Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Diese Übung ist nicht abzugeben beinhaltet aber prüfungsrelevante Themen

Aufgabe 1: Fluss durch einen Zylinder

Ein Zylinder mit Radius $R = 2$ und Höhe $H = 5$, dessen Rotationsachse sich von $(0,0,0)$ bis $(0,0,5)$ erstreckt, wird vom Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

durchflutet. Das Ziel der Aufgabe ist, den Fluss von $\vec{v}$ durch die gesamte Zylinderoberfläche mit dem Flussintegral (1) und mit dem Satz von Gauss (2) zu berechnen.

(1) Berechnung mit dem Flussintegral

a) Bestimmen Sie das Vektorfeld der Flächennormalen $\vec{n}_0$ auf dem Mantel, das nach aussen gerichtet ist. *Hinweis:* Sie können die Zylinderfläche als Niveaufläche eines Skalarfeldes $\Phi(x, y)$ betrachten, oder einfach erraten!

b) Geben Sie das Flächenelement dA in Zylinderkoordinaten an.

c) Berechnen Sie das Flussintegral durch die Mantelfläche.

d) Berechnen Sie das Flussintegral durch die Boden- und Deckfläche des Zylinders und geben Sie zusammen mit dem Ergebnis aus d) den gesamten Fluss an. (Lsg: $60\,\pi$)

(2) Direkte Berechnung: Berechnen Sie nun den Flächendurchfluss direkt mit dem Satz von Gauss.

Aufgabe 2: Fluss durch eine Kugel

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

durch die Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit dem Satz von Gauss und mit dem Oberflächenintegral. Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten. (Lsg:$12/5\,\pi\,R^5$)

Aufgabe 3:

Gegeben ist ein 3d-Skalarfeld $\Phi = \Phi(x, y, z)$.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\Delta\Phi \;:=\; \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Dabei definiert

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

den Laplace-Operator im Raum. Für die Ebene (2d) gilt entsprechend:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

b) Wenden Sie den Laplaceoperator für den Raum und die Ebene auf das radiale Feld $\Phi(r) = 1/r$ an. (Lsg: Ebene $1/r^3$, Raum 0).

Aufgabe 4:

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ sei als Rotation eines weiteren Feldes $\vec{E}$ darstellbar: $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{E}$. Dann verschwindet das Oberflächenintegral von $\vec{F}$ für jede geschlossene Fläche A. D.h

$$\oint_A \left(\vec{F}\cdot\vec{n}_0\right)\, dA \;=\; \oint_A \left(\operatorname{rot}\vec{E}\cdot\vec{n}_0\right)\, dA \;= 0$$

Zeigen Sie diese Aussage mit dem Satz von Gauss.

Viel Spass!