

Spezielle Relativitätstheorie

Ein Blick mit dem Hubble Teleskop in allergrößte Entfernung (Ultra Deep Field Image). Das Licht der am meisten rot verschobenen Galaxien auf dem Bild war 13 Mia Jahre unterwegs.

INHALT:

• Einstiens Postulate	3
Relativität	3
$c = \text{konstant}$	4
Historisches zur Lichtgeschwindigkeit	5
Michelson-Morley Experiment	8
• Konsequenzen der Einstein'schen Postulate	12
Gleichzeitigkeit ist relativ	12
Zeitdilatation	15
Längenkontraktion	17
Formverzerrung	20
Wahrnehmung, visuelle Erscheinungen, Konsequenzen des endlichen c !	21
• Lorentz Transformation	27
Übersicht der LT	30
Experiment von Fizeau	32
• Minkowski Diagramm	33
Weltlinien	35
Beispiele	39
Zwillings Paradoxon	42
• Dopplereffekt	47
• Headlight Effekt - Aberration des Lichts	49
Kometenschweif	51
Synchrotron Strahlung	53
• Relativistische Mechanik	58
Invariante Größen	61

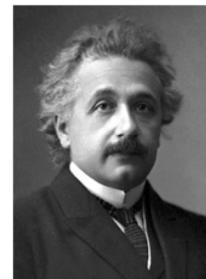
Erweiterung der klassischen Physik

1905 führte Einstein fundamentale Korrekturen in das Newtonsche Konzept von Raum und Zeit ein. Seine **spezielle Relativitätstheorie (SRT)** basiert auf zwei einfachen und intuitiven Postulaten:

I. Alle physikalischen Gesetze gelten gleichermaßen in jedem **Inertialsystem**.^{#)}

II. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist konstant und exakt $c = 299'792'458 \text{ m/s}$ in allen Inertialsystemen.

Diese Postulate haben weitreichende Konsequenzen. Beispielsweise sind gleichzeitige Ereignisse für einen Beobachter nicht gleichzeitig für einen andern.^{%)} Zwei Beobachter können auch unterschiedliche Längen und Zeitenintervalle messen. Die zum Verständnis der SRT nötige Mathematik ist sehr einfach, die Konzepte und Vorstellungen hingegen gewöhnungsbedürftig.



Albert Einstein,
1879 - 1955,
einer der
bedeutendsten
Wissenschaftler
aller Zeiten,
Nobelpreis 1921

Animation der Theorie: <http://www.cell-action.com/einstein/index.html>

^{#)} Inertialsysteme sind Systeme ohne Scheinkräfte; d.h. in diesen Systemen ist der Beobachter nicht beschleunigt. Ein geradeaus fahrender Zug mit konstanter Geschwindigkeit ist ein Inertialsystem. Ein anfahrender, bremsender oder kurvenfahrender Zug ist kein Inertialsystem. Corioliskraft und Zentrifugalkraft sind Scheinkräfte in rotierenden Systemen.

^{%)} Die Signallaufzeit, beispielsweise der Lichtschein eines Blitzes, wird natürlich korrekt berücksichtigt. Die tatsächliche Zeit eines Ereignisses wird mittels Lichtgeschwindigkeit zurückgerechnet (siehe Titelbild). Die unterschiedliche Wahrnehmung von Gleichzeitigkeit ist eine echte, experimentelle Tatsache - keine blosse Laufzeitscheinung !

Viele der Bilder und Aufgaben stammen aus amerikanischen College Lehrbüchern.

1. Physics for Scientists & Engineers, Douglas C. Giancoli, Prentice Hall
2. University Physics, Young und Freedman, Pearson, Addison Wesley
3. Physics for Scientists & Engineers, Tipler und Mosca, Freeman
4. Modern Physics, Tipler und Llewellyn, Freeman. Gutes Buch. Zu umfangreich für diesen Kurs
5. Kleines 1x1 der Relativitätstheorie, Gottfried Beyvers & Elvira Krusch, Springer,
6. Special Relativity, A.P. French, W. W. Norton & Company. Eine sehr klare Abhandlung, ausgezeichnet.

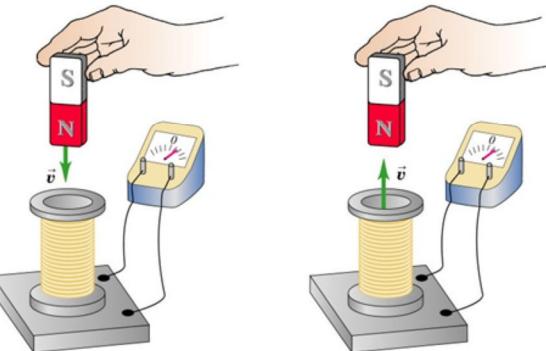
I. Postulat: Relativität

Induktionsgesetz auf zwei Arten.

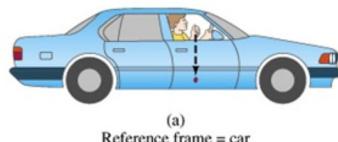
- a) Der Magnet wird mit der Geschwindigkeit v in die Spule geschoben.
- b) Die Spule wird mit v gegen den Permanentmagneten geschoben.

In beiden Fällen zeigt das Voltmeter den gleichen Ausschlag.

In jedem Inertialsystem gilt die gleiche Physik.



Ein Münze wird in einem fahrenden Auto fallen gelassen ($v_{Auto} = \text{konstant}$).



(a)
Reference frame = car



(b)
Reference frame = Earth

Der Beifahrer beobachtet einen vertikalen Fall mit der Beschleunigung g

Der Außenstehende beobachtet eine Parabelbahn mit der Beschleunigung g

Gleiche Physik bedeutet nicht gleiche Werte! Ein fahrendes Auto hat die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$. Aber für den Fahrer bewegt sich das Auto nicht, es hat für ihn keine kinetische Energie!

Rechts abgedruckt ist Einsteins Maturazeugnis der Kantons-schule Aarau (3. Oktober 1896). In den wichtigen Fächern hatte er gute Noten. Es wird oft behauptet, Einstein sei ein schlechter Schüler gewesen. Wie man sieht, ist diese Aussage mehr Wunsch als Realität. Sie dient womöglich dazu, von der eigenen Leistungsschwäche abzulenken. Zu den Leistungen während des Studiums an der ETH; in den Prüfungen erreichte Einstein:

- jeweils eine 5 in Theoretischer Physik, Experimenteller Physik, Astronomie,
- eine 5.5 in Funktionentheorie,
- eine 4.5 für einen Aufsatz über Wärmeleitung.

<p>Herr <u>Albert Einstein</u> von Allm., geboren den 14. März 1879, besuchte die aargauische Kantons-schule & war die III. & IV. Klasse der Gewerbeschule. Nach abgelegter schriftl. & mündl. Maturitätsprüfung am 18., 19. & 21. September, sowie am 30. September 1896, erhielt derselbe folgende Noten:</p>	
1. Deutsche Sprache und Litteratur	5
2. Französische	3
3. Englische	—
4. Italienische	5
5. Geschichte	6
6. Geographie	4
7. Algebra	6
8. Geometrie [Planimetrie, Trigonometrie/ Stereometrie & analytische Geometrie]	6
9. Darstellende Geometrie	6
10. Physik	6
11. Chemie	5
12. Naturgeschichte	5
13. D. u. Klimabrechlinien	4
14. D. u. technischen Zeichnen	4

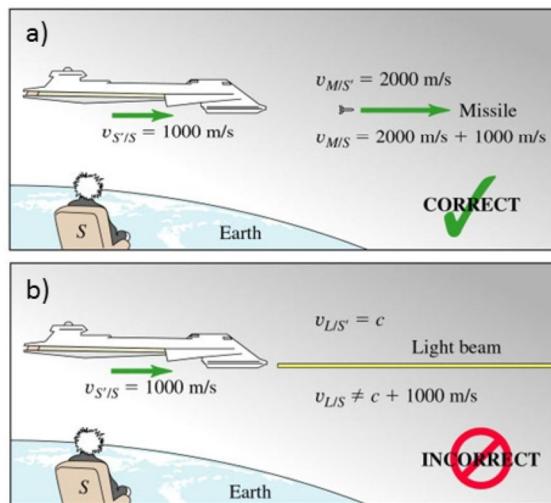
Es ist überliefert, dass Einstein von Hochschullehrern des "Unfleisses" bezichtigt wurde, weil er öfter die Vorlesungen und später auch die Laborexperimente geschwänzt hat.

II. Postulat: Immer gleiches c

Ein Raumschiff (System S') reist mit einer Geschwindigkeit von $v_{S'/S} = 1000 \text{ m/s}$ an der Erde vorbei. Ein Geschoss wird mit der Geschwindigkeit $v_{M/S'} = 2000 \text{ m/s}$ relativ zu S' abgefeuert.

a) Die Newtonsche Physik berechnet die korrekte Geschwindigkeit bezüglich der Erde mit $v_{M/S} = 3000 \text{ m/s}$.

b) Die klassische Physik würde ebenso die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls aus der Raumschiff mit $v_{L/S} = c + 1000 \text{ m/s}$ relativ zur Erde angeben. Das ist falsch und ein Widerspruch zu Einsteins zweitem Postulat.



Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c ist unabhängig von der Bewegung der Quelle. c ist für jeden Beobachter $= 299'792'458 \text{ m/s} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?c|search_for=c

Historisches zur Lichtgeschwindigkeit

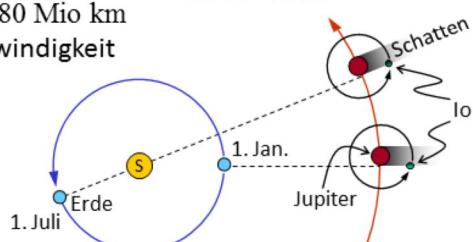
Die Lichtgeschwindigkeit c in Vakuum ist die höchstmögliche Signalgeschwindigkeit überhaupt. Radiowellen, *IR*- oder *UV*-Strahlen, Lichtwellen oder Röntgenstrahlen breiten sich mit dieser Geschwindigkeit im leeren Raum aus.

Bereits Galilei soll versucht haben, die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen. Die erste erfolgreiche Messung stammt vom Dänen Olaf Roemer aus dem Jahre 1676. Die Verfinsterungsperiode des Jupitermondes Io war bekannt, 172 Stunden. 25 Verfinsterungen, also ein halbes Jahr später beobachtete Roemer die Verfinsterung 22 Minuten zu spät. Mit dem von Cassini 1673 ermittelten Erdbahn-Durchmesser von 280 Mio km konnte der Wert von 2.1×10^8 m/s für die Lichtgeschwindigkeit berechnet werden.

Die eigentliche Berechnung führte erst Christiaan Huygens 1678 aus, zwei Jahre nach Roemers Beobachtungen

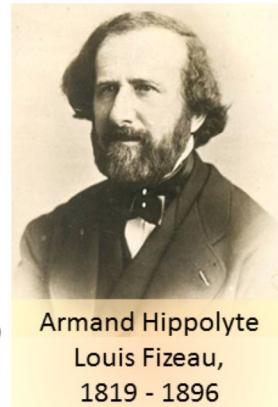
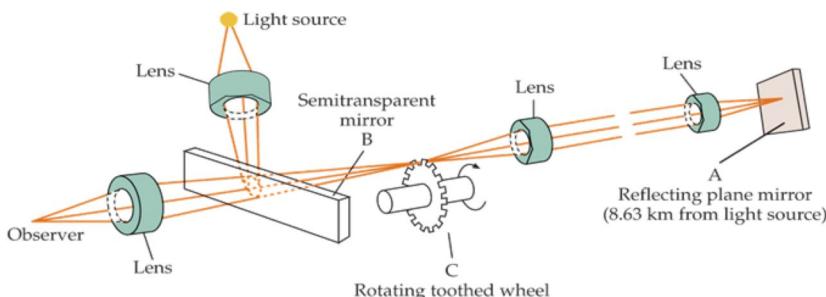


Ole Christensen Rømer,
1644 - 1710



Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Zahnradmethode von Fizeau aus dem Jahr 1849: Hat das Zahnrad die richtige Geschwindigkeit, gelangt das Licht periodisch durch die Zahnradlücke zum Spiegel, und wieder zurück zum Beobachter.



Armand Hippolyte
Louis Fizeau,
1819 - 1896

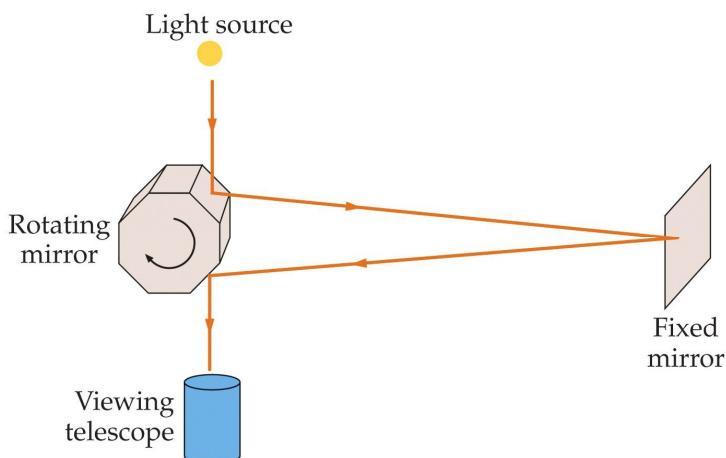
1. Drücken Sie die Lichtgeschwindigkeit in Foot pro Nanosekunde aus (1 foot = 0.3048 m).
2. In Fizeaus Experiment besass das Zahnrad 720 Zähne. Bei einer Rotationsfrequenz von 25.2 Umdrehungen pro Sekunde konnte reflektiertes Licht beobachtet werden. Die Distanz zwischen Zahnrad und Spiegel betrug 8.63 km. Welchen Wert konnte Fizeau für die Lichtgeschwindigkeit aus diesen Messungen ableiten ? Bei welchen Rotationsfrequenzen kann ebenfalls reflektiertes Licht beobachtet werden. $\approx 3.14 \times 10^8 \text{ m/s}$

Maxwell konnte aus seinen vier Gleichungen die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen ableiten. Daraus ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit als:

Die elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ As/Vm}$ und die magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ können in unabhängigen Experimenten bestimmt werden.

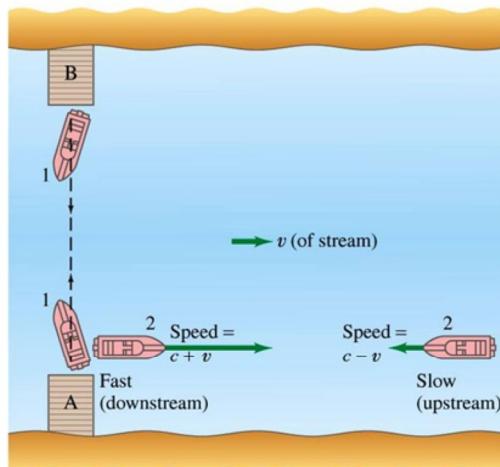
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

An der T&A existiert ein Drehspiegel-Experiment zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit, nach der Methode von Jean Foucault (und später A. A. Michelson). Erklären Sie das Funktionsprinzip anhand der schematischen Zeichnung.



Der Äther - das Trägermedium für Licht ?

Das **Michelson Interferometer** misst die relative Laufzeit des Lichtes in verschiedene Richtungen. Die Messung ist hoch präzis und basiert auf dem Phänomen



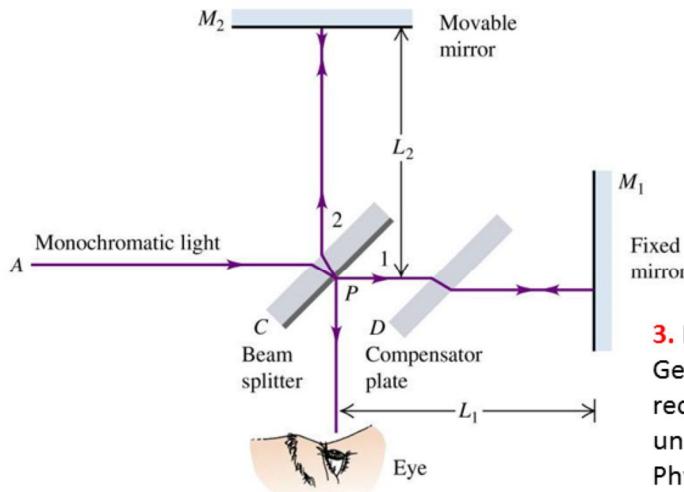
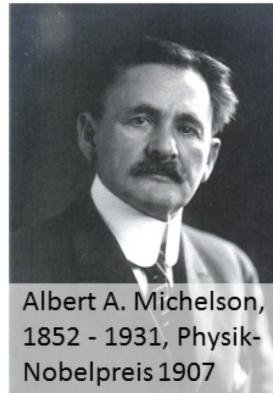
Analogie: Boot 1 fährt quer, Boot 2 mit und gegen die Strömung. Die Geschwindigkeit der Boote relativ zum Fluss ist c .

der Interferenz:
Ein Laserstrahl wird
geteilt, auf zwei
verschiedene Wege
geschickt und wieder
zusammen-
geführt. Je nach
Wegunterschied
beobachtet man konstruktive
oder destruktive Interferenz.

Ether Wind v
 l_1 l_2
 Half-silvered mirror M_s
 Beam 1 Beam 2
 $v = \sqrt{c^2 - v'^2}$
 Querungsgeschwindigkeit v' des Bootes 1, berechnet aus c und v

Michelson-Morley Experiment

Die Michelson-Morley Messung der Lichtgeschwindigkeit ist eines der berühmtesten Experimente der Physik. Bis zu dieser Messung vermutete man einen "Äther" als Träger von Lichtwellen, ähnlich wie Luft Träger von Schallwellen ist.



- 3.** Der Äther bewege sich mit der Geschwindigkeit v von links nach rechts. Berechnen Sie die Laufzeiten t_1 und t_2 des Lichtes gemäss klassischer Physik als Funktion von v , c , L_1 oder L_2 .

Beim Radio spricht man heute noch von "Nachrichten im Äther". Wie auch das Modell der Quarks war der Äther ein hypothetisches Konstrukt. Quarks wurden aber im Labor nachgewiesen. Der Äther existiert definitiv nicht und das Licht breitet sich tatsächlich im Vakuum aus!

Zu 3.

Mit der Näherung: $1/(1-\varepsilon) \approx 1 + \varepsilon$, $1/(1-\varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot\varepsilon$ ergibt sich:

$$t_1 = 2L_1/c \cdot (1+v^2/c^2), \quad t_2 = 2L_2/c \cdot (1+v^2/2c^2), \quad \varepsilon = v^2/c^2 \ll 1$$

$$\rightarrow \Delta t = t_1 - t_2 = (2 \cdot L_1 - L_2) \cdot v^2/c^3 + [2 \cdot (L_1 - L_2)/c] = \Delta t_{\text{Äther}} + \Delta t_{\text{konst}}$$

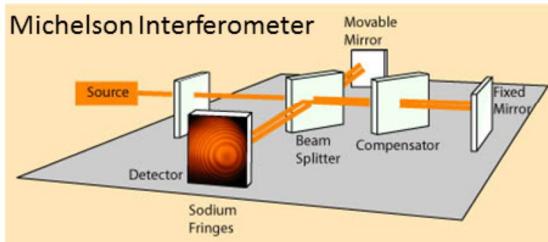
Der zweite Term in eckigen Klammern entspricht einer konstanten Zeitdifferenz zwischen den unterschiedlich langen Wegen. Wir sind am ersten Term interessiert, der Zeitdifferenz als Funktion einer möglichen Ätherbewegung mit v . Rotiert man das Interferometer nach einer ersten Messung um 90° , müsste man eine solche Zeitdifferenz messen und auf ein v schliessen können. Eine solche Zeitdifferenz konnte aber nie beobachtet und die Ätherhypothese nie bestätigt werden.

Mit TI, Home (F3, 9): `taylor(1/sqrt(1-v^2/c^2), v, 2)`

4. Leiten Sie die Beziehungen $1/(1 - \varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$ mithilfe der Fehlerrechnung her (lineares, erstes Glied der Taylorentwicklung).

5. Das Michelson-Morley Interferometer erlaubt, mindestens $1/10$ Phasendifferenz zwischen den beiden Strahlen aufzulösen. Das entspricht bei sichtbarem Licht einer Zeitdifferenz von der Größenordnung $10^{-16} \text{ s} = \Delta t_{\text{Äther}} = (2 \cdot L_1 - L_2) \cdot v^2 / c^3$. Welches kleinste $v_{\text{Äther}}$ könnten Sie mit dem Interferometer detektieren, wenn

$$L_1 = L_2 = 1.00 \text{ m? } \textcircled{R} \quad 5.2 \times 10^4 \text{ m/s, vergl. } v_{\text{Erd-Rot}} = 460 \text{ m/s, } v_{\text{Erde-Sonne}} = 3.0 \times 10^4 \text{ m/s!}$$



6. Im Video "Michelson Interferometer" wird ein Experiment durchgeführt. Der Spiegel eines Interferometer Arms wird mittels eines geheizten Aluminiumrohrs von 10.0 cm Anfangslänge verschoben. Eine Temperaturerhöhung des Al-Rohres von 10.0°C ergibt 76 Phasensprünge am Interferenzbild. Es handelt sich um rotes He-Ne Laserlicht der Wellenlänge 632.8 nm . Bestimmen Sie den Ausdehnungskoeffizienten von Aluminium. Hinweis: Das Licht macht hin und zurück doppelt so viel Zusatzweg wie die Rohrverlängerung. $\textcircled{R} \quad 2.40 \times 10^{-5}/\text{K}$

Zu 4.

Mit TI, Home (F3, 9): `taylor(1/sqrt(1-v^2/c^2), v, 2)`

Das Michelson-Morley Experiment wurde auch Jahre später noch von anderen Experimentatoren mit höherer Genauigkeit wiederholt. Beispielsweise fand Georg Joos 1930, dass die Äthergeschwindigkeit gegenüber der Erde maximal 1.5 km/s betragen kann.

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1930, BAND 7, HEFT 4

Die Jenaer Wiederholung des Michelsonversuchs

Von Georg Joos

Mit 11 Figuren

1. Einleitung

Bald nachdem D. Miller¹⁾ seine aufsehenerregenden Mitteilungen über einen positiven Ätherwindeffekt beim Michelsonversuch gemacht hatte, wurde wie an anderen Orten²⁾, so auch in Jena eine Nachprüfung in Angriff genommen. Das geckte Ziel war, bei einem Lichtweg, der etwa von der Größe des Millerschen sein sollte, fortlaufende Registrierungen zu gewinnen, welche als von jedermann nachprüfbarre Dokumente eine eindeutige Entscheidung liefern sollten. Die Firma Carl Zeiß stellte in großzügigster Weise ihre großen Hilfsmittel zur Verfügung, insbesondere wurden die schwierigen technischen Konstruktionen des Rotationsapparates vom Konstruktionsbüro „Astro“ (Oberingenieur D. Fr. Meyer und Dipl.-Ing. Büchele sowie Ing. Köppen) durchgearbeitet. Für den Aufbau des Apparates und die Aufnahmen selbst standen dem Verf. Herr Ing. Köppen und Herr Mechaniker Ziege zur Seite. Ihnen allen herzlichst zu danken, ist selbstverständliche Pflicht.

2. Beschreibung des Apparates

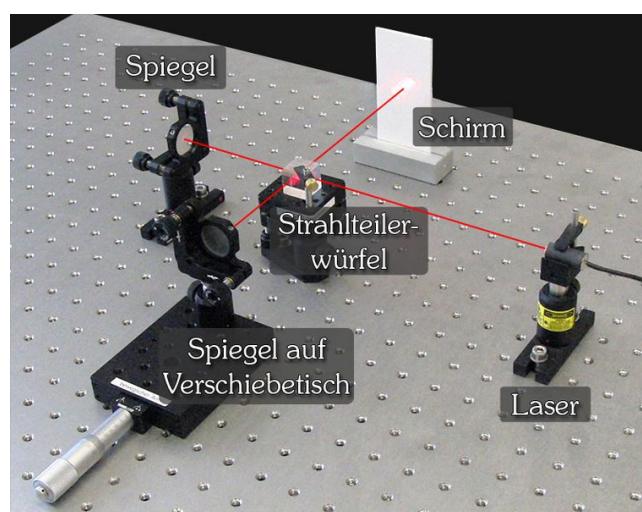
a) Der Träger der Optik (Fig. 1)

Für die erreichbare Genauigkeit kommt natürlich alles auf eine störungsfreie Montierung der Optik an. Schon die

1) D. C. Miller, Proc. Nat. Ac. Wash. 11, S. 306, 1925; weitere Angaben von Miller in der Diskussion des Michelson-Versuchs. Astrophys. Journ. 68, S. 341, 1928.

