1 Fourierreihen

1.1 Einleitung

JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830), französischer Physiker und Mathematiker, lebte und lehrte in Paris, zog mit Napoleon nach Ägypten und war später Prefäkt von Grenoble. Er verwendete als erster seine nach ihm benannten Reihen zur Lösung des Wärmeleitungsproblems.

Fourierreihen werden von Ingenieuren zur Lösung vielfälltigster Probleme angewendet. Dabei ist die grundlegende Idee einfach und sofort zu verstehen: der Elektroingenieur arbeitet mit periodischen Signalen, die teilweise sehr kompliziert sein können. Mit Hilfe von Fourierreihe können diese komplizierten Signale durch einfache, periodische Funktionen ausgedrückt, zum Beispiel durch

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \tag{1.1}$$

d.h. wir schreiben das periodische Signal als (unendliche) Linearkombination solch einfacher Funktion, also in Form einer *trigonometrische Reihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,. \tag{1.2}$$

Ähnlich geht man vor, wenn eine Funktion mit Hilfe ihrer Taylorreihe ausgedrückt werden soll. Bei der Taylorreihe sind die Bausteine

$$1,\ (x-a),\ (x-a)^2,\ (x-a)^3,\ \ldots,\ (x-a)^n,\ \ldots$$

d.h. die k. Potenzen von $(x-a)$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Im Gegensatz dazu sind die Bausteine der trigonometrischen Reihe (Fourierreihe) (1.2) die trigonometrischen Funktionen der Form (1.1).

Wir stehen nun vor dem Problem, die Koeffizienten der Reihe (1.2) so zu berechnen dass die vorgegebenen Funktion möglichst gut wiedergegeben wird.

Die Koeffizienten der Taylorreihe hängen bekanntlich von den *Ableitungen* der Funktion am Entwicklungspunkt a ab. Wir werden unten lernen, dass die Koeffizienten der Fourierreihe (1.2) von *Integralausdrücken* abhängen.

Um die Schreibweise so einfach wie möglich zu halten, betrachten wir zuerst 2π-periodische Funktionen (Abschnitt 1.2). Wir verstehen darunter Funktionen für die gilt

$$f(x+2\pi) \quad = \quad f(x), \qquad \forall x. \tag{1.3}$$

Bekannte Beispiele sind $\sin x$ und $\cos x$. Aber auch nicht stetige Funktionen wie

$$f(x) \quad = \quad \frac{x}{\pi} \qquad \text{für } x \in (-\pi, \pi],$$

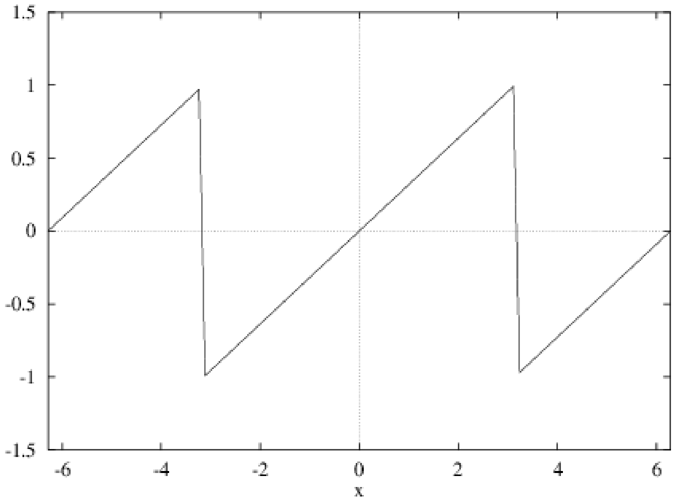

Abbildung 1.1: 2π-periodische Funktion

die wir uns 2π-periodisch fortgesetzt denken gehören dazu.

Im Abschnitt 1.3 betrachten wir Funktionen mit beliebiger Periode T, also beispielsweise Funktionen wie

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} f_0\left(-\dfrac{2x}{T} - 1\right) & \text{für } [-T/2, 0), \\ 2\dfrac{f_0 x}{T} & \text{für } [0, T/2), \end{cases}$$

die wir uns T-periodisch fortgesetzt denken. (siehe Abbildung 1.2).

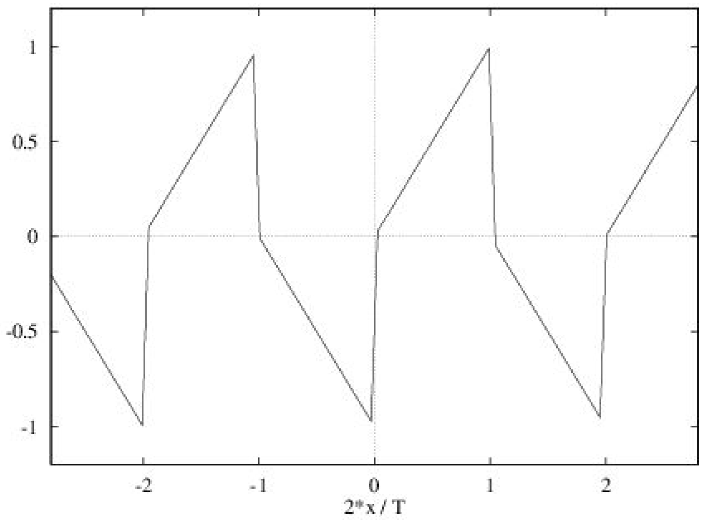

Abbildung 1.2: T-periodische Funktion

1.2 2π-periodische Funktionen

Wir betrachten eine 2π-periodische Funktion $f(x)$. Wir nehmen an, dass sie durch eine trigonometrische Reihe darstellt werden kann. Dann gilt

$$f(x) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right). \tag{1.4}$$

Wir kümmern uns im Augenblick nicht um die Existenz der Summe dieser Reihe. Vielmehr bemühen wir uns um die Berechnung der Koeffizienten a_0, a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots$.

