Alle Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Abgabetermin: Zu Beginn der nächsten Vorlesung

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie ohne Berechnung von Integralen die Fourierkoeffizienten sowie das Amplitudenspektrum der beiden Funktionen:

a) $f(x) = 2 + \sin(2\,x) + 3\,\cos(2\,x) + \sin(5\,x)$

b) $f(x) = 2\,\sin(4\,x - 1) - 4\,\cos(3\,x + 2)$

Hinweis: Verwenden Sie bei b) die Additionstheoreme.

Aufgabe 2:

Gegeben $h \in (0, \pi)$ und die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, h) \\ 0 & \text{für } x \in (h, \pi) \end{cases}$$

a) Setzen Sie diese Funktion so fort, dass Sie gerade ist und die Periode 2π hat. Skizzieren Sie diese Funktion auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$. Bestimmen Sie dann die Kosinus-Fourierreihe.

b) Setzen Sie diese Funktion so fort, dass Sie ungerade ist und die Periode 2π hat. Skizzieren Sie diese Funktion auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$. Bestimmen Sie dann die Sinus-Fourierreihe.

c) Bestimmen und skizzieren Sie für beide Entwicklungen die Amplitudenspektren $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

c) *Freiwillig:* Stellen Sie die Fourierentwicklungen für eine endliche Anzahl Glieder grafisch dar (Maple, Matlab, oder sonst was..)

Aufgabe 3:

Gegeben ist die im Intervall $[0, \pi]$ durch $f(x) = x\,(\pi - x)$ definierte Funktion.

a) Entwickle diese Funktion in eine reine Kosinus-Reihe mit Periode 2π (Funktion gerade fortsetzen). Berechnen Sie die auftretenden Integrale von Hand, indem Sie zum Beispiel die *partielle Integration* oder eine *Substitution* verwenden.

b) Benutze das Ergebnis aus a) um die Werte der beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots = \qquad ?$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \ldots = \qquad ?$$

zu bestimmen.

Hinweis: Werte dazu die ermittelte Fourier-Reihe an geeigneten Stellen x aus.

Viel Spass!