2) R. I. Kennedy, Proc. Nat. Ac. Wash. 12, S. 621, 1926; A. Piccard und E. Stabel, Naturw. 14, S. 935, 1926; 16, S. 25, 1928; A. A. Michelson, F. G. Pease und F. Pearson, Nature 123, S. 88, 1929; Journ. Opt. Soc. Amer. 18, S. 181, 1929; K. K. Illingworth, Phys. Rev. 30, S. 692, 1927.

Annalen der Physik. 5. Folge. 7.



tions and distances traversed by the rays will be altered thus:—The ray sa is reflected along ab , fig. 2; the angle bab , being equal to the aberration $=\alpha$, is returned along ba , ($aba = 2\alpha$), and goes to the focus of the telescope, whose direction is unaltered. The transmitted ray goes along ac , is returned along ca , and is reflected at c_1 , making ca_1c equal $90 - \alpha$, and therefore still coinciding with the first ray. It may be remarked that the rays ba , and ca , do not now meet exactly in the same point a_1 , though the difference is of the second order; this does not affect the validity of the reasoning. Let it now be required to find the difference in the two paths aba_1 , and aca_1 .

Let V = velocity of light.

v = velocity of the earth in its orbit.

D = distance ab or ac , fig. 1.

T = time light occupies to pass from a to c .

T' = time light occupies to return from c to a_1 , (fig. 2.)

Then $T = \frac{D}{V-v}$, $T' = \frac{D}{V+v}$. The whole time of going and coming is $T+T' = 2D \frac{V}{V^2-v^2}$, and the distance traveled in this time

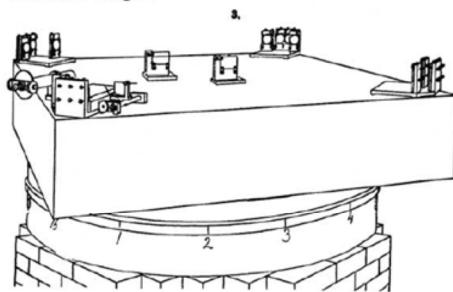
is $2D \frac{V^2}{V^2-v^2} = 2D \left(1 + \frac{v^2}{V^2}\right)$, neglecting terms of the fourth order.

The length of the other path is evidently $2D \sqrt{1 + \frac{v^2}{V^2}}$ or to the same degree of accuracy, $2D \left(1 + \frac{v^2}{2V^2}\right)$. The difference is therefore $D \frac{v^2}{V^2}$. If now the whole apparatus be turned through 90° , the difference will be in the opposite direction, hence the displacement of the interference fringes should be $2D \frac{v^2}{V^2}$. Considering only the velocity of the earth in its orbit, this would be $2D \times 10^{-1}$. If, as was the case in the first experiment, $D = 2 \times 10^8$ waves of yellow light, the displacement to be expected would be 0.04 of the distance between the interference fringes.

In the first experiment one of the principal difficulties encountered was that of revolving the apparatus without producing distortion; and another was its extreme sensitiveness to vibration. This was so great that it was impossible to see the interference fringes except at brief intervals when working in the city, even at two o'clock in the morning. Finally, as before remarked, the quantity to be observed, namely, a displacement of something less than a twentieth of the distance between the interference fringes may have been too small to be detected when masked by experimental errors.

The first named difficulties were entirely overcome by mounting the apparatus on a massive stone floating on mercury; and the second by increasing, by repeated reflection, the path of the light to about ten times its former value.

The apparatus is represented in perspective in fig. 3, in plan in fig. 4, and in vertical section in fig. 5. The stone a (fig. 5) is about 1.5 meter square and 0.3 meter thick. It rests on an annular wooden float bb , 1.5 meter outside diameter, 0.7 meter inside diameter, and 0.25 meter thick. The float rests on mercury contained in the cast-iron trough cc , 1.5 centimeter thick, and of such dimensions as to leave a clearance of about one centimeter around the float. A pin d , guided by arms $gggg$, fits into a socket e attached to the float. The pin may be pushed into the socket or be withdrawn, by a lever pivoted at f . This pin keeps the float concentric with the trough, but does not bear any part of the weight of the stone. The annular iron trough rests on a bed of cement on a low brick pier built in the form of a hollow octagon.



At each corner of the stone were placed four mirrors $d'd'e'e$ (fig. 4). Near the center of the stone was a plane-parallel glass b . These were so disposed that light from an argand burner a , passing through a lens, fell on b so as to be in part reflected to d_1 ; the two pencils followed the paths indicated in the figure, $b_1d_1d_2b_2$ and $b_2d_2d_1b_1$ respectively, and were observed by the telescope f . Both f and a revolved with the stone. The mirrors were of speculum metal carefully worked to optically plane surfaces five centimeters in diameter, and the glasses b and c were plane-parallel and of the same thickness, 1.25 centimeter;

Established by BENJAMIN SILLIMAN in 1818.

THE

AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE.

EDITORS

JAMES D. AND EDWARD S. DANA.

ASSOCIATE EDITORS

PROFESSORS ASA GRAY, JOSIAH P. COOKE, AND
JOHN TROWBRIDGE, OF CAMBRIDGE,

PROFESSORS H. A. NEWTON AND A. E. VERRILL, OF
NEW HAVEN,

PROFESSOR GEORGE F. BARKER, OF PHILADELPHIA.

THIRD SERIES.

VOL. XXXIV.—[WHOLE NUMBER, CXXXIV.]

WITH PLATES II TO IX.

No. 203—NOVEMBER, 1887.

NEW HAVEN, CONN.: J. D. & E. S. DANA.

1887.

TUTTLE, MOREHOUSE & TAYLOR, PRINTERS, 571 STATE STREET.

Six dollars per year (postage prepaid). \$6.40 to foreign subscribers of countries in the Postal Union. Remittances should be made either by money orders, registered letters, or bank checks.

THE

AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE.

[THIRD SERIES.]

—•—

ART. XXXVI.—*On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*; by ALBERT A. MICHELSON and EDWARD W. MORLEY.*

THE discovery of the aberration of light was soon followed by an explanation according to the emission theory. The effect was attributed to a simple composition of the velocity of light with the velocity of the earth in its orbit. The difficulties in this apparently sufficient explanation were overlooked until after an explanation on the undulatory theory of light was proposed. This new explanation was at first almost as simple as the former. But it failed to account for the fact proved by experiment that the aberration was unchanged when observations were made with a telescope filled with water. For if the tangent of the angle of aberration is the ratio of the velocity of the earth to the velocity of light, then, since the latter velocity in water is three-fourths its velocity in a vacuum, the aberration observed with a water telescope should be four-thirds of its true value.†

* This research was carried out with the aid of the Bache Fund.

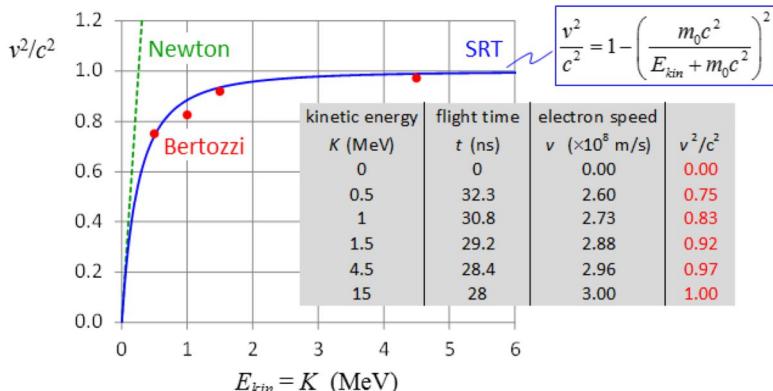
† It may be noticed that most writers admit the sufficiency of the explanation according to the emission theory of light; while in fact the difficulty is even greater than according to the undulatory theory. For on the emission theory the velocity of light must be greater in the water telescope, and therefore the angle of aberration should be less; hence, in order to reduce it to its true value, we must make the absurd hypothesis that the motion of the water in the telescope carries the ray of light in the opposite direction!

AM. JOUR. SCI.—THIRD SERIES, VOL. XXXIV., NO. 203.—Nov., 1887.

22

Maximale Geschwindigkeit

An Teilchenbeschleunigern, wie beispielsweise am CERN wird die Grenze für die ultimative Signalgeschwindigkeit täglich offenbar. William Bertozzi führte 1964 *time-of-flight* Messungen durch, um die Maximalgeschwindigkeit für Teilchen zu demonstrieren:
American Journal of Physics, Volume 32, Issue 7, pp. 551-555 (1964). www.youtube.com/watch?v=B0BOpiMQXQA



Screenshots von Oszilloskop Bildschirm ($1 \text{ cm} = 0.98 \times 10^{-8} \text{ s}$). Verschiedene Messungen auf einer Teststrecke von 8.4 m.

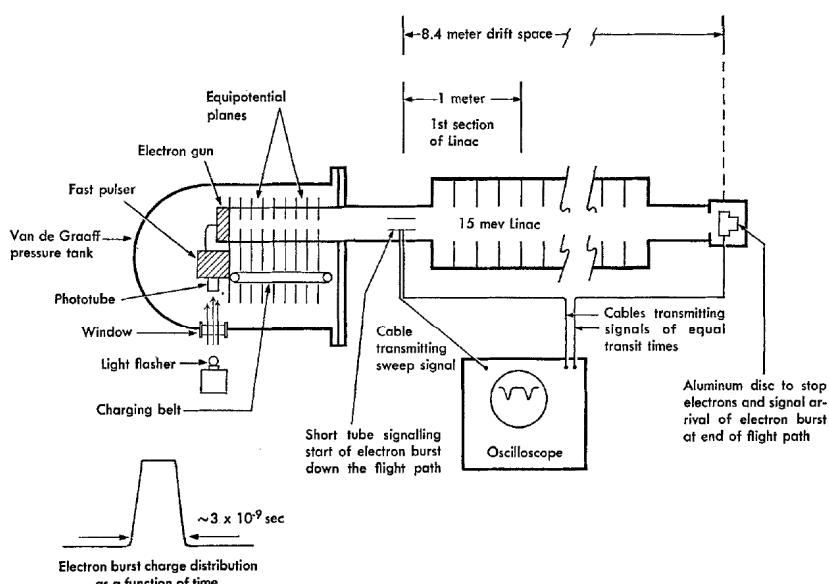
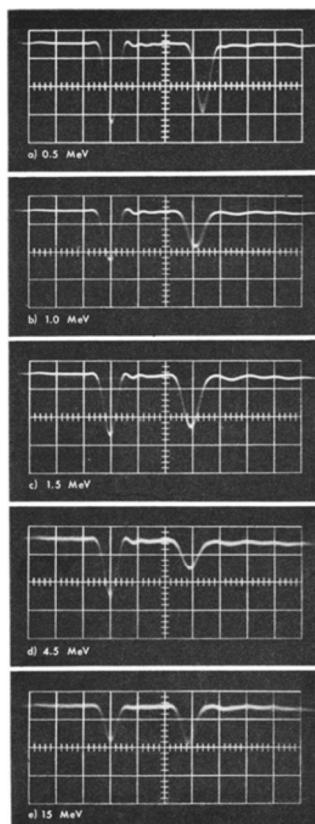


FIG. 1. Schematic diagram of the experiment set up for measuring the time of flight of the electron burst from the Van de Graaff.

Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons*†

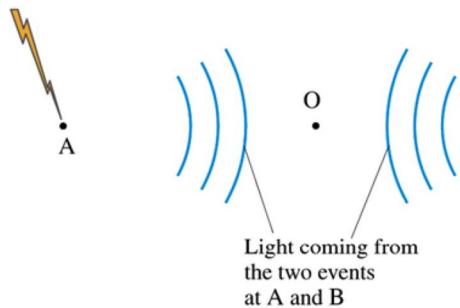
WILLIAM BERTOZZI

Department of Physics and Laboratory for Nuclear Science,
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts
(Received 6 January 1964)

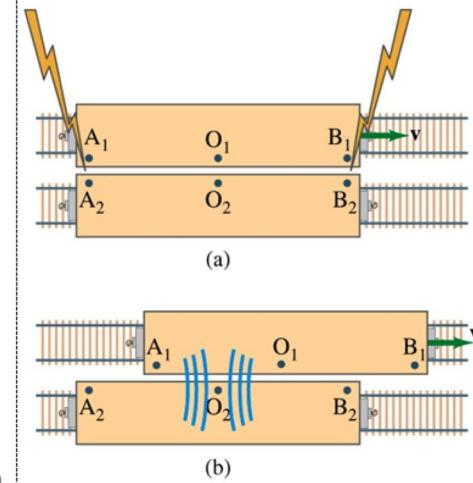
Using a Van de Graaff electrostatic generator and a linear accelerator, the speeds of electrons with kinetic energies in the range 0.5–15 MeV are determined by measuring the time required for the electrons to traverse a given distance. The measurements show the existence of a limiting speed in accord with the results of special relativity. The kinetic energy, determined by calorimetry, verifies that an electric field exerts a force on a moving electron in its direction of motion that is independent of its speed.

Gleichzeitigkeit

Ein **Ereignis** ist eine Erscheinung im Raum (Koordinaten x, y, z) zu einer bestimmten Zeit t . Zwei Ereignisse an verschiedenen Orten sind allenfalls gleichzeitig in einem Inertialsystem, aber nicht gleichzeitig in einem andern. Das widerspricht der Intuition, ist aber eine Konsequenz der Konstanz von c .



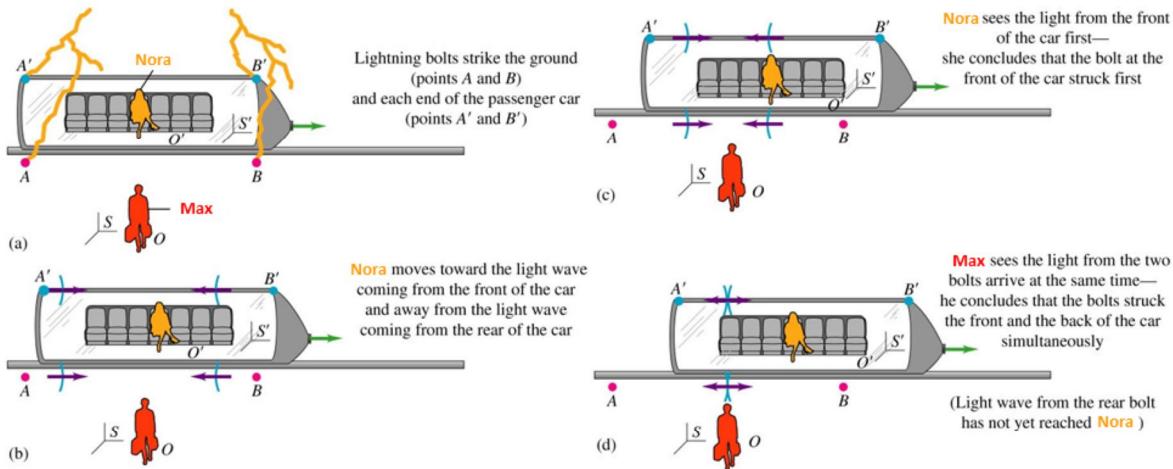
Blitze schlagen bei A und B ein. O befindet sich in der Mitte. Er sieht die Blitze, nachdem das Licht ihn erreicht hat. Das Licht beider Ereignisse erreicht ihn gleichzeitig und er folgert daraus richtigerweise, dass die Blitze gleichzeitig in A und B eingeschlagen haben.



Zwei Bahnwagen befinden sich auf parallelen Gleisen. Der Bahnwagen 1 fährt mit der Geschwindigkeit v . Blitze schlagen vorne und hinten ein. Sie seien gleichzeitig für den "ruhenden" Beobachter O_2 , d.h. das Licht der beiden Ereignisse erreicht O_2 im gleichen Moment. Hingegen wird O_1 das Licht von vorne früher sehen als das Licht von hinten. Diese Beobachtung kann O_2 bestätigen und er kann O_1 auch den Grund sagen. O_1 fährt dem vorderen Ereignis nämlich entgegen.

O_1 interpretiert die gleichen Ereignisse ganz anders. Sie misst in ihrem System die gleiche, konstante Lichtgeschwindigkeit wie O_2 . Das frühere Licht von vorne kommt von einem früheren Blitzeinschlag. Sie ist schliesslich in Ruhe und O_2 bewegt sich rückwärts. O_1 behauptet zu Recht, dass die beiden Einschläge nicht gleichzeitig waren. Ebenso hat O_2 recht mit der Aussage, beide Ereignisse seien gleichzeitig gewesen. Gleichzeitigkeit ist nicht absolut, sondern an den Bewegungszustand des Beobachters gekoppelt!

Gedankenexperiment zur Gleichzeitigkeit



7. Wiederholen Sie die Argumentation der vorangehenden Folie oder übersetzen Sie einfach den englischen Text. Denken Sie nochmals scharf und ohne Vorurteile nach.

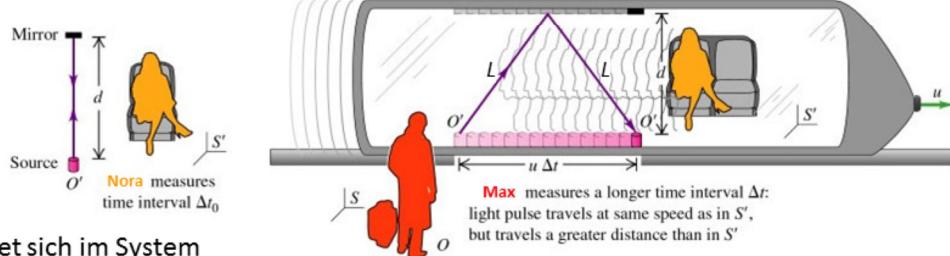
Es ist unwichtig, ob der Blitz in den Zug oder in den Masten draussen einschlägt. Wichtig ist nur das Ereignis $A = (x, y, z, t)$, respektive $A' = (x', y', z', t')$, sowie B und B'.

Der Begriff Gedankenexperiment geht auf Hans Christian Ørsted und (später) auf Ernst Mach zurück. Einstein machte ihn aber bekannt. Der Begriff wurde auch im Englischen übernommen als "thought experiment". Es waren die Zeiten, als Deutsch die Physik beherrschte und Begriffe wie *Ansatz* oder *Eigenvalue* entstanden.

Ob zwei Ereignisse an verschiedenen Orten auf der x-Achse gleichzeitig sind oder nicht hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab.

Relativität der Zeitintervalle

Ein weiteres Gedankenexperiment soll verdeutlichen, wie die Zeit zwischen zwei Ereignissen unterschiedlich erlebt wird, je nach Bewegungszustand des Beobachters. Diese erstaunliche Ergebnis ist wieder eine Konsequenz der Einsteinschen Postulate.



Nora befindet sich im System S' , das sich mit konstanter Geschwindigkeit u nach rechts bewegt. Sie misst mit ihrer Stoppuhr die Dauer Δt_0 , die ein Lichtpuls von der Quelle (unten) zum Spiegel (oben) und wieder zurück zur Quelle benötigt: $\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$

Der aussen stehende **Max** detektiert eine andere "Lichtspur". Der fundamentale Unterschied ist, dass für ihn das Start- und das Endereignis nicht am gleichen Ort stattfinden und das Licht einen längeren Weg $2L$ zurücklegt. Entsprechend wird sein Zeitintervall $\Delta t = \frac{2L}{c}$ grösser als **Noras** Zeitintervall Δt_0 .

$$L = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u \cdot \Delta t}{2}\right)^2} \rightarrow \Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{u \cdot \Delta t}{2}\right)^2} \quad \#)$$

^{#)} Es wurde stillschweigend angenommen, dass die Strecke d senkrecht zur Bewegung in beiden Systemen gleich lang gemessen wird. Diese Annahme wird später bestätigt.

Beachten Sie, dass das Photon aus Sicht **Max** schräg abgestrahlt wird. Dieses Phänomen wird später behandelt, unter dem Begriff der "Aberration des Lichts" oder "Headlight Effekt".

Zeitdilatation γ

8. Leiten Sie aus den Gleichungen oben die Beziehung her: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

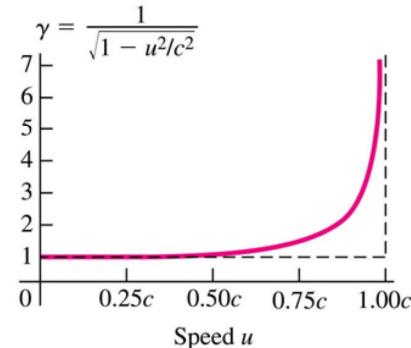
Zeitdilatation: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Der Bruch u/c und die Wurzel erscheinen sehr oft in der Relativitätstheorie. Es werden deshalb die neuen Größen *Beta* und *Gamma* definiert.

9. Stellen Sie Sich alte Pendeluhren vor mit einer Schwingungsdauer von genau einer Sekunde ($T = 1.00\text{s}$). Nora bewegt sich relativ zu Max mit 90% der Lichtgeschwindigkeit. Nora misst bei ihrer Pendeluhr genau 5 Schläge in 5 s. Max beobachtet ebenfalls die 5 Schwingungen von Noras Uhr, er behauptet aber deren Uhr gehe nach. Hat er recht?

10. Erklären Sie die Konsequenzen des Diagramms rechts.



Eigenzeit Δt_0

Es existiert nur ein Bezugssystem, in dem eine Uhr in Ruhe ist. Alle anderen Bezugssysteme sind dazu bewegt und werden diese Uhr nachgehen sehen. Zeitintervalle am gleichen Ort sind die kürzesten ^{#)}. Wir nennen solche Zeitintervalle **Eigenzeit** Δt_0 (engl. *Proper Time*).

11. Hochenergetische Elementarteilchen aus dem Weltall reagieren mit Atomen in der oberen Atmosphäre. Es bilden sich instabile Teilchen, so genannte Müonen. Müonen haben in ihrem Ruhesystem eine (mittlere) Lebenszeit von 2.20×10^{-6} s. Wie gross ist ihre Lebensdauer von der Erde aus gemessen, wenn sie sich relativ zu dieser mit 99.0% der Lichtgeschwindigkeit bewegen? Könnte ein Müon, welches in 3000m über Meer entsteht, den Erdboden erreichen? Wie ist das möglich aus Sicht des Müons? $\textcircled{R} 15.6 \times 10^{-6}$ s

12. Ein Flugzeug fliegt von San Francisco nach New York (4800 km) mit einer konstanten Geschwindigkeit von 300 m/s. Wie lange dauert der Flug für einen Beobachter am Boden, wie lange für einen Passagier?

$$\textcircled{R} 16000 \text{ s}, (1 - \varepsilon)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon : (1.60 \times 10^4 \text{ s})(1 - 0.50 \times 10^{-12}) \text{ %}$$

13. Nora besteigt ein Raumschiff und fliegt mit einer Relativgeschwindigkeit von $0.600 c$ an Max auf der Erde vorbei. Im Moment des Vorbeiflugs synchronisieren beide ihre Uhren. Nach einer gewissen Zeit misst Max die Entfernung von Nora bei 9.00×10^7 m. Welche Zeit liest Max in diesem Moment auf Noras Uhr ab? Welche Zeit liest Nora auf der Uhr von Max, wenn ihre eigene gerade 0.400 s anzeigt? Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

$$\textcircled{R} t_{\text{Messen Max}} = 0.500 \text{ s} \rightarrow t_{\text{Uhr Nora}} = 0.400 \text{ s}, 0.320 \text{ s} \text{ &)}$$

^{#)} Beachten Sie, dass die Zeitdilatation echt und nicht ein Fehler der Messung ist. Beispielsweise wurde die Laufzeit des Lichts oder Signals hin zum Beobachter richtig korrigiert. Auch Astronomen sind sich bewusst, dass ihre Beobachtungen einem Zustand der Vergangenheit entsprechen. Eine Galaxie in 5 Mia Lichtjahren Entfernung zeigt uns ihr Aussehen vor 5 Mia Jahren.

^{%)} Dieser Zeitunterschied ist sehr klein. Nichts desto trotz kann er mit einer so genannten Atomuhr gemessen und der Effekt bestätigt werden.

^{&)} Man muss hier klar unterscheiden, für wen die Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden.

Max sagt: Nora befindet sich in einer Entfernung von 9.00×10^7 m und gleichzeitig zeigt meine Uhr an einem anderen Ort die Zeit von 0.500s. In diesem gleichen Moment, d.h. gleichzeitig für Max zeigt Noras Uhr eine Zeit von 0.400s.

Nora sagt: Der markierte Ort ist an mir tatsächlich nach 0.400s vorbei gezogen, Max' Uhr hat aber in diesem Moment, d.h. gleichzeitig für Nora, 0.320s angezeigt. Max hat aber zu spät auf seine Uhr geschaut, als diese 0.500s angezeigt hat und der markierte Ort längst an mir vorüber gezogen war.

