

## Percolation de lignes nodales

V. Beffara, D. Gayet — Université de Grenoble Alpes

Paris, 22 novembre 2016

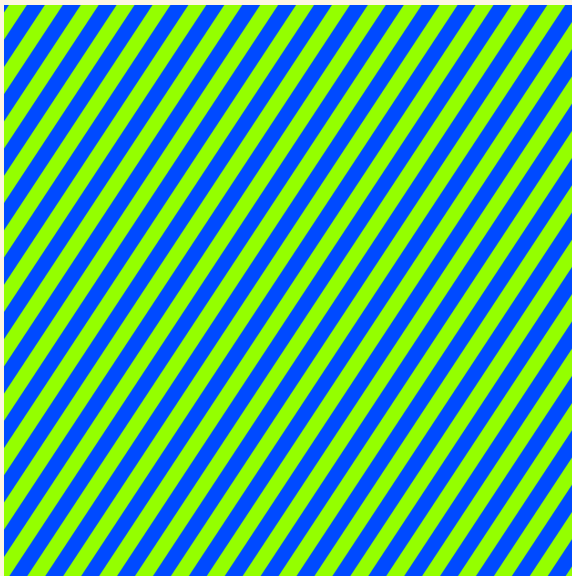
# Fonction propre aléatoire du laplacien sur la sphère

# Fonction propre aléatoire du laplacien sur la sphère



(Image : A.H. Barnett)

