



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

Faculdade de Engenharia Mecânica

**VINÍCIUS BOMFIM FALCHETTO**

**Controle de trajetórias de um veículo  
submarino autônomo com estados estimados**

CAMPINAS  
2016

**VINÍCIUS BOMFIM FALCHETTO**

# **Controle de trajetórias de um veículo submarino autônomo com estados estimados**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO  
Vinícius Bomfim Falchetto E ORIENTADA PELO  
PROF. DR. Janito Vaqueiro Ferreira.

.....  
ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS  
2016

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES, 33003017

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

Falchetto, Vinícius Bomfim, 1988-  
F181c Controle de trajetórias de um veículo submarino autônomo com estados estimados / Vinícius Bomfim Falchetto. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Janito Vaqueiro Ferreira.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Controle automático. 2. Navegação de robôs móveis. 3. Estimação de estado generalizado. I. Ferreira, Janito Vaqueiro, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

#### Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Trajectory tracking control of an autonomous underwater vehicle with filtered states

**Palavras-chave em inglês:**

Automatic control

Mobile robots

State estimation

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Mestre em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Janito Vaqueiro Ferreira [Orientador]

Ely Carneiro de Paiva

Marcelo Becker

**Data de defesa:** 28-07-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Controle de trajetórias de um veículo  
submarino autônomo com estados estimados**

Autor: Vinícius Bomfim Falchetto

Orientador: Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

---

Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

---

Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

---

Prof. Dr. Marcelo Becker  
Escola de Engenharia de São Carlos - USP

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 28 de julho de 2016.

## RESUMO

Falchetto, Vinícius Bomfim. *Controle de trajetórias de um veículo submarino autônomo com estados estimados*. 2016. 156p. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um sistema de controle para um veículo autônomo submarino (AUV) de pequeno porte, cujos estados são estimados sob a presença de correntes marinhas. Geralmente, as soluções empregadas para o controle de AUVs utilizam controladores simples, baseados em modelos lineares e que necessitam de ajuste dependendo da missão do veículo. Outras soluções empregam controladores complexos, com garantias de estabilidade e que demandam alta capacidade computacional para serem implementados. Apesar de utilizar a técnica de controle não linear de linearização por realimentação, o sistema de controle desenvolvido é simples de implementar e ajustar. Por se tratar de um sistema embarcado, que pode se orientar sem restrição (veículo manobrável), um modelo matemático que considera a representação de quaternions é construído. Neste controlador tanto o loop de linearização quanto o de rastreamento utilizam o conhecimento dos estados do veículo, que não estão disponíveis diretamente. Assim sendo, um filtro de estimativa de estados, que considera a limitação do AUV de possuir somente um sensor de pressão e uma unidade inercial, é implementado e seu desempenho é avaliado. Além disso, o sistema de controle necessita compensar as correntes marinhas, assumidas aqui constantes, para ser capaz de rastrear trajetórias. Portanto, uma análise de aplicação de filtros complementares, na estimativa das correntes marinhas, é realizada, e um algoritmo é aplicado ao sistema de controle para a compensação dessas correntes marinhas. Os algoritmos de controle, filtragem de estados e filtragem de correntes marinhas implementados representam um avanço no sentido de criar veículos submarinos capazes de operar autonomamente nos mais diversos ambientes aquáticos.

**Palavras-Chave:** controle de trajetórias; controle não linear; robótica móvel; submarino; filtro de Kalman.

## ABSTRACT

Falchetto, Vinícius Bomfim. *Trajectory tracking control of an autonomous underwater vehicle with filtered states.* 2016. 156p. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

This work's objective is to develop a control system for an underwater autonomous vehicle (AUV) with state estimation and ocean currents. Usually, for the AUV control simple controllers based on linear models that require manual tuning, or complex controllers based on nonlinear theory, that are computationally demanding, are used. The developed control system is simple to implement and adjust despite using nonlinear feedback linearization theory. Since it is an embedded system and is maneuverable, a mathematical model that considers the quaternions representation is build. In this controller, both the linearization loop and the tracking controller need to know the states of the vehicle, which are not directly available. Thus, a filtering algorithm, which considers only embedded sensors, is implemented and its performance assessed. Furthermore, the control system has to compensate the ocean currents to be able to track trajectories. Therefore, complementary filter theory is studied and its application on the problem of ocean currents estimation is analysed. The implemented algorithm is applied on the control system to compensate the currents. The algorithms developed for the control system represent an advance in order to create underwater vehicles capable of operating autonomously on various aquatic environments.

**Keywords:** trajectory control; nonlinear control; mobile robotics; submarine; Kalman filter.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Robô militar autônomo da Lockheed Martin.	20
1.2	Estrutura simplificada de um sistema robótico autônomo.	23
2.1	Sistema de referenciais do veículo submarino.	35
2.2	Diagrama de corpo livre do AUV	42
3.1	Estrutura genérica de um filtro complementar clássico.	67
3.2	Diagrama de blocos do filtro complementar parametrizado com a função $\alpha(s)$ .	68
3.3	Estrutura de um filtro complementar com estimação de polarização.	70
3.4	Diagrama de blocos do estimador de correntes marinhas.	71
4.1	Diagrama de Blocos da linearização entrada-estado.	81
4.2	Diagrama de blocos das leis de controle cinemática e dinâmica.	86
4.3	Referenciais para o problema de rastreamento cinemático.	89
5.1	Estrutura do RSM desenvolvido em parceria entre UNICAMP e ENIB.	95
5.2	Correntes estimadas para o caso de realimentação de estados ruidosos.	100
5.3	Trajeto percorrido pelo veículo.	101
5.4	Erro de posição.	101
5.5	Erro de orientação.	102
5.6	Esforço dos atuadores	103
5.7	Trajeto percorrido pelo veículo.	103
5.8		104
5.9	Erro de orientação.	104
5.10	Esforço dos atuadores	105
5.11	Estimativa da posição do veículo. Componente x.	105
5.12	Estimativa da posição do veículo. Componente y.	106
5.13	Estimativa da posição do veículo. Componente z.	106
5.14	Estimativa da orientação do veículo. Ângulo de erro.	107
5.15	Estimativa da velocidade em surge.	107
5.16	Estimativa da velocidade em sway.	108
5.17	Estimativa da velocidade em heave.	108

5.18 Estimativa da velocidade em roll. . . . .	109
5.19 Estimativa da velocidade em pitch. . . . .	109
5.20 Estimativa da velocidade em yaw. . . . .	110
5.21 Trajeto percorrido pelo veículo. . . . .	110
5.22 Erro de posição . . . . .	111
5.23 Erro de orientação. . . . .	111
5.24 Esforço dos atuadores . . . . .	112
5.25 Correntes estimadas para com EKF. . . . .	112
5.26 Trajeto percorrido pelo veículo. . . . .	113
5.27 Erro de posição . . . . .	113
5.28 Erro de orientação. . . . .	114

## **LISTA DE TABELAS**

2.1	Variáveis Padrões do SNAME. . . . .	37
2.2	Posição e orientação. . . . .	37
2.3	Velocidades e esforços. . . . .	37
2.4	Variáveis agrupadas na forma de vetor. . . . .	37
4.1	Nomenclatura utilizada para veículos aquáticos . . . . .	84
5.1	Parâmetros da simulação . . . . .	96
5.2	Parâmetros do veículo . . . . .	97

## **LISTA DE ALGORITMOS**

2.1	Integração numérica da posição . . . . .	39
2.2	Integração Numérica dos quaternions . . . . .	40
4.1	Cálculo do sinal de controle do rastreador . . . . .	94

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AUV	Veículo Autônomo Submarino
LMA	Laboratório de Mobilidade Autônoma
SPURV	Veículo Subaquático de Pesquisa Autopropelido
ROV	Veículo Submarino Operado Remotamente
Big Data	Megadados
RSM	Robô Submarino do LMA
ENIB	Escola Nacional de Engenheiros de Brest, França
VILMA	Veículo Inteligente do LMA
ROS	Robot Operating System
DMC	Departamento de Mecânica Computacional
FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
MIMO	Múltiplas entradas e múltiplas saídas
SISO	Uma entrada e uma saída
GPS	Sistema de Posicionamento Global
PID	Controlador Proporcional Integral Derivativo
LQR	Regulador Linear Quadrático
GDL	Grau de Liberdade
SMC	Controle por Modos Deslizantes
FL	Controle de Linearização por Realimentação
SLAM	Localização e Mapeamento Simultâneos
LPV	Controle Linear com Parâmetros Variantes
EKF	Filtro de Kalman Estendido
IMU	Unidade de Medida Inercial
SNAME	Sociedade Internacional de Arquitetos navais e Engenheiros Marinhos

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos do Modelo

$\mathcal{I}$	Sistema de coordenadas inercial	
$\mathcal{B}$	Sistema de coordenadas fixo ao corpo do submarino (local)	
${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}}$	Matriz de rotação que mapeia o referencial local $\mathcal{B}$ para o referencial inercial $\mathcal{I}$ .	
$\mathbf{R}_2$	Matriz de transformação de velocidade angular em derivada do quaternion	
${}^{\mathcal{I}}\mathbf{p}$	Vetor posição dado no referencial inercial	m
$\mathbf{q}$	Quaternion unitário que representa a orientação do referencial local $\mathcal{B}$	
${}^{\mathcal{B}}\mathbf{v}$	Vetor de velocidade linear representado em $\mathcal{B}$	m/s
${}^{\mathcal{B}}\mathbf{w}$	Vetor de velocidade angular representado em $\mathcal{B}$	rad/s
${}^{\mathcal{B}}\mathbf{f}$	Vetor de forças em $\mathcal{B}$	N
${}^{\mathcal{B}}\mathbf{m}$	Vetor de momentos em $\mathcal{B}$	Nm
$\boldsymbol{\eta}$	Vetor posição e orientação do veículo em $\mathcal{I}$	
$\boldsymbol{\nu}$	Vetor de velocidades lineares e angulares do veículo em $\mathcal{B}$	
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor de esforços atuantes no veículo em $\mathcal{B}$	
$u$	Velocidade linear em surge	m/s
$v$	Velocidade linear em sway	m/s
$w$	Velocidade linear em heave	m/s
$p$	Velocidade angular em roll	rad/s
$q$	Velocidade angular em pitch	rad/s
$r$	Velocidade angular em yaw	rad/s
$\bar{\mathbf{p}}$	Representação em quaternion do vetor posição	
$\bar{\mathbf{w}}$	Representação em quaternion do vetor velocidade angular	
$\mathbf{q}^*$	Conjugado do quaternion	
$\mathbf{q}^{-1}$	Inverso do quaternion	
$\otimes$	Multiplicação entre quaternions	

$[\otimes \mathbf{q}]$	Matriz equivalente à multiplicação de quaternions à esquerda	
$[\mathbf{q} \otimes]$	Matriz equivalente à multiplicação de quaternions à direita	
$\mathbf{T}$	Matriz de transformação de velocidades entre os referenciais inercial e local	
$m$	Massa seca do submarino	kg
$\mathbf{r}_{cg}$	Posição do centro de gravidade do veículo em relação ao referencial inercial	m
$\mathbf{r}_{cb}$	Posição do centro de flutuação do veículo em relação ao referencial inercial	m
$\rho$	Densidade da água	kg/m <sup>3</sup>
$\mathbf{I}_B$	Tensor de Inéncias	kg m <sup>2</sup>
$V$	Volume do submarino	m <sup>3</sup>
$g$	Aceleração da gravidade	m/s <sup>2</sup>
$\mathbf{S}(\cdot)$	Matriz antissimétrica	
$\times$	Produto vetorial	
$\mathbf{M}_{rb}$	Matriz de inércia de corpo rígido	
$\mathbf{C}_{rb}$	Matriz de efeitos de Coriolis e centrípeta de corpo rígido	
$\mathbf{f}_{ma}$	Vetor do efeito da massa adicionada	N
$\mathbf{f}_{arr}$	Vetor do efeito da arrasto hidrodinâmico	N
$\mathbf{f}_{rest}$	Vetor do efeito das forças restaurativas	N
$\mathbf{f}_u$	Vetor dos atuadores	N
$\mathbf{M}_a$	Matriz de inércia da massa adicionada	
$\mathbf{C}_a$	Matriz de efeitos de Coriolis e centrípeta da massa adicionada	
$f_d$	Força de arrasto aerodinâmico	N
$\mathbf{D}_l$	Componente linear do arrasto hidrodinâmico	N
$\mathbf{D}_q$	Componente quadrática do arrasto hidrodinâmico	N
$P_{diss}$	Potência dissipada pelo arrasto	W
$f_p$	Força peso	N
$f_e$	Empuxo	N
$\mathbf{g}$	Vetor de forças e momentos restaurativos	
$u_i$	Força produzida pelo atuador $i$	N

$b_i$	Orientação do atuador $i$	
$p_i$	Posição do atuador $i$	m
${}^T \mathbf{V}_c$	Vetor das correntes marinhas no referencial inercial	m/s
${}^B \mathbf{v}_c$	Velocidade das correntes marinhas no referencial local	m/s
$\mathbf{v}_r$	Velocidade relativa do submarino	m/s
$\mathbf{T}^\dagger$	Pseudo-inversa da matriz de transformação de velocidades	
$\mathbf{x}$	Vetor de estados	

### Símbolos dos Filtros

$x_k$	vetor de estados discretizados, no instante $k$
$y_k$	vetor de medidas discretizadas, no instante $k$
$u_k$	vetor de entradas e controle discretizadas, no instante $k$
$w_k, \epsilon_k$	Ruídos gaussianos brancos
$f_k$	Vetor da dinâmica não linear do sistema discreto
$h_k$	Vetor da das medidas sistema não linear discreto
$\hat{x}_{i j}$	Estimativa do estado no instante $i$ a partir de medidas dadas até o instante $j$
$\tilde{x}$	Erro de estimativa do estado
$F_k$	Matriz Jacobiana da dinâmica associada ao estado do sistema
$G_k$	Matriz Jacobiana da dinâmica associada ao ruído de processo
$H_k$	Matriz Jacobiana das medidas associada ao estado do sistema
$L_k$	Matriz Jacobiana das medidas associada ao ruído de medição
$P_k$	Matriz de covariância do erro de estimação do EKF
$K_k$	Matriz de ganho do EKF
$T_s$	Tempo de amostragem do sistema de controle
$p_m$	Medida de posição
$v_m$	Medida de velocidade
$\beta$	Polarização na medida de velocidade
$G_p(s)$	Filtro do sensor de posição
$G_v(s)$	Filtro do sensor de velocidade
$k_1, k_2$	Ganhos do filtro complementar

$\hat{p}$	Estimativa da posição
$\hat{v}$	Estimativa da velocidade
$\hat{\beta}$	Estimativa da polarização
$Q_p$	Matriz de covariância de processo associada à posição
$Q_q$	Matriz de covariância de processo associada à orientação
$Q_v$	Matriz de covariância de processo associada à velocidade linear
$Q_w$	Matriz de covariância de processo associada à velocidade angular
$R_a$	Matriz de covariância da medida do acelerômetro
$R_m$	Matriz de covariância da medida da bússola
$R_w$	Matriz de covariância da medida do giroscópio
$R_b$	Matriz de covariância da medida do barômetro

### Símbolos do Controle

$\tilde{p}$	Erro de posição
$\tilde{v}$	Erro de velocidade
$\tilde{\mathbf{q}}$	Erro de orientação
$\phi(\cdot)$	Difeomorfismo
$f(x)$	Campo vetorial associado à dinâmica do sistema
$g(x)$	Campo vetorial associado à entrada de controle
$\Omega$	Região do $\mathbb{R}^n$ onde o difeomorfismo é válido
$adj_{fg}$	Produto de Lie
$\mathbf{p}_d$	Trajetória de posição desejada para o submarino
$\mathbf{q}_d$	Trajetória de orientação desejada para o submarino
$y_p$	Vetor de saída para o rastreador de posição
$y_q$	Vetor de saída para o rastreador de orientação
$\mathbf{v}_d$	Velocidade linear desejada, entrada do controle dinâmico
$\mathbf{w}_d$	Velocidade angular desejada, entrada do controle dinâmico
$\delta \mathbf{q}$	Quaternion erro normalizado para o sinal de controle
$\mathbf{K}_p$	Ganho do controle de posição
$\mathbf{K}_q$	Ganho do controle de orientação
$\mathbf{K}_v$	Ganho do controle de velocidade

$\xi$  Lei de controle virtual

$\text{diag}(\cdot)$  matriz diagonal

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>20</b>
1.1 Motivação da pesquisa . . . . .	22
1.2 Revisão bibliográfica . . . . .	24
1.2.1 Controle de veículos submarinos . . . . .	24
1.2.2 Filtragem de estados . . . . .	27
1.2.3 Filtragem de correntes . . . . .	29
1.2.4 Modelagem de submarinos . . . . .	29
1.3 Objetivos e contribuições . . . . .	30
1.4 Estrutura do trabalho . . . . .	31
<b>2 MODELAGEM MATEMÁTICA . . . . .</b>	<b>33</b>
2.1 Equações do Movimento . . . . .	33
2.1.1 Modelo Cinemático . . . . .	34
2.1.2 Modelo Dinâmico . . . . .	41
2.1.2.1 Equações de Newton-Euler . . . . .	41
2.1.2.2 Equações do Submarino . . . . .	42
2.2 Modelo das Forças Externas . . . . .	45
2.2.1 Massa Adicionada . . . . .	45
2.2.2 Arrasto Hidrodinâmico . . . . .	47
2.2.3 Forças Restaurativas . . . . .	49
2.2.4 Modelo dos Atuadores . . . . .	50
2.2.5 Distúrbios Ambientais . . . . .	51
2.2.6 Modelo Completo . . . . .	53
2.3 Modelos de Medição . . . . .	55
2.3.1 Modelo de Unidade Inercial . . . . .	56
2.3.1.1 Modelo de Acelerômetro . . . . .	56
2.3.1.2 Modelo de Giroscópio . . . . .	57
2.3.1.3 Modelo de Magnetômetro . . . . .	57
2.3.2 Modelo de Sensor de Pressão . . . . .	57
2.3.3 Modelo de Sonar . . . . .	58

<b>3 FILTRAGEM</b>	<b>59</b>
3.1 Filtragem de estados . . . . .	59
3.1.1 Equacionamento dos Filtros . . . . .	60
3.1.2 Filtro de Kalman Estendido . . . . .	60
3.1.3 Equacionamento dos Modelos . . . . .	62
3.1.3.1 Discretização . . . . .	63
3.1.3.2 Modelo de filtragem . . . . .	64
3.2 Estimador de Correntes Marinhas . . . . .	65
3.2.1 Filtros Complementares . . . . .	66
3.2.2 Modelo do Estimador de Correntes . . . . .	70
3.2.2.1 Estabilidade . . . . .	72
<b>4 CONTROLE</b>	<b>73</b>
4.1 Linearização por realimentação . . . . .	73
4.1.1 Linearização Entrada-Saída . . . . .	75
4.1.1.1 Dinâmica Zero . . . . .	79
4.1.2 Linearização Entrada-Estado . . . . .	80
4.1.3 Caso MIMO . . . . .	82
4.2 Problema de Controle . . . . .	84
4.2.1 Definição do Problema de Controle . . . . .	84
4.2.2 Controlador de linearização por realimentação . . . . .	85
4.2.3 Projeto dos rastreadores . . . . .	88
4.2.3.1 Rastreador do controlador cinemático . . . . .	89
4.2.3.2 Rastreador do controlador de velocidade . . . . .	92
4.2.4 Controlador completo . . . . .	93
<b>5 RESULTADOS</b>	<b>95</b>
5.1 Parâmetros da Simulação . . . . .	96
5.1.1 Parâmetros do veículo . . . . .	96
5.1.2 Parâmetros dos filtros . . . . .	97
5.1.3 Trajetória de Referência . . . . .	98
5.2 Caso 1 . . . . .	99
5.3 Caso 2 . . . . .	104
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>115</b>

6.1 Trabalhos futuros . . . . .	118
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>APÊNDICE A . . . . .</b>	<b>127</b>
A.1 Quaternions . . . . .	127
A.2 Quaternions e Rotações no Espaço . . . . .	130
A.3 Representação de Orientação entre Referenciais . . . . .	131
A.4 Erro de Orientação entre Quaternions . . . . .	132
A.5 Equação Cinemática dos Quaternions . . . . .	133
A.6 Ortogonalidade das Matrizes da Cinemática . . . . .	136
A.7 Quaternions e ângulos de Euler . . . . .	137
<b>APÊNDICE B . . . . .</b>	<b>139</b>
B.1 Ferramentas . . . . .	139
B.1.1 Cálculo vetorial: Gradiente e Matriz Jacobiana . . . . .	139
B.1.2 Álgebra de Lie . . . . .	140
B.1.2.1 Derivada direcional de Lie . . . . .	140
B.1.2.2 Produto de Lie . . . . .	140
B.1.2.3 Transformações de coordenadas: Difeomorfismos . . . . .	141
B.1.2.4 Involutividade . . . . .	142
<b>APÊNDICE C . . . . .</b>	<b>143</b>
<b>APÊNDICE D . . . . .</b>	<b>146</b>
<b>APÊNDICE E . . . . .</b>	<b>149</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os AUVs (*Autonomous Underwater Vehicles*) são veículos robóticos que tiveram seu desenvolvimento ligado ao surgimento da era da informação. De fato, o primeiro veículo submerso com capacidades autônomas foi desenvolvido pela universidade de Washington em 1957, chamava-se SPURV (*Self-Propelled Underwater Research Vehicle*) e tinha somente objetivos científicos. Atualmente, com o avanço da tecnologia de sistemas embarcados, as áreas de aplicação dos veículos robóticos aquáticos têm se ampliado, destacando-se a indústria de defesa, o setor de óleo e gás, busca e salvamento e pesquisas sobre o bioma marinho (HAWARY, 2000) (FOSSEN, 2011).