Beide erleben Gleichzeitigkeit unterschiedlich!

Wie weit ist Max von Nora entfernt (aus ihrer Sicht), wenn sie die markierte Stelle passiert?

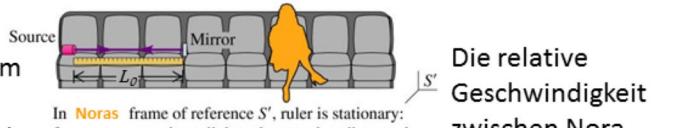
$$\textcircled{R} 7.20 \times 10^7 \text{ m}$$

Längenkontraktion $1/\gamma$

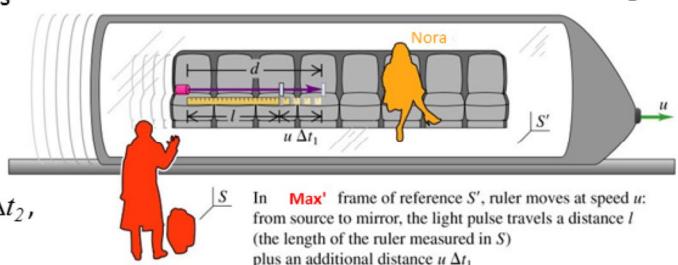
Ebenso wie die Dauer zwischen zwei Ereignissen von der Bewegung des Beobachters abhängt, ist auch der Abstand zwischen zwei Punkten eine relative Größe. Die Distanzmessung ist an die erlebte Gleichzeitigkeit gekoppelt.

Länge parallel zur Bewegung. Noras Massstab L_0 ist in Ruhe. In ihrem System S' benötigt ein Lichtpuls die Eigenzeit $\Delta t_0 = 2 \cdot L_0 / c$ von der Quelle zum Spiegel und wieder zurück. Max misst ebenfalls korrekt, und trotzdem anders. Der Lichtpuls hin legt die Strecke $c \cdot \Delta t_1 = d = L + u \cdot \Delta t_1$ zurück. Das ergibt $\Delta t_1 = L / (c - u)$, respektive $\Delta t_2 = L / (c + u)$ für den Rückweg. Die Gesamtdauer ist einerseits $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, andererseits $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$, und daraus:

$$\text{Längenkontraktion: } L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}$$



In **Noras** frame of reference S' , ruler is stationary: from source to mirror, light pulse travels a distance l_0



In **Max'** frame of reference S' , ruler moves at speed u : from source to mirror, the light pulse travels a distance l (the length of the ruler measured in S) plus an additional distance $u \Delta t_1$

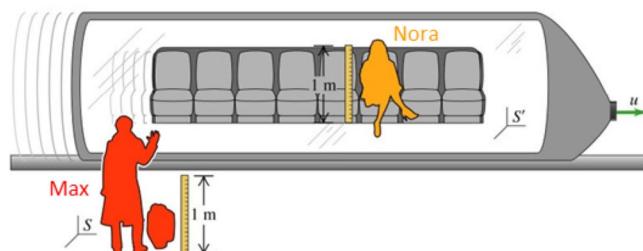
Es handelt sich hierbei nicht um eine optische Täuschung. Der Massstab in S ist tatsächlich kürzer als in S' !

L_0 heisst **Eigenlänge** (*Proper Length* L_0). In allen zu S' bewegten Bezugssystemen messen die Beobachter eine kleinere Länge L , und zwar umso kleiner, je grösser die Relativgeschwindigkeit u ist.

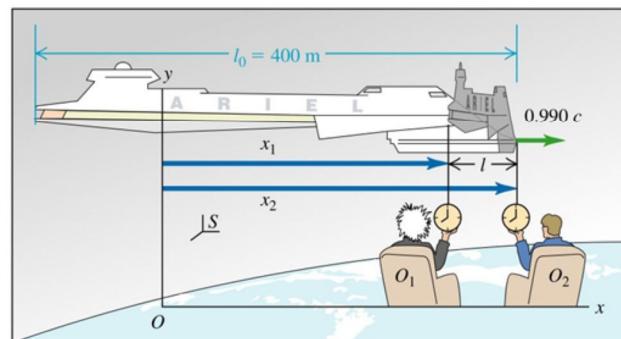
14. Warum misst Nora, nicht Max die Eigenzeit des Lichtpulses im Gedankenexperiment oben?

15. Leiten Sie die Längenkontraktion aus dem Gedankenexperiment oben her.

Länge senkrecht zur Bewegung. Durch ein Vorgehen wie auf den Folien "Relativität der Zeitintervalle" und der "Längenkontraktion" kann gezeigt werden, dass senkrecht zur Bewegung beide Beobachter Noras Massstab gleich lang messen. #)



16. Ein Raumschiff fliegt an der Erde vorbei mit einer Geschwindigkeit von $0.990 c$. Der Kapitän des Raumschiffes misst seine Länge mit 400 m . Welche Länge $L = x_2 - x_1$ messen die Erdbeobachter? ® 56.4 m



#) Ein anderes Argument für die Gleichheit der senkrechten Massstäbe bietet die Symmetrie und das Relativitätsprinzip:

Max und Nora stellen beide einen Meterstab bei sich auf. Max' Stab hat einen vorstehende Dorn auf 50 cm Höhe. In dem Moment, wo die beiden Meterstäbe knapp aneinander vorbei fliegen, ritzt Max' Stab den gegenüberliegenden von Nora. Annahme: Max misst senkrechte, bewegte Stäbe länger. Der Dorn würde dann Nora's Stab unterhalb der Mitte ritzen. Das bedeutet auch, dass Nora den Dorn auf Max' Stab unterhalb der Hälfte des eigenen Stabes sieht (misst). Sie misst senkrechte, bewegte Stäbe kürzer. Das verletzt das Prinzip der Relativität. Entweder werden senkrechte, bewegte Stäbe länger, oder kürzer, oder gleich lang gemessen. Nur der letzte Fall führt nicht zu einem Widerspruch.

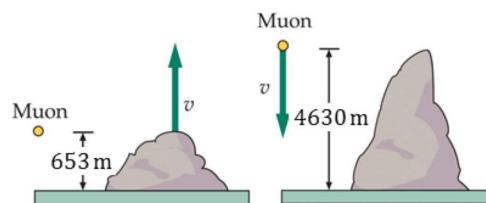
Beachten Sie: Weil sich die Stäbe senkrecht bewegen, sehen sie beide Beobachter in einem bestimmten Moment einander gegenüber. Das Gegenüber von Dorn-Ritze und der unteren Stabenden sind gleichzeitige Ereignisse für beide Beobachter.

Wie würden Max und Nora das Ritzen erleben, wenn die Stäbe parallel zur Bewegung aneinander vorbei fliegen würden? Worin besteht der fundamentale Unterschied zum Beispiel oben?

Das gleichzeitige Messen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Erdbeobachter ist nicht gleichzeitig für den Piloten. Der Kapitän beobachtet, dass O_1 später misst als O_2 .

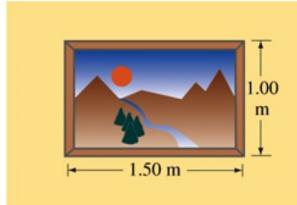
17. Die beiden Beobachter O_1 und O_2 sind auf der Erde 56.4 m voneinander entfernt. Wie weit entfernt misst sie der Kapitän? Die Raumschiffnase streicht zuerst an O_1 , dann an O_2 vorbei. Wie lange dauert der Vorbeiflug für die drei Beobachter? Ist das Relativitätsprinzip erfüllt? ® 7.96m , 26.8ns , 190ns

18. Die Müonen aus Aufgabe 11 haben eine Eigen-Lebenszeit von 2.20×10^{-6} s. Von der Erde aus gemessen bewegen sie sich mit $0.99 c$ und haben eine Lebenszeit von 15.6×10^{-6} s. Sie kommen in dieser Zeit 4630 m weit. Die Müonen selber sehen die Erde während ihres Lebens nur 653 m auf sich zu kommen. Interpretieren Sie diesen scheinbaren Widerspruch. Oder anders gefragt: Erreicht ein Müon, welches auf 4630 m über Meer entsteht den Erdboden, oder doch nicht?



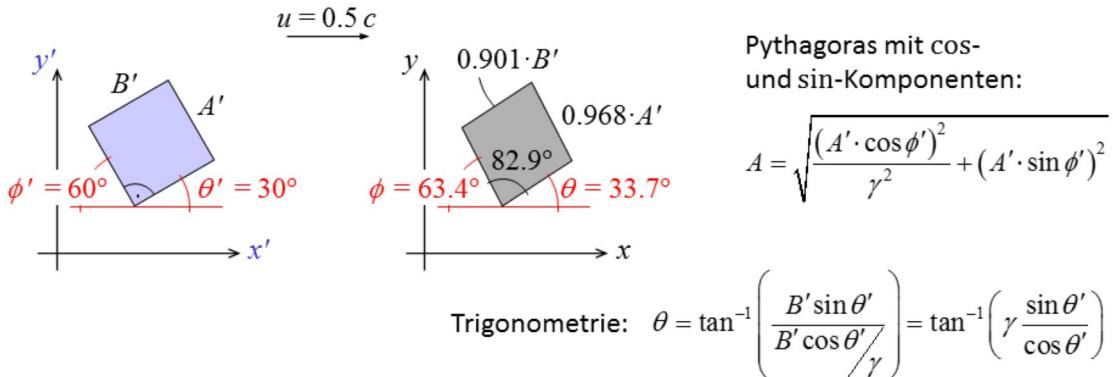
19. Ein rechteckiges Bild misst $1.50 \text{ m} \times 1.00 \text{ m}$. Es hängt in einem Raumschiff, welches an der Erde mit einer Geschwindigkeit von $0.9 c$ vorbei fliegt. Welche Abmessungen hat das Bild für den Kapitän des Raumschiffes? Welche Abmessungen hat es für einen Erdbewohner? ® $0.65 \text{ m} \times 1.00 \text{ m}$

Einfache Erklärungen: www.phys.unsw.edu.au/einsteinlight/



Formverzerrung

Die Längenkontraktion verzerrt Formen. Ein Rechteck oder Quadrat im System S' wird zu einem Parallelogramm im System S . Mithilfe der Längenkontraktion parallel, keiner Kontraktion senkrecht zur Bewegungsrichtung lassen sich einfache geometrische Beziehungen herleiten. #)



- 20.** Bestimmen Sie für das Quadrat $A' = B'$ in S' oben die Seitenlängen A, B des Parallelogramms in S , sowie seine Orientierung und seine Winkel. ® $82.9^\circ, 97.1^\circ$

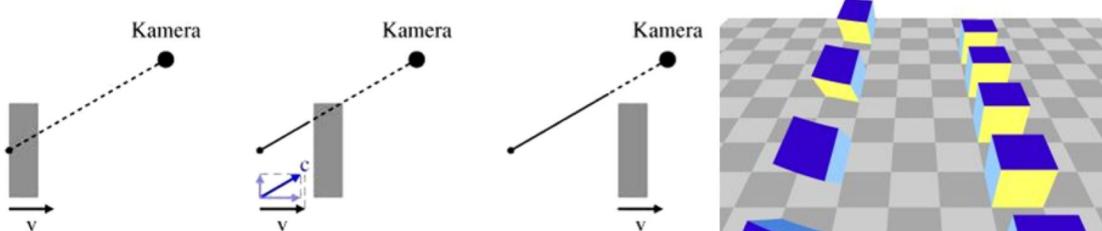
#) Diese Formverzerrung ist echt, messbar, nicht einfach eine visuelle Erscheinung wie auf den folgenden Seiten !

Messung \neq visuelle Erscheinung

Messung: Lichtweg, Perspektive etc. werden beim sauberen Messen korrigiert.

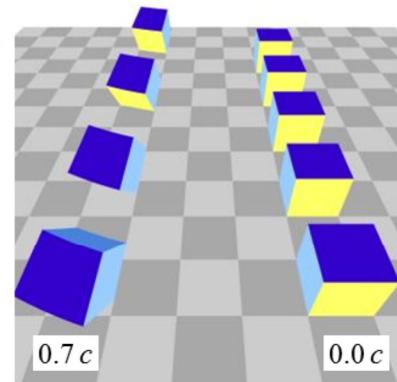
Längenkontraktion und Zeitdilatation sind gemessene, echte Phänomene.

Erscheinung: Ein Bild entsteht jeweils aus alle jenen Photonen, die gleichzeitig ins Auge treffen, teils aus unterschiedlicher Entfernung stammend. Das kann dazu führen, dass man bei schnell bewegten Objekten auch die Hinterseite sehen kann! #)



Ein Quader bewegt sich mit $v \lesssim c$ schräg zu einer Kamera. Das Photon von der Hinterseite kann sich schräg zur Kamera hin bewegen, weil die Geschwindigkeit v der Quaderrückwand grösser ist als die entsprechende Komponente der Lichtgeschwindigkeit c .

<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/#aur>



Achtung: Die bewegten Würfel links sind nicht gedreht! Sie erscheinen nur so.

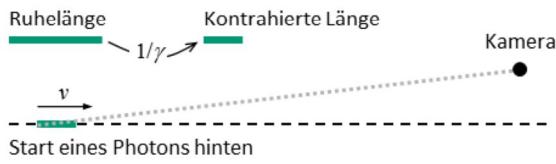
Alle Würfel rechts haben gleiche Farben, gleiche Grösse (ruhend gemessen) und die gleiche Ausrichtung auf der karierten Plattform.

Wie ist es möglich, dass man die Vorderseite des Würfels plötzlich nicht mehr sieht?

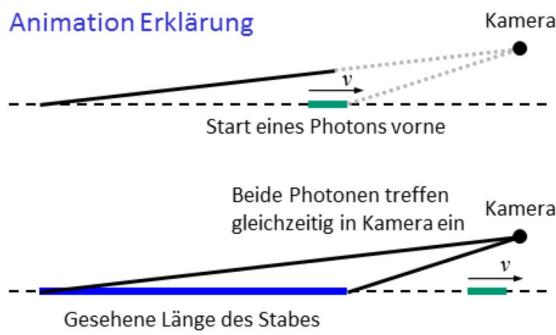
#) Dieser Unterschied wurde im Vorangehenden gelegentlich hervorgehoben. Hier sei er aber nochmals betont: Bisher haben wir stets von Messungen gesprochen haben !

Echte Längenkontraktion vs. Erscheinung

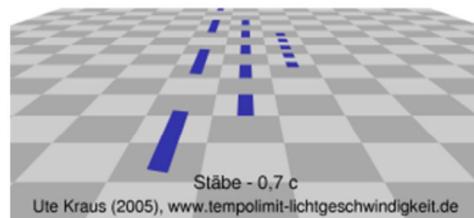
21. Erklären Sie die scheinbare Verlängerung eines Stabes, der sich mit $v = 0.7 c$ schräg auf einen Beobachter zu bewegt.



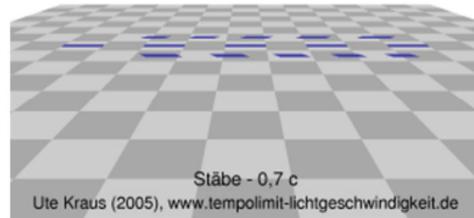
[Animation Erklärung](#)



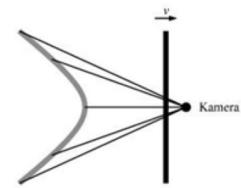
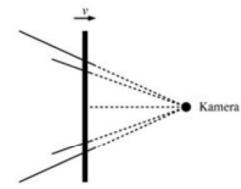
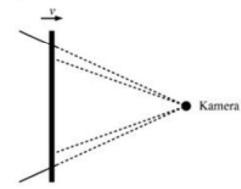
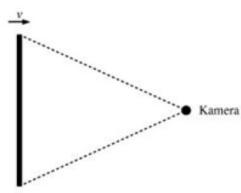
www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/#aur



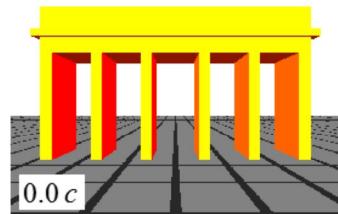
22. Ruhender Stab in der Mitte.
Welcher Stab fliegt auf einen zu ?



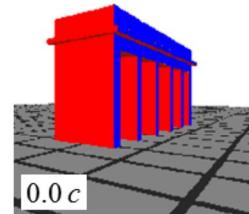
23. Ruhender Stab in der Mitte.
Welcher Stab fliegt nach links ?



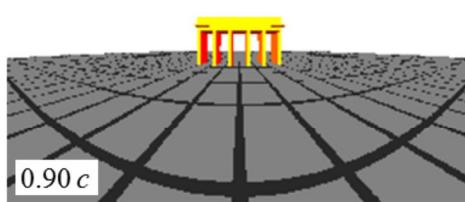
Scheinbare Krümmung



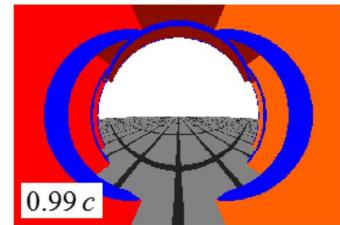
Brandenburger Tor: Front



Von schräg hinten



Gleicher Aufnahmestandort wie oben



Flug mit 95% Lichtgeschwindigkeit
über die Ringe des Saturn

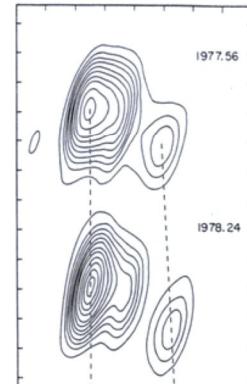
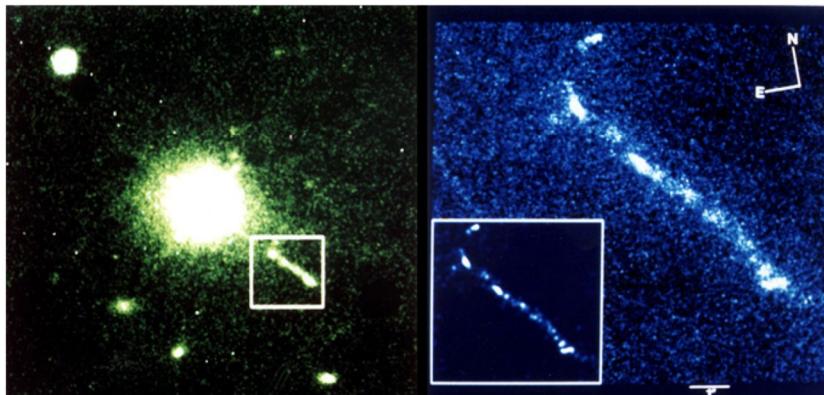


Fast lichtschnell durch Tübingen



Dass wegen der endlichen Lichtlaufzeit ein fast lichtschneller Betrachter seine Umgebung verzerrt sieht, ist erst erstaunlich spät erkannt worden. Schliesslich weiß man seit Olaf Roemers Arbeiten von 1676, dass Licht sich mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreitet. Aber erst 1924 wurde der Lichtlaufzeiteffekt von Anton Lampa erstmals beschrieben. In der Folge waren die Arbeiten von Roger Penrose und James Terrell aus dem Jahr 1959 der Ausgangspunkt für zahlreiche weitere Untersuchungen.

Relativistische Erscheinung im Universum



Ein Jet entfernt sich vom Quasar 3C273 scheinbar mit $\frac{3}{4} \text{ m''}$ pro Jahr. Das entspricht bei einer Entfernung von 2.6 Mia LY des Quasars der neunfachen Lichtgeschwindigkeit ($= 9.5 c$). Kommt dazu, dass wir in der Beobachtung nur die Geschwindigkeit quer zur Sichtlinie sehen. Erklärung: Der Jet bewegt sich mit $0.99 c$ praktisch direkt auf uns zu. Dadurch wird seine Geschwindigkeit stark überschätzt, so dass gar ihre Querkomponente wesentlich schneller als Licht erscheint.

$$\frac{3}{4} \text{ m''} = \left(\frac{3}{4} \times 10^{-3} \right)'' = \left(\frac{3}{4} \times 10^{-3} \right) \left(\frac{1}{60 \times 60} \right)^\circ = \left(\frac{3}{4} \times 10^{-3} \right) \left(\frac{1}{60 \times 60} \right) \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ rad} = 3.64 \times 10^{-9} \text{ rad}$$

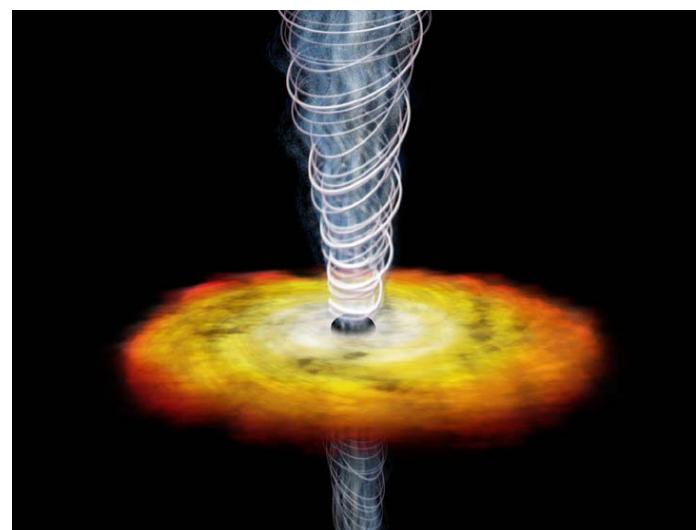
Quasare (quasi stellare Objekte) sind extrem leuchtstarke Zentren "aktiver" Galaxien. Solche Zentren sind supermassive schwarze Löcher, welche durch Gravitationswirkung Materie anziehen. Wegen der Drehimpulserhaltung fällt diese Materie nicht einfach ins Loch, sondern dreht in der so genannten Akkretionsscheibe zuerst noch um das Lochzentrum. Dabei wird diese kreisende Materie enorm aufgeheizt, was das Leuchten hervorruft. Das Leuchten aus diesem sehr kompakten Gebiet ist heller als eine ganze Milchstrasse.

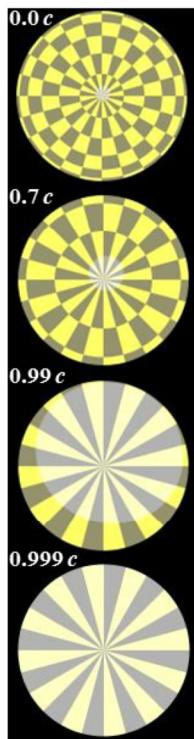
Die gemalte Darstellung verdeutlicht die beiden Jets, die senkrecht aus der Akkretionsscheibe eines Quasars heraus schiessen.

Wollte man die Erde zu einem schwarzen Loch verdichten, müsste man ihre ganze Masse in eine Kugel mit einem Radius von $r = 9 \text{ mm}$ pressen. Für die Sonne wäre dieser Radius 3 km . Dieser spezifische Radius heisst Schwarzschild Radius. Er berechnet sich gemäss:

$$r_S = 2GM/c^2, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 = \text{Gravitationskonstante}$$

$$M_{\text{Erde}} = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad M_{\text{Sonne}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

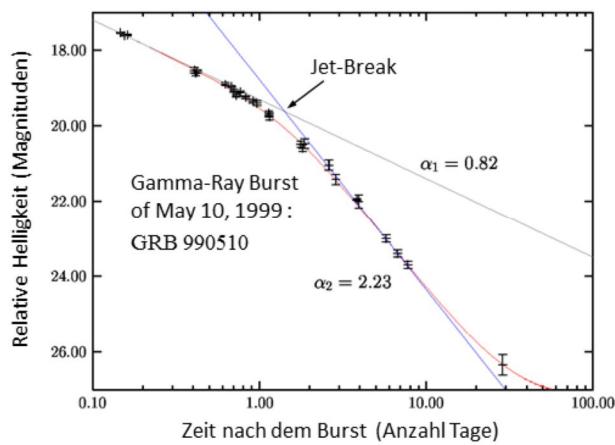




Unsichtbare Vorderseite

← Links: Kugelausdehnungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Zur Verdeutlichung tragen die Kugeln ein Muster aus $15^\circ \times 15^\circ$ grossen Karos. Würde man statt der Kugel einen Jet beobachten, dessen Front den heller markierten Winkelbereich mit Öffnungswinkel 10° einnimmt, dann wäre dieser bei Geschwindigkeiten oberhalb von $0.99 c$ nur teilweise sichtbar.

Rechts: Lichtkurve des optischen Nachleuchtens eines Gamma-Bursts. Das Nachleuchten von GRB 990510 zeigt anfangs eine langsamere, nach etwa 1.3 Tagen eine schnellere Helligkeitsabnahme. Der Knick wird als "Jet-Break" gedeutet.



