Moderne Physik (PMA) - Zusammenfassung und Formeln

Kernmasse, Bindungsenergie und Kernradius

Glossar: **Nukleus** (pl. Nuklei) = Kern, **Nukleon** = Neutron oder Proton, **Isotop** = gleiche Anzahl Protonen, unterschiedlich viele Neutronen.

- **Coulomb-Kraft**: $F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ zwischen den Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r
- **Coulomb-Energie**: $E_{pot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}$

Elementarladung (Elektron, Proton): $e = q_e = 1.6021766208 \times 10^{-19}\mathrm{C} \cong 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$

- **Atomare Energieeinheit**: $1\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{J}$

Elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}$, oder $\left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right]$, oder $\left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2\mathrm{N}}\right]$

Lichtgeschwindigkeit: $c = \lambda f = 299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cong 2.998 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Avogadro Konstante: $N_A = 6.0221 \times 10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{mol}}$

Anzahl mol einer Substanz der Masse m: $n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{m_{mol}}$, m_{mol} = molare Masse

Anzahl Moleküle pro Volumen einer Substanz: $N = \frac{\rho}{\mathrm{m}_{mol}} N_A$

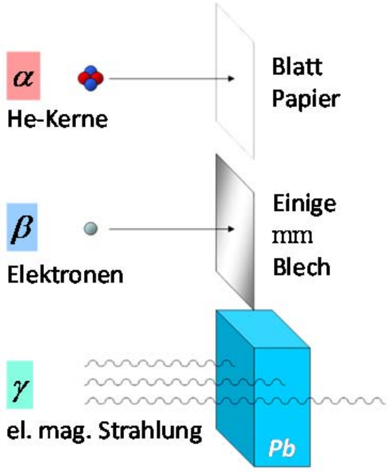
- **Atomare Masseneinheit**: $1\mathrm{u} = 1.660\,539\,040 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, $1\mathrm{u}\cdot c^2 = 931.494\,095\,4\ \mathrm{MeV}$

	Masse			
Teilchen	atomare Einheit u	kg ($\times 10^{-27}$)	mc^2 in MeV	Halbwertszeit $T_{1/2}$
Proton p^+	1.007276467	1.672621898	938.2720813	
Neutron n, m_n	1.008664916	1.674927471	939.5654133	10.2 Minuten (frei)
Elektron e^-	0.000548580	0.000910938	0.5109989	
Wasserstoff ${}^1_1\mathrm{H}$ (99.99%)	1.007825032	1.673532812	938.7830665	
Deuteron $pn = \mathrm{d}$	2.013553213	3.343583719	1875.6129280	
Deuterium ${}^2_1\mathrm{H} = \mathrm{D}$ (0.01%)	2.014101778	3.344494633	1876.1239134	
Tritium ${}^3_1\mathrm{H} = \mathrm{T}$	3.016049278	5.008267573	2809.4320931	12.3 Jahre
Helium ${}^3_2\mathrm{He}$	3.016029320	5.008234432	2809.4135025	
Alpha $\mathrm{ppnn} = \alpha$	4.001506179	6.644657230	3727.3793776	
Helium ${}^4_2\mathrm{He}$ (99.9999%)	4.002603254	6.646478965	3728.4012965	
Uran ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ (in AKW 3%, in Bombe 80%)	235.043930131	390.299622098	218942.0330226	0.704 Mia Jahre
Uran ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ (99.3%)	238.050788423	395.292627679	221742.9037666	4.47 Mia Jahre