1.2.1 Orthogonalitätsrelationen

Bevor wir uns überlegen, wie wir die Koeffizienten a_n und b_n berechnen können, benötigen wir die sogenannten *Orthogonalitätsrelationen* der trigonometrischen Funktionen. Diese lauten zusammengefasst:

Für $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \, \cos lx \, dx \quad = \quad \begin{cases} \pi & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \, \cos lx \, dx \quad = \quad 0 \tag{1.6}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \, \sin lx \, dx \quad = \quad \begin{cases} \pi & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{1.7}$$

Bemerkung: Die Integration kann über ein beliebiges Intervall der Länge $2\,\pi$ erfolgen, so zum Beispiel $[-\pi, \pi]$ oder $[\pi, 3\pi]$

Um diese Integrale zu berechnen braucht man die folgenden Identitäten

$$\left.\begin{aligned} \cos kx \, \cos lx &= \frac{1}{2} \{\cos[(k+l)x] + \cos[(k-l)x]\} \\ \sin kx \, \cos lx &= \frac{1}{2} \{\sin[(k+l)x] + \sin[(k-l)x]) \\ \sin kx \, \sin lx &= -\frac{1}{2} \{\cos[(k+l)x] - \sin[(k-l)x]\} \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Übung: Rechnen Sie die Orthogonalitätsrelatitionen selbst nach.

1.2.2 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Wir multiplizieren

$$f(x) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right). \tag{1.9}$$

auf beiden Seiten mit $\cos nx$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und integrieren alle Summanden über das Intervall $[0, 2\pi]$ so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\,\cos nx\,dx \\ &+ b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\,\cos nx\,dx\Bigg)\end{aligned} \tag{1.10}$$

Setzen wir zum Beispiel $n = 0$ so folgt aus den Orthogonalitätsrelationen, dass alle Integrale mit $k \neq 0$ verschwinden. Was noch übrig bleibt ist

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} dx = \pi\,a_0$$

woraus sofort die Formel für die Berechnung von a_0 resultiert:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

für $n \geq 1$ verschwinden nach den Orthogonalotätsrelationen alle Integrale mit $k \neq n$ und alle Integrale mit $\sin kx\,\cos nx$ und es bleibt

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx = a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\,\cos nx, dx = \pi\,a_n$$

und somit

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx$$

Ganz analog erhält man die b_n indem man mit $\sin nx$ multipliziert, integriert und die Orthogonalitätsrelationen beachtet:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin nx\,dx$$

Zusammenfassung:

Falls sich die 2π-periodische Funktion $f(x)$ als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

darstellen lässt, so erhällt man die Fourierkoeffizienten a_n und b_n mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos kx\,dx \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin kx\,dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Bemerkung: Die Integration kann über ein beliebiges Intervall der Länge $2\,\pi$ erfolgen, so zum Beispiel $[-\pi, \pi]$ oder $[\pi, 3\pi]$

Beispiel:

Wir entwickeln die Rechteckskurve mit der Funktionsgleichung

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{für } (0 \leq x \leq \pi) \\ -1 & \text{für } (\pi < x < 2\pi) \end{cases} \tag{1.11}$$

in eine Fourierreihe.
Lösung: Wir berechnen zuerst

$$a_0 \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0,$$

und weiter für ein beliebiges $l > 0$

$$\begin{aligned} \pi a_l \quad &= \quad \int_0^{2\pi} f(x) \cos lx \, dx \\ &= \quad \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos lx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \cos lx \, dx \\ &= \quad \left[\frac{\sin lx}{l} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[\frac{\sin lx}{l} \right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\ &= \quad \frac{1}{l} \left(\sin \pi l - \underbrace{\sin 0}_{0} \right) - \frac{1}{l} \left(\underbrace{\sin 2\pi l}_{0} - \sin \pi l \right) = \frac{2}{l} \sin \pi l = 0. \end{aligned}$$

Die b_l's ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \pi b_l \quad &= \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx \, dx \\ &= \quad \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin lx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin lx \, dx \\ &= \quad - \left[\frac{\cos lx}{l} \right]_{x=0}^{x=\pi} + \left[\frac{\cos lx}{l} \right]_{x=\pi}^{x=2\pi} \\ &= \quad -\frac{1}{l} \left(\cos \pi l - \underbrace{\cos 0}_{1} \right) + \frac{1}{l} \left(\underbrace{\cos 2\pi l}_{1} - \cos \pi l \right) = \frac{2}{l} (1 - \cos \pi l) \end{aligned}$$

also wegen $\cos \pi l = -1$ für ungerades l und $\cos \pi l = 1$ für gerades l

$$b_l \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } l \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{l\pi} & \text{falls } l \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die gesuchte Fourierreihe ist

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots \right).$$

Die Abbildung 1.3 zeigt die Graphen der Näherungsfunktionen, falls man ein, zwei oder drei Glieder der Fourierreihe berücksichtigt.

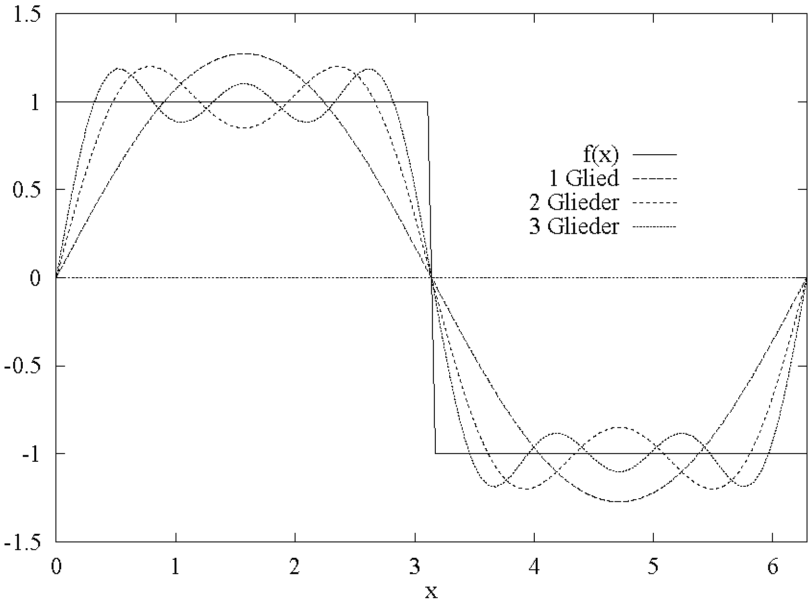

Abbildung 1.3: Nährungsfunktionen des Beispiels

1.3 T-periodische Funktionen

Die Fourierreihe einer Funktion f mit der Periode T kann man am einfachsten mit Hilfe der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ der Grundschwingung darstellen; sie ist gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 x + b_k \sin k\omega_0 x)\,, \tag{1.12}$$