Wenn wir eine Kugel anschauen, die sich mit hoher Geschwindigkeit radial ausdehnt, dann ist nur der innere Teil der Vorderseite sichtbar. Er ist um so kleiner, je schneller die Kugel expandiert. Photonen erreichen uns nur von dem Teil der Oberfläche, auf den wir in fast senkrechter Richtung blicken. Denn nur in dieser Richtung kann ein Photon bei fast lichtschneller Expansion entweichen.

Dieses Phänomen spielt bei der Interpretation der Lichtkurven von Gamma-Burst-Quellen eine wichtige Rolle. Man nimmt heute an, dass die täglich beobachteten Gammastrahlungsausbrüche meist (oder vielleicht sogar immer) die Entstehung eines Schwarzen Lochs anzeigen. Nach einem Gammablink, der Sekunden bis Stunden andauert, besteht über Tage hinweg ein Nachleuchten im Röntgen- bis Radiobereich. In einem Gamma-Burst wird eine enorme Energiemenge freigesetzt. Nach heutigem Verständnis entsteht dabei ein Feuerball aus fast lichtschnellen Teilchen, der expandiert, dabei das umgebende Medium auffegt und allmählich abgebremst wird. Von der Grenze zwischen Feuerball und umgebendem Gas stammt das Nachleuchten.

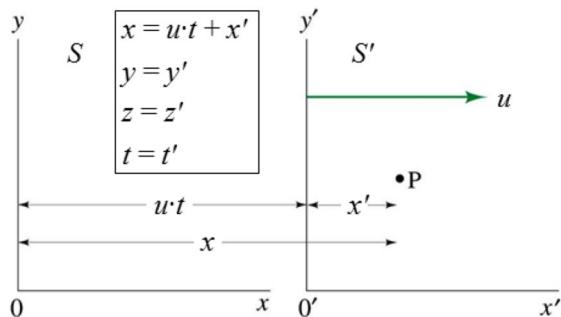
Der Jet-Break wird auf das Phänomen der teilweise unsichtbaren Vorderseite zurückgeführt. Wenn ein leuchtender Gasball mit hoher Geschwindigkeit expandiert, sieht man nur einen kleinen Teil von ihm, nämlich den Zentralbereich um die Sichtlinie. Wird die Bewegung nach und nach langsamer, dann sieht man allmählich einen immer größeren Teil der Strahlungsquelle. Das hat Auswirkungen auf die Lichtkurve: Einerseits nimmt die Helligkeit mit der Zeit ab, andererseits wird der sichtbare Anteil größer.

Man nimmt an, dass der Feuerball in vielen Fällen nicht eine Kugel sondern ein kanalisierte Materieausfluss in Form eines schmalen Jets ist. Ein Indiz dafür findet sich in den Lichtkurven des Nachleuchtens in Gestalt eines Knicks, des sogenannten Jet-Breaks. Falls man in Wirklichkeit auf die Front eines schmalen Jets blickt, statt auf eine Kugel, dann ist auch diese Front anfangs nur teilweise sichtbar und das Absinken des Strahlungsflusses ist verzögert. Die Jetfront ist aber nach einer gewissen Abbremsung schon bald vollständig zu sehen. Von diesem Zeitpunkt an sinkt der Strahlungsfluss dann deutlich schneller als zuvor, was sich in der Lichtkurve als Knick äußert.

Koordinaten Transformationen

In der klassischen, Newtonschen Physik können Geschwindigkeiten einfach addiert werden. Dieses Vorgehen ist aber nur ein Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten. Lorentz entwickelte die allgemeine Theorie der Addition von Geschwindigkeiten.^{#)}

Galilei Koordinaten Transformationen der klassischen Physik. S' bewegt sich mit u relativ zu S .



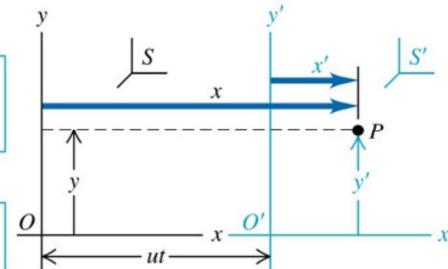
^{#)} Bekannt ist Lorentz für die nach ihm benannte Kraft. Den Nobelpreis erhielt Lorentz 1902 für die Erklärung des Zeeman-Effekts (= Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld), zusammen mit dessen Entdecker Zeeman.

Lorentz Transformation

Die Inertialsysteme S und S' bewegen sich mit der konstanten Geschwindigkeit u relativ zu einander. Weiterhin gilt $x = u \cdot t + x'$, aber x' ist die gemessene Länge in S , und somit im Vergleich zur x' (gemessen von S') um γ verkürzt:

Frame S' moves relative to frame S with constant velocity u along the common x - x' axis

Origins O and O' coincide at time $t = 0 = t'$



$$x = ut + \frac{x'}{\gamma} = ut + x' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Wegen des Relativitätsprinzips muss auch gelten: $x' = -ut' + x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} &= x' = -ut' + x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ \Rightarrow t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned} \right\}$$

Ganz im Gegensatz zur Galilei Transformation hängt t' sowohl von t , als auch von x ab!

24. Ein Objekt sei in Ruhe im System S' und habe die (Eigen-) Länge $L_0 = x_2' - x_1'$. Leiten Sie die Längenkontraktion mittels Lorentz Koordinaten Transformationen her.

Beachte: Für kleine $u \ll c$ bekommen wir wieder die Galilei Transformationen: $t = t'$, $x = ut + x'$

Lorentz Geschwindigkeits-Addition

Die Geschwindigkeit v ist eine geometrische Grösse. Wir können ihre Transformation einfach mittels der Geschwindigkeitsdefinition herleiten: $\frac{dx'}{dt'} = \gamma(dx - u \cdot dt)$, $\frac{dt'}{dt} = \gamma(dt - u \cdot dx/c^2)$

$$\frac{v_x'}{dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt'}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\gamma(dx - u \cdot dt)}{\gamma(dt - u \cdot dx/c^2)} \cdot \frac{1/dt}{1/dt} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}}$$

↑
erweitern mit $1/dt$

Alternative Herleitung mithilfe der Kettenregel und der totalen Ableitung nach dt :

$$\frac{v_x'}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt'} [\gamma(x - u \cdot t)] = \frac{d}{dt} [\gamma(x - u \cdot t)] \frac{dt}{dt'} = \gamma \left(\frac{dx}{dt} - u \right) \frac{1}{dt'} = \frac{\gamma(v_x - u)}{\frac{d}{dt} \left[\gamma \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \right]} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}}$$

$$\frac{v_y'}{dt'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'} = v_y \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{v_y}{\frac{d}{dt} \left[\gamma \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \right]} = \frac{v_y / \cancel{\gamma}}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}} = \frac{v_y \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}}$$

Noch eine Herleitung mithilfe der Kettenregel und partiellen Ableitungen nach ∂x und ∂t :

$$\begin{aligned} \frac{v_x'}{dt'} &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\partial}{\partial x} [\gamma(x - u \cdot t)] \frac{dx}{dt'} + \frac{\partial}{\partial t} [\gamma(x - u \cdot t)] \frac{dt}{dt'} = \gamma \frac{dx}{dt'} - \gamma u \frac{dt}{dt'} = \gamma \frac{1}{\frac{dt'}{dx}} - \gamma u \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} \\ &= \gamma \frac{1}{\frac{d}{dx} \left[\gamma \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \right]} - \gamma u \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2} \right)} = \gamma \frac{1}{\gamma \left(\frac{dt}{dx} - \frac{u}{c^2} \right)} - \frac{u}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}} = \frac{1}{\frac{1}{v_x} - \frac{u}{c^2}} - \frac{u}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}} \\ &= \frac{v_x}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}} - \frac{u}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}} \end{aligned}$$

Übersicht: Lorentz Transformationen (LT)

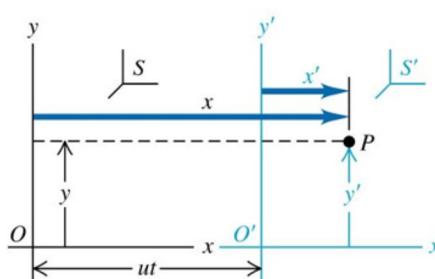
Koordinaten

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t' + ux'/c^2)$$



Geschwindigkeiten

$$v_x = \frac{v_{x'} + u}{1 + \frac{u \cdot v_{x'}}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v_{y'} \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{u \cdot v_{x'}}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v_{z'} \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{u \cdot v_{x'}}{c^2}}$$

Die Bewegungsrichtung ist die x -Achse. Alle gestrichenen Größen sind gemessen in S' . u ist die Relativ-Geschwindigkeit der beiden Systeme. u ist positiv für S , und negativ für S' . Die umgekehrten Beziehungen $x' = \dots$, $v_{x'} = \dots$, etc. lauten genau gleich, aber mit negativem Vorzeichen für u !

- Alle gestrichenen Größen (x' , t' , ...) sind vom Beobachter in S' gemessen und werden von diesem auch so kommuniziert. Alle ungestrichenen Größen stammen vom Beobachter in S .
- Die Beziehungen machen deutlich, dass sowohl die Zeit, als auch die Koordinaten nicht unabhängige, absolute Größen sind. Sie sind verflochten.
- Senkrecht zur Bewegung sind die Koordinaten identisch, nicht aber die Geschwindigkeiten.

Wählt man statt der Zeit t die Lichtlänge

ct werden die Lorentz Transformationen

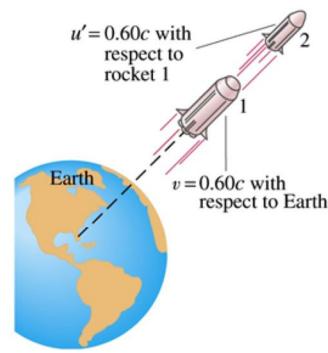
$$x = \gamma \left(x' + \frac{u}{c} ct' \right) ; \quad ct = \gamma \left(ct' + \frac{u}{c} x' \right)$$

25. Zeigen Sie, dass die Transformation einer Geschwindigkeit $v_x' < c$ im System S' immer zu einem $v_x < c$ im System S führt.

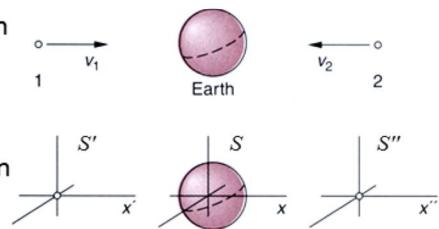
26. Zeigen Sie, dass ein Photon mit c im System S' auch in S Lichtgeschwindigkeit hat. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit!

27. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rakete 2, wie sie von der Erde aus gemessen würde. ® 0.88 c

28. Zwei Uhren sind in Ruhe im System S' . Sie laufen dort synchron. Das System S' bewegt sich im Vergleich zu einem anderen Inertialsystem S mit der Geschwindigkeit u in die Plus- x -Richtung. Ein Beobachter in S sieht eine Uhr nachgehen im Vergleich zur anderen Uhr. Welche Uhr geht nach und wie viel? Hinweis: Der Beobachter in S kann mit beiden Uhren und Positionen via Lorentztransformation seine momentane Zeit t rekonstruieren, beispielsweise $t = \gamma(t_1' + ux_1'/c^2)$. Berechnen Sie dann $\Delta t' = t_2' - t_1'$. ® In S zeigt die vordere Uhr $(x_1' - x_2') \cdot u/c^2$ weniger Zeit als (gleichzeitig) die hintere.



29. Zwei Protonen der kosmischen Strahlung nähern sich der Erde in entgegengesetzter Richtung. Ein Proton hat die Geschwindigkeit $v_1 = 0.6 c$, das andere $v_2 = -0.8 c$. Wie gross ist die Geschwindigkeit der Erde relativ zu jedem Proton? Welche Geschwindigkeit hat jedes Proton im System des andern (relativ zum andern)? ® 0.95 c



Zu 25.

$$c^2 - v_x'^2 = c^2 - \left(\frac{v_x' + u}{1 + \frac{u \cdot v_x'}{c^2}} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\left(c^2 - (v_x')^2 \right) (c^2 - u^2)}{\left(1 + \frac{u \cdot v_x'}{c^2} \right)^2} \geq 0$$

Zu 28.

Gesucht ist die in S gleichzeitige Anzeige der Uhren, d.h. $\Delta t'$ zur gleichen Zeit t .

Die Distanz $(x_2' - x_1')$ ist konstant, nämlich der fixe Abstand der beiden Uhren im System S' . $(x_2' - x_1') = L_0$ ist die Eigenlänge zwischen den beiden Uhren, in S' . Die Zeitunterschied auf der Anzeige der Uhren ist also $L_0 \cdot u/c^2$.

Eine andere Frage wäre: Wie viel früher zeigt die hintere Uhr die gleiche Zeit wie die vordere, d.h. Δt bei gleichen Zeiten t' ?

Experiment von Fizeau

Hippolyte Fizeau führte 1851 ein wichtiges Experiment durch. Er mass die Lichtgeschwindigkeit in strömendem Wasser. Einstein bezeichnete dieses historische Experiment als entscheidenden Beweis für seine Theorie, insbesondere für die Addition der Geschwindigkeiten. In Wasser ist die Lichtgeschwindigkeit kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit: $c_{Wasser} = c/n$. n heisst Brechungsindex oder Brechzahl. Der Brechungsindex n ist eine Materialkonstante, beispielsweise für Wasser ist $n = 1.33$.

30. Wasser strömt über einen Einlass in ein Rohr und verschwindet wieder durch einen Abfluss. Die Strömungsgeschwindigkeit betrage $u = +18 \text{ m/s}$ nach rechts. **A)** Bestimmen Sie die Lichtgeschwindigkeit in der Strömung für einen rechts- und links-laufenden Lichtstrahl bezüglich der Rohrwand, respektive bzgl. des ruhenden, im Labor stehenden Beobachters. Geben Sie die Lichtgeschwindigkeits-Änderung im Vergleich zur ruhenden Flüssigkeit.

B) Fizeau entwickelte die Näherungsformel:

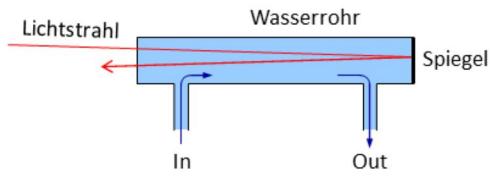
$$c_{bzgl. Rohr} = c_{Wasser} \pm u \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$c_{bzgl. Rohr}$ ist die Geschwindigkeit des Lichts

bezüglich der Rohrwand. Leiten Sie diese

$$\text{Formel für } u \ll c_{Wasser} \text{ her. Verwenden Sie: } \frac{1}{1 \pm \varepsilon} = 1 \text{ m}\varepsilon$$

$$\textcircled{R} c_W = \frac{3}{4} c; c_{b.R.} = c_W \pm 7.82 \text{ m/s}$$



$$c_{b.R.} - c_W = \frac{\pm c_W + u}{1 + \frac{\pm c_W \cdot u}{c^2}} - c_W = + 7.82418 \text{ m/s}, = - 7.82419 \text{ m/s} !!$$

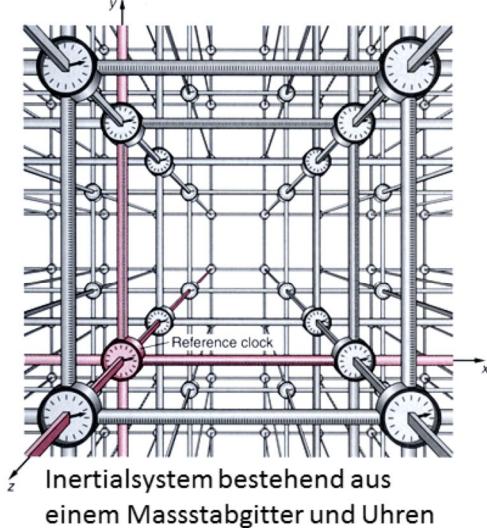
$$c_{b.R.} = \frac{\pm c_W + u}{1 + \frac{\pm c_W \cdot u}{c^2}} = (\pm c_W + u) \frac{1}{1 \pm \varepsilon} \approx (\pm c_W + u)(1 \text{ m}\varepsilon) = \pm c_W + u - c_W \varepsilon \cancel{mu\varepsilon}$$

$$= \pm c_W + u - c_W \frac{c_W \cdot u}{c^2} \cancel{mu} \frac{c_W \cdot u}{c^2} = \pm c_W + u - u \cancel{\frac{n^2}{c^2}} \cancel{mu} \frac{c \cdot u}{n \cdot c^2} \approx \pm c_W + u \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \text{ m} \cancel{\frac{u}{n \cdot c}} \cancel{\text{sehr klein}} \right)$$

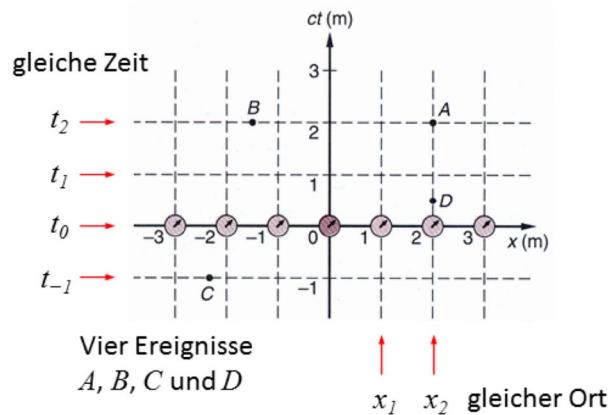
$$\rightarrow c_{b.R.} - c_W = \Delta c_{\pm} = u \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

Raum-Zeit (Minkowski) Diagramm

Im Physik 1 hatten wir Weg-Zeit ($x-t$) Diagramme studiert. Wir tun es hier wieder, multiplizieren die Zeit aber mit c um Koordinatenachsen mit gleichen Einheiten zu erhalten. #)



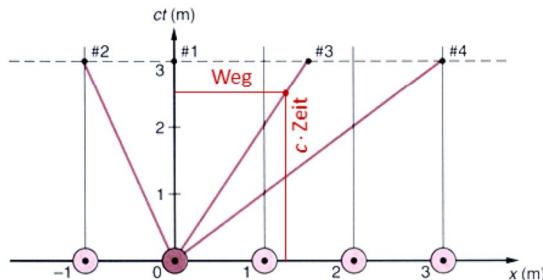
Hermann Minkowski, 1864 - 1909, hat Entscheidendes zur Relativitätstheorie beigetragen. Er starb jung an einem Blinddarmdurchbruch.



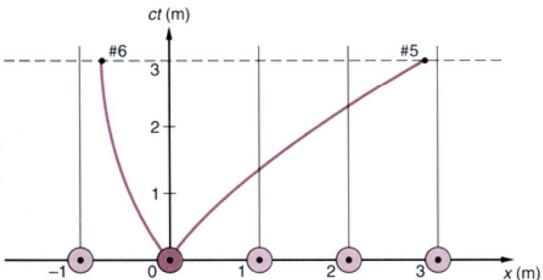
#) Im Vergleich zu früher vertauschen wir die x - und die t -Achse. Der Übersicht halber werden ausserdem die y - und die z -Achse weggelassen.

Weltlinien

Die Existenz jedes Teilchens wird als **Weltlinie** dargestellt.



Die Weltlinien von vier Teilchen mit konstanten Geschwindigkeiten entlang der x -Achse.



Zwei Weltlinien von beschleunigten Objekten.

31. Wie viel Zeit bedeutet 1 m auf der vertikalen Achse ?

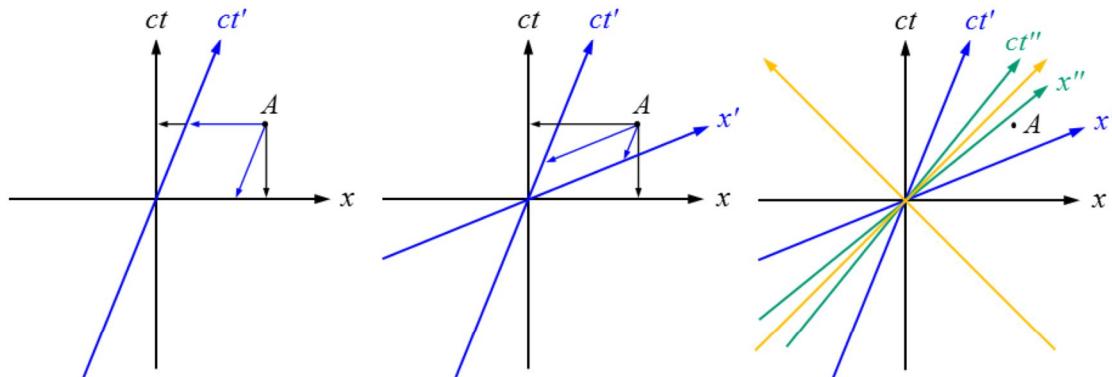
® 3.3×10^{-9} s ; 1 (Licht-) Fuss = 1 ft $\equiv 10^{-9}$ s = 1 ns

32. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Teilchen #1 bis #4.

33. Welches Teilchen bremst, #5 oder #6 ?

Zwei Koordinatensysteme S und S'

Viele Aufgaben können elegant mit Hilfe der Minkowski Diagramme gelöst werden. Dazu wird das bewegte System S' ebenfalls im gleichen Diagramm dargestellt



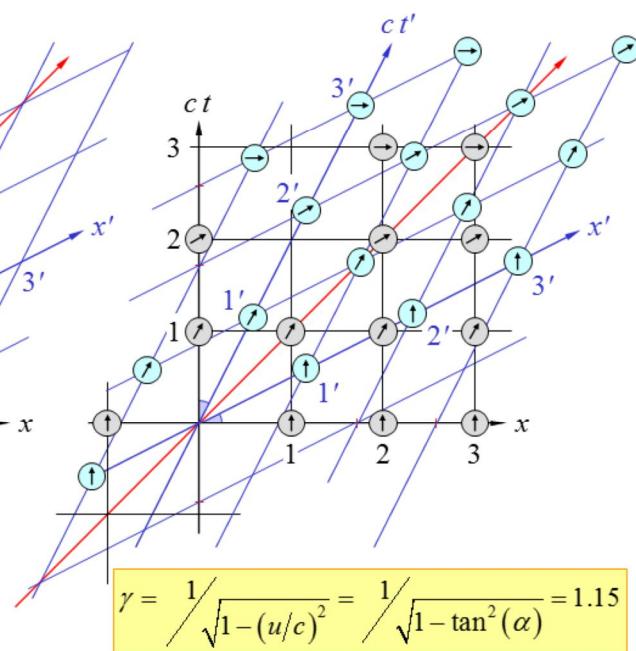
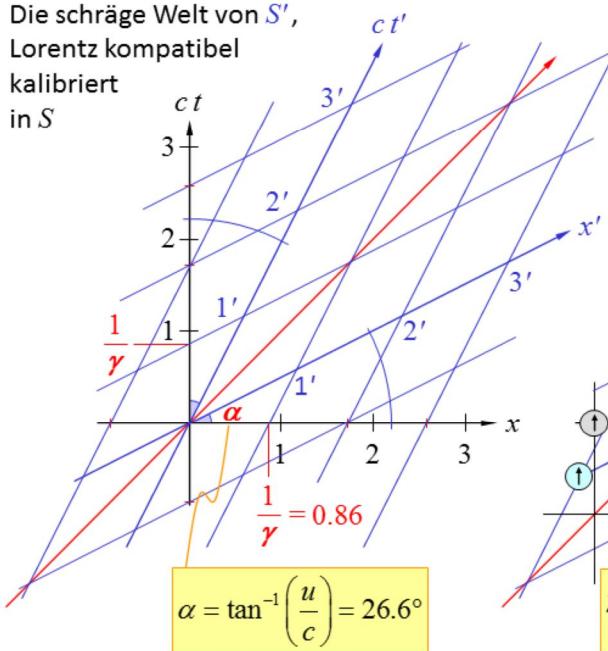
Falsches Diagramm: Das Ereignis A findet zur gleichen Zeit in S und S' statt ($t = t'$).

Korrekte Diagramm: Jedem Ereignis A wird ein Ort und eine Zeit zugeordnet: schwarz in S , blau in S'

Korrekte Diagramm für $u = 0.4 c$ (S') und $u = 0.8 c$ (S'') relativ zum ungestrichenen System S

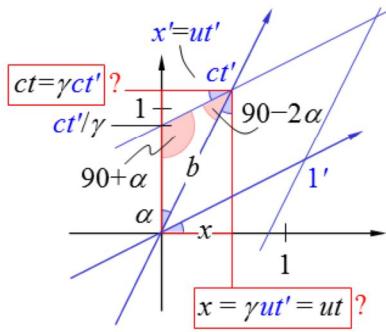
Zwei kalibrierte Minkowski Welten

Die schräge Welt von S' ,
Lorentz kompatibel
kalibriert
in S



Berechnen Sie u für das Diagramm oben.