Os AUVs têm função estratégica na indústria bélica, com aplicação desde a vigilância de portos e áreas costeiras, destacando-se nos serviços de espionagem de embarcações inimigas até na tarefa de descomissionamento de minas. Como estas são áreas bem desenvolvidas, já existem muitos produtos dos quais alguns fabricantes são: Boeing, Lockheed Martin, Saab, Eca Group e Bluefin Robotics. Na figura 1.1 é possível ver o AUV Marlin da empresa Lockheed Martin, utilizado tanto para finalidades civis quanto militares.



Figura 1.1 - Robô militar autônomo da Lockheed Martin.

Já na indústria de óleo e gás os veículos submarinos, em especial os teleoperados ou ROVs (*Remotely Operated Vehicle*), são largamente utilizados em tarefas de inspeção, antes realizadas por mergulhadores. Os ROVs, porém, ainda exigem um humano especialista na sua operação. Estes também podem ser vistos como ferramentas para captação de informação a partir de câmeras e sensores instalados na sua estrutura.

Mais recentemente, com o rápido avanço das novas e poderosas tecnologias de *Big Data*

e de ciência de dados, a utilização de submarinos capazes de operar de forma autônoma e de tomar medidas mediante emergências, vem ganhando força. Como o Flatfish, desenvolvido pelo instituto brasileiro de robótica em parceria com o instituto alemão de pesquisa em inteligência artificial e que foi projetado para ser uma sentinela permanente nas plataformas de petróleo.

Outro setor que tem utilizado AUVs é o de busca e resgate, como quando acontecem desastres ambientais, como o grande terremoto/tsunami do Japão de 2011 que destruiu boa parte da área costeira japonesa. Nesta ocasião, veículos robóticos foram utilizados para liberar rapidamente a zona portuária de Tohoku, permitindo o acesso de ajuda humanitária à população local bem como a rápida recuperação econômica regional, com o retorno das atividades portuárias.

Em um contexto geral, os veículos submarinos autônomos podem suprir a necessidade humana de desbravar as regiões ainda inexploradas do nosso planeta. O senso de curiosidade e de lançar-se ao desconhecido, que faz avançar a sociedade, promoveu a era de exploração espacial e vem agora conduzir à exploração das profundezas marinhas. Um grande desafio para o desenvolvimento da tecnologia de submarinos, além da robótica, refere-se à construção de cascos capazes de suportar as enormes pressões das profundezas marinhas, problema este não enfrentado por naves espaciais, assim, esta é uma das razões de termos conquistado o espaço antes de atingir as profundezas do mar.

Independente da área de aplicação, o emprego dos AUVs depende, em grande parte, do desenvolvimento de diversas tecnologias associadas à revolução da informação como, por exemplo, visão computacional, controle e geração de trajetórias, percepção, processamento de dados e de sistemas embarcados. Com o sucesso do desenvolvimento destas tecnologias, os mais diversos agentes têm se empenhado em cada vez mais fazer evoluir a indústria dos veículos autônomos, com destaque para os veículos subaquáticos.

Com o intuito de investigar novas tecnologias na área de robótica autônoma, o Laboratório de Mobilidade Autônoma da Unicamp (LMA), em conjunto com a Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest da França (ENIB), está desenvolvendo o RSM (*Robot Sous Marin*), um veículo submarino autônomo de pequeno porte para águas rasas. O LMA faz parte do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp e dentre as atividades desenvolvidas por este grupo de pesquisa, estão os trabalhos relacionados à veículos autônomos terrestres, com o veículo VILMA (Veículo Autônomo Inteligente do LMA) em também, de veículos aéreos, em especial quadrirotóres. A Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest possui vocação para as ciências do mar, pois está localizada no tecnopolis bretão da indústria naval francesa, uma das mais importantes do mundo. Este trabalho insere-se como o primeiro

trabalho do lado brasileiro para esta pesquisa conjunta.

## 1.1 Motivação da pesquisa

A recente revolução na indústria de sistemas computacionais, e de sensoriamento de baixo custo e miniaturizados, propiciou o desenvolvimento de veículos submarinos de pequeno porte. Se, por um lado, a redução do tamanho destes veículos permite uma melhora do desempenho energético e uma ampliação do uso em aplicações com restrição de espaço, por outro lado, surgem desafios em fazer um veículo mais manobrável, que seja capaz de navegar em espaços pequenos e de cumprir as tarefas, apesar dos distúrbios do meio (ondas e correntes marinhas).

Os pequenos AUVs disponíveis comercialmente na atualidade foram projetados para usos específicos, com isso, customizações ou alterações na finalidade de uso não são possíveis ou degradam muito o desempenho autônomo do veículo. O uso destes AUVs comerciais para desenvolver novas tecnologias aplicadas aos veículos autônomos não é, portanto, aconselhado. Nesse sentido, o uso da plataforma robótica RSM desenvolvida na parceria LMA-Unicamp e ENIB-Fr é um projeto ideal para avaliar novas tecnologias e ou aplicações. Pensado de forma modular tanto na parte eletrônica, quanto na mecânica, sua estrutura permite alterar a configuração dos atuadores, acrescentar novos sensores, câmeras ou pequenos equipamentos, de forma relativamente rápida e simples, ainda mais que no software, o uso do ROS (Robot Operating System) ajuda na integração dos novos periféricos que compõem o veículo.

Uma das aplicações já pensadas para o RSM é a de inspecionar estruturas submersas desde oleodutos e emissários submarinos, além de turbinas de usinas hidrelétricas, maremotrizes ou de turbinas de correntes marinhas. Nestas aplicações é muito importante que o veículo siga com precisão a trajetória prescrita pela missão, caso contrário o veículo pode colidir nas estruturas e causar algum desastre, como avariar a turbina, romper o oleoduto, ou até mesmo fracassar na aquisição dos dados da inspeção.

Para conseguir executar as missões citadas anteriormente de forma autônoma, o AUV RSM possui a mesma organização hierárquica funcional que qualquer sistema móvel, seja ele terrestre, aquático, aéreo ou espacial (NETO, 2011). Nesses sistemas, a execução de uma tarefa envolve o deslocamento e o posicionamento entre pontos de partida e de chegada. A arquitetura do sistema que proporciona a execução da tarefa pode ser separada em blocos de percepção,

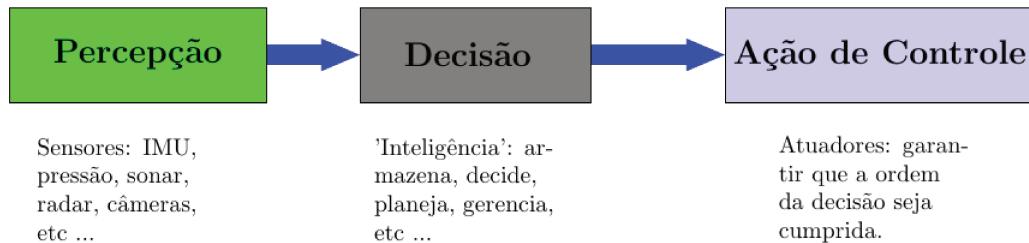


Figura 1.2 - Estrutura simplificada de um sistema robótico autônomo.

decisão e ação de controle (figura 1.2).

O sistema de percepção do veículo fornece as informações sobre o estado atual do veículo e do ambiente ao seu entorno. A percepção é composta por duas etapas: aquisição e processamento dos sinais adquiridos. Na etapa de aquisição podem ser utilizados sensores, unidades inerciais, sonares, lasers, radares, câmeras por meio dos quais as informações do ambiente e do estado do veículo são convertidas em sinais elétricos digitais. O processo de tratamento dos sinais envolve a utilização de algoritmos que além de permitir filtrar os sinais e reduzir os erros decorrentes do processo de medição, também podem auxiliar na construção de mapas do ambiente (mapas métricos ou topológicos) e no rastreamento de objetos de interesse presentes no ambiente (NETO, 2011) e (SOUZA, 2003).

Os blocos de decisão e de ação de controle utilizam as informações produzidas pelo módulo de percepção para então definir as ações futuras a serem executadas pelo veículo. A decisão é responsável por definir as trajetórias globais e locais e garantir a convergência da trajetória local para a trajetória global. Finalmente, o sistema de controle executa as ações para a execução das tarefas locais.

Finalmente, no contexto de aplicação do AUV RSM e do modelo de hierarquia de um robô autônomo, este trabalho propõe um conjunto de algoritmos relacionados aos blocos da ação de controle.

1. Modelagem do sistema: muitos projetos de controladores consideram modelos simplificados desacoplados ou até mesmo linearizados do veículo submarino, o que pode limitar ou até mesmo comprometer o desempenho do laço de controle. Uma forma de evitar este problema é considerar um modelo representativo do veículo, que leve em conta os principais efeitos que afetam o comportamento do sistema de controle do veículo
2. Controle do sistema: os algoritmos normalmente implementados são extremamente simples e limitados, pois consideram um modelo simplificado e desacoplado do veículo. Por outro lado, na literatura existem diversos algoritmos implementados

utilizando-se de técnicas não lineares complexas e que têm provas de garantia de estabilidade, porém, com implementação prática limitada. Nesse sentido, deve-se procurar conciliar a simplicidade de uma lei de controle implementável e que garanta o desempenho das técnicas não lineares.

3. Filtragem de estados: apesar de existirem diversas soluções comerciais para a estimação de estados, a maioria delas é feita para aplicações com veículos aéreos ou terrestres onde há sinal de GPS<sup>1</sup>. Embora estas soluções comerciais sejam prontas para uso, o seu funcionamento geralmente não é conhecido, o que pode limitar o desempenho do sistema de controle e de navegação. Portanto, é necessário desenvolver um sistema de filtragem de estados de forma a contemplar as características e limitações impostas pelo ambiente aquático.
4. Filtro de correntes marinhas: Quando o ambiente das missões do veículo submarino envolve operações em mar aberto ou em rios, as correntezas têm influência direta no desempenho do sistema de controle do veículo. Sem compensar as correntezas, o veículo pode desviar da trajetória desejada a uma taxa constante, o que em alguns casos pode causar acidentes. Assim, é necessário desenvolver um método para identificar as correntes marinhas e compensá-las no laço de controle.

## 1.2 Revisão bibliográfica

### 1.2.1 Controle de veículos submarinos

Os trabalhos sobre controle de trajetória de veículos submarino, encontrados na literatura, apresentam controladores simples, práticos, fáceis de serem implementados e baseados em modelos lineares ou apresentam controladores complexos, baseados em técnicas não lineares de controle e com provas de estabilidade e de desempenho.

Quando modelos lineares são utilizados, as técnicas mais empregadas são PID, LQR e  $H\infty$  e o desempenho é garantido somente no entorno da região linearizada. Apesar do desempenho ter validade local, estes modelos apresentam maior robustez à variação de parâmetros e

---

<sup>1</sup> Com a forte atenuação do sinal de GPS pela água, ele não é considerado disponível para o veículo submarino.

à realimentação de saída comparado aos controladores não lineares.

Os tipos de controladores não lineares mais utilizados são os que utilizam linearização por realimentação, *backstepping* e controle por modos deslizantes. Estes controladores, bem mais complexos que os lineares, apesar de garantir estabilidade para regiões bem maiores do espaço de estados, têm seu desempenho limitado quando incertezas e medições nos estados são consideradas.

Os controladores mais simples e mais utilizados na indústria atualmente são os do tipo PID (Porporcional-Integral-Derivativo) cujo desenvolvimento teórico foi explicado por Minorsky para o controle de navios para a marinha americana (MINORSKY., 1922). Esses controladores são fáceis de sintonizar e por isso são muito utilizados, como por exemplo em projetos com fins educacionais e de lazer como o OpenROV<sup>2</sup> (LAM, 2012). Como os PID são controladores que assumem comportamento linear do AUV, o desempenho desses geralmente degrada bastante quando o veículo se distancia do ponto de operação para o qual o controlador foi sintonizado. Uma vantagem desta simplicidade é a facilidade de adicionar controladores adaptativos para contornar estas limitações, como fez (SANTHAKUMAR; ASOKAN, 2010).

Outro controlador baseado em modelo linear é o que emprega a técnica  $H\infty$ . Em (NAG et al., 2013), um controlador  $H\infty$  é implementado para rejeitar os efeitos das ondas no controle de profundidade de um AUV. Os resultados obtidos são comparados com controladores LQG e  $H^2/H\infty$  por meio de simulações. O uso da técnica  $H\infty$  para o controle de trajetória é estudado em (KAMINER et al., 1991) onde o modelo não linear é linearizado no entorno de um ponto de operação, e a síntese do controlador é feita considerando a realimentação de estados.

Aguiar e Hespanha (2007) desenvolvem uma lei de controle não linear baseada em *backstepping* para o controle de trajetórias de veículos autônomos subatuados. Esta lei de controle é associada a um controlador supervisório chaveado que compensa as incertezas paramétricas e a subatuação. Além disso, esta estrutura de controle garante que o erro de trajetória converja assintoticamente para uma vizinhança da origem. No artigo citado, somente o problema de realimentação de estados é tratado. Como exemplo, o autor utilizou um veículo submarino sem considerar a presença de distúrbios, como ondas, correntes marinhas e ruídos de medição.

Já em (FISCHER et al., 2014) um controlador não linear para um AUV completamente atuado é desenvolvido. Para compensar incertezas e distúrbios suficientemente suaves e limitados, o autor utiliza o conceito de integral robusta do sinal do erro, baseado em equações de Filippov. O grande apelo da pesquisa é que uma análise de estabilidade, segundo Lyapunov, é

---

<sup>2</sup>Projeto OpenROV: <http://www.openrov.com/>.

fornecida. Além disso, a validação experimental do controlador, em um veículo real, em situações de mar aberto, é realizada.

Moutinho e Azinheira (2005) apresentam uma análise de estabilidade e robustez de um controlador desenvolvido com a técnica de inversão dinâmica, ou de linearização por realimentação, aplicado ao robô aéreo AURORA (*Autonomous Unmanned Remote Monitoring Robotic Airship*) (BUENO, 2002). A estabilidade é analisada a partir da teoria de Lyapunov. Testes de robustez são aplicados de forma a verificar o desempenho do controlador em face à distúrbios e incertezas no modelo e, como resultado, os parâmetros que mais afetam o desempenho da lei de controle são identificados. Ainda para o veículo AURORA, Azinheira et al. (2006) apresentam um controlador que emprega a técnica de *backstepping* com o modelo baseado em quaternions para problema de voo pairado. O projeto considera o problema de subatuação, saturação dos atuadores e presença de vento e turbulência. O controlador obtido apresenta robustez superior ao que implementa a inversão dinâmica.

A técnica de modos deslizantes ou SMC (*Sliding Mode Control*) também é muito utilizada para o controle de veículos aquáticos, como mostra Fossen em (FOSSEN, 2011). Ahmed (RHIF et al., 2014) aplica o SMC associado à um PID que atua na superfície deslizante para controlar a posição e velocidade de um torpedo, porém considera modelos SISO (*Single Input Single Output*) para cada variável a ser controlada. Já Rodrigues et al. (1996) utiliza um modelo que somente desacopla os movimentos nos planos vertical e horizontal e obtém dois controladores desacoplados. Trabalhos com SMCs para modelos MIMO<sup>3</sup> (CRISTI et al., 1990; MCGOOKIN, 2001) geralmente são versões simplificadas do modelo não linear com o movimento completo do veículo, geralmente desacoplando movimentos de translação e rotação, ou movimentos em planos.

A técnica de linearização por realimentação ou FL (*Feedback Linearization*) vem ganhando muita atenção, pois permite utilizar as técnicas lineares sem a necessidade de linearizar o modelo do veículo no entorno de um ponto de operação. Vega em (VEGA, 2014) considera a estrutura de FL para o controle de trajetórias do RSM, no caso subatuado e com atuadores vetorizados. Já Lee et al. (2009) apresenta um estudo comparativo entre a técnica de FL e SMC aplicadas a um helicóptero e chega a conclusão de que o SMC é mais robusto à incertezas de parâmetros e a ruídos de medição. Por fim Alonge e D’Ippolito (2014) aplica a técnica de FL com compensação das correntes marinhas para um modelo reduzido não linear de um veículo submarino. No trabalho (ALONGE; D’IPPOLITO, 2014), a dinâmica desconsiderada no pro-

---

<sup>3</sup>Sigla em inglês para modelos de Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas

jeto do controlador é assumida estável, o que pode não acontecer no caso de acoplamento forte entre a dinâmica atuada e a dinâmica ignorada.

Dentre as técnicas não lineares, para alguns casos, a técnica de FL pode ser mais fácil de ser desenvolvida. Esta também pode ser associada à outras técnicas de controle linear ou não linear, com o intuito de contornar a falta de robustez face às incertezas paramétricas ou ruídos. Neste trabalho, escolheu-se utilizar a FL devido a sua praticidade de desenvolvimento e implementação. Além disso, esta permite incluir novas restrições ao problema e a utilização de técnicas lineares de controle.

### **1.2.2 Filtragem de estados**

No contexto de aplicação para veículos autônomos, filtragem de estados usualmente trata do uso de vários sensores para que o veículo consiga se localizar no espaço de estados. Para veículos terrestres, principalmente, se tem visto um grande avanço das técnicas de localização que utilizam câmeras, laser, sonares, e radares, conhecidas como SLAM. Alguns resultados significativos podem ser vistos em (THRUN et al., 2005). Porém, no ambiente aquático, a utilização de câmeras e sensores laser pode ficar impossibilitada por causa da turbidez da água. Por isso, o uso de sistemas inerciais para a navegação motivou este trabalho. Existem soluções que incorporam a fusão de sensores aplicadas ao problema de navegação como fez Bar-Shalom(BAR-SHALOM, 2011).

*Dead reckoning* é uma das soluções mais primitivas para a localização de veículos submarinos. Esta é útil somente para pequenas missões devido ao crescimento exponencial dos erros de estimação. Esta técnica utiliza a integração do sinal de sensores como bússola, barômetro e de velocidade angular das hélices do veículo. Em (FOSSEN, 1994), uma estrutura básica de um sistema de localização por *dead reckoning* bem como suas limitações são apresentadas.

Outro sistema de localização para submarinos é o *Long Baseline Navigation* (LBL), em que analogamente ao sistema de GPS, o veículo se localiza a partir da triangulação com boias acústicas posicionadas na vizinhança da missão. Um ponto negativo deste modelo de localização é o alto custo e a dependência de sensores externos. Um exemplo de aplicação pode ser visto em (BAR-SHALOM, 2011) onde um AUV é empregado em condições sob uma camada de gelo no círculo polar Ártico e as bóias acústicas estão presas a um navio base e a um helicóptero.

O uso de filtro de Kaman extendido (EKF) com a unidade inercial (IMU) e implementação em quaternions pode ser visto nos trabalhos focados na área médica (SABATINI, 2006; MADGWICK et al., 2011). Os dois utilizam modelos cinemáticos para o problema de orientação e consideram uma extensão para a estimativa da polarização dos sensores da IMU. Madgwick ainda inclui uma compensação da distorção do campo magnético por meio de um processo de otimização onde se encontra o quaternion que minimiza a diferença entre o valor medido e o campo magnético estimado.

O uso do EKF para a estimativa dos estados é feito em (ELKAIM et al., 2015) cuja aplicação é em veículos aéreos. No artigo citado, o estado a ser estimado é a posição, orientação, velocidades lineares e angulares e as polarizações dos sensores. O modelo ainda inclui integração do filtro anterior com o GPS, o que produziu bons resultados. Neste trabalho é considerado um problema parecido, em que o sinal de GPS é desconsiderado, por não estar disponível na água. Além disso, as polarizações, que são assumidas constantes e que podem ser eliminadas na etapa de calibração, são desconsideradas. Ademais, a estimativa da polarização acrescenta peso computacional e complexidade ao algoritmo de estimativa sem trazer garantias de benefício.

Uma abordagem de observadores não lineares é utilizada por (MAHONY et al., 2012) para a estimativa da orientação em veículos aéreos. A teoria de filtros complementares é utilizada associada à teoria de Lyapunov para desenvolver um filtro com garantia de convergência assintótica para as estimativas da pose de um veículo aéreo. O sensor considerado é uma IMU e o modelo utilizado é o da cinemática de rotação.

Para o problema de calibração dos sensores, Miranda em (MIRANDA; FERREIRA, 2013; MIRANDA, 2014) apresenta uma técnica simplificada onde não são requeridas bancadas de calibração e um modelo de otimização baseado em algoritmos gulosos é utilizado para estimar o desalinhamento entre os sensores e o veículo.

Neste trabalho é considerado que os sensores são calibrados, como feito em (MIRANDA; FERREIRA, 2013) e um EKF com modelo dinâmico é empregado para o problema de estimativa dos estados do veículo, analogamente como é apresentado em (FOSSEN, 2011).

### 1.2.3 Filtragem de correntes

Em aplicações de mar aberto ou em missões em corredeiras de rios é essencial que o sistema de controle seja capaz de compensar o efeito das correntes, caso contrário o veículo deriva na direção da corrente e a trajetória executada fica cada vez mais distante da desejada.

Para compensar o efeito das correntes, Lekkas e Fossen (2014) desenvolvem um algoritmo de seguimento de caminho para uma embarcação e utiliza dois observadores não lineares, para estimar as componentes da corrente marinha nos sentidos longitudinal e lateral da trajetória seguida. Assim, estas componentes no cálculo do ângulo de ataque e da velocidade de referência são compensadas.