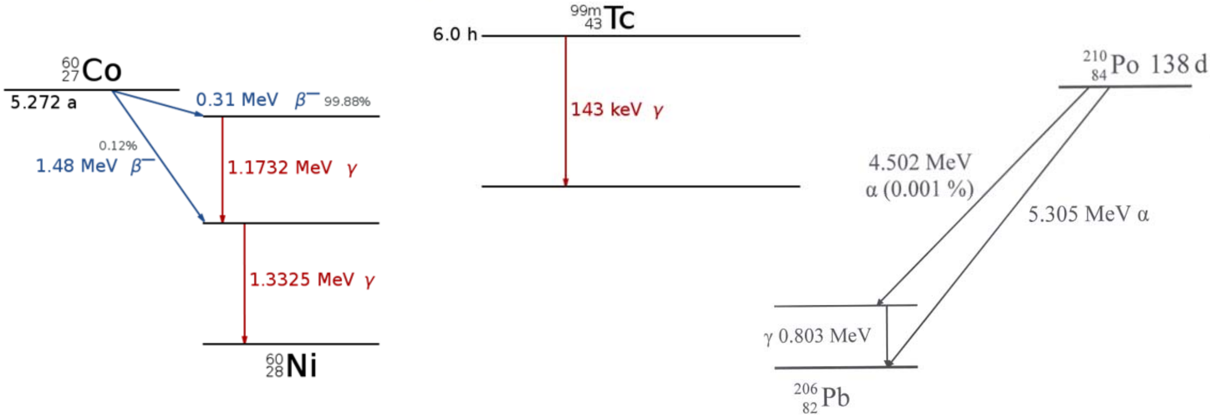
- **Kernradius**: $R = R_0 A^{1/3}$, $A = Z + N$ = Gesamtzahl Nukleonen, $R_0 = 1.2 \times 10^{-15}\mathrm{m} = 1.2\ \mathrm{fm}$
- **Bindungsenergie eines Atomkerns**: $E_B = \left(Z M_{{}^1_1\mathrm{H}} + N m_n - {}^A_Z M\right)c^2$, ${}^A_Z M$ = Masse des Atoms
- **Bindungsenergie pro Nukleon**: $\frac{-E_B}{A} = \frac{-\left(Z M_{{}^1_1\mathrm{H}} + N m_n - {}^A_Z M\right)c^2}{A}$, tief negativ bedeutet starke Bindung

Radioaktivität: spontaner Zerfall instabiler Kerne

- **Alpha Zerfall** (α): z.B. Radium ($T_{1/2}$ = 1600 Jahre) zerfällt zu Radon (im „Keller"): ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + \alpha_{ppnn}$
- **Beta Zerfall** (β): z.B. Umwandlung eine Neutrons im Kern (schwache WW): $n \to \mathrm{p} + \beta^- + \bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_e$ = Antineutrino
- **Gamma Zerfall** (γ): z.B. Zerfall eines hoch angeregten Kernzustandes in einen tieferen Zustand unter Aussenden eines Photons, eines so genannten Gamma Quants.



- **Zerfalls-Schemen, drei Beispiele**



- **Impuls eines Photons** der Wellenlänge λ: $p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar}{k}$, Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Planck Konstante: $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $c = \lambda f = 2.998 \times 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

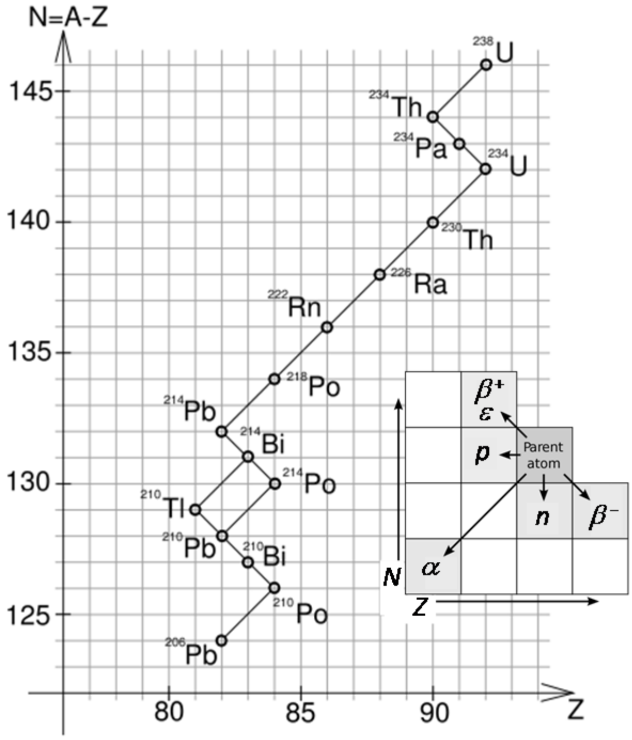
- **Energie eines Photons** der Frequenz f der Wellenlänge λ: $E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = p_\gamma c = \hbar\omega$, $\omega = 2\pi f$