Die Funktion $f(\tilde{x}) := f(x/\omega_0)$ hat die Periode $2\,\pi$ und die Fourierkoeffizienten können mit den Formeln aus dem letzten Anschnitt berechnet werden. Die Substitution $u := x/\omega_0$ liefert dann (siehe Vorlesung) die Fourierkoeffizienten für die T-periodische Funktion $f(x)$:

$$a_k \quad = \quad \frac{2}{T}\int_T f(x)\,\cos k\omega_0 x\,dx \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.13}$$

$$b_k \quad = \quad \frac{2}{T}\int_T f(x)\,\sin k\omega_0 x\,dx \qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.14}$$

Das Integral ist über ein beliebiges Intervall der Länge T zu erstrecken.

1.4 Bemerkungen zur Fourierreihe

1.4.1 Konvergenz der Fourierreihe

Die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion f existiert unter den folgenden, sehr schwachen Voraussetzungen:

- Das Grundintervall $[0, 2\pi]$ lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, auf denen f stetig und monoton ist.
- An jeder Unstetigkeitsstelle x_0 existiert der rechts- und linksseitige Grenzwert $\lim_{x\to x_0^+} f(x) =: f(x_0^+)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x) =: f(x_0^-)$

Die Fourierreihe von f konvergiert an allen Stetigkeitsstellen gegen f. An den Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe gegen den **arithmetischen Mittelwert des rechts- und linksseitige Grenzwert**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & f \text{ in } x \text{ nicht stetig,} \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.15}$$

1.4.2 Gerade und ungerade Funktionen

Eine *gerade Funktion*, $(f(-x) = f(x))$, enthält nur Kosinusanteile (gerade Funktionen) - die ungeraden Sinusanteile fallen weg und es gilt:

Falls $f(x)$ 2π-periodisch (Frequenz $\omega_0 = 1$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{1.16}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1.17}$$

Falls $f(x)$ T-periodisch (Frequenz $\omega_0 = 2\pi/T$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 x, \tag{1.18}$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_{T/2} f(x) \cos k\omega_0 x \, dx \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1.19}$$

Hinweis: Die Intergrationen sind jeweils nur über das halbe Intervall der Länge π resp. $T/2$ auszuführen, da von der Funktion bekannt ist, dass sie gerade ist. Daher kommt der Faktor 2 vor dem Integral.

Ebenso vereinfacht sich die Fourierreihe im Falle einer *ungeraden Funktion*, wo also $f(-x) = -f(x)$ gilt. In diesem Fall hat man nur die Sinusanteile - die geraden Kosinusanteile fallen weg:

Falls $f(x)$ 2π-periodisch (Frequenz $\omega_0 = 1$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, && (1.20) \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \sin kx\, dx \qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots && (1.21) \end{aligned}$$

Falls $f(x)$ T-periodisch (Frequenz $\omega_0 = 2\pi/T$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 x, && (1.22) \\ b_k &= \frac{4}{T} \int_{T/2} f(x)\, \sin k\omega_0 x\, dx \qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots && (1.23) \end{aligned}$$

Hinweis: Die Intergrationen sind jeweils nur ¨uber das halbe Intervall der L¨ange π resp. $T/2$ auszuf¨uhren, da von der Funktion bekannt ist, dass sie ungerade ist. Daher kommt der Faktor 2 vor dem Integral.

1.4.3 Superposition von Fourierkoeffizienten

Weiter beachte man, dass die Fourierkoeffizienten der Fourierreihe von $f + g$ gegeben sind durch die Summe der Fourierkoeffizienten der einzelnen Funktion f und g. Diese Tatsache kann man sich zunutze machen, falls die gegebene Funktion dargestellt werden kann als Linearkombination von Funktionen, deren Fourierreihen sich einfacher berechnen lassen.

1.5 Funktionen mit Periode T

Die Fourierreihe einer Funktion f mit der Periode T kann man am einfachsten mit Hilfe der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ der Grundschwingung darstellen; sie ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 x + b_k \sin k\omega_0 x \right), \qquad (1.24)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(x)\, \cos k\omega_0 x\, dx \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots, && (1.25) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(x)\, \sin k\omega_0 x\, dx \qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots. && (1.26) \end{aligned}$$

Das Integral ist über ein beliebiges Intervall der Länge T zu erstrecken.

Fourier-Zerlegung einer Kippspannung: Finde die Fourier-Zerlegung des sägezahnförmigen Signals gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{\hat{f}}{T}x, \qquad \text{für } (0 \le x < T), \tag{1.27}$$

und periodisch fortgesetzt!
Lösung: (Übung!)

1.6 Der Energiesatz

Die Energie in einer Welle ist proportional zum Quadrat der Amplitude. Für eine komplizierte Wellenform ist die Energie in einer Periode proportianal zu $\int_0^T [f(t)]^2\,dt$. Entwickelt man f in eine Fourierreihe, so kann man schreiben

$$\int_0^T [f(t)]^2\,dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t\right]^2 dt \tag{1.28}$$

Multiplizieren wir das Quadrat auf der rechten Seite aus, so erhalten wir alle möglichen Kreuzprodukte, wie $a_4 \cos 4\omega t \cdot b_2 \sin 2\omega t$. Das einzige was bleibt sind Terme wie $a_n^2 \cos^2 n\omega t$ oder $b_n^2 \sin^2 n\omega t$. Das Integral jedes Quadrat von Sinus oder Kosinus über eine Periode ist gleich $T/2$, die restlichen Integrale haben wegen den Orthogonalitätsrelationen den Wert Null. Übrig bleibt deshalb von (1.28) lediglich

$$\int_0^T [f(t)]^2\,dt = \frac{T}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]. \tag{1.29}$$

Der Gleichung (1.29) sagt man auch *Energiesatz*; er besagt, dass die totale Energie einer Welle gleich ist der Summe der Energien der einzelnen Fourierkomponenten.