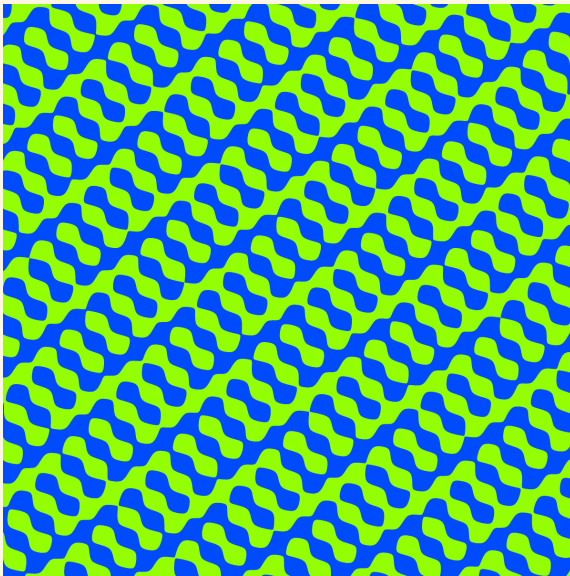
# Ondes planes : Une composante



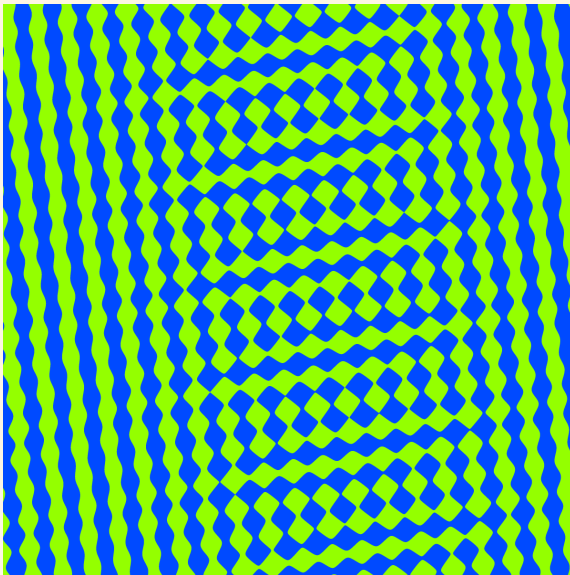
# Ondes planes : Deux composantes



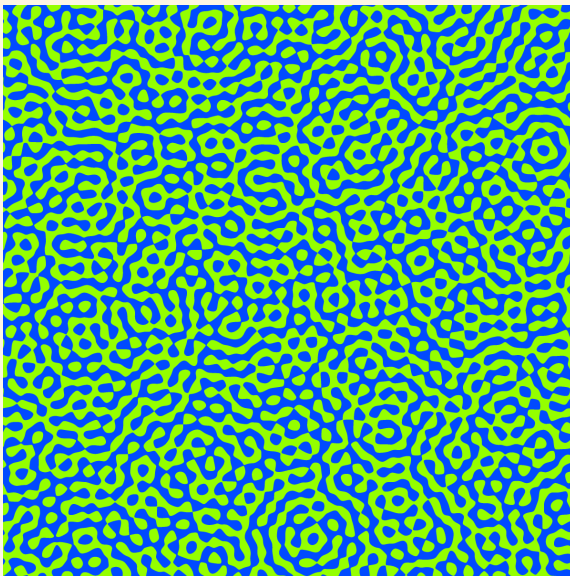
# Ondes planes : Trois composantes



# Ondes planes : Quatre composantes



# Limite locale quand $\lambda \rightarrow \infty$





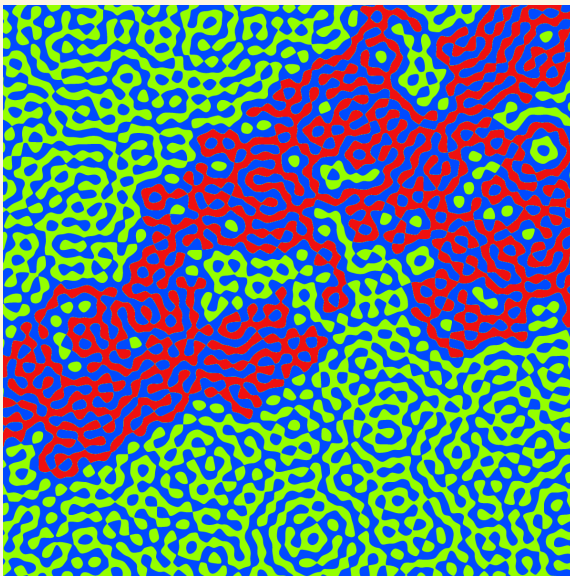
# Description comme champ gaussien

La limite en loi est un **champ aléatoire gaussien sur  $\mathbb{R}^2$** , dont la structure de covariance est donnée par le noyau

$$\text{Cov}[\phi(x), \phi(y)] = J_0(\|y - x\|)$$

(la covariance caractérise le champ). En particulier, la covariance change de signe, et décroît comme  $1/\sqrt{\|y - x\|}$ .

# Une grande composante connexe



# Polynome aléatoire

# Polynome aléatoire

On part du polynome homogène aléatoire sur  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$P_d(X) = \sum_{|I|=d} a_I \sqrt{\frac{(d+2)!}{I!}} X^I$$

où les  $a_I$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

# Polynome aléatoire

On part du polynome homogène aléatoire sur  $\mathbb{R}^3$  défini par

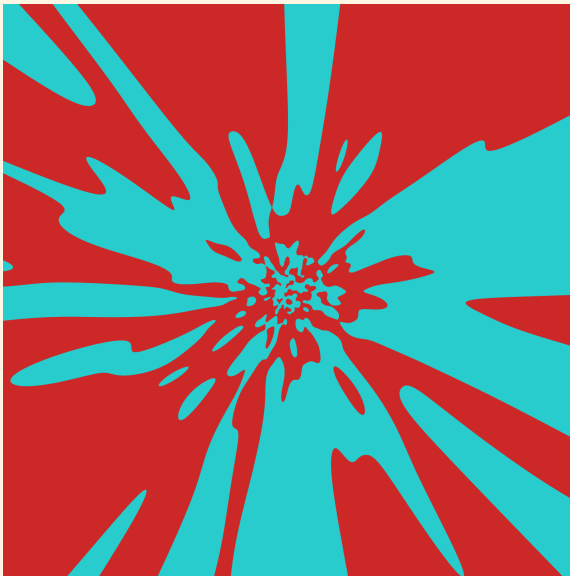
$$P_d(X) = \sum_{|I|=d} a_I \sqrt{\frac{(d+2)!}{I!}} X^I$$

où les  $a_I$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

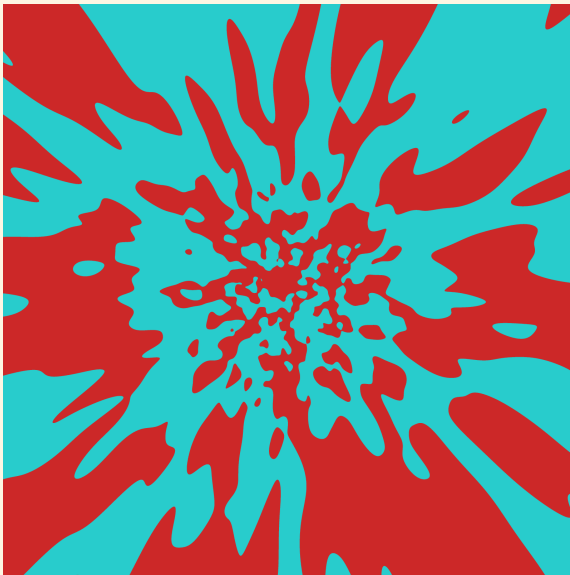
En restriction sur le plan d'équation  $x_0 = 1$ :

$$Q_d(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} \sqrt{\frac{(d+2)!}{i!j!(d-i-j)!}} x^i y^j$$

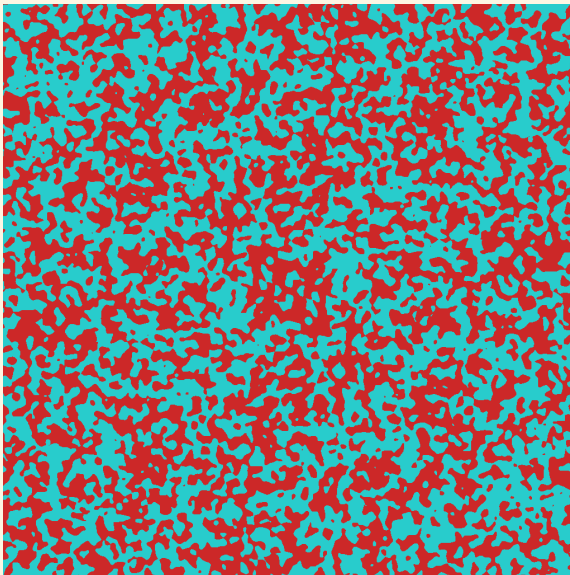
# Polynome aléatoire de grand degré



# Polynome aléatoire de plus grand degré



# Limite locale quand $d \rightarrow \infty$





# Description du champ limite

Le champ à degré  $d$  fixé est défini par

$$Q_d(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} \sqrt{\frac{(d+2)!}{i!j!(d-i-j)!}} x^i y^j$$