- **Energieniveaus** des Elektrons in Wasserstoff (Bohr Modell): $E_n = \frac{-hcR_y}{n^2} = \frac{-2.18\times 10^{-18}\,\mathrm{J}}{n^2} = \frac{-13.6\ \mathrm{eV}}{n^2}$

$n = 1, 2, 3, \cdots$,

Rydberg Konstante: $R_y = 1.097 \times 10^7\ \frac{1}{\mathrm{m}}$

- **Zerfallsserie von** ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ $\rightarrow$



Radioaktivität und Halbwertszeit

- **Radioaktives Zerfallsgesetz** für die Anzahl verbleibender Kerne: $N(t) = N_0 \cdot e^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)} = N_0 \cdot 2^{\left(\frac{-t}{T_{1/2}}\right)}$

N_0 = Anzahl Startkerne , β = Zerfallskonstante , $\tau = \frac{1}{\beta}$ = Abklingzeit, Zerfallszeit ,

Halbwertszeit: $T_{1/2} = ln(2) \cdot \tau = \frac{ln(2)}{\beta}$

- **Aktivität einer Substanz**: $A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \beta N = \frac{N}{\tau} = \frac{N}{T_{1/2}} ln(2)$ = Anzahl Zerfälle pro Sekunde

$[A] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Bq}$ = **Becquerel** , alte Einheit **Curie**: $1\mathrm{Ci} = 3.70 \times 10^{10}\mathrm{Bq}$

- **Radiokarbon-Datierung** basiert auf dem natürlichen Verhältnis zwischen radioaktivem ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ und stabilem ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ in lebenden Organismen: $pMC = \frac{N_{C14}}{N_{C12}} = \frac{1}{7.69 \times 10^{11}} = 1.3 \times 10^{-12}$, und dem allmählichen Zerfall des eingelagerten ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ nach dem Tod mit einer Halbwertszeit von

$T_{1/2\ \mathrm{C14}} = 5730$ Jahre $\rightarrow$ $\tau_{\mathrm{C14}} = 8270$ Jahre

Dosimetrie

- **Energiedosis** ist die absorbierte Energie pro Gewebemasse:

  $D = \frac{E}{m} \rightarrow [D] = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = 1\ \mathrm{Gray} = 1\ \mathrm{Gy} = 100\ \mathrm{Rad}$

- **Äquivalentdosis** ist ein Mass für die biologische Wirkung:

  $H = q \cdot D \rightarrow [H] = 1\ \mathrm{Sievert} = 1\ \mathrm{Sv} = 100\ \mathrm{rem}$,

  q ist der Bewertungsfaktor $\rightarrow [q] = \frac{\mathrm{Sv}}{\mathrm{Gy}}$ oder $[q] = \frac{\mathrm{rem}}{\mathrm{rad}}$

- **Ionendosis** ist die durch Strahlung gebildete Ladung pro kg:

  $J = \frac{Q}{m} \rightarrow [J] = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}} = 3876\ \mathrm{Röntgen\ (R)}$

Strahlungsart	q
γ	1
β	1 - 1.5
langsame n (0.025 MeV)	3
n (0.02 - 0.1 MeV)	5 - 8
schnelle n und p	10
α	20
schwere Kerne	20

