Aufgabe 1: Matrizenmultiplikation

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Die Inverse Matrix

a) Bestimmen Sie von Hand die Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ und $\mathbf{B}^{-1}$ der beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

Aufgabe 5: Linearkombination

Gegeben ist die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

für $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie nun den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Finden Sie die Koordinaten y_1,y_2 und y_3 die x in der obigen Basis beschreiben, d.h.

$$x = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + y_3 \cdot v_3$$

Lösung:

Die Linearkombination führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
$$x = \mathbf{A} \cdot y$$

mit Lösung

$$y = \mathbf{A}^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

somit $y_1 = 4, y_2 = -2$ und $y_3 = -1$.

Aufgabe 6: Polynomräume

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbf{P}_2$ der Polynome zweiten Grades. Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis von $\mathbf{P}_2$? Begründen Sie!

i) $\{5, \quad 2\,x, \quad 3\,x^2\}$

ii) $\{1, \quad x^2, \quad -12\,x^2\}$

iii) $\{1, \quad 2\,x, \quad 3\,x^2, \quad x^3\}$

iv) $\{1, \quad 1+x, \quad 1+x+x^2\}$

v) $\{1, \quad 1+x, \quad x+x^2\}$

Lösung:

Die Mengen i), iv) und v) bilden jeweils eine Basis, da die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind und den Raum aufspannen. ii) ist keine Basis, da zum Beispiel das Polynom x nicht durch Linearkombination der gegebenen Vektoren erzeugt werden kann. iii) ist keine Basis, da der Vektor x^3 gar kein Element von $\mathbf{P}_2$ ist.