Outra forma de compensar as correntes marinhas, é de incluir no controlador uma componente integral do erro de posição, como fez Kohl et al. (2016). Neste trabalho, a lei de controle é derivada da teoria de seguimento de caminho, conhecida como *line of sight* e um termo integral é adicionado para compensar a corrente marinha. Os resultados são aplicados em um robô serpente e a compensação das correntes marinhas é alcançada.

Alonge e D’Ippolito (2014) fazem o controle de trajetórias de um AUV utilizando a técnica de FL e inclui um módulo de estimação das correntes marinhas em separado. Esta forma modular permite ao projetista desenvolver a lei de controle e o estimador de correntes independentemente, ao custo de aumentar a complexidade geral do sistema de controle.

Em todos os casos citados anteriormente, as correntes marinhas foram assumidas como não rotacionais e quase constantes, ou seja, estas variam pouco ao longo do tempo. Neste trabalho, o modelo modular para estimar as correntes, que considera somente a relação cinemática é considerado, como fez Alonge et al. (2001).

### 1.2.4 Modelagem de submarinos

Diversos modelos de submarinos podem ser derivados a depender das hipóteses consideradas e do tipo de aplicação desejada. Outro ponto importante é a qualidade e a precisão requeridas no modelo, o que pode impactar diretamente no desempenho do sistema de controle e na qualidade da simulação. Neste trabalho, um dos focos foi de estudar um modelo represen-

tativo aplicado ao veículo submarino RSM, e, por isso, uma maior atenção é dada aos principais efeitos presentes no modelo de um veículo aquático. Além disso, conhecer o modelo do veículo submarino é de suma importância para o desenvolvimento do sistema de controle e de filtragem estudados neste trabalho.

Ao se tratar de modelagem de veículos aquáticos, um autor se destaca: Thor Fossen. Os seus livros (FOSSEN, 1994) e mais recentemente (FOSSEN, 2011) são a referência para trabalhos de modelagem e controle de veículos aquáticos, com atenção especial para submarinos. Nestes livros, Fossen detalha todo o processo de modelagem, com inclusão de efeitos externos até a dinâmica dos motores. O modelo completo obtido é escrito na forma matricial e reescrito com representações nos referenciais inercial e fixo ao corpo do veículo.

Em (HAWARY, 2000) também é possível encontrar modelagem semelhante ao Fossen, com seções dedicadas à hidrodinâmica, dinâmica, distúrbios externos e de controle de veículo marinhos.

Em trabalho semelhante, Azinheira et al. (2006) desenvolve o modelo MIMO na forma matricial para um robô dirigível, e que apresenta muitas semelhanças com os modelos empregados para veículos submarinos. A vantagem de se obter modelos semelhantes é a de que técnicas de análise e controle desenvolvidas para veículos dirigíveis podem ser facilmente aplicadas em submarinos ou vice e versa, o que pode ajudar no desenvolvimento das duas áreas.

Neste trabalho, o modelo do submarino em que há a presença de efeitos externos como massa adicionada, arrasto, forças restaurativas e correntes marinhas é considerado, porém a dinâmica dos atuadores é desconsiderada.

### **1.3 Objetivos e contribuições**

Como já mencionado nas motivações, o objetivo deste trabalho consiste em desenvolver algoritmos para o bloco da ação de controle (figura 1.2). Mais especificamente, as principais contribuições deste trabalho podem ser listadas como:

1. A implementação de um modelo dinâmico não linear, multivariável e de equações acopladas de um veículo submarino. Utilização de quaternions para representar a orientação, o que torna o modelo mais robusto e eficiente, pois não existem as singularidades dos ângulos de Euler e nem o excesso de parâmetros das matrizes de

- rotação.
2. O desenvolvimento de um filtro de identificação das correntes marinhas, inspirado em filtros complementares e nas equações cinemáticas, independente portanto de parâmetros do veículo submarino.
  3. A construção de um modelo de filtro de Kalman estendido para a estimação de estados e que utiliza somente sensores iniciais e de pressão para navegar.
  4. A implementação de uma lei de controle não linear simplificada e que cumpre os objetivos de rastreamento de trajetória. Sua simplicidade se deve ao fato de que diferentemente de muitos trabalhos já publicados, a lei de controle busca utilizar somente variáveis disponíveis no sistema embarcado e, além disso, obedece a álgebra de quaternions na sua implementação.

## 1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- O Capítulo 1 apresenta a introdução, os objetivos, as contribuições deste trabalho e sua estrutura.
- O Capítulo 2 apresenta a modelagem matemática de um veículo submarino, bem como a justificativa da utilização de quaternions, além de apresentar os principais efeitos ambientais presentes no modelo.
- O Capítulo 3 apresenta os modelos de filtragem de estados e correntes marinhas implementados.
- O Capítulo 4 apresenta o método de controle linear utilizado, a definição do problema de controle e, por fim, a implementação modular da lei de controle.
- O Capítulo 5 introduz os parâmetros do veículo e apresenta os resultados obtidos com os algoritmos desenvolvidos nos capítulos anteriores.
- Na sequência, no Capítulo 6 uma discussão do trabalho é feita, e além disso, as conclusões e os trabalhos futuros são abordados.
- No Apêndice A uma introdução sobre os quaternions é apresentada.
- No Apêndice B alguns conceitos de álgebra de Lie são apresentados.
- No Apêndice C a lei de controle de linearização por realimentação da forma que

normalmente se vê na literatura é desenvolvida.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta o modelo matemático do veículo submarino. Este é composto pela dinâmica de corpo rígido (seção 2.1), do modelo dos principais efeitos ambientais (seção 2.2) e do modelo dos sensores (seção 2.3). Estes modelos serão utilizados como referência para os capítulos seguintes no desenvolvimento das técnicas de controle, filtragem de estados e estimativa de correntes marinhas.

### 2.1 Equações do Movimento

Veículos submarinos são conhecidos por possuírem modelos não lineares complexos e difíceis de determinar. Além de possuírem a já complicada dinâmica de corpos rígidos, os modelos mais completos incluem, por exemplo, forças hidrodinâmicas e hidrostáticas, dinâmica das hélices e dos motores, distúrbio de cabos conectados ao veículo e muitos outros efeitos (ABKOWITZ, 1980). Estes modelos complexos são muito úteis em tarefas de validação e simulação como fizeram Weinblum e Denis (1950) com navios, porém a complexidade demasiada ainda é um empecilho em projetos de controle e filtragem. Para adequar o modelo ao escopo dos problemas de controle e filtragem simplificações podem ser feitas, como linearizar o modelo em um ou mais pontos de operação, ou representar o modelo não linear como sistemas lineares parametrizados (LPV) ou até ignorar parte da dinâmica do modelo, como fizeram Moutinho e Azinheira (2005) em um dirigível.

Dado que neste trabalho os problemas de controle e filtragem serão abordados, decidiu-se utilizar uma versão simplificada do modelo que ainda contenha os principais efeitos da dinâmica subaquática. Este modelo é apresentado nas seções a seguir.

### 2.1.1 Modelo Cinemático

A cinemática é utilizada para descrever o movimento de corpos no espaço sem se ocupar da análise das forças ou causas do movimento. Para auxiliar na síntese das leis cinemáticas, o primeiro passo é definir sistemas de coordenadas de referência, para que os vetores de posições, velocidades, acelerações e forças sejam representados. Em robôs móveis, dois referenciais são geralmente empregados, um fixo à superfície da Terra chamado de referencial inercial  $\mathcal{I}$ , e outro fixo ao corpo do veículo chamado de referencial local  $\mathcal{B}$ . Na figura 2.1 é possível ver o sistema de referenciais adotados, juntamente com o esquemático do submarino.

O referencial fixo à superfície da Terra pode ser assumido como um referencial inercial, visto que o submarino percorre pequenas distâncias em relação à Terra e, assim, os movimentos planetários podem ser negligenciados. Útil para descrever a posição e orientação do veículo, bem como as trajetórias desejadas de uma missão, o referencial inercial é também essencial para se aplicar as equações da dinâmica de Newton-Euler, apresentadas na seção 2.1.2. A orientação do referencial inercial em relação à Terra pode ser assumida, sem perda de generalidade, como:

- $x_b$ : eixo longitudinal ou na linha traseira-frente do veículo.
- $y_b$ : eixo transversal, ou apontando para a direção lateral do veículo.
- $z_b$ : eixo normal, apontando para baixo em relação ao veículo.

A partir dos referenciais  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{B}$  é possível definir a matriz de rotação  ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}}$ , dependente de algum parâmetro de orientação, que relaciona os vetores representados em cada referencial. O vetor livre  $\mathbf{u}$ , representado no referencial local  $\mathcal{B}$ , é dado por  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{u}$  e ao multiplicá-lo pela matriz de rotação se obtém  $\mathbf{u}$  representado no referencial inercial  $\mathcal{I}$ , isto é,

$${}^{\mathcal{I}}\mathbf{u} = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}\mathbf{u}. \quad (2.1)$$

Da mesma forma, a matriz de rotação  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}}$  transforma o vetor  ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{u}$  para a representação no referencial local  $\mathcal{B}$ . As matrizes de rotação são ortogonais, o que significa que sua inversa é igual à sua transposta, e se pode escrever a seguinte relação entre  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}}$  e  ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}}$

$${}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}}^{-1} = {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{I}}^\top = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}}. \quad (2.2)$$

Para implementar a matriz de rotação, os parâmetros utilizados para representar a orientação entre os referenciais precisam ser definidos. Existem diversas maneiras de representar a

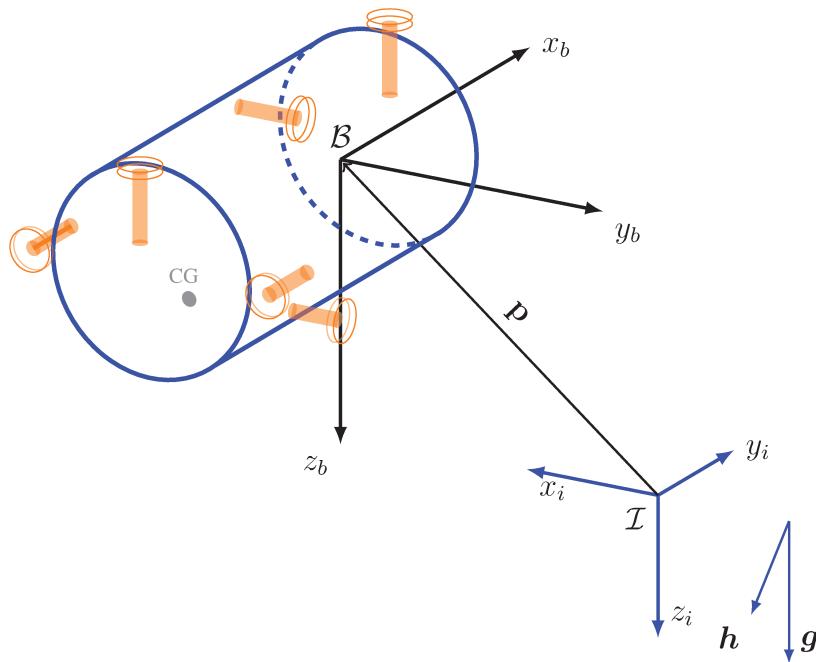


Figura 2.1 - Sistema de referenciais do veículo submarino.

orientação em espaço tridimensional, sendo que as mais conhecidas utilizam três, quatro ou nove parâmetros, as quais se destacam, os ângulos de Euler, de Tait-Bryan e de Cardan nas representações com três parâmetros, os quaternions nas representações com 4 parâmetros e as matrizes de cossenos diretores na representação com 9 parâmetros.

As representações com três parâmetros são, por construção, as mais intuitivas, dado que permitem visualizar a orientação entre os referenciais por inspeção. Do ponto de vista de implementação, para efetuar a transformação de coordenadas é necessário construir a matriz de rotação, que é dependente de funções trigonométricas em relação aos três parâmetros, o que aumenta o esforço computacional. Uma grande desvantagem desta representação é que ela possui singularidades em algumas configurações dos parâmetros, implicando que nestas configurações o movimento angular não pode ser representado. Estas singularidades, conhecidas também pelo nome de travamento giroscópico, acontecem quando dois dos três eixos que representam a orientação se alinham, ficando impossível de identificar o movimento angular de cada um dos eixos alinhados.

A representação com quatro parâmetros, dada pelos quaternions unitários, possui um embasamento matemático mais rebuscado e, por isso, é difícil de se obter associações diretas e intuitivas entre os movimentos dos referenciais e os parâmetros. Estas dificuldades algébricas e de intuição são dois dos principais motivos da resistência em utilizar quaternions para representar movimentos de rotação. Computacionalmente, os quaternions unitários são uma forma mais compacta e de cálculos mais rápidos do que as matrizes de cossenos diretores. Outra vantagem

é de que os quaternions não possuem singularidades, como ocorre com a representação com três parâmetros.

Já a representação da orientação diretamente na forma matricial, analogamente aos quaternions, não é tão intuitiva quanto a representação por três ângulos e, também, cada elemento isolado da matriz não possui significado direto na orientação relativa entre os referenciais. Computacionalmente, as matrizes de cossenos diretores possuem diversas fragilidades, pois possuem forma menos compacta do que as demais, com nove parâmetros, exigem cálculos extras e complexos para garantir que a matriz seja sempre ortogonal, o que dificulta muito na implementação em sistemas embarcados. Uma das vantagens das matrizes de cossenos diretores é que, analogamente aos quaternions, elas não possuem singularidades.

Quando a presença do humano é essencial para garantir o funcionamento do sistema, uma implementação híbrida pode ser feita. Desta forma, o sistema computacional é programado para executar os cálculos utilizando representações com quatro ou nove parâmetros, mais robustas numericamente e sem singularidades. Neste caso, esta representação é convertida para a forma intuitiva de três parâmetros quando o humano necessita observar o sistema e fazer ajustes.

Por fim, depois de pesquisar sobre as diferentes formas de representar rotações optou-se, neste trabalho, por utilizar os quaternions unitários. Os quaternions unitários possuem a vantagem sobre os ângulos de Euler por não possuírem singularidades, o que é muito vantajoso do ponto de vista de problemas de filtragem e controle. Além disso, os quaternions são mais compactos e robustos numericamente do que as matrizes de cossenos diretores, o que é vantajoso quando se considera implementação em sistemas embarcados, em que as restrições de capacidade de processamento e memória são requisitos comuns.

Depois de definidos os referenciais, o próximo passo é definir os movimentos e as variáveis utilizadas para descrevê-los. O veículo submarino movimenta-se sem restrição<sup>1</sup> no espaço tridimensional, possuindo então seis graus de liberdade (6 GDL) o que significa que são necessárias ao menos três coordenadas lineares e três angulares para descrever o movimento do veículo.

Quanto à nomenclatura, neste trabalho adotou-se a convenção apresentada pela Sociedade Internacional de Arquitetos Navais e Engenheiros Marinhos em 1950. A Sociedade propôs uma nomenclatura padronizada para descrever os movimentos dos veículos aquáticos, e que é amplamente utilizada até os dias de hoje em navios e submarinos e também em plataformas de petróleo. A nomenclatura é intuitiva e estabelece que variáveis de posição e orientação são

---

<sup>1</sup>O submarino é um corpo livre no espaço, portanto um objeto holonômico.

preferencialmente representadas no referencial inercial  $\mathcal{I}$ , e variáveis de velocidade, forças e momentos atuantes no veículo são representadas no referencial local  $\mathcal{B}$ .

Na tabela 2.1 as variáveis utilizadas são apresentadas, bem como uma breve descrição dos movimentos que elas representam. Pode-se notar que para as posições e orientações são adotadas grandezas no referencial inercial e para as velocidades lineares e angulares, forças e momentos atuantes no veículo são utilizadas escolhidas no referencial fixo ao veículo. Os nomes *surge*, *sway* e *heave* referem-se ao deslocamento linear ao longo dos eixos  $x_b$ ,  $y_b$  e  $z_b$  fixos ao veículo, respectivamente. Analogamente, os movimentos angulares de *roll*, *pitch* e *yaw* se referem ao movimento ao redor dos respectivos eixos no referencial fixo ao veículo.

Tabela 2.1 - Variáveis Padrões do SNAME.

Tabela 2.2 - Posição e orientação.

Tipo	Valor
valor em $x_i$	$x$
valor em $y_i$	$y$
valor em $z_i$	$z$
Escalar de $\mathbf{q}$	$q_0$
Componente $x_i$ de $\mathbf{q}$	$q_1$
Componente $y_i$ de $\mathbf{q}$	$q_2$
Componente $z_i$ de $\mathbf{q}$	$q_3$

Tabela 2.3 - Velocidades e esforços.

Tipo de Movimento	Nome	Forças e Momentos	Velocidades
ao longo de $x_b$	surge	$X$	$u$
ao longo de $y_b$	sway	$Y$	$v$
ao longo de $z_b$	heave	$Z$	$w$
ao redor de $x_b$	roll	$K$	$p$
ao redor de $y_b$	pitch	$M$	$q$
ao redor de $z_b$	yaw	$N$	$r$

Estas variáveis podem ser empilhadas na forma de vetores para facilitar o equacionamento tanto do modelo matemático como nas leis de controle e filtragem do veículo. Assim, as variáveis podem ser agrupadas da seguinte forma

Tabela 2.4 - Variáveis agrupadas na forma de vetor.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= [{}^B\mathbf{p}^\top, \mathbf{q}^\top], & {}^B\mathbf{p}^\top &= [x, y, z], & \mathbf{q}^\top &= [q_0, q_1, q_2, q_3], \\ \boldsymbol{\nu} &= [{}^B\mathbf{v}^\top, {}^B\mathbf{w}^\top], & {}^B\mathbf{v}^\top &= [u, v, w], & {}^B\mathbf{w}^\top &= [p, q, r], \\ \boldsymbol{\tau} &= [{}^B\mathbf{f}^\top, {}^B\mathbf{m}^\top], & {}^B\mathbf{f}^\top &= [X, Y, Z], & {}^B\mathbf{m}^\top &= [K, L, M], \end{aligned}$$

tal que,

- ${}^T\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  é o vetor posição dado no referencial inercial,
- $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^2$  é o quaternion unitário que representa a orientação do referencial local  $\mathcal{B}$ ,
- ${}^B\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  é o vetor de velocidade linear representado em  $\mathcal{B}$ ,
- ${}^B\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  é o vetor de velocidade angular representado em  $\mathcal{B}$ ,
- ${}^B\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$  é o vetor de forças em  $\mathcal{B}$ ,

<sup>2</sup> O símbolo  $\mathbb{H}$  refere-se ao conjunto dos quaternions, parte da classe do números hipercomplexos.

- ${}^B\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$  é o vetor de momentos em  $\mathcal{B}$ ,
- $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}$  denota a posição e a orientação do veículo em  $\mathcal{I}$ ,
- $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^6$  denota o vetor de velocidades lineares e angulares do veículo em  $\mathcal{B}$ ,
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$  denota o vetor de esforços atuantes no veículo em  $\mathcal{B}$ .

A partir das considerações e definições feitas anteriormente, a relação de transformação entre os vetores de velocidade linear dadas no referencial inercial  ${}^T\dot{\mathbf{p}}$  e no fixo ao corpo do veículo  ${}^B\mathbf{v}$  é escrita por meio da seguinte rotação de quaternions

$${}^T\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{q} \otimes {}^T\bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{q}^*, \quad (2.3)$$

em que o produto entre quaternions é  $(\otimes)$  e está definido no apêndice A. A representação em quaternion dos vetores de velocidade linear pode ser dada por

$${}^T\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^T\dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}, \quad {}^B\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^B\mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Ao se expandir os produtos da equação (2.3) de transformação entre velocidades e após alguns algebrismos, é possível reescrever a equação como

$${}^T\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} {}^B\mathbf{v}, \quad (2.5)$$

tal que  $\mathbf{Q}$  é dada por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_3q_0) & 2(q_1q_3 + q_2q_0) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_1q_0) \\ 2(q_1q_3 - q_2q_0) & 2(q_2q_3 + q_1q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}.$$

Com alguns cálculos adicionais é possível dizer que  $\mathbf{Q}$  é uma matriz ortogonal e com determinante positivo, o que significa que ela é uma matriz de rotação representada como

$${}^T\mathbf{R}_{\mathcal{B}} = \mathbf{Q}. \quad (2.6)$$

Note que a matriz de rotação descrita por quaternions  ${}^T\mathbf{R}_{\mathcal{B}} = {}^T\mathbf{R}(\mathbf{q})_{\mathcal{B}}$  é construída somente a partir de operações elementares de adição e multiplicação, que são menos custosas

computacionalmente do que a construção a partir de ângulos de Euler, que depende de funções trigonométricas normalmente aproximadas por séries de potências.

Para o leitor interessado, no apêndice A é possível encontrar uma breve introdução aos quaternions e suas operações básicas, bem como a utilização dos quaternions unitários para representar rotações no espaço tridimensional.

Observe que ao reescrever a equação (2.3) utilizando a matriz de rotação (2.6), se obtém a mesma transformação de vetores entre referenciais dada pela equação (2.1)

$${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{p}} = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{v}. \quad (2.7)$$

A relação escrita na equação (2.7) descreve a evolução da posição do veículo  ${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{p}}$  em relação ao referencial inercial quando o veículo se move com velocidade  ${}^B\mathbf{v}$ , medida no referencial do veículo. A relação inversa entre os dois vetores pode ser dada por

$${}^B\mathbf{v} = {}^B\mathbf{R}_{\mathcal{I}} {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{p}} = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_B^{-1} {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{p}} = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_B^\top {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{p}}.$$

A evolução da trajetória ou caminho percorrido pelo veículo submarino  ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{p}$  no referencial inercial  $\mathcal{I}$  pode ser calculado computacionalmente através de métodos de integração. A integração pelo método de Euler pode ser dada pelo algoritmo 2.1.

