatur

- [1] Assmann, B.: Technische Mechanik, Oldenbourg
- [2] Gross, Hauger, Schnell, Schröder: Technische Mechanik, Springer
- [3] Mayr, M.: Technische Mechanik, Hanser
- [4] Roloff/ Matek: Maschinenelemente, Tabellenbuch, Vieweg
- [5] Roark's Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill
- [6] Grote, K.-H. und Feldhusen, J.: Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, Springer
- [7] Issler, Ruoss, Häfele: Festigkeitslehre – Grundlagen, Springer
- [8] Kindmann, R. und Krüger, U.: Stahlbau Teil 1: Grundlagen
- [9] AD 2000-Regelwerk: Verband der Technischen Überwachungs-Vereine ; 2011
- [10] DIN 15018 Teil 1: Krane, Grundsätze für Stahltragwerke, Berechnung
- [11] DIN 18800: Stahlbauten, Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Teil 2: Stabilitätsfälle – Knicken von Stäben und Stabwerken
- [12] EN 13796, Sicherheitsanforderungen für Seilbahnen für den Personenverkehr
- [13] EN 12663: Festigkeitsanforderungen an Wagenkästen von Schienenfahrzeugen
- [14] EN 1993-1-1: Eurocode 3 – Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau
- [15] DIN 743: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen, 2012
- [16] FKM: Rechnersicher Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile aus Stahl, Eisenguss- und Aluminiumwerkstoffen, Forschungskuratorium Maschinenbau, VDMA, 2012
- [17] Hänchen, R. und Decker, K.-H.: Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau, 1967

B Tabellen

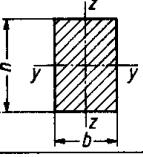
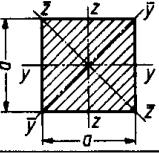
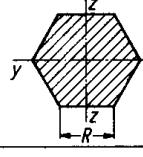
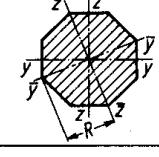
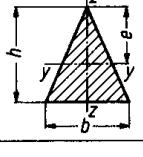
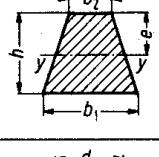
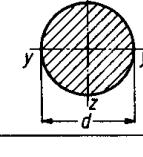
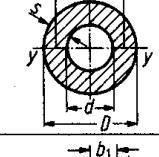
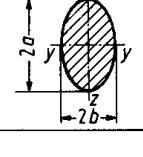
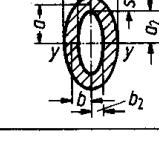
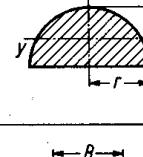
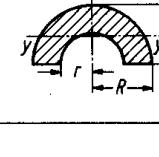
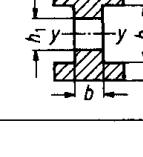
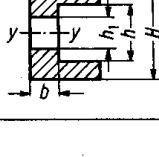
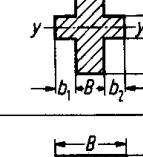
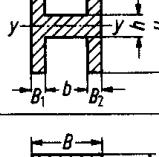
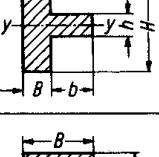
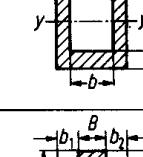
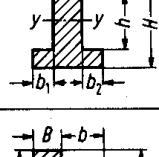
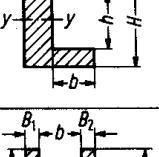
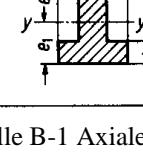
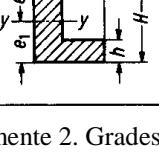
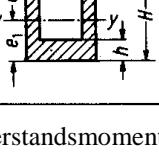
	$I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{hb^3}{12}$ $W_y = \frac{bh^2}{6}$ $W_z = \frac{hb^2}{6}$		$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$ $W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$ $I_{\bar{y}} = I_{\bar{z}} = \frac{a^4}{12}$ $W_{\bar{y}} = W_{\bar{z}} = \frac{12}{12} a^3 = 0,118 a^3$
	$I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$ $W_y = \frac{5}{8} R^3 = 0,625 R^3$ $W_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^3 = 0,5413 R^3$		$I_y = I_z = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0,638 R^4$ $W_y = W_z = 0,6906 R^3$ $I_{\bar{y}} = I_{\bar{z}} = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0,638 R^4$ $W_{\bar{y}} = W_{\bar{z}} = 0,638 R^3$
	$I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{48}$ $W_y = \frac{bh^2}{24}$ für $e = \frac{2}{3} h$ $W_z = \frac{hb^2}{24}$		$I_y = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$ $W_y = \frac{h^2}{12} \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{2b_1 + b_2}$ für $e = \frac{h}{3} \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2}$
	$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ $W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$		$I_y = I_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$ $W_y = W_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D}$ bei geringer Wanddicke $\left(\frac{s}{d_m}\right)^2 \ll 1$: $I_y = I_z = \frac{\pi d_m^3 s}{8}, W_y = W_z = \frac{\pi d_m^2 s}{4}$
	$I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_z = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $W_y = \frac{\pi a^2 b}{4}$ $W_z = \frac{\pi a b^2}{4}$		$I_y = \frac{\pi}{4} (a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2)$ $W_y = \frac{\pi (a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2)}{4 a_1}$ bei geringer Wanddicke: $I_y = \frac{\pi a^2 (a+3b)s}{4}, W_y = \frac{\pi a(a+3b)s}{4}$
	$I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 = 0,1098 r^4$ $W_y = I_y/e = 0,1908 r^3$ für $e = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) r = 0,5756 r$		$I_y = 0,1098(R^4 - r^4) - 0,283R^2 r^2 \frac{R-r}{R+r}$ $W_{y,1,2} = I_y/e_{1,2}$ für $e_1 = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r}$ bzw. $e_2 = R - e_1$
			$I_y = \frac{B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)}{12}$ $W_y = \frac{B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)}{6H}$
			$I_y = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W_y = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$ mit $B = B_1 + B_2$ $b = b_1 + b_2$
			$I_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W_y = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ mit $b = b_1 + b_2$
			$I_y = \frac{BH^3 + bh^3}{3} - (BH + bh)e_1^2$ mit $B = B_1 + B_2, b = b_1 + b_2$ $W_{y,1,2} = I_y/e_{1,2}$ für $e_1 = \frac{1}{2} \frac{BH^2 + bh^2}{BH + bh}$ bzw. $e_2 = H - e_1$

Tabelle B-1 Axiale Flächenmomente 2. Grades und Widerstandsmomente, Quelle: Dubbel [6]

<p>1</p> <p>$F_A = F_B = F/2$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = Fl/4$</p>	<p>2</p> <p>$F_A = F_B = F/l$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = fab/l$</p>	<p>3</p> <p>$F_A = F_B = F$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = fa$</p>										
<p>4</p> <p>$F_A = F_B = nF/2$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = Fl/k$</p> <table border="1"> <tr> <td>n</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr> <td>k</td><td>2,4</td><td>2,0</td><td>1,54</td><td>1,33</td></tr> </table>	n	3	4	5	6	k	2,4	2,0	1,54	1,33	<p>5</p> <p>$F_A = -Fa/l$</p> <p>$F_B = F(a+l)/l$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b min $M_b = -Fa$</p>	<p>6</p> <p>$F_A = F_B = F$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b min $M_b = -Fa$</p>
n	3	4	5	6								
k	2,4	2,0	1,54	1,33								
<p>7</p> <p>$F_A = F_B = \frac{3}{2} F$</p> <p>$F_Q$</p> <p>$M_b$ max $M_b = F\left(\frac{l}{4} - a\right)$</p>	<p>8</p> <p>$F_A = -F_B = -M/l$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = M$</p>	<p>9</p> <p>$F_A = -F_B = -M/l$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = Mb/l$</p>										
<p>10</p> <p>$F_A = F_B = 0$</p> <p>$F_Q = 0$</p> <p>M_b max $M_b = M$</p>	<p>11</p> <p>$F_A = F_B = ql/2$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = ql^2/8$</p>	<p>12</p> <p>$F_A = F_B = qcb/l$</p> <p>$F_B = qca/l$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = M_{b1} + \frac{F_A^2}{2q}$</p>										
<p>13</p> <p>$F_A = F_B = qa$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = -qa^2/2$</p>	<p>14</p> <p>$q_1 = 0$</p> <p>$F_A = q_2l/6$</p> <p>$F_B = q_2l/3$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b max $M_b = q_2l^2/15,6$</p>	<p>15</p> <p>$F_A = F$</p> <p>$M_E = Fl$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b min $M_b = -Fl$</p>										
<p>16</p> <p>$F_A = ql/2$</p> <p>$M_E = ql^2/2$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b min $M_b = -ql^2/2$</p>	<p>17</p> <p>$F_A = 0$</p> <p>$M_E = M$</p> <p>$F_Q = 0$</p> <p>M_b min $M_b = -M$</p>	<p>18</p> <p>$F_A = q_1l/2$</p> <p>$M_E = q_1l^2/6$</p> <p>F_Q</p> <p>M_b min $M_b = -q_1l^2/6$</p>										

Tabelle B-2 Biegemomenten- und Querkraftlinien für Standardfälle, Quelle Dubbel [6]

Belastungsfall	Gleichung der Biegelinie	Durchbiegung	Neigungswinkel
1	$0 \leq x \leq l/2:$ $w(x) = \frac{Fl^3}{48EI_y} \left[3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f_m = \frac{Fl^3}{48EI_y}$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{F \cdot l^2}{16EI_y}$
2	$0 \leq x \leq a:$ $w_I(x) = \frac{Fab^2}{6EI_y} \left[\left(1 + \frac{l}{b}\right) \frac{x}{l} - \frac{x^3}{abl} \right]$ $a \leq x \leq l:$ $w_{II}(x) = \frac{Fa^2 b^2}{6EI_y} \left[\left(1 + \frac{l}{a}\right) \frac{l-x}{l} - \frac{(l-x)^3}{abl} \right]$	$f = \frac{Fa^2 b^2}{3EI_y l}$ $a > b: f_m = \frac{Fb \sqrt{(l^2 - b^2)^3}}{9\sqrt{3}EI_y l}$ $a < b: f_m = \frac{Fa \sqrt{(l^2 - a^2)^3}}{9\sqrt{3}EI_y l}$ $\text{in } x_m = \sqrt{(l^2 - b^2)/3}$ $\text{in } x_m = l - \sqrt{(l^2 - a^2)/3}$	$\alpha_A = \frac{Fab(l+b)}{6EI_y l}$ $\alpha_B = \frac{Fab(l+a)}{6EI_y l}$
3a	$w(x) = \frac{Ml^2}{6EI_y} \left[2\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f = \frac{Ml^2}{16EI_y} \text{ in } x = \frac{l}{2}$ $f_m = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI_y} \text{ in } x_m = l - \frac{l}{\sqrt{3}}$	$\alpha_A = \frac{Ml}{3EI_y}$ $\alpha_B = \frac{Ml}{6EI_y}$
3b	$0 \leq x \leq l/2:$ $w_I = \frac{Ml^2}{24EI_y} \left[-\frac{x}{l} + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$ $l/2 \leq x \leq l:$ $w_{II} = \frac{Ml^2}{24EI_y} \left[-3 + 11\frac{x}{l} - 12\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f_{mI} = f_{mII} = \frac{Ml^2}{72\sqrt{3}EI_y}$ $\text{in } x_{mI} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \text{ bzw.}$ $\text{in } x_{mII} = l \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{Ml}{24EI_y}$
3c	$0 \leq x \leq a:$ $w_I(x) = \frac{Ml^2}{6EI_y} \left[\left(2 - 6\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right) \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$ $a \leq x \leq l:$ $w_{II}(x) = \frac{-Ml^2}{6EI_y} \left[3\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \left(2 + 3\left(\frac{a}{l}\right)^2\right) \frac{x}{l} + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$a > b: \text{ in } x_m = l \sqrt{\frac{2a}{l} - \frac{2}{3} - \left(\frac{a}{l}\right)^2}$ $f_m = \frac{Ml^2}{6EI_y} \left(\left(\frac{6a}{l^2} - \frac{2}{l} - \frac{3a^2}{l^3}\right) x_m - \left(\frac{x_m}{l}\right)^3 \right)$ $a < b: \text{ in } x_m = l \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3} - \left(\frac{a}{l}\right)^2}\right)$ $f_m = \frac{Ml^2}{6EI_y} \left[3\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \left(2 + 3\left(\frac{a}{l}\right)^2\right) \frac{x_m}{l} + 3\left(\frac{x_m}{l}\right)^2 - \left(\frac{x_m}{l}\right)^3 \right]$	$\alpha_A = -\frac{Ml}{6EI_y} \left(2 - 6\frac{a}{l} + 3\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)$ $\alpha_B = \frac{Ml}{6EI_y} \left(1 - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)$
3d	$w(x) = \frac{Ml^2}{6EI_y} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f = \frac{Ml^2}{16EI_y} \text{ in } x = \frac{l}{2}$ $f_m = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI_y} \text{ in } x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}$	$\alpha_A = \frac{Ml}{6EI_y}$ $\alpha_B = \frac{Ml}{3EI_y}$
4	$w(x) = \frac{q l^4}{24EI_y} \left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right]$	$f_m = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI_y}$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{q l^3}{24EI_y}$
5	$w(x) = \frac{q_2 l^4}{360EI_y} \left[7\frac{x}{l} - 10\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^5 \right]$	$f_m = \frac{q_2 l^4}{153,3EI_y}$ $\text{in } x_m = 0,519 l$	$\alpha_A = \frac{7}{360} \frac{q_2 l^3}{EI_y}$ $\alpha_B = \frac{8}{360} \frac{q_2 l^3}{EI_y}$
6	$w(x) = \frac{Fl^3}{6EI_y} \left[2 - 3\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f = \frac{Fl^3}{3EI_y}$	$\alpha = \frac{Fl^2}{2EI_y}$

Belastungsfall	Gleichung der Biegelinie	Durchbiegung	Neigungswinkel
7	$w(x) = \frac{Ml^2}{2EI_y} \left[1 - 2\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$	$f = \frac{Ml^2}{2EI_y}$	$\alpha = \frac{Ml}{EI_y}$
8	$w(x) = \frac{q l^4}{24EI_y} \left[3 - 4\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right]$	$f = \frac{q l^3}{8EI_y}$	$\alpha = \frac{q l^3}{6EI_y}$
9	$w(x) = \frac{q_2 l^4}{120EI_y} \left[4 - 5\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right]$	$f = \frac{q_2 l^3}{30EI_y}$	$\alpha = \frac{q_2 l^3}{24EI_y}$
10	$w(x) = \frac{q_1 l^4}{120EI_y} \left[11 - 15\frac{x}{l} + 5\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right]$	$f = \frac{11 q_1 l^4}{120 EI_y}$	$\alpha = \frac{q_1 l^3}{8EI_y}$
11	$0 \leq x \leq l:$ $w(x) = -\frac{F a l^2}{6EI_y} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$ $0 \leq \bar{x} \leq a:$ $w(\bar{x}) = \frac{F a^3}{6EI_y} \left[2\frac{l \bar{x}}{aa} + 3\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^3 \right]$	$f = \frac{Fa^2(l+a)}{3EI_y}$ $f_m = \frac{Fal^2}{9\sqrt{3}EI_y} \text{ in } x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \frac{Fa(2l+3a)}{6EI_y}$ $\alpha_A = \frac{Fa}{6EI_y}$ $\alpha_B = \frac{Fal}{3EI_y}$
12.	$0 \leq x \leq l:$ $w(x) = -\frac{qa^2 l^2}{12EI_y} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$ $0 \leq \bar{x} \leq a:$ $w(\bar{x}) = \frac{qa^4}{24EI_y} \left[4\frac{l \bar{x}}{aa} + 6\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^3 + \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^4 \right]$	$f = \frac{qa^3(4l+3a)}{24EI_y}$ $f_m = \frac{qa^2 l^2}{18\sqrt{3}EI_y} \text{ in } x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \frac{qa^2(l+a)}{6EI_y}$ $\alpha_A = \frac{qa^2 l}{12EI_y}$ $\alpha_B = \frac{qa^2 l}{6EI_y}$

Tabelle B-3 Biegelinien von statisch bestimmten Trägern, Quelle Dubbel [6]

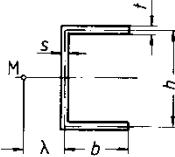
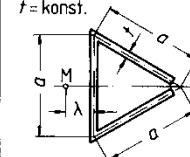
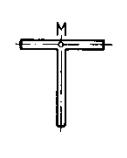
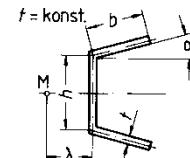
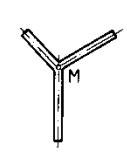
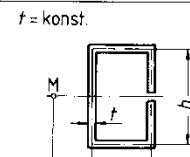
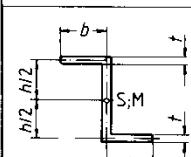
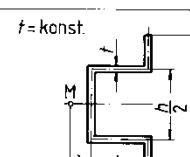
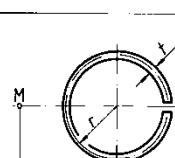
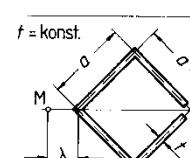
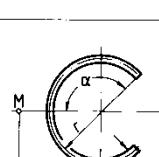
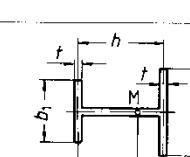
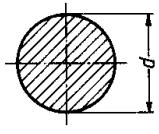
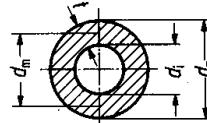
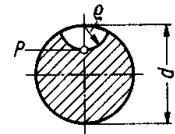
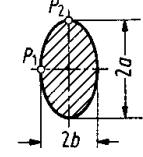
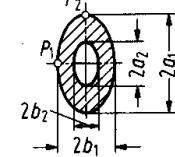
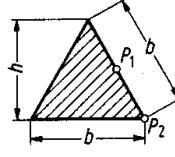
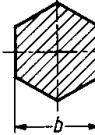
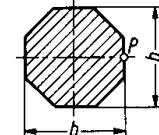
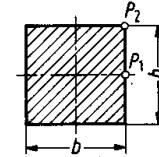
Querschnitt	Schubmittelpunkt M	Querschnitt	Schubmittelpunkt M
1 Symmetriearchse	Schubmittelpunkt M liegt auf der Symmetriearchse		$\lambda = \frac{3tb^2}{6tb + sh}$
2 Symmetriearchsen	M = S (Schwerpunkt)		$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
	M liegt im Schnittpunkt der Profilmittellinien		$\lambda = \frac{b^2 h (3h + 4bs)c}{h^3 + 2b^2 s^2 + 6b(h+bs)^2}$ s = sin alpha c = cos alpha
	gilt für alle sternartigen Profile		$\lambda = \frac{b}{2} \cdot \frac{3b + 2h}{3b + h}$
	M = S		$\lambda = \frac{b}{2} \cdot \frac{3b + h}{3b + 2h}$
	$\lambda = 2r$		$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4} a$
	$\lambda = 2r \frac{\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$		$\lambda = \frac{hb^3}{b_1^3 + b_2^3}$

Tabelle B-4 Schubmittelpunkte von dünnwandigen Profilen, Quelle [3]

	Querschnitt	I_t	W_t	Bemerkungen
1		$\frac{\pi d^4}{32} = I_p$	$\frac{\pi d^3}{16} = W_p$	τ_{\max} am Umfang
2		$\frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = I_p$ Für geringe Wanddicken, d.h. $\left(\frac{t}{d_m}\right)^2 \ll 1:$ $\pi d_m^3 t / 4$	$\frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{16 d_o} = W_p$ $\pi d_m^2 t / 2$	τ_{\max} am Umfang
3		$\frac{\pi d^4}{32} = I_p$	$\frac{W_p}{\lambda} = \frac{\pi d^3}{16 \lambda}$ $\lambda = \frac{2-\xi}{1-2\xi^2+(16/3\pi)\xi^3}$ Für kleine ξ : $\lambda \approx 2$	τ_{\max} am Kerbgrund (in P) $\xi = \frac{r}{d/2}$
4		$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{\pi n^3 b^4}{n^2 + 1}$	$\frac{\pi a b^2}{2} = \frac{\pi n b^3}{2}$	Voraussetzung: $a/b = n \geq 1$ τ_{\max} in P_1 in P_2 : $\tau_2 = \tau_{\max}/n$
5		$\frac{\pi n^3(b_1^4 - b_2^4)}{n^2 + 1}$	$\frac{\pi n(b_1^4 - b_2^4)}{2b_1}$	Voraussetzung: $a_1/b_1 = a_2/b_2 = n \geq 1$ τ_{\max} in P_1 in P_2 : $\tau_2 = \tau_{\max}/n$
6		$\frac{b^4}{46,19} \approx \frac{h^4}{26}$	$\frac{b^3}{20} \approx \frac{h^3}{13}$	τ_{\max} in Mitte der Seiten (P_1) in den Ecken (P_2): $\tau_2 = 0$
7		$0,133 b^2 A = 0,115 b^4$	$0,217 b A = 0,188 b^3$	τ_{\max} in Mitte der Seiten (P)
8		$0,130 b^2 A = 0,108 b^4$	$0,223 b A = 0,185 b^3$	τ_{\max} in Mitte der Seiten (P)
9		$0,141 b^4$	$0,208 b^3$	τ_{\max} in Mitte der Seiten (P_1) in den Ecken (P_2): $\tau_2 = 0$

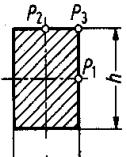
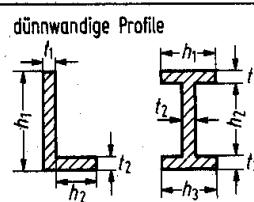
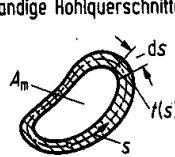
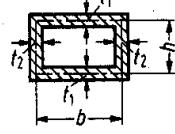
	Querschnitt	I_t	W_t	Bemerkungen
10		$c_1 h b^3 = c_1 n b^4$	$c_2 h b^2 = c_2 n b^3$	Voraussetzung: $h/b = n \geq 1$ τ_{\max} in P_1 In P_2 : $\tau_2 = c_3 \tau_{\max}$ In P_3 : $\tau_3 = 0$
		$n = h/b$	1 1,5 2 3 4 6 8 10 ∞	
		c_1	0,141 0,196 0,229 0,263 0,281 0,298 0,307 0,312 0,333	
		c_2	0,208 0,231 0,246 0,267 0,282 0,299 0,307 0,312 0,333	
		c_3	1,000 0,858 0,796 0,753 0,745 0,743 0,743 0,743 0,743	
11	dünnewandige Profile 	$\frac{\eta}{3} \sum h_i t_i^3$	I_t / I_{\max}	Voraussetzung: $h_i/t_i \gg 1$ τ_{\max} in Mitte der Längsseite des Rechtecks mit t_{\max}
		Profil L C T I I _{PB} +		
		η	0,99 1,12 1,12 1,31 1,29 1,17	
12	dünnewandige Hohlquerschnitte 	$\frac{4 A_m^2}{\oint ds / t(s)}$ Für konstante Wanddicke t : $4 A_m^2 t / U$	$2 A_m t_{\min}$ $2 A_m t$	A_m =von Mittellinie eingeschlossene Fläche, U =Umfang der Mittellinie, τ_{\max} an Stelle, wo $t = t_{\min}$. Es gilt: $\tau(s) \cdot t(s) = M_t / 2 A_m = \text{const}$
12a		$\frac{4(bh)^2}{2(b/h_1 + h/h_2)}$	$2bh t_{\min}$	τ_{\max} dort, wo $t = t_{\min}$
12b		$\pi d_m^3 t / 4$	$\pi d_m^2 t / 2$	

Tabelle B-5 Torsionsflächen- und Widerstandsmomente, Quelle: Dubbel [6]

Spannungszustand	Normalspannungshypothese	Schubspannungshypothese	Gestaltänderungsenergiyhypothese
beliebig	$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$ nur gültig für $\sigma_1 > 0$, sonst nicht definiert	$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$ $\sigma_v = \sigma_1 - \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]$ $= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_1)^2 + (\sigma_y - \sigma_2)^2 + (\sigma_z - \sigma_3)^2 \right] + 3 \left[\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right]}$	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]}$ $= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_1)^2 + (\sigma_y - \sigma_2)^2 + (\sigma_z - \sigma_3)^2 \right] + 3 \tau_{xy}^2}$
nur $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ $\sigma_3 = \sigma_z = 0$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$	$\sigma_v = \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]$	$\sigma_v = \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]$	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \right]}$ $= \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}$
nur $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ $\sigma_2 = \sigma_y = 0$ $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$	$\sigma_v = \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_x + \sigma_z + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} \right]$	$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$ $= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 \right]}$ $= \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{xz}^2}$
nur $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ $\sigma_1 = \sigma_x = 0$ $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$	$\sigma_v = \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2} - \sigma_y - \sigma_z \right]$	$\sigma_v = \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2} - \sigma_y - \sigma_z \right]$	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_2^2 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2 \right]}$ $= \sqrt{\sigma_y^2 - \sigma_y \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{yz}^2}$
nur ein σ nur ein τ sonst keine Sp.	$\sigma_v = \sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$	$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 \right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$
nur ein τ sonst keine Sp.	$\sigma_v = \sigma_1 = 2\tau$	$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_3^2 = \sqrt{3}\tau$	

Tabelle B-6 Vergleichsspannungen, Voraussetzung $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, Quelle [3]

C Aufgaben Festigkeit

Die Nummerierung der Aufgaben entspricht den Kapitelnummern.