Beispiel: Berechne die Energie der rechteckförmigen Welle

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < T/2, \\ -1 & \text{für } T/2 \le t < T. \end{cases}$$

Lösung: Die Integrale werden intervallweise auf $[0, T/2)$ bzw. auf $[T/2, T)$ berechnet. Wir finden, da die periodisch fortgesetzte Funktion ungerade ist

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_k &= \frac{2}{T}\left\{\int_0^{T/2} \sin k\omega_0 t\,dt - \int_{T/2}^{T} \sin k\omega_0 t\,dt\right\} \\ &= -\frac{1}{k\pi}\left\{[\cos k\omega_0 t]_0^{T/2} - [\cos k\omega_0 t]_{T/2}^{T}\right\} \\ &= \frac{2}{k\pi}\left[1 - (-1)^k\right] \end{aligned} \tag{1.30}$$

wobei wir zur Abkürzung $\omega_0 = 2\pi/T$ verwendeten. Damit wird die Fourierreihe

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega_0 t + \frac{\sin 3\omega_0 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_0 t}{5} + \cdots\right).$$

Für die Energie der rechteckförmigen Welle erhalten wir

$$W = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = 2\,T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2}\left[1-(-1)^k\right]^2 = \frac{8\,T}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Wir sehen daraus, dass die Grundschwingung am meisten Energie enthält; das entsprechende Verhältnis zur k. Oberschwingung beträgt $(1/k)^2$, d.h. schon die vierte Oberschwingung enthält nur noch $(1/k)^2 = (1/4)^2 = 1/16$ oder ≈ 6.1 % der Energie der Grundschwinung. Betrachtungen dieser Art erlauben uns abzuschätzen, welchen Einfluss eine Vernachlässigung von Gliedern in der Fourierreihe bezüglich deren Energieinhalt hat.

1.7 Komplexe Fourierreihe

Jeder Elektroingenieur weiss, wie einfach viele Berechnungen werden, wenn man sie nicht im Reellen sondern im Komplexen durchführt. Auch bei Fourierreihen liegt der Sachverhalt ähnlich. Vor allem für theoretische Untersuchungen verwendet man die komplexe Fourierreihe, die man sofort aus der reellen Fourierreihe herleiten kann, wenn man nur berücksichtigt, dass gilt:

$$\cos kx = \frac{e^{jkx}+e^{-jkx}}{2},$$
$$\sin kx = \frac{e^{jkx}-e^{-jkx}}{2j}.$$

Setzt man dies ein in

$$a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx$$

so findet man sofort

$$a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx = e^{jkx}\,\frac{a_k - jb_k}{2} + e^{-jkx}\,\frac{a_k + jb_k}{2} \qquad (1.31)$$

Wegen

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos kx\,dx \quad \text{für } k = 0,1,2,3,\dots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin kx\,dx \quad \text{für } k = 1,2,3,4,\dots$$

gilt:

$$a_k - jb_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,(\cos kx - j\sin kx)\;dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-jkx}\,dx\;, \qquad (1.32)$$
$$a_k + jb_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,(\cos kx + j\sin kx)\;dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{jkx}\,dx\;. \qquad (1.33)$$

Definiert man

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-jkx}\,dx \qquad \text{für } k = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots \qquad (1.34)$$

können wir schliesslich schreiben

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad = \quad c_k\, e^{jkx} + c_{-k}\, e^{-jkx} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourierreihe in komplexer Form: Die komplexe Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion f kann geschrieben werden in der Form

$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jkx}, \tag{1.35}$$

wobei die komplexen Fourierkoeffizienten gegeben sind durch

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-jkx}\, dx \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{1.36}$$

Man beachte, dass die Summe im Gegensatz zur reellen Fourierreihe von $-\infty$ bis ∞ zu nehmen ist.

Wir schliessen aus (1.32) und (1.33) zusammen mit der Definition (1.34)

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.37}$$

$$c_{-k} \quad = \quad \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.38}$$

$$c_0 \quad = \quad \frac{a_0}{2}. \tag{1.39}$$

Damit lassen sich aus den reellen Fourierkoeffizienten der Reihe die komplexen berechnen. Umgekehrt liefert das Auflösen dieser Gleichungen die reellen Fourierkoeffizienten

$$a_0 \quad = \quad 2\, c_0, \tag{1.40}$$

$$a_k \quad = \quad c_k + c_{-k} = c_k + \overline{c_k} = 2\,\mathrm{Re}(c_k), \tag{1.41}$$

$$b_k \quad = \quad j\, (c_k - c_{-k}) = j\, (c_k - \overline{c_k}) = -2\,\mathrm{Im}(c_k). \tag{1.42}$$

Beispiel:

Wir definieren für ein $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} e^{\alpha x}, & \text{falls } (0 \le x < 2\pi), \\ & \text{und } 2\pi\text{-periodisch.} \end{cases}$$

Mit (1.36) finden wir

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha x}\, e^{-jkx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(\alpha - jk)x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(\alpha - jk)x}}{\alpha - jk} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2\pi\alpha}\, e^{-j2\pi k} - 1}{\alpha - jk} \\ &= \frac{1}{2\pi(\alpha - jk)} \left[e^{2\pi\alpha} - 1 \right], \end{aligned}$$

und weiter durch Einsetzen in (1.35)

$$f(x) \quad = \quad \frac{e^{2\pi\alpha}-1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jkx}}{\alpha - jk},$$

falls $x \neq 2\pi k$. An der Stelle $x = 2\pi k$ konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel der rechts- und linkseitigen Grenzwerte der vorgelegten Funktion

$$\frac{f(2\pi k^+) + f(2\pi k^-)}{2} = \frac{1 + e^{2\pi\alpha}}{2}.$$

Die reellen Fourierkoeffizienten erhält man nach (1.40) - (1.42). Bestimme sie zur Übung.

