

ET+V

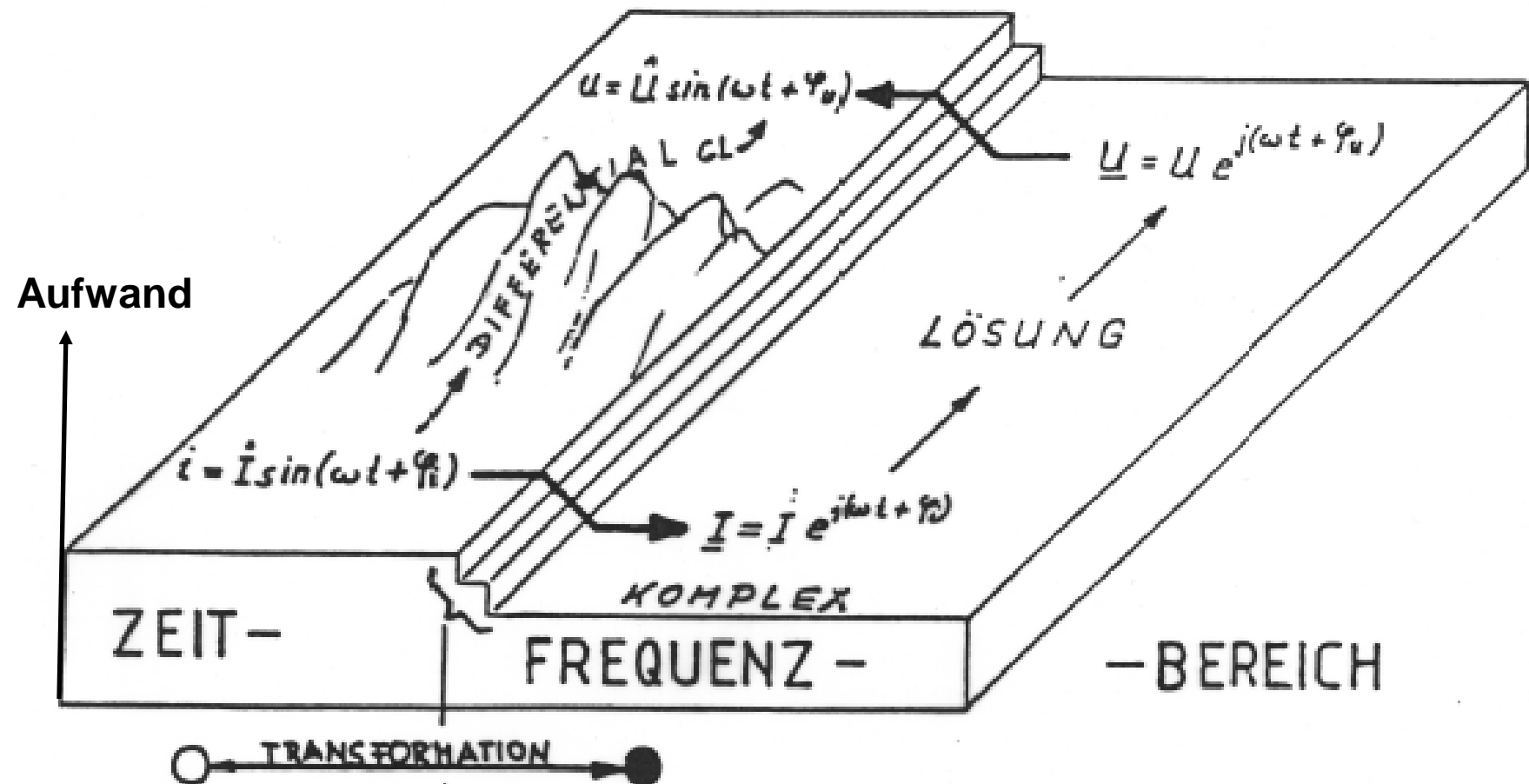
Elektrotechnik Vertiefung

HSLU T&A

AC-Netzwerkanalyse mit komplexen Zahlen

Dr. P. Bosshart, 12.7.2013

Netzwerkanalyse bei stationärer, sinusförmiger Anregung – Übersicht (W7)



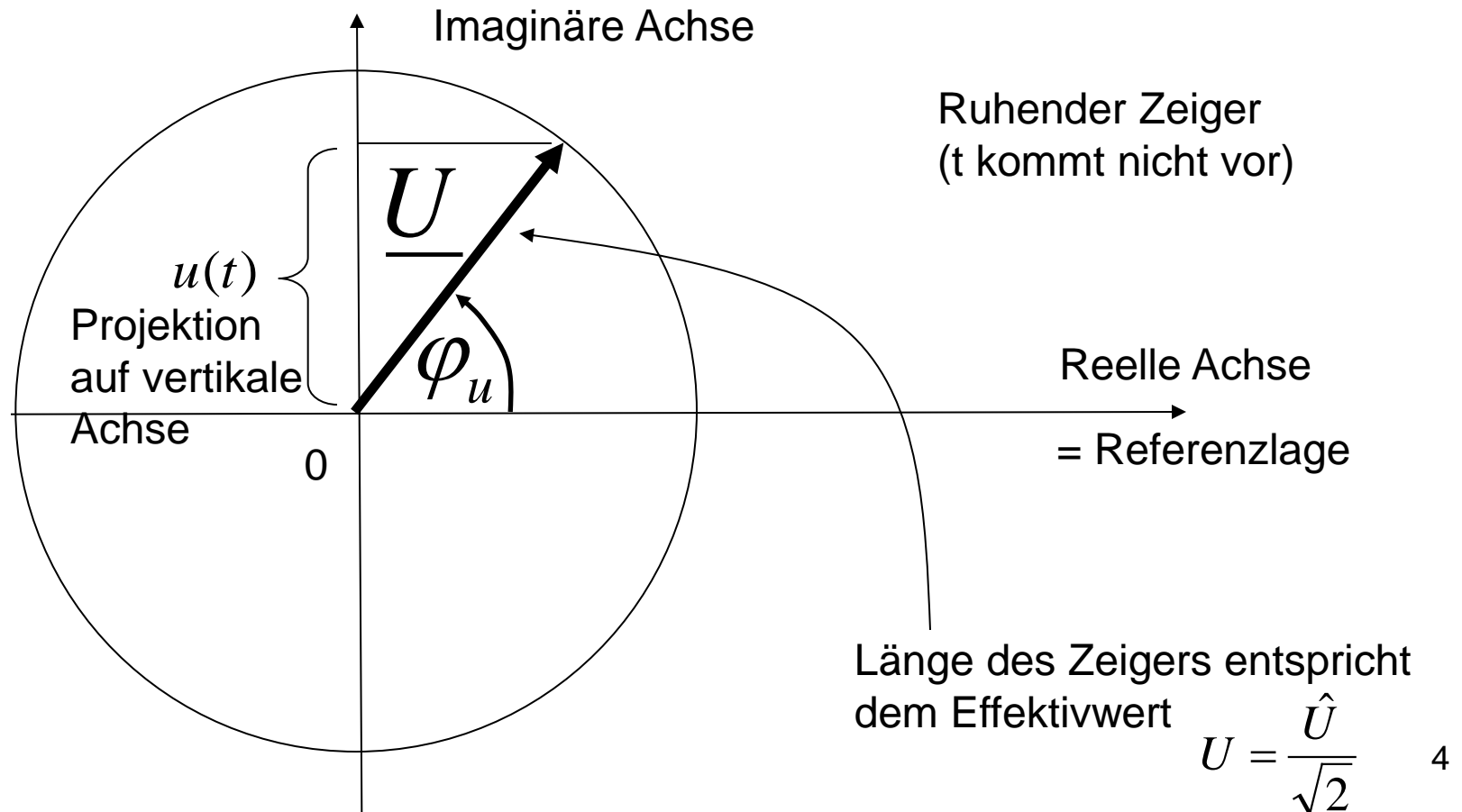
Netzwerkanalyse bei stationärer, sinusförmiger Anregung – Eigenschaften im Frequenzbereich (W7)