# Description du champ limite

Le champ à degré  $d$  fixé est défini par

$$Q_d(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} \sqrt{\frac{(d+2)!}{i!j!(d-i-j)!}} x^i y^j$$

En faisant tendre  $d$  vers l'infini, et après changement d'échelle :

$$Q_d(x/\sqrt{d}, y/\sqrt{d}) \simeq \sum_{i+j \leq d} \frac{a_{ij}}{\sqrt{i!j!}} x^i y^j$$

# Description du champ limite

Le champ à degré  $d$  fixé est défini par

$$Q_d(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} \sqrt{\frac{(d+2)!}{i!j!(d-i-j)!}} x^i y^j$$

En faisant tendre  $d$  vers l'infini, et après changement d'échelle :

$$Q_d(x/\sqrt{d}, y/\sqrt{d}) \simeq \sum_{i+j \leq d} \frac{a_{ij}}{\sqrt{i!j!}} x^i y^j$$

Donc dans la limite  $d \rightarrow \infty$ , on définit naturellement

$$\psi(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} \frac{a_{ij}}{\sqrt{i!j!}} x^i y^j$$

# Description du champ limite

Le champ à degré  $d$  fixé est défini par

$$Q_d(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} \sqrt{\frac{(d+2)!}{i!j!(d-i-j)!}} x^i y^j$$

En faisant tendre  $d$  vers l'infini, et après changement d'échelle :

$$Q_d(x/\sqrt{d}, y/\sqrt{d}) \simeq \sum_{i+j \leq d} \frac{a_{ij}}{\sqrt{i!j!}} x^i y^j$$

Donc dans la limite  $d \rightarrow \infty$ , on définit naturellement

$$\psi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} \sum_{i,j \geq 0} \frac{a_{ij}}{\sqrt{i!j!}} x^i y^j$$

# Description comme champ gaussien

La limite en loi est un **champ aléatoire gaussien sur  $\mathbb{R}^2$** , dont la structure de covariance est donnée par le noyau

$$\text{Cov}[\psi(x), \psi(y)] = \exp(-\|y - x\|^2/2)$$

(la covariance caractérise le champ). En particulier, la covariance ne change pas de signe, et décroît très rapidement.

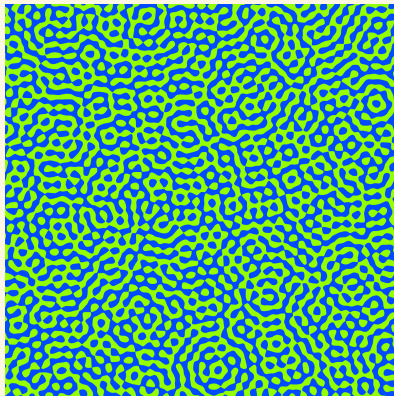
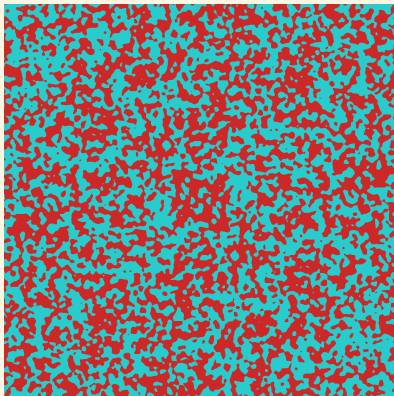
Fonctions propres  
oooooooo

Polynômes aléatoires  
oooooooo●oo

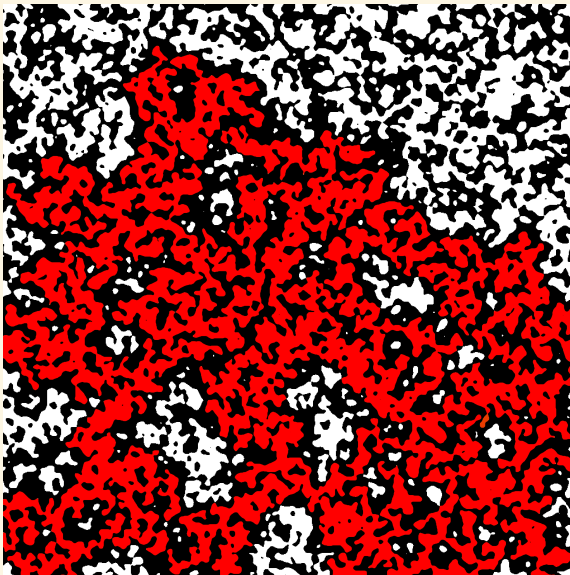
Percolation  
oooooooo

Russo-Seymour-Welsh  
oooooo

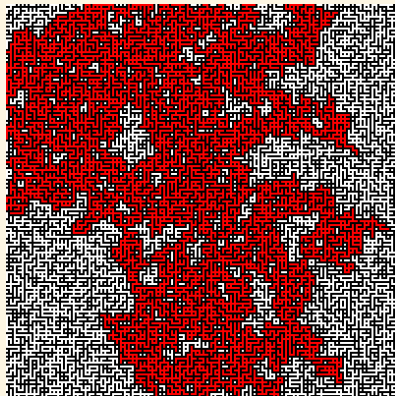
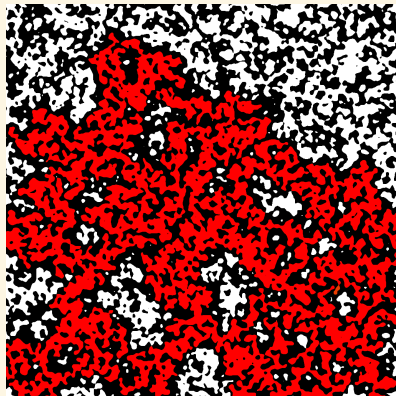
## Comparaison avec le modèle précédent



