Analoger/Diskreter Frequenzgang

Thierry Prud'homme

Hochschule Luzern
Technik & Architektur

Outline

Outline

Lernziele

- Die Studierenden können den änalogen" Frequenzgang mithilfe der Laplace-Übertragungsfunktion berechnen.
- Die Studierenden können das asymptotische Bode-Diagramm mithilfe der Laplace-Übertragungsfunktion skizzieren.
- Die Studierenden können den "diskreten" Frequenzgang mithilfe der z-Übertragungsfunktion berechnen.
- Die Studierenden können Nyquist und Bode-Diagramme zeichnen.

Prinzip

(nach Abklingen des Einschwingvorgangs)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & \sin(\omega t) \\ u(t) & = & \mathrm{Im}\left\{e^{j\omega t}\right\} \end{array} \right. \longrightarrow \boxed{\text{Analoger Prozess}} \longrightarrow y(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$U(s) = L\left\{e^{j\omega t}\right\} = \frac{1}{s-jw} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

Partialbruchzerlegung

$$Y'(s) = G(s)U'(s) = \underbrace{\frac{Z(s)}{(s-s_n)\cdots(s-s_1)}}_{G(s)}\underbrace{\frac{1}{(s-j\omega)}}_{U'(s)}$$

$$= \underbrace{\frac{a_1}{s-s_1} + \cdots + \frac{a_n}{s-s_n}}_{\text{Pollstellen von } G(s)} + \underbrace{\frac{a}{s-j\omega}}_{\text{Pollstelle von } U'(s)}$$

womit:

$$a = G(j\omega)$$

Rücktransformation

$$y'(t) = \underbrace{a_1 e^{s_1 t} + \cdots + a_n e^{s_n t}}_{\to 0} + G(j\omega)e^{j\omega t}$$

Nur für stabile Systeme

- Abklingen des Einschwingvorgangs nur wenn alle $s_i < 0$ (Stabilität)
- Der Frequenzgang kann nur für stabile Systeme experimentell ermittelt werden.

Nach Abklingen des Einschwingvorgangs

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= G(j\omega)e^{j\omega t} \\
y(t) &= \operatorname{Im}\{y'(t)\} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega)) \\
y(t) &= A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))
\end{aligned}
$$

womit:

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= |G(j\omega)| \\
\varphi(\omega) &= \arg G(j\omega))
\end{aligned}
$$

Darstellungsmöglichkeit 1: Bode-Diagramm

Diagramm 1: Amplitudengang

- X-Achse: $\log_{10}(\omega)$
- Y-Achse: $20\log_{10}(|G(j\omega)|)$

Diagramm 2: Phasengang

- X-Achse: $\log_{10}(\omega)$
- Y-Achse: $\arg G(j\omega)$

Vorgehen

1. $G(s)$ herleiten
2. s durch $j\omega$ ersetzen
3. $|G(jw)| = \sqrt{\mathrm{Re}\left\{G(jw)\right\}^2 + \mathrm{Im}\left\{G(jw)\right\}^2}$ berechnen
4. $\arg G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(jw)\}}{\mathrm{Re}\{G(jw)\}}\right)$

Darstellungsmöglichkeit 2: Nyquist Diagramm

- X-Achse: $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$
- Y-Achse: $\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$

Prinzip

(nach Abklingen des Einschwingvorgangs)

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(kT) & = & \sin(\omega kT) \\ u(kT) & = & \operatorname{Im}\left\{e^{j\omega kT}\right\} \end{array}\right. \rightarrow \boxed{\text{DA}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Analoger}\\ \text{Prozess}\end{array}} \rightarrow \boxed{\text{AD}} \rightarrow y(kT) = A(\omega)\sin(\omega kT + \varphi(\omega))$$

$$U(z) = Z\left\{e^{j\omega kT}\right\} = \frac{z}{z-e^{jwT}} \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = H(z)U(z)$$

Partialbruchzerlegung

$$Y'(z) = H(z)U'(z) = \underbrace{\frac{P(z)}{(z-z_n)\cdots(z-z_1)}}_{H(z)}\underbrace{\frac{1}{\left(z-e^{j\omega T}\right)}}_{U'(z)}$$

$$= \underbrace{\frac{b_1 z}{z-z_1} + \cdots + \frac{b_n z}{z-z_n}}_{\text{Pollstellen von } H(z)} + \underbrace{\frac{bz}{z-e^{j\omega T}}}_{\text{Pollstelle von } U'(z)}$$

womit:

$$b = H\left(e^{j\omega T}\right)$$

Rücktransformation

$$y'(kT) \;=\; \underbrace{b_1 z_1^k + \cdots + b_n z_n^k}_{\to 0} + H\left(e^{j\omega T}\right) e^{jk\omega T}$$

Nur für stabile Systeme

- Abklingen des Einschwingvorgangs nur wenn alle $|z_i| < 1$ (Stabilität)
- Der Frequenzgang kann nur für stabile Systeme experimentell ermittelt werden.

Nach Abklingen des Einschwingvorgangs

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= H\left(e^{j\omega T}\right) e^{jk\omega T} \\
y(t) &= \operatorname{Im}\left\{y'(t)\right\} = \left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| \sin\left(\omega kT + \arg H\left(e^{j\omega T}\right)\right) \\
y(t) &= A(\omega)\sin(\omega kT + \varphi(\omega))
\end{aligned}
$$

womit:

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| \\
\varphi(\omega) &= \arg H\left(e^{j\omega T}\right)
\end{aligned}
$$

Eigenschaften

$\rightarrow$	Periodizität	$H(e^{j\left(\omega+\frac{2k\pi}{T}\right)T}) = H(e^{j\omega T})$
$\rightarrow$	Symmetrie für $A(\omega)$	$A(-\omega) = A(\omega)$
$\rightarrow$	Assymetrie für $\phi(\omega)$	$\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$

Nyquist Frequenz

Die Analyse des Frequenzganges beschränkt sich auf:

$$\omega \in [0, \omega_N]$$
$$\omega_N = \frac{\pi}{T}$$

womit ω_N die Nyquist Frequenz ist.

Darstellungsmöglichkeit 1: Bode-Diagramm

Diagramm 1: Amplitudengang

- X-Achse: $\log_{10}(\omega)$
- Y-Achse: $20\log_{10}\left(\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|\right)$

Diagramm 2: Phasengang

- X-Achse: $\log_{10}(\omega)$
- Y-Achse: $\arg H\left(e^{j\omega T}\right)$

Vorgehen

1. $H(z)$ herleiten
2. z durch $e^{j\omega T}$ ersetzen
3. $\left|G\left(e^{j\omega T}\right)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\omega T}\right)\right\}^2 + \mathrm{Im}\left\{H\left(e^{j\omega T}\right)\right\}^2}$ berechnen
4. $\arg G\left(e^{j\omega T}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{H\left(e^{j\omega T}\right)\right\}}{\mathrm{Re}\left\{G\left(e^{j\omega T}\right)\right\}}\right)$

Darstellungsmöglichkeit 2: Nyquist Diagramm

- X-Achse: $\mathrm{Re}\left\{G\left(e^{j\omega T}\right)\right\}$
- Y-Achse: $\mathrm{Im}\left\{G\left(e^{j\omega T}\right)\right\}$