Die komplexe Darstellung für Funktionen mit beliebiger Periode T und entsprechender Kreisfrequenz der Grundschwingung $\omega_0 = 2\pi/T$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 x}, && (1.43) \\ c_k &= \frac{1}{T}\int_T f(x)\, e^{-jk\omega_0 x}\, dx \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. && (1.44) \end{aligned}}$$

Beispiel:

Gesucht ist die komplexe Fourierreihe der Funktion (siehe Abbildung 1.4)

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -\dfrac{2\,A}{T}\, x & x \in (-T/2, 0], \\ 0 & x \in (0, T/2]. \end{cases}$$

Lösung: Die Fourierkoeffizienten werden mit Hilfe von (1.44) berechnet; dabei finden wir für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jk\omega_0 x}\, dx, \\ &= -\frac{2\,A}{T^2}\int_{-T/2}^{0} x\, e^{-jk\omega_0 x}\, dx, \\ &= -\frac{2\,A}{T^2}\left[\frac{-jk\omega_0 x - 1}{(-jk\omega_0)^2}\, e^{-jk\omega_0 x}\right]_{-T/2}^{0}, \\ &= \frac{2\,A}{(k\omega_0 T)^2}\left(-1 - (jk\omega_0 T/2 - 1)\, e^{-jk\omega_0 T/2}\right), \end{aligned}$$

wobei wir $\omega_0 = 2\,\pi/T$ und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{-jk\omega_0 x - 1}{(-jk\omega_0)^2}\, e^{-jk\omega_0 x}\right] &= \frac{-jk\omega_0}{(-jk\omega_0)^2}\, e^{-jk\omega_0 x} + \frac{-jk\omega_0 x - 1}{(-jk\omega_0)^2}\,(-jk\omega_0)\, e^{-jk\omega_0 x} \\ &= x\, e^{-jk\omega_0 x} \end{aligned}$$

verwendet haben (Kettenregel!). Wegen $\omega_0 T = 2\pi$ und somit $e^{-jk\omega_0 T/2} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$ vereinfachen sich die komplexen Fourierkoeffizienten zu

$$c_k = -\frac{2A}{(2\pi k)^2}\left[1-(-1)^k\right] - j\,\frac{A}{2\pi k}(-1)^k.$$

Zudem findet man direkt

$$c_0 = \frac{A}{4}.$$

Die entsprechenden reellen Fourierkoeffizienten sind also

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\,c_0 = \frac{A}{2}, \\ a_k &= 2\,\mathrm{Re}(c_k) = -\frac{A}{(\pi k)^2}\left[1-(-1)^k\right], \\ b_k &= -2\,\mathrm{Im}(c_k) = \frac{A}{\pi k}(-1)^k, \end{aligned}$$

womit wir als Resultat die folgende reelle Fourierreihe hinschreiben können

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{4} - \frac{8A}{(\omega_0 T)^2}\left(\cos\omega_0 x + \frac{\cos 3\omega_0 x}{3^2} + \frac{\cos 5\omega_0 x}{5^2} + \cdots\right) \\ &\quad - \frac{2A}{\omega_0 T}\left(\sin\omega_0 x - \frac{\sin 2\omega_0 x}{2} + \frac{\sin 3\omega_0 x}{3} - \frac{\sin 4\omega_0 x}{4} + \frac{\sin 5\omega_0 x}{5} - \cdot + \cdots\right) \end{aligned}$$

Die Abbildung 1.4 zeigt die Ausgangs-Funktion sowie die trigonometrischen Polynome bis und mit Gliedern in $\omega_0 x$, $3\omega_0 x$, bzw. $5\omega_0 x$.

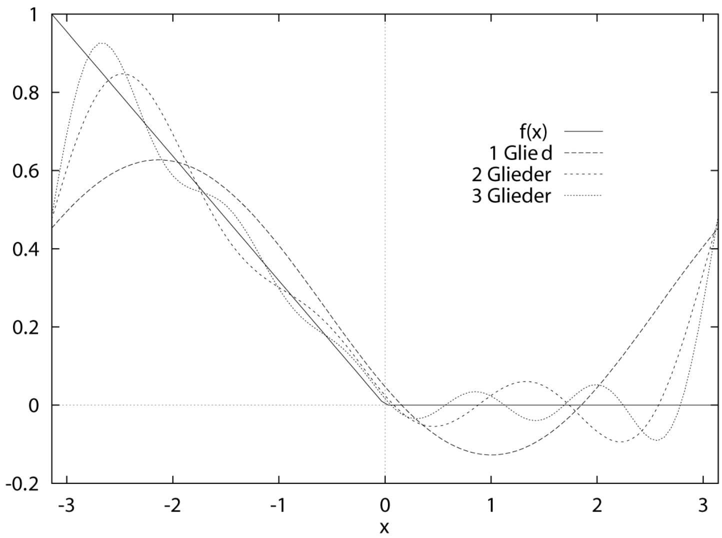

Abbildung 1.4: $f(x)$ und die ersten drei Partialsummen

Bemerkungen Wenn die Fourierreihe einer Funktion berechnet werden soll, die z.B. Exponential- oder Winkelfunktion enthält, kann es vorteilhaft sein, anstelle der reellen, die komplexen Fourierkoeffizienten zu berechnen. Mit Hilfe von (1.40)-(1.42) lassen sich später leicht die reellen Fourierkoeffizienten finden.

