2.4.4.2. Matrizen und Determinanten

2.4.4.2.1. Begriff der Matrix. Sind $m \cdot n$ Ausdrücke in einem rechteckigen Schema von *m Zeilen* und *n Spalten* angeordnet,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

so spricht man von einer *Matrix* vom Typ (m, n), vom Format (m, n) oder kurz (m, n)-Matrix; die $m \cdot n$ Ausdrücke a_{ik} heißen *Elemente* der Matrix. Die Stellung eines Elementes innerhalb des Schemas wird durch einen Doppelindex gekennzeichnet, wobei der erste Index die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer angibt, in der das Element steht (dabei verläuft die Numerierung der Zeilen von oben nach unten, die der Spalten von links nach rechts). Die Elemente der Matrix sind in der Regel Zahlen, zuweilen aber auch andere mathematische Objekte, z. B. Vektoren, Polynome, Differentiale oder selbst wieder Matrizen.

Eine Matrix vom Typ (n, n) heißt *n-reihige quadratische Matrix* oder *quadratische Matrix der Ordnung n.* Eine quadratische Matrix (a_{ik}) der Ordnung n heißt

obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ik} = 0$ für alle $i > k$,
untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ik} = 0$ für alle $i < k$,
Diagonalmatrix, wenn $a_{ik} = 0$ für alle $i \neq k$,
Einheitsmatrix, wenn $a_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases}$

Die Elemente a_{ii}, die im Schema in der Diagonale von links oben nach rechts unten stehen, heißen *Hauptdiagonalelemente*, die Elemente $a_{i,\,n-i+1}$ $(i = 1, \dots, n)$ in der Diagonale von rechts oben nach links unten heißen *Nebendiagonalelemente.* Auch bei nichtquadratischen (m, n)-Matrizen nennt man die Elemente a_{ii} $(i = 1, \dots, \min(m, n))$ Hauptdiagonalelemente.

Eine Matrix vom Typ $(1, n)$, die mithin aus nur einer Zeile besteht, heißt *Zeilenmatrix*; analog spricht man von einer *Spaltenmatrix*, wenn sie den Typ $(m, 1)$ hat. Die (m, n)-Matrix, deren Elemente sämtlich Null sind, heißt (m, n)-*Nullmatrix*. Jedes Teilschema

$$\begin{pmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_s} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \dots & a_{i_2k_s} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} & \dots & a_{i_rk_s} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leqq m$; $1 \leqq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leqq n$, welches aus der (m, n)-Matrix (a_{ik}) durch Streichen irgendwelcher Zeilen und irgendwelcher Spalten hervorgeht, heißt eine *Untermatrix* von (a_{ik}). Definitionsgemäß soll die Matrix (a_{ik}) selbst noch zu ihren Untermatrizen gezählt werden.

2.4.4.2.2. Determinante einer quadratischen Matrix. Jeder n-reihigen quadratischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ mit reellen bzw. komplexen Elementen läßt sich auf eindeutige Weise eine reelle bzw. komplexe Zahl zuordnen, die man als Determinante von $\mathbf{A}$ bezeichnet. Es ist

$$D = \det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{\pi} (-1)^{j(\pi)} \, a_{1i_1} \, a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

wobei die Summe über alle möglichen Permutationen π der Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu erstrecken ist. Man bildet also zunächst aus den Elementen von $\mathbf{A}$ alle möglichen Produkte $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ zu je

n Faktoren in der Weise, daß jedes der Produkte aus jeder Zeile und aus jeder Spalte genau ein Element als Faktor enthält. Der Wert des Ausdruckes $(-1)^{j(\pi)}$ ergibt sich aus der Anzahl $j(\pi)$ der *Inversionen* der Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ (s. 2.2.4. Permutationen). Schließlich werden alle diese $n!$ Summanden addiert, die Summe ist det **A**.

Ist $D = |a_{ik}|$ eine n-reihige Determinante, so bezeichnet man als *Unterdeterminante* des Elementes a_{ik} diejenige $(n-1)$-reihige Determinante, die aus D durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte hervorgeht. Unter der *Adjunkte* (dem *algebraischen Komplement*) A_{ik} des Elementes a_{ik} versteht man die mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ versehene Unterdeterminante von a_{ik}:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & & & \cdot & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & & & \cdot & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Beispiele:

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Eigenschaften von Determinanten. Deutet man die Zeilen einer n-reihigen Determinante D als Vektoren (n-Tupel) $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$, dann lassen sich die Eigenschaften der Determinante $D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ mit den *Zeilenvektoren* $\mathbf{z}_i$ bequem formulieren:

1. Zeilenvertauschen beeinflußt höchstens das Vorzeichen von D:

$$D(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = -D(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_n);$$

allgemein

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = (-1)^{j(\pi)}\, D(\mathbf{z}_{\pi(1)}, \mathbf{z}_{\pi(2)}, \ldots, \mathbf{z}_{\pi(n)}),$$

wobei π eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und $j(\pi)$ die Anzahl ihrer Inversionen ist.

2. Herausziehen eines allen Elementen einer Zeile gemeinsamen Faktors:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \alpha\mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = \alpha D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

3. Addition zweier n-reihiger Determinanten, die sich nur in einer ihrer Zeilen unterscheiden:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) + D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k', \ldots, \mathbf{z}_n) = D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k + \mathbf{z}_k', \ldots, \mathbf{z}_n)$$

4. Addition eines Vielfachen der k-ten Zeile zur i-ten Zeile verändert den Wert von D nicht $(i \neq k)$:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}) = D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_i + \alpha\mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n)$$

5. $D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = 0$ genau dann, wenn die Vektoren $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$ linear abhängig sind. Insbesondere ist mithin $D = 0$, wenn eine Zeile von D aus lauter Nullen besteht oder wenn zwei Zeilen von D gleich oder einander proportional sind.

6. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man in ihr die Spalten mit den Zeilen vertauscht und umgekehrt, d. h., wenn man sie *transponiert*. Deshalb gelten alle vorstehenden, für Zeilen formulierten Eigenschaften auch für Spalten.

Laplacescher Entwicklungssatz. Ist $D = |a_{ik}|$ eine n-reihige Determinante, so gilt:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki},$$

d. h., die Summe der Produkte aller Elemente einer Zeile (bzw. einer Spalte) mit ihren Adjunkten ist gleich dem Wert der Determinante. Hingegen ist die Summe der Produkte aller Elemente einer Zeile (bzw. einer Spalte) mit den Adjunkten der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile (bzw. einer anderen Spalte) gleich null:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{li} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il} = 0, \quad \text{falls} \quad k \neq l.$$

Zusammengefaßt gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{li} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il} = \begin{cases} D, & \text{falls} \quad k = l, \\ 0, & \text{falls} \quad k \neq l. \end{cases}$$

Berechnung von Determinanten. Zwei- und dreireihige Determinanten kann man ohne Mühe mit Hilfe der Definition berechnen. Wendet man diese auf eine zweireihige Determinante an,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

so erhält man die Merkregel: „Produkt der Hauptdiagonalelemente minus Produkt der Nebendiagonalelemente". Auch für den Wert einer dreireihigen Determinante kann man eine solche Merkregel, die sog. *Sarrussche Regel*, angeben: Man schreibe die ersten beiden Spalten der Determinante rechts von der Determinante noch einmal hin und bilde dann die Summe der Produkte der Hauptdiagonalelemente und der Elemente parallel zur Hauptdiagonalen, wovon die Summe der Produkte der Nebendiagonalen und der Elemente parallel zur Nebendiagonalen zu subtrahieren ist:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = \begin{array}{l} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \\ - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} \end{array}$$

Höherreihige Determinanten könnte man prinzipiell ebenfalls nach der Definition berechnen, dies ist jedoch sehr aufwendig und umständlich. Man geht vielmehr so vor, daß man eine n-reihige Determinante auf $(n-1)$-reihige Determinanten zurückführt, diese auf $(n-2)$-reihige Determinanten usw., bis man schließlich auf 3- bzw. 2-reihige Determinanten stößt. Dieses Prinpzip der „schrittweisen Erniedrigung der Reihenzahl" liegt beispielsweise dem o. g. Laplaceschen Entwicklungssatz zugrunde. Mittels dieses Entwicklungssatzes wird die n-reihige Determinante D als Summe von $(n-1)$-reihigen Determinanten geschrieben (man sagt, sie wird „nach den Elementen der i-ten Zeile bzw. der i-ten Spalte entwickelt"); auf jede dieser $(n-1)$-reihigen Determinanten kann der Entwicklungssatz erneut angewandt werden.

Sind alle Elemente a_{ik} der i-ten Zeile von D null bis auf eines, so enthält die nach Anwendung des Entwicklungssatzes entstehende Summe nur einen von null verschiedenen Summanden. Die Rechnung vereinfacht sich also wesentlich, wenn man vor dem Entwickeln der Determinante nach den Elementen der i-ten Zeile in dieser möglichst viele Nullen erzeugt. Dies ist durch die Anwendung der Determinanteneigenschaften (besonders 4.) möglich.