- Handliche mathematische Darstellung für sinusförmige Grössen in der komplexen Ebene
- Differentiation im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit $j\omega$
- Integration im Zeitbereich entspricht einer Division durch $j\omega$
- Netzwerkgleichungen (Knoten- und Maschenregel) und ohmsches Gesetz gelten nach wie vor.
Es muss lediglich der Datentyp Zeiger angewandt werden.
- Differentialgleichungen im Zeitbereich werden zu algebraischen Gleichungen

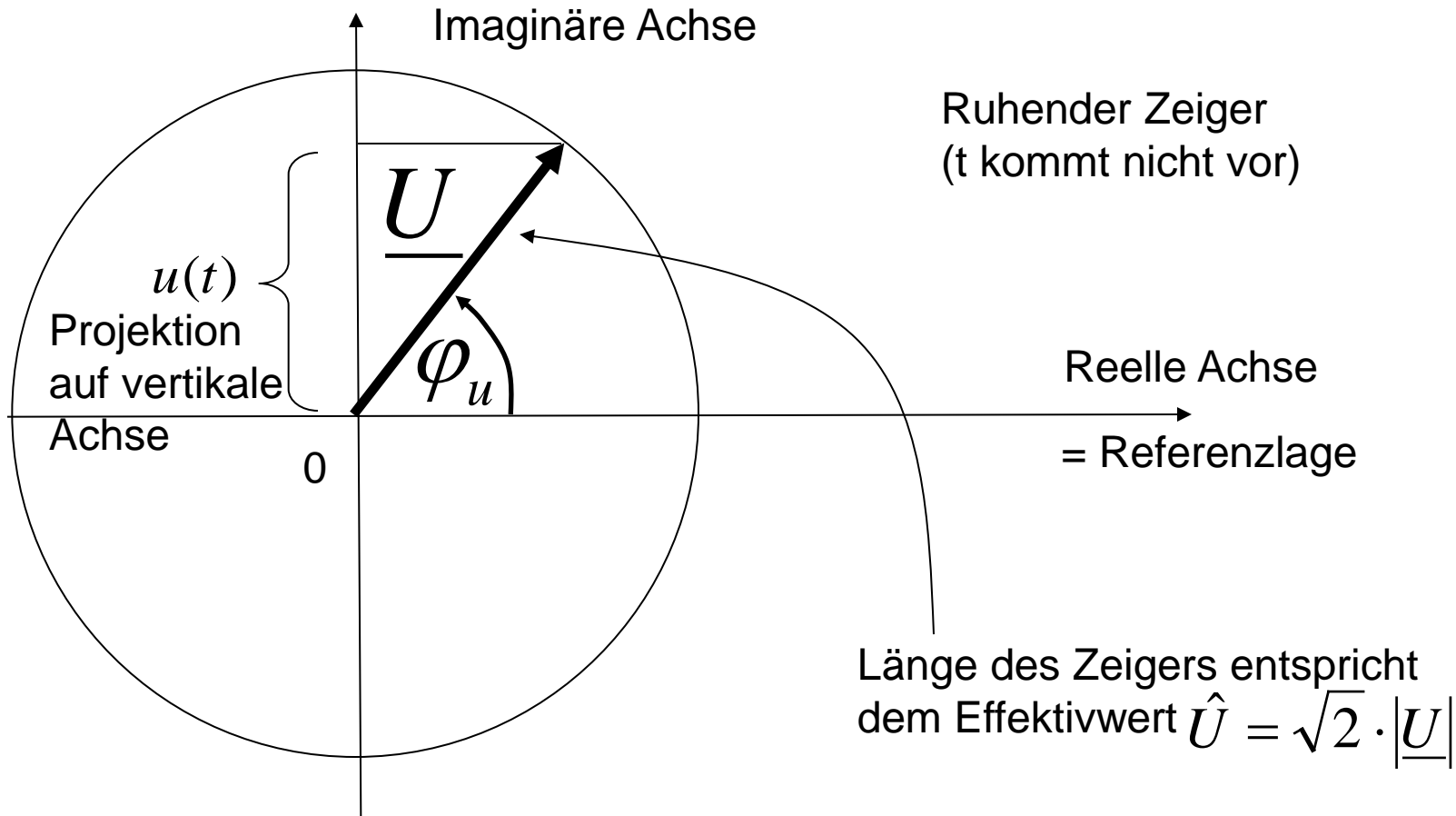
Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

φ_u : Nullphasenwinkel der Spannung in rad



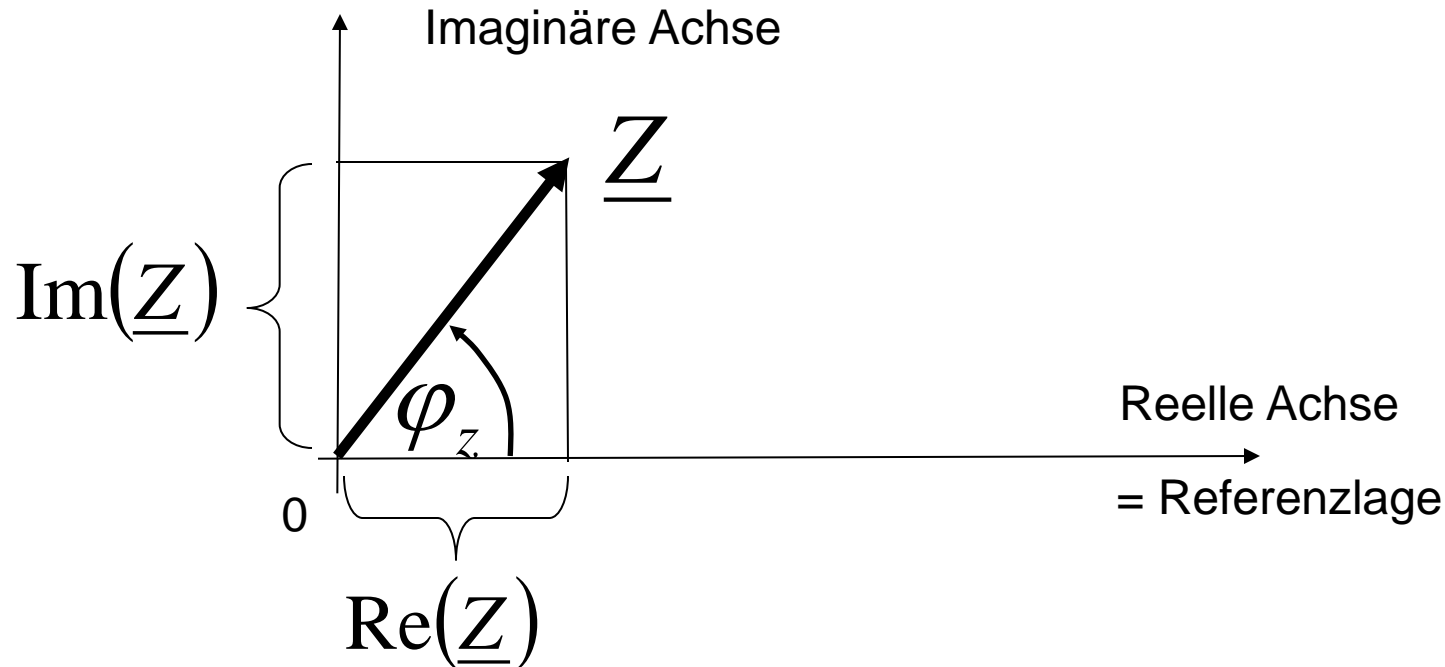
Transformation vom Frequenz- in den Zeitbereich