# Une grande composante connexe



# La même, et un cluster de percolation





# Percolation ( $p = 0.3$ )

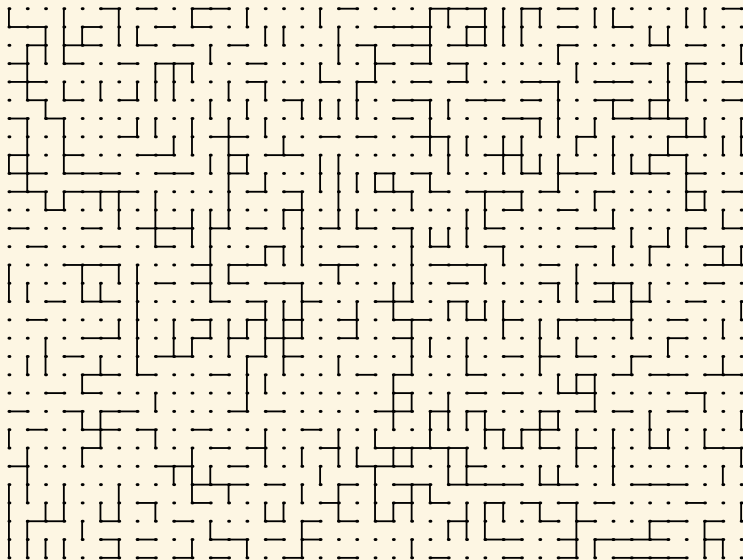
Fonctions propres  
oooooooo

Polynômes aléatoires  
oooooooo

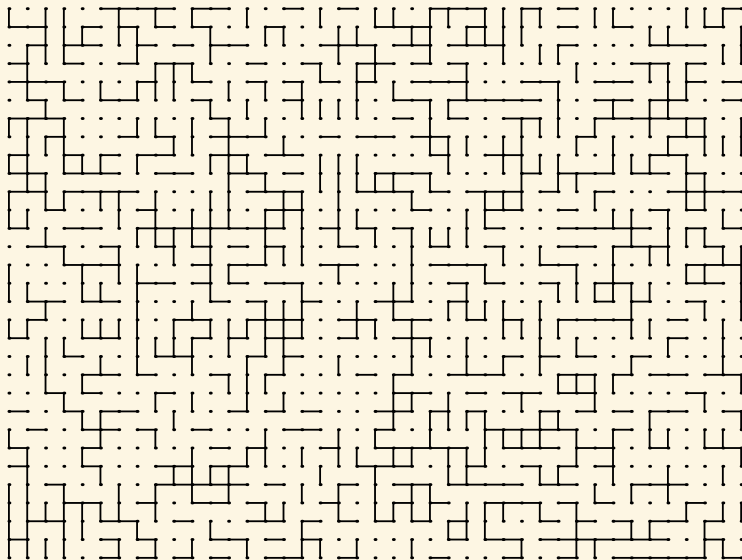
Percolation  
●oooooooo

Russo-Seymour-Welsh  
oooooo

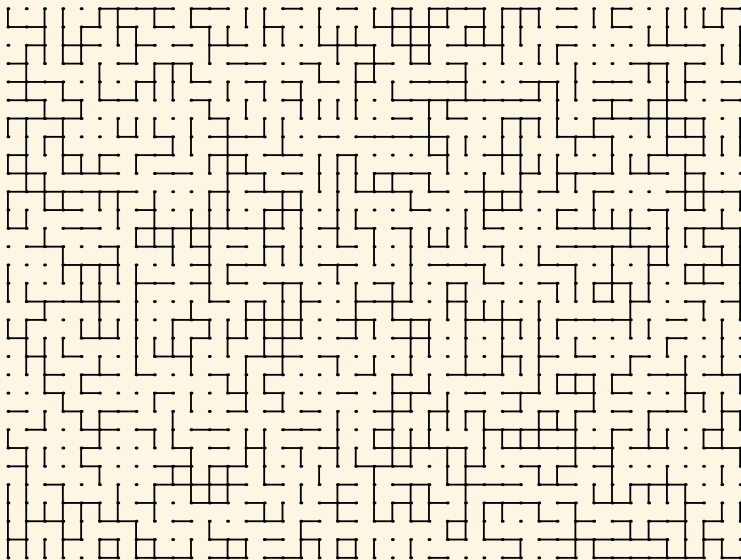
# Percolation ( $p = 0.3$ )