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\text{(Eigenschaft 4)}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}} = \underset{\text{(Eigenschaft 2)}}{3 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$= \underset{\text{(Entwicklungssatz)}}{3 \left\{ -5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \right\}} = \underset{\text{(Eigenschaft 5)}}{0 - 21 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$= \underset{\text{(Eigenschaft 4)}}{-21 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \underset{\text{(Entwicklungssatz)}}{-21 \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right\}}$$

$$= -21\{(4 + 10) - (16 + 5)\} = +147.$$

Noch bequemer gestaltet sich die Berechnung einer Determinante, wenn man sie unter Verwendung ihrer Eigenschaften so umformt, daß alle Elemente, die links unterhalb der Diagonale $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ stehen, null werden. Wie man auf Grund des Entwicklungssatzes leicht einsieht, ergibt sich dann der Wert der Determinante einfach als Produkt der Glieder in der Hauptdiagonale: $D = a_{11} \cdot a_{22} \ldots a_{nn}$. Dieses Verfahren empfiehlt sich insbesondere, wenn man Determinanten von der Ordnung 5 an aufwärts zu berechnen hat.

2.4.4.2.3. Rang einer Matrix. Die Matrix $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ hat den *Rang* $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \varrho$ genau dann, wenn $\mathbf{A}$ mindestens eine reguläre ϱ-reihige Untermatrix besitzt und alle höherreihigen Untermatrizen von $\mathbf{A}$ singulär sind. Dabei heißt eine quadratische Matrix *regulär* bzw. *singulär* je nachdem, ob ihre Determinante von null verschieden bzw. gleich null ist.

Definiert man noch zusätzlich $\mathrm{Rg}(\mathbf{0}) = 0$, so ist jeder Matrix genau eine nichtnegative ganze Zahl als ihr Rang zugeordnet.

Beispiel: Es ist

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

denn die zweireihige Untermatrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist regulär, und alle dreireihigen Untermatrizen der gegebenen Matrix sind singulär.

Sätze: Deutet man die Zeilen (bzw. die Spalten) der Matrix $\mathbf{A}$ als Vektoren $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m$ (bzw. $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$), so lassen sich die Sätze über den Rang $\mathrm{Rg}(\mathbf{A})$ der Matrix $\mathbf{A}$ mit den Zeilenvektoren $\mathbf{z}_i$ bequem formulieren:

1. Wenn $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \varrho$, so gibt es mindestens eine linear unabhängige Menge von ϱ Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$, während alle Mengen von σ Zeilenvektoren ($\varrho < \sigma$) von $\mathbf{A}$ linear abhängig sind. Grob gesprochen, ist der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$.

Daraus folgt:

2. $\mathrm{Dim}\, \mathscr{L}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A})$.

3. Der Rang einer Matrix $\mathbf{A}$ bleibt ungeändert

a) beim Vertauschen zweier Zeilen von $\mathbf{A}$,
b) bei Multiplikation einer Zeile von $\mathbf{A}$ mit einer Zahl $c \neq 0$,
c) bei Addition eines beliebigen Vielfachen einer Zeile von $\mathbf{A}$ zu einer anderen Zeile von $\mathbf{A}$,
d) beim Transponieren von $\mathbf{A}$ (Die Zeilenvektoren der zu $\mathbf{A}$ *transponierten Matrix* $\mathbf{A}^T$ sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$.).

Wegen $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^T)$ gelten die oben für Zeilen ausgesprochenen Sätze auch für Spalten.

Berechnen des Ranges. Die Ermittlung des Ranges Rg (**A**) der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik}) \neq \mathbf{0}$ läuft darauf hinaus, die Matrix durch Anwendung des Satzes 3 zu überführen in eine ranggleiche Matrix $\mathbf{A}'$ folgender Gestalt:

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cccccccc} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1\varrho} & a'_{1,\varrho+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2\varrho} & a'_{2,\varrho+1} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & & a'_{\varrho\varrho} & a'_{\varrho,\varrho+1} & & a'_{\varrho n} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} \varrho \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} (m-\varrho) \text{ Zeilen} \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\varrho \text{ Spalten}} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(n-\varrho) \text{ Spalten}}$$

in der a) alle unterhalb der Hauptdiagonalen stehenden Elemente null sind, b) entweder alle Elemente der letzten $(m - \varrho)$ Zeilen verschwinden oder $m = \varrho$ ist, und c) die Hauptdiagonalelemente $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{\varrho\varrho}$ sämtlich von null verschieden sind.

Wendet man die Definition des Ranges auf die Matrix $\mathbf{A}'$ an, so erhält man unmittelbar Rg $(\mathbf{A}') = \varrho$ (Anzahl der von null verschiedenen Hauptdiagonalelemente) und damit Rg $(\mathbf{A}) =$ Rg $(\mathbf{A}') = \varrho$.

Beim Überführen von $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ in eine ranggleiche Matrix $\mathbf{A}'$ der gewünschten Gestalt – der sogenannten *Trapezgestalt* – geht man wie folgt vor:

(1) Da nicht alle Elemente von **A** null sind, läßt sich – gegebenenfalls durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen – erreichen, daß das erste Hauptdiagonalelement $a'_{11} \neq 0$ ist.

(2) Durch Addition der mit geeigneten Faktoren multiplizierten ersten Zeile zu den anderen Zeilen läßt sich stets erreichen, daß alle unterhalb a'_{11} stehenden Elemente verschwinden.

(3) Nun ist entweder die gewünschte Gestalt bereits hergestellt, oder es gibt in den Zeilen 2 bis m noch mindestens ein von null verschiedenes Element, das – gegebenenfalls durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen – an die zweite Stelle der Hauptdiagonalen gebracht werden kann. Dann führt man wieder Schritt (2), angewandt auf die zweite Zeile, aus und erreicht, daß alle unterhalb vom zweiten Hauptdiagonalelement stehenden Elemente verschwinden, usw., bis man die gewünschte Gestalt nach endlich vielen Schritten erreicht. Man nennt dieses Verfahren den *Gaußschen Algorithmus*.

Beispiel:

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Matrix wurde der Satz 3b als Rechenvorteil genutzt (Multiplikation der 2. Zeile mit 1/7); mit Hilfe dieser Regel läßt sich auch das Rechnen mit Brüchen bei der Bestimmung des Ranges einer Matrix vermeiden. Bei Matrizen mit betragsgroßen Elementen kann man Satz 3c benutzen, um zunächst eine ranggleiche Matrix mit betragskleineren Elementen herzustellen.

2.4.4.2.4. Elementare Matrizenalgebra

Gleichheit von Matrizen. Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ vom Typ (r, s) und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom Typ (ϱ, σ) heißen *gleich* genau dann, wenn sie vom selben Typ sind und in allen an gleichen Stellen stehenden Elementen übereinstimmen, d. h., wenn $r = \varrho$ und $s = \sigma$ und $a_{ik} = b_{ik}$ für alle i und alle k. Man schreibt dann $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Summe typengleicher Matrizen. Die *Summe* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ zweier typengleicher Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ ist die Matrix $\mathbf{C} = (c_{ik})$ desselben Typs mit $c_{ik} \overset{\text{def}}{=} a_{ik} + b_{ik}$ für alle i und alle k. Die Addition typengleicher Matrizen geschieht somit elementweise.

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl. Das *Produkt* einer Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ mit einer reellen Zahl λ ist die Matrix $\lambda\mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} (\lambda a_{ik})$; d. h., die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl geschieht elementweise.

Eigenschaften der Addition und der Multiplikation mit Zahlen:

1. Die Addition typengleicher Matrizen ist *assoziativ, kommutativ* und *umkehrbar*. Die Gleichung $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ mit den typengleichen Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ hat als eindeutige Lösung $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} (b_{ik} - a_{ik})$, die sogenannte *Differenz* von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{A}$.

2. Es gibt unter den Matrizen gleichen Typs genau ein bezüglich der Addition neutrales Element, die sogenannte *Nullmatrix* $\mathbf{0}$, deren Elemente sämtlich null sind.

3. Es gibt zu jeder Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ eine bezüglich der Addition inverse Matrix, die sogenannte *zu* $\mathbf{A}$ *entgegengesetzte Matrix* $-\mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} (-a_{ik})$. In Übereinstimmung mit der Definition der Differenz wird gesetzt $\mathbf{0} - \mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} -\mathbf{A}$. Weiter gelten: $\mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ und $-(-\mathbf{A}) = \mathbf{A}$.

4. Die Multiplikation einer Matrix $\mathbf{A}$ mit reellen Zahlen λ, μ gehorcht den Regeln: $(\lambda\mu)\,\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$, $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$. Weiter ist $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ und $(-1) \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

5. Addition und Multiplikation mit Zahlen hängen über Distributivgesetze zusammen; für Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gleichen Typs und beliebige reelle Zahlen λ, μ gelten:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\,\mathbf{A} &= \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A},\\ \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Zusammengefaßt sagen die Eigenschaften 1 bis 5 aus, daß die Menge aller typengleichen Matrizen bezüglich der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen Vektorraum bildet (siehe 2.4.4.1.).