$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

φ_u : Nullphasenwinkel der Spannung in rad

Mathematische Schreibweise für Zeiger

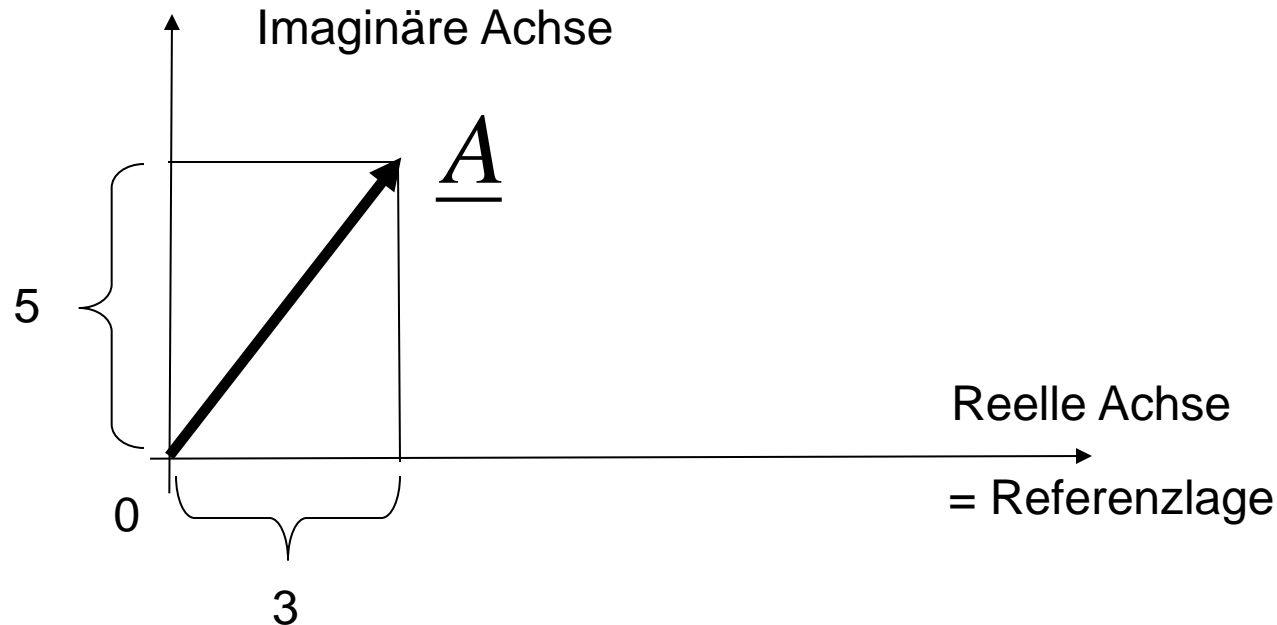


Normalform $\underline{Z} = \text{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \text{Im}(\underline{Z})$

Versorform $\underline{Z} = |\underline{Z}| \angle \varphi_z = Z \angle \varphi_z$

Exponentialform $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z}$

Eingabe von Zeigerwerten auf Taschenrechner-1

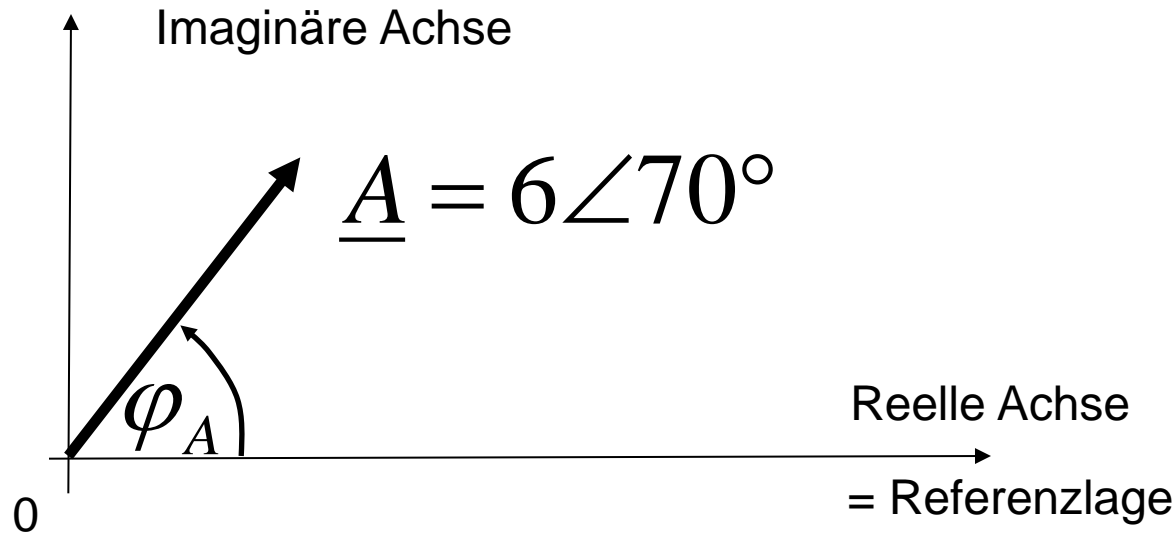


TI-89:

$3 + 2\text{ND} \text{ i } 5 \text{ STO ALPHA A } \boxed{\text{ENTER}}$ legt im Speicher a die komplexe Zahl $3+j5$ ab.

→ Anzeige ($5.83095\text{E}0 / _59.0362\text{E}0$)

Eingabe von Zeigerwerten auf Taschenrechner-2



TI-89:

(6 2ND \angle 70) STO ALPHA A ENTER legt im Speicher a die komplexe Zahl $6 \angle 70^\circ$ ab.

→ Anzeige (6.E0 \angle 70.E0)

Aufgaben – Phase der Studierende

W5-2: Transformationen

- Teilaufgabe a) 1. Zeitbereich \rightarrow Frequenzbereich (vertikale Achse)
- Teilaufgabe b) 1. Frequenzbereich \rightarrow Zeitbereich (vertikale Achse)

\rightarrow Als Hausaufgabe aufs nächste Mal fertigstellen

Zeigerdiagramm

- Die Zeigerlänge entspricht dem Effektivwert der Wechselgrösse
- Der Winkel des Zeigers gegen die Bezugsachse entspricht dem Nullphasenwinkel
- Der Zeiger rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω im mathematisch pos. Sinn (Gegenuhrzeigersinn).
- Das Zeigerdiagramm kann mehrere Zeiger enthalten, die aber alle die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben müssen.

Addition entspricht dem Aneinanderhängen von Zeigern. Zeiger können Parallel verschoben werden. Subtrahieren eines Zeigers \underline{A} wie $-\underline{A}$ addieren.

Netzwerkanalyse mit Zeigerwerten

Knotenregel $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \cdots + \underline{I}_n = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = \underline{0}$

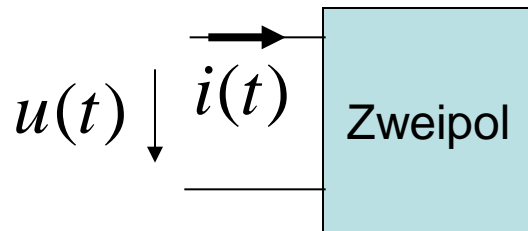
Maschenregel $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \cdots + \underline{U}_n = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \underline{0}$

Zweipol-Beziehung (ohmsches Gesetz)

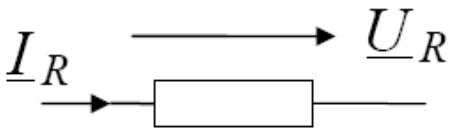

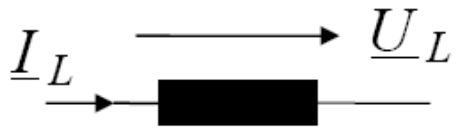
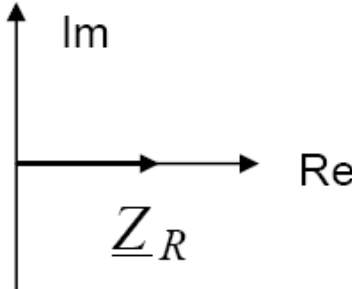
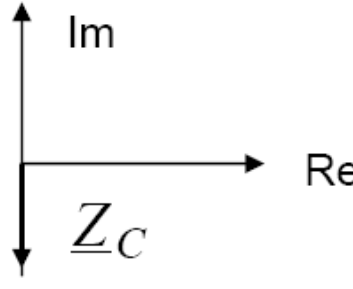
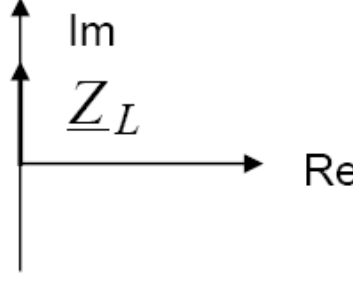
$$\underline{U} = \underline{Z}_{\text{Zweipoltyp}} \cdot \underline{I}, \quad \text{Zweipoltyp} = R, C, L$$