---

#### **Algoritmo 2.1** Integração numérica da posição

---

1. Definição de parâmetros iniciais.  $k = 0$  e  $\mathbf{p}(0)$ .
2. Dada a orientação,  $\mathbf{q}_k$ , determine a matriz de rotação  ${}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_B(\mathbf{q}_k)$ .
3. A integração de Euler, com passo de integração  $\Delta t$  resulta em:

$${}^{\mathcal{I}}\mathbf{p}_{k+1} = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{p}_k + \Delta t {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_B(\mathbf{q}_k) {}^B\mathbf{v}_k. \quad (2.8)$$

4. Faça  $k = k + 1$  e volte ao passo 2.

---

Considere que  $k\Delta t$  é o instante de tempo amostrado, com notação descrita por somente  $k$ , e os vetores são escritos como  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}(k\Delta t)$ .

---

No apêndice A, a equação de evolução no tempo do quaternion que representa a orientação entre os referenciais inercial  $\mathcal{I}$  e local  $B$  é desenvolvida. Se o veículo possui velocidade angular  ${}^B\mathbf{w}$ , então

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_2 {}^B \mathbf{w}, \quad (2.9)$$

dado que,

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

Ao se implementar computacionalmente a equação (2.9) deve-se considerar que a norma do quaternion deve ser sempre unitária. Os métodos de integração tradicionais não levam em conta esta restrição de norma, fazendo que ao longo da integração a norma do quaternion desvie da norma unitária, seja por erros de arredondamento ou pela presença de ruídos. Uma forma de contornar este problema, é considerar um passo de integração pequeno e toda vez normalizar o resultado da integração, como mostrado no algoritmo 2.2.

---

### **Algoritmo 2.2** Integração Numérica dos quaternions

---

1. Definição de parâmetros iniciais.  $k = 0$  e  $\mathbf{q}(0)$ .
2. A integração de Euler, com passo de integração  $\Delta t$  resulta em:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{R}_2(\mathbf{q}_k) {}^B \mathbf{w}_k. \quad (2.10)$$

3. Normalização:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \frac{\mathbf{q}_{k+1}}{\|\mathbf{q}_{k+1}\|}. \quad (2.11)$$

4. Faça  $k = k + 1$  e volte ao passo 2.
- 

A lei cinemática que descreve o movimento espacial do veículo ao longo do tempo pode ser dada pelas equações (2.7) e (2.9), agrupadas na equação (2.12).

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T} \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^T \mathbf{R}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

## 2.1.2 Modelo Dinâmico

### 2.1.2.1 Equações de Newton-Euler

Como complemento à cinemática, a dinâmica ocupa-se de entender as causas do movimento dos corpos no espaço. As equações da dinâmica de corpo rígido do AUV podem ser obtidas a partir de duas abordagens diferentes, da mecânica Newtoniana (princípio de variação do momento do sistema) e da mecânica Lagrangeana (princípio da variação da energia do sistema). Por ser mais direta, aqui se mostra o que foi desenvolvido por Fossen (1994), o qual utilizou a abordagem Newtoniana.

Seja um corpo rígido de massa  $m$ , com o centro de gravidade (CG) localizado a uma distância  $\mathbf{p}_{cg}$  do referencial inercial  $\mathcal{I}$  e com soma das forças atuantes no corpo  $\mathbf{f}$ , então a primeira equação de Newton-Euler pode ser escrita como

$$m\ddot{\mathbf{p}}_{cg} = \mathbf{f}. \quad (2.13)$$

Se o corpo experimenta movimento de rotação, com velocidade angular dada por  $\mathbf{w}$ , matriz de inércia  $\mathbf{I}_B$  constante e o somatório de momentos atuantes no corpo for  $\mathbf{m}$ , então a segunda equação de Newton-Euler pode ser dada como

$$\mathbf{I}_B \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{w} \times \mathbf{I}_B \mathbf{w} + m \mathbf{r}_{cg} \times (\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \mathbf{m}. \quad (2.14)$$

Uma forma de facilitar a aplicação das equações (2.13) e (2.14) é de considerar o diagrama de corpo livre do veículo, como apresentado na figura 2.2, onde é possível anotar as forças consideradas: peso, empuxo, propulsão dos motores e influências externas da interação fluido-estrutura. Nas seções seguintes as considerações para o equacionamento do modelo serão apresentadas.

As equações apresentadas acima (2.13) e (2.14) são conhecidas como as equações de Newton-Euler e descrevem o movimento de um corpo rígido no espaço tridimensional.

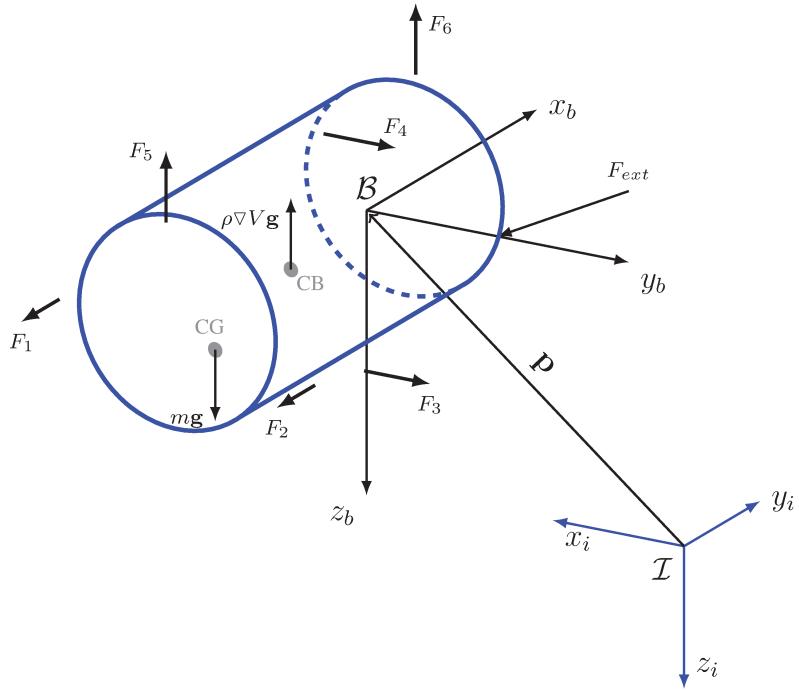


Figura 2.2 - Diagrama de corpo livre do AUV

### 2.1.2.2 Equações do Submarino

O veículo submarino considerado para o modelo possui as seguintes características:

- O corpo do AUV é um cilindro rígido,
- Os motores são ideais: não possuem inércia e nem dinâmica,
- O veículo move-se longe do leito e da superfície: a massa adicionada é constante,
- Os esforços externos obedecem o efeito da superposição: seus efeitos podem ser somados,
- As correntes marinhas são constantes.

O primeiro passo para escrever a equação da dinâmica de translação é reescrever a aceleração do CG do submarino em termos das variáveis do referencial local  $\mathcal{B}$ .

Se a velocidade do submarino percebida pelo referencial local do veículo é  ${}^{\mathcal{B}}v$ , o veículo gira com velocidade angular  ${}^{\mathcal{B}}w$  e, ainda, o centro de gravidade do veículo encontra-se à uma distância  ${}^{\mathcal{B}}r_{cg}$  da origem do referencial local  $\mathcal{B}$ , a seguinte relação entre a velocidade absoluta do CG (vista no referencial inercial) e a lei cinemática pode ser feita

$${}^{\mathcal{I}}\dot{p}_{cg} = {}^{\mathcal{I}}R_{\mathcal{B}}({}^{\mathcal{B}}v + {}^{\mathcal{B}}w \times {}^{\mathcal{B}}r_{cg}).$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, e levando em conta de que a derivada da matriz de rotação pode ser escrita como  ${}^T\dot{\mathbf{R}}_B = {}^T\mathbf{R}_B [{}^B\mathbf{w} \times]$ , e que sob a hipótese de corpo rígido  ${}^B\dot{\mathbf{r}}_{cg} = 0$  é obtido

$${}^T\ddot{\mathbf{p}}_{cg} = {}^T\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{v}} + {}^T\dot{\mathbf{R}}_B {}^B\mathbf{v} + {}^T\dot{\mathbf{R}}_B ({}^B\mathbf{w} \times {}^B\mathbf{r}_{cg}) + {}^T\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{w}} \times {}^B\mathbf{r}_{cg} \quad (2.15)$$

$$= {}^T\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{v}} + {}^T\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{w} \times {}^B\mathbf{v} + {}^T\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{w} \times ({}^B\mathbf{w} \times {}^B\mathbf{r}_{cg}) + {}^T\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{w}} \times {}^B\mathbf{r}_{cg}. \quad (2.16)$$

Ao passar esta equação para o referencial  $B$  e utilizando a notação de matriz antissimétrica para o produto vetorial. tem-se

$${}^B\ddot{\mathbf{p}}_{cg} = {}^B\dot{\mathbf{v}} + {}^B\mathbf{w} \times {}^B\mathbf{v} + {}^B\dot{\mathbf{w}} \times {}^B\mathbf{r}_{cg} + {}^B\mathbf{w} \times ({}^B\mathbf{w} \times {}^B\mathbf{r}_{cg}) \quad (2.17)$$

$$= {}^B\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}({}^B\mathbf{w}) {}^B\mathbf{v} + \mathbf{S}^\top({}^B\mathbf{r}_{cg}) {}^B\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{S}({}^B\mathbf{w}) \mathbf{S}^\top({}^B\mathbf{r}_{cg}) {}^B\mathbf{w}, \quad (2.18)$$

com  $\mathbf{S}$  uma matriz antissimétrica associada ao produto vetorial.

Uma matriz antissimétrica é toda matriz em que a transposta negativada é igual a própria matriz. Uma matriz antissimétrica associada ao produto vetorial<sup>3</sup> pode ser definida pela definição 2.1.

**Definição 2.1.** Seja  $\mathbf{S} \in \text{real}^{3 \times 3}$  matriz antissimétrica, isto é,  $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^\top$  e sejam os vetores  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Se a matriz possui a seguinte estrutura

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

com  $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^\top$ , então o produto vetorial entre os vetores pode ser representado como o produto de matrizes

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b}, \quad (2.20)$$

com  $\mathbf{S}(\mathbf{a})$  dado por (2.19).

A dinâmica linear do veículo pode ser escrita como a combinação entre a primeira equação de Newton-Euler (2.13) e a fórmula da aceleração do CG em termos das variáveis descritas no referencial fixo ao corpo do veículo (2.17), ou seja,

---

<sup>3</sup>O sinal dos elementos da matriz vai depender se é adotada a regra da mão direita ou esquerda para construir o sistema de referenciais. Neste trabalho é adotada a regra da mão direita.

$$m[\mathbf{\dot{v}} + \mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{S}^\top(\mathbf{r}_{cg})\mathbf{\dot{w}} + \mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{S}^\top(\mathbf{r}_{cg})\mathbf{w}] = \mathbf{f}, \quad (2.21)$$

sendo que as forças externas representadas pelo vetor  $\mathbf{f}$  serão detalhadas na seção 2.2.

A dinâmica angular, por sua vez, é descrita pela segunda equação de Newton-Euler

$$\mathbf{I}_B \mathbf{\dot{w}} + \mathbf{w} \times \mathbf{I}_B \mathbf{w} + m \mathbf{r}_{cg} \times (\mathbf{\dot{v}} + \mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \mathbf{m}, \quad (2.22)$$

tal que os efeitos do momentos externos estão apresentados na seção 2.2. A equação 2.22 pode ser reescrita utilizando a notação de matriz antissimétrica, como a seguir

$$\mathbf{I}_B \mathbf{\dot{w}} + \mathbf{S}(\mathbf{w}) \mathbf{I}_B \mathbf{w} + m \mathbf{S}(\mathbf{r}_{cg}) \mathbf{S}^\top(\mathbf{w}) \mathbf{\dot{v}} + m \mathbf{S}(\mathbf{r}_{cg}) \mathbf{S}(\mathbf{w}) \mathbf{v} = \mathbf{m}. \quad (2.23)$$

A partir das equações (2.21) e (2.23) é fácil reescrever o sistema na forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_3 & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{cg}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}_{cg}) & \mathbf{I}_B \end{bmatrix}}_{M_{rb}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\dot{v}} \\ \mathbf{\dot{w}} \end{bmatrix}}_{\dot{\nu}} + \underbrace{\begin{bmatrix} m\mathbf{S}(\mathbf{w}) & -m\mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{S}(\mathbf{r}_{cg}) \\ m\mathbf{S}(\mathbf{r}_{cg})\mathbf{S}^\top(\mathbf{w}) & \mathbf{S}(\mathbf{I}_B \mathbf{w}) \end{bmatrix}}_{C_{rb}(\boldsymbol{\nu})} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\nu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}},$$

que pode ser escrita na forma compacta a seguir

$$\mathbf{M}_{rb} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_{rb}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.24)$$

em que  $\mathbf{M}_{rb}$  é denominada matriz de inércia de corpo rígido do veículo e que possui a propriedade de ser simétrica e definida positiva e a matriz  $\mathbf{C}_{rb}(\boldsymbol{\nu})$  é conhecida por matriz dos efeitos coriolis e centrípeta e é antissimétrica, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{rb} &= \mathbf{M}_{rb}^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_{rb} > 0 \\ \mathbf{C}_{rb}(\boldsymbol{\nu}) &= -\mathbf{C}_{rb}^\top(\boldsymbol{\nu}) \end{aligned}$$

Nas seções a seguir os principais efeitos que afetam o comportamento do veículo submarino serão modelados: massa adicionada(seção 2.2.1), arrasto hidrodinâmico (seção 2.2.2), forças restaurativas (seção 2.2.3), atuadores (seção 2.2.4) e distúrbios ambientais (seção 2.2.5).

O vetor de esforços externos pode ser escrito<sup>4</sup> como

$$\tau = -\mathbf{f}_{ma} - \mathbf{f}_{arr} - \mathbf{f}_{rest} + \mathbf{f}_u, \quad (2.25)$$

nos quais,

- $\mathbf{f}_{ma}$  é o efeito de massa adicionada,
- $\mathbf{f}_{arr}$  é o efeito do arrasto hidrodinâmico,
- $\mathbf{f}_{rest}$  é o efeito das forças restaurativas,
- $\mathbf{f}_u$  o esforço dos atuadores.

Já o efeito dos distúrbios ambientais afeta diretamente as variáveis dos modelos cinemático e dinâmico e será apresentado oportunamente.

## 2.2 Modelo das Forças Externas

O modelo dos esforços externos depende muito da aplicação que se deseja. Por exemplo, os modelos de veículos aéreos geralmente consideram somente a gravidade como esforço externo, desconsiderando as forças devido ao arrasto aerodinâmico, a massa adicionada e o efeito do vento. Diferentemente dos veículos aéreos, as forças externas tem papel fundamental no comportamento dinâmico do submarino, não podendo ser desprezadas no modelo dinâmico deste veículo.

Conforme dissemos no Capítulo 1, estudos detalhados com descrição e dedução das equações dos efeitos externos podem ser encontrados em (HAWARY, 2000; FOSSEN, 1994; FOSSEN, 2011; FALTINSEN, 1993).

### 2.2.1 Massa Adicionada

O efeito de massa adicionada ocorre porque quando o veículo é acelerado há a tendência de que o volume de água ao redor do veículo também acelere com ele, possuindo um compor-

---

<sup>4</sup> É assumido que os efeitos não influenciam uns aos outros e que podem ser somados.

tamento proporcional à aceleração do veículo, o que pode ser visto como um ganho de massa pelo veículo.

Em (FOSSEN, 1994), o conceito de massa adicionada é apresentado a partir de equações de energia do sistema. O autor explica que, quando o veículo se move, todo o fluido ao seu redor sofre uma oscilação forçada proporcional à aceleração do veículo. Além disso, este efeito de oscilação no fluido é mais intenso para porções do fluido nas proximidades do veículo e é atenuado para as porções de fluido mais distantes. Por conta deste comportamento oscilatório, o autor ressalta que, apesar do nome, a massa adicionada não pode ser vista somente como um volume finito de água que move-se junto ao veículo e que pode ser considerada uma adição à massa do veículo.

Para este trabalho, foi assumido que o veículo está completamente submerso na água e que as ondas não influenciam no efeito da massa adicionada, o que significa que a massa adicionada é invariante. Uma formulação considera que o veículo, ao se mover, empurra o fluido no sentido oposto do movimento e esse ‘empurrão’ pode ser visto como energia cinética adicionada ao fluido. A expressão desta energia, que pode ser encontrada em (LAMB, 1932), é dependente de um valor de massa adicionada, e é escrita da seguinte forma

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^\top \boldsymbol{M}_a \boldsymbol{\nu}.$$

O esforço da massa adicionada sobre o veículo pode ser calculado ao se utilizar a modelagem por energia, pois se tem a expressão da energia cinética referente à massa adicionada (equação (2.26)). Em (FOSSEN, 2011) são utilizadas as equações de Kirchhoff<sup>5</sup> (2.2).

**Definição 2.2.** (FOSSEN, 2011) Seja um corpo rígido movendo-se com velocidades linear  ${}^B\mathbf{v}$  e angular  ${}^B\mathbf{w}$  agrupadas com  $\boldsymbol{\nu} = [{}^B\mathbf{v}^\top {}^B\mathbf{w}^\top]^\top$ . Então a força  ${}^B\mathbf{f}$  e o momento  ${}^B\mathbf{m}$  atuantes no corpo rígido, se relacionam com a energia cinética

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^\top \boldsymbol{M} \boldsymbol{\nu},$$

---

<sup>5</sup>Esse método é uma versão modificada do método de Lagrange, onde as equações de energia podem ser escritas num referencial girante.

através das seguintes equações

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial {}^B \mathbf{v}} \right) + \mathbf{S}({}^B \mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial {}^B \mathbf{v}} = {}^B \mathbf{f}, \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial {}^B \mathbf{w}} \right) + \mathbf{S}({}^B \mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial {}^B \mathbf{w}} + \mathbf{S}({}^B \mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial {}^B \mathbf{v}} = {}^B \mathbf{m}. \quad (2.27)$$

Aplicando as equações de Kirchhoff, mostradas na definição 2.2 na equação da energia cinética relacionada à massa adicionada, é possível escrever o efeito da massa adicionada, análogamente ao modelo da dinâmica de corpo rígido, da seguinte forma

$$\mathbf{f}_{ma} = \mathbf{M}_a \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_a(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}, \quad (2.28)$$

tal que se for assumido o seguinte formato particionado da matriz de massa adicionada

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

a matriz de efeitos de coriolis de massa adicionada  $\mathbf{C}_a(\boldsymbol{\nu})$  pode ser parametrizada como uma matriz antissimétrica

$$\mathbf{C}_a(\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & -\mathbf{S}(M_{11} {}^B \mathbf{v} + M_{12} {}^B \mathbf{w}) \\ -\mathbf{S}(M_{11} {}^B \mathbf{v} + M_{12} {}^B \mathbf{w}) & \mathbf{S}(M_{21} {}^B \mathbf{v} + M_{22} {}^B \mathbf{w}) \end{bmatrix},$$

sendo que  $\mathbf{0}_3$  é a matriz de zeros quadrada de ordem três.

Por fim, se for assumido que a água se comporta como fluido ideal, que não há ondas incidentes e que não há correntes marinhas, pode-se concluir que a matriz de massa adicionada é definida positiva  $\mathbf{M}_a > 0$ . Além do mais, para velocidades de deslocamento não muito altas, e um veículo com três planos de simetria, a matriz de massa adicionada pode ser considerada como matriz diagonal (LAMB, 1932).

## 2.2.2 Arrasto Hidrodinâmico

O amortecimento hidrodinâmico para veículos submarinos possui diversas causas:

- **Atrito entre água e superfície do veículo:** escoamento laminar da água (baixas

velocidades) possui comportamento linear e para escoamento turbulento (altas velocidades) o comportamento próximo à função quadrática,

- **Formação de vórtices no escoamento:** acontece quando fluxos de escoamento da água em diferentes partes do veículo se cruzam, formando vórtices, que retiram energia cinética do veículo,
- **Forças de sustentação:** princípio de vôo em aviões, se deve à diferença de pressão entre partes do casco do veículo.

O efeito de formação de vórtices pode ser modelado pela conhecida equação de arrasto hidrodinâmico. Considere um corpo movendo-se com velocidade  $\mathbf{u}$  em um fluido com densidade  $\rho$ , a força de arrasto é dada por

$$f_d(u) = -\frac{1}{2}\rho C_d A \|\mathbf{u}\| \mathbf{u},$$

de forma que  $C_d$  é o coeficiente de arrasto, que é dependente do número de Reynolds,  $A$  é a área de seção transversal do corpo, perpendicular ao sentido do movimento e  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana.

É comum considerar que o amortecimento hidrodinâmico possui componentes linear e quadrática, dado que a interação entre as causas é complexa, o que dificulta o estudo da influência de cada uma no valor total do amortecimento. Então, pode-se escrever que

$$\mathbf{f}_{arr} = (\mathbf{D}_l + \mathbf{D}_q(\boldsymbol{\nu}))\boldsymbol{\nu} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}, \quad (2.29)$$

em que a influência linear é  $\mathbf{D}_l$  e a não quadrática é  $\mathbf{D}_q$  e a composição delas é a matriz de amortecimento hidrodinâmico. Como o amortecimento sempre age no sentido de dissipar a energia do veículo, isso implica que a potência perdida através do amortecimento é positiva.