Multiplikation verketteter Matrizen. Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ vom Typ (m, n) und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom Typ (r, s) heißen in dieser Reihenfolge *verkettet*, wenn $n = r$ ist, d. h., wenn die Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Das *Produkt* $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ zweier in dieser Reihenfolge verketteter Matrizen ist die Matrix $\mathbf{C} = (c_{ik})$ vom Typ (m, s) mit $c_{ik} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, d. h., das in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der *Produktmatrix* stehende Element ergibt sich als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von $\mathbf{A}$ mit dem k-ten Spaltenvektor von $\mathbf{B}$.

Beispiel:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 17 & 17 & 27 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation:

1. Die Multiplikation verketteter Matrizen ist *assoziativ*.

2. Hingegen ist die Multiplikation *nicht kommutativ*. So ist im obigen Beispiel $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ nicht bildbar, da die Matrizen in dieser Reihenfolge nicht verkettet sind. Auch wenn beide Produkte $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ existieren, sind sie i. allg. voneinander verschieden.

3. Es gibt *Nullteiler*, d. h., Matrizen $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, deren Produkt die Nullmatrix ist, z. B.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ 16 & 8 & 24 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich darf aus $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ nicht auf $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ geschlossen werden, und analog kann man aus $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}\,\mathbf{C}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ i. allg. *nicht* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ folgern.

4. Es gibt eine bezüglich der Multiplikation neutrale Matrix, die sogenannte n-reihige quadratische *Einheitsmatrix* $\mathbf{E}_n$. Für Matrizen $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) gilt dann: $\mathbf{A}\,\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_m\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

5. Addition und Multiplikation von Matrizen hängen über *Distributivgesetze* zusammen: Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ typengleich und verkettet mit $\mathbf{C}$, so gilt $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,\mathbf{C}$; ist $\mathbf{C}$ verkettet mit den typengleichen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, so gilt $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C}\,\mathbf{A} + \mathbf{C}\,\mathbf{B}$.

In der Menge der quadratischen n-reihigen Matrizen sind sowohl Addition als auch Multiplikation unbeschränkt ausführbar, da je zwei (n, n)-Matrizen sowohl typengleich als auch verkettet sind. Diese Menge bildet bezüglich Addition und Multiplikation einen *Ring*, einen sogenannten vollen *Matrizenring*.

6. Für n-reihige quadratische Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ gilt weiter: $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

7. Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ verkettete Matrizen, so gilt für die transponierten Matrizen (vgl. 2.4.4.2.3.) $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Invertierung. Fragt man nach der Existenz eines zur n-reihigen quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ bezüglich der Multiplikation inversen Elementes $\mathbf{A}^{-1}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$, so ist wegen Eigenschaft 6 die Regularität von $\mathbf{A}$ eine notwendige Bedingung, denn im Falle der Singularität von $\mathbf{A}$ wäre $\det(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 0 \neq 1 = \det \mathbf{E}_n$. Die Regularität von $\mathbf{A}$ ist aber auch hinreichend für die Existenz von $\mathbf{A}^{-1}$.

Satz: Ist $\mathbf{A}$ eine n-reihige Matrix, so ist ihre Regularität notwendig und hinreichend für die Existenz einer Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$. Unter diesen Bedingungen ist die *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ eindeutig bestimmt, und es gilt auch $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Weiterhin gilt für (n, n)-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1} \quad \text{und} \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

Berechnung der Inversen von $\mathbf{A}$

1. Methode: Der unbestimmte Ansatz $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ führt auf n lineare Gleichungssysteme mit je n Variablen (s. 2.4.4.3.3.). Die Lösung jedes der n Gleichungssysteme liefert eine Spalte der gesuchten Matrix $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

2. Methode: Es ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

wobei A_{ik} die zum Element a_{ik} von $\mathbf{A}$ gehörende Adjunkte ist (s. 2.4.4.2.2.). Daß diese Matrix die Gleichung $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ löst, erkennt man sofort durch Bildung von $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}$ unter Benutzung des Laplaceschen Entwicklungssatzes (s. 2.4.4.2.2.).

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösen von Matrizengleichungen. Jede Matrizengleichung mit der Variablen $\mathbf{X}$, die sich unter Verwendung der für Matrizen gültigen Rechenregeln auf die Gestalt $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$ bringen läßt, kann mit Hilfe des unbestimmten Ansatzes weiter behandelt werden. Die Auswertung des unbestimmten Ansatzes führt auf lineare Gleichungssysteme für die Spalten bzw. für die Zeilen der gesuchten Matrix $\mathbf{X}$ (s. 2.4.4.3.). Für die Gleichung $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$ sind folgende Lösungsfälle möglich:

1. die Gleichung hat keine Lösung. Dies tritt sicher ein, wenn Typ $\mathbf{A} = (m, n)$, Typ $\mathbf{B} = (r, s)$ und $m \neq r$;

2. die Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Dies tritt sicher ein, wenn Typ $\mathbf{A} = (m, n)$, Typ $\mathbf{B} = (m, s)$ und $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{AB}) < n$;

3. die Gleichung ist eindeutig lösbar. Dies tritt sicher ein, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ n-reihige quadratische Matrizen sind und $\mathbf{A}$ regulär ist, denn dann hat die Gleichung $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$ die eindeutige Lösung $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.

2.4.4.2.5. Spezielle Klassen von Matrizen

Definitionen: Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt

symmetrische Matrix, wenn gilt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$,
schiefsymmetrische Matrix, wenn gilt $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$,
orthogonale Matrix, wenn $\mathbf{A}$ regulär und $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ mit komplexen Elementen heißt

hermitesche Matrix, wenn gilt $\mathbf{A}^T = \overline{\mathbf{A}}$,
schiefhermitesche Matrix, wenn gilt $\mathbf{A}^T = -\overline{\mathbf{A}}$,
unitäre Matrix, wenn $\mathbf{A}$ regulär und $\mathbf{A}^T = \overline{\mathbf{A}}^{-1}$.

Dabei ist $\overline{\mathbf{A}}$ die zu $\mathbf{A}$ konjugiert komplexe Matrix; $\overline{\mathbf{A}}$ entsteht aus $\mathbf{A}$, indem in $\mathbf{A}$ jedes Element durch die zu ihm konjugiert komplexe Zahl ersetzt wird.

Beispielsweise ist $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ eine symmetrische, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ eine schiefsymmetrische, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix.

Sätze:

1. Für jede Matrix $\mathbf{A}$ sind $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}$ symmetrische Matrizen.

2. Jede quadratische Matrix $\mathbf{A}$ läßt sich in eine Summe aus einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix zerlegen:

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

3. Mit $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind auch $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ und $\mathbf{A}^{-1}$ orthogonale (n, n)-Matrizen.

4. Die Matrix $\mathbf{A}$ ist orthogonal genau dann, wenn die Zeilenvektoren (bzw. die Spaltenvektoren) von $\mathbf{A}$ ein Orthonormalsystem bilden.

5. Für orthogonale Matrizen ist $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

6. Jede zweireihige orthogonale Matrix hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varepsilon\sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{pmatrix}$$

für $\varepsilon = \pm 1$ und einen gewissen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$.

2.4.4.3. Lineare Gleichungssysteme

2.4.4.3.1. Begriff eines linearen Gleichungssystems. Lösung. Lösungsmenge. Ein System von m linearen Gleichungen (s. 2.4.2.3.) mit n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

heißt lineares Gleichungssystem oder genauer *lineares* (m, n)*-Gleichungssystem*; die a_{ik} sind die *Koeffizienten*, die b_i die *Absolutglieder* des Systems. Sind alle $b_i = 0$, so liegt ein *homogenes* lineares Gleichungssystem vor, andernfalls spricht man von einem *inhomogenen* linearen Gleichungssystem. Jedes geordnete n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Zahlen heißt eine *Lösung* des linearen (m, n)-Gleichungssystems, wenn seine Elemente, in der gegebenen Reihenfolge für die Variablen eingesetzt, jede der m Gleichungen erfüllen und den vorgegebenen Variabilitätsbereichen angehören. (Wenn nicht ausdrücklich anders vorausgesetzt, sind die Variabilitätsbereiche aller Variablen gleich der Menge der reellen Zahlen.) Die Menge aller Lösungen des Systems nennt man seine *Lösungsmenge*. Zwei lineare Gleichungssysteme heißen *äquivalent* genau dann, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben.

2.4.4.3.2. Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems. Homogene lineare Gleichungssysteme sind stets lösbar, denn das Tupel $(0, 0, \ldots, 0)$ befriedigt alle Gleichungen des Systems. Man nennt $(0, 0, \ldots, 0)$ die *triviale Lösung*. Die Frage nach dem Lösungsverhalten eines linearen homogenen Gleichungssystems ist dann gleichbedeutend mit der Frage, ob es außer der trivialen Lösung noch weitere, nichttriviale Lösungen gibt oder nicht. Zum Beispiel hat das homogene lineare (2, 3)-Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

die Lösungsmenge $L = \{\lambda(1, -1, 1);\ \lambda \text{ beliebig reell}\}$; anders geschrieben, es ist $x_1 = \lambda, x_2 = -\lambda$, $x_3 = \lambda$ für jede reelle Zahl λ eine Lösung des Systems.

Hingegen hat das homogene lineare (2, 2)-Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung; $L = \{(0, 0)\}$.