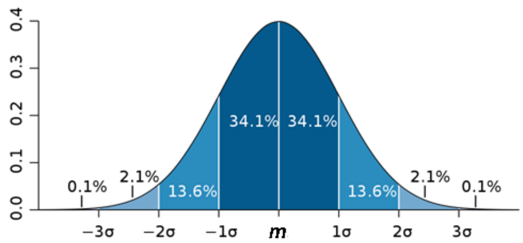
Wenige Zerfälle - Poisson Statistik

- **Diskrete Poisson Verteilung**: $p(x) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!}$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Mittelwert m den Wert x zu messen. Beispiel mit gleichbleibendem Regen: 1469 Tropfen fallen in 15 Minuten in einen Eimer. Mittelwert in 10s: $16.32\frac{\mathrm{Tro}}{10s} = m_{10\mathrm{s}}$, $\rightarrow p\left(x = 14\frac{\mathrm{Tro}}{10s}\right) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!} = \frac{16.32^{14} \cdot e^{-16.32}}{14!}$
- **Kontinuierliche Poisson Verteilung**: $p(x) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!} = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{\int_0^\infty t^x e^{-t} dt}$, $x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$

Viele Zerfälle - Gauss Statistik

- **Gaussverteilung**: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$

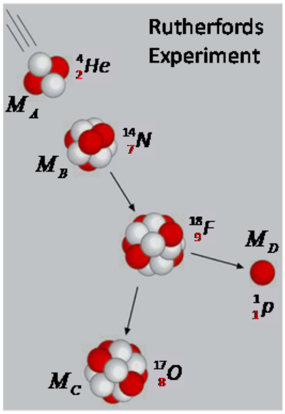
  mit Standardabweichung $\sigma = \sqrt{m}$



Erzwungene Kernreaktionen: exotherm (Q_{out+}) - endotherm (Q_{in-})

- **Reaktisionsenergie** (Reaktionswärme): $Q = (M_A + M_B - M_C - M_D)c^2$

Exotherm: ${}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \Rightarrow Q = +17346\ \mathrm{keV}$



Endotherm: ${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \Rightarrow Q = -1191.9\ \mathrm{keV}$

Kinetische Energie des Projektils im **Laborsystem**: $E_{kin,Pr} = \frac{M_{A,Pr} + M_B}{M_B} Q$