2. Grundlagen

Aufgabe 2.1

Ein 5 m langer Zugstab, bestehend aus 2 U-Profilen *DIN 1026-U100-S235JR* hat in einer Stahlkonstruktion eine Kraft von 350 kN zu übertragen. Wie gross ist die Verlängerung?

Aufgabe 2.2

Für einen Rundstab aus Stahl mit 8 mm Durchmesser und 4 m Länge sind die Nennspannung und die Verlängerung bei einer Zugkraft von 5 kN zu berechnen.

Aufgabe 2.3

Ein Prüfstab aus Stahl mit einer Ausgangsmesslänge von 80 mm und 16 mm Durchmesser zerreißt im Zugversuch bei einer Länge von $97,2\text{ mm}$.

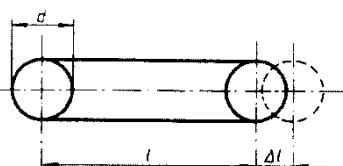
Die Bruchdehnung in % ist zu bestimmen.

Aufgabe 2.4

Eine $0,5\text{ m}$ lange Gummischnur mit 2 mm Durchmesser wird durch die Gewichtskraft einer Masse von 750 g auf $0,8\text{ m}$ verlängert. Gesucht sind:

- Die Zugspannung
- Die Dehnung
- Der Elastizitätsmodul bei dieser Dehnung

Aufgabe 2.5

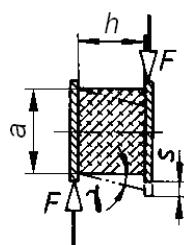


Der Flachriemen der Transmission wird gespannt, indem der Achsabstand $l = 2\text{ m}$ um $\Delta l = 80\text{ mm}$ vergrössert wird.

Der Querschnitt des Riemens beträgt $100\text{ mm} \times 5\text{ mm}$, der E-Modul 60 N/mm^2 und der Durchmesser der Scheiben $d = 0,6\text{ m}$. Gesucht sind:

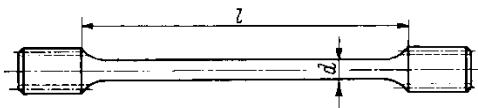
- Die Dehnung des Riemens
- Die Zugspannung im Riemen
- Die Spannkraft im Riemen

Aufgabe 2.6



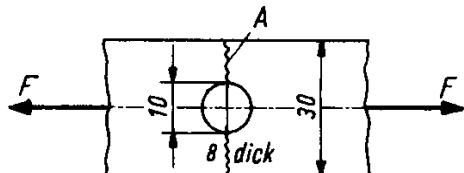
Ein Gummielement mit den Dimensionen $20 \times 20 \times 15\text{ mm}$ ($a \times$ Breite $\times h$) wird bei einer Kraft $F = 2000\text{ N}$ um $s = 1,5\text{ mm}$ verschoben. Gesucht sind:

- die mittlere Schubspannung
- der Schubmodul G

Aufgabe 2.7

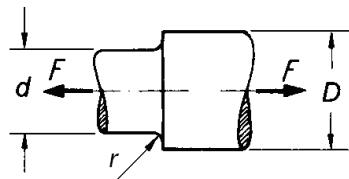
Ein Rundstab $\varnothing 15 \text{ mm}$ aus S355 wird im Betrieb durch eine Wechsellast von $\pm 20 \text{ kN}$ belastet. Sehr selten steigt die Last auf 50 kN an. Sind die Sicherheiten ausreichend?

- a) gegen Dauerbruch
- b) gegen Fliessen
- c) gegen Gewaltbruch

Aufgabe 2.8

Ein Flachstab mit Bohrung aus S235 wird im Betrieb durch eine Wechsellast von $\pm 6 \text{ kN}$ belastet. Sehr selten steigt die Last auf 30 kN an. Die Formzahl betrage $\alpha_k = 2,25$, die Kerbwirkungszahl $\beta_k = 2,0$. Zu bestimmen sind:

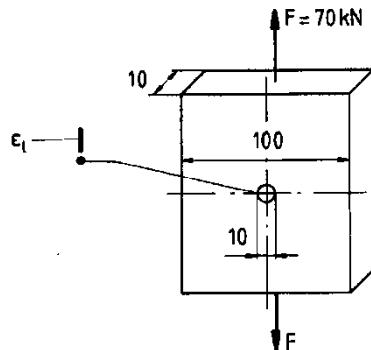
- a) Nennspannung bei 30 kN im Schnitt A
- b) Max. Spannung bei 30 kN im Schnitt A
- c) Sicherheit gegen Fliessen
- d) Sicherheit gegen Dauerbruch

Aufgabe 2.9

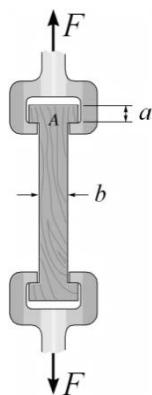
$$d = 10 \text{ mm}; D = 20 \text{ mm}, r = 1 \text{ mm}$$

Der Zugstab aus Baustahl S235 ist durch eine Kraft $F = 12 \text{ kN}$ statisch auf Zug beansprucht. Infolge Neutronenbestrahlung wird das Material im Laufe der Zeit spröde.

- a) Wie gross ist die Sicherheit gegen Fliessen als das Material noch zäh war?
- b) Wie gross ist die Sicherheit gegen Bruch nach der Versprödung?

Aufgabe 2.10

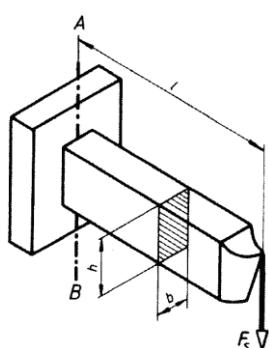
Mit einem im Kerbgrund des mittig gelochten Flachstabes aus S355 applizierten DMS wird die Längsdehnung $\epsilon_l = 1,02 \%$ gemessen. Berechnen Sie daraus die Formzahl.

Aufgabe 2.11

Der Holz-Probekörper wird in einer Zugprüfmaschine mit $F = 10 \text{ kN}$ belastet.

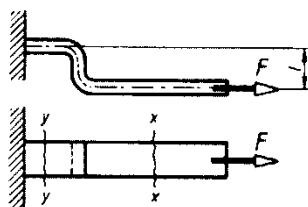
Bestimmen Sie die erforderlichen Abmessungen b und a derart, dass der Probekörper simultan beide zulässigen Spannungswerte erreicht, die mit der zulässigen Normalspannung $\sigma_{zul} = 12 \text{ MPa}$ und der zulässigen Schubspannung $\tau_{zul} = 1,2 \text{ MPa}$ angegeben sind.

Der Probekörper hat die Tiefe 25 mm.

Aufgabe 2.12

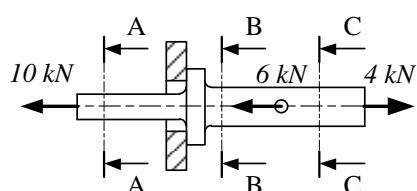
Ein Drehmeissel ist gem. Skizze eingespannt und durch die Schnittkraft $F_s = 12 \text{ kN}$ belastet. $l = 40 \text{ mm}$, $b = 12 \text{ mm}$, $h = 20 \text{ mm}$.

Gesucht sind die im Schnitt A – B wirkenden Schnittkräfte, die Beanspruchungsart und die dazugehörigen Spannungsarten.

Aufgabe 2.13

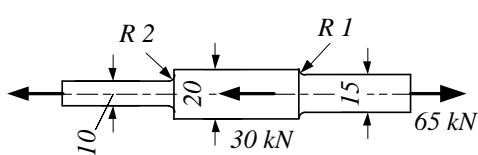
Der gekröpfte Flachstahl wird gemäss Skizze mit $F = 5 \text{ kN}$ belastet. $l = 50 \text{ mm}$.

Gesucht sind die in den Schnitten x – x und y – y wirkenden Schnittkräfte, die Beanspruchungsart und die dazugehörigen Spannungsarten.

Aufgabe 2.14

Das skizzierte Bauteil ist mit den 3 Kräften belastet und wird am Flansch gehalten.

Bestimmen Sie die Normalkraft in den Schnitten A – A, B – B und C – C.

Aufgabe 2.15

Ein abgesetzter Rundstab aus EN-GJS-900-2 wird gemäss Skizze belastet und links mit einer Kraft im Gleichgewicht gehalten.

Wie gross sind die Sicherheiten gegen Gewaltbruch in den beiden abgesetzten Querschnitten?

Welcher Querschnitt ist kritischer?

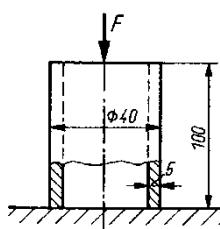
3. Zug und Druck

Aufgabe 3.1

Ein Prüfstab aus Stahl mit $d_0 = 10 \text{ mm}$ Durchmesser und $L_0 = 100 \text{ mm}$ Länge zeigt bei einer Zugbeanspruchung mit der Kraft $F = 10 \text{ kN}$ im elastischen Bereich eine Verlängerung $\Delta L = 0,062 \text{ mm}$. Sein Durchmesser nimmt auf $9,9982 \text{ mm}$ ab. Zu ermitteln sind:

- Die Zugspannung
- Die Dehnung
- Der Elastizitätsmodul
- Die Querkontraktionszahl
- Die Formänderungsarbeit

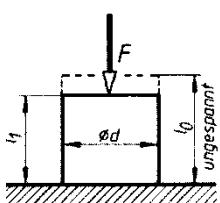
Aufgabe 3.2



Das Stahlrohr 40×5 mit der Länge 100 mm aus S185 soll bis zur Streckgrenze auf Druck belastet werden.

Wie gross ist die erforderliche Formänderungsarbeit?

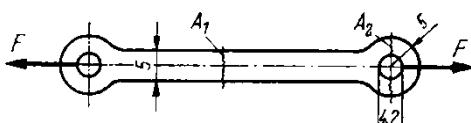
Aufgabe 3.3



Ein runder Gummipuffer wird gem. Skizze mit $F = 500 \text{ N}$ belastet und dabei von $l_0 = 30 \text{ mm}$ auf $l_1 = 25 \text{ mm}$ elastisch zusammengedrückt. E-Modul für Gummi 5 N/mm^2 . Gesucht sind:

- Die Druckspannung im Puffer
- Der erforderliche Pufferdurchmesser d
- Die vom Puffer aufgenommene Formänderungsarbeit

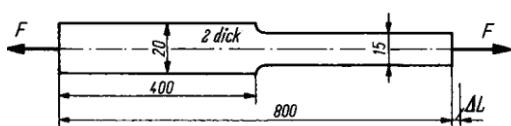
Aufgabe 3.4



Die Lasche aus $0,8 \text{ mm}$ dickem Messingblech wird durch eine Kraft von 240 N belastet.

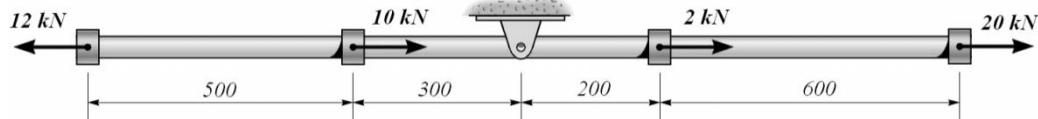
Für die Querschnitte A_1 und A_2 sind die Spannungen zu berechnen

Aufgabe 3.5



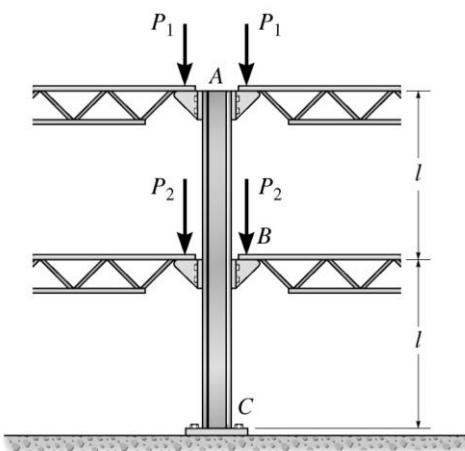
Der abgesetzte Kupferstab ist mit $F = 3600 \text{ N}$ belastet ($E = 120'000 \text{ N/mm}^2$).

Um welchen Betrag ΔL wird er länger?

Aufgabe 3.6

Eine Zugstange aus Aluminium ($E = 70'000 \text{ N/mm}^2$) und Vollquerschnitt ($\varnothing 15 \text{ mm}$) wird gemäss Skizze belastet.

- In welchem Abschnitt ist die maximale Spannung und wie gross ist sie?
- Berechnen Sie die relative Verschiebung der beiden Endpunkte zueinander.

Aufgabe 3.7

Eine Stütze aus Stahl ($E = 210'000 \text{ N/mm}^2$) trägt 2 symmetrische Lasten P_1 und P_2 .

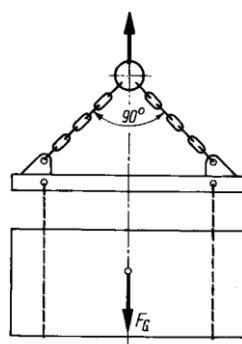
Die Stütze hat eine Querschnittsfläche von $A = 15'000 \text{ mm}^2$. Höhe $l = 4 \text{ m}$.

Die Geschosse senken sich unter der Last wie folgt ab:

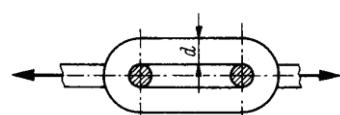
$$x_A = 3,0 \text{ mm}$$

$$x_B = 2,3 \text{ mm}$$

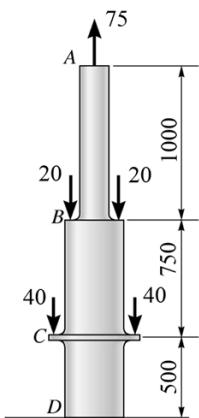
Bestimmen Sie die Lasten P_1 und P_2 .

Aufgabe 3.8

Mit einer Traverse soll eine Last von 5000 kg gehoben werden. Die 2 gespreizten Rundstahlketten haben eine Kettenglieddicke $d = 25 \text{ mm}$.

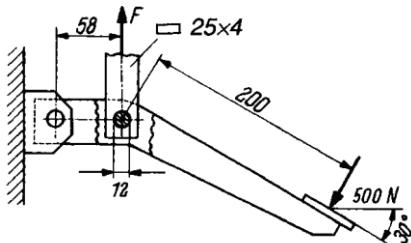


Welche Zugspannung tritt in den Kettengliedern auf?

Aufgabe 3.9

Die abgesetzte Säule aus Stahl besteht aus 2 Segmenten mit den Querschnittsflächen $A_{AB} = 600 \text{ mm}^2$ und $A_{BD} = 1200 \text{ mm}^2$.

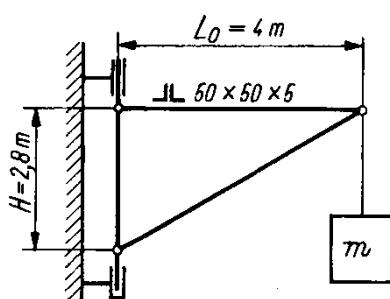
Gesucht sind die Spannungen in den Querschnitten und die Verschiebung des Punktes A ($E = 210'000 \text{ N/mm}^2$). Kräfte in [kN].

Aufgabe 3.10

In dem Hebelsystem ist ein Flachstahl gelenkig angeordnet.

Die maximale Kraft von 500 N tritt in der dargestellten Position auf. Berechnen Sie:

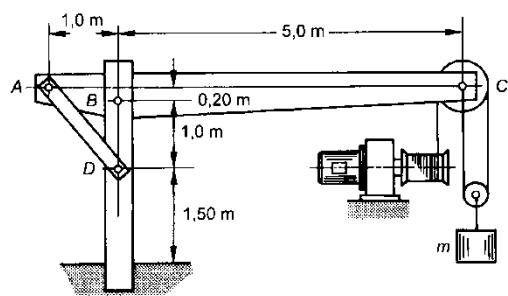
- die Kraft F im Flachstahl
- die Spannung im kritischen Querschnitt im Flachstahl

Aufgabe 3.11

Die obere Strebe eines Wandschwenkkranes besteht aus 2 Winkelprofilen 50 x 50 x 5 mm aus Stahl S235.

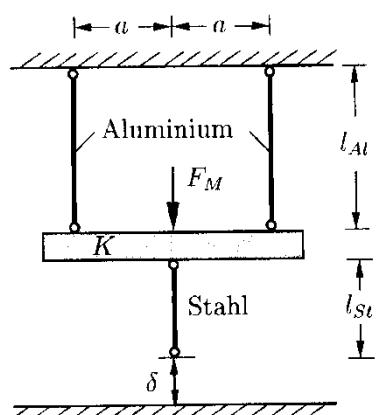
Welche Last darf maximal angehängt werden?

Zulässige Spannung nach DIN 15018, Tabelle Roloff / Matek TB 3-3, Lastfall H

Aufgabe 3.12

Der Hebebaum ist mit $m = 3000 \text{ kg}$ belastet.

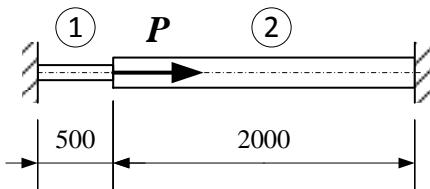
Der Zuganker AD besteht aus 2 U-Profilen, die für $\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$ zu dimensionieren sind.

Aufgabe 3.13

In der Lagerungskonstruktion für den starren Körper K ist der untere Stab um das Mass $\delta = 5 \text{ mm}$ zu kurz geraten. Es wird deshalb bei der Montage eine Kraft F_M aufgebracht, so dass der untere Stab gerade den Boden berührt. Nach seiner Befestigung wird F_M entfernt.

- Wie gross ist die Montagekraft?
- Wie gross sind die Absenkung des Körpers und die Stabkräfte?

$$l_{Al} = 1,5 \text{ m}, l_{St} = 1 \text{ m}, d_{Al} = d_{St} = 2 \text{ mm}, E_{Al} = 70'000 \text{ N/mm}^2, E_{St} = 210'000 \text{ N/mm}^2$$

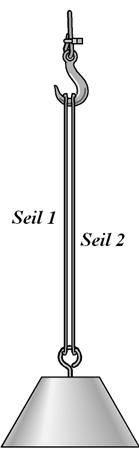
Aufgabe 3.14

Zwei Stangen sind fest miteinander verbunden und an den Enden eingespannt. $P = 18 \text{ kN}$.

- (1) Querschnitt 50 mm^2 aus Stahl
- (2) Querschnitt 300 mm^2 aus Aluminium

Gesucht sind:

- a) Spannungen in beiden Stangen
- b) Verschiebung des Kraftangriffspunktes

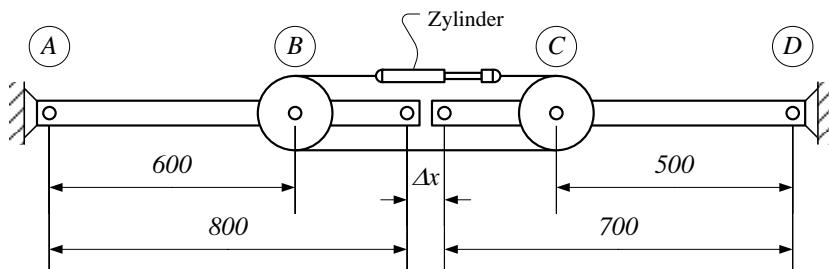
Aufgabe 3.15

Eine Masse ist an zwei 3 m langen, parallelen Seilen aufgehängt.

Die Seile haben folgende Elastizitätsmoduli E, Querschnittsflächen A und Bruchkräfte P:

	$E [\text{N/mm}^2]$	$A [\text{mm}^2]$	$P [\text{kN}]$
Seil 1	85000	97	162
Seil 2	140000	154	259

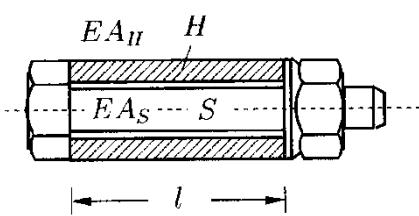
- a) Wie gross ist die maximale Masse, die angehängt werden darf bei einer Sicherheit gegen Bruch von 2?
- b) Welches Seil reisst zuerst (Begründung)?
- c) Wie gross ist die Verschiebung der Masse im Moment des Versagens?

Aufgabe 3.16

Zwei Stäbe mit Querschnitt $15 \times 5 \text{ mm}$ aus Baustahl sind an den Enden A und D gelenkig gelagert. Sie sollen miteinander durch einen Bolzen verbunden werden, jedoch fehlt infolge mangelhafter Fertigung ein Spiel von $\Delta x = 1 \text{ mm}$.

Mit Hilfe eines Seils und zweier Umlenkrollen an den Stellen B und C sowie eines Hydraulikzylinders wird die Montage vollzogen. Zu bestimmen sind:

- a) die erforderlich Kraft im Hydraulikzylinder für die Montage
- b) die maximale Spannung in den Stäben während der Montage
- c) die maximale Spannung in den Stäben nach der Montage

Aufgabe 3.17

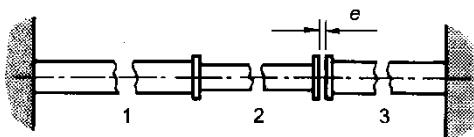
Um wie viel mm wird die Hülse H zusammengedrückt, wenn die Mutter der Schraube S mit der Steigung $p = 2 \text{ mm}$ um eine Umdrehung angezogen wird?

Wie gross wird die Vorspannkraft?

Analytische und graphische Lösung mit dem Verspannungsschaubild.

$$l = 330 \text{ mm}; E = 210000 \text{ N/mm}^2.$$

$$A_H = 314 \text{ mm}^2; A_S = 157 \text{ mm}^2$$

Aufgabe 3.18

Dimensionen:

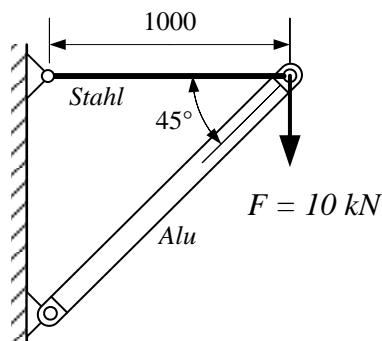
Rohr 1: $D = 60 \text{ mm}$, $d = 50 \text{ mm}$, $l = 12 \text{ m}$ Rohr 2: $D = 40 \text{ mm}$, $d = 32 \text{ mm}$, $l = 5 \text{ m}$ Rohr 3: $D = 50 \text{ mm}$, $d = 42 \text{ mm}$, $l = 4 \text{ m}$

Eine Rohrleitung (Stahl) zwischen 2 starren Wänden besteht aus 3 Abschnitten.