Unter den inhomogenen linearen Gleichungssystemen gibt es auch unlösbare Systeme, wie z. B.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 7 \end{aligned}$$

hat die *eindeutige Lösung* $x_1 = 1, x_2 = -3$ bzw. $L = \{(1, -3)\}$; dagegen ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -5 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

nicht eindeutig lösbar; es ist $x_1 = -2 + \lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = 1 + \lambda$ für jede reelle Zahl λ eine Lösung des Systems:

$$L = \{(-2, 0, 1) + \lambda(1, -1, 1);\ \lambda \text{ beliebig reell}\}.$$

Die Theorie linearer Gleichungssysteme kann mit Hilfe von Matrizen sehr übersichtlich und einfach dargestellt werden. Mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

läßt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

in der Form

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

schreiben.

Das $\boxed{\text{Lösungsverhalten}}$ dieses Systems hängt nun allein ab vom Rang Rg(**A**) der *Koeffizientenmatrix* **A** des Systems und vom Rang Rg(**A**, **b**) der sogenannten *erweiterten Koeffizientenmatrix*[1] (**A**, **b**).

	$\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ m Gleichungen n Variable	Spezialfall $\mathbf{b} = \mathbf{o}$: $\mathbf{A\,x} = \mathbf{o}$ (homogenes System)
1. $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A})$	System unlösbar	Dieser Fall kann für $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ nicht eintreten; d. h., homogene Systeme sind stets lösbar
2. $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \varrho$	System lösbar	
a) $\varrho = n$	Lösung eindeutig	System nur trivial lösbar
b) $\varrho < n$	Lösung nicht eindeutig	System besitzt nichttriviale Lösungen

Über die *Struktur der Lösungsmenge* gibt folgender **Satz** Aufschluß:

1. Die Lösungsmenge L eines homogenen linearen (m, n)-Gleichungssystems $\mathbf{A\,x} = \mathbf{o}$ ist ein Untervektorraum des Vektorraumes der geordneten n-Tupel reeller Zahlen, d. h., jede Linearkombination von Lösungen des Systems ist wieder eine Lösung des Systems. Ist $\mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}) = \varrho$, so ist $\dim L = n - \varrho$, d. h., im Falle $\varrho < n$ können $(n - \varrho)$ Variable frei gewählt und alle Lösungen des Systems durch Linearkombination aus $(n - \varrho)$ linear unabhängigen Lösungen gewonnen werden.

2. Die Lösungsmenge L des linearen (m, n)-Gleichungssystems $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ besteht aus allen n-Tupeln der Gestalt $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^*$, wobei $\mathbf{x}_0$ eine spezielle Lösung dieses Systems ist und $\mathbf{x}^*$ alle Lösungen des dazugehörigen homogenen Systems $\mathbf{A\,x} = \mathbf{o}$ durchläuft. Es ist also:

$$L = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^*;\quad \mathbf{x}_0 \text{ fest}, \mathbf{A\,x}_0 = \mathbf{b} \text{ und } \mathbf{x}^* \in L_{\text{homogen}}\}.$$

(Zur Illustration dieses Satzes betrachte man das erste und letzte der obigen Beispiele.)

2.4.4.3.3. Lösen eines linearen Gleichungssystems

Gaußscher Algorithmus. Das Bestimmen der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems beruht darauf, daß man vom gegebenen System durch äquivalente Umformungen übergeht zu einem dazu äquivalenten System, welches „einfacher" lösbar ist als das vorgegebene System. Äquivalente Umformungen eines linearen Gleichungssystems sind:

(1) Vertauschen zweier Gleichungen des Systems miteinander;

(2) Multiplikation einer Gleichung des Systems mit einer reellen Zahl $c \neq 0$;

(3) Addition eines beliebigen Vielfachen einer Gleichung des Systems zu einer anderen Gleichung des Systems.

Diese äquivalenten Umformungen eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ bewirken in der Koeffizientenmatrix **A** und in der erweiterten Koeffizientenmatrix (**A**, **b**) lediglich ranginvariante Umformungen, nämlich Zeilenvertauschungen, Multiplikation von Zeilen mit von null verschiedenen Faktoren und Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile. Auch umgekehrt gilt: Überführt man die Matrizen **A** und (**A**, **b**) in ranggleiche Matrizen **A**′ und (**A**′, **b**′) von Trapezgestalt, indem man die zulässigen ranginvarianten Umformungen nur auf Zeilen anwendet, so sind $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{A'\,x} = \mathbf{b'}$ äquivalente Systeme. Im Falle der Lösbarkeit des gegebenen Systems $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ (es sei $\mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \varrho$) kann das dazu äquivalente System $\mathbf{A'\,x} = \mathbf{b'}$ wegen der Trapezgestalt von **A**′ und (**A**′, **b**′) geschrieben werden in der Form:

$$\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1\varrho}x_\varrho &= b'_1 - a'_{1,\varrho+1}x_{\varrho+1} - \dots - a'_{1n}x_n \\
a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2\varrho}x_\varrho &= b'_2 - a'_{2,\varrho+1}x_{\varrho+1} - \dots - a'_{2n}x_n \\
\dots \quad . \quad & \quad . \quad . \quad \dots \quad . \\
a'_{\varrho\varrho}x_\varrho &= b'_\varrho - a'_{\varrho,\varrho+1}x_{\varrho+1} - \dots - a'_{\varrho n}x_n
\end{aligned}$$

[1]) Die Matrix (**A**, **b**) entsteht durch rechtsseitiges Anfügen der Matrix **b** an die Matrix **A**.

Dieses System nennt man gelegentlich das *gestaffelte System.* Wegen $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \varrho$ ist die Lösungsmenge eine $(n - \varrho)$-dimensionale Mannigfaltigkeit; man kann mithin $(n - \varrho)$ Variable $x_{\varrho+1}, \ldots, x_n$ beliebig wählen: $x_{\varrho+1} = \lambda_1, x_{\varrho+2} = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_{n-\varrho}$; die übrigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ ergeben sich sodann sukzessiv aus dem gestaffelten System als Funktionen der Parameter λ_i: $x_k = f_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-\varrho}), k = 1, 2, \ldots, \varrho$.

Dieses Lösungsverfahren nennt man den *Gaußschen Algorithmus.* Sollten zur Gewinnung der Trapezgestalt der Matrizen $\mathbf{A}$ bzw. $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ noch Spaltenvertauschungen erforderlich sein, so läuft dies auf eine Umnumerierung der Variablen im Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hinaus.

Beispiele:

1.
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8 \end{aligned}$$

Es ist

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus entnimmt man:

a) $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 2$, d. h., das Gleichungssystem ist lösbar;

b) die Lösung ist nicht eindeutig; es können $4 - 2 = 2$ Variable frei gewählt werden;

c) das gestaffelte System hat die Gestalt

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &= -1 - 2x_3 \\ x_2 &= -1 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Setzt man $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$ (λ_1, λ_2 beliebig reell), so erhält man $x_2 = -1 + \lambda_1 + \lambda_2$ und $x_1 = -5 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2$, also die Lösungsmenge

$$L = \{(-5, -1, 0, 0) + \lambda_1(2, 1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 0, 1);\ \lambda_i \text{ beliebig reell}\}$$

Das dazu gehörende homogene lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$ hat dann offensichtlich die Lösungsmenge

$$L_{\text{homogen}} = \{\lambda_1(2, 1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 0, 1);\ \lambda_i \text{ beliebig reell}\}.$$

2.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Es ist

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Spaltentausch)

Daraus entnimmt man: $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = 2$; $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$, folglich ist das Gleichungssystem nicht lösbar: $L = \emptyset$.

3.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 13 \\ 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Es ist

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\2&3&-1&13\\0&3&4&5\\-3&1&4&-20\end{pmatrix}=\operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\0&5&-3&-11\\0&3&4&5\\0&-2&7&16\end{pmatrix}=\operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\0&-2&7&16\\0&0&29&58\\0&0&29&58\end{pmatrix}$$

$$=\operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1&-1&1&12\\0&-2&7&16\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Daraus entnimmt man:

a) $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$, d. h., das Gleichungssystem ist lösbar;

b) die Lösung ist eindeutig;

c) das gestaffelte System lautet:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 12 \\ -2x_2 + 7x_3 &= 16 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(A, B, C, D)

(Y)

$C(sI-A)^{-1}B+D$

$G(s) =$

woraus man $L = \{(9, -1, 2)\}$ ermittelt.
Das hierzu gehörende homogene Gleichungssystem $\mathbf{A\,x} = \mathbf{o}$ hat nur die triviale Lösung.

