Wie können diskrete Signale und Systeme mathematisch beschrieben werden?

Thierry Prud'homme

Hochschule Luzern
Technik & Architektur

Outline

1. Mathematische Darstellung von disckreten Signalen

Outline

Outline

Outline

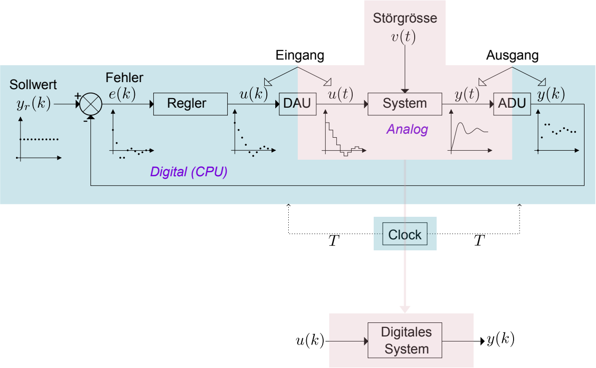
Lernziele (1/2)

- Die Studierende können ein diskretes Signal mathematisch beschreiben.
- Die Studierende können die wichtigsten diskreten Signale beschreiben.
- Die Studierende können das Modell eines diskreten Prozesses mit einer Differenzengleichung beschreiben.

Lernziele (2/2)

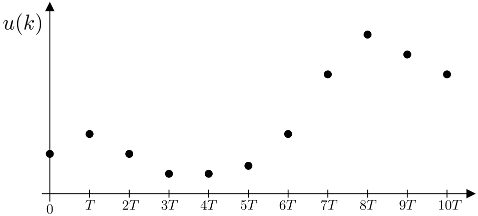
- Die Studierende können die z-Transformation eines einfachen diskreten Signals berechnen.
- Die Studierende können die wichtigen Sätze der z-Transformation anwenden.
- Die Studierende können eine z-Übertragungsfunktion herleiten.

Digitale Regelstrecke / Digitales System



$$\{u(t), T\} \rightarrow u(k)$$
$$\{u(t), T\} \rightarrow u(k)$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Prinzip

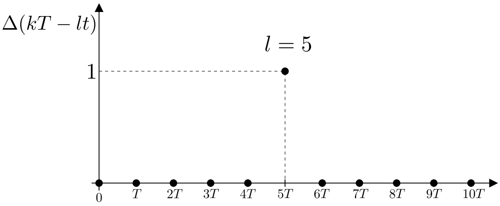


$$\{u(kT) : k \geq 0\} \rightarrow \{u(k) : k \geq 0\}$$

Eigenschaften

- Systeme im Ruhezustand zu $k = 0$, deswegen $k \geq 0$
- Das Signal ist ein auszählbarer „Satz“ von Werten, $\{u(k) \in \Re : k \geq 0\}$

Impulse

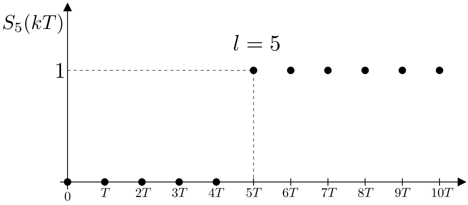


$$\{I_l(kT) = \Delta(kT - lT)\} \text{ mit } \Delta(kT - lT) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

Eigenschaften

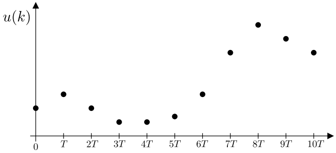
- Begrenzter Wert zu $k = l$, nicht der Fall in der analogen Welt mit Dirac Impuls

Sprung

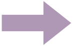


$$\{S_l(kT)\} \text{ mit } S_l(kT) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \geq l \\ 0 & \text{if } k < l \end{cases}$$

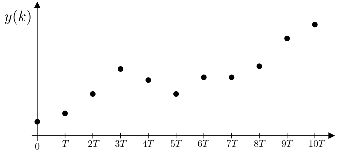
Prinzip



$\{u(k) : k \geq 0\}$



$\{y(k)\} = G\{u(k)\}$

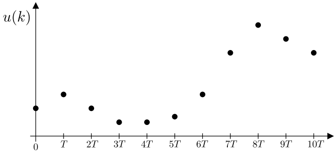


$\{y(k) : k \geq 0\}$

Eigenschaften der berücksichtigten Systemen

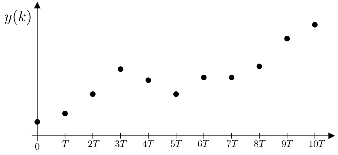
- Linear 1:
  $G(\{u_1(k)\} + \{u_2(k)\}) = G(\{u_1(k)\}) + G(\{u_2(k)\})$
- Linear 2: $G(a\{u(k)\}) = aG(\{u(k)\})$
- Kausal: $y(k_0)$ hängt nur von $\{u(k) : k \leq k_0\}$ ab
- Stationnär: G hängt nicht von k ab

Differenzengleichungen



$\{u(k) : k \geq 0\}$

$$\{y(k)\} = G\{u(k)\}$$

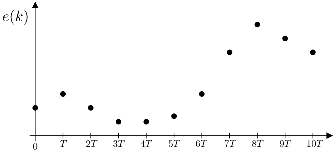


$\{y(k) : k \geq 0\}$

Differenzengleichungen

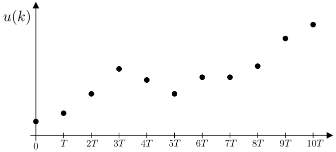
$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-d-j)$$