1.8 Fourierreihen als beste Approximation

Die Fourierreihe

$$T(x) \quad := \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \, \cos kx + b_k \, \sin kx)$$

ist die beste Approximation einer Funktion $f(x)$ im quadratischen Mittel, d.h. sie minimiert den Fehler

$$\varepsilon \quad = \quad \int_0^{2\pi} |f(x) - T(x)|^2 \; dx. \tag{1.45}$$

Notwendige Bedingung, dass ε minimal wird, ist das Verschwinden der ersten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_k} \quad &= \quad \int_0^{2\pi} 2\; (f(x) - T(x)) \; \frac{\partial T(x)}{\partial a_k} \, dx = \int_0^{2\pi} 2\; (f(x) - T(x)) \; \cos kx \, dx = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_k} \quad &= \quad \int_0^{2\pi} 2\; (f(x) - T(x)) \; \frac{\partial T(x)}{\partial b_k} \, dx = \int_0^{2\pi} 2\; (f(x) - T(x)) \; \sin kx \, dx = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen schliesst man aus diesen Gleichungen sofort auf die Integrale für die Berechnung der Fourierkoeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \; \cos kx \, dx \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \; \sin kx \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Dies zeigt somit, dass die Fourierreihe die beste Approximation im Sinne des kleinsten quadratischen Fehlers ist.

1.9 Anwendung in der Elektrotechnik

Das folgende Beispiel zeigt eine weit verbreitete Anwendung der Fourierreihe in der Elektrotechnik. Wir betrachten einen Schwingkreis, der durch eine periodische Spannungsquelle geregt wird. Dabei soll die Spannung nicht Sinusförmig sein, sondern sägezahnförmig. Störfunktionen dieser Art sind in Tabellen für Ansatzfunktionen nicht vorgesehen. Das Vorgehen zur Lösung dieses Problems beruht auf dem Superpositionsprinzip. Wir entwickeln dazu die Störung in eine Fourierreihe und lösen die Differentialgleichung für jeden einzelnen Summanden dieser Reihe.

Beispiel: Ein Schwingkreis, bestehend aus drei in Serie geschalteten Bauelementen, R, L und C werde beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 0.02 \, \ddot{y}(t) + 25 \, y(t) \quad = \quad r(t).$$

Die Störung sei ein periodisches, dreieckförmiges Signal der Form

$$r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & -\pi < t \leq 0, \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & 0 < t \leq \pi, \\ r(t+2\pi) = r(t) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die allgemeine Lösung $y(t)$ der gegebenen Differentialgleichung.

Lösung: Die Lösung des homogenen Problems ist nicht problematisch und liefert

$$y_h(t) = e^{-\delta t}\,(C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t)$$

wobei $\delta = 10^{-2}$ und $\omega_0 = \sqrt{249999}/100$. Im zweiten Schritt bestimmen wir eine partikuläre Lösung, $y_p(t)$, in Form einer Fourierreihe. Dazu entwickeln wir die Störung, $r(t)$, in eine Fourierreihe

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jkt}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\, e^{-jkt}\, dt$$

Nach einer kurzen Rechnung finden wir (verifiziere!)

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi k^2} & k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt bestimmen wir die Koeffizienten C_k in der Fourierreihe von

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jkt},$$

indem wir $r(t)$ und $y_p(t)$ in die vorgegebene Differentialgleichung ensetzten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \left[(jk)^2 + 0.02\,jk + 25\right] e^{jkt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jkt}.$$

Koeffizientenvergleich liefert für ungerade k's die Gleichungen

$$\left(-k^2 + j\,0.02\,k + 25\right) C_k = \frac{2}{\pi k^2}$$

während für gerade k's $C_k = 0$ folgt. Die Fourierkoeffizienten, C_k, von $y_p(t)$ erhält man durch Auflösen dieser Gleichungen woraus schliesslich folgt

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi\, k^2\,(25 - k^2 + j\,0.02\,k)}\, e^{jkt}.$$

Der Betrag, $|C_k|$, des Amplitudenspektrum von $y_p(t)$ ist in der Abbildung 1.5 dargestellt.

Dominant sind hier die beiden Frequenzen $k = -5$ und $k = 5$. Daneben nehmen auch noch die beiden Frequenzen $k = -1$ und $k = 1$ teil. Allerdings bereits mit einer um den Faktor 5 reduzierten Amplitude (also mit einer um den Faktor 5^2 reduzierten Energie!). Das Spektrum ist symmetrisch.

Durch Addition der homogenen und partikuläre Lösung gelangen wir zur allgemeinen Lösung der vorgegebenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = e^{-\delta t}\,(C_1\,\sin\omega_0 t + C_2\,\cos\omega_0 t) \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi\,k^2\,(25-k^2+j\,0.02\,k)}\,e^{jkt} \end{aligned}$$

oder wenn wir nur die dominante Harmonische zu $k = 5$ berücksichtigen (verifiziere!)

$$y(t) = e^{-\delta t}\,(C_1\,\sin\omega_0 t + C_2\,\cos\omega_0 t) + \frac{4}{5\pi}\cos 5t.$$

Dies bedeutet, dass die stationäre Lösung, d.h. für $t \to \infty$, eine harmonische Oszillation mit einer Frequenz ist, die fünfmal grösser ist als die Frequenz der Störung.

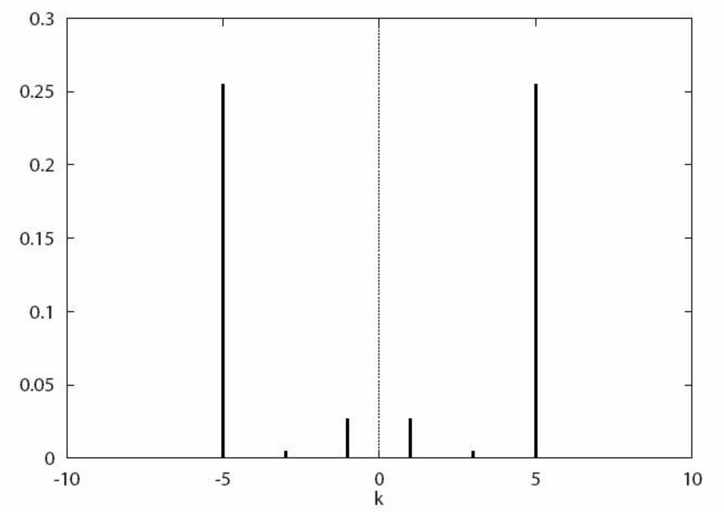

Abbildung 1.5: Amplitudenspektrum der Fourierreihe aus dem Beispiel

Die Methode der Fourierreihen kann auch benutzt werden, um partielle Differentialgleichungen mit periodischen Randbedingungen zu lösen. Man denke dabei an die Wärmeleitungsgleichung für einen kreisrunden Stahlring. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen.