Strom-Spannungsbeziehung an Schaltelementen R,L und C bei sinusförmigen Grössen im Zeitbereich

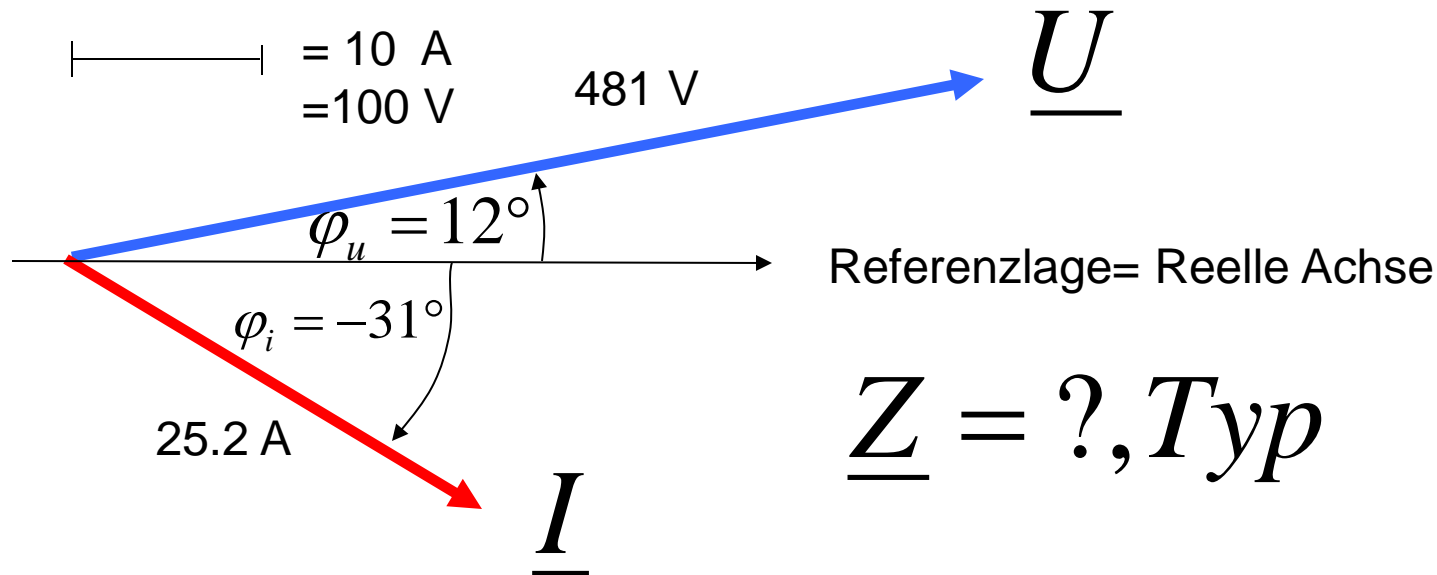
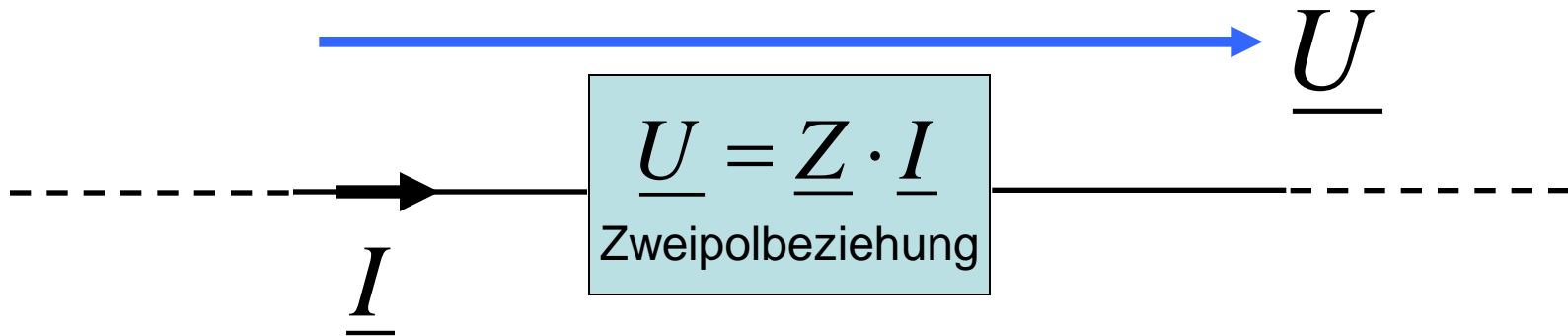
| Zweipol | Strom-/Spannungs-Gleichung am Zweipol | Anregungsfunktion rechts vom Gleichheitszeichen | Anregungsfunktion rechts vom Gleichheitszeichen eingesetzt | Bemerkung |
|---------|---------------------------------------|---|--|--|
| R | $u = R \cdot i$ | $i = \hat{I} \sin(\omega t)$ | $u = R \cdot \hat{I} \sin(\omega t)$ | Spannung sinusförmig, in Phase mit Strom |
| L | $u = L \cdot \frac{di}{dt}$ | $i = \hat{I} \sin(\omega t)$ | $u = L \cdot \omega \cdot \hat{I} \cos(\omega t)$ | Spannung sinusförmig, 90° vor dem Strom |
| C | $i = C \cdot \frac{du}{dt}$ | $u = \hat{U} \sin(\omega t)$ | $i = C \cdot \omega \cdot \hat{U} \cos(\omega t)$ | Strom sinusförmig, 90° vor der Spannung |



Impedanzen der Netzwerkelemente (W7)

| | | |
|---|--|---|
|  |  |  |
| Widerstandsoperator, Impedanz \underline{Z} | | |
| $\underline{Z}_R = R$ $Z_R = R$ $\varphi_Z = 0$ | $\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$ $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ $\varphi_Z = -\pi/2$ | $\underline{Z}_L = j\omega L$ $X_L = \omega L$ $\varphi_Z = \pi/2$ |
|  |  |  |

Beispiel Zweipolbeziehung



$\underline{Z} = ?, Typ$

Beispiel:

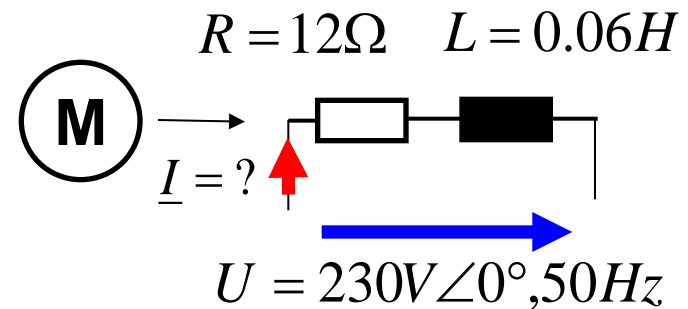
- In der Praxis haben wir häufig mehrere Elemente zusammengeschaltet (R, L, C).



Beispiel Universalmotor
(Staubsauger, Küchenmaschinen etc.)

Kupferdrähte → Wirkwiderstand R

Wicklungen, Spulen → induktiver Blindwiderstand XL



- 230 V am Motor. Wie gross ist der Strom und die Phasenverschiebung?