Cramersche Regel. Hat man den Spezialfall eines linearen (n, n)-Gleichungssystems $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ mit $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = n$, so kann man die eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x}$ wegen der Regularität von $\mathbf{A}$ auch in der Form $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$ darstellen. Ausgeschrieben lautet das:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

wobei A_{ik} die Adjunkte des Elementes a_{ik} der Matrix $\mathbf{A}$ ist.
Die i-te Koordinate x_i ergibt sich mithin nach der Formel

$$x_i=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\,(A_{1i}b_1+A_{2i}b_2+\dots+A_{ni}b_n)=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&b_1&\dots&a_{1n}\\a_{21}&\dots&b_2&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&\dots&b_n&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=\frac{D_i}{D},$$

wobei die im Zähler stehende Determinante D_i dadurch aus $D = \det\mathbf{A}$ hervorgeht, daß man deren i-te Spalte durch die Spalte der Absolutglieder ersetzt. Mithin erhält man für das lineare (n, n)-Gleichungssystem $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ mit $D = \det\mathbf{A} \neq 0$ die eindeutig bestimmte Lösung $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_i = D_i/D$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7; \end{aligned} \qquad D=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-2&1\\3&2&2\end{vmatrix}=13,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}9&1&3\\-2&-2&1\\7&2&2\end{vmatrix}=-13, \qquad D_2=\begin{vmatrix}2&9&3\\1&-2&1\\3&7&2\end{vmatrix}=26,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&9\\1&-2&-2\\3&2&7\end{vmatrix}=39, \qquad x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{13}{13}=-1,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{26}{13}=2, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{39}{13}=3.$$

2.4.4.4. Lineare Abbildungen

2.4.4.4.1. Grundbegriffe

Begriff einer linearen Abbildung. Es seien $\mathbf{V} = [V, +, \cdot]$ und $\mathbf{V}' = [V', +, \cdot]$ zwei Vektorräume. Jede eindeutige Abbildung φ von V in V' heißt *lineare Abbildung* von $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}'$ genau dann, wenn gilt:

(1) $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi\mathbf{x} + \varphi\mathbf{y}$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;

(2) $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in V$ und alle reellen λ.

(Dabei können durchaus die Operationen in $\mathbf{V}'$ anders definiert sein als diejenigen von $\mathbf{V}$, obwohl sie aus Gründen der Einfachheit beide mit demselben Symbol „+" bzw. „·" bezeichnet wurden.)

Ist $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$, so bezeichnet man φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ auch als einen *linearen Operator* von $\mathbf{V}$ oder eine *lineare Transformation* von $\mathbf{V}$.

Ist $\mathbf{x}' = \varphi\,\mathbf{x}$, so nennt man $\mathbf{x}'$ *das Bild von* $\mathbf{x}$ *bezüglich* φ, $\mathbf{x}$ *ein Urbild* bzw. *ein Original von* $\mathbf{x}'$ *bezüglich* φ, und die Menge $\{\mathbf{x} \in V : \varphi\,\mathbf{x} = \mathbf{x}'\}$ heißt *das vollständige Urbild* bzw. *das vollständige Original* von $\mathbf{x}'$ *bezüglich* φ. Ist M eine Teilmenge von V, so versteht man unter φM die Menge der Bilder aller Elemente von M. Ist M' eine Teilmenge von V', so heißt $M \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in V : \varphi\,\mathbf{x} \in M'\}$ das vollständige Urbild von M' bezüglich φ.

Beispiele:

1. Die Abbildung φ_1: $\mathbf{V}^3 \to \mathbf{V}^2$ mit $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ ist linear.

2. Die Abbildung φ_2 des $\mathbf{V}^n$ in den Vektorraum der Polynome höchstens $(n - 1)$-ten Grades mit $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2t + x_3t^2 + \ldots + x_nt^{n-1}$ ist linear.

3. Die Abbildung φ_3 des Vektorraumes $\mathbf{D}$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen in sich mit $\varphi_3 f = f'$ für alle Funktionen $f \in D$ ist linear; φ_3 ist ein linearer Operator von $\mathbf{D}$.

4. Die Abbildung φ_4: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ mit $\varphi_4\,\mathbf{x} = \mathbf{o}'$ für alle $\mathbf{x} \in V$ ($\mathbf{o}'$ der Nullvektor von $\mathbf{V}'$) ist linear; man nennt sie die *Nullabbildung*.

5. Die Abbildung φ_5: $\mathbf{V}^3 \to \mathbf{V}^2$ mit $\varphi_5(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1)$ ist nicht linear, denn es ist

$$\begin{aligned}\varphi_5(x_1, x_2, x_3) + \varphi_5(y_1, y_2, y_3) &= (x_1, 1) + (y_1, 1) = (x_1 + y_1, 2) \neq (x_1 + y_1, 1)\\ &= \varphi_5[(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)].\end{aligned}$$

Eigenschaften linearer Abbildungen. Für jede lineare Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ gilt:

1. Das Bild des Nullvektors $\mathbf{o}$ von $\mathbf{V}$ ist stets der Nullvektor $\mathbf{o}'$ von $\mathbf{V}'$: $\varphi\,\mathbf{o} = \mathbf{o}'$.

2. Eine Linearkombination zwischen Elementen aus V wird stets abgebildet auf dieselbe Linearkombination zwischen den entsprechenden Bildelementen in V'. Daraus folgt für jede Teilmenge $M \subseteq V$: Das Bild der linearen Hülle $\mathscr{L}(M)$ ist gleich der linearen Hülle der Bildmenge φM von M: $\varphi\mathscr{L}(M) = \mathscr{L}(\varphi M)$.

Ist insbesondere B eine Basis von $\mathbf{V}$, so gilt mithin $\varphi V = \varphi\mathscr{L}(B) = \mathscr{L}(\varphi B)$. Daraus folgt, daß eine lineare Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ bereits durch die Bildmenge φB einer Basis B von $\mathbf{V}$ eindeutig bestimmt ist.

3. Ist S eine linear abhängige Menge von Vektoren aus $\mathbf{V}$, so ist φS eine linear abhängige Menge von $\mathbf{V}'$. Hingegen können linear unabhängige Mengen durch φ in linear abhängige Mengen überführt werden. Deshalb ist das Bild einer Basis B von $\mathbf{V}$ im allgemeinen nur ein Erzeugendensystem von $\varphi\mathbf{V}$.

4. Ist $\mathbf{U} = [U, +, \cdot]$ ein Untervektorraum von $\mathbf{V}$, so ist $\varphi\mathbf{U} \overset{\text{def}}{=} [\varphi U, +, \cdot]$ ein Untervektorraum von $\mathbf{V}'$. Insbesondere ist demnach der „Wertebereich" $\varphi\mathbf{V}$ der Abbildung φ ein Vektorraum, und wegen $\varphi V \subseteq V'$ ein Untervektorraum von $\mathbf{V}'$. Ist $\mathbf{V}$ endlich-dimensional, so nennt man die Dimension $\operatorname{Dim} \varphi\mathbf{V}$ des Bildraumes $\varphi\mathbf{V}$ den *Rang* der linearen Abbildung φ: $\operatorname{Rang} \varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Dim} \varphi\mathbf{V}$.

5. Ist $\mathbf{U}' = [U', +, \cdot]$ ein Untervektorraum von $\varphi\mathbf{V}$ und U das vollständige Urbild von U' bezüglich φ, so ist $\mathbf{U} = [U, +, \cdot]$ ein Untervektorraum von $\mathbf{V}$.

Grobgesprochen besagen die Eigenschaften 3, 4 und 5, daß eine lineare Abbildung die Eigenschaft der linearen Abhängigkeit respektiert und die Unterraumeigenschaft sowohl respektiert als auch reflektiert.

Insbesondere bildet wegen Eigenschaft 5 die Menge K_φ aller derjenigen Vektoren von $\mathbf{V}$, deren Bild bezüglich φ der Nullvektor von $\mathbf{V}'$ ist, mit den Operationen $+$ und $\cdot$ einen Untervektorraum von $\mathbf{V}$, den sogenannten *Kern* $\mathbf{K}_\varphi$ der linearen Abbildung φ:

$$\text{Kern}\,\varphi = \mathbf{K}_\varphi \overset{\text{def}}{=} [K_\varphi, +, \cdot] \quad \text{mit} \quad K_\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in V: \varphi\mathbf{x} = \mathbf{o}'\}.$$

Ist $\mathbf{K}_\varphi$ endlich-dimensional, so nennt man seine Dimension den *Defekt* der linearen Abbildung φ: $\text{Defekt}\,\varphi \overset{\text{def}}{=} \text{Dim}\,\mathbf{K}_\varphi$. Ist φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ und $\mathbf{V}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so gilt: $\text{Rang}\,\varphi + \text{Defekt}\,\varphi = \text{Dim}\,\mathbf{V}$.

Beispiele: Bezüglich der oben angeführten Beispiele linearer Abbildungen gilt:

$K\varphi_1 = \{(0, 0, x_3);\ x_3 \text{ beliebig reell}\}$; Defekt $\varphi_1 = 1$; Rang $\varphi_1 = 2$.

$K\varphi_2 = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$; Defekt $\varphi_2 = 0$; Rang $\varphi_2 = n$.

$K\varphi_3 = \{f \text{ mit } f = \text{const}\}$; Defekt $\varphi_3 = 1$; Rang φ_3 nicht definiert.

$K\varphi_4 = V$; Defekt $\varphi_4 = \text{Dim}\,\mathbf{V}$; Rang $\varphi_4 = 0$ (falls $\mathbf{V}$ endlich-dimensional).