1.10 Diskrete Fouriertransformation

In der Praxis ist die Funktion f nicht immer durch eine Funktionsvorschrift gegeben. Wir wenden uns dem Fall zu, wo die Funktion nur durch diskrete Punkte ihres Graphen gegeben ist. Durch diese legen wir ein möglichst einfaches trigonometrisches Polynom. Dies führt auf die *diskrete Fouriertransformation* einer Funktion f. Das folgende Beispiel erläutert das Vorgehen.

Gegeben seien die Werte einer Funktion an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$ sowie $x_3 = 3\pi/2$. Sie seien mit f_0, f_1, f_2 und f_3 bezeichnet. Wir setzen weiter voraus, dass die Funktion 2π-periodisch ist.

Wir berechnen nun im folgenden ein trigonometrisches Polynom, das an den entsprechenden Stellen die vorgeschriebenen Funktionswerte annimmt.

Lösung: Um möglichst viel Schreibarbeit zu sparen, wählen wir die komplexe Schreibweise. Unser gesuchtes trigonometrische Polynom hat demnach die Form

$$T_4(x) \;=\; c_0 + c_1\,e^{jx} + c_2\,e^{2jx} + c_3\,e^{3jx}.$$

Die unbekannten Koeffizienten c_0, c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{C}$ werden mit Hilfe der vier Gleichungen

$$\begin{aligned} T_4(0) &= f(0) = f_0, \\ T_4(\pi/2) &= f(\pi/2) = f_1, \\ T_4(\pi) &= f(\pi) = f_2, \\ T_4(3\pi/2) &= f(3\pi/2) = f_3. \end{aligned}$$

bestimmt. Diese sagen aus, dass an den vorgegebenen Stellen, x_k, der Funktionswert, f_k, und Wert des trigonometrischen Polynoms, $T_4(x_k)$, übereinstimmen. Schreibt man die linken Seiten aus, erhählt man

$$\begin{array}{ccccccccc} c_0 & + & c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & f_0 \\ c_0 & + & c_1\,e^{j\pi/2} & + & c_2\,e^{j\pi} & + & c_3\,e^{3j\pi/2} & = & f_1 \\ c_0 & + & c_1\,e^{j\pi} & + & c_2\,e^{2j\pi} & + & c_3\,e^{3j\pi} & = & f_2 \\ c_0 & + & c_1\,e^{3j\pi/2} & + & c_2\,e^{3j\pi} & + & c_3\,e^{9j\pi/2} & = & f_3 \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\pi/2} & e^{j\pi} & e^{3j\pi/2} \\ 1 & e^{j\pi} & e^{2j\pi} & e^{3j\pi} \\ 1 & e^{3j\pi/2} & e^{3j\pi} & e^{9j\pi/2} \end{pmatrix}}_{=:\,F} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=:\,c} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}}_{=:\,f}$$

kurz

$$F\,c \;=\; f,$$

wobei c und f anstelle der entsprechenden Spaltenvektoren der c_k's bzw. f_k's stehen und F die Matrix repräsentiert. Das Auflösen eines solchen Gleichungssystems ist üblicherweise mit einem beträchtlichen Aufwand verbunden. Hier haben wir grosses Glück. Wir können nämlich aus F direkt die Inverse F^{-1} ablesen, denn es gilt für diesen Typ von Matrizen:

$$F^{-1} = \frac{1}{4}\overline{F} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{e^{j\pi/2}} & \overline{e^{j\pi}} & \overline{e^{3j\pi/2}} \\ 1 & \overline{e^{j\pi}} & \overline{e^{2j\pi}} & \overline{e^{3j\pi}} \\ 1 & \overline{e^{3j\pi/2}} & \overline{e^{3j\pi}} & \overline{e^{9j\pi/2}} \end{pmatrix}$$

wobei wir benutzten, dass $\overline{F}$ aus F entsteht, indem man jedes einzelne Matrixelement konjugiert komplex nimmt. Damit finden wir

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Setzt man hier $f_0 = 2$, $f_1 = 4$, $f_2 = 6$ und $f_3 = 8$ ein, so folgt

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1+j \\ -1 \\ -1-j \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Koeffizienten in das trigonometrische Polynom liefert schliesslich

$$T_4(x) = 5 + (-1+j)\,e^{jx} - e^{2jx} - (1+j)\,e^{3jx}.$$

Man kann leicht nachprüfen, dass dieses Polynom an den entsprechenden Stellen die vorgeschriebenen Funktionswerte annimmt. Definiert man

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_1 &= 2\,\mathrm{Re}(c_1) \\ b_1 &= -2\,\mathrm{Im}(c_1) \\ a_2 &= 2c_2 \end{aligned}$$

so findet man das entsprechende reelle trigonometrische Polynom

$$\tilde{T}_4(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + \frac{a_2}{2}\cos 2x = 5 - 2\,\cos x - 2\,\sin x - \cos 2x$$

welches in der Abbildung 1.6 dargestellt ist. Beachte, dass die beiden trigonometrischen Polynome $T_4(x)$ und $\tilde{T}_4(x)$ nur an den Stellen x_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ übereinstimmen, d.h. sie beide erfüllen die Interpolationsaufgabe. Zwischen diesen Stellen sind sie allerdings verschieden. Das erste ist ja im allgemeinen komplex, das zweite hingegen reell.

figs/fseries10.ps

Abbildung 1.6: Reelles trigonometrisches Polynom aus Beispiel 1.10 .