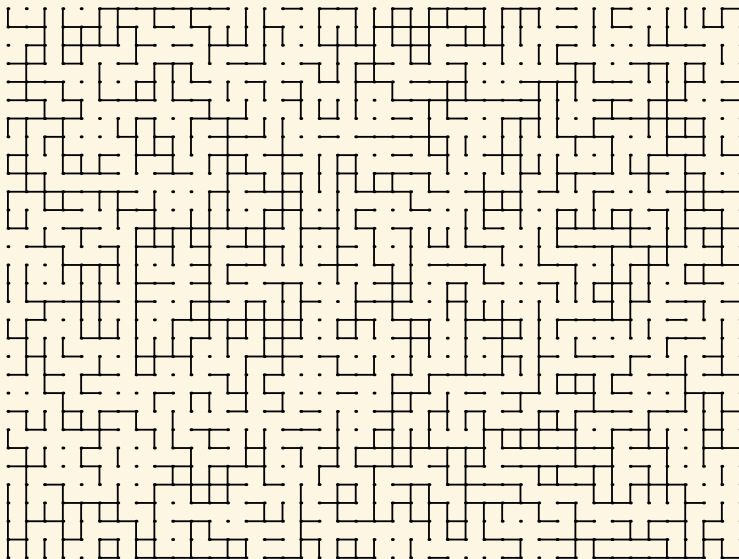
# Percolation ( $p = 0.4$ )



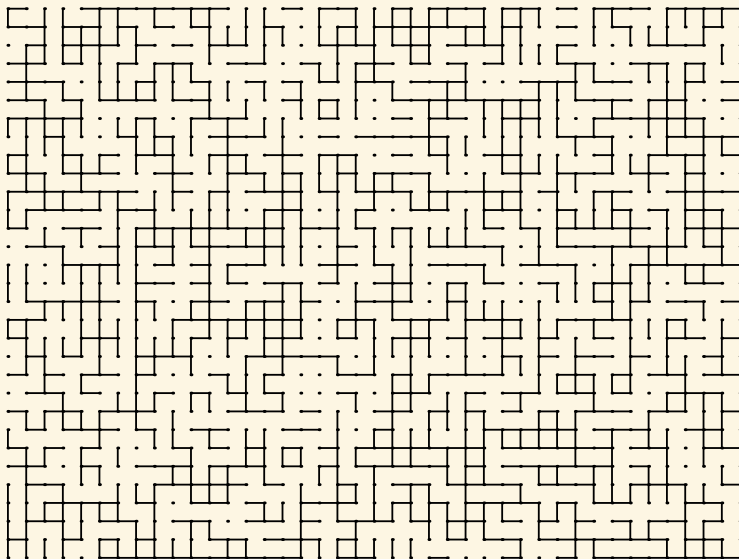
# Percolation ( $p = 0.45$ )



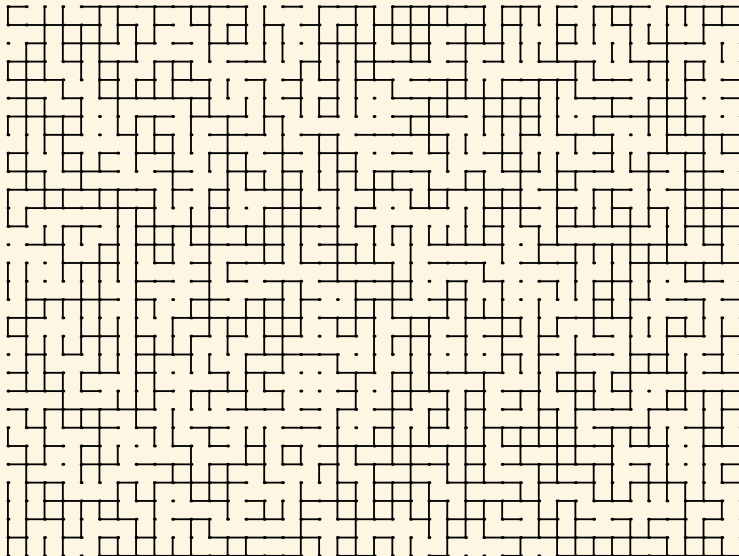
# Percolation ( $p = 0.5$ )



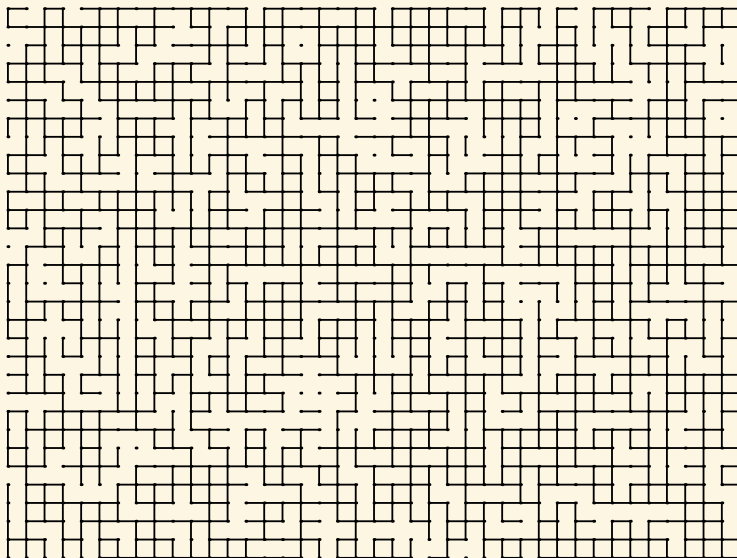
# Percolation ( $p = 0.55$ )