Geometrie im Minkowski Diagramm



$$\frac{b}{\sin(90+\alpha)} \stackrel{\text{Sinusatz}}{=} \frac{ct'/\gamma}{\sin(90-2\alpha)}$$

$$\rightarrow \frac{b}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\gamma} \frac{ct'}{\cos(2\alpha)}$$

$$\rightarrow b = \frac{1}{\gamma} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(2\alpha)} ct'$$

$$\tan(\alpha) = \frac{u}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)}$$

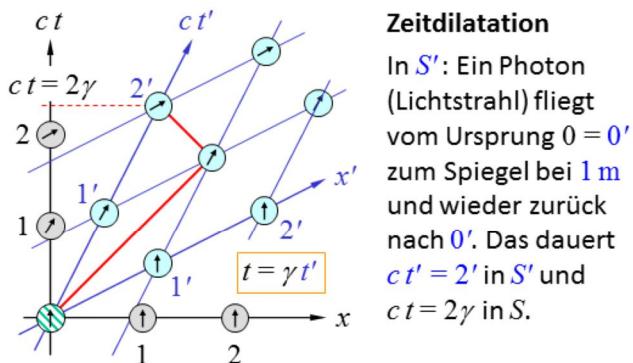
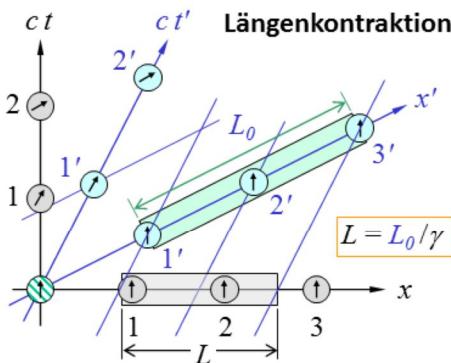
$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$$

$$ct = b \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{\gamma} \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos(2\alpha)} ct' = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \tan^2(\alpha)} ct' = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} ct' = \frac{1}{\gamma} \gamma^2 ct' = \gamma ct'$$

$$t = \gamma t'$$

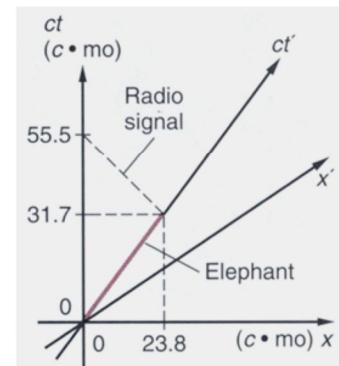
$$x = \gamma x'$$

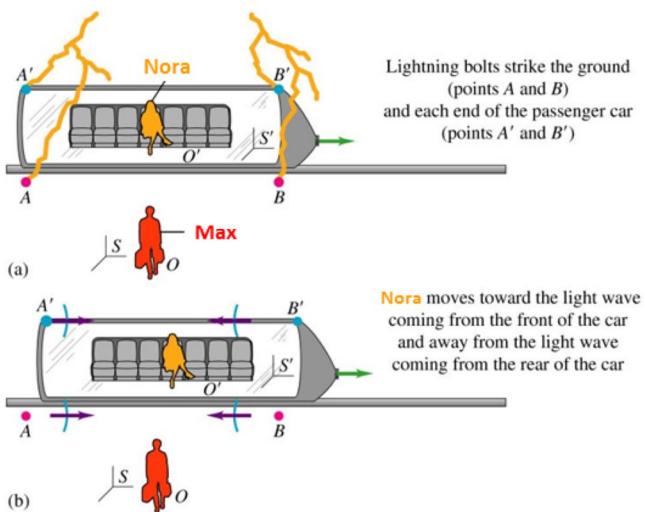
$$x = b \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(2\alpha)} ct' = \frac{1}{\gamma} \frac{\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} ct' = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{u}{c}}{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} ct' = \frac{1}{\gamma} \gamma^2 \frac{u}{c} ct' = \gamma u t' = \gamma x'$$



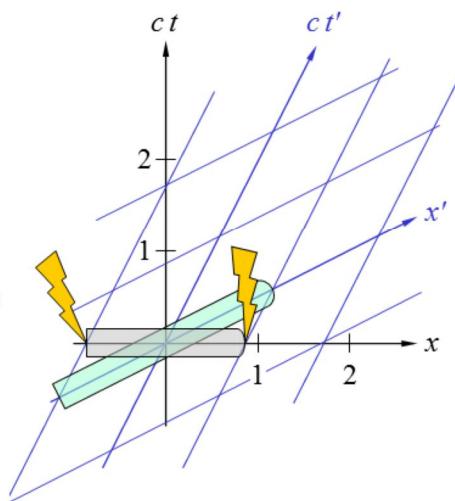
34. Elefanten haben eine Tragzeit von 21 Monaten. Eine frisch trächtige Elefantenkuh wird in ein Raumschiff verfrachtet und auf eine Reise zu einem Zoo in der Andromedagalaxie geschickt. Die Geschwindigkeit des Raumschiffes beträgt $0.75c$. Wann vernimmt der zurückgebliebene Zoowärter über Radio den ersten Trompetenstoss des neugeborenen Kalbes?

® Nach 55.5 Monaten aus einer Distanz von 23.8 Lichtmonaten; $\gamma = 1.51$





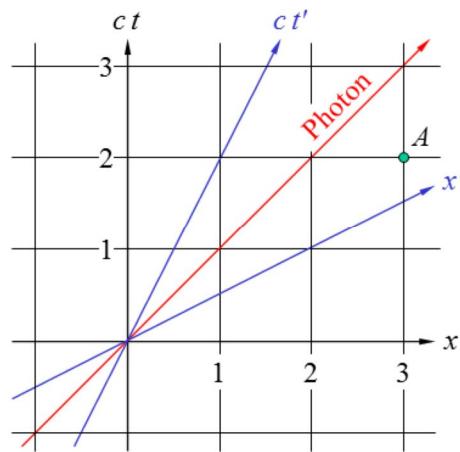
Zwei Blitze schlagen vorne und hinten ein, gleichzeitig für **Max** in S , nicht gleichzeitig für **Nora** im Raumschiff S'



35. Zeichnen Sie die Ereignisse A und B in die Figur ein. Wann messen S und S' die Ereignisse A und B ?

<http://cms.uni-konstanz.de/fileadmin/physik/nielaba/lehre/mechanik/relativ/Relativ.html>
http://www.einstein-online.info/spotlights/complete_spotlights

36. Mit welcher Relativgeschwindigkeit bewegen sich die Systeme S und S' zu einander?
 ® $u = 0.5 c$

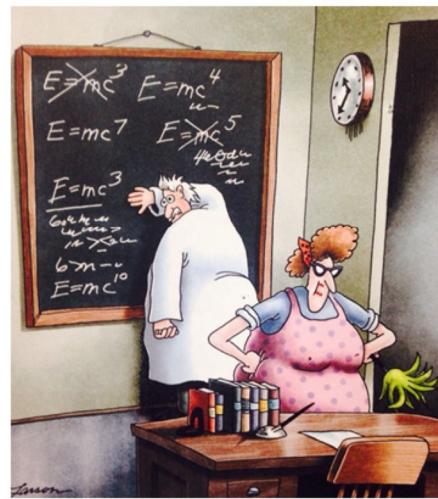


37. Ereignis A hat in S die Koordinaten $(x=3, ct=2)$. Bestimmen Sie die Koordinaten in S' . ® (2.31, 0.58)

38. Ein Ereignis B habe in S' die Koordinaten $(x'=0.5, ct'=1)$. Bestimmen Sie die Koordinaten in S . Zeichnen Sie das Ereignis B in das Raum-Zeit Diagramm ein. ® (1.15, 1.44)

39. Berechnen Sie $(\Delta s)^2 = (ct_B - ct_A)^2 - (x_B - x_A)^2$ und $(\Delta s')^2 = (ct'_B - ct'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2$ ® -3.1

40. Zeichnen Sie die Linie der gleichzeitigen Ereignisse zur Zeit $ct'=1$ im System S' .



"Now that desk looks better. Everything's squared away, yessir, squaaaaared away."

$$x = \gamma \left(x' + \frac{u}{c} ct' \right) ; \quad ct = \gamma \left(ct' + \frac{u}{c} x' \right)$$

41. Galaktisches Rennen: Nora (S') steuert ihr Raumschiff über die Ziellinie mit einer Geschwindigkeit von $0.600 c$ relativ zu dieser Linie. Vom Heck ihres Raumschiffes wird eine Hurra-Botschaft (Ereignis B) los gesandt in dem Moment, wo vorne die Ziellinie überfahren wird (Ereignis A). Nora misst ihr Raumschiff mit 300 m Länge. Max (S) steht bei der Ziellinie.

A) Wann und wo misst er die Ereignisse A und B ? Wählen Sie Ereignis A als Ursprung für Raum und Zeit in beiden Koordinatensystemen. Ereignis A = Ziellinie in S : $x = 0$ und $t = 0$, Ereignis A = Front in S' : $x' = 0$ und $t' = 0$. Ereignis B = Heck in S' : $x' = -300 \text{ m}$ und $t' = 0$.

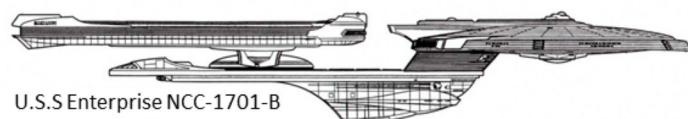
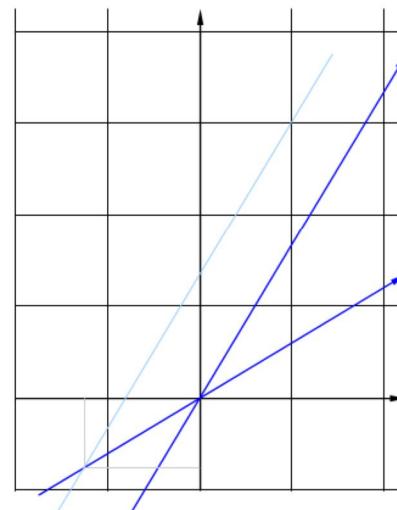
⑧ Ereignis B in S : $x = -375 \text{ m}$, $t = -0.750 \mu\text{s}$

B) Wann trifft das Heck die Ziellinie? Zeichnen Sie das Ereignis in das Diagramm ein und berechnen Sie t und t' .

⑧ $t = 1.336 \mu\text{s}$, $t' = 1.667 \mu\text{s}$

C) Das Hurra-Gebrüll wird noch durch ein Feuerwerk begleitet. Zu welcher Zeit t und t' trifft der Feuerblitz bei Nora ein? Zeichnen Sie die Weltlinie des Blitzes zum Bug des Raumschiffs.

⑧ $t = 1.250 \mu\text{s}$, $t' = 1.000 \mu\text{s}$



Für Nora finden die beiden Ereignisse A und B gleichzeitig statt. Max erlebt etwas anderes. Er wundert sich, dass die Hurra-Botschaft $0.75 \mu\text{s}$ zu früh gebrüllt wurde. Seine Gleichzeitigkeit und ihre sind unterschiedlich.

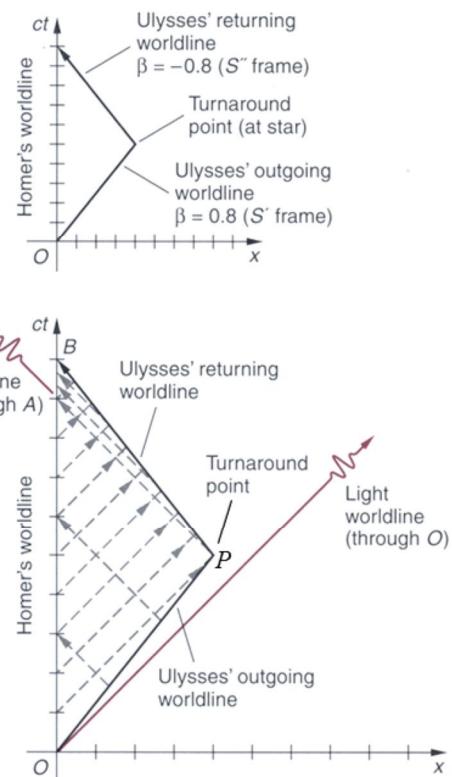
Zwillings Paradoxon

42. Das berühmteste Beispiel ist das Zwillingsparadoxon. Homer und Odysseus (engl: Ulysses) sind eineiige Zwillinge. Odysseus geht mit einem Raumschiff auf Reise zu einem fernen Planeten P und kehrt wieder zurück. Das Raumschiff ist mit einer konstanten Geschwindigkeit von $0.8 c$ unterwegs ($\gamma = \frac{5}{3}$). Wenn Odysseus zurückkehrt, ist er wesentlich jünger als sein zu Hause gebliebener Bruder. Widerspricht das nicht dem Prinzip der Relativität?

Der Planet sei 4 Lichtjahre von der Erde entfernt. Die Hinreise des Raumschiffs dauert also 5 Jahre aus Sicht von Homer. Odysseus erlebt die Reise kürzer, nur $5/\gamma = 3$ Jahre. Das gleiche gilt für die Rückreise. Odysseus wird also nur 6 Jahre altern, während sein zu Hause gebliebener Bruder 10 Jahre alt.

A) Wie weit ist der Planet von der Erde entfernt aus Sicht von Odysseus. ® 2.4 LY

B) Beide senden jedes Jahr ein Radiosignal. Interpretieren Sie die Grafik rechts.



Das Problem ist nicht symmetrisch. Homer bleibt im gleichen Inertialsystem, während sein Bruder das Inertialsystem für die Rückreise wechselt. Dieser Wechsel bewirkt den Altersunterschied, nicht die (kurzen) Beschleunigungsphasen von Odysseus. Dieses Resultat kann mit kurzlebigen Elementarteilchen experimentell bestätigt werden.

C) Homer sendet genau 1 Jahr nach Abflug von Odysseus ein Radiosignal hinterher. Wann und wo erreicht dieses Radiosignal Odysseus ?

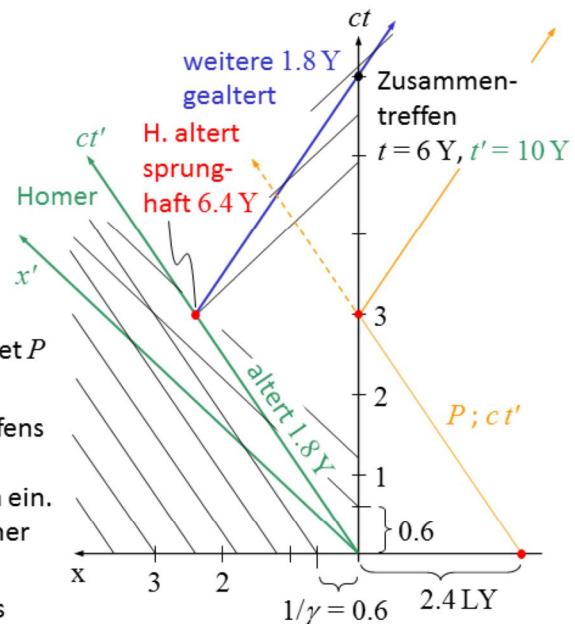
® 4 Y nach Aussenden

D) Homer sendet ein zweites Radiosignal 2 Jahre nach Abflug von Odysseus. Wann und wo erreicht es Odysseus ? ® 3.56 Y

E) Odysseus Raumschiff misst auf der Erde, in Ruhe 115 m. Wie lange misst ein Bewohner auf P das heran fliegende Raumschiff. Der Planet P bewegt sich nicht bezüglich Erde. ® 69 m

F) Zeichnen Sie das Ereignis des Zusammentreffens mit dem Planeten P und gleichzeitig (aus Sicht Odysseus) den Aufenthaltsort von Homer darin ein. Nach wie vielen Jahren trifft Odysseus (aus seiner Sicht) den Planeten P? ® 3 Y

G) In welcher Distanz befindet sich die Erde aus Sicht von Odysseus, wenn er den Planeten P trifft ? Wie viel Zeit ist auf der Uhr von Homer dann aus Sicht von Odysseus verstrichen seit der Trennung der beiden? ® 2.4 LY, 1.8 Y



Langer Stab in kurze Scheune

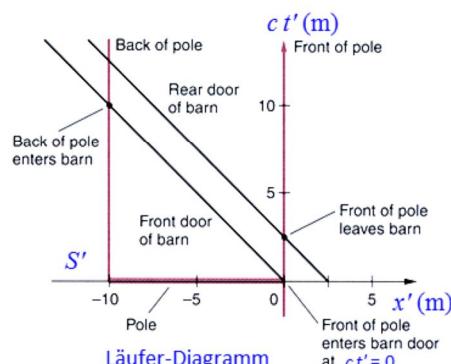
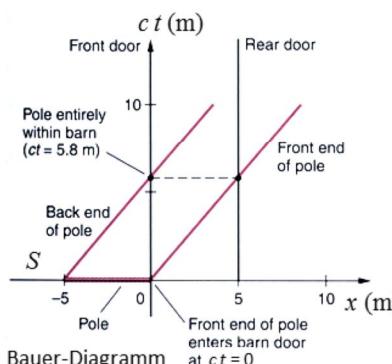
Ein (extrem schneller) Läufer rennt mit einer 10 m langen Stange auf eine 5 m lange Scheune zu. Der Bauer steht bei der Scheune und behält Front- und Hintertür im Auge. Mit welcher Geschwindigkeit muss der Läufer rennen, so dass der Bauer in einem Moment beide Türen schliessen kann und der Stab in der Scheune Platz hat?

Das Paradox ergibt sich wieder aus der falschen, aber intuitiven Vorstellung der Gleichzeitigkeit. Was der Bauer als gleichzeitig hinten und vorne misst, erlebt der Läufer nicht gleichzeitig. #)

Der Stab muss sich um die Hälfte kontrahieren, damit er für den Bauer in der Scheune Platz hat.

$$\gamma = 2 \rightarrow u = 0.866 c$$

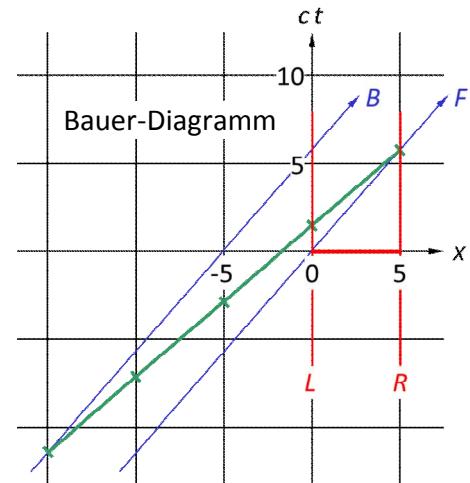
43. Wie lange ist die Scheune für den Läufer? ® 2.5 m



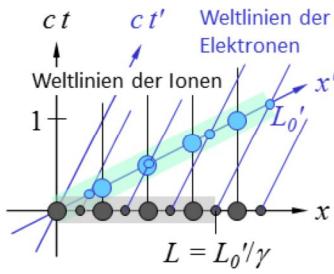
#) Der Bauer misst einen verkürzten Stab. Das vordere Ende des Stabes ist bei der Hintertür der Scheune, wenn gleichzeitig das hintere Ende des Stabes bei Vordertür der Scheune ist. Deshalb kann der Bauer die Türen in seiner Welt gleichzeitig schliessen.

Der Läufer misst eine auf 2.5 m verkürzte Scheune, die sich wie ein Armreif über den Stab hinweg bewegt. Das vordere Ende des Stabes hat die Scheune längst verlassen, wenn das hintere Ende des Stabes in die Scheune eintritt. Das Ereignis des Türeschliessens findet auch im System des Läufers statt, aber nicht gleichzeitig: zuerst die Hintertür (*R*), dann die Vordertür (*L*) der Scheune.

Natürlich muss der Bauer nach dem Schliessen der Hintertür sofort wieder öffnen, damit der Läufer mit dem Stab weiterlaufen kann!



Relativistischer, gerader Stromdraht



Ein Draht führt Strom. Im Laborsystem S ist der Draht ungeladen, hat also gleiche Elektronen- wie Ionenendichte $n_- = n_+ = n$. Im System S' , das sich mit den Elektronen mit $u = v_{Dri\ddot{f}t}$ bewegt, liegen die Ionen dichter und die Elektronen weniger dicht als im Laborsystem.

$$\underline{n}_+ = \frac{n \cdot L}{L/\gamma} = n \cdot \gamma \quad \underline{n}_- = \frac{n \cdot L}{L'_0} = \frac{n}{\gamma} \rightarrow (\underline{n}_+ - \underline{n}_-) = n \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$(\underline{n}_+ - \underline{n}_-) = n \cdot \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \approx n \cdot \gamma \left(1 - \left(1 - (v_D/c)^2 \right) \right) = n \cdot \gamma \frac{v_D^2}{c^2}$$

Im Laborsystem S erzeugt der Strom I ein Magnetfeld B im Abstand r vom Leiter (Gesetz von Ampère):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} = \frac{I}{(\epsilon_0 c^2) 2\pi \cdot r}$$

In S' erzeugt die Ladung

$$(\underline{n}_+ - \underline{n}_-) \text{ ein elektrisches Feld } E' \quad E' = \frac{q_e (\underline{n}_+ - \underline{n}_-)}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{q_e \left(n \cdot \gamma \frac{v_D^2}{c^2} \right)}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\gamma (q_e m v_D) v_D}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} = \frac{\gamma \cdot I \cdot v_D}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} = \gamma \cdot v_D \times B$$

(Coulomb Gesetz).

Auch S' wird noch ein B' -Feld sehen, denn S' sieht einen Ionenstrom. Das E' -Feld entsteht zusätzlich.

Ein B -Feld in einem System (S), zeigt sich als E -Feld im anderen System (S'), und umgekehrt. Mit ähnlichen Überlegungen hat Einstein die Lorentz Transformationen für elektrische und magnetische Felder hergeleitet. Heute sehen wir das E - und das B -Feld nur noch als unterschiedliche Deutung des elektromagnetischen Feldes in Funktion des Bewegungszustandes.

Relativität der Elektrodynamik

Einstiens berühmter Artikel in den "Analen der Physik" von 1905.

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhafsten scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Exakte Lorentz Transformationen zwischen E - und B -Feld. In Bezug auf die Relativ-Geschwindigkeit u wird zwischen parallelen und senkrechten Feldkomponenten unterschieden.

$$E'_P = E_P \quad B'_P = B_P$$

$$E'_\perp = \gamma(E + u \times B)_\perp \quad B'_\perp = \gamma\left(B - \frac{u \times E}{c^2}\right)_\perp$$

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

891

892

A. Einstein.

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhafsten scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raum stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustand des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit v fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwell'schen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers“ wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum“ eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen. Die nicht genügende Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Wurzel der Schwierigkeiten, mit denen die Elektrodynamik bewegter Körper gegenwärtig zu kämpfen hat.

I. Kinematischer Teil.

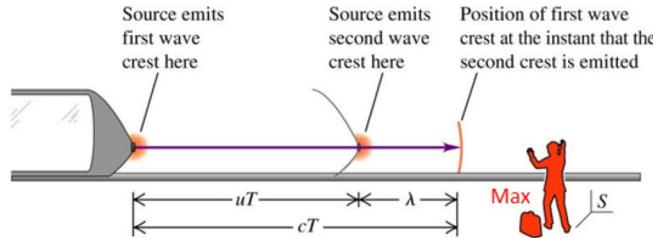
§ 1. Definition der Gleichzeitigkeit.

Es liege ein Koordinatensystem vor, in welchem die Newtonschen mechanischen Gleichungen gelten. Wir nennen dies Koordinatensystem zur sprachlichen Unterscheidung von später einzuführenden Koordinatensystemen und zur Präzisierung der Vorstellung das „ruhende System“.

Ruht ein materieller Punkt relativ zu diesem Koordinatensystem, so kann seine Lage relativ zu letzterem durch starre Maßstäbe unter Benutzung der Methoden der euklidischen Geometrie bestimmt und in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden.

Wollen wir die *Bewegung* eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen physikalischen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter „Zeit“ verstanden wird.

Dopplereffekt von elektro-magn. Wellen



$$f = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \cdot f_0' \quad \frac{f-f_0'}{f_0'} = \frac{\Delta f}{f_0'} \approx \frac{u}{c}$$

falls $u \ll c$

u positiv (negativ) bedeutet, die Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu (von ihm weg).