Serieschaltung bei AC – 5

Maschenregel und Gesamtimpedanz \underline{Z}

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}(\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) = \underline{I}(R + j(X_L + X_C)) = \\ &= 2.5A \cdot (2 + j(1 - 1.5))\Omega = 2.5A \cdot (2 - j0.5)\Omega = 5 - j1.25V = 5.154V \angle -14.04^\circ \\ \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C &= \underline{Z} = 2 - j0.5\Omega = Z \angle \varphi_Z = 2.062\Omega \angle -14.04^\circ\end{aligned}$$

Parallelschaltung bei AC – 7: Zahlenbeispiel, Berechnung von Z

$$1/2 + 1/(2NDi) + 1/(-1.5 \ 2NDi) \text{ ENTER}$$

$$\Rightarrow (600.925 \text{ E } -3 \angle -33.6901 \text{ E } 0) \text{ S} \equiv Y \angle \varphi_Y = \underline{Y}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = Z \angle \varphi_Z = \frac{1}{Y} \angle 0^\circ - \varphi_Y = 1.6641 \Omega \angle 33.6901^\circ$$

$$\text{Beachte: } \varphi = \varphi_Z = -\varphi_Y$$

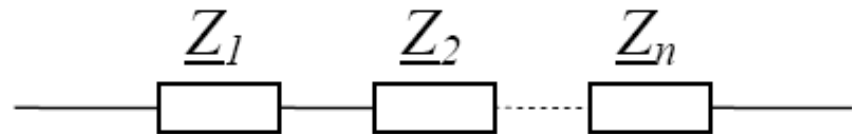
Anwendung der Operatoren (W9)-1

Serieschaltung von Impedanzen

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 \dots$$

$$\underline{Z}_n = R_n + jX_n$$



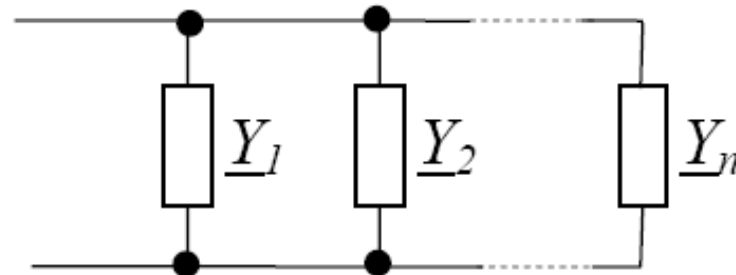
$$\underline{Z} = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) + j(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Parallelschaltung von Admittanzen

$$\underline{Y}_1 = G_1 + jB_1$$

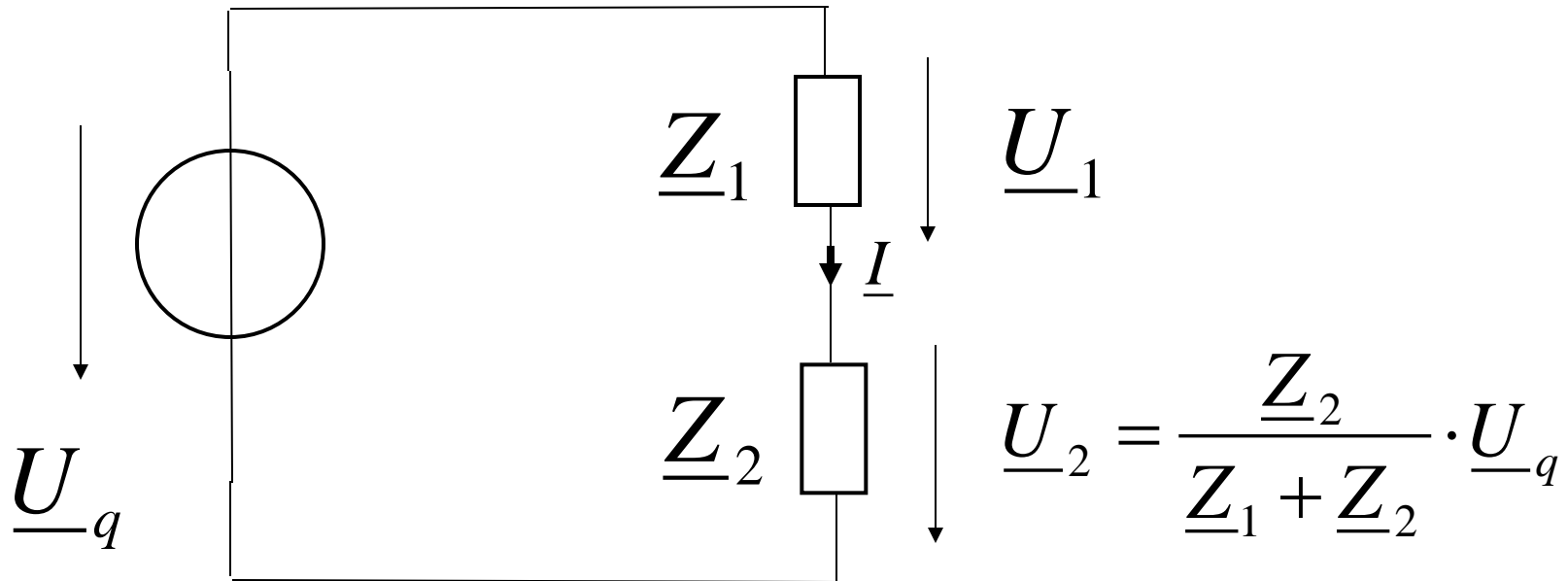
$$\underline{Y}_2 = G_2 + jB_2 \dots$$

$$\underline{Y}_n = G_n + jB_n$$

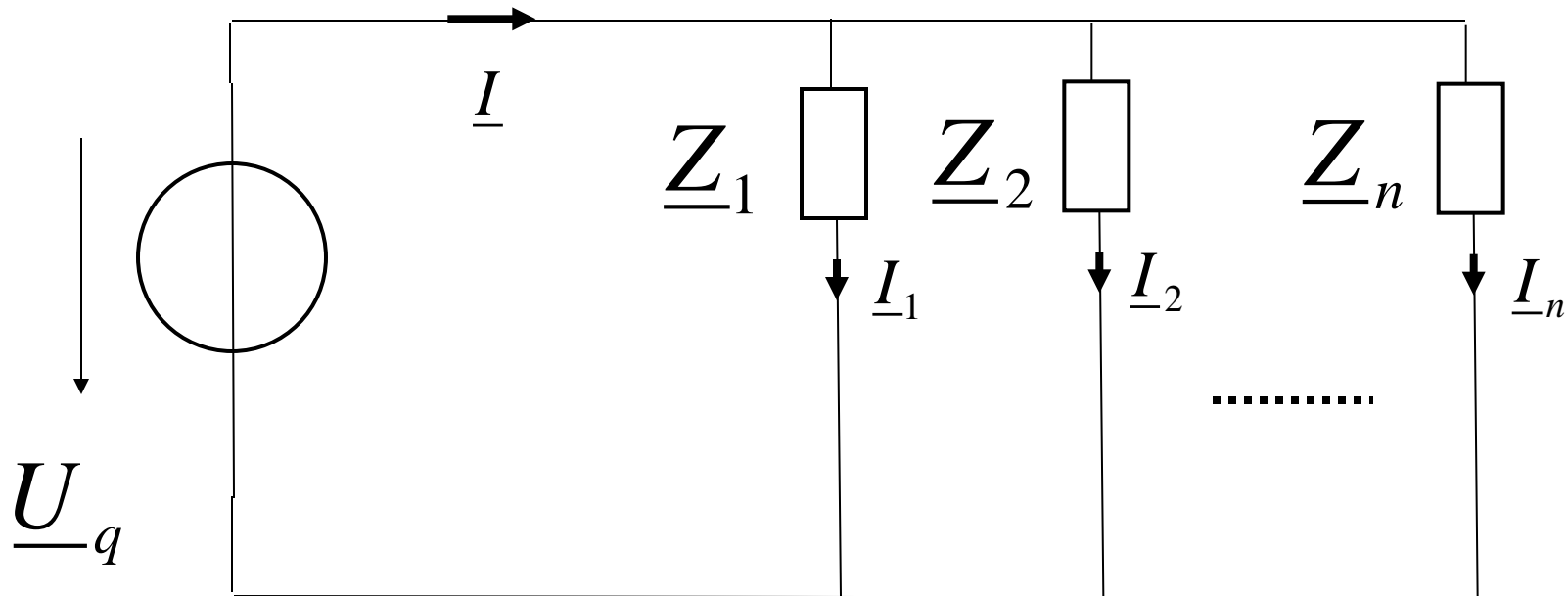


$$\underline{Y} = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) + j(B_1 + B_2 + \dots + B_n)$$