Target(s) 14N
56fe, Fe56, 26056, cr50-fe56
use dash for range only

Projectile 4He
4He, He-4, 2-he-4, a, alpha, 2004

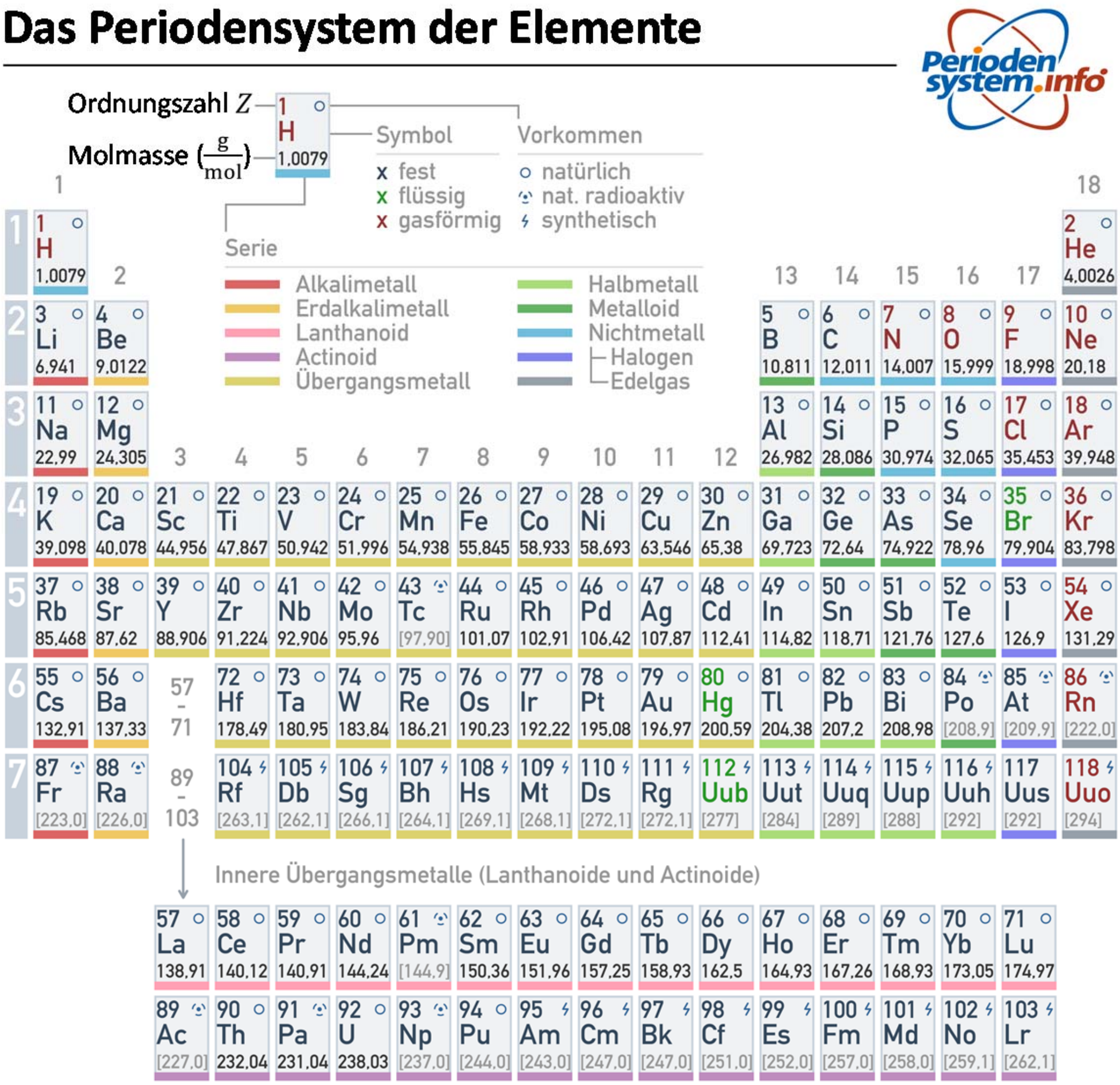
E_{lab} (MeV)

Ejectile 17O
g, n, n+p, 2n+a, 2a+12c (reaction)
b-, ec, 2b-, b-n, ecp, 18O (decay)

Reaction Q-values for ^{14}N + ^{4}He

Reaction Products	Q-value (keV)	Threshold (keV)
^{1}H+^{17}O	-1191.875 *6.76E-4*	1532.5576 *8.7E-4*

http://www.nndc.bnl.gov/qcalc



Taylor Entwicklung, Näherungen für $\varepsilon \ll 1$

- $\frac{1}{1-\varepsilon} \cong 1+\varepsilon+(\varepsilon^2+\varepsilon^3 \cdots)$; $\frac{1}{1+\varepsilon} \cong 1-\varepsilon+(\varepsilon^2-\varepsilon^3 \cdots)$
- $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \cong 1+\frac{1}{2}\varepsilon+\left(\frac{3}{8}\varepsilon^2+\frac{5}{16}\varepsilon^3 \cdots\right)$

z.B. $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cong 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \cdots$

