Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

Aufgabe 1: Matrizenmultiplikation

Berechnen Sie die folgenden Produkte von Hand:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Rechenregeln für die transponierte Matrix

Es gelten die Aussagen:

1. Für zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, die sich addieren lassen gilt $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$
2. Für zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, die sich multiplizieren lassen gilt $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

a) Verifizieren Sie die erste Aussage mit Hilfe eines Beispiels

b) Verifizieren Sie die zweite Aussage mit Hilfe der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

c) (Freiwillig) Beweisen Sie die beiden Aussagen für allgemeine Matrizen.

Aufgabe 3: Die Inverse Matrix

a) Bestimmen Sie von Hand die Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ und $\mathbf{B}^{-1}$ der beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

indem Sie mit Hilfe von $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ resp. $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}$ ein Gleichungssystem aufstellen und lösen.

b) Zeigen Sie, dass für die Inversen Matrizen aus a) das Kommutativitätsgesetz gilt ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$)

Aufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit

Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Falls die Vektoren linear abhängig sind, geben Sie eine Linearkombination dieser Vektoren an und veranschaulichen diese im $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Linearkombination

Gegeben ist eine Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

für $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie nun den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Finden Sie die Koordinaten y_1,y_2 und y_3 die den Vektor x in der obigen Basis beschreiben, d.h.

$$x = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + y_3 \cdot v_3$$

Aufgabe 6: Polynomräume

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbf{P}_2$ der Polynome zweiten Grades. Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis von $\mathbf{P}_2$? Begründen Sie!

i) $\{5, \quad 2\,x, \quad 3\,x^2\}$

ii) $\{1, \quad x^2, \quad -12\,x^2\}$

iii) $\{1, \quad 2\,x, \quad 3\,x^2, \quad x^3\}$

iv) $\{1, \quad 1+x, \quad 1+x+x^2\}$

v) $\{1, \quad 1+x, \quad x+x^2\}$

Viel Spass!