Se o veículo move-se com velocidade  $\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{v}^\top \mathbf{w}^\top]^\top$ , dado que  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são as velocidades lineares e angulares do veículo relativamente à água, e se a força de amortecimento dissipativa é dada pela equação (2.29), então a potência dissipada é sempre positiva  $P_{diss} > 0$ , a menos que a velocidade seja nula, isto é

$$P_{diss} = \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{f}_{arr} > 0, \quad \forall \quad \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

substituindo a equação (2.29) na equação (2.30), obtém-se

$$\boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} > 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \neq 0,$$

o que significa que a matriz de amortecimento hidrodinâmico é definida positiva, ou seja

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) > 0.$$

### 2.2.3 Forças Restaurativas

As forças restaurativas num veículo submerso em um fluido são resultado da ação conjunta das forças peso e empuxo. A força peso, proporcional à massa seca do veículo  $m$ , se deve à ação gravitacional, representada por uma força resultante atuante no centro de gravidade do veículo. O empuxo, proporcional à densidade do fluido  $\rho$  e ao volume de fluido deslocado pelo objeto  $V$ , pode ser visto como a força resultante exercida pelo fluido sobre o corpo e que age no centro de empuxo.

Se o valor da aceleração da gravidade vale  $g$ , então os vetores das forças peso e empuxo valem, respectivamente

$${}^T \mathbf{f}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}, \quad {}^T \mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g V \end{bmatrix}.$$

Como o eixo  $z_i$  do referencial inercial foi definido no sentido do vetor do campo gravitacional, é natural esperar a força peso possuir sinal positivo, e o empuxo, sempre contrário ao sentido da gravidade, sinal negativo. Para calcular os momentos atuantes, é mais conveniente representar as forças no referencial fixo ao veículo  $\mathcal{B}$ , da seguinte forma

$${}^B \mathbf{f}_p = {}^T \mathbf{R}_{\mathcal{B}}^\top {}^T \mathbf{f}_p = m g \mathbf{r}_3,$$

$${}^B \mathbf{f}_e = {}^T \mathbf{R}_{\mathcal{B}}^\top {}^T \mathbf{f}_e = -\rho g V \mathbf{r}_3,$$

de tal modo que o vetor  $\mathbf{r}_3$  é o vetor composto pelos elementos da terceira linha da matriz de

rotação  ${}^T\mathbf{R}_B$ .

Se a distância do centro de gravidade (CG) e do centro de flutuação do veículo são,  ${}^B\mathbf{r}_{cg}$  e  ${}^B\mathbf{r}_{cb}$ , respectivamente, os momentos que estas forças causam no veículo são  ${}^B\mathbf{r}_{cg} \times {}^B\mathbf{f}_p$  e  ${}^B\mathbf{r}_{cb} \times {}^B\mathbf{f}_e$ . O vetor que representa os esforços restaurativos atuantes no veículo submarino, ao se empregar as matrizes antissimétricas para o produto vetorial, é dado por

$$\mathbf{f}_{rest} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{f}_p + {}^B\mathbf{f}_e \\ \mathbf{S}({}^B\mathbf{r}_{cg}) {}^B\mathbf{f}_p + \mathbf{S}({}^B\mathbf{r}_{cb}) {}^B\mathbf{f}_e \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

#### 2.2.4 Modelo dos Atuadores

O vetor dos esforços dos atuadores é também conhecido como vetor das entradas de controle. É por meio deste vetor que o projetista pode desenvolver leis de controle para garantir que o veículo cumpra as missões desejadas.

Se existem  $p$  atuadores e  $u_1, u_2, \dots, u_p$  são as forças produzidas por cada um deles, o vetor das entradas de controle pode ser definido como  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_p]^T$ . Seja  ${}^B\mathbf{b}_i$  versor de direção das forças para o atuador  $i$  e  ${}^B\mathbf{p}_i$  a posição do respectivo atuador. Então, a força  ${}^B\mathbf{f}_{1u}$  e o momento  ${}^B\mathbf{f}_{2u}$  resultantes produzidos pelas entradas de controle são

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{f}_{1u} &= \sum_{i=1}^p u_i {}^B\mathbf{b}_i, \\ {}^B\mathbf{f}_{2u} &= \sum_{i=1}^p u_i {}^B\mathbf{p}_i \times {}^B\mathbf{b}_i. \end{aligned}$$

Reescrevendo estas expressões na forma matricial e utilizando a matriz antissimétrica para o produto vetorial, obtém-se

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{f}_u &= \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{f}_{1u} \\ {}^B\mathbf{f}_{2u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{b}_1 & {}^B\mathbf{b}_2 & \cdots & {}^B\mathbf{b}_p \\ \mathbf{S}({}^B\mathbf{p}_1) {}^B\mathbf{b}_1 & \mathbf{S}({}^B\mathbf{p}_2) {}^B\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{S}({}^B\mathbf{p}_p) {}^B\mathbf{b}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \\ {}^B\mathbf{f}_u &= \mathbf{B}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

### 2.2.5 Distúrbios Ambientais

Os distúrbios ambientais mais conhecidos nos problemas de controle de sistemas marinhos são os efeitos de superfície ou das ondas e das correntes marinhas. Como uma das hipóteses para o desenvolvimento deste modelo foi que o veículo se encontra suficientemente distante da superfície, o efeito das ondas pode ser desprezado ou considerado como distúrbio desconhecido na simulação do modelo do sistema.

Modelar o efeito das correntes marinhas é a preocupação fundamental nos problemas de filtragem e controle de embarcações, como se pode ver nos estudos de Fossen (1994) e Abkowitz (1980). Nestes estudos a condição genérica de que as correntes marinhas são fluxos de água variantes no tempo com presença de vórtices foi considerada. Em muitos casos de aplicação é suficiente considerar que as correntes marinhas são aproximadamente constantes durante a missão do veículo submarino, o que simplifica muito o modelo e facilita na análise e projeto de sistemas de localização e controle, como fez Fossen (2011).

Se a corrente marinha não possui vórtices e for considerada aproximadamente constante durante a missão do veículo, pode-se dizer que um referencial qualquer fixo à massa de água, que compõe a corrente marinha, é um referencial inercial. Isso ocorre como decorrência que o referencial da corrente marinha se desloca com velocidade constante em relação ao referencial inercial fixo à Terra  $\mathcal{I}$ , e de acordo com o primeiro postulado da teoria da relatividade os dois referenciais são equivalentes. A partir desta propriedade, as leis da dinâmica podem ser aplicadas considerando o referencial da corrente marinha como o referencial inercial.

Para reescrever as equações do modelo do veículo no referencial inercial que se move com as correntes marinhas, é preciso definir a velocidade relativa entre o referencial do veículo  $\mathcal{B}$  e o referencial inercial associado à corrente marinha. Seja a corrente marinha definida pelo vetor de velocidade linear constante, representada nos referenciais  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{B}$ , tem-se

$${}^{\mathcal{I}}\mathbf{V}_c = \begin{bmatrix} V_{cx} & V_{cy} & V_{cz} \end{bmatrix}^\top, \quad {}^{\mathcal{B}}\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} u_c & v_c & w_c \end{bmatrix}^\top, \quad (2.33)$$

tal que  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{v}_c$  é a relação entre os vetores e está dada por  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{v}_c = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}}^\top {}^{\mathcal{I}}\mathbf{V}_c$ .

Se o veículo possui velocidade linear absoluta  ${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{p}}$ , então a velocidade relativa entre o

veículo e a água em movimento é definida por:

$${}^T\mathbf{V}_r = {}^T\dot{\mathbf{p}} - {}^T\mathbf{V}_c,$$

que reescrita no referencial móvel fixo ao veículo fica

$${}^B\mathbf{v}_r = {}^B\mathbf{v} - {}^B\mathbf{v}_c. \quad (2.34)$$

A equação (2.7) que descreve o movimento de translação do veículo pode ser reescrita considerando as correntes marinhas e a velocidade relativa entre o veículo e a água, da seguinte forma

$${}^T\dot{\mathbf{p}} = {}^T\mathbf{R}_B({}^B\mathbf{v}_r + {}^B\mathbf{v}_c). \quad (2.35)$$

A equação da cinemática angular (2.9) permanece inalterada dado que não há influência da velocidade de translação no modelo de rotação do veículo. Seja o vetor de velocidade da corrente marinha  $\boldsymbol{\nu}_c = [{}^B\mathbf{v}_c^\top, \mathbf{0}^\top]^\top$ , então o vetor de velocidade relativa fica

$$\boldsymbol{\nu}_r = \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_c = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{v} \\ {}^B\mathbf{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{v}_c \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{v} - {}^B\mathbf{v}_c \\ {}^B\mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

O modelo cinemático que inclui as correntes marinhas fica

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\nu}_r + \boldsymbol{\nu}_c), \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{R}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Conforme falado, as equações da dinâmica do corpo rígido permaneceram inalteradas, pois o referencial móvel que define as correntes marinhas também é referencial inercial. Aplicando as equações de Newton-Euler neste referencial é possível obter a dinâmica de corpo rígido do veículo em termos da velocidade relativa. A equação da dinâmica de corpo rígido pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}_{rb}\dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \mathbf{C}_{rb}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r = \boldsymbol{\tau}_r, \quad (2.38)$$

de forma que as matrizes  $\mathbf{M}_{rb}$  e  $\mathbf{C}_{rb}(\cdot)$  já foram definidas na equação (2.24). O vetor  $\boldsymbol{\tau}_r$  é o vetor dos efeitos ambientais reescritos no referencial inercial que se move junto à corrente marinha.

As forças restaurativas independentes de variáveis de velocidade de translação do veículo

e por isso permanecem iguais mesmo com a presença das correntes marinhas. Já os efeitos de massa adicionada, arrasto hidrodinâmico e força dos motores dependem justamente da velocidade relativa  $\nu_r$  entre o veículo e a água, o que significa que se o veículo translada junto com a massa de água que compõe a corrente marinha, o efeito destas forças é nulo. Assim, os termos de forças externas ficam

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ma} &= \mathbf{M}_a \dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \mathbf{C}_a(\boldsymbol{\nu}_r) \boldsymbol{\nu}_r, \\ \mathbf{f}_{arr} &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r) \boldsymbol{\nu}_r, \\ \mathbf{f}_{rest} &= \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}), \\ \mathbf{f}_u &= \mathbf{B}\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

com as matrizes  $\mathbf{M}_a$ ,  $\mathbf{C}_a(\cdot)$ ,  $\mathbf{D}(\cdot)$ ,  $\mathbf{g}(\cdot)$  e  $\mathbf{B}$  já definidas em seções anteriores.

### 2.2.6 Modelo Completo

O modelo matemático completo do veículo consiste nas equações da cinemática e da dinâmica de Newton-Euler do veículo submarino sob o efeito de correntes marinhas e dos esforços externos apresentados. O modelo do veículo com a dinâmica escrita no referencial móvel  $\mathcal{B}$  fixo ao veículo é composto pelas equações da cinemática (2.37), da dinâmica de corpo rígido (2.38) e dos esforços externos, já rearranjados

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\nu}_r + \boldsymbol{\nu}_c), \tag{2.40}$$

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2.41}$$

sendo que

- $\boldsymbol{\eta}$  é o vetor que armazena a posição e orientação do veículo,
- $\boldsymbol{\nu}_r$  é o vetor de velocidade do veículo relativamente à corrente marinha,
- $\mathbf{u}$  é o vetor de entradas de controle,
- $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas,
- $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{cr} + \mathbf{M}_a$  é a matriz total de inércia,
- $\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r) = \mathbf{C}_{rb}(\boldsymbol{\nu}_r) + \mathbf{C}_a(\boldsymbol{\nu}_r)$  é a matriz total de Coriolis e Centrípeta,
- $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)$  é a matriz de arrasto hidrodinâmico (2.29),

- $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  é o vetor de esforços restaurativos, dados na equação (2.31),
- $\mathbf{B}$  é a matriz de entradas.

A equação da dinâmica pode ser reescrita representada em termos das variáveis do referencial inercial  $\mathcal{I}$ . Considerando a seguinte transformação de variáveis para o modelo sem o efeito das correntes marinhas, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{T}\boldsymbol{\nu} & \Rightarrow & \quad \boldsymbol{\nu} = \mathbf{T}^\dagger\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \dot{\mathbf{T}}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\nu}} & \Rightarrow & \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{T}^\dagger(\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{T}}\boldsymbol{\nu}) \\ & & & = \mathbf{T}^\dagger(\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{T}}\mathbf{T}^\dagger\dot{\boldsymbol{\eta}}),\end{aligned}$$

de modo que a matriz  $\mathbf{T}^\dagger = (\mathbf{T}^\top \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^\top$  é a pseudo-inversa associada à matriz  $\mathbf{T}$ , a equação da dinâmica representada no referencial inercial fica

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}\boldsymbol{\nu}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{M}^*(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{g}^*(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{B}^*(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}, \quad (2.43)$$

em que as matrizes

- $\mathbf{M}^*(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^\dagger$ ,
- $\mathbf{C}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}[\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) - \mathbf{M}\mathbf{T}^\dagger\dot{\mathbf{T}}]\mathbf{T}^\dagger$ ,
- $\mathbf{D}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\mathbf{T}^\dagger$ ,
- $\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  é o vetor de esforços restaurativos (2.31),
- $\mathbf{B}^*(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{B}$  é a matriz de entradas.

Uma representação interessante do ponto de vista de análise e síntese de problemas de controle e filtragem é representar o modelo do veículo em espaço de estados. Para o modelo em que a dinâmica está escrita no referencial móvel  $\mathcal{B}$ , define-se os estados

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^x\mathbf{p}^\top & \mathbf{q}^\top & {}^B\mathbf{v}^\top & {}^B\mathbf{w}^\top \end{bmatrix}^\top, \quad (2.44)$$

$$= \begin{bmatrix} {}^x\boldsymbol{\eta}^\top & {}^B\boldsymbol{\nu}^\top \end{bmatrix}^\top. \quad (2.45)$$

Então, o modelo de estados fica

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\nu}_r + \boldsymbol{\nu}_c), \quad (2.46)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_r = -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})] + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.47)$$

e pode ser reescrito na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (2.48)$$

de maneira que as funções, ou campos vetoriais dependentes dos estados, são dados por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\boldsymbol{\nu}_r + \boldsymbol{\nu}_c) \\ \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r - \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})] \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

### 2.3 Modelos de Medição

Um modelo genérico de medição pode ser dado por uma função que depende do valor real  $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^3$  e de um valor aleatório  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ . O resultado  $\mathbf{x}_m$  da medição é feito no referencial do sensor  $\mathcal{A}$ , nem sempre alinhado com o referencial fixo ao veículo  $\mathcal{B}$  (HAUG, 2005). A partir desta descrição, o modelo de sensor fica

$${}^A\mathbf{x}_m = {}^A\mathbf{R}_{\mathcal{B}}(\mathbf{K}^{\mathcal{B}}\mathbf{x}_r + \mathbf{b} + \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad (2.51)$$

de modo que  ${}^A\mathbf{R}_{\mathcal{B}}$  é a matriz de desalinhamento,  $\mathbf{K}$  é matriz de ganhos do sensor  $\mathbf{b}$  é a polarização ou *bias* do sensor, e  $\Sigma$  é a matriz de covariância da variável aleatória  $\boldsymbol{\omega}$ . Sem perda de generalidade, é assumido que tanto a matriz de desalinhamento quanto a matriz de ganhos são matrizes identidade.

### 2.3.1 Modelo de Unidade Inercial

A seguir os modelos dos sensores que compõem uma unidade inercial considerada para o problema de estimativa de estados são apresentados.

#### 2.3.1.1 Modelo de Acelerômetro

Um acelerômetro fixo na posição  ${}^B\mathbf{r}_a$  num referencial móvel  $\mathcal{B}$  que se move com aceleração da origem  ${}^\tau\ddot{\mathbf{p}}$  e gira com velocidade angular  ${}^B\mathbf{w}$  num campo gravitacional  ${}^\tau\mathbf{g}$ , mede a seguinte aceleração

$$\mathbf{s}_{a_r} = {}^\tau\mathbf{R}_B^\top {}^\tau\ddot{\mathbf{p}} + {}^B\dot{\mathbf{w}} \times {}^B\mathbf{r}_a + {}^B\mathbf{w} \times ({}^B\mathbf{w} \times {}^B\mathbf{r}_a). \quad (2.52)$$

A aceleração de interesse é a da origem do referencial  $\mathcal{B}$  dada por  ${}^\tau\mathbf{R}_B^\top {}^\tau\ddot{\mathbf{p}}$  e por isso os termos referentes ao desalinhamento do acelerômetro são indesejáveis. Uma forma de reduzir esses efeitos é a de montar o sensor próximo à origem do referencial, de modo que  ${}^B\mathbf{r}_a \approx 0$ , e esta consideração será adotada daqui em diante.

Para a simulação e para o projeto do sistema de filtragem é interessante representar a equação (2.52) do acelerômetro em função das variáveis do modelo do veículo dadas na tabela 2.4 (seção 2.1.1). Seja a derivada da cinemática de translação, dada na equação (2.7), tem-se que

$$\begin{aligned} {}^\tau\ddot{\mathbf{p}} &= {}^\tau\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{v}} + {}^\tau\dot{\mathbf{R}}_B {}^B\mathbf{v} \\ &= {}^\tau\mathbf{R}_B {}^B\dot{\mathbf{v}} + {}^\tau\mathbf{R}_B \mathbf{S}({}^B\mathbf{w}) {}^B\mathbf{v} \end{aligned}$$

Lembrando que  ${}^\tau\mathbf{R}_B^\top = {}^\tau\mathbf{R}_B^{-1}$  a equação da medição do acelerômetro em função das variáveis do modelo do veículo é dada por

$$\mathbf{s}_{a_r} = {}^B\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}({}^B\mathbf{w}) {}^B\mathbf{v}. \quad (2.53)$$

### 2.3.1.2 Modelo de Giroscópio

O giroscópio mede diretamente a velocidade angular do submarino em termos do referencial local  $\mathcal{B}$ , ou seja,

$${}^{\mathcal{B}}\mathbf{s}_{w_r} = {}^{\mathcal{B}}\mathbf{w}. \quad (2.54)$$

### 2.3.1.3 Modelo de Magnetômetro

O magnetômetro mede o campo magnético local, e que é composto pelo campo magnético terrestre e por perturbações. As perturbações são usualmente classificadas como de campos macios ou duros e que podem ter seu efeito reduzido ou previsto na etapa de calibração do sensor (MAHONY et al., 2012). Logo, para um sensor calibrado, a medida é dada pelo campo magnético da Terra, dada no referencial local, isto é,

$${}^{\mathcal{B}}\mathbf{s}_{h_r} = {}^{\mathcal{I}}\mathbf{R}_{\mathcal{B}}^{\top}\mathbf{h}, \quad (2.55)$$

de forma que o vetor  $\mathbf{h}$  é o campo magnético da Terra dado no referencial inercial  $\mathcal{I}$ .

### 2.3.2 Modelo de Sensor de Pressão

O sensor de pressão mede a pressão dada pela coluna de água e de ar sobre o veículo submerso. O efeito da coluna de ar pode ser eliminado na etapa de calibração ao se subtrair o valor da pressão atmosférica ao nível do mar. O valor medido pelo barômetro é dado por

$${}^{\mathcal{B}}\mathbf{s}_{b_r} = \rho \|{}^{\mathcal{I}}\mathbf{g}\| z_i, \quad (2.56)$$

de forma que os parâmetros  $\rho$  é a densidade da coluna de água,  $\|\tau g\|$  é a norma da aceleração da gravidade e  $z_i$  é a profundidade do veículo a partir da superfície. Observe que os efeitos da pressão hidrodinâmica no modelo do sensor foram desconsiderados.

### 2.3.3 Modelo de Sonar

Soluções prontas de sonares comerciais são capazes de medir a posição absoluta do veículo submarino dada no referencial inercial  $\mathcal{I}$ . O valor medido pelo sonar é dado por

$$\tau s_{sr} = \tau p. \quad (2.57)$$

Note-se que, o modelo de sonar considerado baseia-se na localização por triangulação, devendo haver balizas ou referências como são os satélites para o sistema de *GPS*, o que pode dificultar a utilização em missões completamente autônomas.

## 3 FILTRAGEM

Neste capítulo, as técnicas de filtragem utilizadas neste trabalho serão apresentadas.

Filtros complementares, normalmente empregados em aplicações de fusão sensorial (BROWN, 1972), são aqui utilizados para a estimação das correntes marinhas. Já para a estimação de estados, algoritmos baseados no filtro de Kalman (KALMAN, 1960) foram implementados, dado que os sensores empregados possuem características de ruídos predominantemente gaussianos. Outros filtros seriam mais indicados caso outras hipóteses de ruído fossem assumidas, como os filtros  $H_\infty$  (WANG et al., 2006) e os filtros não lineares bayesianos, como o filtro de partículas (ARULAMPALAM et al., 2002). Caso o leitor se interesse por mais informações, um tutorial sobre diversos filtros bayesianos aplicados ao problema de rastreamento pode ser encontrado em (HAUG, 2005).

Este capítulo está dividido da seguinte forma: a seção 3.1 apresenta o problema da filtragem de estados e os modelos utilizados para a aplicação no veículo submarino, a seção 3.2 apresenta os filtros complementares e sua aplicação para o problema de estimativa de correntes marinhas.

### 3.1 Filtragem de estados

O filtro de estados utilizado neste trabalho é conhecido como o filtro de Kalman estendido (EKF), que nada mais é do que uma adaptação para sistemas não-lineares do conhecido filtro de Kalman linear (KALMAN, 1960).

O filtro de Kalman é um estimador ótimo quando aplicado a sistemas lineares sujeitos à ruídos gaussianos aditivos. Infelizmente, como já visto no capítulo 2 que trata da modelagem do veículo submarino, o modelo do veículo é altamente não linear, o que limita muito a aplicação do filtro linear.