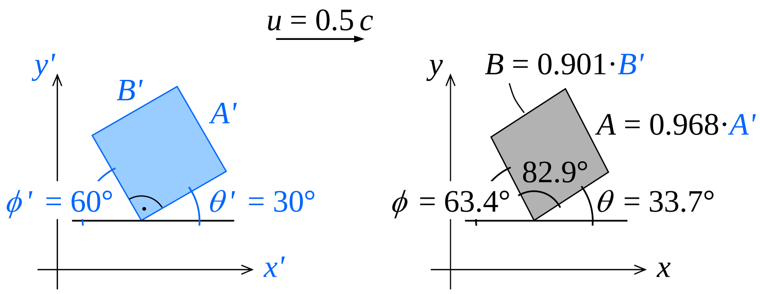
Zeitdilatation - Längenkontraktion

- **Beta**: . $\beta = \frac{v}{c}$ oder $\frac{u}{c}$; **Gamma:** $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong 1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4 \cdots$
- **Zeitdilatation**: $t = \gamma\, t_0$ mit der Eigenzeit t_0 , dort wo die Zeit t_0 am gleichen Ort verstreicht.
- **Längenkontraktion**: $\gamma L = L_0$ mit der Eigenlänge L_0 , dort wo das Objekt L_0 in Ruhe bleibt.

Formverzerrung:

$$A = \sqrt{\frac{(A' \cos\phi')^2}{\gamma^2} + (A' \sin\phi')^2}$$

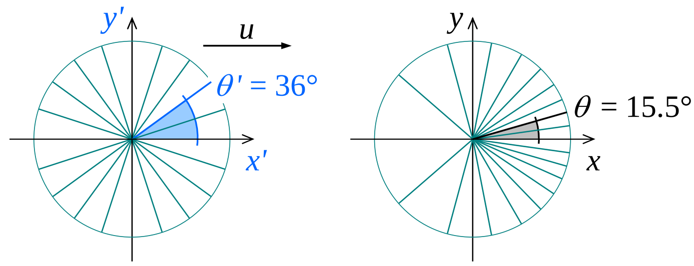
$$\theta = \tan^{-1}\left(\gamma \frac{\sin\theta'}{\cos\theta'}\right)$$



Headlight Effekt:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1+\beta\cos\theta'}$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}$$



Lorentz Transformationen

u ist die Relativgeschwindigkeit in Richtung x , positiv für S. $\vartheta = ct$ ist die Lichtlänge. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$

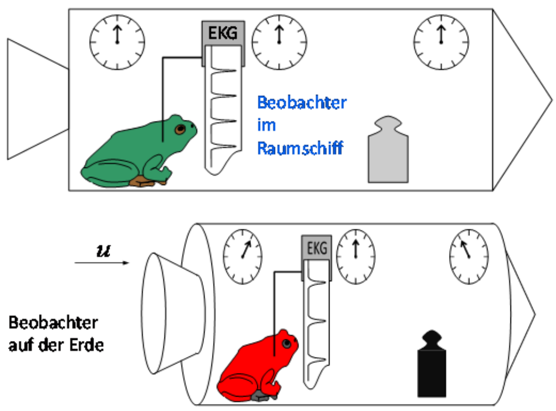
$x = \gamma(x' + ut')$ respektive $x = \gamma(x' + \beta\vartheta')$

$y = y'$

$t = \gamma(t' + ux'/c^2)$ respektive $\vartheta = \gamma(\vartheta' + \beta x')$

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1+\frac{u v_x'}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1+\frac{u v_x'}{c^2}\right)}$$