Zur Verallgemeinerung des obigen Beispiels denken wir uns die diskreten Funktionswerte f_k einer T-periodischen Funktion f an den Stellen $x_k = k\,\dfrac{T}{N}$, $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ gegeben. Das trigonometrische Polynom

$$T_N(x) \;=\; \sum_{l=0}^{N-1} c_l\, e^{2\pi j l x/T} \tag{1.46}$$

mit den Koeffizienten

$$c_l \;=\; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \,\exp\left(-\frac{2\pi j k l}{N}\right) \qquad (l = 0,\,1,\,\ldots,\,N-1). \tag{1.47}$$

erfüllt die gestellte Interpolationsaufgabe, d.h. nimmt an den Stellen x_k die Werte $f_k = f(x_k)$ an. Wir nennen $T_N(x)$ *diskrete Fouriertransformierte* der auf diskreten Punkten gegebenen Funktion f.

Wir setzen weiter voraus, dass $N = 2\,M$, d.h. dass N gerade ist. In diesem Fall ist das reelle trigonometrische Polynom gegeben durch

$$\tilde{T}_N(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{M-1}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)\right] + \frac{a_M}{2}\, cos\left(\frac{2\pi M x}{T}\right) \tag{1.48}$$

mit den reellen Koeffizienten $a_0 = 2c_0$, $a_M = 2c_M$ sowie für $k = 1,\,2,\,\ldots,\,M-1$

$$a_k \;=\; 2\,\mathrm{Re}(c_k), \tag{1.49}$$
$$b_k \;=\; -2\,\mathrm{Im}(c_k). \tag{1.50}$$

Wir wollen nun zusätzlich annehmen, dass $N = 2^r$, d.h. 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc., d.h. N ist die r. Potenz von 2. Mit Hilfe von $W = e^{-2\pi j/N}$ hat man nacheinander

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\, e^{-2\pi j l k/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\, W^{kl} \\ &= \frac{1}{N}\left\{ \underbrace{\sum_{l=0}^{N/2-1} f_l\, W^{kl}}_{\text{die erste Hälfte}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{N/2-1} f_{l+N/2}\, W^{(l+N/2)k}}_{\text{die zweite Hälfte}} \right\} \end{aligned}$$

hier empfiehlt es sich, gerade und ungerade k's separat zu betrachten. Man findet dann wegen $W^N = 1$ für die geraden

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{1}{N}\left\{ \sum_{l=0}^{N/2-1} f_l\, W^{2kl} + \sum_{l=0}^{N/2-1} f_{l+N/2}\, W^{(l+N/2)2k} \right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N/2-1} \left(f_l + f_{l+N/2}\right)\, W^{2kl} \end{aligned} \tag{1.51}$$

und schliesslich mit $W^{N/2} = -1$ für die ungeraden

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \frac{1}{N}\left\{\sum_{l=0}^{N/2-1} f_l\, W^{(2k+1)l} + \sum_{l=0}^{N/2-1} f_{l+N/2}\, W^{(l+N/2)(2k+1)}\right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N/2-1}\left(f_l - f_{l+N/2}\right) W^l\, W^{2kl}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Benutzt man die Abkürzungen $f_l^g = f_l + f_{l+N/2}$ und $f_l^u = W^l\left(f_l - f_{l+N/2}\right)$ finden wir

$$c_{2k} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N/2-1} f_l^g\, W^{2kl}, \tag{1.53}$$

$$c_{2k+1} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N/2-1} f_l^u\, W^{2kl}. \tag{1.54}$$

Gleichung (1.53) bestimmt die Fourierkoeffizienten einer neuen Funktion f_l^g, die an $N/2$ Punkten gegeben ist. Deren Berechnung kann man wieder wie (1.51) und (1.52) aufteilen. So wird in jedem Schritt die Anzahl der Punkte um den Faktor zwei reduziert. Schliesslich gelangt man zur Berechnung der Fourierkoeffizienten einer Funktion, die an einer Stelle gegeben ist. Dieses Verfahren nennt man *schnelle Fouriertransformation* oder abgekürzt FFT (aus dem Englischen "fast fourier transform"). Die FFT ist wegen der reduzierten Anzahl Rechenoperationen wesentlich schneller als die nicht-modifizierte diskrete Fouriertransformation.

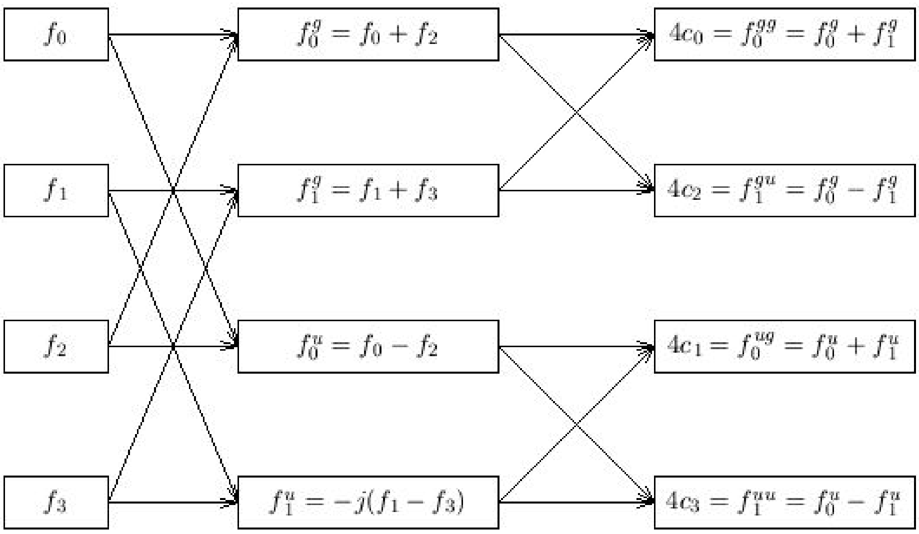

Abbildung 1.7: Berechnungsschema der FFT mit $N = 4$.

Die Abbildungen 1.7 zeigt die entsprechenden Schritte der FFT für $N = 2^2 = 4$.