Die Flansche klaffen gem. Skizze um den Abstand $e = 1 \text{ mm}$.

Zu bestimmen sind:

- die zum Schliessen des Spaltes notwendige Kraft
- die Verschiebung der beiden Flansche beim Schliessen des Spaltes

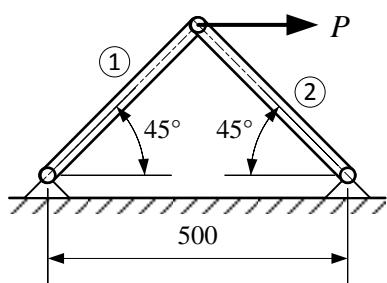
Aufgabe 3.19

Für das System ist die Verschiebung des Kraftangriffspunktes in horizontaler und vertikaler Richtung zu bestimmen.

Überprüfen Sie das Resultat in vertikaler Richtung mit Hilfe der Formänderungsarbeit.

Stahlstab: $\varnothing 10 \text{ mm}$, $E = 210'000 \text{ N/mm}^2$

Aluminium Profil: Querschnitt 380 mm^2
 $E = 72'000 \text{ N/mm}^2$

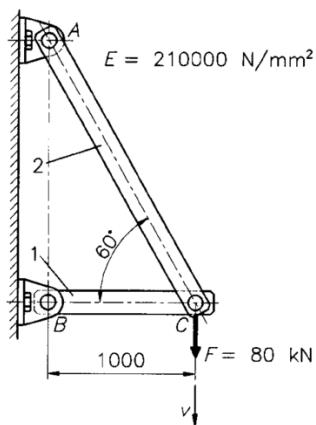
Aufgabe 3.20

Das Stabwerk gem. Skizze besteht aus den folgenden 2 Stäben:

(1): $A_1 = 150 \text{ mm}^2$; $E_1 = 70'000 \text{ N/mm}^2$

(2): $A_2 = 100 \text{ mm}^2$; $E_2 = 210'000 \text{ N/mm}^2$

- Berechnen Sie die horizontale und vertikale Verschiebung des Lastangriffspunktes unter einer Last von $P = 12 \text{ kN}$
- Überprüfen Sie das Resultat in horizontaler Richtung mit Hilfe der Formänderungsarbeit

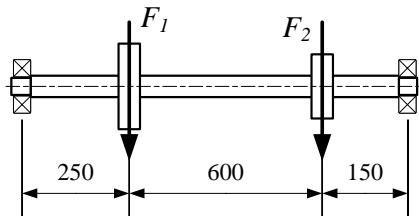
Aufgabe 3.21

Eine Konsole besteht gemäss Skizze aus Stab 1 (Quadratisches Hohlprofil $40 \times 40 \times 2,6 \text{ mm}$) und Stab 2 (2 Flachstäbe $50 \times 6 \text{ mm}$) und wird mit $F = 80 \text{ kN}$ vertikal belastet.

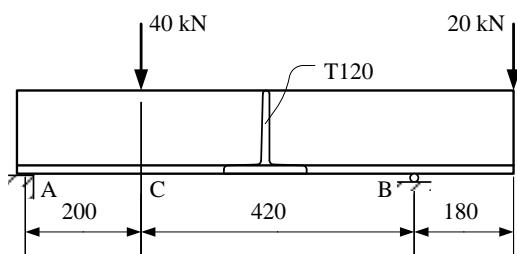
Berechnen Sie der Spannungen in den Stäben sowie die Verschiebungen des Lastangriffspunktes.

4. Biegung

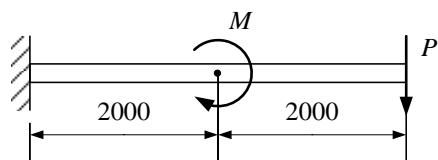
Aufgabe 4.1



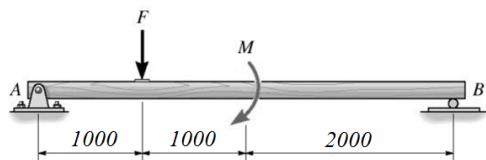
Aufgabe 4.2



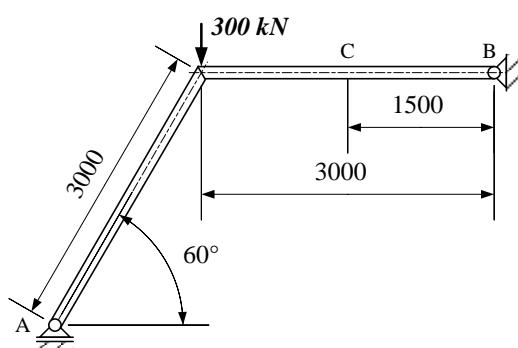
Aufgabe 4.3



Aufgabe 4.4



Aufgabe 4.5



Eine drehende Achse gemäss Skizze ist statisch bestimmt gelagert und mit den beiden Kräften $F_1 = 4 \text{ kN}$ und $F_2 = 5 \text{ kN}$ belastet.

Bestimmen Sie die maximale Nennspannung bei einem Durchmesser von 50 mm.

Ein Träger aus T-Stahl (DIN EN 10055) ist mit 2 Kräften belastet und gem. Skizze gelagert.

Bestimmen Sie:

- Ort und Betrag der max. Zugspannung
- Ort und Betrag der max. Druckspannung

Der Träger ist links eingespannt und mit einem Moment $M = 7 \text{ kNm}$ und einer Kraft $P = 30 \text{ kN}$ belastet:

Wählen Sie ein Profil der Reihe IPE (DIN 1025-5), Baustahl S355 mit $\sigma_{zul} = 240 \text{ N/mm}^2$.

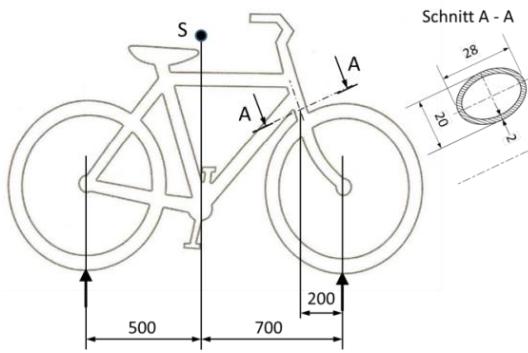
Ein Holzbalken wird gemäss Abbildung mit $M = 4 \text{ kNm}$ und $F = 10 \text{ kN}$ belastet.

Dimensionieren Sie einen Rechteckquerschnitt mit Höhe zu Breite $H/B = 2$ bei einer zulässigen Biegespannung von 40 N/mm^2 .

Die Skizze zeigt eine geschweißte Stahlkonstruktion aus zwei Profilen IPB-400 (DIN 1025-2). A ist ein Los- und bei B ein Festlager.

Gesucht sind:

- die maximale Biegespannung (Betrag)
- die Biegespannungen an der Stelle C nach Betrag und Vorzeichen auf der Ober- und Unterseite des Trägers

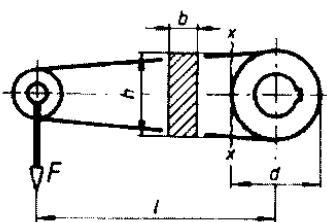
Aufgabe 4.6

Die max. Spannung in einer Vorderradgabel eines Fahrrades soll abgeschätzt werden.

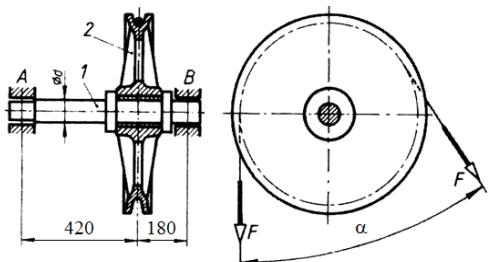
Als Belastung wird eine Person (100 kg) mit Schwerpunkt S gemäss Skizze angenommen. Zur Berücksichtigung dynamischer Effekte soll die Last um den Faktor von 3 erhöht werden.

Die Gabel besteht aus zwei Rohren mit einem elliptischen Querschnitt mit konstanter Wandstärke von 2 mm, siehe Schnitt A – A.

Die Spannungen infolge Normalkraft sollen vernachlässigt werden.

Aufgabe 4.7

Der Hebel wird durch eine Kraft $F = 10 \text{ kN}$ belastet. $l = 240 \text{ mm}$, $d = 90 \text{ mm}$. Zulässige Biegespannung 80 N/mm^2 . Gesucht sind die Querschnittsmasse h und b für den Schnitt x – x mit einem Bauverhältnis $h/b = 3$.

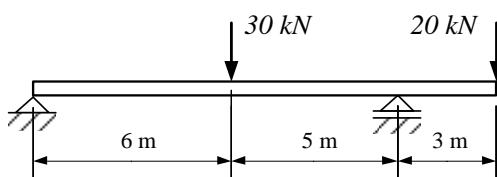
Aufgabe 4.8

Auf einer fest gelagerten Achse 1 sitzt einseitig die Rolle 2, die eine Seilkraft $F = 8 \text{ kN}$ um den Winkel $\alpha = 60^\circ$ umlenkt.

Zulässige Biegespannung 90 N/mm^2 .

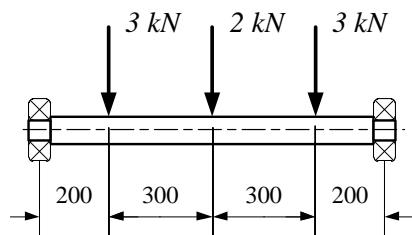
Gesucht sind:

- Resultierende Achslast
- Maximales Biegemoment
- Erforderliches Widerstandsmoment
- Erforderlicher Durchmesser d
- Maximale Biegespannung, wenn der Durchmesser auf 10 mm gerundet wird

Aufgabe 4.9

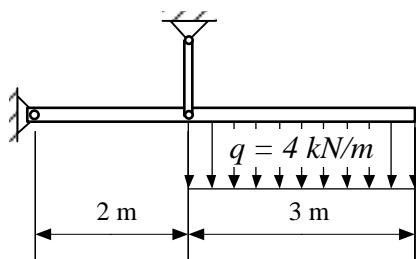
Für den Träger sind das Querkraft- und Biegemomentdiagramm zu zeichnen.

Es ist ein IPE-Profil zu wählen und der Spannungsnachweis zu führen, $\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 4.10

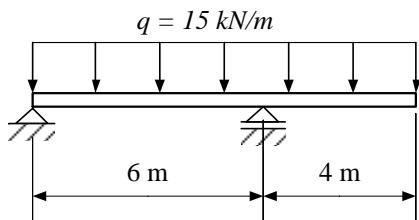
Für die Welle sind das Querkraft- und Biegemomentdiagramm zu zeichnen.

Wie gross ist der erforderliche Durchmesser? $\sigma_{zul} = 50 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 4.11

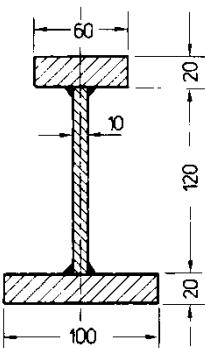
Für den Träger sind das Querkraft- und Biegemomentdiagramm zu zeichnen.

Wie gross ist die maximale Biegespannung unter Verwendung des Querschnitts aus Aufgabe 4.13.

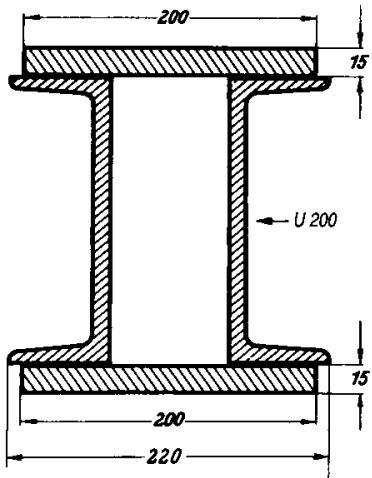
Aufgabe 4.12

Für den Träger sind das Querkraft- und Biegemomentdiagramm zu zeichnen

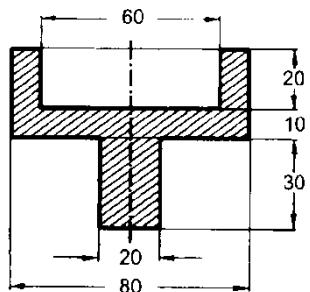
Wie gross ist die maximale Biegespannung unter Verwendung des Querschnitts aus Aufgabe 4.14.

Aufgabe 4.13

Gesucht ist das Widerstandsmoment für eine Biegung um die y-Achse ($y = \text{horizontal}$).

Aufgabe 4.14

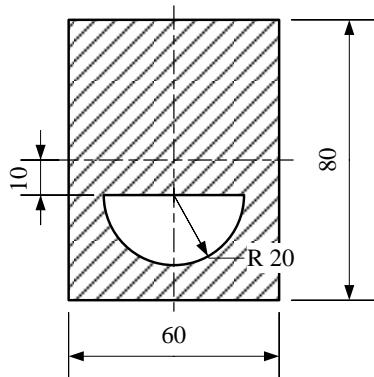
Gesucht ist das Widerstandsmoment für eine Biegung um die y-Achse ($y = \text{horizontal}$).

Aufgabe 4.15

Gesucht sind die Flächen- und Widerstandsmomente in horizontaler und vertikaler Richtung.

y-Achse = horizontal

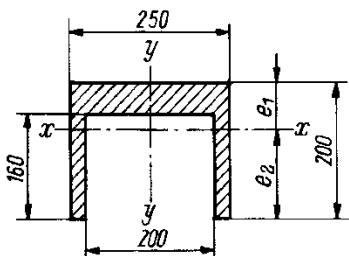
z-Achse = vertikal

Aufgabe 4.16

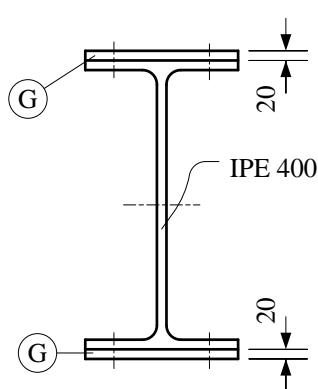
Gesucht sind die Flächen- und Widerstandsmomente in horizontaler und vertikaler Richtung.

y-Achse = horizontal

z-Achse = vertikal

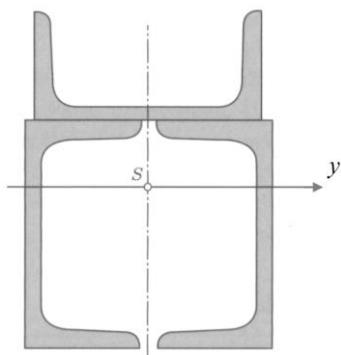
Aufgabe 4.17

Gesucht sind die Flächen- und Widerstandsmomente I_x , I_y , W_x , W_y

Aufgabe 4.18

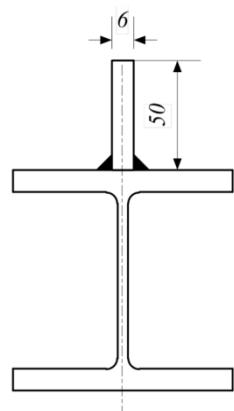
Ein beidseitig gelenkig gelagerter Träger der Länge 8 m (Querschnitt gem. Skizze) trägt eine konstante Streckenlast $q = 27 \text{ kN/m}$.

In welchem Bereich sind für eine zulässige Spannung von $\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$ die zusätzlichen, angenieteten Gurte (G) notwendig?

Aufgabe 4.19

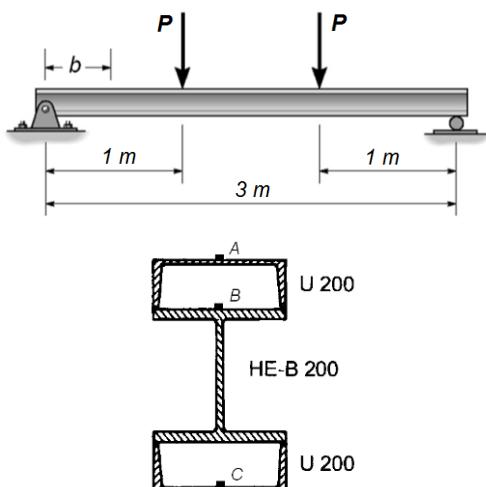
3 U-Stähle U-100 sind gemäss Abbildung zusammengeschweisst. Gesucht sind:

- Axiales Flächenmoment I_y
- Widerstandsmoment W_y

Aufgabe 4.20

Ein IPB-100 Träger soll durch einen Flachstahls 50 x 6 mm gem. Skizze verstärkt werden.

Zu bestimmen sind das axiale Flächenmoment und das Widerstandsmoment für eine Biegung um die horizontale Achse vor und nach dem Anschweissen der „Verstärkung“.

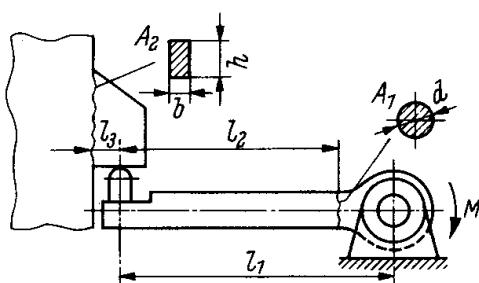
Aufgabe 4.21

Der Träger der Länge wird gemäss Skizze mit zwei Kräften $P = 160 \text{ kN}$ belastet.

Der Querschnitt wird aus einem HE-B 200 (IPB-200) und 2 U 200 Profilen zusammengeschweisst.

Im Abstand $b = 0,5 \text{ m}$ vom linken Lager werden an den markierten Stellen A, B und C im Querschnitt mittels DMS die Spannungen in Träger-Längsrichtung gemessen.

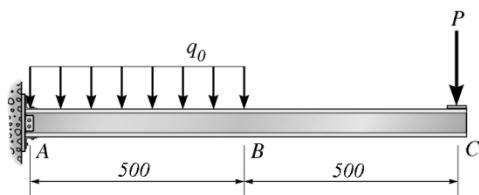
Wie gross sind für die Messstellen die zu erwartenden Spannungen?

Aufgabe 4.22

Ein Hebel wird durch ein Drehmoment $M = 120 \text{ Nm}$ gegen einen Anschlag gedrückt.

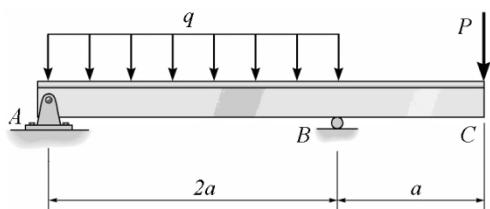
$l_1 = 120 \text{ mm}$, $l_2 = 95 \text{ mm}$, $l_3 = 30 \text{ mm}$.

Gesucht sind für $\sigma_{zul} = 80 \text{ N/mm}^2$ der Durchmesser d des Hebels und die Breite b des Anschlages ($h = 15 \text{ mm}$).

Aufgabe 4.23

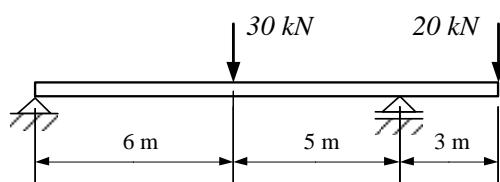
Ein einseitig eingespannter Träger mit dem Querschnitt IPB 120 ist gemäss Skizze mit $P = 13 \text{ kN}$ und $q_0 = 73 \text{ kN/m}$ belastet.

Bestimmen Sie die Durchbiegung und den Biegewinkel bei C.

Aufgabe 4.24

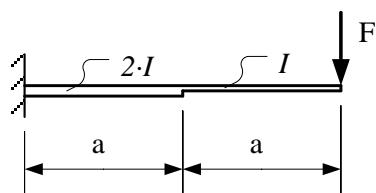
Ein Träger der Biegesteifigkeit $E \cdot I = \text{konstant}$ ist gemäss Skizze belastet.

Bestimmen Sie in allgemeiner Form die Durchbiegung und den Biegewinkel bei C.

Aufgabe 4.25

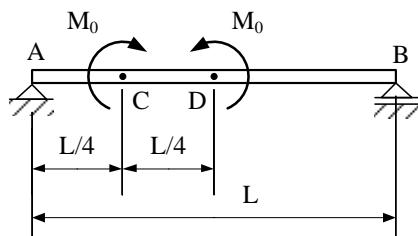
Der Träger hat ein IPB 340 Querschnitt.

Zu berechnen ist die Durchbiegung am rechten freien Ende mit Hilfe von Überlagerung einzelner Belastungsfälle sowie mit der Formänderungsarbeit.

Aufgabe 4.26

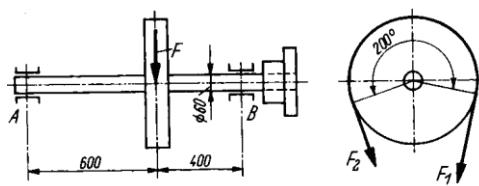
Der eingespannte Träger ist gemäss Skizze abgesetzt und besitzt zwei verschiedene Querschnitte.

Zu bestimmen sind in allgemeiner Form die maximale Durchbiegung und Schiefstellung mit der Formänderungsarbeit.

Aufgabe 4.27

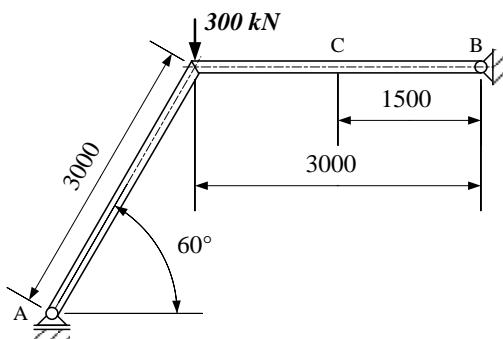
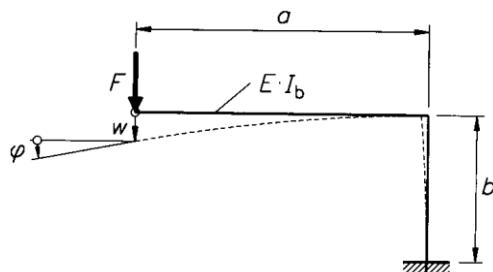
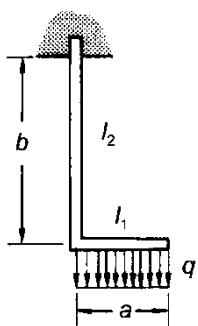
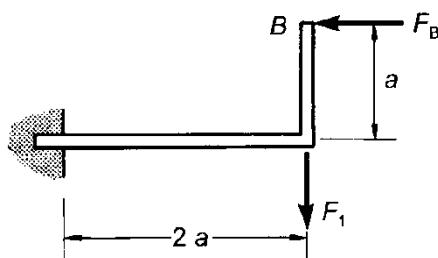
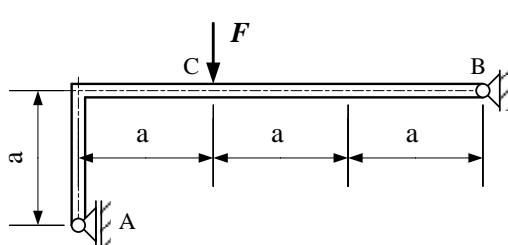
Bestimme für den abgebildeten Balken mit der konstanten Biegesteifigkeit und der gezeigten Belastung mit Hilfe der Formänderungsarbeit:

- Die Auslenkung beim Punkt D
- Den Biegewinkel beim Punkt A
- Den Biegewinkel beim Punkt B

Aufgabe 4.28

Die Triebwerkswelle aus Stahl wird durch die resultierende Kraft der Riemenkräfte $F_1 = 3 \text{ kN}$ und $F_2 = 2,5 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Gesucht sind:

- Durchbiegung an der Stelle von F
- Neigungswinkel an den Lagern A und B

Aufgabe 4.29Aufgabe 4.30Aufgabe 4.31Aufgabe 4.32Aufgabe 4.33

Die Skizze zeigt eine geschweißte Stahlkonstruktion aus zwei Profilen IPB-400 nach DIN 1025-2. A ist ein Los- und bei B ein Festlager.