O método do EKF utiliza a expansão em séries de Taylor para linearizar o modelo em um ponto de operação e aplica o algoritmo de Kalman neste modelo linearizado para calcular os parâmetros do filtro.

### 3.1.1 Equacionamento dos Filtros

O modelo do problema de filtragem de estados em que se aplica o filtro de Kalman pode ser dado por

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}, u_k, w_{k-1}), & w_{k-1} &\sim \mathcal{N}(0, Q), \\ y_k &= h(x_k, u_k, \epsilon_k), & \epsilon_k &\sim \mathcal{N}(0, R), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde os subscritos significam o instante de tempo em que a variável foi avaliada e as variáveis são

- $x_k \in \mathbb{R}^n$  são os estados,
- $u_k \in \mathbb{R}^m$  são entradas conhecidas,
- $w_{k-1}$  e  $\epsilon_k$  são ruídos aditivos associados ao processo e à medição, respectivamente.
- $y_k \in \mathbb{R}^p$  a medição,
- $f(\cdot)$  define a dinâmica do sistema,
- $h(\cdot)$  é a função das medições.

Neste trabalho será considerado que as entradas externas são compostas somente pelo sinal de controle, o que normalmente ocorre para o caso em que o sistema dado pela equação 3.1 representa um modelo dinâmico de um veículo.

O problema de filtragem consiste em como encontrar a melhor estimativa para os estados  $x_k$  dado que se conhece somente as observações ou medições do sistema  $y_k, y_{k-1}, \dots, y_0$ . Neste trabalho, a estimativa do estado é escrita na forma  $\hat{x}_{i|j}$ , que significa a melhor estimativa do instante  $i$ , considerando informações das observações até o instante  $j$ .

### 3.1.2 Filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman estendido foi desenvolvido para adaptar o filtro de Kalman linear para sistemas não-lineares, ou para sistemas mais próximos da realidade. Esta adaptação é bem direta, pois utiliza o modelo não linear da equação 3.1 na etapa de previsão do próximo estado  $x_k$  e das medidas realizadas  $y_k$ , além disso considera o modelo linearizado do sistema avaliado ao redor da melhor estimativa para etapa de correção, quando emprega as

funções jacobianas associadas ao modelo do sistema, para propagar a covariância do erro de estimação e calcular o ganho do filtro.

Justamente por utilizar aproximações do modelo não-linear, o filtro de Kalman estendido não é um filtro ótimo, diferentemente do seu análogo linear. Esta informação é importante, dado que dependendo da operação do sistema, o filtro pode divergir, resultando em estimações polarizadas dos estados, como foi apresentado em (MOORMAN; BULLOCK, 1991). Como esperado, o desempenho do EKF é bom quando o sistema é aproximadamente linear entre dois instantes de tempo (WAN; MERWE, 2000).

Da mesma forma que o filtro de Kalman linear, o algoritmo de estimação que constitui o EKF pode ser dado pelas etapas de previsão e de atualização ou correção. Para o cálculo das covariâncias do erro e do ganho do filtro, o modelo linearizado ao redor da melhor estimativa disponível  $\hat{x}_{k|k-1}$  é considerado, isto é,

$$\dot{\tilde{x}}_k = F_{k-1}\tilde{x}_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{y}_k = H_k\tilde{x}_k + L_k\epsilon_k, \quad (3.3)$$

tal que  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_{k|k}$  e  $\tilde{y}_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$  são os erros entre o estado de referência e a medida de referência. Os outros termos são as matrizes jacobianas, dadas por

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_k=\hat{x}_{k|k}}, & G_k &= \frac{\partial f}{\partial w_k} \Big|_{x_k=\hat{x}_{k|k}}, \\ H_k &= \frac{\partial h}{\partial x_k} \Big|_{x_k=\hat{x}_{k|k-1}}, & L_k &= \frac{\partial h}{\partial \delta_k} \Big|_{x_k=\hat{x}_{k|k-1}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Na etapa de predição, o filtro utiliza a equação não-linear do modelo para propagar a estimativa do estado futuro. Para estimar a covariância do erro as matrizes jacobianas associadas ao sistema são utilizadas, ou seja,

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_k), \quad (3.5a)$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + G_{k-1|k-1} Q G_{k-1|k-1}^T. \quad (3.5b)$$

A partir dos estados futuros estimados é possível calcular a leitura esperada  $\hat{y}_{k|k-1}$ . Assim, juntamente com a medida atual  $y_k$ , calcula-se a inovação  $\vartheta_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$ , que representa a informação nova que na etapa de previsão não estava disponível.

Na etapa de correção esta informação nova dada pela inovação é utilizada para corrigir a

estimativa prevista dos estados, sendo que as equações desta etapa são

$$\hat{y}_{k|k-1} = h(\hat{x}_{k|k-1}, u_k), \quad (3.6a)$$

$$\vartheta_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1}, \quad (3.6b)$$

$$S_{k|k-1} = H_k P_{k|k-1} H_k^T + L_k R L_k^T, \quad (3.6c)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_{k|k-1}^{-1}, \quad (3.6d)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \vartheta_k, \quad (3.6e)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}. \quad (3.6f)$$

Quando o filtro de Kalman é utilizado em sistemas invariantes no tempo, que satisfaçam as hipóteses de controlabilidade e observabilidade, o ganho do filtro de Kalman  $K_k$  converge para um valor fixo e se diz que o filtro atingiu regime estacionário. Para estes sistemas é possível implementar a versão estacionária do filtro, onde somente o ganho estacionário é utilizado e, portanto, os custosos cálculos matriciais para calcular o ganho do filtro são eliminados. É verdade que isso faz com que a convergência do filtro seja mais lenta, porém sua simplicidade faz com que ele seja utilizado em sistemas que possuam capacidade computacional limitada. Para sistemas não-lineares em que se usa o EKF, esta propriedade geralmente não é observada. Isso acontece porque as matrizes jacobianas associadas ao sistema dependem da estimativa atual do estado e, portanto, representam um sistema variante no tempo, o que faz com que a estimativa da matriz de covariância do erro seja também variante no tempo, não permitindo, assim, que o ganho de Kalman  $K_k$  converja para um valor fixo. Sem essa convergência, uma versão simplificada do filtro geralmente não pode ser implementada para sistemas não-lineares.

### 3.1.3 Equacionamento dos Modelos

Nesta seção o desenvolvimento do filtro de Kalman estendido aplicado ao veículo submarino será apresentado. Vale lembrar que embora os filtros apresentados na seção 3.1.2 são desenvolvidos para sistemas discretos no tempo, o modelo do veículo ainda se encontra em tempo contínuo. Por esta razão, na seção a seguir, o modelo discreto do veículo será desenvolvido, para posteriormente o filtro ser aplicado.

### 3.1.3.1 Discretização

Considere o sistema não linear contínuo no tempo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), w(t)), \\ y(t) &= h(x(t), u(t), \epsilon(t)),\end{aligned}\tag{3.7}$$

tal que  $x(t)$  são os estados do sistema,  $u(t)$  são sinais conhecidos,  $w(t)$  e  $\epsilon(t)$  são distúrbios desconhecidos e o vetor  $y(t)$  são as medidas dos sensores. As funções  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  são campos vetoriais suaves, dependentes dos estados e dos sinais conhecidos, quando for o caso.

Como o objetivo é aplicar a técnica de filtragem para a estimativa dos estados para o sistema dado na equação (3.7), é desejável discretizar o sistema e obter um sistema dinâmico não linear discreto equivalente. Considerando o período de amostragem como  $T_s$ , e que os sinais de controle e externos são constantes durante o intervalo de tempo  $[(k-1)T_s, kT_s]$ , então o valor de  $x(kT_s)$  pode ser calculado a partir de  $x((k-1)T_s)$ , pela linearização exata seguinte

$$x(kT_s) = x((k-1)T_s) + \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} f(x(t), u((k-1)T_s), w((k-1)T_s)) dt. \tag{3.8}$$

E a equação de saída do sistema também dado na equação 3.7, que representa as medidas no instante  $kT_s$ , fica

$$y(kT_s) = h(x(kT_s), u(kT_s), \epsilon(kT_s)). \tag{3.9}$$

Observe ainda que, se for assumido que a derivada dos estados varia pouco, ou seja, se for considerado que  $f(\cdot)$  é aproximadamente constante, é possível considerar a aproximação de Euler ou de primeira ordem da equação (3.8)

$$x(kT_s) \approx x((k-1)T_s) + T_s [f(x((k-1)T_s), u((k-1)T_s), w((k-1)T_s))]. \tag{3.10}$$

Note que a equação (3.10) pode ser reescrita na representação de sistemas discretos, agora

$$x_k \approx x_{k-1} + T_s f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}). \tag{3.11}$$

Finalmente, é possível reescrever o sistema não linear contínuo (3.7) na forma discreta a partir da discretização de Euler

$$\begin{aligned} x_k &= f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}), \\ y_k &= h_k(x_k, u_k, \epsilon_k). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Percebe-se que,  $f_{k-1}(\cdot) = x_{k-1} + T_s f_{k-1}(\cdot)$  e também que o modelo dado na equação (3.12) é o mesmo utilizado para representar o problema de filtragem apresentado na equação (3.1). As matrizes jacobianas associadas à este modelo discretizado não-linear podem ser dadas por

$$\begin{aligned} F_k &= I + T_s \frac{\partial g(x, u, w)}{\partial x} \Big|_{x_{k|k}, u_k}, & G_k &= T_s \frac{\partial g(x, u, w)}{\partial w} \Big|_{x_{k|k}, u_k}, \\ H_k &= \frac{\partial h(x, u, \epsilon)}{\partial x} \Big|_{x_{k|k-1}, u_k}, & L_k &= \frac{\partial h(x, u, \epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{x_{k|k-1}, u_k}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.1.3.2 Modelo de filtragem

Para o problema de filtragem, é considerado o seguinte modelo completo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= {}^T \mathbf{R}_B (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_c) + \delta_p, & \delta_p &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_p), \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \mathbf{R}_2 \mathbf{w}, \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_r &= -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r) \boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r) \boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})] + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} + \delta_\nu, & \delta_\nu &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\nu), \end{aligned} \quad (3.14)$$

tal que os estados são  $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^\top, \mathbf{q}^\top, \mathbf{v}_r^\top, \mathbf{w}^\top]$  e o vetor de medidas fornecidas pelos sensores apresentados anteriormente na seção 2.3 é dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}, \mathbf{u}). \quad (3.15)$$

que pode ser particionada como medidas do acelerômetro, giroscópio, magnatômetro e profundímetro respectivamente dadas a seguir

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_1 &= \dot{\mathbf{v}}_r + \mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{v}_r + \epsilon_1, \\ \mathbf{h}_2 &= \mathbf{w} + \epsilon_2, \\ \mathbf{h}_3 &= {}^T\mathbf{R}_{\mathcal{B}}^{\top}\mathbf{h} + \epsilon_3, \\ \mathbf{h}_4 &= \rho\|\mathbf{g}\|z_i + \epsilon_4,\end{aligned}$$

com  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_i)$  e  $i = 1, 2, 3, 4$ .

O procedimento para construir o filtro EKF é de discretizar tanto o modelo dado na equação(3.14) quanto as medidas dadas na equação(3.15) e calcular as Jacobianas associadas.

As Jacobianas associadas aos ruídos são

$$G_k^p = \mathbf{I}_3, \quad G_k^q = \mathbf{0}_4, \quad G_k^v = \mathbf{I}_6 \quad (3.16)$$

$$L_k^1 = \mathbf{I}_3, \quad L_k^2 = \mathbf{I}_3, \quad L_k^3 = \mathbf{I}_3, \quad L_k^4 = 1. \quad (3.17)$$

Por serem extremamente extensas, a apresentação das demais Jacobianas será omitida. No apêndice A o código implementado em MATLAB para o cálculo simbólico destas matrizes é apresentado.

### 3.2 Estimador de Correntes Marinhas

A performance de veículos autônomos está diretamente ligada à habilidade de possuir meios de compensar ou minimizar os efeitos de distúrbio causado pelas forças ambientais (HAWARY, 2000). Em especial, o seguimento de caminho dos veículos subaquáticos é afetado por correntes marinhas e em menor grau, pelas ondas, podendo provocar grandes desvios em relação ao caminho desejado ou mesmo a perda da estabilidade do controle.

Neste capítulo, uma solução para o problema da estimativa de correntes marinhas e os resultados alcançados será apresentada. O modelo de filtro escolhido para estimar as correntes marinhas é inspirado na teoria de filtros complementares (BROWN, 1972), muito utilizados em soluções de filtragem com requisitos de fusão sensorial, como em sistemas que possuem

navegação inercial (INS), onde dados de acelerômetros, giroscópios e bússola são utilizados para estimar a orientação do veículo (MAHONY et al., 2012).

Para facilitar o emprego dos filtros complementares, a seção 3.2.1 apresenta como funcionam os filtros complementares, a seção 3.2.2 detalha o equacionamento do filtro desenvolvido para estimar as correntes.

### 3.2.1 Filtros Complementares

Os sensores possuem restrições no processo de medição, muitas vezes sendo limitados a medir somente sobre uma parcela da largura de banda do sinal (ARULAMPALAM et al., 2002). Adjacente a essa limitação, existe o problema de juntar de forma consistente a informação de dois sensores que operam em larguras de banda diferentes do processo medido. Os filtros complementares são uma solução elegante para estes problemas, com objetivo de unir diferentes medições ruidosas do mesmo sinal e que possuam característica frequencial complementar (BROWN, 1972).

Para entender melhor a motivação dos filtros complementares, é feito o uso de um exemplo simples em que se deseja calcular a posição de uma partícula unidimensional variante no tempo  $p(t)$  de um objeto, a partir de medidas ruidosas de sua posição  $p_m$  e velocidade  $v_m$ . É razoável assumir que cada um dos sensores possui limitações de frequência de banda e tem modelo de medição dado por

$$p_m = p + \omega_p, \quad (3.18)$$

$$v_m = \dot{p} + \beta + \omega_v, \quad (3.19)$$

onde  $\omega_p$  e  $\omega_v$  são ruídos de alta e baixa frequência com média nula, respectivamente,  $\beta$  é uma polarização desconhecida, quase constante ou que varia muito lentamente com o tempo.

Nos modelos da equação (3.18) é assumido que a medida de posição tem informação do sinal em baixas frequências e complementarmente<sup>1</sup> é razoável assumir que a medida da derivada da posição tem informação do sinal para as altas frequências.

Um filtro que utiliza as duas medidas dadas na equação (3.18), para estimar a posição da

---

<sup>1</sup>Lembrando que a transformada de Laplace da função derivada pode ser vista como um filtro passa altas

partícula, com estimativa  $\hat{p}(t)$  pode ser escrito como

$$\hat{P}(s) = G_p(s)P_m(s) + G_v(s)V_m(s). \quad (3.20)$$

Observe que a equação (3.20) está no domínio da frequência e que  $P_m(s)$  e  $V_m(s)$  são as transformadas de Laplace das medidas. Ainda, impõe-se que os filtros  $G_p(s)$  e  $G_v(s)$  devem ser complementares, isto é,  $G_p(s) + G_v(s) = 1$ , garantindo que todo o espectro de frequência do sinal seja mensurável, produzindo estimativas não distorcidas do sinal medido. A estrutura deste filtro pode ser escrita em forma de diagrama de blocos, como é apresentado na figura 3.1.

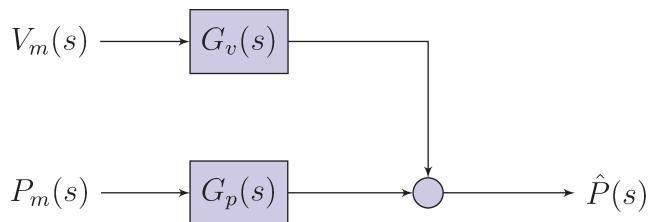


Figura 3.1 - Estrutura genérica de um filtro complementar clássico.

Considere que o sensor de posição possua o espectro de medição de baixa frequência e o sensor de velocidade possua o espectro de medição para altas frequências. Essas considerações parecem razoáveis, como aponta Pascoal et al. (1998), pois o sensor de posição tem facilidade em medir posição quando esta não varia tanto, e o sensor de velocidade mede justamente a derivada da posição, sendo naturalmente uma medida de alta frequência do sinal, como já falado anteriormente.

Como as medidas possuem características complementares, isto é, uma é fiel em baixas frequências e a outra, em altas frequências, é possível escolher  $G_p(s)$  como um filtro passa baixas e  $G_v(s)$  como um filtro passa altas da seguinte forma

$$G_p(s) = \frac{\alpha(s)}{s + \alpha(s)}, \quad G_v(s) = \frac{s}{s + \alpha(s)}, \quad (3.21)$$

onde a função de relaxação  $\alpha(s)$  pode ser calculada por técnicas de controle por frequência. Ao se considerar a equação básica do filtro dada pela equação (3.20), e a parametrização das funções do filtro na equação (3.21), pode-se escrever o filtro complementar na forma de diagrama de blocos como mostrado na figura 3.2.

Seja  $\alpha(s) = n(s)/d(s)$  uma função racional, ao substituí-la na equação do filtro (3.21) e

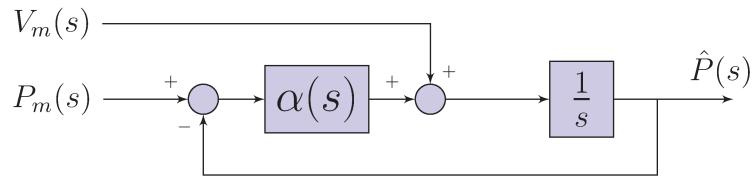


Figura 3.2 - Diagrama de blocos do filtro complementar parametrizado com a função  $\alpha(s)$ .

com mais alguns rearranjos chega-se à

$$sd(s)\hat{P}(s) = d(s)V_m(s) + n(s)(P_m(s) - \hat{P}(s)). \quad (3.22)$$

A partir desta estrutura básica é possível obter diretamente filtros complementares com características distintas, sem muito esforço. Por exemplo, se  $n(s) = k_1$  e  $d(s) = 1$  o filtro terá uma característica proporcional de correção, pois ao substituir estes valores na equação (3.22) e com a transformada inversa de Laplace chega-se à seguinte equação do filtro sem estimativa da polarização

$$\dot{\hat{p}} = v_m + k_1(p_m - \hat{p}). \quad (3.23)$$

Um problema muito comum em sensores é a polarização da medida. Com uma escolha adequada da função  $\alpha(s)$  é possível eliminar este efeito na estimativa. Se a polarização na medida de velocidade for considerada não nula, ou seja,  $\beta \neq 0$ , então ao se adotar  $\alpha(s) = k_1 + k_2/s$  e substituir em (3.22), tem-se

$$s\hat{P}(s) = V_m(s) + k_1(P_m(s) - \hat{P}(s)) + \frac{k_2}{s}(P_m(s) - \hat{P}(s)), \quad (3.24)$$

que pode ser visto como um filtro complementar com características proporcional-integral (PI) em relação ao erro de estimativa, o que faz com que a influência da polarização seja anulada na estimativa. Esta interpretação é análoga ou dual ao problema de controle de rastreamento de trajetória, em que o ganho integral do controlador PI é utilizado para que o erro estacionário seja nulo. No contexto de filtragem, o valor real da variável medida é a trajetória a ser seguida, a estimativa é a trajetória real seguida e o erro estacionário é a polarização do sensor.

Substituindo o modelo dos sensores sem ruído na equação (3.24) e aplicando a transformada de Laplace inversa, obtém-se

$$\underbrace{\dot{\hat{p}}}_{I} = \underbrace{\dot{p} + k_1(p - \hat{p}) + \beta + k_2 \int_{t_0}^t (p - \hat{p}) dt}_{II} + \underbrace{(k_1 \omega_p + k_2 \int_{t_0}^t \omega_p dt + \omega_v)}_{III}, \quad (3.25)$$

na qual I é a equação do filtro complementar básico dado pela equação (3.23), II contém a polarização e sua compensação e III é referente aos termos desconhecidos de distúrbios é somente composto por ruídos, que tende a zero quando a integração ocorre, ou seja, quando a estimativa é realizada. O filtro converge quando o erro de estimativa  $\tilde{p} = p - \hat{p}$  vai à zero, ou seja  $\tilde{p} \rightarrow 0$  o que implica que  $k_2 \int_{t_0}^t (p - \hat{p}) dt \rightarrow \beta$ . Assim, a partir das considerações anteriores, o filtro pode ser reescrito nas duas equações

$$\dot{\hat{p}} = v_m + k_1(p_m - \hat{p}) + \hat{\beta}, \quad (3.26)$$

$$\dot{\hat{\beta}} = -k_2(p_m - \hat{p}). \quad (3.27)$$

É importante notar na equação (3.26) que o objetivo principal é estimar a posição da partícula, compensando a polarização da medida. Esta polarização é um parâmetro desconhecido quase constante presente no processo de medição e que também é estimada pelo filtro. Assim, a partir desta estrutura particular de filtro complementar, foi inspirado o filtro para a estimativa de correntes.

Para o caso multidimensional, ou seja, para o caso em que as medidas e a estimativa são grandezas vetoriais é necessário fazer uma simples extensão do caso unidimensional desenvolvido anteriormente.