Praxisbezug - 1: Spannungsteiler

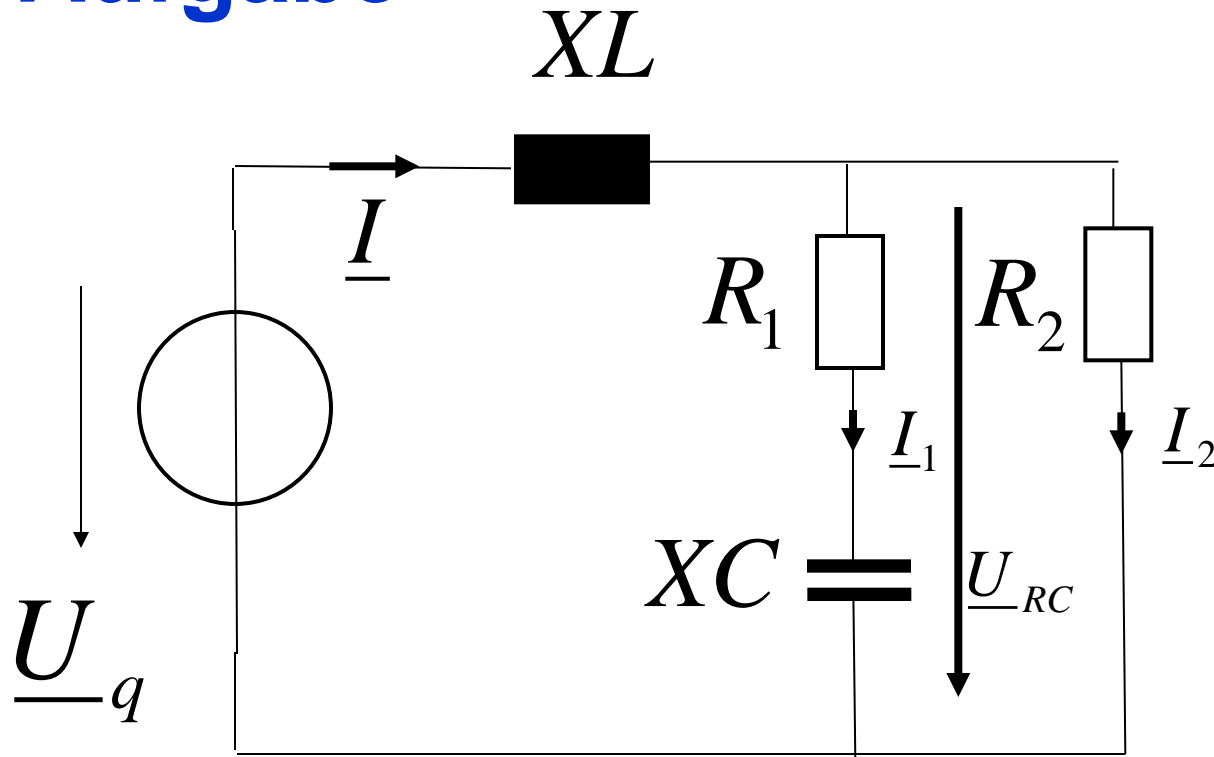


Praxisbezug - 2: Stromteiler



$$\underline{I}_2 = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_2}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}} \cdot \underline{I}$$

Aufgabe



$$\underline{U}_q = 50V \angle 0^\circ, R_1 = 3\Omega, R_2 = 4\Omega, XC = 5\Omega, XL = 1\Omega$$

Bestimmen Sie die Teilströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und die Spannung \underline{U}_{RC}

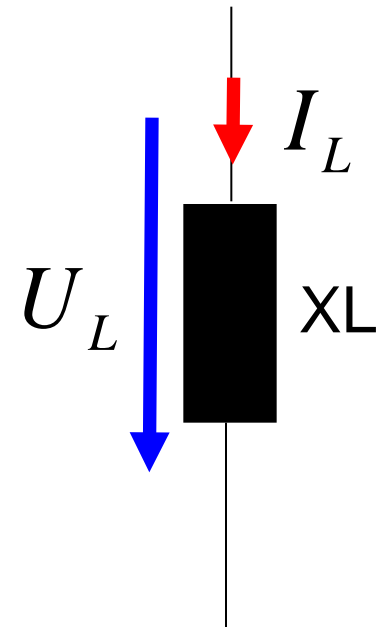
Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm.

Induktive Blindleistung QL

$$Q_L = U \cdot I \cdot \sin \varphi = U \cdot \frac{U}{X_L} = \frac{U^2}{X_L} = I \cdot X_L \cdot I = X_L \cdot I^2 > 0$$

Effektivwerte U_L V, I_L A

Blindleistung Q var



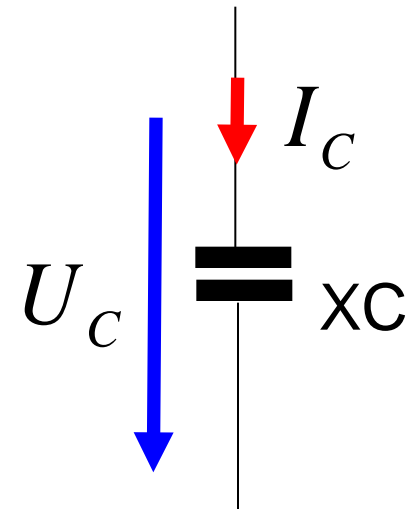
Kapazitive Blindleistung Q_c

$$Q_c = U_c \cdot I_c \cdot \sin \varphi = I_c^2 \cdot X_c = \frac{U_c^2}{X_c} < 0$$

Effektivwerte U_c V, I_c A

Blindleistung Q var

$$X_c = \frac{-1}{\omega \cdot C} \Omega$$

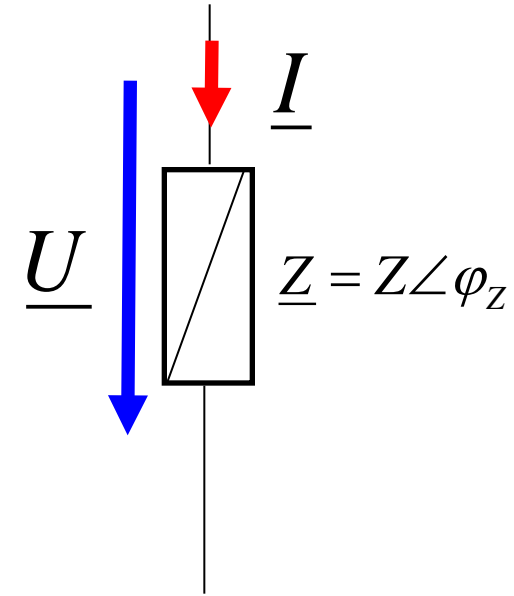


Leistungen an einem beliebigem Scheinwiderstand \underline{Z} w(10)

Scheinleistung : $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \text{ [VA]}$

Wirkleistung : $P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = S \cdot \cos \varphi \text{ [W]}$

Blindleistung : $Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = S \cdot \sin \varphi \text{ [var]}$



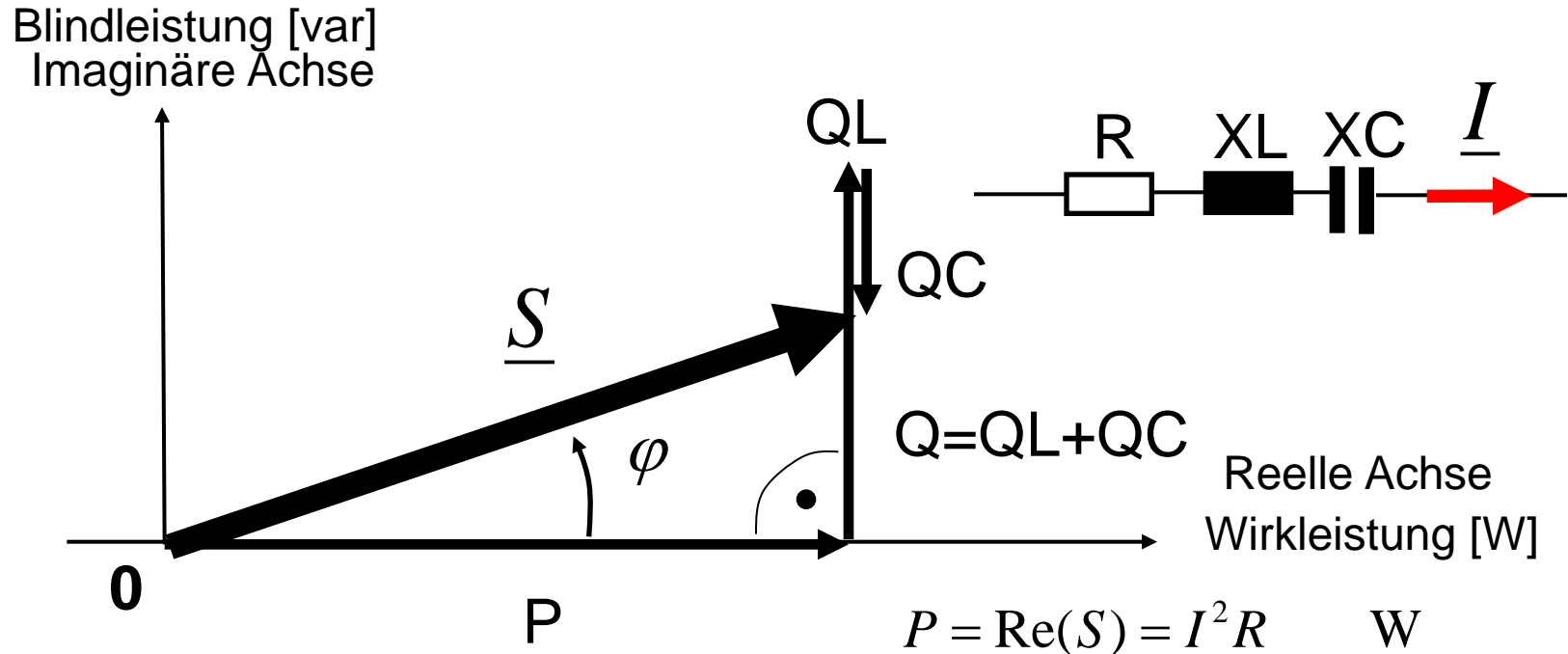
Effektivwerte $U \text{ [V]}, I \text{ [A]}$

Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$

Leistungsfaktor $\lambda = \cos \varphi$, *induktiv falls* $\varphi > 0$

kapazitiv falls $\varphi < 0$

Komplexe Leistung, 3 Elemente in Serie



$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arccos\left(\frac{P}{S}\right)$$

$$Q = \text{Im}(\underline{S}) \quad \text{var}$$

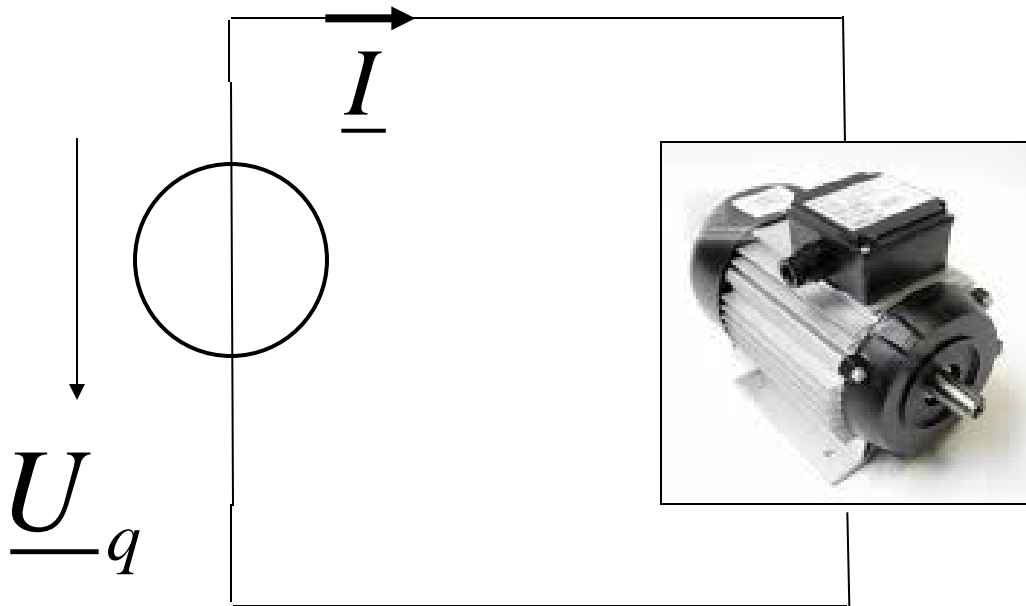
$$Q_C = I^2 XC \quad \text{var mit } XC < 0$$

$$Q_L = I^2 XL \quad \text{var}$$

$$Q = Q_L + Q_C \quad \text{var}$$

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I \quad \text{VA}^{25}$$

Aufgabe



$$\underline{U}_q = 230V \angle 0^\circ$$

Ein Motor bezieht bei Nennlast die elektrische Leistung $P=2200W$.
Der Leistungsfaktor beträgt $\cos \varphi = 0.8$ induktiv.

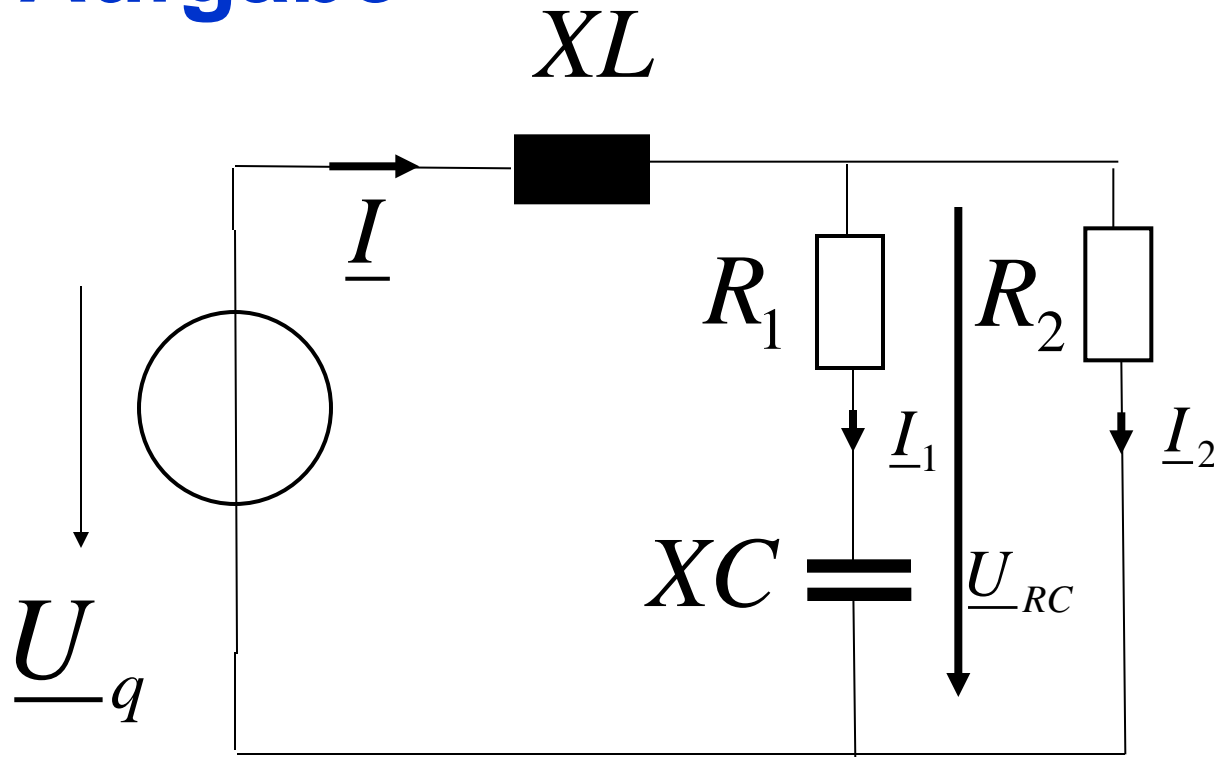
Bestimmen Sie den Nennstrom (Effektivwert). Skizzieren Sie ein Zeigerdiagramm mit den Zeigern von U_q und I . Wie gross sind Blind- und Scheinleistung?