Beispiel: Diskretisierter PI
Prinzip



$\{e(k) : k \geq 0\}$

$$\{u(k)\} = G\{e(k)\}$$



$\{u(k) : k \geq 0\}$

Beispiel: Diskretisierter PI

Differenzengleichung

Originale Gleichung

$$u(k) = K_a e(k) + K_a \sum_{i=0}^{k} \frac{e(i) + e(i-1)}{2} T$$

Transformation

$$u(k) - u(k-1) = K_a(e(k) - e(k-1)) + \frac{K_a}{T_i} \frac{e(k) + e(k-1)}{2} T$$

Beispiel: Diskretisierter PI

Differenzengleichung

Differenzengleichung des PI Reglers

$$u(k) = u(k-1) + K_a \left(1 + \frac{1}{2T_i}\right) e(k) + K_a \left(\frac{T}{T_i} - 1\right) e(k-1)$$

Verbindung zu allgemeiner Beschreibung

$$u(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i u(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j e(k-d-j)$$

Analogie Analog-Digital

Analog

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G_s} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{aligned} u(t) &\rightarrow U(s) \\ y(t) &\rightarrow Y(s) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow sY(s)$$

$$y(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt} = \sum_{j=0}^{n} b_j \frac{d^j u}{dt} \quad \rightarrow \quad G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Digital

$$u(k) \longrightarrow \boxed{G_s} \longrightarrow y(k)$$

$$\begin{aligned} u(k) &\rightarrow U(z) \\ y(k) &\rightarrow Y(z) \end{aligned}$$

$$y(k-1) \rightarrow z^{-1}Y(z)$$

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j u(k-d-j) \quad \rightarrow \quad G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

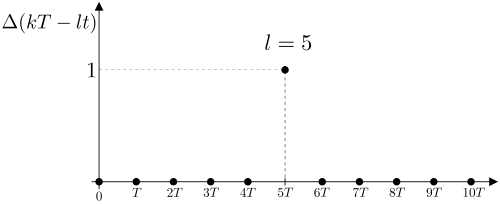
Definition

$$W(z) = Z\{w(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} w(k) z^{-k}$$

with

$$z \in C$$

Impulse

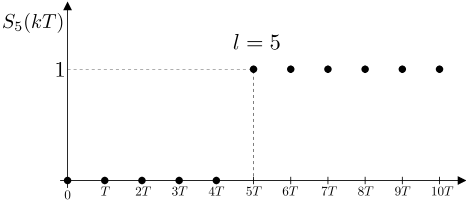


$$\{I_l(kT) = \Delta(kT - lT)\} \text{ mit } \Delta(kT - lT) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

z-transformation

$$Z\{I_l(k)\} = z^{-l}$$

Sprung



$$\{S_l(kT)\} \text{ mit } S_l(kT) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \geq l \\ 0 & \text{if } k < l \end{cases}$$

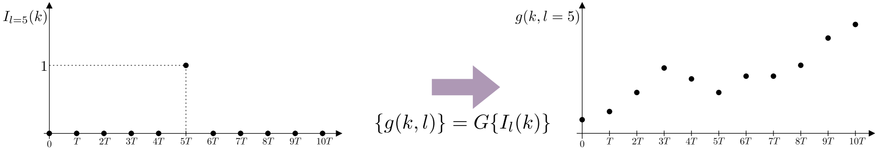
z-transformation

$$Z\{S_l(k)\} = \sum_{i=l}^{\infty} z^{-i} = z^{-l} \frac{z}{z-1}$$

Eigenschaften der z-transformation

- Linearität 1:
  $Z(\{w_1(k)\} + \{w_2(k)\}) = Z\{w_1(k)\} + Z\{w_2(k)\}$
- Linearität 2: $Z(a\{w(k)\}) = aZ\{w(k)\}$
- Zeit Verschiebung: $Z(\{w(k-d)\} = z^{-d}W(z)$
- Initialwert: $w(0) = \lim_{z\to\infty} W(z)$
- Finalwert: $w(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)W(z)$

Impuls-Antwort eines Systems



$\{g(k,l)\} = G\{I_l(k)\}$

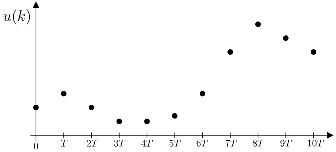
$\{I_l(k) : k \geq 0\}$

$\{g(k,l) : k \geq 0; l \geq 0\}$

Eigenschaften

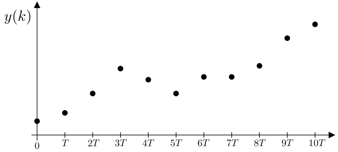
- 2 Dimensionen (k, l).
- Stationär: $g(k,l) \rightarrow g(k-l)$

Antwort eines Systems



$\{u(k) : k \geq 0\}$

$\{y(k)\} = G\{u(k)\}$



$\{y(k) : k \geq 0\}$

Impuls-Antwort beschreibt das System

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} u(l)g(k-l) \tag{1}$$

z-Übertragungsfunktion

Impuls-Antwort beschreibt das System

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} u(l)g(k-l)$$

z- Transformationen von $y(k)$, $u(k)$ und $g(k)$

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z\{y(k)\} \\ U(z) &= Z\{u(k)\} \\ G(z) &= Z\{g(k)\} \end{aligned}$$

z-Übertragungsfunktion

z-Übertragunsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$