Sejam  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $v = \dot{p} \in \mathbb{R}^3$  a posição e a velocidade de um corpo rígido movendo-se no espaço e sejam as respectivas medidas associadas

$$p_m = p + \omega_p, \quad (3.28)$$

$$v_m = \dot{p} + \beta + \omega_v, \quad (3.29)$$

tal que  $\omega_p, \omega_v \in \mathbb{R}^3$  são ruídos de alta e baixa frequência com média nula, respectivamente e  $\beta \in \mathbb{R}^3$  uma polarização na medida de velocidade. Um filtro complementar que estima a posição do veículo com compensação da polarização é dado pelo seguinte espaço de estados

$$\dot{\hat{p}} = v_m + k_1(p_m - \hat{p}) - \hat{\beta}, \quad (3.30)$$

$$\dot{\hat{\beta}} = -k_2(p_m - \hat{p}), \quad (3.31)$$

sendo que as matrizes  $k_1$  e  $k_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  são escolhidas para o desempenho adequado do filtro. O diagrama de blocos associado ao filtro com estimativa da polarização da medida de velocidade

pode ser visto na figura 3.3.

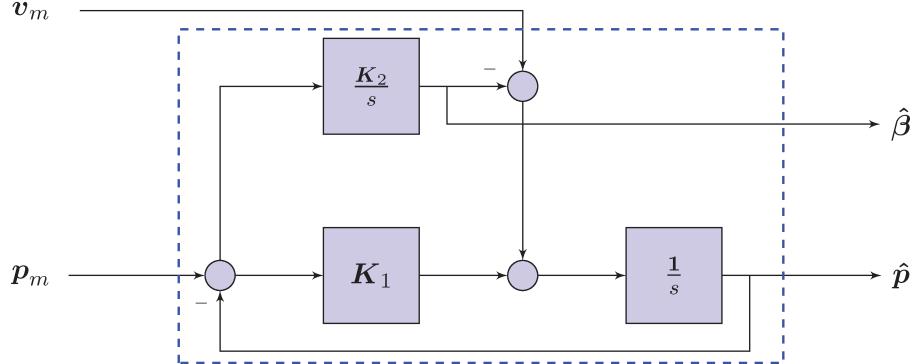


Figura 3.3 - Estrutura de um filtro complementar com estimação de polarização.

### 3.2.2 Modelo do Estimador de Correntes

A partir das disposições feitas nas seções anteriores sobre filtros complementares, principalmente sobre o filtro com estimação de polarização da medida de velocidade, é possível considerar o estimador de correntes para o veículo submarino. Suponha que o submarino execute sua missão sob o efeito das correntes marinhas, ou seja, a equação da cinemática de translação do veículo obedece a equação (2.35) reapresentada abaixo

$${}^T\dot{\mathbf{p}} = {}^T\mathbf{R}_B({}^B\mathbf{v}_r + {}^B\mathbf{v}_c),$$

na qual a relação entre a velocidade relativa  ${}^B\mathbf{v}_r$ , a velocidade da corrente marinha  ${}^B\mathbf{v}_c$  e a velocidade em relação ao referencial inercial é  ${}^B\mathbf{v}_r = {}^B\mathbf{v} - {}^B\mathbf{v}_c$ .

Suponha também que o veículo possua sensores que meçam ou permitam estimar a velocidade relativa entre o veículo, a corrente marinha e a posição absoluta do veículo em relação ao referencial inercial. Estes sensores podem ser representados pelos seguintes modelos de medição

$${}^T\mathbf{p}_m = {}^T\mathbf{p} + \boldsymbol{\omega}_p, \quad (3.32)$$

$${}^B\mathbf{v}_{rm} = {}^B\mathbf{v} - {}^B\mathbf{v}_c + {}^T\mathbf{R}_B^\top \boldsymbol{\omega}_v, \quad (3.33)$$

na qual a incerteza nas medições  $\omega_p$  e  $\omega_v$  são assumidas como ruídos de média nula. Ao se transformar a medida de velocidade relativa para o referencial inercial, assumindo então que a orientação do veículo é conhecida, a corrente marinha é um vetor constante, e pode-se escrever

$$\begin{aligned} {}^T \mathbf{V}_{rm} &= {}^T \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{v} - {}^T \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega}_v \\ &= {}^T \dot{\mathbf{p}} - {}^T \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\omega}_v. \end{aligned}$$

Observe que ao comparar os modelos de medidas de posição e velocidade relativa do submarino, dadas no referencial inercial com o modelo de sensores dados pela equação (3.28), é possível verificar que a corrente marinha é análoga a uma polarização na medida da velocidade, ou seja,  $\beta = -{}^T \mathbf{V}_c$ . Portanto, ao utilizar a estrutura do filtro complementar para a estimativa de polarização, é possível estimar a corrente marinha. O filtro complementar associado ao modelo de medidas do submarino dado pela equação (3.32) pode então ser reescrito como

$${}^T \dot{\hat{\mathbf{p}}} = {}^T \mathbf{V}_{rm} + \mathbf{k}_1 ({}^T \mathbf{p}_m - {}^T \hat{\mathbf{p}}) + {}^T \hat{\mathbf{V}}_c, \quad (3.34)$$

$${}^T \dot{\hat{\mathbf{V}}}_c = \mathbf{k}_2 ({}^T \mathbf{p}_m - {}^T \hat{\mathbf{p}}). \quad (3.35)$$

tal que  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  são matrizes escolhidas para garantir a estabilidade e o desempenho do filtro, pelo critério de Routh-Hurwitz.

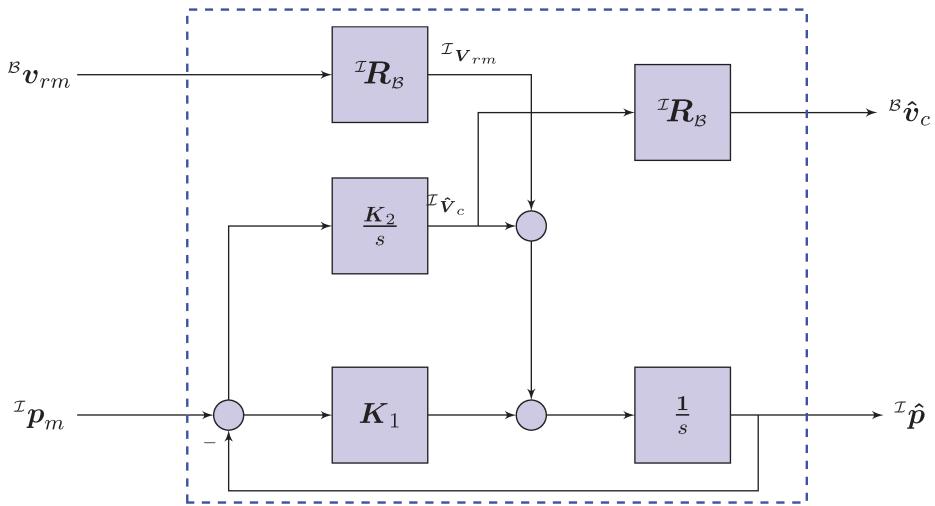


Figura 3.4 - Diagrama de blocos do estimador de correntes marinhas.

Na figura 3.4 está a implementação em diagrama de blocos do estimador de correntes marinhas descrito pela equação (3.34). Nota-se que, o filtro opera no referencial inercial e por isso as transformações entre referenciais são necessárias para adequar as estimativas e as medidas

ao referencial do filtro.

As entradas do filtro foram assumidas como ‘medidas’, mas podem tanto ser a saída de um sensor ou a saída de um filtro que estime a posição e a velocidade relativa do AUV. No caso de medidas absolutas da posição do veículo, sensores acústicos e balizas de referência à semelhança do sistema de posicionamento global por satélites (GPS) podem ser utilizados. Já para a estimativa da velocidade relativa do veículo, sensores largamente utilizados na indústria naval e aeroespacial <sup>2</sup>como os tubos de Pitot, podem ser empregados.

### 3.2.2.1 Estabilidade

A estabilidade do filtro está relacionada à convergência da estimativa para o valor real da variável estimada. O estudo da estabilidade fornece informações importantes sobre como escolher as matrizes de ganhos do filtro para que a convergência seja garantida.

Para a análise da estabilidade interna da estimativa, considere as equações das medidas (3.32) sem ruído e o modelo de filtro em (3.34), então a equação da dinâmica do erro de estimativa de posição  $\tilde{p} = {}^T p - {}^T \hat{p}$  ao ser derivada fica

$$\ddot{\tilde{p}} + k_1 \dot{\tilde{p}} + k_2 \tilde{p} = 0. \quad (3.36)$$

É possível ver que a equação resultante é de segunda ordem e definindo as matrizes do ganho do filtro como diagonais com termos positivos, a equação matricial é desacoplada em sistemas lineares estáveis.

Assim, ao escolher  $k_1$  e  $k_2$  como matrizes diagonais e com termos positivos, o filtro convergirá para o erro nulo de estimativa, o que garante que a estimativa de posição e das correntes marinhas convergirão para os valores verdadeiros. Como nas medidas reais existem distúrbios nas medições, as estimativas não convergirão para o valor verdadeiro, mas convergirão para uma região próxima aos valores verdadeiros.

---

<sup>2</sup>Veículos que operam na atmosfera.

## 4 CONTROLE

Neste capítulo a técnica de controle implementada para o problema de controle de trajetórias do veículo submarino será apresentada.

### 4.1 Linearização por realimentação

A ideia básica por trás da técnica de controle não linear, conhecida como Linearização por Realimentação<sup>1</sup> (LR), é a de transformar os modelos, geralmente complexos, de um sistema não linear em modelos equivalentes de forma mais simples ou mais fáceis de trabalhar. A partir deste modelo equivalente simplificado, é possível aplicar outras técnicas de controle, lineares ou não lineares, para que os requisitos de desempenho sejam cumpridos, como apresentam Slotine e Li (1991) e Sira-Ramírez (2005).

A técnica de LR empregada neste trabalho difere completamente do método de linearização convencional, na qual o sistema não linear é linearizado ao redor de um ponto de operação pelo truncamento da sua série de Taylor, o que se resume em aproximar a dinâmica não linear do sistema pela matriz Jacobiana da dinâmica avaliada, em um ponto de interesse no espaço de estados. Por ser uma aproximação, a linearização é válida para a vizinhança próxima ao ponto de interesse<sup>2</sup>, o que não acontece com a LR, pois o modelo linear equivalente é válido para um domínio ou região do espaço de estados.

Por consistir uma classe muito ampla de modelos com os mais variados comportamentos e propriedades (SLOTINE; LI, 1991), ferramentas gerais para análise de sistemas não lineares são difíceis de serem encontradas ou, ainda, estão em desenvolvimento. Como forma de contornar estas limitações, estratégias que procuram transformar os modelos não lineares em sistemas equivalentes e mais fáceis de serem estudados têm atraído grande interesse da comunidade acadêmica nas últimas décadas (ISIDORI, 1995), (LÉVINE; NGUYEN, 2003), (LÉVINE, 2010). Neste contexto, a técnica de LR procura transformar o modelo não linear em um linear ou parcialmente linear e, assim, permitir utilizar o vasto material de análise existente de sistemas lineares.

---

<sup>1</sup> Feedback Linearization-FL, do inglês

<sup>2</sup>O tamanho desta vizinhança depende das não linearidades presentes no modelo

Para se entender melhor a ideia geral da técnica de controle de linearização por realimentação, o controle de trajetórias de uma partícula, movendo-se no espaço unidimensional com comportamento dinâmico não linear é utilizado como exemplo.

Considere uma partícula com o movimento unidimensional  $x$  descrito pela equação diferencial de ordem  $n$ , com estados  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^\top$ , não linear válida em uma região  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  e com dinâmica dada a seguir

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \quad (4.1)$$

na qual  $u$  é a entrada de controle escalar e  $f(\mathbf{x})$  e  $g(\mathbf{x})$  são funções não lineares dependentes dos estados. Como o modelo está escrito na forma canônica controlável, ao se considerar que  $g(\mathbf{x})$  é não nulo em  $\Omega$ , a seguinte lei de controle lineariza o sistema (4.1)

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x})}(v - f(\mathbf{x})). \quad (4.2)$$

A malha fechada com a entrada de controle virtual a ser projetada  $v$  fica

$$x^{(n)} = v. \quad (4.3)$$

Nota-se que o modelo linear obtido (equação (4.3)) é equivalente ao modelo não linear e esta garantia é dada pelo mapeamento não linear  $u$  dada na equação (4.2). Assim, o controle de trajetória da partícula pode ser feito em termos do modelo linear. A seguinte lei de controle linear faz com que a partícula siga a trajetória desejada  $x_d$  com o erro de seguimento de trajetória dado por  $e = x_d - x$

$$v = x_{1d}^{(n)} - k_{n-1}e^{(n-1)} - \dots - k_1e, \quad (4.4)$$

os ganhos  $k_1, \dots, k_{n-1}$  são escolhidos de forma que o polinômio associado  $P(s) = s^n + k_{n-1}s^{n-1} + \dots + k_1s$  possua suas raízes estritamente no lado esquerdo do semiplano complexo. Isso acontece porque a equação de malha fechada que descreve o movimento da partícula, dada a trajetória desejada  $x_d$ , e as leis de controle não linear e linear dadas nas equações (4.2) e (4.4), respectivamente, é escrita como

$$e^{(n)} + k_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + k_1e = 0.$$

A malha fechada será estável se e somente se o erro de trajetória for a zero em um tempo

finito, o que felizmente ocorre pois os polos da equação do erro são as raízes do polinômio associado  $P(s)$ , que foram escolhidos com parte real negativa, o que faz com que o erro vá exponencialmente à zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Observe que qualquer técnica de controle linear pode ser aplicada para implementar a lei de controle virtual, pois com a linearização, o modelo resultante é linear e válido para toda a região  $\Omega$ .

Para o problema de múltiplas entradas e múltiplas saídas não é necessário alterar muito a estrutura do problema. O que muda é que os estados  $x$ , a entrada  $u$  e a função  $f(x)$  serão vetores  $x$ ,  $u$  e  $f(x)$  e  $g(x)$  será uma matriz  $g(x)$ .

Como era de se esperar, os problemas evolvendo sistemas lineares não são tão fáceis assim de serem resolvidos como o exemplo anterior, uma vez que normalmente o modelo não está representado na forma canônica controlável, e a lei de controle que lineariza o modelo pode ser válida somente para um subconjunto do domínio  $\Omega$ .

Analogamente aos sistemas lineares, em que o projeto de um controlador por alocação de polos é muito facilitado quando o sistema está representado em sua forma canônica controlável, a aplicação da LR é direta se o modelo não linear está representado na forma canônica controlável e quando mais algumas condições adicionais são obedecidas, como será visto mais adiante.

Nas seções 4.1.1 e 4.1.2 são apresentadas as duas formas descritas na literatura (ISIDORI, 1995), (SLOTINE; LI, 1991) para a aplicação em sistemas SISO. Já na seção 4.1.3 são feitas algumas considerações para o caso MIMO e por fim, é apresentada a lei de controle implementada no veículo submarino na seção 4.2.

### 4.1.1 Linearização Entrada-Saída

Dado o sistema SISO de ordem  $n$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4.5)$$

$$y = h(x), \quad (4.6)$$

em que o vetor de estados é  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são campos vetoriais suaves<sup>3</sup>. O objetivo é fazer com que a saída  $y(t)$  do sistema dado na equação 4.5 siga a trajetória desejada  $y_d(t)$ , enquanto os estados sejam mantidos limitados.

A dificuldade na análise desse tipo de sistemas é que a saída está indiretamente relacionada à entrada. O que se procura apresentar nesta seção é saber se é possível encontrar uma relação direta e válida entre entrada e saída, de forma que se possa definir uma lei de controle que linearize a relação entrada-saída.

A maneira mais intuitiva de se obter uma relação direta entre a entrada e a saída é a de derivar sucessivamente a saída  $y(t)$  até que a entrada apareça em uma das derivadas da saída, justamente porque o modelo é descrito por operadores *diferenciais*. Neste sentido, a notação com operadores de Lie ajuda muito na análise e síntese dos problemas de controle de linearização por realimentação.

Por exemplo, suponha que para uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , a derivada da saída do sistema dado na equação (4.5) fica

$$\dot{y} = \nabla h(x)^T \dot{x} \quad (4.7)$$

$$= \nabla h(x) f(x) + \nabla h(x) g(x) u \quad (4.8)$$

$$= L_f h(x) + L_g h(x) u, \quad (4.9)$$

na qual adotou-se a notação de derivadas de Lie<sup>4</sup>, ou seja  $L_f h(x)$  é a derivada direcional da função  $h(x)$  avaliada na trajetória do campo vetorial  $f(x)$  e  $L_g h(x)$  é definida analogamente. Se o termo que multiplica a entrada de controle é não nulo para algum ponto  $x_0$  dentro da região  $\Omega$ ,  $L_g h(x) \neq 0$ , a seguinte lei de controle, que pode ser escrita como,

$$u = \frac{1}{L_g h(x)} (v - L_f h(x)), \quad (4.10)$$

lineariza a relação entrada saída da malha fechada com a primeira derivada da saída na equação (4.7) dado por

$$\dot{y} = v, \quad (4.11)$$

tal que  $v$  é uma variável de controle chamada de virtual, a ser projetada a depender dos requisitos

---

<sup>3</sup>Ver o Apêndice B

<sup>4</sup>Ver Apêndice B

do problema de controle. A linearização feita pela lei de controle da equação (4.10) vale para a região vizinha  $\Omega$  do ponto  $x_0$ .

Por outro lado, se  $L_g h(x) = 0$ , é necessário continuar derivando até que a entrada de controle apareça. Suponha que, após  $r$  derivações, a derivada recursiva de Lie associada à entrada de controle é não nula, então a  $r$ -ésima derivada da saída resulta em

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u. \quad (4.12)$$

Então, como  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$  para um  $x_0 \in \Omega$ , a equação de saída fica  $y^{(r)} = v$  com lei de controle dada por

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{(r-1)} h(x)} (\nu - L_f^r h(x)), \quad (4.13)$$

é válida somente para um região  $\Omega$  próxima de  $x_0$ .

O *grau relativo r* associado à equação de saída é igual ao número de derivações que se deve fazer na saída  $y$  até que a entrada de controle  $u$  apareça, ou até que  $L_g L_f^{(r-1)} h(x) \neq 0$ .

O *grau relativo* é sempre menor ou igual a ordem do sistema, pois se a saída tem que ser diferenciada mais do que a ordem  $n$  do sistema para que a entrada de controle apareça, logo existe dinâmica do sistema além de  $n$ , o que significa que a ordem do sistema é maior do que  $n$ . A Definição 4.1 apresenta formalmente o conceito de grau relativo.

**Definição 4.1.** (SLOTINE; LI, 1991) *O sistema 4.5 possui grau relativo r se, dada uma região  $\Omega$*

$$L_g L_f^{(k-1)} h(x) = 0, \quad 0 \leq k < r - 1 \quad (4.14a)$$

$$L_g L_f^{(r-1)} h(x) \neq 0 \quad (4.14b)$$

*para todo  $x \in \Omega$ . Caso exista um ponto  $x_0$  da vizinhança que  $L_g L_f^{(r-1)} h(x_0) = 0$  mesmo que  $L_g L_f^{(r-1)} h(x) \neq 0$ , então o sistema não possui grau relativo indefinido em  $x_0$ .*

As condições anteriores levam em conta o caso em que a lei de linearização é do tipo estática, ou seja, a entrada de controle depende somente da referência externa  $v$  e dos estados  $u = u(x, v)$ . Para casos na qual se possua a dificuldade em encontrar uma saída com grau relativo definido, há a opção de se fazer a extensão dinâmica, caso mais geral quando se admite que o sinal de controle possa possuir também uma dinâmica própria além de depender de sinais externos e dos estados.

Quando o grau relativo  $r < n$ , a relação entrada-saída possui ordem  $r$ , o que significa que

parte da dinâmica ficou escondida ou interna em termos da equação de entrada-saída. Conhecer o comportamento desta *dinâmica interna* é fundamental para que a lei de controle dada pela equação (4.13) seja válida, dado que mesmo com uma lei de controle que estabilize a dinâmica linearizada, se a dinâmica interna é instável, o sistema pode apresentar comportamentos indesejáveis, como extrema vibração e destruição de componentes, como apresenta Slotine e Li (1991).

Dadas as condições apresentadas pela Definição 4.1, na qual se assume que a saída do sistema da equação (4.5) possua *grau relativo*  $r < n$ , é possível reescrever o sistema na *forma normal*. Esta é uma forma de reescrever o sistema em uma parte linear com  $r$  equações e uma parte não linear com  $n - r$  equações. Parte do vetor de estados do sistema transformado pode ser escrita como

$$\mathbf{s}^\top = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_r]^\top = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(r)}].$$

A partir destas variáveis de estado, é possível escrever o sistema da equação (4.5) na forma normal, ou seja,

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} s_2 \\ \vdots \\ s_r \\ \alpha(s, \varphi) + \beta(s, \varphi)u \end{bmatrix}, \quad (4.15a)$$

$$\dot{\varphi} = \gamma(s, \varphi), \quad (4.15b)$$

$$y = s_1, \quad (4.15c)$$

na qual o vetor de estados dado por  $\mathbf{z}^\top = [\mathbf{s}^\top \varphi^\top]$  é um campo vetorial, e  $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ .

Na forma normal o sistema fica particionado em uma dinâmica externa na equação (4.15a) e outra interna na equação (4.15b). A dinâmica externa, representada na forma canônica controlável pode ser linearizada através da lei de controle da equação (4.13) e a dinâmica interna depende somente do estado  $z$ .

Definir a forma normal do sistema da equação (4.5) consiste em encontrar uma função de transformação para os estados que seja válida, ou seja, é mostrar que o vetor de estados compõe um difeomorfismo para o sistema. O Lema 4.1 demonstrado por Slotine e Li (1991), é um resultado importante na construção do difeomorfismo que transforma o sistema em sua

forma normal.