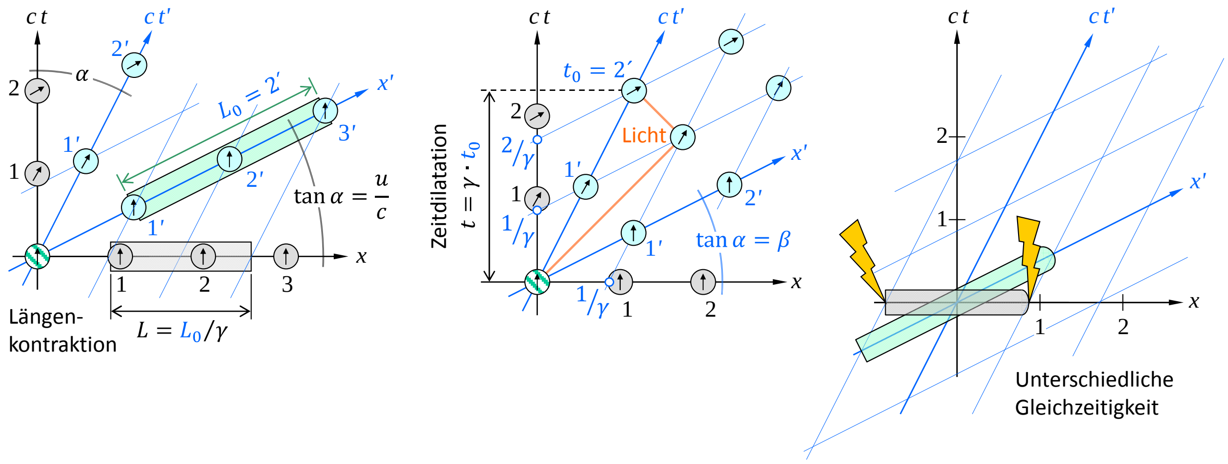


- **Invariantes Raum-Zeit Intervall**: $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]$

- **Doppler Effekt**: $f = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}\ f_0{'}$ mit der Eigenfrequenz $f_0{'}$, dort wo das Signal aus der Ruhe gesendet wird. u ist positiv oder negativ, je nach Bewegungsrichtung der Quelle.

Für kleine Geschwindigkeiten: $\frac{f-f_0{'}}{f_0{'}} = \frac{\Delta f}{f_0{'}} = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} - 1 \cong \frac{u}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 \cdots;\ u \ll c$

Minkowski Diagramm



Relativistische Mechanik

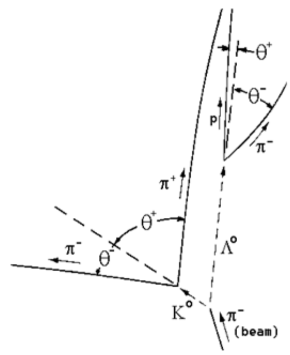
- **Relativistische Masse**: $m = \gamma\, m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$; m_0 ist die **Ruhemasse**
- **Gesamtenergie**: $E = mc^2 = \gamma\, m_0 c^2$

  Kinetische Energie: $E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} \cdots$
- **Relativistischer Impuls**: $\vec{p} = \gamma\, m_0 \vec{v} = m\vec{v}$; Impuls des **Photons**: $p_{photon} = \frac{E_{photon}}{c}$

$\rightarrow$ **Invariante Ruheenergie**: $E_0 = m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2}$

In der SRT ist die Kraft eine komplizierte Grösse. Bei hohen Geschwindigkeiten v sind die **Kraft** F und die Beschleunigung a nicht mehr parallel:

- Kraft in Richtung der Geschwindigkeit: $\mathrm{F}_{\parallel} = \gamma^3\, \mathrm{m}_0 \mathrm{a}_{\parallel}$
- Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit: $\mathrm{F}_{\perp} = \gamma\, \mathrm{m}_0 \mathrm{a}_{\perp}$; $|\vec{v}| = \text{konstant}$



Erhaltungssätze für Teilchenkollisionen:

- **Energieerhaltung**: $E_{tot,vor} = c^2 \sum m_i = E_{tot,nach} = c^2 \sum m_k$
- **Impulserhaltung**: $\vec{p}_{tot,vor} = \sum m_i \vec{v_i} = \vec{p}_{tot,nach} = \sum m_k \vec{v_k}$

$\rightarrow$ **Invarianz der Ruheenergie**: $\sqrt{E_{tot,vor}{}^2 - \left(\vec{p}_{tot,vor}\ c\right)^2} = E_{tot,0} = \sqrt{E_{tot,nach}{}^2 - \left(\vec{p}_{tot,nach}\ c\right)^2}$