# Percolation ( $p = 0.6$ )



# Percolation ( $p = 0.7$ )





# Percolation : résultats classiques

- Kesten (1980) :  $p_c = 1/2$
- Pour  $p < p_c$ , régime **sous-critique** :
  - Tous les clusters sont finis p.s.
  - $P[0 \longleftrightarrow x] \approx \exp(-\lambda_p \|x\|)$
  - Le plus grand cluster dans  $\Lambda_n$  a pour diamètre  $\approx \log n$
- Pour  $p > p_c$ , régime **sur-critique** :
  - Il existe p.s. un unique cluster infini
  - $P[0 \longleftrightarrow x, |C(x)| < \infty] \approx \exp(-\lambda_p \|x\|)$
  - Le plus grand cluster *fini* dans  $\Lambda_n$  a pour diamètre  $\approx \log n$
- Pour  $p = p_c$ , régime **critique** :
  - Tous les clusters sont finis p.s.
  - $P[0 \longleftrightarrow x] \approx \|x\|^{-5/24}$
  - Le plus grand cluster dans  $\Lambda_n$  a pour diamètre  $\approx n$

Fonctions propres  
oooooooo

Polynomes aléatoires  
oooooooo

Percolation  
oooooooo

Russo-Seymour-Welsh  
●ooooo

# Russo-Seymour-Welsh

# Russo-Seymour-Welsh

## Théorème (RSW)

*Pour tout  $\lambda > 0$  il existe  $c \in (0, 1)$  tel que pour tout  $n$  assez grand,*

$$c \leq P_{p_c}[LR(\lambda n, n)] \leq 1 - c.$$

# Russo-Seymour-Welsh

## Théorème (RSW)

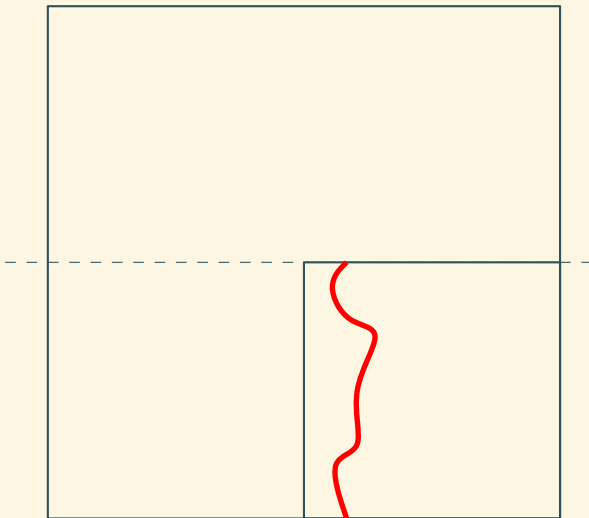
*Pour tout  $\lambda > 0$  il existe  $c \in (0, 1)$  tel que pour tout  $n$  assez grand,*

$$c \leq P_{p_c}[LR(\lambda n, n)] \leq 1 - c.$$

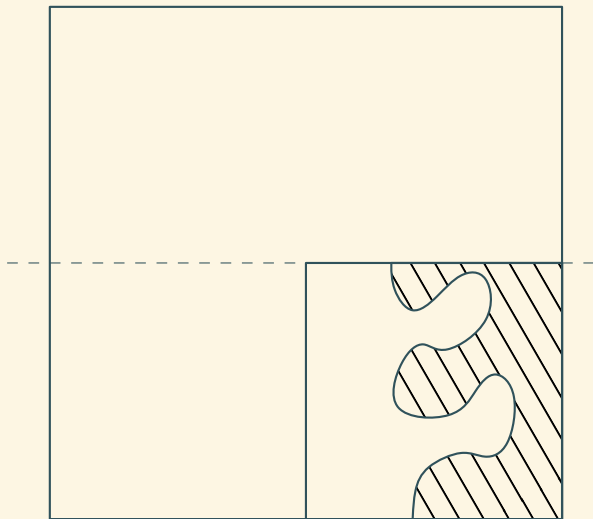
Le cas  $\lambda = 1$  est facile par **dualité** ; il suffit de prouver le théorème pour une autre valeur de  $\lambda$ , et de recoller les morceaux.

# Russo-Seymour-Welsh : preuve ( $\lambda = 3/2$ )

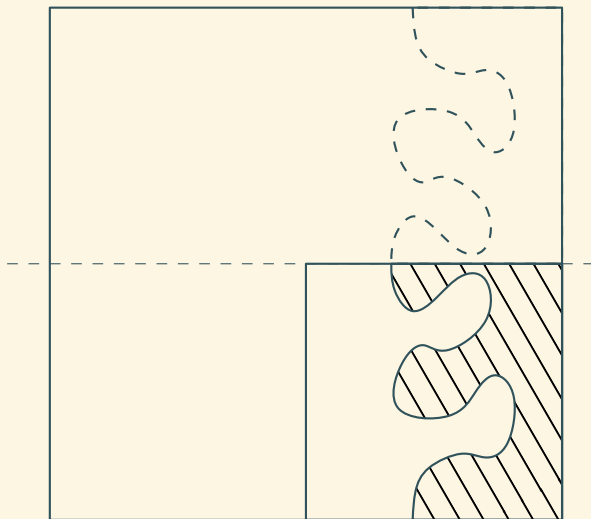
# Russo-Seymour-Welsh : preuve ( $\lambda = 3/2$ )