Max im System S' beobachtet die herannahende Quelle. T ist die von Max gemessene Zeit zwischen dem Aussenden zweier Wellenbergen (nicht Periodendauer). Mit Hilfe der Zeichnung berechnet man für die Wellenlänge $\lambda = (c - u)T$, und für die Frequenz $f = c/\lambda = c/[(c - u)T]$. Andererseits besteht eine relativistische Beziehung zwischen der Zeit T und der Eigenzeit T_0' der Quelle: $T = \gamma \cdot T_0' = \gamma/f_0'$.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-u) \cdot T} = \frac{c}{(c-u)} \frac{f_0'}{\gamma} = \frac{1}{\left(1-\frac{u}{c}\right)} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot f_0'$$

Weil Schall ein Trägermedium benötigt (z.B. Luft), muss für den Dopplereffekt zwischen der Bewegung der Quelle und des Beobachters unterschieden werden. Das erste Einsteinsche Postulat verlangt, dass es bei elektro-magn. Wellen nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter ankommt.

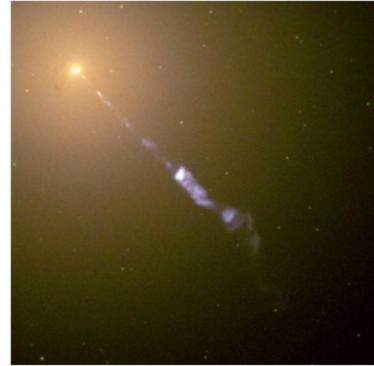
Die Lichtgeschwindigkeit ist für jede Frequenz im elektromagnetischen Spektrum gleich. Licht hat im Vakuum keine **Dispersion**. Das folgt aus den Maxwellgleichungen und kann experimentell bestätigt werden:

Frequenz f (1/s)	Photonenenergie E (eV)	Wellenlänge λ (m)	Geschwindigkeit v ($\times 10^8$ m/s)
1.7×10^7	1.9×10^{-7}	6.4	2.9978 ± 0.0003
4.7×10^8	7.0×10^{-7}	1.8	2.99795 ± 0.00003
3.0×10^8	1.2×10^{-6}	1.0	2.99792 ± 0.00002
3.0×10^9	1.2×10^{-5}	1.0×10^{-1}	2.99792 ± 0.00009
2.4×10^{10}	1.0×10^{-4}	1.2×10^{-2}	2.997928 ± 0.000003
7.2×10^{10}	3.0×10^{-4}	4.2×10^{-3}	2.997925 ± 0.000001
5.4×10^{14}	2.2	5.6×10^{-7}	2.997931 ± 0.000003
1.2×10^{20}	5.1×10^5	2.5×10^{-12}	2.983 ± 0.015
4.1×10^{22}	1.7×10^8	7.3×10^{-15}	2.97 ± 0.03

A.P. French, *Special Relativity*, 1968

44. Leiten Sie mittels Taylorentwicklung (Fehlerrechnung) die Beziehung für den Doppler-Shift bei kleinen u her.

45. Der Jet in der Abbildung besteht aus sehr schnellen Elektronen, welche vom Zentrum der Galaxie M87 ins Weltall geschleudert werden. Der Jet ist etwa 5000 Lichtjahre lang, die Galaxie ist 55 Mio LY entfernt. Die Elektronen bewegen sich in Magnetfeldern spiralförmig und sind somit beschleunigt. Beschleunigte Elektronen strahlen elektromagnetische Wellen ab, wie auch Antennen oder die Swiss Light Source in Würenlingen / Villigen). Das bläuliche Licht, das wir beobachten, hat eine Frequenz von $6.66 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Im Inertialsystem des Jets ist die Frequenz $5.55 \times 10^{13} \text{ Hz}$ (Infrarot). Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Jet auf uns zu ? ® 0.986 c



46. Überprüfen Sie die Gleichung für den Dopplereffekt am Raum-Zeit Diagramm von Aufgabe 42. $f = \frac{1}{3}$, 3 pro Jahr

47. Welche Frequenzverschiebung wird bei der Radar-Geschwindigkeitsmessung mit $f_0 = 16 \text{ GHz}$ durch Reflexion am fahrenden Auto ($u = 98 \text{ km/h}$) registriert ? Das Auto ist zuerst Empfänger, dann auch Sender. ® 2.9 kHz, kann mittels Schwebung detektiert werden.



Die meisten Objekte, die wir im Universum beobachten, sind rot-verschoben. Die Rotverschiebung bezieht sich nicht nur auf sichtbares Licht. Der Ausdruck bedeutet generell, dass die Wellenfrequenz kleiner wird, die Wellenlänge grösser als bei der Quelle. Entsprechend versteht man unter Blauverschiebung die Zunahme der Frequenz im Vergleich zur Quelle.

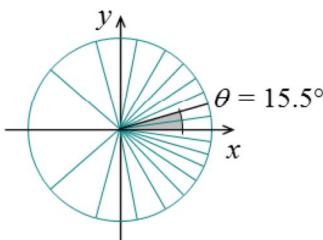
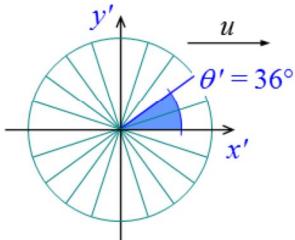
Weit entfernte Galaxien zeigen eine starke Rotverschiebung. Es handelt sich bei dieser Frequenzverschiebung aber nicht um den klassischen Dopplereffekt, viel mehr um eine Konsequenz der Ausdehnung des Universums. Galaxien entfernen sich von uns gemäss dem Hubble Gesetz. Die "Fluchtgeschwindigkeit" weit entfernter Galaxien ist nicht eine echte Geschwindigkeit, sondern der Abstand zwischen Galaxien nimmt wegen der Raumausdehnung zu. Für nahe Sterne und Galaxien ist die Rotverschiebung der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem elektromagnetischen Dopplereffekt für Relativbewegung identisch.

Headlight Effekt - Beaming Effekt

Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Bezugssystem gleich. Nicht gleich ist aber die Richtung der Strahlung. Eine isotrope Quelle bewege sich mit der Geschwindigkeit u bezüglich des Laborsystems S . Im Laborsystem S strahlt die Quelle dann vor allem in die Vorwärtsrichtung.

Ein Lichtstrahl unter θ' kommt um $\Delta x'$ voran: S misst ein anderes Vorankommen in Richtung x :

$$\begin{aligned} \Delta x' &= c\Delta t' \cdot \cos \theta' \\ \rightarrow \frac{\Delta x'}{c\Delta t'} &= \cos \theta' \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \Delta x &= c\Delta t \cdot \cos \theta \\ \rightarrow \frac{\Delta x}{c\Delta t} &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \cos \theta = \frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + u \cdot \Delta t')}{c\gamma(\Delta t' + u \cdot \Delta x'/c^2)} = \frac{\frac{\Delta x'}{c\Delta t'} + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{\Delta x'}{c\Delta t'}} = \frac{\frac{\Delta x'}{c\Delta t'} + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{\Delta x'}{c\Delta t'}}$$



$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cos \theta'}$$

48. Berechnen Sie die Geschwindigkeit u der Lichtquelle mithilfe der beiden Winkel in der Figur. Finden Sie den Strahl in S' , der zu 90° im x - y Laborsystem passt. $\gamma = 0.7c$, $\theta' = 134.4^\circ$

Ähnliches gilt für die anderen trigonometrischen Funktionen.

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c} \cos \theta' \right)}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma \left(\cos \theta' + \frac{u}{c} \right)}$$

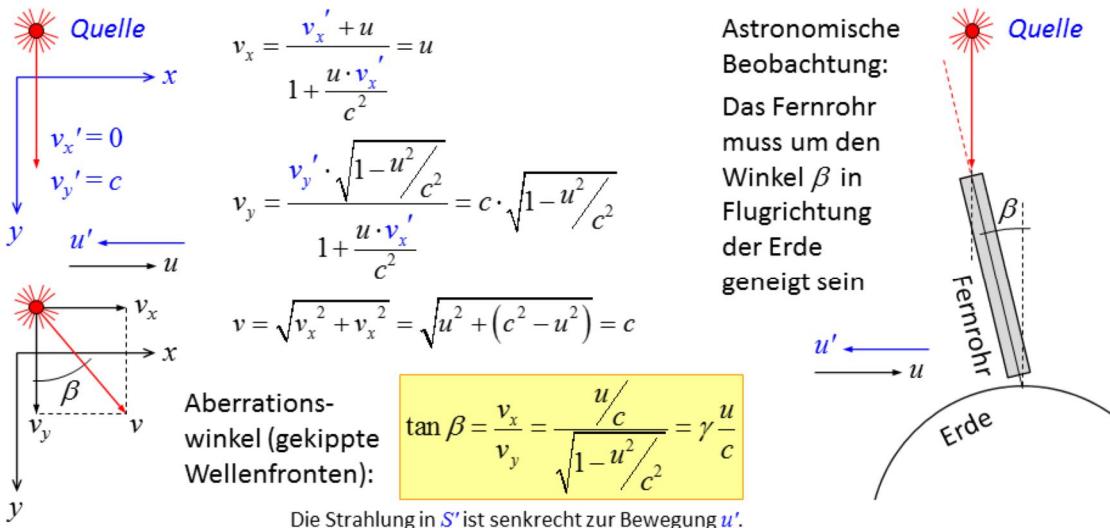
Bewegt sich eine Quelle oder ein Objekt sehr schnell auf uns zu, leuchtet es viel heller als wenn es in Ruhe ist. Und im Gegenteil, bewegt sich das Objekt von uns weg, leuchtet es viel schwächer. Dies hat Konsequenzen für Beobachtungen in der Astronomie, sowie für die Anwendung von Synchrotron-Strahlung.

Ausserdem ändern bewegte Objekte auch ihre Farbe (Dopplereffekt)!



Aberration des Lichts - Knick in der Optik

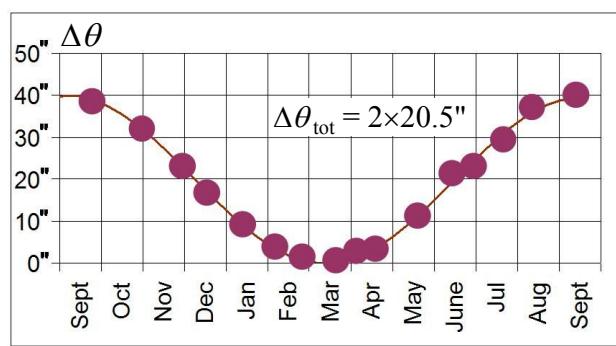
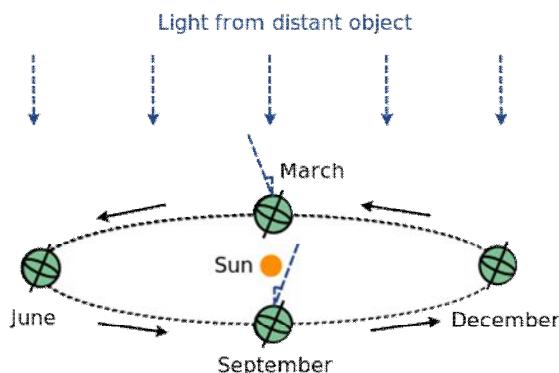
Eng verwandt, respektive identische mit dem Headlight Effekt ist die Aberration des Lichts. Dieses Phänomen existiert auch in der klassischen Physik: Fällt Schnee vertikal auf die Erde, hat der Autofahrer den Eindruck, die Flocken fliegen von schräg vorne auf ihn zu. Die Herleitung der Aberration gelingt mithilfe der Ausdrücke in der vorangehenden Folie; oder:



Der Ausdruck für $\tan \beta$ kann aus der Gleichung für $\tan \theta$ hergeleitet werden, wobei die Beobachtung senkrecht zur Bewegung ist, $\theta' = 90^\circ$. Beachte, der Winkel β hier und der Winkel θ auf der vorangehenden Folie sind nicht die gleichen! Die Winkel β und θ sind gegenüberliegend in einem rechtwinkligen Dreieck. Es gilt die geometrische Identität $\tan \beta = 1/\tan \theta = \cot \theta$:

$$\tan \beta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\gamma \left(\cos 90^\circ + \frac{u}{c} \right)}{\sin 90^\circ} = \frac{\gamma \left(\cos 90^\circ + \frac{u}{c} \right)}{\sin 90^\circ} = \gamma \cdot \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \checkmark$$

Bei Fixsternen kann eine halbjährliche Aberration beobachtet werden. Der Winkelunterschied in einem halben Jahr beträgt $\theta_{\text{Frühling}} - \theta_{\text{Herbst}} = 20.5'' = 9.94 \times 10^{-5}$ rad. Schon 1725 studierten James Bradley und Samuel Molyneux die halbjährliche Aberration mit ihrem Zenitteleskop. Die Kurve unten rechts wurde aus historischen Daten reproduziert. Es handelt sich um die Aberration des Fixsterns γ -Draconis (Sternbild Drachen). Mithilfe der klassischen Korpuskel-Theorie des Lichts konnte Bradley damit die Lichtgeschwindigkeit bestimmen. Bereits 1674 publizierte Robert Hooke (der "Federgesetz-Mann") seine Beobachtungen der halbjährlichen Positionsänderung von γ -Draconis, die er aber fälschlicherweise als Parallaxe deutete.

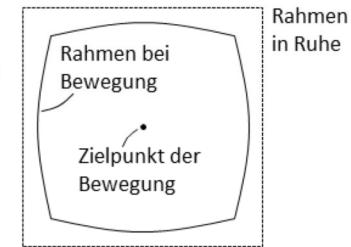
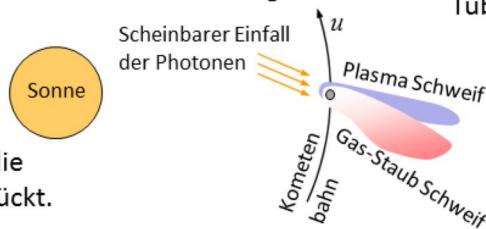


AP French (1968), Special Relativity, CRC Press, p 43

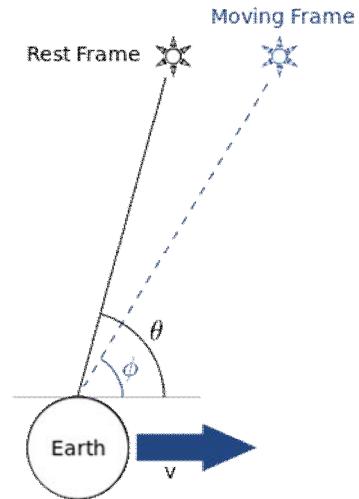
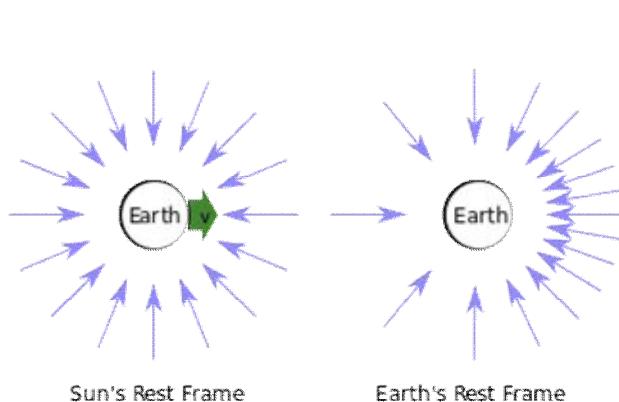
Erscheinungen und Kometenschweif

Die Bewegung der Erde um die Sonne, plus die Eigenbewegung der Sonne um das Zentrum der Milchstrasse müssen bei präziser Positionsbestimmung von Sternen berücksichtigt werden.

Kometen sind grosse, dreckige Schneebälle. Im Abstand von etwa 5 AU von der Sonne sublimiert Eis des Kometen zu Wasserdampf. Es entsteht eine Gas-Staub Atmosphäre um den Kometen, die so genannte Koma. Der Plasmaschweif entsteht durch UV-Bestrahlung der Koma und wird vom Sonnenwind (= geladene Elementarteilchen) "weggeblasen". Der Gas-Staub-Schweif wird durch die Sonnenphotonen weggedrückt.



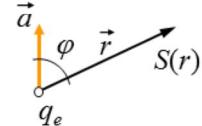
Fliegt man mit hoher Geschwindigkeit auf ein Fenster mit quadratischer Öffnung zu, ergibt sich das Bild oben (vergl. Flug durch Tübingen).



Beschleunigte Elektronen strahlen

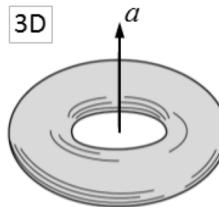
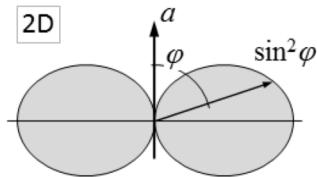
Wechselstrom strahlt immer (Hochspannungsleitung, Stabantenne, etc.). Statt veränderlichen Strom kann man die Strahlung eines einzelnen, beschleunigten Elektrons studieren. Die Dipolstrahlung eines Elektrons berechnet sich in der Fernzone (Siehe Bücher über klassische Elektrodynamik #):

$$\text{Pointing-Vektor in Richtung Beobachter: } S(r) = \frac{dP}{dA} = \frac{q_e^2 a^2 \sin^2 \varphi}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

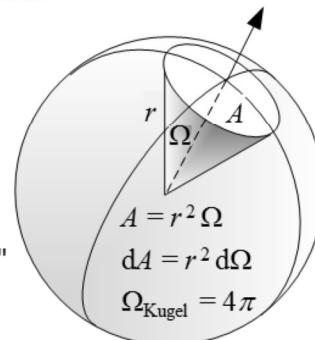


q_e : Elementarladung = $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$; a : Beschleunigung des Elektrons;
 φ : Beobachtungsrichtung; r : Abstand des Beobachters zum Elektron

$$\text{Abstrahlung pro Raumwinkel } d\Omega: \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q_e^2 a^2 \sin^2 \varphi}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right]$$



Die Strahlungsleistung verteilt sich "ringförmig" um die Beschleunigung



#) J.D. Jackson, Classical Electrodynamics

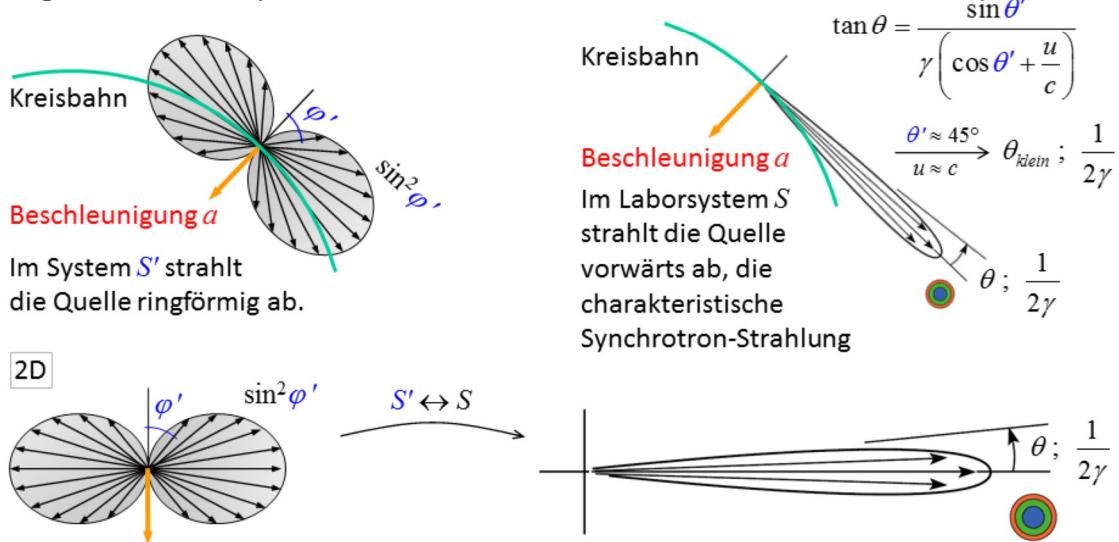
P. Duke, A Hofmann, Synchrotron Radiation

A Hofmann, Synchrotron Radiation

D. Attwood, frei zugängliche Lecture Notes auf dem Internet, 2009

Synchrotron Strahlung

In einem Synchrotron (und am CERN) bewegen sich geladene Teilchen mit nahezu Lichtgeschwindigkeit im Kreis herum. Die Beschleunigung a bei gleichbleibender Geschwindigkeit zeigt zum Kreismittelpunkt.



Neben der Winkeländerung ist auch die Frequenzschiebung durch den Dopplereffekt zu berücksichtigen. Die Vorwärtsstrahlung wird dadurch zusätzlich noch energiereicher. Der 45° -Ring im Elektronensystem S' wird zu einer flachen Vorwärtskeule im Laborsystem S mit einem Öffnungswinkel $\varphi \approx 1/(2\gamma)$.

Frame of reference moving with electrons

$$\begin{array}{ccc} k' & & \\ \uparrow \theta' & & \\ k'_x & & \\ k'_z & & \\ k' = 2\pi/\lambda' & & \end{array} \xrightarrow{\text{Lorentz transformation}} \quad$$

Laboratory frame of reference

$$\begin{array}{ccc} k & & \\ \uparrow \theta & & \\ k_x = k'_x & & \\ k_z = 2\gamma k'_z (\text{Relativistic Doppler shift}) & & \\ \theta = \frac{k_x}{k_z} = \frac{k'_x}{2\gamma k'_z} = \frac{\tan \theta'}{2\gamma} = \frac{1}{2\gamma} & & \end{array}$$

Professor David Atwood
AST 210/EECS 213
Univ. California, Berkeley

Ch05_F11modif_VG.ai

Swiss Light Source (SLS) in Villigen



Ringdurchmesser: 92 m

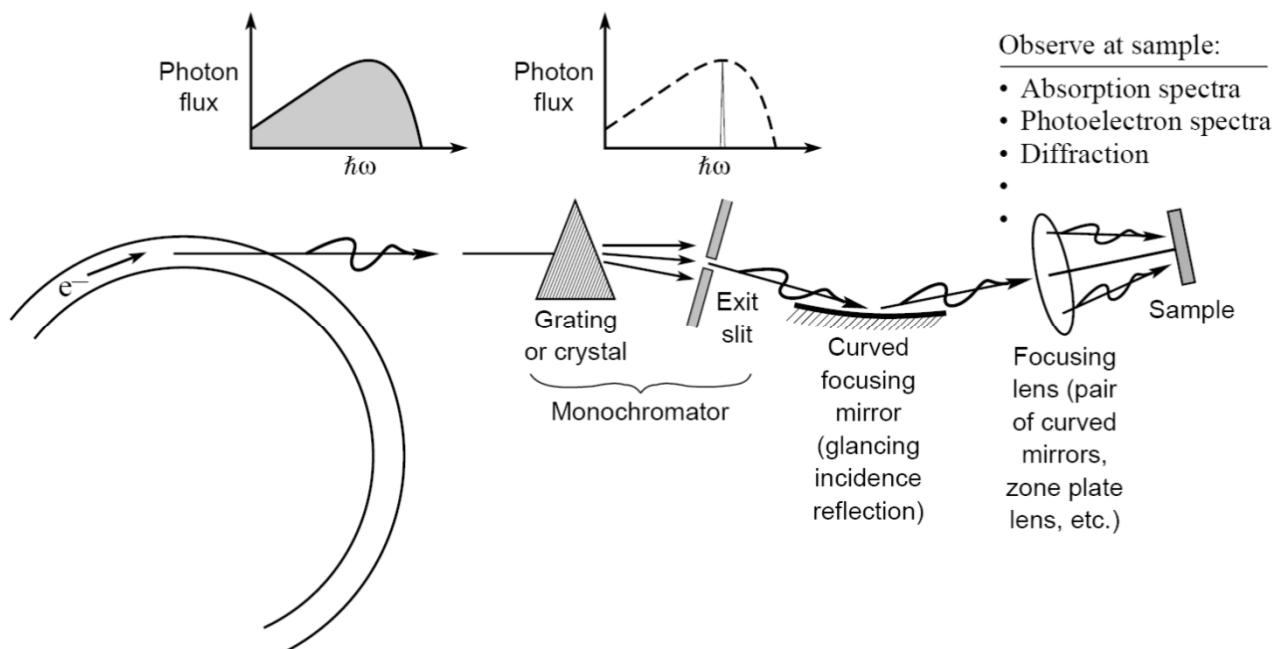
Energie der Elektronen: 2.4 GeV

Umlaufstrom: 400 mA

Strahlgrösse: 62.7 μm (hor.) \times 10.8 μm (ver.)