Gesucht sind:

- vertikale Verschiebung des Kraftangriffspunktes
- horizontale Verschiebung des Lagers A
- vertikale Verschiebung des Punktes C

Für den Rahmen sind die Durchbiegung und der Biegewinkel an der Kraftangriffsstelle in allgemeiner Form zu berechnen.

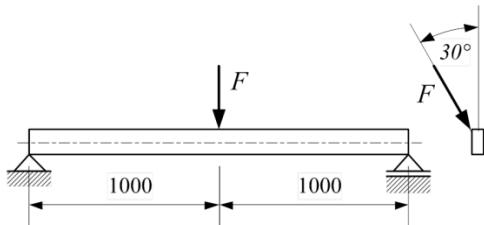
Für den gekröpften Träger unterschiedlicher Biegesteifigkeit sind in allgemeiner Form die Verlagerung und Schiefstellung des Endpunktes zu bestimmen.

Der gekröpfte Träger wird zunächst mit F_1 belastet. Dabei verschiebt sich der Punkt B nach rechts unten. Zu bestimmen ist eine Kraft F_B so, dass die horizontale Verschiebung von B rückgängig gemacht wird.

Der gekröpfte Träger mit konstanter Biegesteifigkeit $E \cdot I$ wird mit der Kraft F belastet.

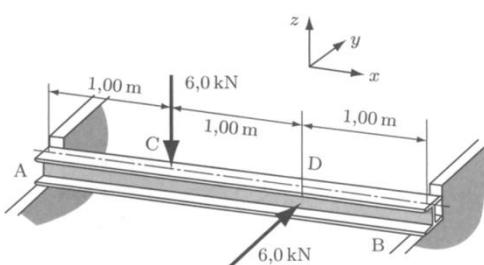
Zu bestimmen sind in allgemeiner Form:

- Die vertikale Verschiebung des Kraftangriffspunktes C
- Die vertikale Verschiebung des Lagers A

Aufgabe 4.34

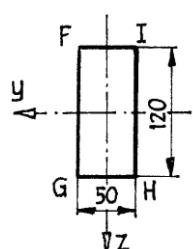
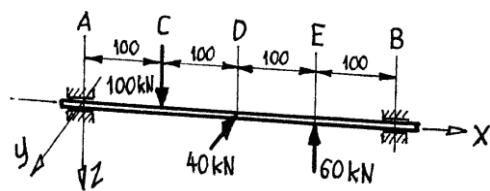
Ein Träger aus einem rechteckigen Hohlprofil $120 \times 60 \times 4$ nach DIN EN 10210-2 wird gemäss Skizze mit $F = 3 \text{ kN}$ belastet.

Zu bestimmen sind die Spannungen in den Eckpunkten des maximal belasteten Querschnitts sowie die Lage der neutralen Achse.

Aufgabe 4.35

Ein Träger aus einem IPB 120 wird gemäss Skizze mit zwei Kräften belastet.

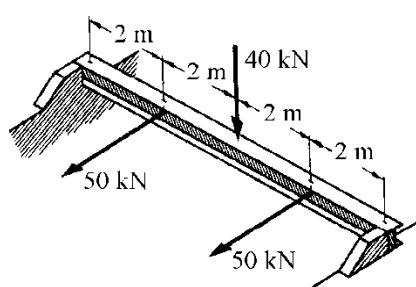
- Wo liegt der kritische Querschnitt?
- Wird die zul. Spannung von 140 N/mm^2 überschritten?
- Wo tritt die maximale Zugspannung auf?

Aufgabe 4.36

Der Biegebalken mit dem Rechteckquerschnitt $50 \times 120 \text{ mm}$ ist gemäss Skizze belastet und beidseitig gelenkig gelagert.

Bestimmen Sie:

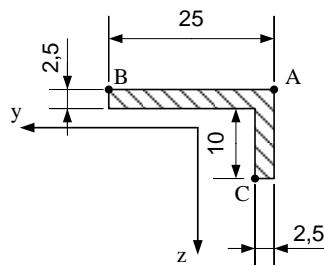
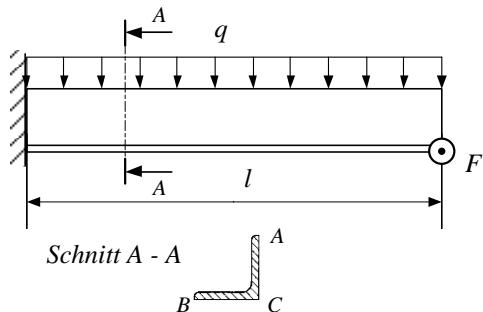
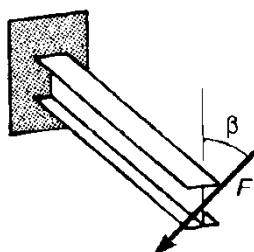
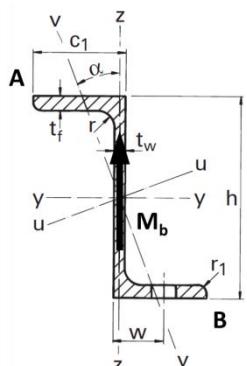
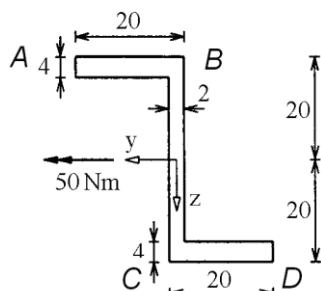
- Die Spannungen an den Stellen F, G, H und I in den Schnitten C, D und E
- An welcher Stelle wirkt nur gerade Biegung und wie gross sind dort die Spannungen

Aufgabe 4.37

Für die abgebildete Belastung ist ein I-Träger aus der IPB-Reihe (DIN 1025) zu bestimmen.

Die Spannungen in den 4 Randpunkten des Profils sind zu berechnen.

$$\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.38Aufgabe 4.39Aufgabe 4.40Aufgabe 4.41Aufgabe 4.42

Der abgebildete Trägerquerschnitt wird durch ein Biegemoment von $M_z = 10 \text{ Nm}$ beansprucht. Die positive z-Achse ist nach unten gerichtet. Zu bestimmen sind:

- Die Biegespannungen an den Punkten A, B und C
- die Lage der neutralen Achse (in eine massstäbliche Skizze einzeichnen)

Ein einseitig eingespannter gleichschenklicher Winkel L 25 x 25 x 4 nach EN 10056-1 der Länge $l = 250 \text{ mm}$ ist gemäss Skizze mit $F = 100 \text{ N}$ und $q = 200 \text{ N/m}$ belastet.

Berechnen Sie die Spannungen bei der Einspannstelle an den Punkten A, B, C des Profils.

Der Kragarm I 300 der Länge 2 m wird durch eine Kraft $F = 10 \text{ kN}$ belastet.

Zu bestimmen ist der maximal mögliche Winkel β für $\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$.

Ein Profil Z 120 nach DIN 1027 überträgt ein Biegemoment $M_b = 1000 \text{ Nm}$. Zu bestimmen sind die maximalen Spannungen in den Punkten A und B.

Folgende Daten nach DIN 1027:

$$W_u = 60,6 \text{ cm}^3$$

$$W_v = 12,5 \text{ cm}^3$$

$$\tan \alpha = 0,433$$

Das abgebildete Profil wird durch ein Moment $M_y = 50 \text{ Nm}$, wie in der Abbildung angegeben, beansprucht.

Zu bestimmen sind:

- die Spannungen an den Stellen A, B, C und D
- die Lage der neutralen Achse und zeichne sie in einer massstäblichen Skizze ein

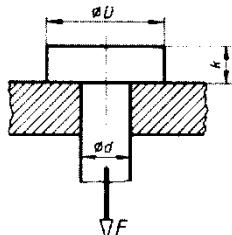
5. Schub (inkl. Flächenpressung, Kapitel 3.3)

Aufgabe 5.1

In 2 mm dickes Stahlblech mit einer Abscherfestigkeit von 310 N/mm^2 sollen Löcher von 30 mm Durchmesser gestanzt werden.

Wie gross ist die erforderliche Stanzkraft?

Aufgabe 5.2

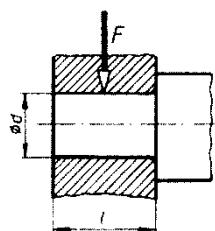


Ein Zugbolzen mit $d = 20 \text{ mm}$ Durchmesser wird mit einer Zugspannung von 80 N/mm^2 beansprucht. Die Kopfhöhe beträgt $k = 0,7 \cdot d$.

Gesucht sind:

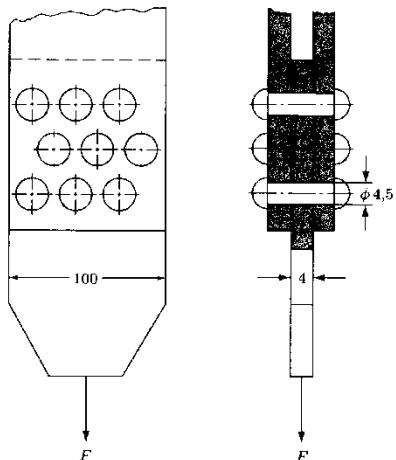
- die Abscherspannung im Kopf des Zugbolzens
- der Kopfdurchmesser D für eine zulässige Flächenpressung zwischen Kopf und Auflage von 20 N/mm^2

Aufgabe 5.3



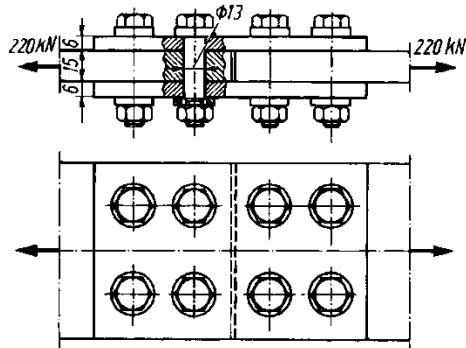
Ein Gleitlager soll die Radialkraft $F = 12,5 \text{ kN}$ aufnehmen. Die zulässige Flächenpressung beträgt 10 N/mm^2 und das Bauverhältnis $l/d = 1,6$. Gesucht sind Länge l und Durchmesser d des Zapfens.

Aufgabe 5.4



Die Nietverbindung aus 9 Nieten $\varnothing 4,5 \text{ mm}$ wird gemäss Skizze mit $F = 20 \text{ kN}$ belastet. Alle Bleche 4 mm und Nieten aus S235. Hauptlast nach DIN 15018.

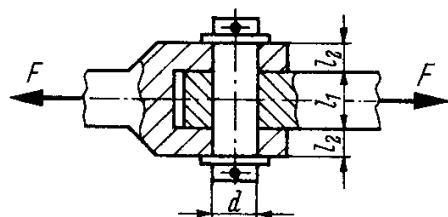
Ist die Belastung zulässig?

Aufgabe 5.5

Eine Doppellaschenverbindung aus S235 ist mit 8 Passschrauben $M12\ 4.6$ ausgeführt.

Die maximale Kraft von $220\ kN$ tritt im Lastfall HZ auf.

Ist die Belastung nach DIN 15018 zulässig?

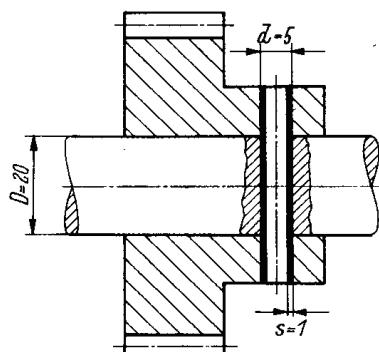
Aufgabe 5.6

Gabel, Lasche und Bolzen aus Baustahl S355.

Bolzen $\varnothing d = 20\ mm$, Lasche $l_1 = 15\ mm$ und Gabel $l_2 = 10\ mm$.

Wie gross ist die zulässige Kraft F ?

Zulässige Spannungen nach DIN 15018 (Hauptlast)

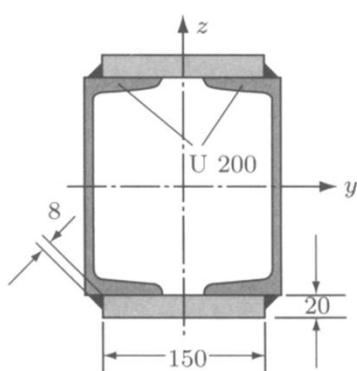
Aufgabe 5.7

Das Stirnrad hat eine Leistung von $500\ W$ bei einer Drehzahl von $250\ min^{-1}$ zu übertragen.

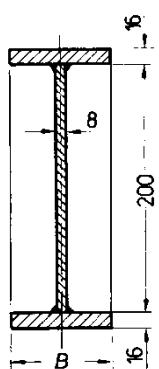
Eine als Querstift angeordnete Spannhülse verbindet Welle und Nabe.

Zu berechnen sind:

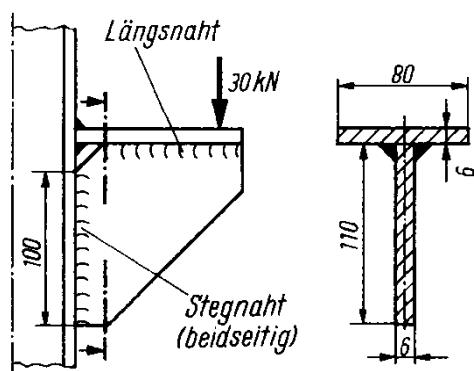
- das Drehmoment
- die Scherkraft im Querstift an der Welle
- die mittlere Scherspannung τ_a am Kreisringquerschnitt der Spannhülse

Aufgabe 5.8

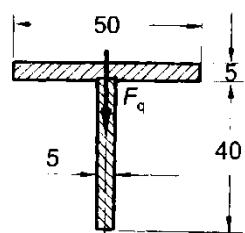
Ein Träger ist gemäss Skizze zusammengeschweisst. Für eine Querkraft $Q = 100\ kN$ sind die Schubspannungen in der Schweissnaht mit einem a-Mass von $8\ mm$ zu bestimmen.

Aufgabe 5.9

Ein Träger mit dem abgebildeten Querschnitt ist mit $B = 110 \text{ mm}$ ausgeführt. Für eine vertikale Querkraft von 50 kN ist die Schubspannung in den Nähten ($a = 5 \text{ mm}$) und die maximale Schubspannung im Steg zu berechnen.

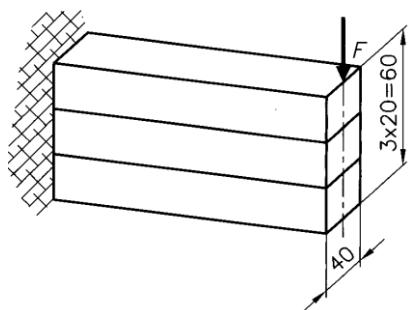
Aufgabe 5.10

Die Schweissnähte der Konsole haben eine Dicke $a = 4 \text{ mm}$. Gesucht sind die maximale Schubspannung in der Längsnaht und die mittlere Schubspannung in der Stegnaht.

Aufgabe 5.11

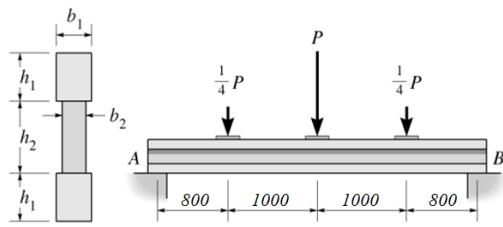
Das Profil besteht aus 2 geklebten Alu-Flachstäben.

Welche Schubspannung verursacht eine Querkraft $F_q = 1000 \text{ N}$ in der Klebefuge?

Aufgabe 5.12

Ein aus 3 Vierkanthölzern verleimter Träger ist einseitig eingespannt und am freien Ende mit einer Kraft F belastet.

Wie gross darf F werden, wenn die Schubspannung in den Leimflächen $\tau_{zul} = 5 \text{ N/mm}^2$ nicht überschreiten darf?

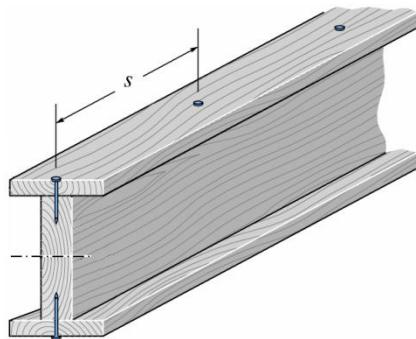
Aufgabe 5.13

Der Träger besteht aus 3 Kunststoffteilen, die miteinander verklebt sind.

Wie gross ist die maximal ertragbare Last P , wenn der Kleber eine Schubfestigkeit von $0,08 \text{ N/mm}^2$ hat.

$$h_1 = 40 \text{ mm}, h_2 = 60 \text{ mm}$$

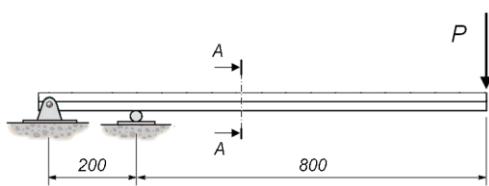
$$b_1 = 30 \text{ mm}, b_2 = 20 \text{ mm}$$

Aufgabe 5.14

Ein Holzträger ist aus einem Steg ($4 \times 1 \text{ cm}$) und 2 Flanschen ($3 \times 0.5 \text{ cm}$) zusammengesetzt.

Die im Abstand $s = 9 \text{ cm}$ eingesetzten Nägel besitzen eine Scherfestigkeit von 40 N .

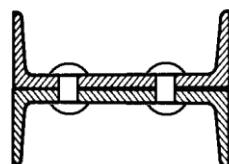
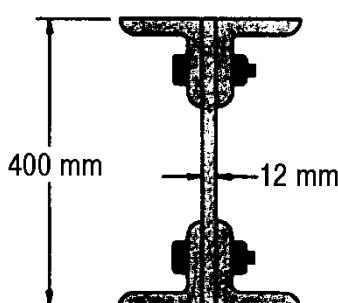
Bestimmen Sie die maximale vertikale Querkraft.

Aufgabe 5.15

Ein aus zwei U-Profilen U-80 (DIN 1026-1) zusammengesetzter Träger wird gemäss Skizze mit $P = 4 \text{ kN}$ belastet. Die beiden Profile sind mit einer doppelten Nietreihe über der gesamten Länge verbunden. Die zulässige Scherbelastung pro Niet beträgt 3 kN .

Zu bestimmen sind:

- die maximale Biegespannung
- der minimale Nietabstand in Längsrichtung
- ist ein gleichmässiger Nietabstand über der Länge sinnvoll? (Begründung)

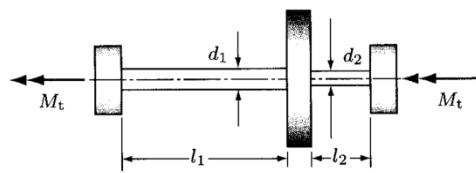
Aufgabe 5.16

Vier $100 \times 100 \times 10 \text{ mm}$ Stahlwinkel und eine $12 \times 400 \text{ mm}$ Stahlplatte bilden den Querschnitt des abgebildeten Trägers. Die Bolzen besitzen einen Durchmesser von $\varnothing 22 \text{ mm}$ und haben einen Abstand in Längsrichtung von 120 mm . Am Träger wirkt eine vertikale Querkraft von $Q = 240 \text{ kN}$.

Bestimme die mittlere Schubspannung in jedem Bolzen.

6. Torsion

Aufgabe 6.1



Am mittleren Zahnrad wird ein Moment eingeleitet und an den beiden Enden werden gleich grosse Momente abgegriffen.

$$d_1 = 35 \text{ mm}; l_1 = 1000 \text{ mm}; l_2 = 200 \text{ mm}$$

Beide Wellen sind aus demselben Material.

Gesucht sind:

- der Durchmesser d_2 , so dass die Verdrehwinkel der beiden Wellen gleich gross sind
- das maximal zulässige Moment M_t bei einer zul. Schubspannung $\tau_{zul} = 80 \text{ MPa}$

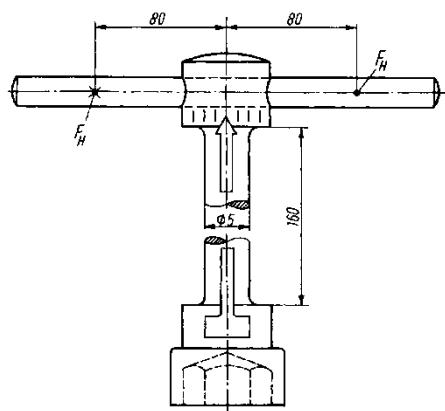
Aufgabe 6.2

Eine Welle soll bei einer Drehzahl von $n = 1480 \text{ min}^{-1}$ eine Leistung von $P = 46 \text{ kW}$ übertragen. Die maximale Spannung τ_{max} soll 40 N/mm^2 nicht übersteigen und die Verdrehung pro Meter Wellenlänge darf maximal $0,5^\circ$ sein. $G = 80'000 \text{ N/mm}^2$
Zu bestimmen ist der mindestens erforderliche Wellendurchmesser.

Aufgabe 6.3

Eine Hohlwelle mit dem Aussendurchmesser $d_a = 50 \text{ mm}$ überträgt bei einer Drehzahl von 2700 U/min eine Leistung von 250 kW . Bestimmen Sie den Innendurchmesser d auf $0,1 \text{ mm}$ gerundet, wenn die zulässige Schubspannung 70 N/mm^2 beträgt.

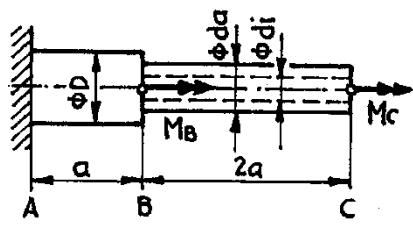
Aufgabe 6.4



Die Abbildung zeigt einen Drehmomentschlüssel aus Stahl ($G = 80'800 \text{ N/mm}^2$) zur Messung des Anzugdrehmomentes. Für ein Drehmoment von 12 Nm sind zu bestimmen:

- der Verdrehwinkel
- die maximale Torsionsspannung
- die Handkräfte F_H

Aufgabe 6.5

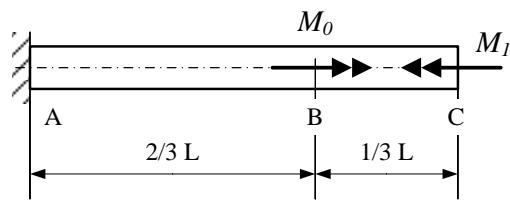


Für den Torsionsstab aus Baustahl gem. Skizze gelten die folgenden Daten. Gesucht sind:

- Maximale Torsionsspannung τ_{tmax}
- Verdrehung der Querschnitte B und C relativ zu A

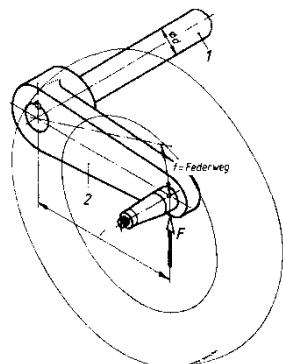
$$D = 60 \text{ mm}; d_a = 40 \text{ mm}; d_i = 20 \text{ mm}; a = 1 \text{ m}$$

$$M_B = 1,8 \text{ kNm}; M_C = 0,6 \text{ kNm}$$

Aufgabe 6.6

Ein einseitig eingespannter Stab mit kreisförmigem Querschnitt ($\varnothing = 250 \text{ mm}$) wird an den Stellen B und C mit den Torsionsmomenten $M_0 = 150 \text{ kNm}$ und M_1 belastet.

- Wie gross muss M_1 sein, damit der Verdrehwinkel am Stabende C Null wird?
- Wie gross ist die maximale Schubspannung und wo tritt sie auf?