Der Kern einer linearen Abbildung bewirkt eine Klasseneinteilung von V in Klassen bildgleicher Elemente; zwei Elemente aus V gehören zur selben Klasse, d. h., sie haben dasselbe Bild bezüglich φ genau dann, wenn ihre Differenz im Kern φ liegt.

Umkehrbar eindeutige lineare Abbildungen. Eine lineare Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ heißt *umkehrbar eindeutig* genau dann, wenn aus $\varphi\mathbf{x} = \varphi\mathbf{y}$ stets $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ folgt. Ein umkehrbar eindeutiger linearer Operator von $\mathbf{V}$ heißt auch *regulärer Operator* von $\mathbf{V}$; die nicht regulären Operatoren von $\mathbf{V}$ nennt man *singuläre Operatoren* von $\mathbf{V}$.

Danach ist von den oben genannten Beispielen linearer Abbildungen nur φ_2 umkehrbar eindeutig; φ_1 z. B. ist nicht umkehrbar eindeutig, denn es ist $\varphi_1(1, 1, 1) = \varphi_1(1, 1, 5)$, obwohl $(1, 1, 1) \neq (1, 1, 5)$.

Satz: Für jede lineare Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ sind folgende Aussagen paarweise äquivalent:

(1) φ ist umkehrbar eindeutig;

(2) für jede linear unabhängige Menge S von $\mathbf{V}$ ist φS eine linear unabhängige Menge von $\mathbf{V}'$;

(3) $K_\varphi = \{\mathbf{o}\}$.

Aus (2) folgt insbesondere, daß das Bild einer Basis von $\mathbf{V}$ bezüglich einer umkehrbar eindeutiger Abbildung φ wieder eine Basis von $\varphi\mathbf{V}$ ist. Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathbf{V}$ unc eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ gilt: $\text{Dim}\,\varphi\mathbf{V} = \text{Dim}\,\mathbf{V}$.

2.4.4.4.2. Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen. Es seien $\mathbf{V}$ und $\mathbf{V}'$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume; $\text{Dim}\,\mathbf{V} = n$, $\text{Dim}\,\mathbf{V}' = m$, $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis von $\mathbf{V}$, $B' = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ eine solche von $\mathbf{V}'$.

Jede lineare Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ ist bereits eindeutig bestimmt durch die Bilder $\varphi\mathbf{a}_1, \varphi\mathbf{a}_2, \ldots, \varphi\mathbf{a}_n$ der Vektoren von B, denn es ist jeder Vektor $\mathbf{x} \in V$ Linearkombination der Vektoren von B und sein Bild $\varphi\mathbf{x}$ demzufolge die entsprechende Linearkombination aus den Vektoren von φB. Beschreibt man die Bilder $\varphi\mathbf{a}_1, \varphi\mathbf{a}_2, \ldots, \varphi\mathbf{a}_n$ der Vektoren von B durch Koordinaten bezüglich der Basis B' von $\mathbf{V}'$, so ist die lineare Abbildung φ mithin eindeutig bestimmt durch die $n \cdot m$ Koordinaten der Vektoren $\varphi\mathbf{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bezüglich B', die man in einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ so anordnen kann, daß die k-te Spalte von $\mathbf{A}$ die Koordinaten des Vektors $\varphi\mathbf{a}_k$ bezüglich B' enthält.

Umgekehrt kann man jeder (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ bezüglich eines festen Basenpaares (B, B') eindeutig eine lineare Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ zuordnen, wenn man die Spalten von $\mathbf{A}$ als Koordinaten der Bilder der Vektoren von B bezüglich B' auffaßt.

Es gilt also:

Zwischen der Menge der linearen Abbildungen φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ mit $\text{Dim}\,\mathbf{V} = n$, $\text{Dim}\,\mathbf{V}' = m$, und der Menge der (m, n)-Matrizen besteht bezüglich fester Basen B von $\mathbf{V}$ und B' von $\mathbf{V}'$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Ist $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ und $\varphi\mathbf{a}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})_{B'}$, so wird φ beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Da $\mathbf{A}$ noch von dem gewählten Basenpaar (B, B') abhängt, schreibt man genauer $\mathbf{A}_{(B, B')}$.

Beispiel: Die lineare Abbildung φ: $\mathbf{V}^4 \to \mathbf{V}^3$ sei gegeben durch die Bilder der Vektoren einer Basis B von $\mathbf{V}^4$:

$$\varphi(1, -2, 0, 3) = (-9, 7, \;\; 1); \qquad \varphi(0, \;\; 0, 1, -1) = (3, -3, -3);$$

$$\varphi(1, \;\; 0, 3, 0) = (\;\; 4, 0, -2); \qquad \varphi(1, -1, 1, \;\; 0) = (0, \;\; 1, -1).$$

(Die Koordinaten beziehen sich auf die kanonische Basis des $\mathbf{V}^4$ bzw. auf die des $\mathbf{V}^3$). Dann erhält man die φ bezüglich des kanonischen Basenpaares (vgl. 2.4.4.1.4.) beschreibende Matrix $\mathbf{A}$, indem man die φ-Bilder der Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ der kanonischen Basis von $\mathbf{V}^4$ ermittelt und durch ihre Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbf{V}^3$ beschreibt. Dazu drückt man die $\mathbf{e}_i$ als Linearkombinationen der Vektoren der gegebenen Basis B aus und bekommt die $\varphi\mathbf{e}_i$ als entsprechende Linearkombinationen der gegebenen Vektoren von φB. Man erhält schließlich:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geht man vom Basenpaar (B, B') über zu einem neuen Basenpaar $(\bar{B}, \bar{B}')$, so geht die φ beschreibende Matrix $\mathbf{A}_{(B, B')}$ über in

$$\mathbf{A}_{(\bar{B}, \bar{B}')} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{(B, B')}\,\mathbf{S},$$

wobei $\mathbf{S}$ (bzw. $\mathbf{T}$) spaltenweise aus den Koordinaten der Vektoren von $\bar{B}$ bezüglich B (bzw. $\bar{B}'$ bezüglich B') besteht.

Matrizen gleichen Typs, die auseinander hervorgehen durch rechts- und linksseitige Multiplikation mit regulären Matrizen, heißen *äquivalent*. Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation, die in der Menge der typengleichen Matrizen eine Klasseneinteilung in Klassen äquivalenter Matrizen hervorruft.

Zwei dieselbe lineare Abbildung bezüglich verschiedener Basenpaare beschreibende Matrizen sind demzufolge äquivalent. Da – falls $\mathbf{V} \neq \mathbf{V}'$ – auch umgekehrt äquivalente Matrizen bezüglich geeigneter Basenpaare zur selben linearen Abbildung gehören, kann man sagen: Der linearen Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ entspricht eindeutig eine Klasse äquivalenter Matrizen. Durch die Wahl eines festen Basenpaares (B, B') wird aus der zu φ gehörigen Äquivalenzklasse diejenige Matrix ausgesondert, die φ bezüglich (B, B') beschreibt.

Ist speziell $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$, φ also ein linearer Operator von $\mathbf{V}$, so gilt für zwei den linearen Operator φ bezüglich verschiedener Basen $B, \bar{B}$ beschreibender Matrizen $\mathbf{A}_B$ und $\mathbf{A}_{\bar{B}}$ wegen $B = B'$ und $\bar{B} = \bar{B}'$:

$$\mathbf{A}_{\bar{B}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_B\,\mathbf{S}.$$

Quadratische Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$, für die $\mathbf{A}_2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{S}$ mit einer regulären Matrix $\mathbf{S}$ gilt, heißen *ähnlich*. Auch die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.

Analog zu obigem Satz kann man aussagen: Dem linearen Operator φ von $\mathbf{V}$ entspricht eindeutig eine Klasse ähnlicher Matrizen.

Gewisse Eigenschaften, die allen Matrizen derselben Äquivalenz- bzw. derselben Ähnlichkeitsklasse zukommen, hängen eng mit Eigenschaften der durch sie beschriebenen linearen Abbildungen zusammen. Darüber gibt Auskunft der

Satz:

1. Ist φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ eine lineare Abbildung und $\mathbf{A}_{(B,\, B')}$ die φ bezüglich des Basenpaares (B, B') beschreibende Matrix, so gilt für das Bild $\varphi\mathbf{x}$ eines Elementes $\mathbf{x} \in V$:

$$(\varphi\mathbf{x})_{B'} = \mathbf{A}_{(B,\, B')}\, \mathbf{x}_B,$$

wobei $\mathbf{x}_B$ der Vektor aus den Koordinaten von $\mathbf{x}$ bezüglich B, $(\varphi\mathbf{x})_{B'}$ der Vektor aus den Koordinaten von $\varphi\mathbf{x}$ bezüglich B' ist.

Mit dieser Formel lassen sich neben den Bildern auch die vollständigen Urbilder bestimmen, dies läuft auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems hinaus (s. 2.4.4.3.).

2. Alle Matrizen der zu einer linearen Abbildung φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ $(\mathbf{V} \neq \mathbf{V}')$ gehörenden Äquivalenzklasse haben denselben Rang, und es ist $\mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}\,\varphi$ für alle $\mathbf{A}$ der zu φ gehörenden Äquivalenzklasse.