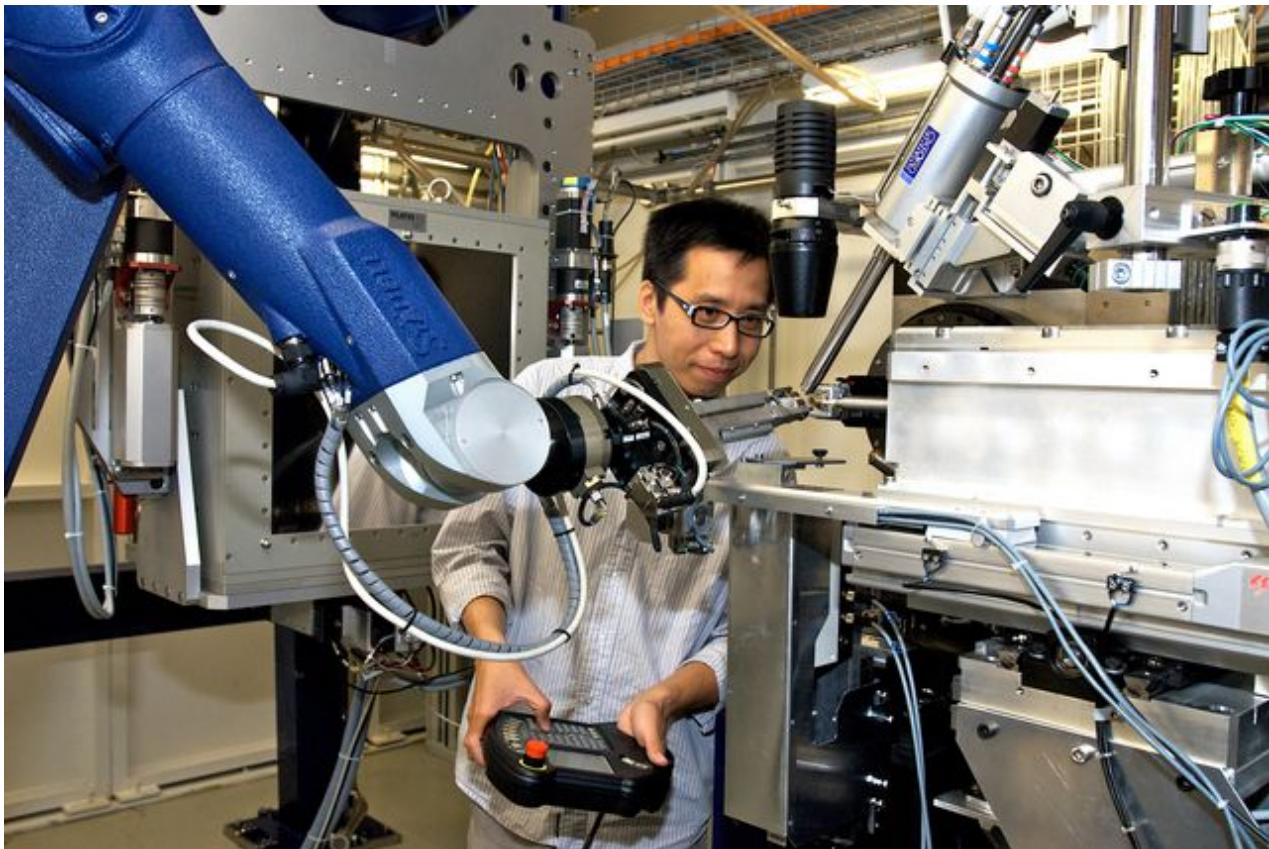
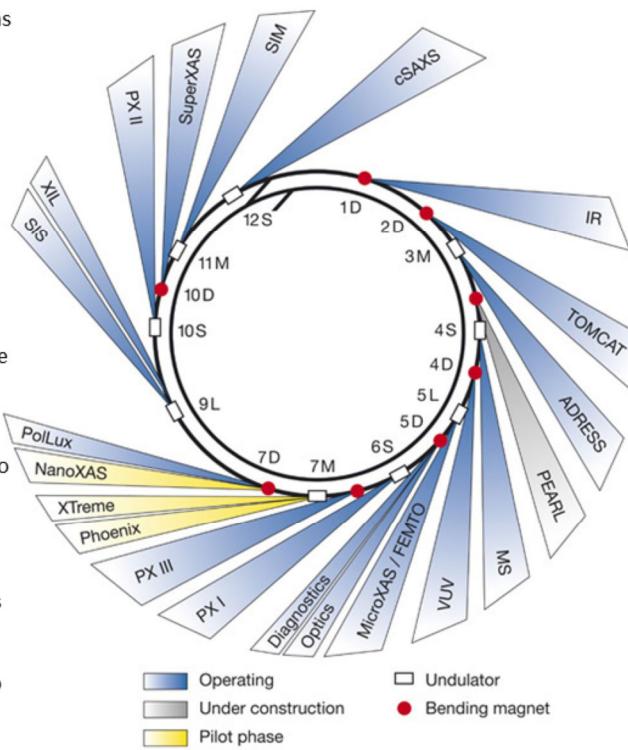
Typischer Strahlengang bis zur Probe. Die "weisse" Strahlung wird noch *monochromatisiert*!



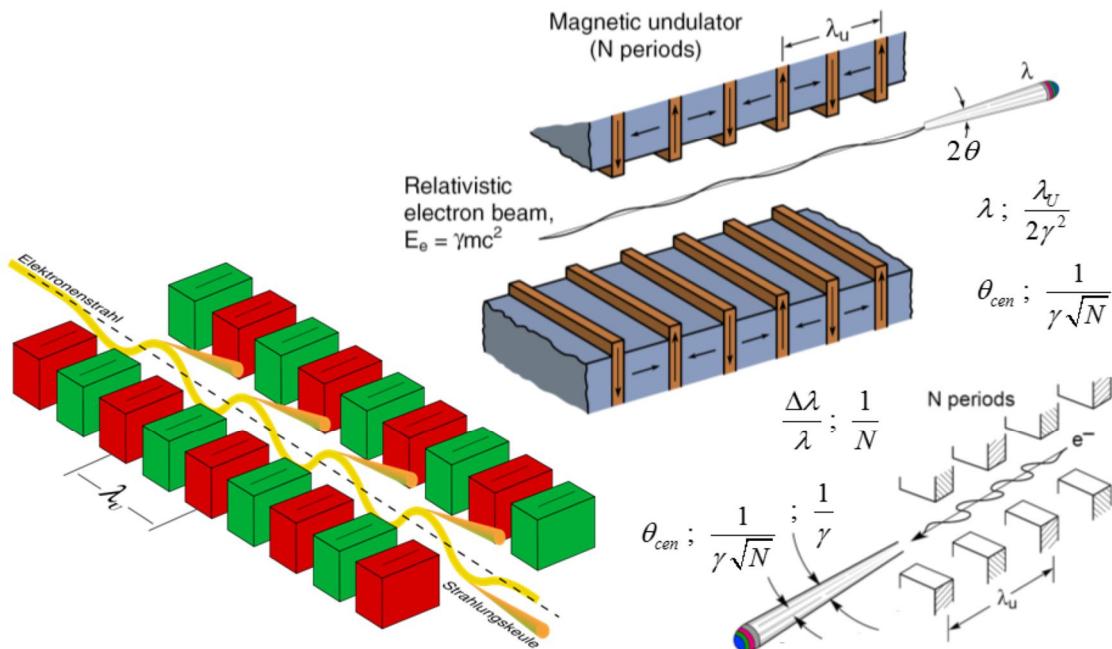


As of June 2009 SLS has eighteen experimental stations (undulators and bending magnets) and seventeen operational beamlines. There are three protein crystallography beam-lines, two of which are partially funded by associations of Swiss pharmaceutical companies including Novartis, Roche, Actelion, Boehringer Ingelheim and Proteros.

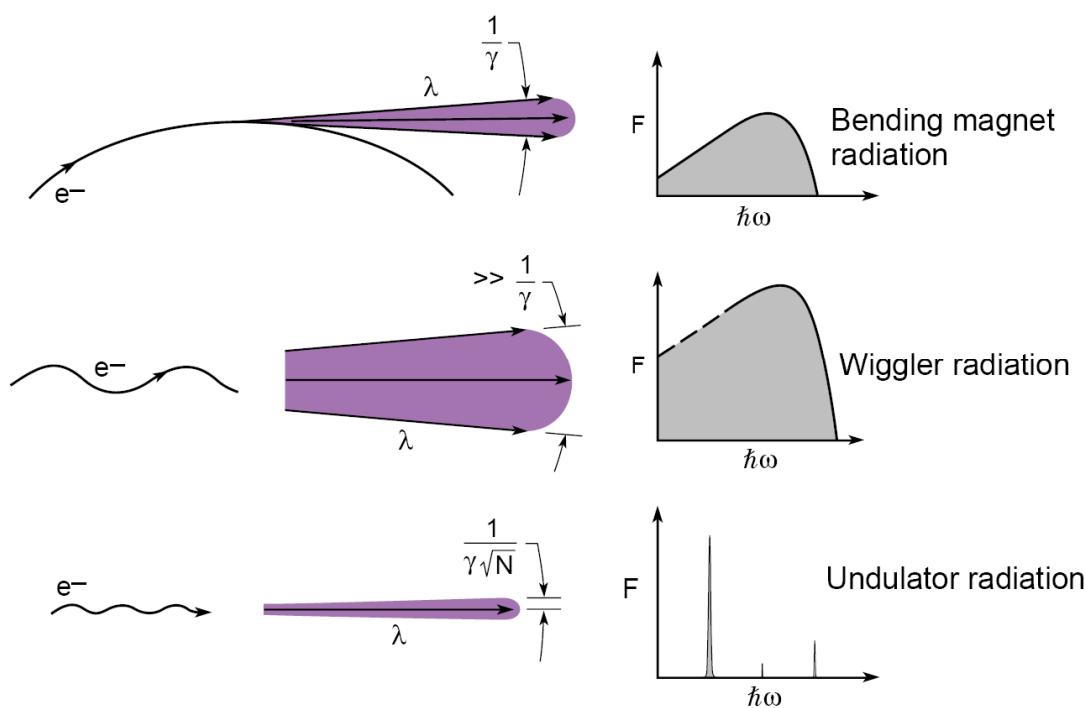
The 2.4 GeV electron storage ring of 288 m circumference is formed by 36 dipole magnets of 1.4 tesla magnetic field, combined in 12 groups of three (triple bend achromat, TBA) for achromatic deflection of the electron beam. 12 straight sections between the TBAs of different lengths (3×11.5 m, 3×7 m, 6×4 m) accommodate the undulator magnets to generate ultraviolet and X-ray light of extreme brightness. 3 of the dipoles have an increased center field of 3 teslas to produce hard X-rays. A total of 177 quadrupole magnets (magnetic lenses) focusses the beam to provide an emittance of 5.5 nm rad. 120 sextupole magnets correct the chromatic focusing errors of the quadrupoles. 73 horizontal and vertical beam steerers are used to continuously correct the position of the electron beam. Finally 24 skew quadrupole magnets are adjusted to correct any torsion of the beam and to minimize the vertical emittance: a world record low value of 3 pm rad has been achieved in 2008.



Undulator (Wiggler) - Strahlverstärker



Die Schlangelbewegung der Elektronen durch ein alternierendes Magnetfeld verstärkt den Keulencharakter der abgestrahlten Leistung.



Relativistischer Impuls

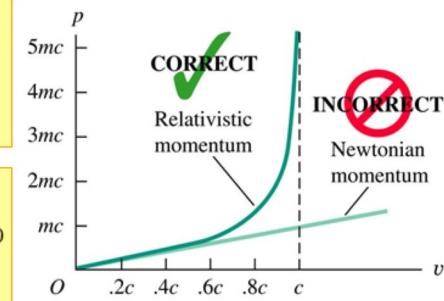
Koordinaten transformieren sich via Lorentzgleichungen von einem Inertialsystem ins andere. Newtons Gesetze sollen dabei aber unverändert gelten. Das erfordert eine neue Definition von Impuls und Energie.

Relativistischer Impuls
(Herleitung via Impulserhaltung, siehe Giancolis "Physics for Scientists ...")

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

$p = m_{rel} \cdot v$, es kann eine **relativistische Masse** definiert werden.
 m_0 heisst Ruhemasse. ^{§)}

$$m_{rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0$$



49. Ein Behälter mit 3.8 mol Heliumgas befindet sich auf einer Temperatur von 1720 K. Könnte man eine relativistische Massenzunahme auf einer Waage messen? Einfache Abschätzung!

$$\textcircled{R} v_{rms} = 3274 \text{ m/s}, \gamma - 1 \approx \textcircled{R} 6.0 \times 10^{-11}, \Delta m_{rel} \approx 9 \times 10^{-13} \text{ kg}$$

Für kleine Geschwindigkeiten v geht der relativistische Impuls in den klassischen Ausdruck $p = m_0 \cdot v$ über.

Oft wurde γ für relativ mit u bewegte Koordinatensysteme verwendet. v und u sind gleich, wenn S' das Inertialsystem ist, in welchem sich das Teilchen in Ruhe befindet.

^{§)} Die Ruhemasse von Elementarteilchen wie das Elektron kann aus Tabellen entnommen werden. Die relativistische Masse ist sehr allgemein anwendbar. Im berühmten Ausdruck $E = mc^2$ muss für m die relativistische Masse m_{rel} eingesetzt werden. Andererseits gilt nicht: $F_{rel} = m_{rel} \cdot a$! Das zweite Newtonsche Gesetz wird auf der nächsten Seite behandelt.

$$\textcircled{R} 1/(1 - \varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$$

Zweites Newtonsches Gesetz

Nicht $F = m_{\text{rel}} \cdot a$ ist die richtige Verallgemeinerung, sondern die ursprüngliche Formulierung Newtons:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{m}_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \text{ und } \vec{v} \\ \text{sind parallel} \end{array} \right.$

$$\vec{F}_{\text{P}} = \frac{\vec{m}_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} \cdot \vec{a}_{\text{P}} = \gamma^3 m_0 \vec{a}_{\text{P}} \quad (1)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \text{ und } \vec{v} \\ \text{senkrecht,} \\ v^2 = \text{konst.} \end{array} \right.$

$$\vec{F}_{\perp} = \frac{\vec{m}_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \cdot \vec{a}_{\perp} = \gamma m_0 \vec{a}_{\perp} \quad (2)$$

m_0 ist die Ruhemasse, v die in S gemessene Geschwindigkeit.

50. Beweisen Sie die Gleichungen (1) und (2) durch Ableiten von $d\vec{p}/dt$ mithilfe der Produkt- und Kettenregel, sowie $a = d\vec{v}/dt$.

51. Aus (1) folgt: $a = \frac{F}{m_0} \left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}$. Zeichnen Sie die Kurve $a(v)$ bei konstantem F . $v = \beta \cdot c$

52. Ein Elektron ($m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $q_e = -1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$) bewegt sich gegen ein elektrisches Feld $E = 5.00 \times 10^5 \text{ N/C}$. Berechnen Sie Impuls und Beschleunigung des Elektrons mit $v = 0.01c$, $0.90c$ und $0.99c$. $\circledR p_l = 2.7 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$, $a_l = 8.8 \times 10^{16} \text{ m/s}^2$, $a_3 = 2.5 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$

Aus (1) und (2) folgt, dass bei hohen Geschwindigkeiten Beschleunigung und Kraft nicht mehr parallel sind!

$$\frac{\vec{F}_{\text{P}}}{\vec{F}_{\perp}} = \gamma^2 \frac{\vec{a}_{\text{P}}}{\vec{a}_{\perp}}$$

Das dritte Newtonsche Gesetz lautet: Übt ein Körper auf einen anderen eine Kraft aus, übt der zweite Körper eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Kraft auch auf den ersten Körper aus (actio = reactio). Diese gleichzeitige Wechselwirkung macht in der Relativitätstheorie keinen Sinn mehr. Newton beschrieb Kräfte als instantane Fernwirkung zwischen Körpern, zum Beispiel zwischen Mond und Erde. Die Relativitätstheorie hingegen beschreibt Kräfte als Wirkung von Feldern auf Körper. Das elektrische Feld "überträgt" die Coulombkraft und das Gravitationsfeld die Anziehung zwischen Massen. Felder breiten sich maximal mit Lichtgeschwindigkeit aus. Ein Körper sieht einen anderen Körper nicht direkt, sondern etwas verspätet dessen Feld (*retardiert* mit $c \cdot t$).

Die beiden Kraftkomponenten können addiert, respektive zusammengefasst werden:

$$\vec{F} = m_0 \gamma \left(\gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \vec{a} \right)$$

Zeigen Sie, dass aus dieser Gleichung sowohl (1), wie auch (2) folgt.

Relativistische Bewegungen verlaufen meist viel komplizierter als nicht-relativistische für $v \ll c$!

Masse = Energie ; $E = mc^2$

Die Herleitung der berühmten

Gleichung erfolgt mit Hilfe der klassischen Definition der Arbeit:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{m_0 \cdot a_x}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \cdot dx = \int_0^v \frac{m_0 \cdot v_x}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \cdot dv_x = E_{kin}$$

Integral Substitution: $v_x^2 = y \rightarrow 2v_x \cdot dv_x = dy$

$$a_x \cdot dx = \frac{dv_x}{dt} dx = dv_x \frac{dx}{dt} = dv_x \cdot v_x$$

Relativistische kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + K$$

53. Beweisen Sie die Reihenentwicklung oben.

Gesamte Energie:

$$E = E_{kin} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 c^2$$

m_0 ist die Ruhemasse aus Tabellen

Zu 53.

Mit TI, Home (F3, 9): `taylor((1/sqrt(1-v^2/c^2)-1)m0*c^2,v,4)`

Oder mit: $(1+x)^n = 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2}+n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{6}+K$

Invariante Größen

Die Gleichungen oben können geschrieben werden:

$$\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (1) \quad \left(\frac{p}{m_0c}\right)^2 = \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} \quad (2)$$

(1) - (2) → Gesamte Energie: $E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2$ Alternativ zu $E = \gamma m_0 c^2$; Gesamtenergie = Ruheenergie + kinetische Energie

Diese Gleichung gilt auch für masselose Teilchen, beispielsweise für Photonen: $E_{\text{Photon}} = 0 + pc = \frac{h}{\lambda}c = h \cdot f$

Die Gleichung für die gesamte Energie kann auch invariant geschrieben werden.

Invariante Form:
Ruheenergie

$$m_0c^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2}$$

In jedem Bezugssystem ist der Wert m_0c^2 (definitionsgemäß) identisch, die Wurzel somit in jedem Bezugssystem gleich.

Ebenso
invariante Form:
Raum-Zeit Intervall

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \stackrel{\#)}{=} (c\Delta t_0)^2 \quad \text{oder} \quad = -(L_0)^2$$

<http://cms.uni-konstanz.de/fileadmin/physik/nielaba/lehre/mechanik/relativ/Relativ.html>

Die beiden invarianten Formen sind ähnlich wie der Satz von Pythagoras im 4-dimensionalen Raum: $(\text{Würfeldiagonale})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Nur das Minuszeichen ist etwas seltsam. Oft wird eine Bezugssystem-unabhängige, invariante Form *Metrik* (= Abstandsmass) genannt.

Das invariante Raum-Zeit Intervall L_0 wird im täglichen Leben nicht erkannt, weil $c \cdot \Delta t$ viel grösser als Alltagslängen ist. Die Invarianz von L_0 wurde erst dank Einsteins Analysen entdeckt.

#) Man unterscheidet für die Intervalle zwischen $\Delta s^2 = -L_0^2 = \text{Eigenlänge} = \text{raumartig}$ und $\Delta s^2 = (c \Delta t_0)^2 = \text{Eigenzeit} = \text{zeitartig}$.

Raumartig bedeutet, es existiert ein Bezugssystem, wo das Zeitintervall null ist, die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden.

Zeitartig bedeutet, man findet ein Bezugssystem, wo die Ereignisse am gleichen Ort, aber zu unterschiedlichen Zeiten stattfinden.

Wie gross ist Δs für eine **lichtartiges** Intervall?

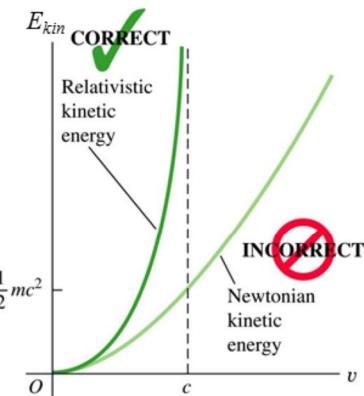
54. Berechnen Sie das Raum-Zeit Intervall in Aufgabe 34 zwischen Start und Ankunft im Andromeda Zoo, **A)** aus Sicht des erdegebundenen Wärters und **B)** aus Sicht der Elefantenkuh. ® $[(31.7 \text{ c}\cdot\text{mo})^2 - (23.8 \text{ c}\cdot\text{mo})^2]^{1/2} = 21 \text{ c}\cdot\text{mo}$

55. Ein Objekt bewegt sich im Labor mit riesiger Geschwindigkeit. Seine Gesamtenergie und die Impulskomponenten werden von Laborknechten gemessen: $E = 4.5 \times 10^{17} \text{ J}$, $p_x = 3.8 \times 10^8 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$, $p_y = 3.0 \times 10^8 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$, $p_z = 3.0 \times 10^8 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$. Berechnen Sie die Ruhemasse des Objekts. ® 4.6 kg

56. Berechnen Sie das Raum-Zeit Intervall im Zwillingsparadoxon zwischen Abflug von der Erde und Ankunft auf dem Planeten. ® $3 \text{ c}\cdot\text{J}$

57. In einer Kernreaktion wird ein Elektron produziert. Seine gesamte Energie wird mit 2.40 MeV gemessen. Berechnen Sie den Impuls und die Geschwindigkeit des Elektrons im Laborsystem. ® $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, Ruheenergie: $m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV} \rightarrow p = 2.34 \text{ MeV}/c = 1.25 \times 10^{-21} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$, $v = 0.975 c$

58. Zwei Protonen ($m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$) bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander zu. Nach dem Zusammenstoss befinden sich die Protonen in Ruhe, zusätzlich ist aber noch ein neutrales Pion ($m_\pi = 2.40 \times 10^{-28} \text{ kg}$) entstanden (auch in Ruhe). Die Energie bleibt beim Zusammenstoss erhalten. Welche Geschwindigkeit hatten die Protonen vor dem Zusammenstoss? Zuerst Gamma via Energieerhaltung berechnen. ® $\gamma = 1.072$, $v = 0.360 c$



Physik am CERN - Erhaltungssätze

Für ein Teilchen gilt:

$$E = m_{rel}c^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + E_{kin} \quad \frac{p}{m_{rel}} = m_{rel} \frac{v}{c} = \gamma m_0 \frac{v}{c} \quad v = \frac{p}{\gamma m_0} = \frac{c^2 p}{E} \quad m_0 c^2 = E_0 = \sqrt{E^2 - (pc)^2}$$

Die relativistischen Kraftgesetze sind komplizierter als die klassischen Newton'schen Axiome. Deshalb studiert man am CERN oft nicht die Dynamik der Zusammenstöße, sondern man vergleicht den Endzustand mit dem Anfangszustand. Beispielsweise prallen am LHC Protonen aus zwei gegenläufigen Protonenstrahlen mit sehr hoher Geschwindigkeit aufeinander. Mit den Detektoren misst man Energie und Impuls der erzeugten Teilchen nach dem Zusammenstoß. Es gilt die Energie- und die Impulserhaltung:

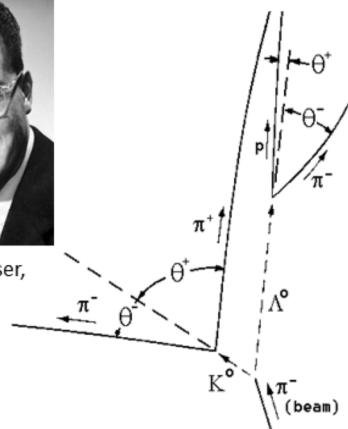
Viele Teilchen;	$E_{tot,vor} = \sum m_{rel,i} c^2 = E_{tot,nach}$	$\frac{p}{m_{rel}} = \sum m_{rel,i} \frac{v}{c} = \frac{p}{m_{rel}}$	$E_{tot,vor} = E_{tot,nach}$
Energie- und Impulserhaltung:	$E_{tot,vor} = E_{tot,nach}$	$\frac{p}{m_{rel}} = \sum m_{rel,i} \frac{v}{c} = \frac{p}{m_{rel}}$	$p_{tot,vor} = p_{tot,nach}$
Invarianz = Erhaltung von E_0 :	$\sqrt{E_{tot,vor}^2 - (p_{tot,vor} c)^2} = E_{tot,0}$	$\sqrt{E_{tot,nach}^2 - (p_{tot,nach} c)^2} = E_{tot,0}$	$E_{tot,vor} = E_{tot,nach}$

Dabei ist $E_{tot,0}$ die Summe aller Energien in jenem Bezugssystem, wo die Vektorsumme der Einzelimpulse gerade null ist. Achtung, E_0 ist nicht einfach die Summe aller Ruheenergien $m_0 c^2$. Im Allgemeinen gibt es nämlich kein System, wo alle Teilchen ruhen.