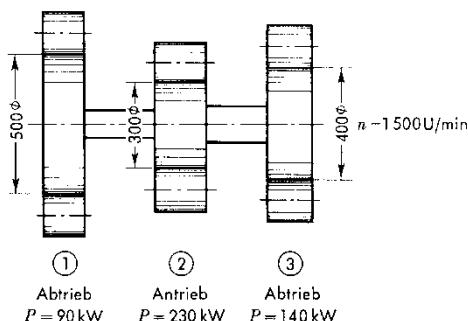
Aufgabe 6.7

Das Rad eines Fahrzeugs ist über den biege- und torsionssteifen Hebel 2 an einem Drehstab 1 ($G = 78000 \text{ N/mm}^2$) als Federelement angelehnt. Beim Durchfedern macht der Radmittelpunkt den Federweg 120 mm .

$$l = 350 \text{ mm}, F = 2940 \text{ N}, \tau_{zul} = 400 \text{ N/mm}^2$$

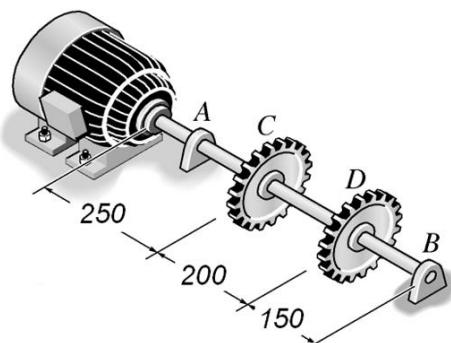
Gesucht sind:

- der Durchmesser d der Drehstabfeder
- die Länge der Drehstabfeder

Aufgabe 6.8

Die Getriebewelle wird vom inneren Ritzel mit einer Leistung von 230 kW angetrieben. Vom linken Zahnrad wird eine Leistung von 90 kW , vom rechten eine von 140 kW abgegeben.

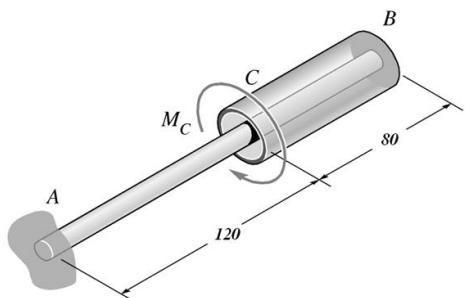
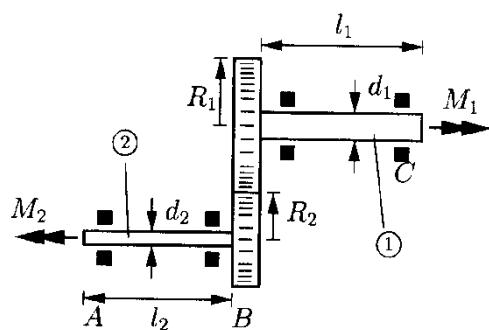
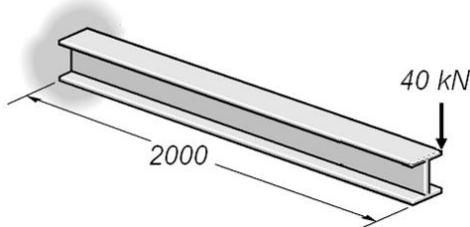
Zu bestimmen sind die Durchmesser der Welle 1-2 und 2-3 für $\tau_{zul} = 70 \text{ N/mm}^2$ bei einer Drehzahl von 1500 min^{-1} .

Aufgabe 6.9

Der Motor gibt bei 1200 U/min eine Leistung von 30 kW ab. Die beiden Zahnräder nehmen bei C eine Leistung von 18 kW und bei D 12 kW auf. Die zulässige Schubspannung beträgt 56 N/mm^2 und der Verdrehwinkel zwischen C und D soll $0,2^\circ$ nicht übersteigen.

Dimensionieren Sie eine Vollwelle mit Durchmesser auf 1 mm gerundet.

$$G = 76'000 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 6.10Aufgabe 6.11Aufgabe 6.12

Ein bei A eingespannter Rundstab $\varnothing 20 \text{ mm}$ ist bei B mit einem Rohr $40 \times 2,5 \text{ mm}$ verschweisst. Bei C wird ein Moment $M_C = 20 \text{ Nm}$ in das Rohr eingeleitet.

Beide Bauteile $G = 76'000 \text{ N/mm}^2$

- Wie gross ist der Verdrehwinkel bei C?
- Wo tritt die max. Schubspannung auf und wie gross ist sie?

Ein Getriebe besteht aus 2 Vollwellen aus Stahl ($G = 80'800 \text{ N/mm}^2$), die über Zahnräder verbunden sind. Die Welle (1) wird durch das Moment $M_1 = 900 \text{ Nm}$ belastet. $R_1 = 200 \text{ mm}$, $R_2 = 150 \text{ mm}$, $l_1 = 400 \text{ mm}$, $l_2 = 300 \text{ mm}$

- Wie gross muss M_2 sein, damit Gleichgewicht herrscht?
- Wie müssen d_1 und d_2 gewählt werden? zulässige Schubspannung $\tau_{zul} = 40 \text{ N/mm}^2$
- Wie gross ist dann die Winkelverdrehung bei C, wenn die Welle (2) bei A festgehalten wird?

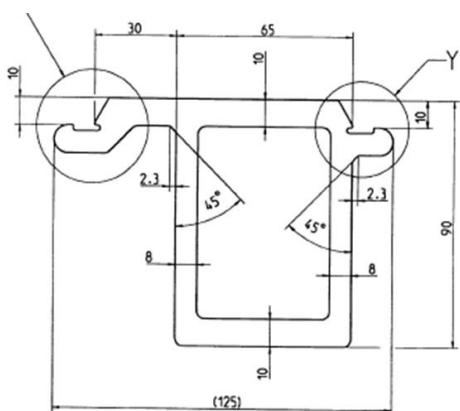
Ein einseitig eingespannter Stahlträger aus einem IPB 200 ist so ausgelegt, dass er bei Belastung von 40 kN in der Mitte des Querschnitts eine Biegespannung von 140 N/mm^2 erreicht und sich dabei um 9 mm absenkt.

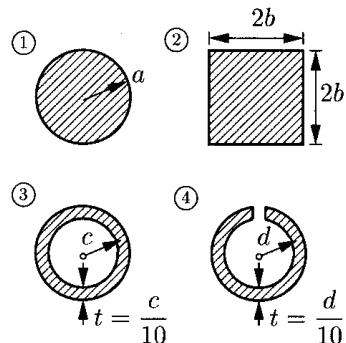
Nun wird er mit der gleichen Kraft exzentrisch (100 mm von der Mitte) belastet.

Ist die zusätzliche Spannung infolge Torsion relevant?

Wie gross ist die zusätzliche Absenkung infolge Verdrehung des Querschnitts?

Zu bestimmen ist für das Aluminium Strangpressprofil das Torsionsflächenmoment.

Aufgabe 6.13

Aufgabe 6.14

c und d sind mittlere Radien

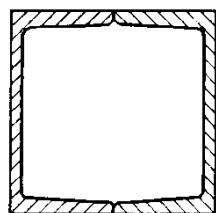
Für einen Stab, der das Torsionsmoment $M_T = 12000 \text{ Nm}$ aufnehmen soll, stehen 4 verschiedene Querschnitte zur Auswahl.

Wie müssen die Querschnitte dimensioniert werden, damit die zulässige Schubspannung von

$$\tau_{zul} = 50 \text{ MPa}$$

nicht überschritten wird?

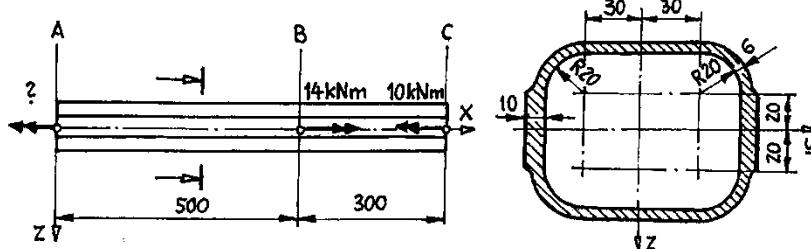
Welcher Querschnitt ist vom Materialaufwand am günstigsten?

Aufgabe 6.15

*E-Modul 210'000 N/mm²
Querkontraktion 0,3*

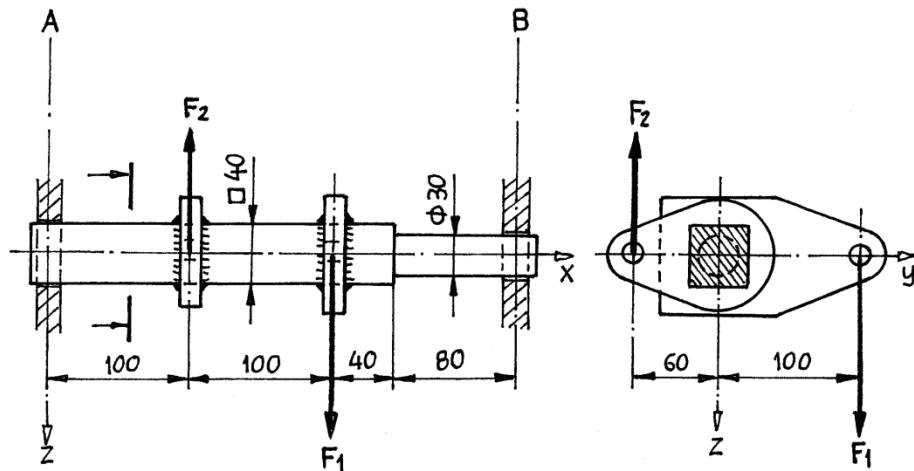
Zwei Profile U 100 sind mittels zwei 6 mm dicken Schweißnähten zu einem Träger zusammengeschweisst.

- Wie gross ist das übertragbare Torsionsmoment bei $\tau_{zul} = 80 \text{ N/mm}^2$?
- Wie gross ist bei diesem Moment der Verdrehwinkel pro Meter?
- Wie gross wäre das übertragbare Torsionsmoment, wenn die beiden Profile nicht verbunden sind?
- Wie gross ist im Fall c) der Verdrehwinkel pro Meter?

Aufgabe 6.16

Das Hohlprofil ist gemäss Skizze rein auf Torsion belastet. Es besteht aus EN-GJL 200 mit $E = 110'000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$. Zu bestimmen sind:

- Das fehlende Moment zur Gleichgewichtslage
- Graphische Darstellung des Torsionsmomentes über x
- Die Verdrehung (Betrag u. Richtung) des Querschnitts C relativ zum Querschnitt A
- Die maximale Spannung (Betrag)
- Wo entlang der x-Achse und im Querschnitt tritt die maximale Spannung auf?

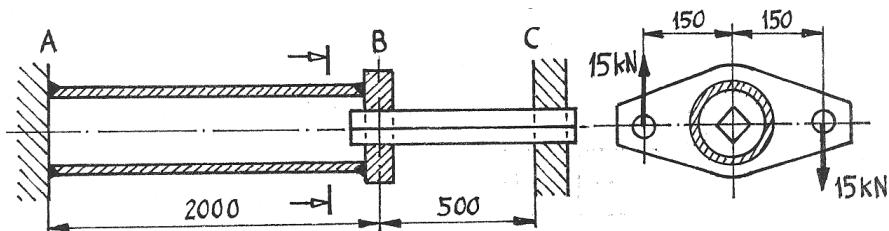
Aufgabe 6.17

Der Stahlträger gem. Skizze ist an der Stelle A in einem Lager mit Vierkantöffnung und an der Stelle B in einem Lager mit runder Öffnung (drehbar) gelagert.

Über die beiden aufgeschweißten Hebel werden die Lasten $F_1 = 6,25 \text{ kN}$ und $F_2 = 4,0 \text{ kN}$ aufgebracht. $E = 190'000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$.

Zu bestimmen sind:

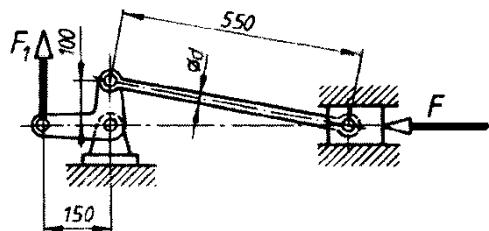
- Graphische Darstellung des Torsionsmomentes zwischen A und B
- Die maximale Spannung aufgrund der Torsion
- Wo tritt diese max. Spannung im Querschnitt auf
- Die Verdrehung in ° des Querschnitts B in Bezug auf den Querschnitt A

Aufgabe 6.18

Der Hebel an der Stelle B ist über ein Rohr (Aussendurchmesser 100 mm, Wandstärke 4 mm) sowie einen 4-kt – Torsionsstab 40x40 mm gem. Skizze abgestützt und belastet. Rohr und Torsionsstab sind aus Stahl ($G = 80'800 \text{ N/mm}^2$) hergestellt. Wie gross sind die max. Schubspannungen im Rohr und im 4-kt – Torsionsstab und wo treten sie auf?

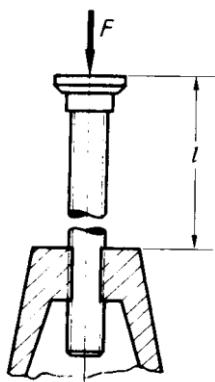
7. Knickung

Aufgabe 7.1



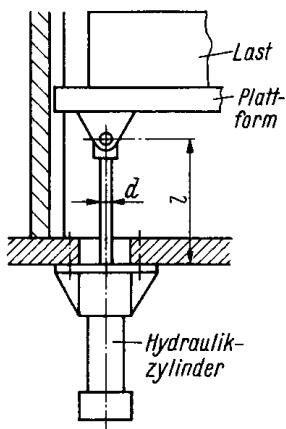
Für die skizzierte Stellung eines Bremsgestänges ist der Durchmesser d der 550 mm langen Stange aus S235 auf mm gerundet zu bestimmen. Hebelkraft $F_1 = 4\text{kN}$. Es wird eine 10-fache Sicherheit gegen Knicken gefordert.

Aufgabe 7.2



Die Spindel mit dem Gewinde Tr 20 x 4 (Kerndurchmesser 15,5 mm) ist mit $F = 4\text{kN}$ belastet. Auf welche Länge darf sie maximal herausgeschraubt werden, wenn eine Sicherheit gegen Knicken von 3 gefordert ist?

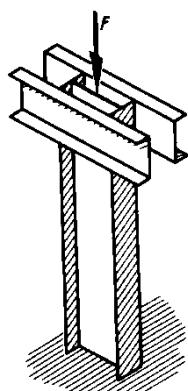
Aufgabe 7.3



In einer Hebebühne für eine Tragfähigkeit von 12 t befinden sich 4 Hydraulikzylinder. Die Plattform ist an Schienen geführt und wiegt 3000 kg. Bei voll ausfahrener Hubhöhe hat die Kolbenstange aus E335 ($\varnothing 50\text{ mm}$) eine Länge von 1,8 m.

Wie gross ist die Sicherheit gegen Knicken?

Aufgabe 7.4

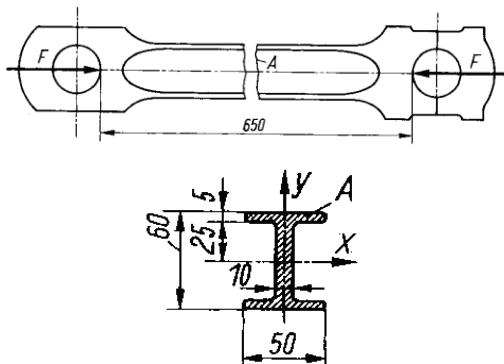
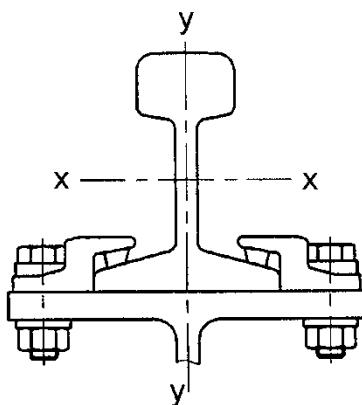


Ein Träger IPE 200 aus S235 ist unten eingespannt und oben von 2 U-Profilen gehalten, jedoch nicht mit ihnen verbunden.

Zu berechnen ist die zulässige Kraft F für eine Länge von 3,5 m und eine Sicherheit gegen Knicken von 3.

Aufgabe 7.5

Eine Säule von 2,50 m soll für eine Belastung von 300 kN dimensioniert werden. Es ist ein IPB-Träger (DIN 1025 Blatt 2) aus S235 vorgesehen. Der Sicherheitsfaktor wird mit $S = 4$ festgelegt. Die Berechnung soll für den Normalfall (beidseitig gelenkig gelagert) durchgeführt werden.

Aufgabe 7.6Aufgabe 7.7

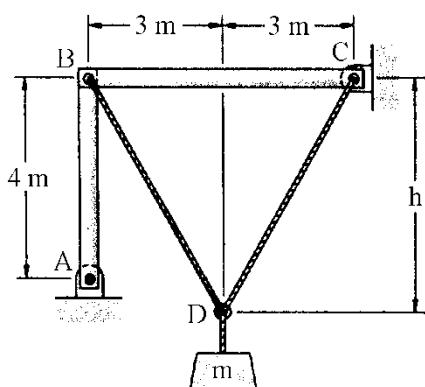
Die Schubstange aus E335 hat in einer Kolbenmaschine eine mit starken Stößen auftretende Nennkraft von 38,5 kN zu übertragen. Diese Stöße werden berücksichtigt, indem die Nennkraft mit einem Betriebsfaktor von 1,8 multipliziert wird.

Bestimme die Sicherheit gegen Knicken.

Eine Schiene S10 nach DIN 5901 aus E335 ist auf einem Walzprofilträger mittels Klemmen montiert. Der Klemmabstand beträgt 1,5 m. Die Profilwerte sind $A = 1270 \text{ mm}^2$, $I_x = 850'000 \text{ mm}^4$ und $I_y = 138'000 \text{ mm}^4$.

Durch Sonneneinstrahlung erwärmt sich die Schiene, kann sich aber nicht ausdehnen. Sie bekommt also Druckspannungen.

Um welche Achse wird die Schiene zuerst ausknicken ($\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} /K$) und bei welcher Temperatur tritt Knicken ein? (Die Klemmen können ein Drehen um die y-Achse nicht verhindern; konservative Annahme)

Aufgabe 7.8

Die gelenkig gelagerten Strukturelemente AB und BC bestehen aus Aluminiumrohr mit einem Aussendurchmesser $D = 120 \text{ mm}$ und einer Wandstärke von $t = 10 \text{ mm}$.

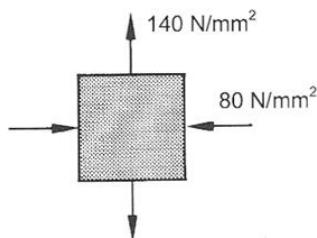
Bestimme:

Die grösste Masse, die im Punkt D aufgehängt werden kann, wenn $h = 4 \text{ m}$ beträgt und eine Knicksicherheit $S = 3,5$ gefordert ist.

$$(E_{Al} = 70'000 \text{ N/mm}^2; \lambda_P = 66)$$

8. Der ebene Spannungszustand

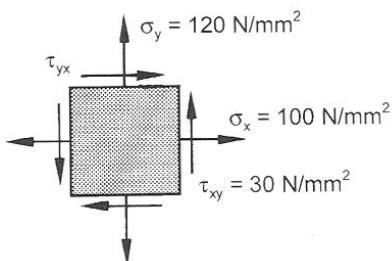
Aufgabe 8.1



Das abgebildete Element ist mit den zwei angegebenen Normalspannungen beansprucht; die Schubspannung ist Null.

Gesucht sind die maximale Schubspannung und die an diesen Schnitten wirkenden Normalspannungen nach Betrag und Richtung (Flächenelement zeichnen).

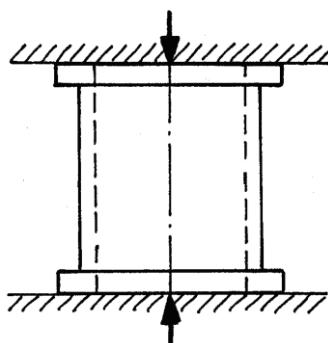
Aufgabe 8.2



Bestimmen sie für das abgebildete Element:

- die Hauptspannungen und die maximale Schubspannung nach Betrag und Richtung (Flächenelement zeichnen)
- zeichnen sie den MOHRschen Kreis

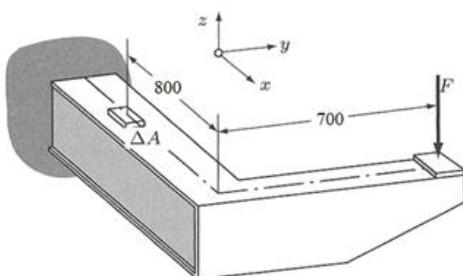
Aufgabe 8.3



Die abgebildete Stütze muss eine statische Druckkraft aufnehmen. Der verwendete Keramikwerkstoff zeichnet sich durch eine sehr hohe Druckfestigkeit aus, während die Schubbeanspruchung den Maximalwert von 200 N/mm^2 nicht überschreiten sollte.

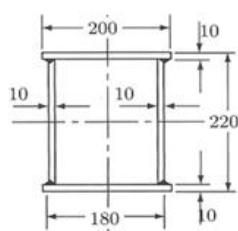
Wie gross ist die maximal zulässige Druckspannung in Stützenlängsrichtung?

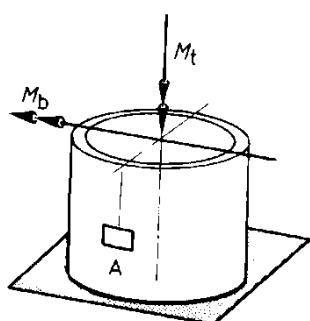
Aufgabe 8.4



Die Konsole ist als Kastenträger gemäss Skizze ausgebildet und mit $F = 50 \text{ kN}$ belastet.

Für das Flächenelement ΔA sind die Hauptspannungen, die maximale Schubspannung sowie deren Richtungen zu bestimmen. Zeichnen Sie den MOHRsche Spannungskreis.



Aufgabe 8.5

Eine Rohrleitung ist durch die drei Belastungen Biegung, Verdrehung und Innendruck belastet.

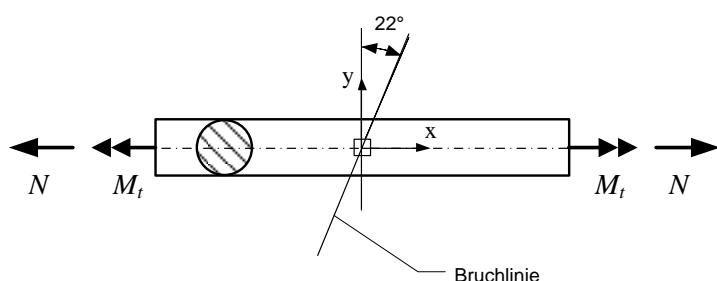
Die einzelnen Spannungen im Element A sind:

$$\text{Biegung: } \sigma_b = 20 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Verdrehung: } \tau_t = 40 \text{ N/mm}^2$$

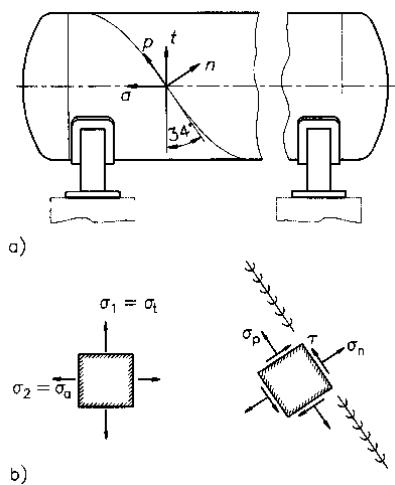
$$\text{Innendruck: } \sigma_t = 40 \text{ N/mm}^2 \text{ (Umfangsrichtung); } \sigma_a = 20 \text{ N/mm}^2 \text{ (Längsrichtung)}$$

Bestimmen sie für das Flächenelement A resultierenden Normal- und Schubspannungen, die Hauptspannungen und die max. Schubspannung und zeichnen sie den MOHRSchen Kreis.

Aufgabe 8.6

Bei einem Rundstab $\varnothing 50 \text{ mm}$ aus Gusseisen GJL-300 ist im Winkel 22° zur Querschnittsfläche ein Gewaltbruch festgestellt worden. Die Belastung bestand aus einem bekannten Torsionsmoment $M_t = 3000 \text{ Nm}$ und einer unbekannten Normalkraft N .