3. Alle Matrizen der zu einem linearen Operator φ von $\mathbf{V}$ gehörenden Ähnlichkeitsklasse haben denselben Rang, dieselbe Determinante, dieselbe *Spur* (d. i. die Summe der Hauptdiagonalelemente), dasselbe charakteristische Polynom und dieselben Eigenwerte (s. 2.4.4.5.). Insbesondere ist ein linearer Operator regulär genau dann, wenn die Matrizen der ihm zugeordneten Ähnlichkeitsklasse regulär sind.

2.4.4.4.3. Verknüpfungen linearer Abbildungen. Sind $\varphi: \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, $\varphi': \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ und $\psi: \mathbf{V}' \to \mathbf{V}''$ lineare Abbildungen, so definiert man

die *Summe*	$\varphi + \varphi': \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$	durch	$(\varphi + \varphi')\,\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \varphi\mathbf{x} + \varphi'\mathbf{x}$	für alle $\mathbf{x} \in V$;
das *α-fache*	$\alpha\varphi: \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ (α reell)	durch	$(\alpha\varphi)\,\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \alpha(\varphi\mathbf{x})$	für alle $\mathbf{x} \in V$;
das *Produkt*	$\psi\varphi: \mathbf{V} \to \mathbf{V}''$	durch	$(\psi\varphi)\,\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \psi(\varphi\mathbf{x})$	für alle $\mathbf{x} \in V$

(*Hintereinanderausführung* der linearen Abbildungen).

Mit φ, φ' und ψ sind auch $\varphi + \varphi'$, $\alpha\varphi$ (α reell) und $\psi\varphi$ wieder lineare Abbildungen.

Sind $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}''$ endlich-dimensionale Vektorräume mit den Basen B, B', B'', und sind den linearen Abbildungen φ, φ' und ψ in dieser Reihenfolge die Matrizen $\mathbf{A}_{(B,\, B')}$, $\mathbf{A}'_{(B,\, B')}$ und $\mathbf{C}_{(B,B'')}$ zugeordnet, so gehört

zur linearen Abbildung $\varphi + \varphi'$ bezüglich (B, B') die Matrix $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$,
zur linearen Abbildung $\alpha\varphi$ bezüglich (B, B') die Matrix $\alpha\mathbf{A}$,
zur linearen Abbildung $\psi\varphi$ bezüglich (B, B'') die Matrix $\mathbf{CA}$.

Da den Operationen mit linearen Abbildungen die analogen Operationen mit den diesen zugeordneten Matrizen entsprechen, hat die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}'$ dieselbe Struktur wie die Menge der diesen Abbildungen zugeordneten Matrizen. Daraus folgt:

1. Die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}'$ bildet mit der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen Vektorraum.

2. Die Menge der linearen Operatoren von $\mathbf{V}$ bildet mit der Addition und der Multiplikation einen Ring.

2.4.4.4.4. Inverser Operator. Für reguläre Operatoren $\varphi: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ kann man noch die Frage nach einem *zu φ inversen Operator* φ^{-1} mit der Eigenschaft $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$ stellen; dabei ist ε derjenige Operator von $\mathbf{V}$ mit $\varepsilon\mathbf{x} = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in V$ (der sogenannte *identische Operator*). Im Falle $\varphi\mathbf{V} = \mathbf{V}$ gibt es einen solchen zu φ inversen Operator φ^{-1}, man definiert ihn durch: $\varphi^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ genau dann, wenn $\varphi\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Wegen der Regularität von φ ist φ^{-1} dadurch eindeutig bestimmt, und es läßt sich auch zeigen, daß φ^{-1} wieder ein linearer Operator von $\mathbf{V}$ ist. Die Voraussetzung $\varphi\mathbf{V} = \mathbf{V}$ ist notwendig, damit man jedes Element von $\mathbf{V}$ als φ-Bild eines gewissen Elementes von $\mathbf{V}$ auffassen kann. Im Falle eines endlich-dimensionalen Vektorraumes $\mathbf{V}$ ist diese Voraussetzung jedoch stets erfüllt.

Satz: Sind φ, ψ reguläre Operatoren von $\mathbf{V}$ mit $\varphi\mathbf{V} = \psi\mathbf{V} = \mathbf{V}$, so gilt:

1. $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$, d. h., φ und φ^{-1} sind *zueinander invers*.

2. $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$.

3. Gehört zu φ bezüglich der Basis B die Matrix $\mathbf{A}$, so ist φ^{-1} bezüglich dieser Basis die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ zugeordnet.

4. Die Menge der regulären Operatoren von $\mathbf{V}$ bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.

2.4.4.5. Eigenwerte und Eigenvektoren

2.4.4.5.1. Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen. $\mathbf{A}$ sei eine (n, n)-Matrix. Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, für den $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ mit einer geeigneten Zahl λ gilt, heißt *Eigenvektor* von $\mathbf{A}$, und λ heißt der zu diesem Eigenvektor gehörende *Eigenwert* von $\mathbf{A}$.

Die Gleichung $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ ist äquivalent zu $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen nichttriviale Lösungen die gesuchten Eigenvektoren sind. Das Gleichungssystem $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$ hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn der Rang $\operatorname{Rg}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) < n$ ist, d. h., wenn $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ ist. Das Polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ heißt das *charakteristische Polynom* von $\mathbf{A}$, die Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ die *charakteristische Gleichung* von $\mathbf{A}$; ihre Lösungen sind die Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Ist λ_i ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, so sind die nichttrivialen Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$ die zum Eigenwert λ_i gehörenden Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems nennt man auch den zu λ_i gehörenden *Eigenraum* von $\mathbf{A}$, jeder Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ des Eigenraumes ist ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$. (Selbstverständlich sind im Eigenraum die linearen Operationen „+" und „·" definiert.)

Beispiele:

1. Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet man aus

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

zu $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -1$. Der zu $\lambda_1 = 5$ gehörende Eigenraum L_1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \text{also} \quad L_1 = \{\mu(-1, 1);\ \mu \text{ reell}\}.$$

Analog erhält man den zu $\lambda_2 = -1$ gehörenden Eigenraum

$$L_2 = \{\mu(1, 2);\ \mu \text{ reell}\}.$$

2. Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ und mithin die Eigenwerte $\lambda_1 = 2 + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = 2 - \mathrm{i}$. Zu λ_1 gehören die Eigenvektoren $\mathbf{x}_1 = \mu(1, \mathrm{i} - 1)$, zu λ_2 die Eigenvektoren $\mathbf{x}_2 = \mu(-1, \mathrm{i} + 1)$, μ beliebig reell $\neq 0$.

3. Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; man erhält daraus die Eigenräume $L_1 = L_2 = \{\mu(1, 1);\ \mu \text{ beliebig reell}\}$.

2.4.4.5.2. Sätze über Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und mithin dieselben Eigenwerte.

2. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$, so gilt

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{und} \quad \operatorname{Spur} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Dies kann man als notwendiges Kriterium für die Richtigkeit der Berechnung der Eigenwerte benutzen. Weiter folgt aus $\det \mathbf{A} = \prod \lambda_i$, daß $\mathbf{A}$ regulär ist genau dann, wenn null nicht Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist.

3. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte einer Matrix A und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ entsprechend zugehörige Eigenvektoren (zu λ_i gehöre der Eigenvektor $\mathbf{x}_i$), so ist $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

4. Hat die Matrix A den Eigenwert λ, so hat die Matrix $\mathbf{B} = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathbf{A}^i$ den Eigenwert $\sum_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$. (Dabei ist $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$ zu setzen.) Daraus folgt insbesondere: Hat A den Eigenwert λ, so hat $\mathbf{A}^m$ den Eigenwert λ^m (*m* natürliche Zahl). Für eine reguläre Matrix A gilt diese Aussage auch für negative ganze *m*, wenn man setzt $\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{-n} \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{A}^{-1})^n$ (*n* natürliche Zahl).

5. Jede Matrix A befriedigt ihre eigene charakteristische Gleichung; d. h., ist $\sum_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$ das charakteristische Polynom von A, so gilt

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \mathbf{A}^i = \mathbf{0} \quad (\textit{Satz von Cayley-Hamilton}).$$

Speziellere Aussagen lassen sich über bestimmte Klassen von Matrizen treffen:

1. Sämtliche Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell.

2. Die zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix gehörenden Eigenräume sind zueinander orthogonal.

3. Sämtliche Eigenwerte einer orthogonalen Matrix haben den Betrag 1.

4. Mit λ ist auch λ^{-1} Eigenwert einer orthogonalen Matrix.

2.4.4.5.3. Anwendungen der Eigenwerttheorie

1. *Normalformenproblem für lineare Operatoren.* Es sei φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ ($\mathbf{V} \neq \mathbf{V}'$) eine lineare Abbildung endlich-dimensionaler Vektorräume und A die φ bezüglich des Basenpaares (B, B') beschreibende Matrix (s. 2.4.4.4.2). Die Frage ist, ob man durch geeignete Wahl des Basenpaares eine φ beschreibende Matrix von besonders einfacher Gestalt, etwa von Diagonalgestalt, finden kann. Da der linearen Abbildung φ eindeutig eine Klasse äquivalenter Matrizen zugeordnet ist, kann man diese Frage auch so interpretieren, ob es in jeder Äquivalenzklasse eine Matrix von Diagonalgestalt gibt. Dies ist in der Tat der Fall; ist Rang $\varphi = r$, so kann man stets ein Basenpaar so konstruieren, daß die φ zugeordnete Matrix die Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Genau *r* Hauptdiagonalelemente sind 1, alle anderen Elemente sind 0.