Hydrogen bubble-chamber photograph of the production of two unstable neutral particles (K^0 and Λ^0) by the collision of a π^- -meson with a proton (L. W. Alvarez, Berkeley, California). This picture was used as an example by D. A. Glaser, inventor of the bubble chamber, in his Nobel lecture in 1960.



Donald A. Glaser,
1926 - 2013



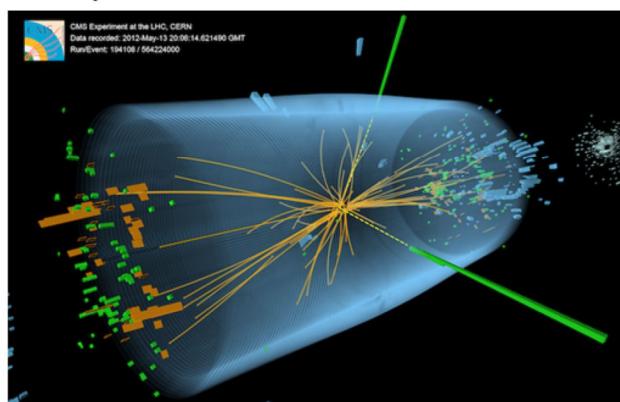
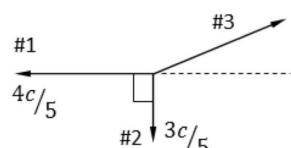
59. In einem bestimmten Bezugssystem hat ein Teilchen eine Energie von 5 GeV und einen Impuls von $3 \text{ GeV}/c$. **A)** Berechnen Sie die Energie des Teilchens in einem Bezugssystem, in welchem sein Impuls $4 \text{ GeV}/c$ beträgt. **B)** Bestimmen Sie die Ruhemasse des Teilchens in der Einheit amu. **C)** Berechnen Sie die Relativgeschwindigkeit zwischen den Bezugssystemen.

® 5.66 GeV , 4.3 amu , z.B. $0.187c$ oder $0.918c$, $v_1 = 3c/5$, $v_2 = c/\sqrt{2}$

60. Ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und einer kinetischen Energie von $2m_0c^2$ stösst mit einem stationären Teilchen der Ruhemasse $2m_0$ zusammen und bleibt stecken. Berechnen Sie die Ruhemasse des neu entstandenen Teilchens. ® $\sqrt{17}m_0$

61. Im Laborsystem hat ein stationäres Teilchen eine Ruhemasse M_0 . Es zerfällt in drei identische Teilchen, jedes mit der Ruhemasse m_0 . Die zwei Teilchen #1 und #2 haben die Geschwindigkeiten und Richtungen wie in der Figur gezeichnet.

- A)** Bestimmen Sie Richtung und Geschwindigkeit von Teilchen #3.
B) Berechnen Sie das Verhältnis M_0/m_0 . ® $0.836c$, $\tan^{-1}(9/16)$, 4.75



GAITHERSBURG-Albert Einstein was correct in his prediction that $E = mc^2$, according to scientists at the Massachusetts Institute of Technology (MIT), the Commerce Department's National Institute of Standards and Technology (NIST), and the Institute Laue Langevin, Genoble, France (ILL) who conducted the most precise direct test ever of what is perhaps the most famous formula in science.

In experiments described in the Dec. 22, 2005, issue of *Nature*,^{*} the researchers added to a catalog of confirmations that matter and energy are related in a precise way. Specifically, energy (E) equals mass (m) times the square of the speed of light (c^2), a prediction of Einstein's theory of special relativity. By comparing NIST/ILL measurements of energy emitted by silicon and sulfur atoms and MIT measurements of the mass of the same atoms, the scientists found that E differs from mc^2 by at most 0.0000004, or four-tenths of 1 part in 1 million. This result is "consistent with equality" and is 55 times more accurate than the previous best direct test of Einstein's formula, according to the paper.

Such tests are important because special relativity is a central principle of modern physics and the basis for many scientific experiments as well as common instruments like the global positioning system. Other researchers have performed more complicated tests of special relativity that imply closer agreement between E and mc^2 than the MIT/NIST/ILL work, but additional assumptions are required to interpret their results, making these previous tests arguably less direct.

The MIT/NIST/ILL tests focused on a well-known process: When the nucleus of an atom captures a neutron, energy is released as gamma ray radiation. The mass of the atom, which now has one extra neutron, is predicted to equal the mass of the original atom, plus the mass of a solitary neutron, minus a value called the neutron binding energy. The neutron binding energy is equal to the energy given off as gamma ray radiation, plus a small amount of energy released in the recoil motion of the nucleus.

The gamma rays in this process have wavelengths of less than a picometer, a million times smaller than visible light, and are diffracted or bent by the atoms in the calibrated crystals at a particular energy-dependent angle. Using a well-known mathematical formula (Grt: Bragg Gesetz), scientists can combine these angles with values for the crystal lattice spacing to determine the energy contained in individual gamma ray particles.

.... * S. Rainville, J.K. Thompson, E.G. Myers, J.M. Brown, M.S. Dewey, E.G. Kessler Jr., R.D. Deslattes, H.G. Börner, M. Jentschel, P. Mutti, D.E. Pritchard. 2005. A direct test of $E = mc^2$. *Nature*. Dec. 22, 2005.

http://www.nist.gov/public_affairs/releases/einstein.cfm

An instrument called GAMS4, originally designed and built at NIST and now located at Institut Laue Langevin in France, was used in experiments that helped to confirm Einstein's famous equation $E = mc^2$. GAMS4 measured the angle at which gamma rays are diffracted by two identical crystals made of atoms separated by a known distance. The two crystals are the dark gray rectangles on circular platforms in the foreground and background of the photo.

Photo by Artechnique, Courtesy of ILL



Für Lichtteilchen, d.h. Photonen gelten analoge Beziehungen wie für Teilchen mit Masse:

$$p_{\text{photon}} = \frac{E_{\text{photon}}}{c}$$

Photonen nehmen an Stossprozessen teil wie massive Teilchen.

62. Ein Photon hat eine Energie von 200 MeV und fliegt entlang der x -Achse. Ein zweites Photon fliegt in die y -Richtung mit einer Energie von 100 MeV. **A)** Berechnen Sie gesamte Energie und Gesamtimpuls des Systems der zwei Photonen. **B)** Hätte eine massives Teilchen diese Energie und Impuls, was wäre seine Ruhemasse und Geschwindigkeit

® 300 MeV , 224 MeV/c , 200 MeV , 0.745c

63. Photonenantrieb. Eine Photonenrakete mit Anfangsmasse M_0 startet aus der Ruhe. Sie erreicht eine Endgeschwindigkeit v und ihre Restmasse (payload) betrage dann m_0 . Energie und Impulsbilanz beim Start und bei Erreichen der Endgeschwindigkeit lauten:

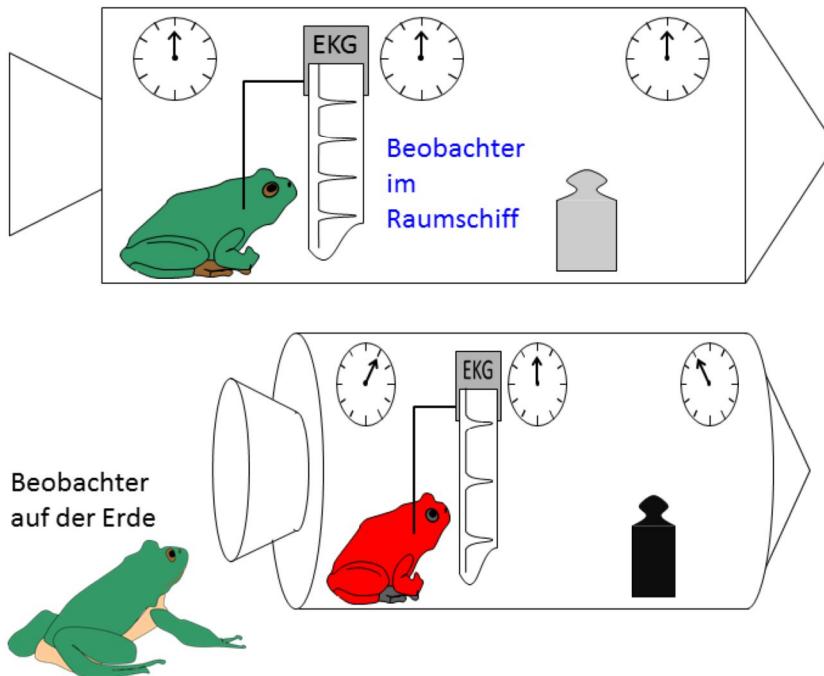
$$E_{\text{tot}} = M_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 + E_{\text{rad}} \quad p_{\text{tot}} = 0 = \gamma m_0 v - \frac{E_{\text{rad}}}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

E_{rad} ist die gesamte Strahlungsenergie der Photonen bei Erreichen der Endgeschwindigkeit.

$$\text{Zeigen Sie, dass: } \gamma \frac{m_0}{M_0} + \gamma \beta \frac{m_0}{M_0} = 1 \rightarrow \left(\frac{m_0}{M_0} \right)^2 - 2\gamma \left(\frac{m_0}{M_0} \right) + 1 = 0$$

Berechnen Sie m_0 / M_0 für ein $\gamma = 10$. Wie gross ist β ? ® 0.05 (= 5% payload), 0.995

Zusammenfassung der Effekte der SRT



59. Identifizieren Sie verschiedene Effekte der SRT bei hohen Geschwindigkeiten:

- Zeitdilatation
- Längenkontraktion
- Relativität der Gleichzeitigkeit
- Aberration des Lichts
- Dopplereffekt
- Massenzunahme

60. Wie weiss man, dass die Rakete vom Erdbeobachter weg fliegt, nicht auf ihn zu ?

Lorentz Transformationen

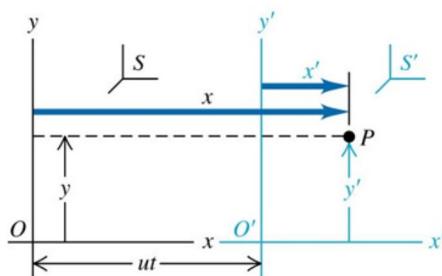
Koordinaten

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t' + ux'/c^2)$$



Geschwindigkeiten

$$v_x = \frac{v_{x'} + u}{1 + \frac{u \cdot v_{x'}}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v_{y'} \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{u \cdot v_{x'}}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v_{z'} / \gamma}{1 + \frac{u \cdot v_{x'}}{c^2}}$$

u ist die Relativ-Geschwindigkeit der beiden Systeme in Richtung der x -Achse. u ist positiv für S , und negativ für S' . Die Beziehungen $x' = \dots$, $v_{x'} = \dots$, etc. lauten genaugleich, nur erhält u ein negatives Vorzeichen!

Kräfte

$$F_x = \frac{F'_x + u/c^2 (F'_x \cdot v')}{1 + u \cdot v_{x'}/c^2}$$

$$F_y = \frac{F'_y \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + u \cdot v_{x'}/c^2}$$

$$F_z = \frac{F'_z / \gamma}{1 + u \cdot v_{x'}/c^2}$$

- Alle gestrichenen Größen (x' , t' , ...) sind vom Beobachter in S' gemessen und werden von diesem auch so kommuniziert. Alle ungestrichenen Größen stammen vom Beobachter in S .
- Die Beziehungen machen deutlich, dass sowohl die Zeit, als auch die Koordinaten nicht unabhängige, absolute Größen sind. Sie sind verflochten.
- Senkrecht zur Bewegung sind die Koordinaten identisch, nicht aber die Geschwindigkeiten oder Kräfte.

Wählt man statt der Zeit t die Lichtlänge

ct werden die Lorentz Transformationen

$$x = \gamma \left(x' + \frac{u}{c} ct' \right) ; \quad ct = \gamma \left(ct' + \frac{u}{c} x' \right)$$

Reise mit konstanter Beschleunigung

Unter der Voraussetzung, dass ein Körper in S' aus der Ruhe startet, sind die Beschleunigungen wie folgt verknüpft: $a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}$ $a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2}$ $\mathbf{v}'_x = \mathbf{v}'_y = 0$
Die Beziehungen kann man aus der LT für $v_{x,y}$ und t ableiten^{#)}.

Aus medizinischen Gründen und des Komforts wegen soll die Beschleunigung des Raumschiffs S' immer $a'_x = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ betragen. In S ist dann die Beschleunigung:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{a'_x}{\gamma^3} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} g \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g \cdot dt \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{g \cdot t}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2}} \Leftrightarrow t = \frac{u}{g \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1)$$

Für die Eigenzeit t_0 im Raumschiff S' gilt:

$$t_0 = t' = \int_0^{t'} dt' = \int_0^t \gamma dt = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{u(t)}{c}\right)^2} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2}} \quad \Rightarrow \quad t_0 = t' = \frac{c}{g} \ln\left(\frac{g}{c} t + \sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2}\right) \quad (2a)$$

Für die Flugstrecke $x(t)$, resp. $x(t_0)$ gilt:

$$x(t) = \int_0^t u dt = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2} - 1 \right) \quad \stackrel{(2b) \text{ in } (3)}{\Rightarrow} \quad x(t_0) = \frac{c^2}{g} \left(\cosh\left(\frac{g}{c} t_0\right) - 1 \right) \quad (3)$$

$$x(t_0) = \frac{c^2}{g} \left(\cosh\left(\frac{g}{c} t_0\right) - 1 \right) \quad (4)$$

Die Diskussion oben ist in Anlehnung an Friedhelm Kuypers, Klassische Mechanik, Wiley.

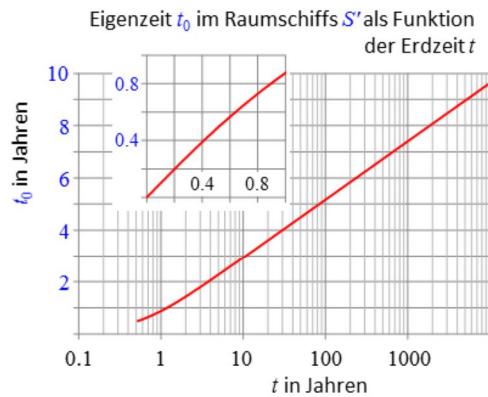
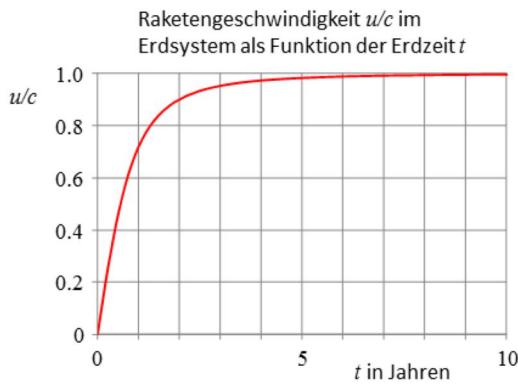
Aus (2a) folgt: $t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c} t_0\right)$ (2b)

#) z.B. die Beschleunigung in x -Richtung:

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad 1 - \frac{u}{c^2} \left(\frac{\mathbf{v}'_x + u}{1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2}} \right) \quad \frac{1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2} - \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}}{1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2}} \\ \rightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - u \frac{dx}{dt}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1 - \frac{u \cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2}}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{v}'_x + u}{1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2}} \right) \cdot \frac{dt'}{dt} = \left(\frac{\frac{d\mathbf{v}'_x}{dt'} \left(1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2} \right) - \left(\mathbf{v}'_x + u \right) \frac{u}{c^2} \frac{d\mathbf{v}'_x}{dt}}{\left(1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2} \right)^2} \right) \cdot \frac{dt'}{dt}$$

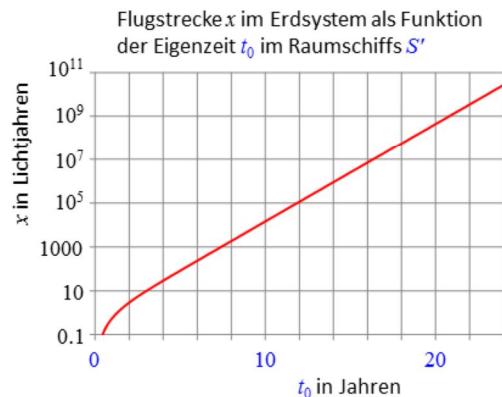
$$= \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \mathbf{a}'_x}{\left(1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2}\right)} = \frac{\mathbf{a}'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{u \cdot \mathbf{v}'_x}{c^2}\right)^3}$$



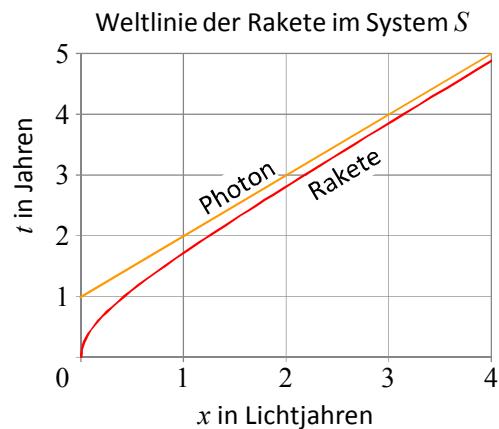
64. Zeigen Sie dass für kleine Geschwindigkeiten gilt ($g \cdot t/c \ll 1$): $x(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, $u(t) = g \cdot t$ und $t = t_0$

Für grosse Geschwindigkeiten gilt ($g \cdot t/c \gg 1$): $x(t) = c \cdot t$, $u(t) = c$, $t_0 = \frac{c}{g} \ln\left(\frac{2g}{c}t\right)$

Die Astronauten könnten aus biologischer Sicht in knapp 11 Eigen-Jahren das Zentrum der Milchstrasse und in 15 Eigen-Jahren die Andromeda Galaxie erreichen.



Die Situation ist ähnlich wie beim Zwillingsparadoxon. Nur ist das Raumschiff beschleunigt und erreicht nach 5 Erdjahren über 98% der Lichtgeschwindigkeit.



Reise zu extrasolaren Planeten, Treibstoff

Die relativistischen Raketengleichung lautet:

$$-\nu'_{Gas} \frac{dm_0}{m_0} = \frac{du}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad -\nu'_{Gas} \int_{m_0,Start}^{m_0,End} \frac{dm_0}{m_0} = \int_0^{u_{End}} \frac{du}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \Rightarrow$$

Separieren der Variablen
in (4) unten

$$u_{End} = c \left(\frac{\left(\frac{m_{0,Start}}{m_{0,End}} \right)^{\frac{2\nu'_{Gas}}{c}} - 1}{\left(\frac{m_{0,Start}}{m_{0,End}} \right)^{\frac{2\nu'_{Gas}}{c}} + 1} \right)$$

Die Ruhemasse m_0 der Rakete vom Start bis zum vollständigen Treibstoffverbrauch am Ende, sowie die Gas-Ausstossgeschwindigkeit ν'_{Gas} sind die Größen im Raketensystem S' .

Für $2\nu'_{Gas} \ll c$ geht diese Gleichung bei einer Taylorentwicklung erster Ordnung in die nicht-relativistische Raketengleichung über (siehe unten).

Die Endgeschwindigkeit u_{End} hängt nicht von der Beschleunigungsphase ab.

Die nicht-relativistische Raketengleichung für die Endgeschwindigkeit, respektive die Geschwindigkeit $u(t)$ lautet (siehe Physik 1):

$$u_{End} = \nu_{Gas} \ln \frac{m_{Start}}{m_{End}}$$

$$\mu A \frac{\text{ausgestossene Masse}}{\Delta t}$$

$$m(t) = m_{Start} - \mu t$$

$$u(t) = \nu_{Gas} \ln \left(\frac{m_{Start}}{m_{Start} - \mu t} \right)$$

Die relativistischen Gleichungen für die Rakete lautet im System S' , wo die Rakete vor dem Gasausstoss ruht. Die Impulserhaltung in S' (vor = nach Gasausstoss):

$$0 = (m + dm)dv' - dm_{Gas}\nu'_{Gas} = \frac{(m_0 + dm_0)dv'}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv'}{c}\right)^2}} - \frac{dm_{0,Gas}\nu'_{Gas}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu'_{Gas}}{c}\right)^2}} \stackrel{\text{Erste Ordnung}}{\cong} m_0dv' - \frac{dm_{0,Gas}\nu'_{Gas}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu'_{Gas}}{c}\right)^2}} \quad (1)$$

Die Energieerhaltung in S' berücksichtigen, weil $dm_0 \neq dm_{0,Gas}$:

$$m_0c^2 = \frac{(m_0 + dm_0)c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv'}{c}\right)^2}} + \frac{dm_{0,Gas}c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu'_{Gas}}{c}\right)^2}} \cong (m_0 + dm_0)c^2 + \frac{dm_{0,Gas}c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu'_{Gas}}{c}\right)^2}} \Rightarrow dm_0 = -\frac{dm_{0,Gas}c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu'_{Gas}}{c}\right)^2}} \quad (2)$$

$$(2) \text{ in } (1) \Rightarrow 0 = m_0dv' + dm_0\nu'_{Gas} \quad (3)$$

Die Ausstossgeschwindigkeit ($u+du$) in S und dv' in S' sind via Geschwindigkeitsaddition verknüpft:

$$u + du = \frac{u + dv'}{1 + \frac{dv'u}{c^2}} \cong (u + dv') \left(1 - \frac{dv'u}{c^2} \right) \Rightarrow du \cong dv' \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \quad \text{in (3)} \quad \Rightarrow \quad -\nu'_{Gas}dm_0 = \frac{m_0du}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (4)$$

Beispiel, Rakete mit Fusionsantrieb:

Nehmen wir als optimale Energiequelle einen Fusionsreaktor an, wo Heliumkerne aus zwei Protonen und zwei Neutronen gebildet werden. Dabei wird eine Energie von etwa 26 MeV pro Kernreaktion frei, die maximal für die Ausstossgeschwindigkeit v'_{Gas} zur Verfügung steht:

$$26 \text{ MeV} = m_{He}c^2 (\gamma - 1) \Rightarrow \frac{v'_{Gas}}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{26 \text{ MeV}}{m_{He}c^2} + 1\right)^2}} = 0.12 \Rightarrow v'_{Gas} : 36000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

\uparrow
3728.4 MeV

Setzen wir das Massenverhältnis $m_{0, Start} / m_{0, End} = 10$ an, erhalten wir eine Endgeschwindigkeit: $u_{End} = c \frac{10^{0.24} - 1}{10^{0.24} + 1} = 0.264c = 80000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Die Endgeschwindigkeit wird nach: $t = \frac{u \cdot c}{g\sqrt{c^2 - u^2}} = 98 \text{ d} \rightarrow t' = \frac{c}{g} \ln \left(\frac{g}{c} t + \sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2} \right) = 97 \text{ d}$ erreicht. Anschliessend fliegt das Raumschiff antriebsfrei weiter.

Nach etwa 15 Erdjahren fliegt das Raumschiff am nächsten Stern α -Centauri mit der Geschwindigkeit von 80000 km/s vorbei. Ein Reise zu einem anderen Sonnensystem ist energetisch nicht völlig unmöglich!



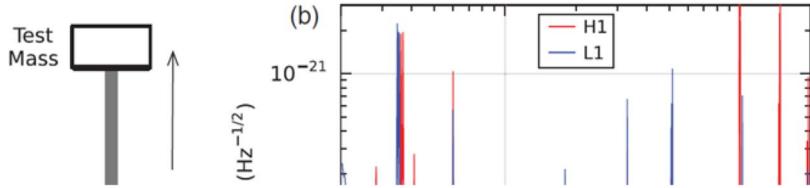


FIG. 3. Simplified diagram of an Advanced LIGO detector (not to scale). A gravitational wave propagating orthogonally to the detector plane and linearly polarized parallel to the 4-km optical cavities will have the effect of lengthening one 4-km arm and shortening the other during one half-cycle of the wave; these length changes are reversed during the other half-cycle. The output photodetector records these differential cavity length variations. While a detector's directional response is maximal for this case, it is still significant for most other angles of incidence or polarizations (gravitational waves propagate freely through the Earth). Inset (a): Location and orientation of the LIGO detectors at Hanford, WA (H1) and Livingston, LA (L1). Inset (b): The instrument noise for each detector near the time of the signal detection; this is an amplitude spectral density, expressed in terms of equivalent gravitational-wave strain amplitude. The sensitivity is limited by photon shot noise at frequencies above 150 Hz, and by a superposition of other noise sources at lower frequencies [47]. Narrow-band features include calibration lines (33–38, 330, and 1080 Hz), vibrational modes of suspension fibers (500 Hz and harmonics), and 60 Hz electric power grid harmonics.