- Zeichnen Sie am Teilelement auf der Oberfläche des Stabes alle Spannungen in der x - y -Ebene ein und berechnen Sie alle bekannten Werte
- Zeichnen Sie am selben Teilelement die Richtung der maximalen Hauptspannung ein
- Wie gross war die Normalkraft N
- Wie gross war die maximale Hauptspannung
- Zeichnen Sie den MOHRSchen Spannungskreis

Aufgabe 8.7

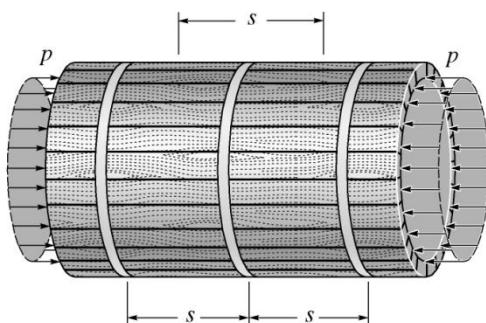
Der Behälter (a) ist aus Stahlband spiralgeschweisst unter einem Winkel von 34° .

Die Hauptspannungen liegen in Umfangs- und Axialrichtung und sind bekannt (b):

$$\sigma_t = 160 \text{ N/mm}^2 \text{ (Umfangsrichtung)}$$

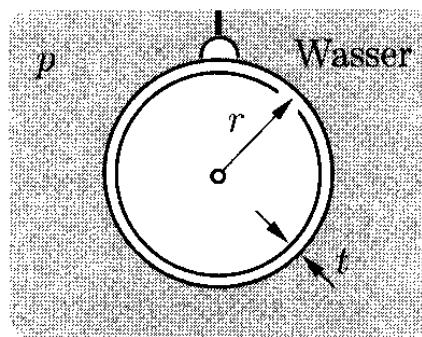
$$\sigma_a = 80 \text{ N/mm}^2 \text{ (Axialrichtung)}$$

Zum Nachweis der Schweissnaht sind die Spannungen quer und längs zur Naht sowie die Schubspannung gesucht.

Aufgabe 8.8

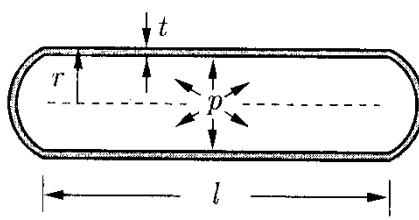
Ein Rohr aus Holzspanen mit dem Innendurchmesser $d = 1 \text{ m}$ wird über Stahlreifen mit $A = 125 \text{ mm}^2$ zusammengehalten.

Bestimmen Sie für $\sigma_{zul} = 85 \text{ N/mm}^2$ den maximalen Abstand s , so dass das Rohr einem Überdruck von 0,28 bar standhält?

Aufgabe 8.9

Eine dünnwandige Tauchkugel befindet sich 200 m unter Wasser. Radius $r = 500 \text{ mm}$, Wandstärke $t = 12,5 \text{ mm}$

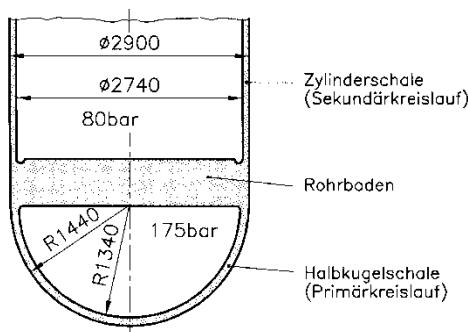
Wie gross sind die Spannungen in der Wandung?

Aufgabe 8.10

Ein dünnwandiger Zylinderkessel aus Stahl wird durch den Innendruck p belastet.

Wie gross darf der Druck maximal sein, damit die grösste Normalspannung im ungestörten Bereich die zulässige Spannung nicht überschreitet?

$$r = 1 \text{ m}, t = 1 \text{ cm}, \sigma_{zul} = 150 \text{ N/mm}^2$$

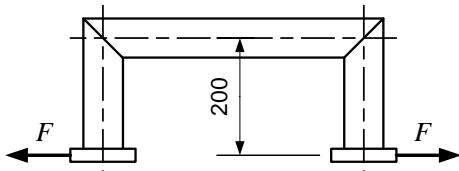
Aufgabe 8.11

Der Dampferzeuger eines Druckwasserreaktors besteht aus einem Halbkugelboden mit 175 bar Überdruck (Primärkreislauf) und einem zylindrischen Teil mit 80 bar Überdruck (Sekundärkreislauf).

Wie gross sind die Spannungen in der Zylinder- und Halbkugelschale?

9. Zusammengesetzte Beanspruchung

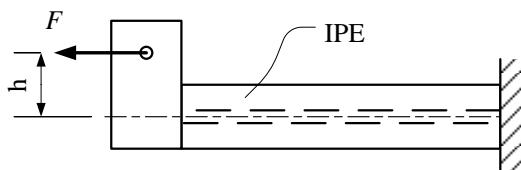
Aufgabe 9.1



Drei Rohre $60,3 \times 2,6$ sind gemäss Skizze zusammengeschweisst und mit der Kraft $F = 3000 \text{ N}$ belastet. Zu bestimmen sind:

- Maximale Spannung
- Anteil der Zugspannung in %?
- Zeichnen Sie die Spannungsverteilung im Schnitt des horizontalen Rohres

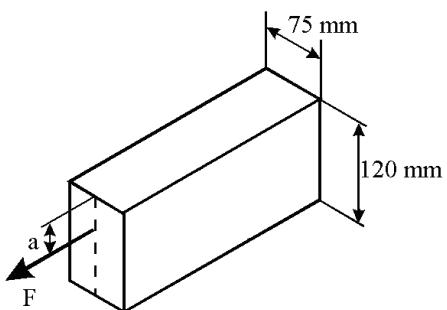
Aufgabe 9.2



Der Träger der Vorrichtung soll als I Träger ausgeführt werden. Gesucht sind ein geeignetes IPE Profil sowie die maximale Spannung.

$$F = 10 \text{ kN}, h = 150 \text{ mm}, \sigma_{zul} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 9.3

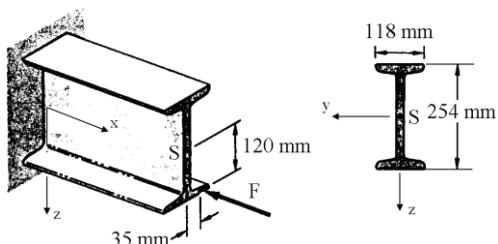


Eine exzentrische Kraft F wirkt wie gezeigt an einem einseitig eingespannten Stahlträger mit dem Querschnitt $120 \times 75 \text{ mm}$.

Auf der Oberseite wird eine Spannung von $+147 \text{ N/mm}^2$ auf der Unterseite eine solche von $+84 \text{ N/mm}^2$ gemessen. Bestimmen Sie

- die Kraft F
- den Abstand a von der Oberkante

Aufgabe 9.4



Eine horizontale Kraft $F = 65 \text{ kN}$ wirkt gem. Skizze exzentrisch auf den einseitig eingespannten kurzen Träger. Die Querschnittswerte betragen:

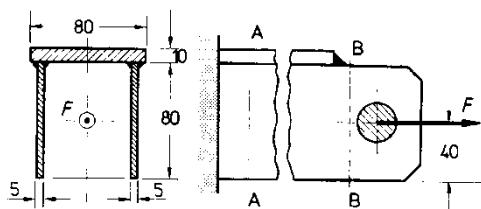
$$A = 4806 \cdot \text{mm}^2$$

$$I_y = 5160 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 283 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

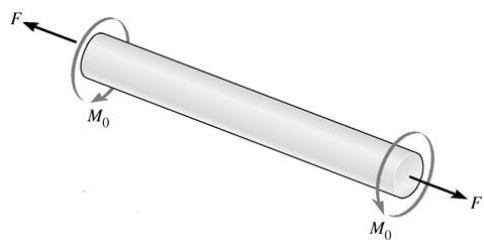
Berechnen Sie die Spannungen nach Betrag und Vorzeichen in den 4 Eckpunkten des Querschnitts.

Aufgabe 9.5



Zu bestimmen sind die max. Spannungen oben und unten in den Schnitten A-A und B-B.

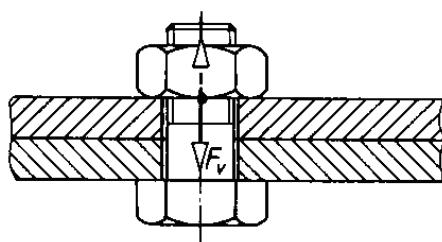
$$F = 100 \text{ kN}$$

Aufgabe 9.6

Der kreisförmige Stab ($\varnothing = 15 \text{ mm}$) ist gleichzeitig statisch auf Zug mit $F = 18 \text{ kN}$ und Torsion mit $M_0 = 40 \text{ Nm}$ belastet.

Beurteilen Sie die Festigkeit für:

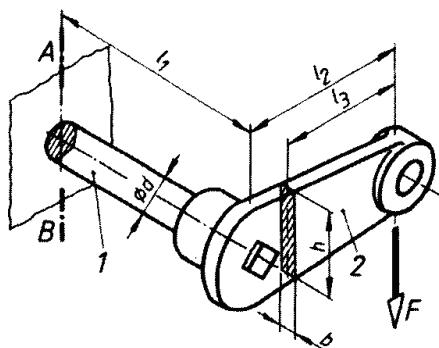
- E295 ($\sigma_z \text{ zul} = 150 \text{ N/mm}^2$)
- GJS-500-7 ($\sigma_z \text{ zul} = 100 \text{ N/mm}^2$)

Aufgabe 9.7

Für eine Schraube M12 8.8 sind eine Vorspannkraft $F_v = 45.2 \text{ kN}$ und ein Anziehmoment $M_A = 62,7 \text{ Nm}$ gegeben. Die Streckgrenze ist zu 90% ausgenutzt.

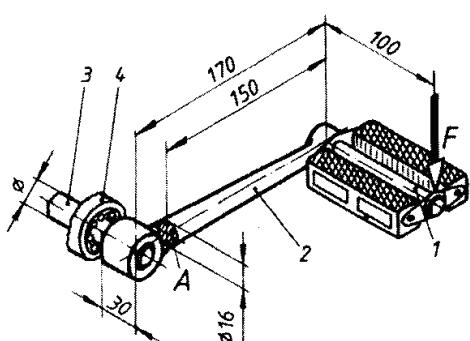
Wie gross ist das maximal zulässige Torsionsmoment im Spannungsquerschnitt?

Wie gross ist das Reibmoment in der Kopf-Auflage M_{RA} ?

Aufgabe 9.8

Die Welle (1) mit Kreisquerschnitt $\varnothing 30 \text{ mm}$ wird über den Hebel (2) mit Rechteckquerschnitt $h \times b$ mit $F = 800 \text{ N}$ belastet. $l_1 = 280\text{mm}$, $l_2 = 200\text{mm}$, $l_3 = 170\text{mm}$. Gesucht:

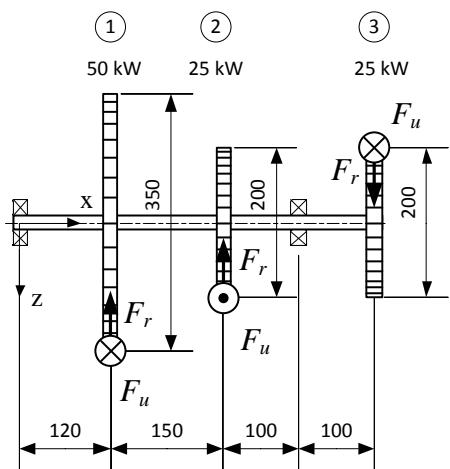
- Die Abmessungen h und b für $h/b = 4$ und $\sigma_{zul} = 100 \text{ N/mm}^2$
- Biegespannung im Schnitt A – B
- Torsionsspannung im Schnitt A – B
- Vergleichsspannung im Schnitt A – B

Aufgabe 9.9

Für den Fahrrad-Kurbeltrieb soll die Welle (3) $\varnothing 22 \text{ mm}$ mit $F = 800 \text{ N}$ überschlägig berechnet werden.

Zu bestimmen sind:

- Biegespannung (wechselnd)
- Torsionsspannung (schwellend)
- Vergleichsspannung
- Wählen Sie einen Werkstoff

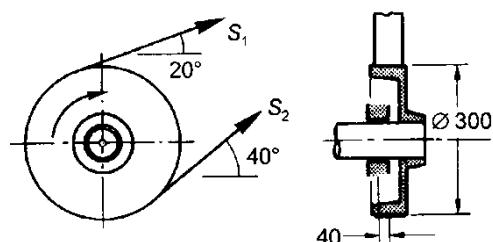
Aufgabe 9.10

Das Zahnrad (1) nimmt eine Leistung von 50 kW bei $n = 600 \text{ U/min}$ auf. Die Räder (2) und (3) nehmen je die Hälfte ab. Das Torsionsmoment ist schwellend.

Die Zahnräder sind gerade verzahnt ($\beta = 0^\circ$) und der Zahnrad-Eingriffswinkel sei $\alpha = 20^\circ$.

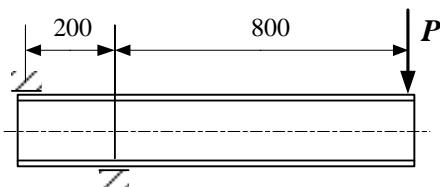
Stahl E 295 mit $\sigma_{zul} = 80 \text{ N/mm}^2$.

Zu bestimmen ist der erforderliche Wellendurchmesser

Aufgabe 9.11

Für den Riemenantrieb ist an der Lagerstelle der Wellendurchmesser für den Werkstoff E 295 auf ganze mm gerundet zu bestimmen. Die Torsion ist schwellend.

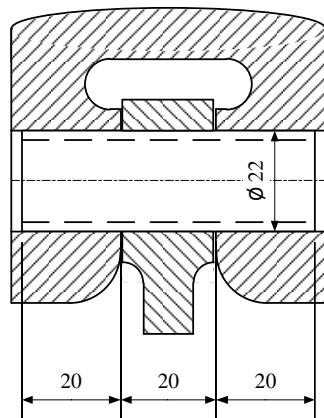
$P = 60 \text{ kW}, n = 700 \text{ U/min}, S_1/S_2 = 2, \sigma_{zul} = 60 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 9.12

Ein IPB-200 Träger aus S355 ist gemäss Skizze im Abstand 200mm zweifach aufgelegt und mit einer ruhenden Last $P = 80 \text{ kN}$ belastet.

Zu bestimmen sind:

- Maximale Biegespannung
- Maximale Schubspannung
- Vergleichsspannung

Aufgabe 9.13

Ein Kolbenbolzen soll aus Gewichtsgründen als Hohlbolzen 22 x 2 mm ausgeführt werden.

Er sitzt im Kolben mit einer Übermass- und im Pleuelauge mit einer Spielpassung (entspricht Einbaufall 2).

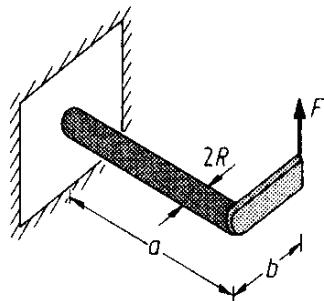
Für eine maximale Kraft am Pleuel von 15 kN sind für den Bolzen zu berechnen:

- Maximale Biegespannung
- Maximale Schubspannung

Tipp: Mit einer Wandstärke von $t = 2 \text{ mm}$ kann der Bolzen als dünnwandig betrachtet werden ($t/d \ll 1$).

10. Festigkeitsnachweis

Aufgabe 10.1

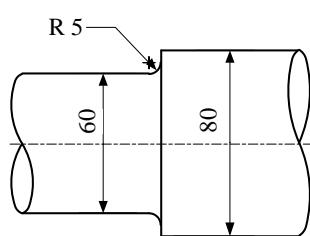


$2R = 100 \text{ mm}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $F = 5000 \text{ N}$

Der kreisförmige Stab ist aus Stahl S235. Für den kritischen Querschnitt ist die Sicherheit gegen Fliessen zu prüfen:

- Spannungsnachweis über Vergleichsspannung und $\sigma_{zul} = 160 \text{ N/mm}^2$ (DIN 15018)
- Festigkeitsnachweis ohne Berücksichtigung von K_t und n_{pl}
- Festigkeitsnachweis mit Berücksichtigung von K_t und n_{pl}

Aufgabe 10.2

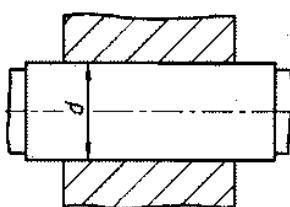


Der Wellenabschnitt ist mit einem ruhenden Torsionsmoment von 7000 Nm belastet.

Berechnen Sie die Sicherheit gegen Gewaltbruch für:

- Baustahl E360
- Gusseisen EN-GJS-700-2 (Kugelgraphit)

Aufgabe 10.3

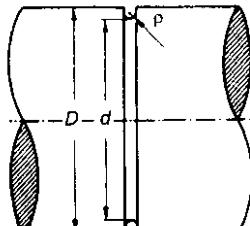


Die Welle-Nabe-Verbindung ist als Presssitz ausgebildet.

Die Welle mit $d = 200 \text{ mm}$ aus 42CrMo4 ist auf Biegung belastet.

Gesucht ist die Kerbwirkungszahl β_K

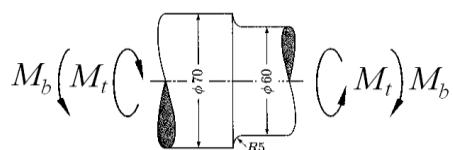
Aufgabe 10.4



Der gekerbte, geschliffene ($R_z = 12,5$) Rundstab aus E295 soll *schwellend* eine axiale Kraft von $F = 60 \text{ kN}$ aufnehmen.

Ist dies für eine Sicherheit von 1,5 gegen Dauerbruch nach DIN 743 möglich?

$D = 40 \text{ mm}$, $d = 32 \text{ mm}$, $\rho = 2 \text{ mm}$

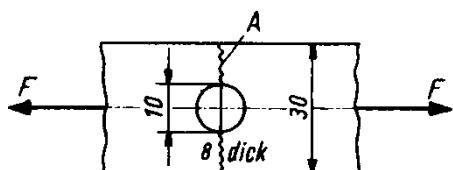
Aufgabe 10.5

Der Wellenabsatz aus Vergütungsstahl 41Cr4 ist mit $M_b = 2800 \text{ Nm}$ und $M_t = 2200 \text{ Nm}$ (statisch) belastet.

Für die Oberfläche gilt $R_z = 6,3 \mu\text{m}$.

Die Inspektion ist regelmässig, die Schadensfolgen gross.

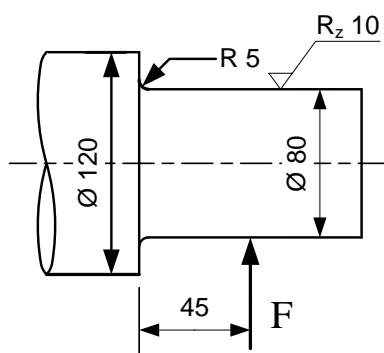
Führen Sie den Dauerfestigkeitsnachweis.

Aufgabe 10.6

Der Flachstahl aus S185 wird mit einer wechselnden Kraft $F = 6 \text{ kN}$ belastet. In seltenen Fällen steigt die Last auf das 2-fache an. Die Bohrung ist geschruppt.

Gesucht sind die Sicherheiten gegen Fliessen und gegen Dauerbruch nach FKM.

Bezogenes Spannungsgefälle $G' = \frac{2,3}{r}$

Aufgabe 10.7

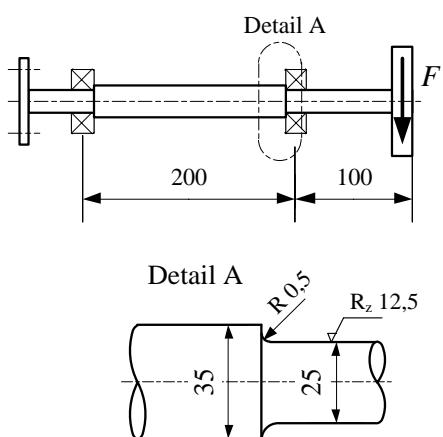
Der Zapfen einer Welle aus Vergütungsstahl 34CrMo4 unterliegt folgenden *voneinander unabhängigen* Lastfällen:

Lc 1: max. statische Kraft $F_{max} = 300 \text{ kN}$
Lc 2: Wechsellauf $F_{dyn} = \pm 100 \text{ kN}$

- Wie gross ist die Sicherheit gegen Fliessen im Lastfall Lc 1 unter Berücksichtigung plastischer Reserven?

Für den Lastfall Lc 2 sind zu berechnen:

- die Nennspannung im kritischen Querschnitt
- die maximale Spannung in der Kerbe
- die Bauteilwechselfestigkeit
- die Sicherheit gegen Dauerbruch

Aufgabe 10.8

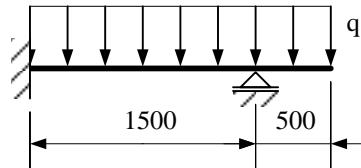
Eine Welle aus E295 wird über die Kupplung mit $P = 6 \text{ kW}$ bei $n = 1500 \text{ U/min}$ angetrieben. Das Torsionsmoment ist schwellend wirkend. Das Riemengetriebe ist mit $F = 800 \text{ N}$ vorgespannt.

Die Inspektion ist nicht regelmässig, die Schadensfolgen gering.

Gesucht ist der Dauerfestigkeitsnachweis für die Welle.

11. Statisch unbestimmte Systeme

Aufgabe 11.1

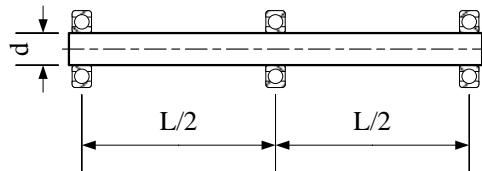


Ein Träger ist links eingespannt und ausserdem in einem Loslager abgestützt.

Die konstante Streckenlast ist $q = 4 \text{ N/mm}$.

Es sind die Auflagerreaktionen und das Biegemoment-Diagramm zu bestimmen.

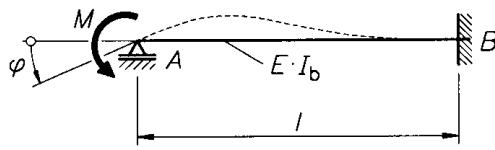
Aufgabe 11.2



Die Welle mit Durchmesser d aus Stahl ($E = 210'000 \text{ N/mm}^2$) ist 3-fach gelenkig gelagert. Das mittlere Lager B ist um δ höher als die Lager A und C. Wie gross ist die Biegespannung nach der Montage?

- allgemeine Lösung
- Lösung für $\delta = 0,2 \text{ mm}$, $d = 50 \text{ mm}$ und $L = 500 \text{ mm}$

Aufgabe 11.3

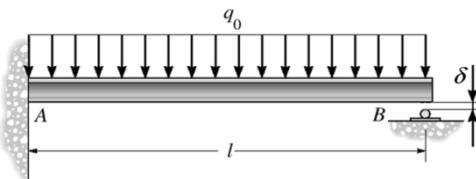


Ein Balken ist bei B eingespannt und bei A gelenkig gelagert.

Er wird durch ein Moment M belastet.

Zu bestimmen sind die Lagerreaktionen, der Biegemomentverlauf und der Neigungswinkel bei A (allgemeine Lösung).