# Russo-Seymour-Welsh : preuve ( $\lambda = 3/2$ )

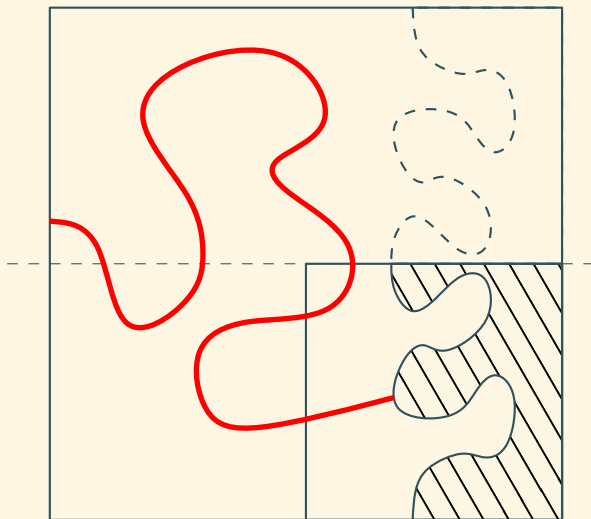


# Russo-Seymour-Welsh : preuve ( $\lambda = 3/2$ )

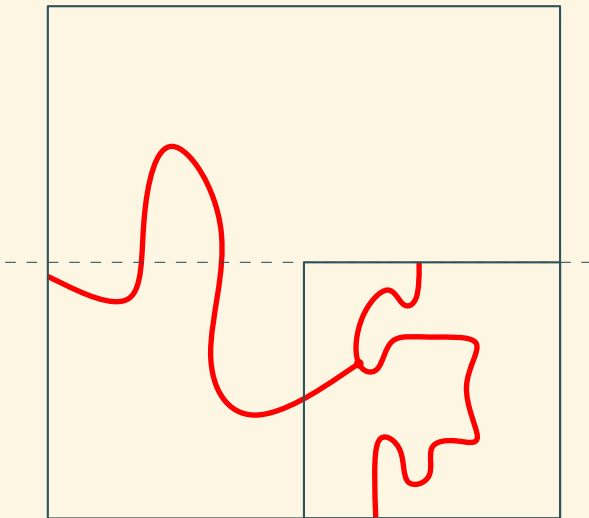




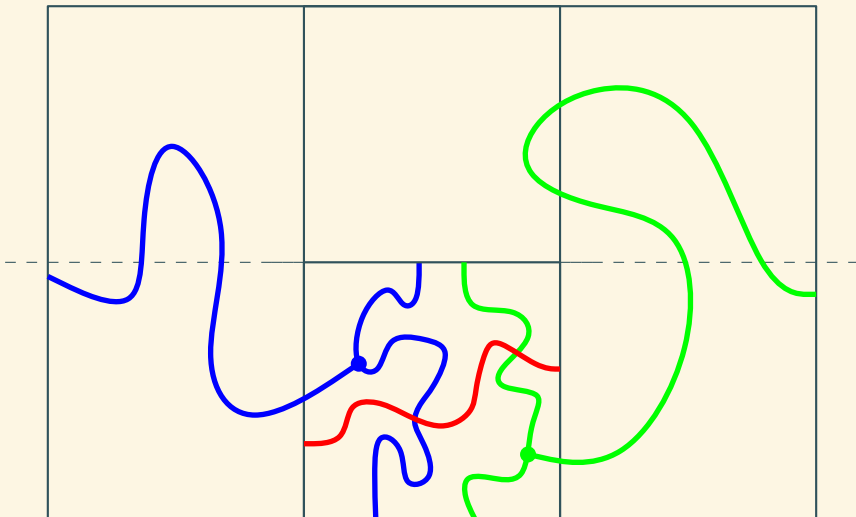
# Russo-Seymour-Welsh : preuve ( $\lambda = 3/2$ )



# Russo-Seymour-Welsh : preuve ( $\lambda = 3/2$ )



# Russo-Seymour-Welsh : preuve ( $\lambda = 3/2$ )



# Notre résultat

Théorème (B., Gayet — arXiv:1605.08605)

*Le champ  $\psi$  satisfait RSW.*

# Notre résultat

Théorème (B., Gayet — arXiv:1605.08605)

*Le champ  $\psi$  satisfait RSW.*

Cela a un certain nombre de conséquences :

# Notre résultat

Théorème (B., Gayet — arXiv:1605.08605)

*Le champ  $\psi$  satisfait RSW.*

Cela a un certain nombre de conséquences :

- L'ensemble  $\{z : \psi(z) > 0\}$  n'a pas de composante non bornée

# Notre résultat

Théorème (B., Gayet — arXiv:1605.08605)

*Le champ  $\psi$  satisfait RSW.*

Cela a un certain nombre de conséquences :

- L'ensemble  $\{z : \psi(z) > 0\}$  n'a pas de composante non bornée
- L'ensemble  $\{z : \psi(z) < 0\}$  non plus

