Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungsweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.
Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung.

Aufgabe 1: Differentialgleichung mit periodischer Störfunktion

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Fourierreihen-Ansatzes die allgemeine Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung mit periodischer Anregung

$$-u''(x) + u(x) = |\sin(x)|$$

Lösung:

$$u(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x} + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2\,k\,x)}{(1-4\,k^2)\;(1+4\,k^2)}$$

Aufgabe 3: instationäre Wärmeleitung in einem homogenen Draht

Gegeben ist ein isolierter, geschlossener Draht der Länge L und Temperaturleitzahl a. Gesucht ist die zeitliche und örtliche Temperaturentwicklung $\vartheta(x,t)$ bei vorgegebener Anfangsverteilung $\vartheta_0(x) := \vartheta(x,0)$

$$\vartheta_0(x) = \begin{cases} 50, & \text{falls } -L/4 < x < L/4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Lösung ist analog zum Beispiel aus der Vorlesung (Wärmeleitung in einer Wand). Auch hier lautet die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2\vartheta(x,t)}{\partial x^2}$$

Der Produkteansatz $\vartheta(x,t) := X(x)\,T(t)$ sowie die daraus folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen sind identisch

$$X''(x) + \lambda^2\,X(x) = 0$$
$$T'(t) + a\,\lambda^2\,T(t) = 0$$

mit den allgemeinen Lösungen (A,B und C sind Konstanten und λ ist ubekannt)

$$X(x) = A\,\cos(\lambda\,x) + B\,\sin(\lambda\,x)$$
$$T(t) = C\,\exp(-a\,\lambda^2\,t)$$

Der Hauptunterschied besteht darin, dass hier keine Ränder und somit auch keine Randbedingungen für die Temperatur vorgegeben sind. Aber da der Draht geschlossen ist, kann die Periodizität $\vartheta(0,t) = \vartheta(L,t)$ ausgenutzt werden

a) Bestimmen Sie aus der allgemeinen Lösung für $X(x)$ die möglichen Werte für λ, indem Sie die Periodizität verwenden und formulieren Sie die Basislösungen $\vartheta_k(x,t) := X_k(x)\,T_k(t)$.

b) Die allgemeine Lösung für $\vartheta(x,t)$ erhält man durch Linearkombination der Basislösungen. Verwenden Sie diese Linearkombination um mit Hilfe der Anfangsverteilung $\vartheta_0(x)$ und der Fourierzerlegung die spezielle Lösung zu berechnen.

Lösung:

$$\vartheta(x,t) = 25 + \frac{100}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi\,k}{2}\right)}{k} \cos\left(\frac{2\,\pi\,k}{L}\,x\right) \exp\left(-\frac{4\,a\,\pi^2\,k^2}{L^2}\,t\right)$$

Aufgabe 4: Die Wellengleichung bei der schwingenden Saite

Die Wellengleichung in einer Raumdimension für die Auslenkung $u(x,t)$ einer schwingenden Saite ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Dabei stellt c die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit dar.

In diesem Beispiel betrachten wir eine beiseitig fest eingespannte Saite der Länge L. Damit sind die Randbedingungen für alle t durch $u(0,t) = u(L,t) = 0$ gegeben.

Im Vergleich zur Wärmeleitungsgleichung sind bei der Wellengleichung zwei Anfangsbedingungen vorzugeben, da die gesuchte Auslenkung $u(x,t)$ mit der zweiten zeitlichen Ableitung in der Gleichung auftaucht:

1. Anfangsauslenkung $u(x,0)$ nach Wunsch
2. Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$

Bestimmen Sie die Lösung der Wellengleichung $u(x,t)$ für eine Anfangsauslenkung nach Wunsch.

Viel Spass!