Aufgabe 11.4

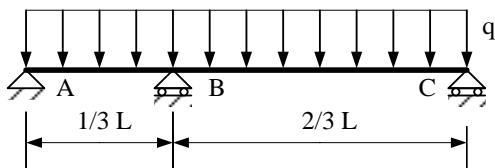


Für den Träger sind die Auflagerreaktionen und das Biegemoment-Diagramm zu berechnen

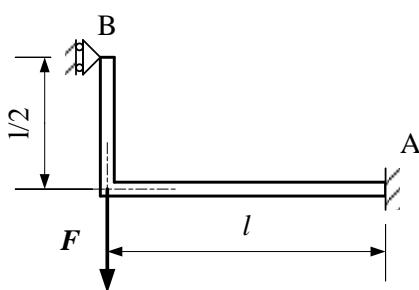
- $\delta = 0$
- $\delta = 10 \text{ mm}$

$$q_0 = 3 \text{ N/mm}, l = 2 \text{ m}, E \cdot I = 5 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}^2$$

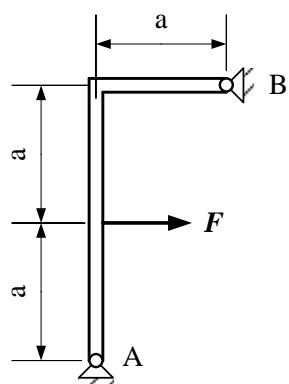
Aufgabe 11.5



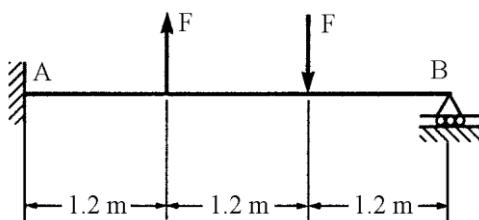
Für den Träger der Länge L mit kontinuierlicher Biegesteifigkeit $E \cdot I$ sind die Auflagerreaktionen zu berechnen (allgemeine Lösung).

Aufgabe 11.6

Für den gekröpften Träger sind die Auflagerreaktionen zu berechnen und das Biegemomentdiagramm zu zeichnen (allgemeine Lösung).

Aufgabe 11.7

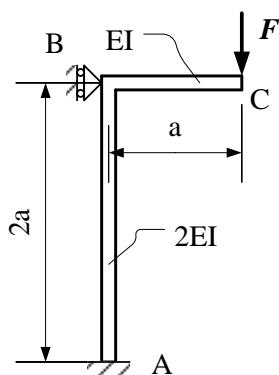
Für den gekröpften Träger sind die Auflagerreaktionen zu berechnen und das Biegemomentdiagramm zu zeichnen (allgemeine Lösung).

Aufgabe 11.8

Der Träger mit konstanter Biegesteifigkeit $E \cdot I$ ist an einer Seite fest eingespannt, auf der anderen auf einem Rollenlager abgestützt. Er ist durch zwei gleich grosse aber entgegengesetzte gerichtete Kräfte $F = 5 \text{ kN}$ belastet.

Bestimme:

- Die Lagerreaktionen
- Den Querkraft- sowie Biegemomentverlauf
- Das maximale Biegemoment M_{\max} .

Aufgabe 11.9

Für den gekröpften Träger sind die Auflagerreaktionen zu berechnen und das Biegemoment zu zeichnen.

Die vertikale Deformation des Punktes C ist zu bestimmen.

Allgemeine Lösung in Funktion von F , a , EI

D Lösungen Festigkeit

Hinweis: Zur Klärung des Vorzeichnens von Kräften und Verschiebungen bzw. Momenten und Verdrehungen werden Pfeile in Klammern (\downarrow) bzw. (\circlearrowright) angegeben.

2. Grundlagen

Aufgabe 2.1

$$\Delta l = 3,1 \text{ mm}$$

Aufgabe 2.2

$$\sigma = 99,47 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta l = 1,895 \text{ mm}$$

Aufgabe 2.3

$$A_5 = 21,5 \%$$

Aufgabe 2.4

$$a) \quad \sigma = 2,34 \text{ N/mm}^2$$

$$b) \quad \varepsilon = 0,6 \text{ (60\%)}$$

$$c) \quad E = 3,9 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 2.5

$$a) \quad \varepsilon = 0,0272 \text{ (2,72\%)}$$

$$b) \quad \sigma = 1,63 \text{ N/mm}^2$$

$$c) \quad F = 816 \text{ N}$$

Aufgabe 2.6

$$a) \quad \tau = 5 \text{ N/mm}^2$$

$$b) \quad G = 50 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 2.7

$$a) \quad \sigma = 113,2 \text{ N/mm}^2; S_D = 1,81$$

$$b) \quad \sigma = 283,0 \text{ N/mm}^2; S_F = 1,25$$

$$c) \quad \sigma = 283,0 \text{ N/mm}^2; S_B = 1,66$$

Aufgabe 2.8

$$a) \quad \sigma_n = 187,5 \text{ N/mm}^2$$

$$b) \quad \sigma_{max} = 422 \text{ N/mm}^2$$

$$c) \quad S_F = 1,25$$

$$d) \quad \sigma_n = 37,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 140 \text{ N/mm}^2$$

$$S_D = 1,87$$

Aufgabe 2.9

$$a) \quad \sigma_n = 152,8 \text{ N/mm}^2; S_F = 1,54$$

$$b) \quad \alpha_k = 2,0; \sigma_{max} = 305,6 \text{ N/mm}^2$$

$$S_B = 1,18$$

Aufgabe 2.10

$$\sigma_n = 77,78 \text{ N/mm}^2; \sigma_{max} = 214,2 \text{ N/mm}^2;$$

$$\alpha = 2,75$$

Aufgabe 2.11

$$b = 33,3 \text{ mm}, a = 167 \text{ mm}$$

Aufgabe 2.12

Querkraft $Q = 12 \text{ kN}$; Schubspannung

Biegemoment $M_b = 480 \text{ Nm}$, Normalspannung

Aufgabe 2.13

Schnitt $x - x$

Normalkraft $N = 5 \text{ kN}$; Normalspannung

Schnitt $y - y$

Normalkraft $N = 5 \text{ kN}$; Normalspannung

Biegemoment $M_b = 250 \text{ Nm}$, Normalspannung

Aufgabe 2.14

$$N_A = 10 \text{ kN (Zug)}$$

$$N_B = -2 \text{ kN (Druck)}$$

$$N_C = 4 \text{ kN (Zug)}$$

Aufgabe 2.15

Querschnitt bei R1:

$$\sigma_{max} = 772 \text{ N/mm}^2; S_B = 1,17$$

Querschnitt bei R2:

$$\sigma_{max} = 713 \text{ N/mm}^2; S_B = 1,26$$

→ Querschnitt R1 kritischer

3. Zug und Druck

Aufgabe 3.1

- a) $\sigma = 127,3 \text{ N/mm}^2$
- b) $\varepsilon = 6,2 \cdot 10^{-4}$ (0,062%)
- c) $E = 205'400 \text{ N/mm}^2$
- d) $\mu = 0,29$
- e) $W = 0,31 \text{ J}$

Aufgabe 3.2

$$W = 4,48 \text{ J}$$

Aufgabe 3.3

- a) $\varepsilon = 0,167$; $\sigma = 0,833 \text{ N/mm}^2$
- b) $A = 600 \text{ mm}^2$; $d = 27,6 \text{ mm}$
- c) $V = 18'000 \text{ mm}^3$; $W = 1,25 \text{ J}$

Aufgabe 3.4

$$\sigma_1 = 60 \text{ N/mm}^2$$
; $\sigma_2 = 51,7 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 3.5

$$\Delta l = 0,7 \text{ mm}$$

Aufgabe 3.6

- a) 2. Abschnitt von rechts (200 mm)
 $\sigma = 124,5 \text{ N/mm}^2$
- b) $\Delta l = 1,86 \text{ mm}$

Aufgabe 3.7

$$P_1 = 275,6 \text{ kN}$$
; $P_2 = 630,0 \text{ kN}$

Aufgabe 3.8

$$S = 34'684 \text{ N}$$
; $\sigma = 35,3 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 3.9

- Segment (1000 mm): $\sigma = +125 \text{ N/mm}^2$
 Segment (750 mm): $\sigma = +29,2 \text{ N/mm}^2$
 Segment (500 mm): $\sigma = -37,5 \text{ N/mm}^2$
 $\Delta x = 0,61 \text{ mm}$ (\uparrow)

Aufgabe 3.10

- a) $F = 2157 \text{ N}$
- b) $A_{\min} = 52 \text{ mm}^2$; $\sigma = 41,5 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 3.11

$$S = 153,6 \text{ kN}$$
; $m = 10'960 \text{ kg}$

Aufgabe 3.12

$$F_{AD} = 344,7 \text{ kN}$$
; $A_{\text{erf}} = 1231 \text{ mm}^2$
 $U100$; $\sigma = 127,7 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 3.13

- a) $F_M = 1466 \text{ N}$
 - b) $\Delta l = 3,46 \text{ mm}$
- $F_{Al} = 507,5 \text{ N}$; $F_{St} = 1015 \text{ N}$

Aufgabe 3.14

- a) $\sigma_1 = 240 \text{ N/mm}^2$ (Zug)
- $\sigma_2 = 20 \text{ N/mm}^2$ (Druck)
- b) $\Delta l = 0,57 \text{ mm}$

Aufgabe 3.15

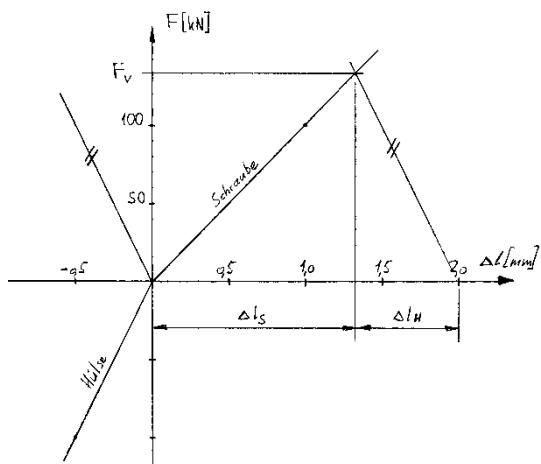
- a) $m = 18'249 \text{ kg}$
- b) Seil 2 reisst zuerst
 $S_1 = 0,382 \cdot S_2$; $P_1 = 0,625 \cdot P_2$
- c) 36 mm

Aufgabe 3.16

- a) $F_Z = 7159 \text{ N}$
- b) $\sigma = 191 \text{ N/mm}^2$
- c) $\sigma = 140 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 3.17

$$\Delta l_H = 0,667 \text{ mm}$$
; $F_V = 133 \text{ kN}$



Aufgabe 3.18

$$F = 6590 \text{ N}$$

 $\Delta l_{\text{rechts}} = 0,22 \text{ mm}$; $\Delta l_{\text{links}} = 0,78 \text{ mm}$

Aufgabe 3.19

$$S_1 = 10 \text{ kN}$$
; $S_2 = 14,14 \text{ kN}$
 $\Delta x = 0,61 \text{ mm}$ (\rightarrow); $\Delta y = 1,64 \text{ mm}$ (\downarrow)

Aufgabe 3.20

$$S_1 = 8485 \text{ N}$$
; $S_2 = -8485 \text{ N}$
 $\Delta x = 0,3 \text{ mm}$ (\rightarrow), $\Delta y = 0,1 \text{ mm}$ (\uparrow)

Aufgabe 3.21

$$\sigma_1 = -120,9 \text{ N/mm}^2$$
; $\sigma_2 = 154,0 \text{ N/mm}^2$
 $\Delta x = 0,58 \text{ mm}$ (\leftarrow); $\Delta y = 2,03 \text{ mm}$ (\downarrow)

4. Biegung

Aufgabe 4.1

$$M_{b,\max} = 937,5 \text{ Nm}; \sigma_{\max} = 76,4 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.2

- d) Punkt B oben: $\sigma_{\max} = +85,7 \text{ N/mm}^2$
e) Punkt C oben: $\sigma_{\max} = -101,4 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 4.3

$$M_{b,\max} = 127 \text{ kNm}$$

$$W_{\text{erf}} = 529,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3; \text{ IPE 300}$$

Aufgabe 4.4

$$M_{b,\max} = 7000 \text{ Nm}; W_{\text{erf}} = 175 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$B = 64 \text{ mm}; h = 128 \text{ mm}$$

Aufgabe 4.5

$$a) M_{b,\max} = 300 \text{ kNm}; \sigma_{\max} = 104 \text{ N/mm}^2$$

$$b) M_{b,C} = 150 \text{ kNm}; \\ \sigma_{\text{oben}} = -52 \text{ N/mm}^2; \sigma_{\text{unten}} = +52 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.6

$$M_b = 245'250 \text{ Nmm}$$

$$2 \text{ Rohre: } W_y = 1528 \text{ mm}^3; \sigma_{\max} = 160,5 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.7

$$M_b = 1950 \text{ Nm}$$

$$b = 25,3 \text{ mm}; h = 76,0 \text{ mm}$$

Aufgabe 4.8

$$a) F_{\text{res}} = 13'856 \text{ N}$$

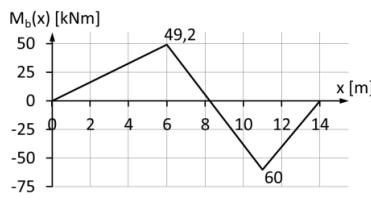
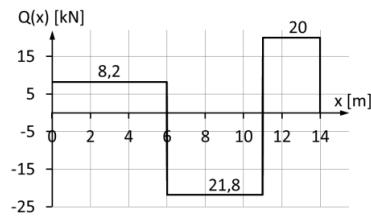
$$b) M_{b,\max} = 1746 \text{ Nm}$$

$$c) W_{\text{erf}} = 19,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$d) d = 58,2 \text{ mm}$$

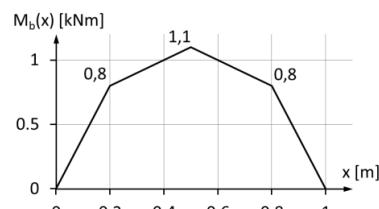
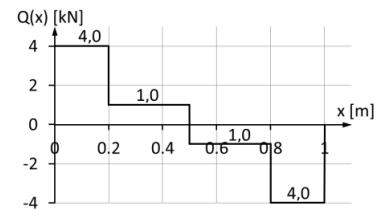
$$e) \sigma_{\max} = 82,3 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.9



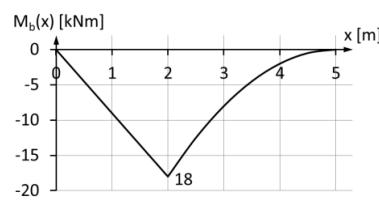
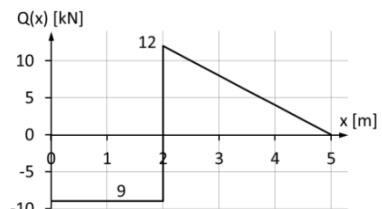
$$M_{b,\max} = 60 \text{ kNm}; W_{\text{erf}} = 428,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\ \text{IPE 270}; \sigma_{\max} = 139,9 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.10



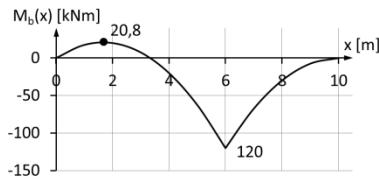
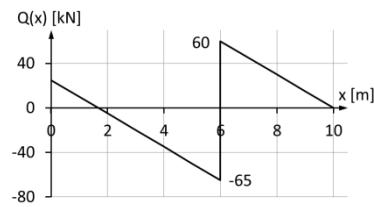
$$M_{b,\max} = 1100 \text{ Nm}; d = 60,7 \text{ mm}$$

Aufgabe 4.11



$$M_{b,\max} = 18 \text{ kNm}; \sigma_{\max} = 101 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.12



$$M_{b,\max} = 120 \text{ kNm}; \sigma_{\max} = 128,2 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 4.13

$$I_y = 1651 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; z_{\max} = 92,7 \text{ mm} \\ W_y = 178,1 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Aufgabe 4.14

$$I_y = 10'765 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; z_{\max} = 115 \text{ mm} \\ W_y = 936 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Aufgabe 4.15

$$\begin{aligned}I_y &= 37,50 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; z_{\max} = 31,67 \text{ mm} \\W_y &= 11,84 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\I_z &= 94,0 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; y_{\max} = 40 \text{ mm} \\W_z &= 23,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

Aufgabe 4.16

$$\begin{aligned}I_y &= 229,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; z_{\max} = 42,78 \text{ mm} \\W_y &= 53,65 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\I_z &= 137,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; y_{\max} = 30 \text{ mm} \\W_z &= 45,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

Aufgabe 4.17

$$\begin{aligned}I_x &= 6284 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; y_{\max} = 135,6 \text{ mm} \\W_x &= 464 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\I_y &= 15375 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; x_{\max} = 125 \text{ mm} \\W_y &= 1230 \cdot 10^3 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

Aufgabe 4.18

$$\begin{aligned}\text{IPE 400} \rightarrow W_y &= 1160 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\M_b &= 162,4 \text{ kNm} \\2 < x < 6 \text{ m}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.19

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad I_y &= 827,3 \text{ cm}^4 \\ \text{b)} \quad W_y &= 105,8 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Aufgabe 4.20

$$\begin{aligned}\text{vorher: } I_y &= 450,0 \text{ cm}^4; W_y = 89,9 \text{ cm}^3 \\ \text{nachher: } I_y &= 607,6 \text{ cm}^4; W_y = 65,9 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Aufgabe 4.21

$$\begin{aligned}M_b &= 80 \text{ kNm}; I_y = 21448 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\A: z &= -175 \text{ mm}; \sigma = -65,3 \text{ N/mm}^2 \\B: z &= -100 \text{ mm}; \sigma = -37,3 \text{ N/mm}^2 \\C: z &= +166,5 \text{ mm}; \sigma = +62,1 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Aufgabe 4.22

$$\begin{aligned}M_b &= 95 \text{ Nm}; d = 23 \text{ mm} \\M_b &= 30 \text{ Nm}; b = 10 \text{ mm}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.23

$$w_C = 3,1 \text{ mm} (\downarrow); \varphi_C = 0,25^\circ (\cup)$$

Aufgabe 4.24

$$\begin{aligned}w_C &= \frac{a^3}{EI} \left(P - \frac{q \cdot a}{3} \right) (\downarrow) \\ \varphi_C &= \frac{a^2}{EI} \left(\frac{7 \cdot P}{6} - \frac{q \cdot a}{3} \right) (\cup)\end{aligned}$$

Aufgabe 4.25

$$w = 1,87 \text{ mm} (\downarrow)$$

Aufgabe 4.26

$$\begin{aligned}w &= \frac{3 \cdot F \cdot a^3}{2 \cdot EI} (\downarrow) \\ \varphi &= \frac{5 \cdot F \cdot a^2}{4 \cdot EI} (\cup)\end{aligned}$$

Aufgabe 4.27

$$\begin{aligned}w_D &= \frac{3 \cdot M_0 \cdot L^2}{64 \cdot E \cdot I} (\downarrow) \\ \varphi_A &= \frac{5 \cdot M_0 \cdot L}{32 \cdot E \cdot I} (\cup) \quad \varphi_B = \frac{3 \cdot M_0 \cdot L}{32 \cdot E \cdot I} (\cup)\end{aligned}$$

Aufgabe 4.28

$$\begin{aligned}F_{\text{res}} &= 5,42 \text{ kN}; w_F = 0,78 \text{ mm} \\ \varphi_A &= 0,13^\circ; \varphi_B = 0,15^\circ\end{aligned}$$

Aufgabe 4.29

- $w_y = 4,95 \text{ mm}$
- $w_x = 8,58 \text{ mm}$
- $w_C = 3,87 \text{ mm}$

Aufgabe 4.30

$$\begin{aligned}w &= \frac{F \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot I} \cdot (a + 3b) (\downarrow) \\ \varphi &= \frac{F \cdot a}{2 \cdot E \cdot I} \cdot (a + 2b) (\cup)\end{aligned}$$

Aufgabe 4.31

$$\begin{aligned}w_x &= \frac{q \cdot a^2 \cdot b^2}{4 \cdot E \cdot I_2} (\leftarrow); w_y = \frac{q \cdot a^4}{8 \cdot E \cdot I_1} + \frac{q \cdot a^3 \cdot b}{2 \cdot E \cdot I_2} (\downarrow) \\ \varphi &= \frac{q \cdot a^3}{6 \cdot E \cdot I_1} + \frac{q \cdot a^2 \cdot b}{2 \cdot E \cdot I_2} (\cup)\end{aligned}$$

Aufgabe 4.32

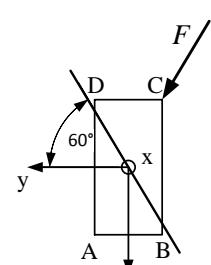
$$F_B = \frac{6}{7} \cdot F_1$$

Aufgabe 4.33

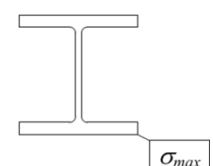
$$\begin{aligned}\text{a)} \quad w_C &= \frac{8 \cdot F \cdot a^3}{E \cdot I} \\ \text{b)} \quad w_A &= \frac{29 \cdot F \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.34

$$\begin{aligned}\sigma_A &= +58,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_B &= +4,2 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_C &= -58,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_D &= -4,2 \text{ N/mm}^2 \\ \beta &= -60,0^\circ\end{aligned}$$

Aufgabe 4.35

- Querschnitt D
- nein, $\sigma_{\max} = 89,5 \text{ N/mm}^2$
- unten rechts



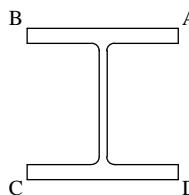
Aufgabe 4.36Spannungen in [N/mm²]

Stelle	F	G	H	I
Schnitt C	-90,0	+10,0	+90,0	-10,0
Schnitt D	-96,7	-63,3	+96,7	+63,3
Schnitt E	-23,3	-56,7	+23,3	+56,7
x = 250 mm	-60,0	-60,0	+60,0	+60,0

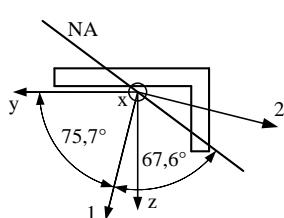
Aufgabe 4.37

IPB 500

$$\begin{aligned}\sigma_A &= -137,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_B &= +100,2 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_C &= +137,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_D &= -100,2 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Aufgabe 4.38

$$\begin{aligned}\sigma_A &= +34,6 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_B &= -30,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_C &= -15,4 \text{ N/mm}^2 \\ \alpha_1 &= 75,66^\circ; \beta = 67,6^\circ\end{aligned}$$

Aufgabe 4.39

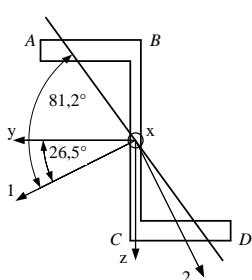
$$\begin{aligned}\sigma_A &= +3,0 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_B &= -45,6 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_C &= +33,3 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Aufgabe 4.40 $\beta \approx 24^\circ$ (keine geschlossene Lösung)Aufgabe 4.41

$$\begin{aligned}\sigma_A &= +80 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_B &= -80 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Aufgabe 4.42

$$\begin{aligned}\sigma_A &= +16,5 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_B &= -51,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_C &= +51,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_D &= -16,5 \text{ N/mm}^2 \\ \text{Hauptachse: } \alpha_1 &= 26,45^\circ \\ \text{Neutralachse: } \beta &= -81,2^\circ\end{aligned}$$



5. Schub

Aufgabe 5.1

$$A = 188,5 \text{ mm}^2; F = 58,4 \text{ kN}$$

Aufgabe 5.2

- $\tau_a = 28,6 \text{ N/mm}^2$
- $D = 44,7 \text{ mm}$

Aufgabe 5.3

$$d = 28 \text{ mm}; l = 44,8 \text{ mm}$$

Aufgabe 5.4

Kraft pro Niet 2222 N

$$\begin{aligned}\tau_a &= 70 \text{ N/mm}^2; \tau_{a,zul} = 113 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_L &= 124 \text{ N/mm}^2; \sigma_{L,zul} = 280 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_z &= 58 \text{ N/mm}^2; \sigma_{z,zul} = 160 \text{ N/mm}^2 \\ \rightarrow &\text{ zulässig}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.5

Kraft pro Schraube 55 kN

$$\begin{aligned}\sigma_L &= 352,6 \text{ N/mm}^2; \sigma_{L,zul} = 320 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_a &= 207,2 \text{ N/mm}^2; \tau_{a,zul} = 128 \text{ N/mm}^2 \\ \rightarrow &\text{nicht zulässig}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.6

$$\begin{aligned}\sigma_{L,zul} &= 420 \text{ N/mm}^2; F_{zul} = 126 \text{ kN} \\ \tau_{a,zul} &= 168 \text{ N/mm}^2; F_{zul} = 105,6 \text{ kN} \\ \rightarrow F_{zul} &= 105,6 \text{ kN}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.7