# Notre résultat

Théorème (B., Gayet — arXiv:1605.08605)

*Le champ  $\psi$  satisfait RSW.*

Cela a un certain nombre de conséquences :

- L'ensemble  $\{z : \psi(z) > 0\}$  n'a pas de composante non bornée
- L'ensemble  $\{z : \psi(z) < 0\}$  non plus
- L'ensemble  $\{z : \psi(z) = 0\}$  non plus



# Notre résultat

Théorème (B., Gayet — arXiv:1605.08605)

*Le champ  $\psi$  satisfait RSW.*

Cela a un certain nombre de conséquences :

- L'ensemble  $\{z : \psi(z) > 0\}$  n'a pas de composante non bornée
- L'ensemble  $\{z : \psi(z) < 0\}$  non plus
- L'ensemble  $\{z : \psi(z) = 0\}$  non plus
- La probabilité que le disque unité soit relié au cercle de rayon  $R$  par une courbe dans le demi-plan supérieur sur laquelle  $\psi = 0$  se comporte comme  $1/R$ .

# Quelques idées sur la preuve

Le principal obstacle est que le champ  $\psi$  est **analytique**, donc on n'a pas du tout indépendance entre ses comportements dans des ouverts disjoints.

# Quelques idées sur la preuve

Le principal obstacle est que le champ  $\psi$  est **analytique**, donc on n'a pas du tout indépendance entre ses comportements dans des ouverts disjoints.

Pour s'en sortir, on **discrétise** le champ sur un réseau à l'échelle  $\delta > 0$ , pour pouvoir utiliser des méthodes de mécanique statistique "classiques". Mais il faut bien choisir  $\delta$ :

# Quelques idées sur la preuve

Le principal obstacle est que le champ  $\psi$  est **analytique**, donc on n'a pas du tout indépendance entre ses comportements dans des ouverts disjoints.

Pour s'en sortir, on **discrétise** le champ sur un réseau à l'échelle  $\delta > 0$ , pour pouvoir utiliser des méthodes de mécanique statistique "classiques". Mais il faut bien choisir  $\delta$ :

- Si  $\delta$  est trop grand, on rate des informations sur  $\psi$  ;

# Quelques idées sur la preuve

Le principal obstacle est que le champ  $\psi$  est **analytique**, donc on n'a pas du tout indépendance entre ses comportements dans des ouverts disjoints.

Pour s'en sortir, on **discrétise** le champ sur un réseau à l'échelle  $\delta > 0$ , pour pouvoir utiliser des méthodes de mécanique statistique "classiques". Mais il faut bien choisir  $\delta$ :

- Si  $\delta$  est trop grand, on rate des informations sur  $\psi$  ;
- Si  $\delta$  est trop petit, on a trop de corrélation.

# Quelques idées sur la preuve

Le principal obstacle est que le champ  $\psi$  est **analytique**, donc on n'a pas du tout indépendance entre ses comportements dans des ouverts disjoints.

Pour s'en sortir, on **discrétise** le champ sur un réseau à l'échelle  $\delta > 0$ , pour pouvoir utiliser des méthodes de mécanique statistique "classiques". Mais il faut bien choisir  $\delta$ :

- Si  $\delta$  est trop grand, on rate des informations sur  $\psi$  ;
- Si  $\delta$  est trop petit, on a trop de corrélation.

C'est essentiellement à cause de la deuxième raison que les fonctions propres du laplacien sont plus difficiles à contrôler . . .

# Inégalité sur les corrélations

## Théorème

Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs gaussiens dans  $\mathbb{R}^{m+n}$ , de covariances

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma_Y = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix},$$

où  $\Sigma_1 \in M_m(\mathbb{R})$  et  $\Sigma_2 \in M_n(\mathbb{R})$  ont tous leurs coefficients diagonaux égaux à 1. Notons  $\mu_X$  (resp.  $\mu_Y$ ) la loi des signes des coordonnées de  $X$  (resp.  $Y$ ), et  $\eta$  la valeur absolue maximale des coefficients de  $\Sigma_{12}$ . Alors,

$$d_{TV}(\mu_X, \mu_Y) \leq C(m+n)^{8/5} \eta^{1/5}.$$

En particulier, si  $A$  (resp.  $B$ ) est un événement ne dépendant que des signes des  $m$  premières (resp.  $n$  dernières) coordonnées de  $X$ ,

$$|P[A \cap B] - P[A]P[B]| \leq C(m+n)^{8/5} \eta^{1/5}.$$

# Conjecture de Bogomolny-Schmidt

## Conjecture

*Les lignes nodales de  $\phi$  convergent, dans la limite d'échelle, vers la même chose que celles de  $\psi$  et que les interfaces de la percolation critique, c'est-à-dire vers des processus **SLE(6)**. En particulier, les probabilités de traverser des rectangles convergent vers la **formule de Cardy**, et la limite est invariante par transformation conforme.*



# Conjecture de Bogomolny-Schmidt

## Conjecture

*Les lignes nodales de  $\phi$  convergent, dans la limite d'échelle, vers la même chose que celles de  $\psi$  et que les interfaces de la percolation critique, c'est-à-dire vers des processus **SLE(6)**. En particulier, les probabilités de traverser des rectangles convergent vers la **formule de Cardy**, et la limite est invariante par transformation conforme.*