Wird dieselbe Frage für lineare Operatoren φ von V gestellt, so ist die Beantwortung ungleich schwieriger, da man nicht zwei Basen (in V und in V') „variieren" kann, sondern nur noch eine Basis (in V). Es gilt der

Satz: Dem linearen Operator φ: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ entspricht bezüglich der Basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Diagonalmatrix genau dann, wenn die Basisvektoren die Eigenschaft $\varphi\mathbf{a}_i = \lambda_i\mathbf{a}_i$ mit geeigneten reellen λ_i haben. Diese Zahlen λ_i sind dann gerade die Hauptdiagonalelemente der Diagonalmatrix.

Jeder Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, für den $\varphi\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ mit einem geeigneten Skalar λ gilt, heißt *Eigenvektor* des linearen Operators φ, und λ heißt der zu diesem Eigenvektor gehörende *Eigenwert* von φ.

Mithin gehört zum linearen Operator φ bezüglich der Basis *B* eine Diagonalmatrix genau dann, wenn die Basisvektoren Eigenvektoren von φ sind, und die ganze Problemstellung ist zurückgeführt auf die Frage der Existenz einer Basis aus Eigenvektoren von φ. Damit man tatsächlich eine Basis aus Eigenvektoren, d. h., n linear unabhängige Eigenvektoren erhält, ist notwendig und hinreichend, daß alle Eigenwerte von φ reell sind und für jeden Eigenwert λ mit der Vielfachheit ϱ gilt:

$$\mathrm{Rg}\,(\varphi - \lambda\varepsilon) = \mathrm{Rg}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = n - \varrho,$$

wobei $\mathbf{A}$ irgendeine φ beschreibende Matrix ist. Die letzte Bedingung bedeutet, daß der zu einem ϱ-fachen Eigenwert gehörende Eigenraum die Dimension ϱ haben muß, damit man aus ϱ zusammenfallenden Eigenwerten auch ϱ linear unabhängige Eigenvektoren erhält.

Das gestellte Problem ist nicht stets lösbar, weil die Eigenwerte eines linearen Operators nicht notwendig alle reell sein müssen und weil es sein kann, daß sich aus zusammenfallenden Eigenwerten nicht die erforderliche Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren ermitteln läßt. Hingegen läßt sich ein symmetrischer Operator eines euklidischen Vektorraumes stets bezüglich einer passenden Orthonormalbasis durch eine Diagonalmatrix beschreiben, denn man kann stets eine aus Eigenvektoren des symmetrischen Operators bestehende Orthonormalbasis ermitteln. (Ein linearer Operator φ eines euklidischen Vektorraumes $\mathbf{V}$ heißt symmetrisch genau dann, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ gilt: $(\varphi\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi\mathbf{y})$.)

Numerisch geschieht die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren eines linearen Operators φ durch die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren irgendeiner φ zugeordneten Matrix.

2. *Transformation einer Matrix auf Diagonalgestalt.* Das Problem besteht darin, zu gegebener (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ eine Matrix $\mathbf{C}$ so zu finden, daß die Matrix $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ von Diagonalgestalt ist. Diese Aufgabenstellung hängt eng mit dem Normalformenproblem für lineare Operatoren zusammen. Entspricht dem linearen Operator φ von $\mathbf{V}$ bezüglich der Basis B die Matrix $\mathbf{A}_B$, so wird eine Basis B' gesucht, bezüglich der die φ beschreibende Matrix $\mathbf{A}_{B'}$ Diagonalgestalt hat. Da $\mathbf{A}_B$ und $\mathbf{A}_{B'}$ zueinander ähnlich sind, bedeutet dies, eine Matrix $\mathbf{C}$ so zu finden, daß $\mathbf{A}_{B'} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_B\mathbf{C}$ Diagonalgestalt hat. Soll das Problem lösbar sein, muß B' aus Eigenvektoren von φ bestehen, d. h., die gesuchte Matrix $\mathbf{C}$ besteht spaltenweise aus den Koordinaten der die Basis B' bildenden Eigenvektoren.

Das Problem ist stets lösbar, wenn $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, da dann die Eigenwerte sämtlich reell sind und die Dimension des zum Eigenwert λ gehörenden Eigenraumes mit der Vielfachheit von λ übereinstimmt. Wegen der Orthogonalität der zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenräume kann für symmetrische Matrizen $\mathbf{A}$ sogar stets eine orthogonale Matrix $\mathbf{C}$ gefunden werden, so daß $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}$ von Diagonalgestalt ist.

Beispiel: Um die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

auf Diagonalgestalt zu transformieren, ermittelt man zunächst ihre Eigenwerte $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; daraus ergeben sich die Eigenräume $L_1 = \{\mu(1, -1, 2);\ \mu \text{ reell}\}$ und

$$L_2 = \{\mu_1(1, 1, 0) + \mu_2(-2, 0, 1);\ \mu_1, \mu_2 \text{ reell}\}.$$

Orthonormierung liefert ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $\mathbf{A}$:

$$\left\{\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -1, 2);\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0);\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1)\right\}.$$

Also wird $\mathbf{A}$ mittels

$$\mathbf{C} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ transformiert auf } \mathbf{A}' = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Hauptachsentransformation quadratischer Formen.* Unter einer *quadratischen Form* in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ versteht man einen Ausdruck der Gestalt $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ und symmetrischer Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$; a_{ik} reell. $\mathbf{A}$ heißt die *Formenmatrix*.

Beispielsweise ist $\Phi = x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1x_2$ eine quadratische Form, denn es ist

$$\Phi = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Die Aufgabenstellung ist, eine orthogonale Matrix $\mathbf{C}$ so zu finden, daß nach Einführung neuer Variabler $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mittels der Gleichung $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ die gegebene quadratische Form eine Gestalt annimmt, in der nur noch rein quadratische Summanden auftreten:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \xrightarrow[\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}]{} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Diese Gestalt nennt man die *metrische Normalform* der quadratischen Form. Nach der Variablentransformation $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ geht $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ über in die Form $\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$, die nur rein quadratische Glieder enthalten soll. Also ist das Problem gleichbedeutend mit der Aufgabenstellung, eine orthogonale Matrix $\mathbf{C}$ so zu finden, daß $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$ von Diagonalgestalt ist. Dies ist bei symmetrischem $\mathbf{A}$ stets möglich; wählt man als Spalten der gesuchten Matrix $\mathbf{C}$ ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren der Formenmatrix $\mathbf{A}$, so wird die gegebene quadratische Form mittels $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ überführt in die Gestalt $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, wobei die Koeffizienten λ_i die Eigenwerte der Formenmatrix sind, von denen jeder so oft auftritt wie seine Vielfachheit angibt. Die in den Spalten von $\mathbf{C}$ stehenden Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ nennt man die *Hauptachsen* der quadratischen Form, und den Prozeß der Überführung der quadratischen Form in ihre metrische Normalform bezeichnet man als *Hauptachsentransformation.* Die metrische Normalform ist eindeutig bestimmt bis auf die Numerierung der Variablen y_i.

Beispiel: Um die quadratische Form $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ in ihre metrische Normalform zu überführen, berechnet man Eigenwerte und dazugehörige Eigenräume der Formenmatrix $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Man erhält $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$; $L_1 = \{\mu(2, 2, -1)\}$; $L_2 = \{\mu(-1, 2, 2)\}$; $L_3 = \{\mu(2, -1, 2)\}$. Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, sind die Eigenräume paarweise orthogonal, und man hat nur noch zu normieren, um eine orthogonale Matrix zu erhalten. Mit $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{y}$ geht die gegebene quadratische Form über in ihre metrische Normalform $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$.

Eine weitere Anwendung gestattet der **Satz**: Sind die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $\mathbf{A}$ nur positiv (nur negativ, sämtlich nicht negativ, sämtlich nicht positiv), dann ist die quadratische Form $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ stets positiv (stets negativ, stets nicht negativ, stets nicht positiv).[1])

Beispiel: Für beliebige reelle Zahlen x_1, x_2, x_3 mit $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ gilt die Ungleichung

$$3x_1^2 + 10x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_2x_3 > 4x_2^2 - 2x_1^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2,$$

denn es ist

$$5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 > 0$$

für alle $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$, da die zu dieser quadratischen Form gehörende Formenmatrix nur positive Eigenwerte hat, nämlich $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ und $\lambda_3 = 9$.

2.5. Elementare Funktionen

Unter elementaren reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen versteht man i. allg. solche, die durch einen analytischen Ausdruck darstellbar sind. Dazu gehören u. a. die rationalen Funktionen, die trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen, die Exponential- und Logarithmusfunktionen, die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrfunktionen sowie solche,

---

[1]) Man nennt die quadratische Form im ersten und zweiten Fall *definit* (positiv definit bzw. negativ definit) und in den beiden restlichen Fällen positiv bzw. negativ *semidefinit*.