- $M = 19,1 \text{ Nm}$
- $F = 955 \text{ N}$
- $\tau_a = 76 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 5.8

$$\begin{aligned}I &= 11 \cdot 100 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; S = 330 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\ \tau &= 18,6 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Aufgabe 5.9

$$\tau_1 = 20,5 \text{ N/mm}^2, \tau_{max} = 30,9 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 5.10

$$\tau_1 = 37,8 \text{ N/mm}^2, \tau_m = 37,5 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 5.11

$$\tau = 6 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 5.12

$$F = 9000 \text{ N}$$

Aufgabe 5.13

$$P = 237,5 \text{ N}$$

Aufgabe 5.14

$$Q = 27,1 \text{ N}$$

Aufgabe 5.15

$$\begin{aligned}I &= 850 \cdot 550 \text{ mm}^4; M_{bmax} = 3200 \text{ Nm} \\ \text{a)} \quad \sigma_{max} &= 169,3 \text{ N/mm}^2 \\ \text{b)} \quad S &= 15 \cdot 950 \text{ mm}^3; s = 20 \text{ mm} \\ \text{c)} \quad \text{nein, da } Q &= 16 \text{ kN nur zwischen Lager, sonst } Q = 4 \text{ kN} \rightarrow s = 80 \text{ mm}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.16

$$\tau_{mittel} = 83,9 \text{ N/mm}^2$$

6. Torsion

Aufgabe 6.1

- a) $d_2 = 23,4 \text{ mm}$
 b) $M_t = 201,3 \text{ Nm}$

Aufgabe 6.2

$$M_t = 296,8 \text{ Nm}; d = 45,6 \text{ mm}$$

Aufgabe 6.3

$$M_t = 884,2 \text{ Nm}; d_i = 41,7 \text{ mm}$$

Aufgabe 6.4

- a) $\varphi = 0,387 \text{ rad} (22^\circ)$
 b) $\tau_{\max} = 489 \text{ N/mm}^2$
 c) $F_H = 75 \text{ N}$

Aufgabe 6.5

- a) $\tau_{\max} = 56,6 \text{ N/mm}^2$ (Bereich AB)
 b) $\varphi_B = 0,02335 \text{ rad} (1,34^\circ)$
 $\varphi_C = 0,08639 \text{ rad} (4,95^\circ)$

Aufgabe 6.6

- a) $M_1 = 100 \text{ kNm}$
 b) $\tau_{\max} = 32,6 \text{ N/mm}^2$ (Bereich BC)

Aufgabe 6.7

- a) $M_t = 1029 \text{ Nm}; d = 23,6 \text{ mm}$
 b) $I_t = 30'454 \text{ mm}^4; L = 808 \text{ mm}$

Aufgabe 6.8

$$M_{12} = 573,0 \text{ Nm}; d_{12} = 34,7 \text{ mm}$$

$$M_{23} = 891,3 \text{ Nm}; d_{23} = 40,2 \text{ mm}$$

Aufgabe 6.9

$$M_{t,\max} = 238,7 \text{ Nm}; d = 27,9 \text{ mm}$$

$$M_{t,CD} = 95,5 \text{ Nm}; d = 29,3 \text{ mm}$$

$$\rightarrow d = 30 \text{ mm}$$

Aufgabe 6.10

- a) $\varphi_C = 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ rad} (0,2^\circ)$
 b) $\tau_{\max} = 12,7 \text{ N/mm}^2$ im Rundstab

Aufgabe 6.11

- a) $M_2 = -675 \text{ Nm}$
 b) $d_1 = 48,6 \text{ mm}, d_2 = 44,2 \text{ mm}$
 c) $\varphi_C = 1,315 \cdot 10^{-2} \text{ rad} (0,75^\circ)$

Aufgabe 6.12

$$\text{ja, } \tau = 95 \text{ N/mm}^2; \Delta z = 15,6 \text{ mm}$$

Aufgabe 6.13

$$I_t = 265 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Aufgabe 6.14

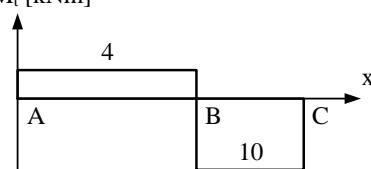
- (1) a = 53,5 mm; A = 8990 mm²
 (2) b = 52,4 mm; A = 10980 mm²
 (3) c = 72,6 mm; A = 3312 mm²
 (4) d = 225 mm; ; A = 31810 mm²
 (3) ist leichtester Querschnitt

Aufgabe 6.15

- a) $W_t = 103'212 \text{ mm}^3; M_t = 8257 \text{ Nm}$
 b) $I_t = 562 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
 $\varphi/L = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m} (1^\circ/\text{m})$
 c) $W_t = 6970 \text{ mm}^3; M_t = 558 \text{ Nm}$
 d) $I_t = 59246 \text{ mm}^4$
 $\varphi/L = 1,20 \cdot 10^{-1} \text{ rad/m} (7^\circ/\text{m})$

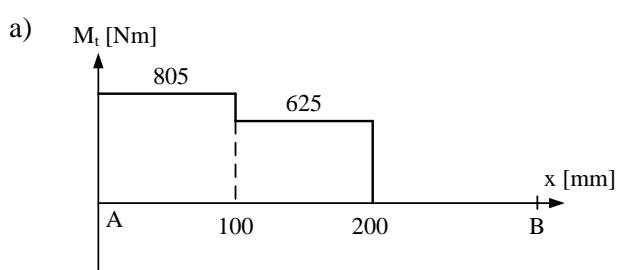
Aufgabe 6.16

- a) $M_A = 4 \text{ kNm}$
 b) $M_t [\text{kNm}]$



- c) $I_t = 597,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
 $\varphi_{AC} = -3,95 \cdot 10^{-3} \text{ rad} (-0,227^\circ)$
 d) $W_{\min} = 105,86 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
 $\tau_{\max} = 94,5 \text{ N/mm}^2$
 e) zwischen B und C
 bei Wandstärke 6 mm

Aufgabe 6.17



- c) Mitte der Seite
 d) $I_t = 360'960 \text{ mm}^4$
 $\varphi = 5,65 \cdot 10^{-3} \text{ rad} (0,32^\circ)$

Aufgabe 6.18

Rohr: $M_t = 2963 \text{ Nm}; W_t = 55,68 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
 $\tau_{\max} = 53,2 \text{ N/mm}^2$; aussen
 4-kt: $M_t = 1537 \text{ Nm}; W_t = 13,31 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
 $\tau_{\max} = 115,5 \text{ N/mm}^2$, Mitte der Seite

7. Knickung

Aufgabe 7.1

$d = 20,6 \text{ mm} \rightarrow 21 \text{ mm}$

Aufgabe 7.2

$L = 350 \text{ mm}$

Aufgabe 7.3

$S = 10,9$

Aufgabe 7.4

$F_{zul} = 163 \text{ kN}$ (Fall 3)

Aufgabe 7.5

IPB 160 $S = 4,26$

Aufgabe 7.6

$S = 4,6$

Aufgabe 7.7

Knicken um y-Achse, $\Delta T = 39,7^\circ$

Aufgabe 7.8

$m = 7855 \text{ kg}$

8. Der ebene Spannungszustand

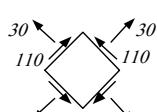
Aufgabe 8.1

$$\sigma_1 = 140 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -80 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\max} = 110 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_M = 30 \text{ N/mm}^2$$



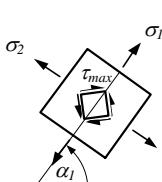
Aufgabe 8.2

$$a) \quad \sigma_1 = 141,6 \text{ N/mm}^2$$

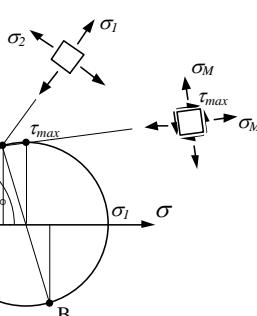
$$\sigma_2 = 78,4 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha_1 = 54,2^\circ$$

$$\tau_{\max} = 31,6 \text{ N/mm}^2$$



b)



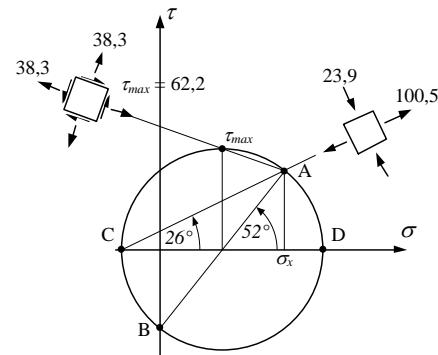
Aufgabe 8.3

$\sigma_{zul} = 400 \text{ N/mm}^2$

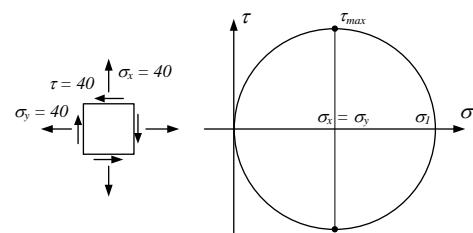
Aufgabe 8.4

$$\sigma_1 = 100,5 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = -23,9 \text{ N/mm}^2, \alpha_1 = 26^\circ$$

$$\tau_{\max} = 62,2 \text{ N/mm}^2, \sigma_M = 38,3 \text{ N/mm}^2$$



Aufgabe 8.5



$$\sigma_1 = 80 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2, \alpha_1 = 45^\circ$$

$$\tau_{\max} = 40 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 8.6

$$a) \quad \sigma_y = 0; \tau = -122,2 \text{ N/mm}^2$$

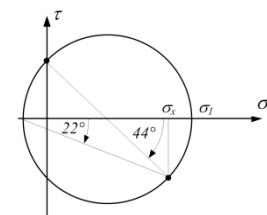
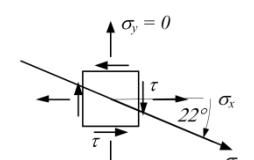
$$b) \quad \text{GJL-300} \rightarrow A = 0,5\% \\ \text{Sprödbruch, siehe Skizze}$$

$$c) \quad \sigma_x = 253,1 \text{ N/mm}^2$$

$$N = 497 \text{ kN}$$

$$d) \quad \sigma_1 = 302,5 \text{ N/mm}^2$$

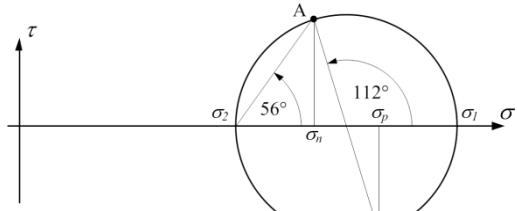
e)



Aufgabe 8.7

$$\sigma_n = 105 \text{ N/mm}^2; \sigma_p = 135 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{np} = 37 \text{ N/mm}^2$$



Aufgabe 8.8

$$s = 759 \text{ mm}$$

Aufgabe 8.9

$$\sigma = -39,2 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 8.10

$$p \leq 15 \text{ bar}$$

Aufgabe 8.11

$$\text{Zylinder } \sigma_t = 141 \text{ N/mm}^2; \sigma_a = 70,5 \text{ N/mm}^2$$

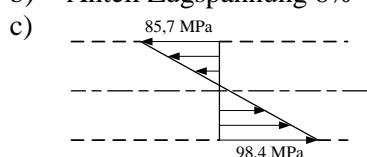
$$\text{Halbkugel: } \sigma_t = \sigma_a = 122 \text{ N/mm}^2$$

9. Zusammengesetzte Beanspruchung

Aufgabe 9.1

a) $\sigma_{\max} = 98,4 \text{ N/mm}^2$

b) Anteil Zugspannung 6%

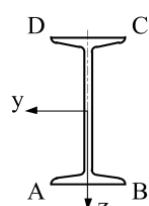
Aufgabe 9.2

$$\text{IPE 160; } \sigma_{\max} = 94,8 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 9.3

a) $F = 1039,5 \text{ kN}$

b) $a = 54,55 \text{ mm}$

Aufgabe 9.4

Stelle	y	z	σ_z	σ_{by}	σ_{bz}	$\sigma [\text{N/mm}^2]$
A	59	127	-13.52	-19.20	47.43	14.71
B	-59	127	-13.52	-19.20	-47.43	-80.15
C	-59	-127	-13.52	19.20	-47.43	-41.75
D	59	-127	-13.52	19.20	47.43	53.11

Aufgabe 9.5

$$\sigma_A = 12,7 \text{ N/mm}^2 \text{ (oben)}$$

$$\sigma_A = 175,6 \text{ N/mm}^2 \text{ (unten)}$$

$$\sigma_B = 125 \text{ N/mm}^2 \text{ (oben & unten)}$$

Aufgabe 9.6

a) $\sigma_v = 146 \text{ N/mm}^2$
-> Festigkeit genügend

b) $\sigma_v = 130 \text{ N/mm}^2$
-> Festigkeit ungenügend

Aufgabe 9.7

$$A_s = 84,3 \text{ mm}^2; W_t = 218,3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma = 536 \text{ N/mm}^2; \sigma_{zul} = 576 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = 121,5 \text{ N/mm}^2$$

$$M_t = 26,5 \text{ Nm}; M_{RA} = 36,2 \text{ Nm}$$

Aufgabe 9.8

a) $b = 8 \text{ mm}; h = 32 \text{ mm}$

b) $\sigma_b = 84,5 \text{ N/mm}^2$

c) $\tau_t = 30,2 \text{ N/mm}^2$

d) $\sigma_v = 99,4 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 9.9

a) $\sigma_b = 99,5 \text{ N/mm}^2$

b) $\tau_t = 65,1 \text{ N/mm}^2$

c) $\alpha_0 \approx 0,7; \sigma_v = 127 \text{ N/mm}^2$

d) z.B. Vergütungsstahl C50E ($\alpha_0 = 0,6$)
 $\sigma_v = 120 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_{zul} = 125 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 9.10

$$M_{bmax} = 508 \text{ Nm}; M_t = 796 \text{ Nm}$$

$$d = 45 \text{ mm}$$

Aufgabe 9.11

$$F_{res} = 16'151 \text{ N}; d = 51,6 \text{ mm} \rightarrow 52 \text{ mm}$$

Aufgabe 9.12

a) $\sigma_b = 112,3 \text{ N/mm}^2$

b) $S_y = 321 \text{ cm}^3$ (Stahlbautabelle)
 $\tau_{max} = 200 \text{ N/mm}^2$

c) $\tau_m = 192 \text{ N/mm}^2$ ($A_w = 1665 \text{ mm}^2$)
 $\sigma_v = 351 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 9.13

a) $\sigma_b = 60 \text{ N/mm}^2$

b) $\tau_{max} = 119 \text{ N/mm}^2$

10. Festigkeitsnachweis

Aufgabe 10.1

a) $\sigma_v = 159 \text{ N/mm}^2 < 160 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{zul}$
Nachweis erbracht ($S_F = 1,48$)

b) $S_F = 1,48$

c) $S_F = 2,13$

Aufgabe 10.2

a) $S_B = 3,1$ (inkl. plast. Reserven)
b) $S_B = 1,9$

Aufgabe 10.3

$$K_t = 0,71; R_m = 780 \text{ N/mm}^2$$

$$\beta_{K,Probe} = 2,5; K_{\alpha,Probe} = 0,96$$

$$K_\alpha = 0,92; \beta_K = 2,6$$

Aufgabe 10.4

$\sigma_a = \sigma_m = 37,3 \text{ MPa}$; $K_t = 1,0$; $\sigma_{zdW} = 195 \text{ MPa}$
 $K_g = 1,0$; $K_{O\sigma} = 0,91$; $\alpha_k = 2,7$
 $G' = 1,13$; $n = 1,2$; $\beta_k = 2,25$; $K_D = 2,35$
 $\sigma_{zdGW} = 83 \text{ MPa}$; $\Psi_\sigma = 0,0645$; $\sigma_{zdGA} = 78 \text{ MPa}$
Ja, $S_D = 2,1 > 1,5 = S_{D \min}$

Aufgabe 10.5

$\sigma_{ba} = 132 \text{ N/mm}^2$; $\tau_{tm} = 52 \text{ N/mm}^2$
 $K_t = 0,83 (R_m)$; $K_t = 0,78 (R_{p0,2})$
 $R_m = 833 \text{ N/mm}^2$; $R_{p0,2} = 626 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{bw} = 417 \text{ N/mm}^2$; $\alpha_k = 1,7$; $G' = 0,537$
 $n = 1,045$; $\beta_k = 1,63$; $K_g = 0,86$; $K_{O\sigma} = 0,89$
 $K_D = 2,02$; $\sigma_{bGW} = 206 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{mv} = 90 \text{ N/mm}^2$; $\Psi_\sigma = 0,192$
 $\kappa = \text{konstant} \rightarrow \sigma_{bGA} = 182 \text{ N/mm}^2$
 $S_D = 1,38 > 1,35 = S_{D \min}$

Aufgabe 10.6

$K_t = 1,0$
 $R_e = 185 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{zdW} = 139,5 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_n = 75 \text{ N/mm}^2$; $S_F = 2,5$
 $K_{O\sigma} = 0,87$; $\alpha_k = 2,3$
 $G' = 0,46$; $n = 1,18$; $\beta_k = 1,95$
 $K_D = 2,1$; $\sigma_{zdGW} = 66,4 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{zda} = 37,5 \text{ N/mm}^2$; $S_D = 1,8$

Aufgabe 10.7

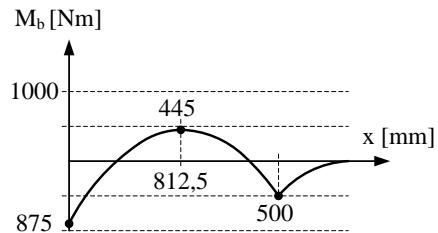
- a) $K_t = 0,702$; $R_e = 562 \text{ N/mm}^2$
 $n_{pl} = 1,367$
 $\sigma_n = 268,6 \text{ N/mm}^2$; $S_F = 2,86$
- b) $\sigma_{ba} = 89,5 \text{ N/mm}^2$
- c) $\alpha_k = 1,95$; $\sigma_{max} = 175 \text{ N/mm}^2$
- d) $K_t = 0,772$; $R_m = 772 \text{ N/mm}^2$; $K_g = 0,842$
 $\sigma_{bw} = 386 \text{ N/mm}^2$; $n = 1,054$; $\beta_k = 1,85$
 $K_{O\sigma} = 0,87$; $K_D = 2,35$; $\sigma_{bGW} = 164 \text{ N/mm}^2$
- e) $S_D = 1,83$

Aufgabe 10.8

$M_b = 80 \text{ Nm}$; $M_t = 38,2 \text{ Nm}$
 $\sigma_{ba} = 52,2 \text{ N/mm}^2$; $\tau_{ta} = 6,2 \text{ N/mm}^2$
 $K_t = 1,0$; $R_m = 490 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{bw} = 245 \text{ N/mm}^2$; $\tau_{tw} = 145 \text{ N/mm}^2$
Biegung: $\alpha_k = 2,7$; $G' = 4,9$; $n = 1,40$
 $\beta_k = 1,93$; $K_g = 0,92$; $K_{O\sigma} = 0,91$
 $K_D = 2,20$; $\sigma_{bGW} = 111,4 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{mv} = 10,8 \text{ N/mm}^2$; $\Psi_\sigma = 0,0715$
 $\sigma_{bGA} = 109,8 \text{ N/mm}^2$
Torsion: $\alpha_k = 2,1$; $G' = 2,3$; $n = 1,28$
 $\beta_k = 1,64$; $K_g = 0,92$; $K_{O\tau} = 0,95$
 $K_D = 1,84$; $\tau_{tGW} = 78,8 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{mv} = 6,2 \text{ N/mm}^2$; $\Psi_\tau = 0,0415$
 $\tau_{tGA} = 75,7 \text{ N/mm}^2$; $S_D = 2,07 > 1,3 = S_{D \min}$

11. Statisch unbestimmte SystemeAufgabe 11.1

Loslager: $B_y = 4750 \text{ N}$
Wand: $A_y = 3250 \text{ N}$; $M_A = 875 \text{ Nm}$

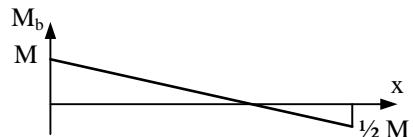
Aufgabe 11.2

- a) $\sigma_{max} = \frac{6 \cdot E \cdot d \cdot \delta}{L^2}$
- b) $\sigma_{max} = 50,4 \text{ N/mm}^2$

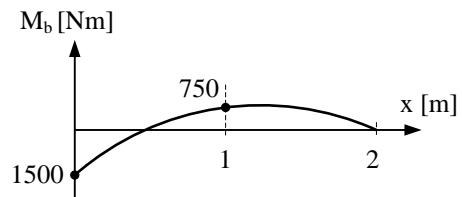
Aufgabe 11.3

$$A = \frac{3 \cdot M}{2 \cdot l} (\uparrow); \quad B = \frac{3 \cdot M}{2 \cdot l} (\downarrow)$$

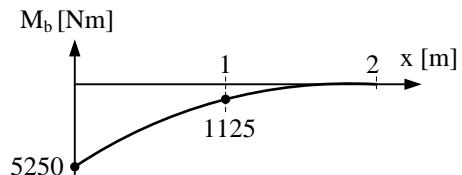
$$M_B = \frac{1}{2} \cdot M (\mathcal{G}); \quad \varphi_A = \frac{M \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} (\mathcal{G})$$

Aufgabe 11.4

- a) $A_y = 3750 \text{ N} (\uparrow)$; $B_y = 2250 \text{ N} (\uparrow)$
 $M_A = 1500 \text{ Nm} (\mathcal{G})$



- b) $A_y = 5625 \text{ N} (\uparrow)$; $B_y = 375 \text{ N} (\uparrow)$
 $M_A = 5250 \text{ Nm} (\mathcal{G})$



Aufgabe 11.5

$$A = \frac{1}{24} \cdot q \cdot l (\uparrow)$$

$$B = \frac{11}{16} \cdot q \cdot l (\uparrow)$$

$$C = \frac{13}{48} \cdot q \cdot l (\uparrow)$$

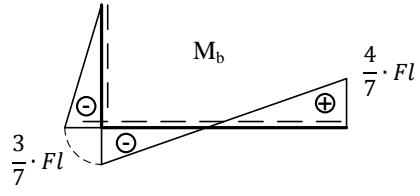
Aufgabe 11.6

$$B_x = \frac{6}{7} \cdot F (\rightarrow)$$

$$A_x = \frac{6}{7} \cdot F (\leftarrow)$$

$$A_y = F (\uparrow)$$

$$M_A = \frac{4}{7} \cdot F \cdot l (\cup)$$

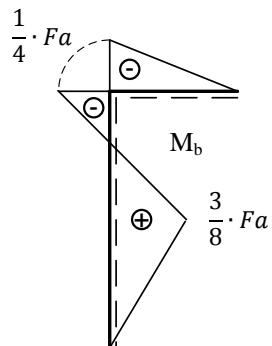
Aufgabe 11.7

$$A_x = \frac{3}{8} \cdot F (\leftarrow)$$

$$B_x = \frac{5}{8} \cdot F (\leftarrow)$$

$$A_y = \frac{1}{4} \cdot F (\uparrow)$$

$$B_y = \frac{1}{4} \cdot F (\downarrow)$$

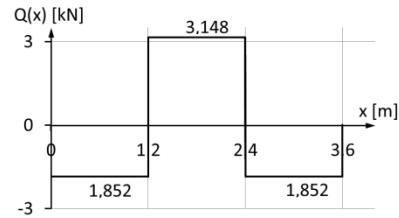
Aufgabe 11.8

$$A_y = 1852 \text{ N} (\downarrow)$$

$$B_y = 1852 \text{ N} (\uparrow)$$

$$M_A = -667 \text{ Nm}$$

$$M_{b,\max} = 2222 \text{ Nm}$$

Aufgabe 11.9

$$B_x = \frac{3}{4} \cdot F (\leftarrow); A_x = \frac{3}{4} \cdot F (\rightarrow)$$

$$A_y = F (\uparrow); M_A = \frac{1}{2} \cdot F \cdot a (\cup)$$

$$w_C = \frac{7 \cdot F \cdot a^3}{12 \cdot EI}$$