Aufgabenphase (als Hausaufgaben fertigstellen)

W6-1: Zeigerdiagramm

W5-3: Impedanz, Umformung Parallel- zu
Serieschaltung

Aufgabe

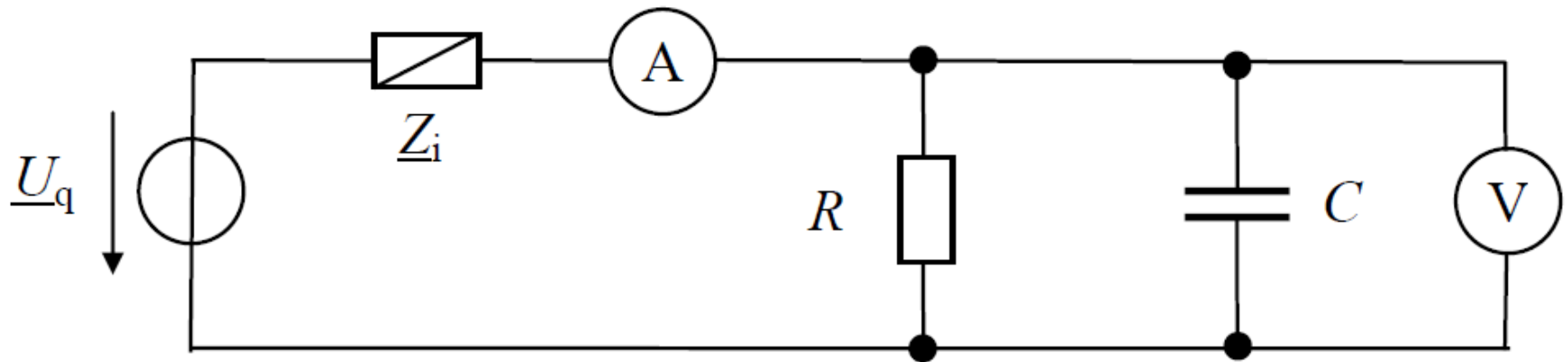


$$\underline{U}_q = 50V \angle 0^\circ, R_1 = 3\Omega, R_2 = 4\Omega, XC = -5\Omega, XL = 1\Omega$$

Bestimmen Sie die Teilströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und die Spannung \underline{U}_{RC}

Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm.

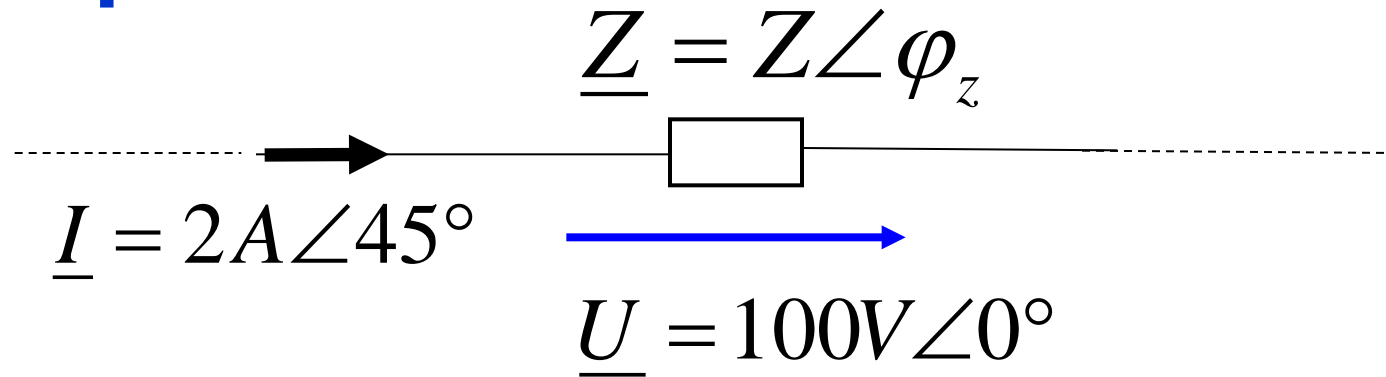
Repetition Serie- und Parallelschaltung bei sinusförmigem Wechselstrom



Daten: $\underline{U}_q = 10 \text{ V}$ $f = 1 \text{ kHz}$ $\underline{Z}_i = (10 + j \cdot 20) \Omega$
 $R = 100 \Omega$ $C = 2 \mu\text{F}$

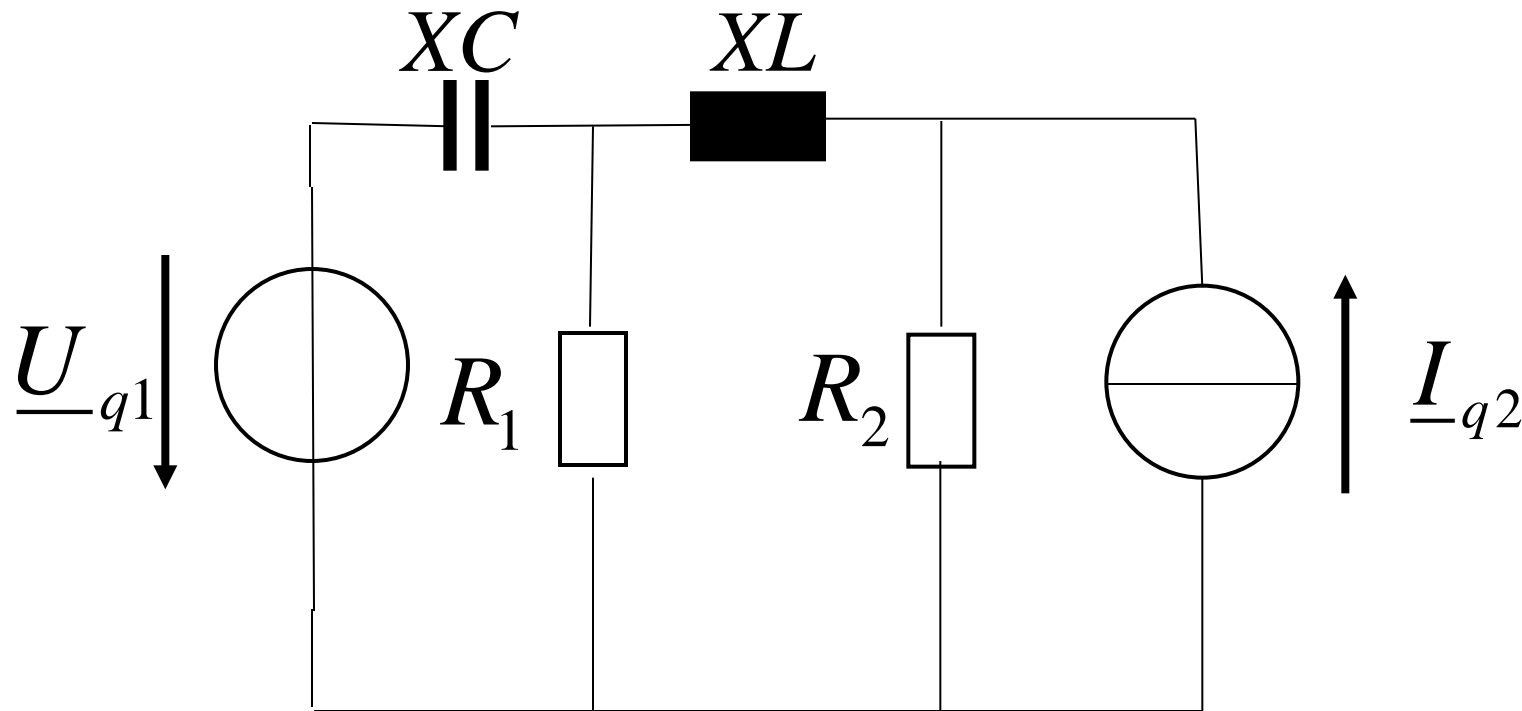
- Bestimmen Sie die äquivalente Serieschaltung für R parallel zu C .
- Welche Werte zeigen das Ampèremeter und das Voltmeter an?

Beispiel



Bestimmen Sie die in der Impedanz \underline{Z} auftretende Wirk- Blind- und Scheinleistung

Aufgabe mit komplexer Leistung



$$\underline{U}_{q1} = 10\text{V} \angle 0^\circ, R_1 = 3\Omega, R_2 = 1\Omega, \underline{I}_{q2} = 4\text{A} \angle 60^\circ,$$

$$XC = -2\Omega, XL = 0.5\Omega$$

Welche Leistung gibt die Stromquelle \underline{I}_{q2} ab?

Vorschlag: Verwenden Sie das Knotenpotentialverfahren um die Spannung über der Stromquelle \underline{I}_{q2} zu berechnen.