**Lema 4.1.** (SLOTINE; LI, 1991) Se o grau relativo do sistema (4.5) for  $r$  em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , então os gradientes  $\nabla s_1, \nabla s_2, \dots, \nabla s_r$  são linearmente independentes.

Slotine ainda mostra que se o Lema 4.1 é satisfeito, também existem  $n - r$  funções, aqui denotadas por  $\varphi^T = [\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}]$  em que seus gradientes são linearmente independentes dos gradientes de  $s$ . O procedimento para encontrar estas funções é não-trivial pois envolve a resolução de equações diferenciais parciais. Então, a partir destes resultados, tem-se

$$\phi = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_r & \vdots & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_{n-r} \end{bmatrix}^\top,$$

tal que  $\phi$  é um difeomorfismo local em alguma região  $\Omega_0 \subset \Omega$  que transforma o sistema dado pela equação (4.5) em sua forma normal escrita na equação (4.15).

#### 4.1.1.1 Dinâmica Zero

Avaliar a estabilidade da *dinâmica interna* é crucial para garantir que o sistema controlado seja estável. Na equação (4.15b), a dinâmica externa é não linear e pode depender dos estados e da entrada de controle e, consequentemente, da trajetória de referência, o que dificulta muito a análise de estabilidade, pois além de se tratar de um sistema não linear ele torna-se não autônomo (para o caso de rastreamento de trajetórias.)

Para contornar esta limitação, Isidori (1995) considera a análise da dinâmica zero do sistema. A dinâmica zero consiste na dinâmica interna quando se impõe que a lei de controle  $u$  faça os estados da dinâmica externa serem nulos. A equação da dinâmica zero seria então um sistema não linear e autônomo dado por

$$\dot{s} = 0, \tag{4.16}$$

$$\dot{\varphi} = n(0, \varphi). \tag{4.17}$$

Por ser um sistema autônomo, a análise de estabilidade da dinâmica zero na equação (4.16) é mais fácil do que a análise da dinâmica interna. Assim, extensões podem ser feitas de forma a fazer com que a estabilidade da dinâmica zero seja uma garantia ao menos local para a estabilidade da dinâmica interna.

Se o grau relativo do sistema dado na equação (4.5) for  $r = n$  então a forma normal do sistema é linear com a lei de controle dada pela equação (4.13). Isso significa que o sistema é linearizável no sentido entrada-estado, técnica descrita na seção 4.1.2. Portanto, uma forma de realizar a linearização entrada-estado depois de verificar o Teorema 4.1, é de encontrar iterativamente uma saída  $y$  para o problema de linearização entrada-saída que possua grau relativo igual à ordem do sistema.

#### 4.1.2 Linearização Entrada-Estado

Considere o sistema SISO de ordem  $n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad (4.18)$$

na qual o vetor de estados é  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  são campos vetoriais suaves<sup>5</sup>.

A linearização entrada-estado é formalmente definida em 4.2 a seguir:

**Definição 4.2.** (SLOTINE; LI, 1991) O sistema na equação (4.18) é linearizável na forma de entrada-estado se existe uma região  $\Omega$  do espaço de estados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , um difeomorfismo  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  e a lei de controle:

$$u = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})v \quad (4.19)$$

que transformam para o novo vetor de estados  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$  com a nova entrada de controle virtual  $v$  e com a relação linear:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}v \quad (4.20)$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1 \times 1} & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que  $\mathbf{I}_a$  é matriz identidade de tamanho  $a$  e  $\mathbf{0}_{a \times b}$  é uma matriz de zeros de  $a$  linhas e  $b$  colunas.

---

<sup>5</sup>Ver o Apêndice B

A partir da Definição 4.2, a figura 4.1 descreve, em diagrama de blocos, como é a estrutura do sistema de controle por linearização entrada-estado. Existem dois loops de realimentação, sendo que o primeiro, mais interno é o que lineariza o sistema, e o loop mais externo faz a transformação de estados, para realimentação no seguidor de trajetória  $v$ .

Na figura 4.1, como o sistema foi transformado em um novo, as trajetórias desejadas  $x_{ref}$  devem ser transformadas em termos do sistema novo, o que é ruim do ponto de vista computacional, visto que estas transformações aumentam o esforço computacional para cálculo do sinal de controle.

Em problemas reais, os estados geralmente não estão disponíveis para leitura e os filtros de estados são utilizados. Então, ao se utilizar os estados estimados e não os reais, para realizar a lei de controle entrada-estado, qualquer garantia de performance ou de estabilidade assegurada pelo controle é perdida, o que é um limitante para a implementação de controladores de realimentação por linearização.

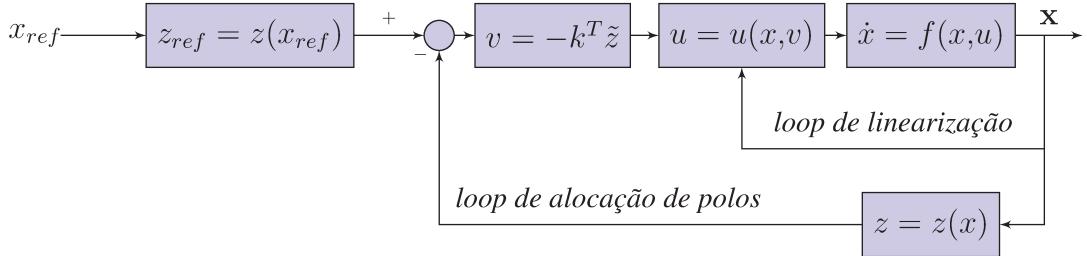


Figura 4.1 - Diagrama de Blocos da linearização entrada-estado.

O estudo do problema procura definir sob quais aspectos um sistema não linear como o dado na equação (4.18) é linearizável no sentido entrada-estado. Um resultado muito importante neste sentido é dado pelo Teorema 4.1, na qual se apresentam sob quais condições a transformação e a lei de controle de linearização existem.

**Teorema 4.1. (SLOTINE; LI, 1991)** *O sistema dado na equação (4.18) é linearizável no sentido entrada-estado se, e somente se, existe uma região  $\Omega$  tal que*

- (i): os campos vetoriais  $[\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_{f^{n-1}} \mathbf{g}]$  são linearmente independentes em  $\Omega$ ;
- (ii): o conjunto  $[\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_{f^{n-2}} \mathbf{g}]$  é involutivo<sup>6</sup> em  $\Omega$ ;

No teorema a notação  $ad_f \mathbf{g}$  representa o produto de Lie entre os campos vetoriais  $f(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ . A condição (i) é análoga à condição de controlabilidade de sistemas lineares. De fato, ao aplicar a condição do Teorema 4.1 para o sistema linear, chega-se à

<sup>6</sup>Ver Apêndice B

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{n \times 1} u \quad (4.21)$$

na qual os estados são  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e os campos vetoriais são  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ , a condição (i) do Teorema 4.1 fica a matriz de controlabilidade do sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

e a condição (ii) de involutividade é trivialmente atendida, pois o campo vetorial  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é constante. Então, segundo o Teorema 4.1, um sistema linear é linearizável no sentido entrada-estado em todo o  $\mathbb{R}^n$  se e somente se ele for controlável.

A condição de involutividade, sempre atendida para sistemas lineares, como demonstra Isidori (1995), consiste em resolver um sistema de equações diferenciais parciais, o que pode ser um desafio de implementação.

Portanto, o Teorema 4.1, apesar de ser útil para classificar quais sistemas são linearizáveis na forma entrada-estado, não fornece um método para encontrar uma transformação de estado e uma lei de controle associada que lineariza o sistema.

O procedimento para realizar a linearização entrada-estado do sistema da equação (4.18) é:

- Verifique se o sistema satisfaz as condições do Teorema 4.1;
- Se sim, encontre uma saída  $z_1 = h(x)$  que faça com que o problema de entrada-saída associado tenha *grau relativo* igual à  $n$ ;
- Calcule a transformação de estados  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = [z_1, L_f z_1, \dots, L_f^{n-1} z_1]$  e os coeficientes da lei de controle da seguinte forma

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1}, \quad \beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad (4.22)$$

### 4.1.3 Caso MIMO

Analogamente aos sistemas SISO, os sistemas MIMO<sup>7</sup> com o mesmo número de entradas e saídas, conhecidos como sistemas quadrados, podem ser linearizados via feedback lineariza-

---

<sup>7</sup>MIMO:múltiplas entradas e múltiplas saídas

tion, salvo algumas particularidades. Seja o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (4.23b)$$

sendo que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ , os campos vetoriais  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  são suaves e definidos em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e a matriz das entradas de controle  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^{n \times p}$ . Para facilitar o desenvolvimento, considere o seguinte particionamento

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) & \dots & g_p(\mathbf{x}), \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) & \dots & h_p(\mathbf{x}), \end{bmatrix}^\top\end{aligned}$$

na qual  $g_i(\mathbf{x})$  são campos vetoriais suaves e  $h_i(\mathbf{x})$  são funções escalares suaves.

**Definição 4.3.** (ISIDORI, 1995) O sistema da equação (4.23a) possui vetor de grau relativo  $r = [r_1, \dots, r_p]$  em um ponto  $x_0$  se para todo  $1 \leq j \leq p$ , para todo  $k \leq r_i - 1$ , para todo  $1 \leq i \leq p$ ,

$$L_{g_i} L_f^k h_i(x) = 0$$

e para  $x$  em uma vizinhança de  $x_0$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_p} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_p} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} h_p(x) & \dots & L_{g_p} L_f^{r_p-1} h_p(x) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

a matriz é não-singular em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ .

Para se obter a matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  é mais fácil derivar cada saída  $y_i = h_i(\mathbf{x})$  até que pelo menos uma das entradas do vetor  $\mathbf{u}$  apareça e então a  $i$ -ésima linha da matriz nada mais é que os termos que multiplicam as entradas  $u_1, \dots, u_p$ . A relação entrada saída fica

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_p} h_p(x) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Analogamente aos sistemas SISO, se a matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  for não singular, então a seguinte lei de controle

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x})) \quad (4.26)$$

lineariza o sistema da equação (4.23a) no sentido entrada-saída, na qual  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  é uma entrada virtual a ser projetada.

## 4.2 Problema de Controle

### 4.2.1 Definição do Problema de Controle

Para o problema de controle de trajetórias, que é um dos objetivos deste trabalho, um estudo prévio das necessidades do sistema de controle pode ajudar a identificar melhor os requisitos de desempenho. Na tabela 4.1, as características desejáveis para o sistema de controle de um veículo submarino, encontradas em estudos de problemas de controle de AUVs, e o requisito de desempenho associado são apresentadas.

Tabela 4.1 - Nomenclatura utilizada para veículos aquáticos

Requisito	Característica Desejável	Requisito de Desempenho
1	Executar tarefas com precisão em um ponto	Regulagem de posição
2	Seguir um trajeto determinado pelo sistema de planejamento	Rastreamento de trajetórias variantes
3	Ser insensível às variações externas(ondas, correntes, etc ...)	Rejeição de ruído
4	Ser insensível às variações internas(parâmetros, sensores)	Robustez às incertezas paramétricas

Na tabela 4.1, o requisito 1 trata de tarefas de regulagem de posição e orientação do veículo, tais como inspeção de soldas em navios e desativação de minas terrestres. O requisito 2 refere-se ao seguimento de trajetórias, como o mapeamento do leito marinho ou a inspeção de risers<sup>8</sup>. Os requisitos 1 e 2 podem se sobrepor, pois o controle de seguimento é o controle

<sup>8</sup>Riser é a tubulação submersa que liga o poço de petróleo no leito marinho à uma embarcação de superfície.

para uma trajetória desejada nula. Os requisitos 3 e 4, por sua vez, tratam da robustez do sistema de controle ou a capacidade de rejeitar distúrbios internos e externos como variações do parâmetros, ruídos de medição dos sensores, ondas e correntes marinhas, por exemplo.

A partir do que foi discutido anteriormente, o que se deseja realizar é o controle de seguimento de trajetórias com critério de robustez para melhoria de desempenho. O que falta para começar a atacar o problema é traduzir os requisitos em termos das variáveis do sistema

**Definição 4.4.** *Dada uma trajetória desejada no tempo  $\mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{q}_d(t) \in \mathbb{H}$ , é requerido que o veículo submarino rastreie a trajetória, isto é*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}} &\rightarrow 0 & \text{quando} & \quad t \rightarrow 0 \\ \tilde{\mathbf{q}} &\rightarrow 0\end{aligned}\tag{4.27}$$

sendo que os erros de rastreamento de trajetória são  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d$  para a posição e  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q}_d$  para a rotação.

A seguir, o equacionamento da lei de controle sintetizada será apresentado, dado que na seção 4.2.2 a técnica de linearização por realimentação no AUV é aplicada na seção 4.2.3 e o projeto do rastreador de trajetórias de posição e de orientação é apresentado. Finalmente, na seção 4.2.4 a lei de controle completa é apresentada.

#### 4.2.2 Controlador de linearização por realimentação

Considere o sistema completo não linear

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\nu}_r + \boldsymbol{\nu}_c), \tag{4.28}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_r = \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r - \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})] + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}, \tag{4.30}$$

no qual o vetor de saídas, particionado em trajetórias de posição  $\mathbf{y}_p$  e trajetórias de orientação  $\mathbf{q}_d$ , foi construído a partir do problema de rastreamento de trajetórias definido em 4.4. Note que o sistema não linear da equação (4.28) é composto pelo modelo dinâmico completo do veículo desenvolvido na seção 2.2.6 e da equação de saída.

Com o intuito de tornar mais direta a construção da lei de controle, geralmente as equações do modelo não linear são representadas somente em um referencial, preferencialmente em  $\mathcal{I}$ . Isso ocorre porque para obter uma relação direta entre entrada e saída por meio da técnica de Linearização entrada-saída é muito mais simples quando se trabalha no mesmo referencial. Os resultados da obtenção desta lei de controle podem ser vistos no Apêndice C.

Por outro lado, ao se utilizar o modelo com a equação dinâmica representada no referencial fixo ao veículo  $\mathcal{B}$ , é possível separar a lei de controle em duas partes: uma cinemática e uma dinâmica, como apresentado na figura 4.2.

Na figura 4.2, o controlador cinemático  $K_{cin}$  é utilizado para gerar, a partir da trajetória desejada  $y_d$  e da velocidade de referência  $v_{ref}$ , a velocidade de referência  $v_{ref}$  para que o rastreamento seja alcançado. O controlador dinâmico  $K_{din}$  é implementado como um rastreador de velocidade, ou seja, faz com que o veículo submarino siga a velocidade de referência fornecida pelo controlador cinemático.

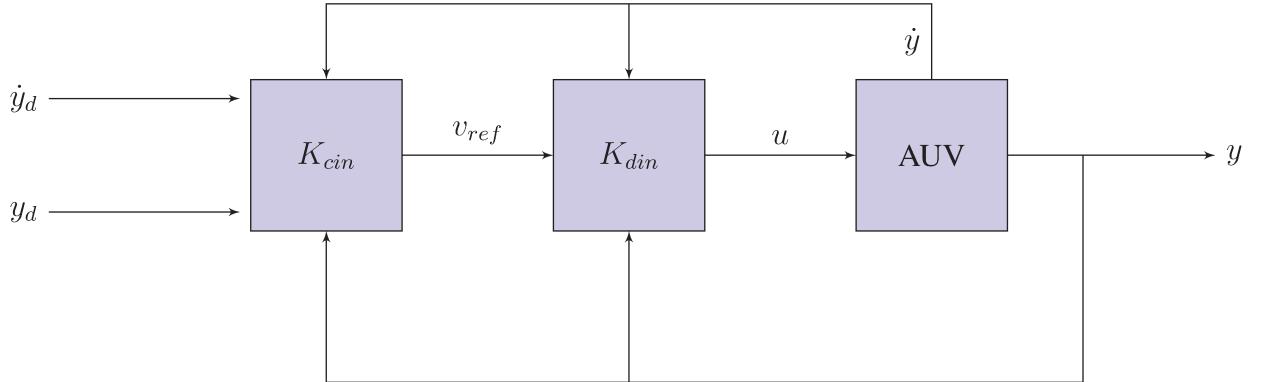


Figura 4.2 - Diagrama de blocos das leis de controle cinemática e dinâmica.

Os dois controladores podem ser desenvolvidos independentemente, de forma que dois subproblemas de controle podem ser formulados, um referente ao controle cinemático e o outro ao controle de velocidade ou controle dinâmico.

Para o modelo não linear cinemático dado por

$$\dot{\eta} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\nu}_{cin} + \boldsymbol{\nu}_c), \quad (4.31)$$

$$\mathbf{y}_c = \eta, \quad (4.32)$$

deseja-se encontrar uma lei de controle cinemática  $\boldsymbol{\nu}_{cin}$  ou um perfil de velocidade que faça com que a saída do sistema cinemático  $\mathbf{y}_c$  siga a trajetória desejada, como apresentado na De-

finição 4.5.

**Definição 4.5.** Dada uma trajetória desejada no tempo  $\mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{q}_d(t) \in \mathbb{H}$ , procura-se encontrar uma lei de controle  $\mathbf{u}_{cin}$  para o modelo cinemático da equação (4.31) tal que o veículo submarino rastreie a trajetória, isto é

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}} &\rightarrow 0 & \text{quando} & \quad t \rightarrow 0 \\ \tilde{\mathbf{q}} &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

sendo que os erros de de rastreamento de trajetória são  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d$  para a posição e  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q}_d$  para a rotação.

Já o problema de controle de velocidade pode ser formulado a partir do modelo dinâmico, isto é

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_r = \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r - \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})] + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{4.34}$$

$$\mathbf{y}_{din} = \boldsymbol{\nu}. \tag{4.35}$$

O que se busca neste problema é encontrar uma lei de controle de rastreamento de um perfil de velocidade desejado, fornecido pela lei de controle cinemática, que resolve o problema definido em 4.6.

**Definição 4.6.** Dada uma trajetória de velocidade desejada no tempo  $\mathbf{v}_d(t) \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{w}_d(t) \in \mathbb{R}^3$ , procura-se encontrar uma lei de controle de velocidade  $\mathbf{u}$  para o modelo dinâmico dado na equação (4.34) tal que o veículo submarino rastreie a trajetória de velocidade, isto é

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &\rightarrow 0 & \text{quando} & \quad t \rightarrow 0 \\ \tilde{\mathbf{w}} &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

sendo que os erros de de rastreamento de trajetória são  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_d$  para a posição e  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_d$  para a rotação.

Analogamente, deriva-se a equação de saída do sistema dado pela equação (4.34) e já no primeiro passo se obtém uma relação direta entre entrada e saída descrita como

$$\dot{\mathbf{y}}_{din} = \dot{\boldsymbol{\nu}}_r, \tag{4.37}$$

$$= -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})] + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{4.38}$$

$$= \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}_r) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}, \tag{4.39}$$

sendo que os campos vetoriais são dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}_r) &= -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})], \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Observe que  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})$  é invertível, dado que por hipótese o veículo é assumido como completamente atuado, ou seja,  $\mathbf{B}$  é não singular e como apresentado em 2 a matriz de inércia é por construção, definida positiva o que implica que  $\mathbf{M}$  é também não singular.

Assim, a seguinte lei de controle lineariza a relação entrada-saída para o modelo de controle de velocidade e, além disso, considera uma entrada de controle virtual  $\boldsymbol{\xi}$ , e pode ser escrita como

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta})[\boldsymbol{\xi} - \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}_r)] \quad (4.40)$$

Ao se substituir a lei de controle acima na primeira derivada da saída dada em (4.37), obtém-se o modelo linear equivalente

$$\dot{\mathbf{y}}_{din} = \boldsymbol{\xi} \quad (4.41)$$

na qual a variável de controle virtual  $\boldsymbol{\xi}$  será determinada na seção a seguir para garantir o rastreamento da trajetória de velocidade.

### 4.2.3 Projeto dos rastreadores

Nesta seção as leis de controle responsáveis por fazer com que o veículo siga a trajetória desejada, dada por  $\mathbf{y}_d$ , são apresentadas. Dado que o problema de controle foi dividido em dois subproblemas, a lei de rastreamento também pode ser dividida em uma parte cinemática, desenvolvida na seção 4.2.3.1 e outra parte de rastreamento de velocidade, equacionada na seção 4.2.3.2.

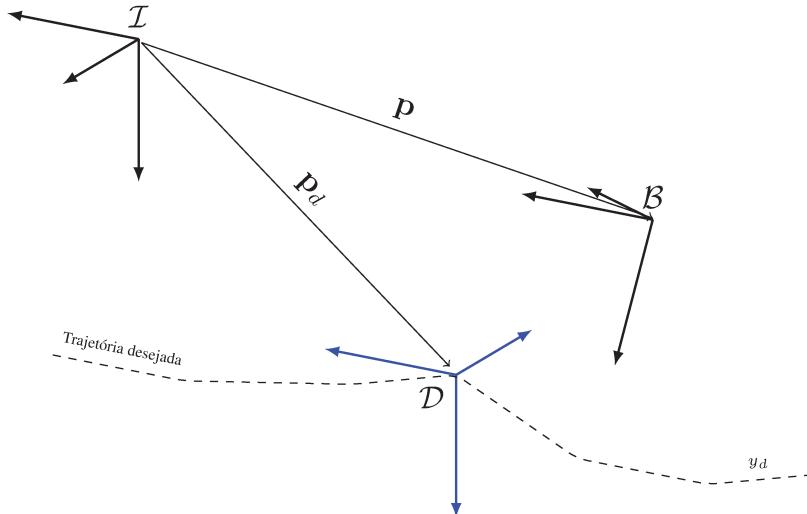


Figura 4.3 - Referenciais para o problema de rastreamento cinemático.

#### 4.2.3.1 Rastreador do controlador cinemático

Para o modelo cinemático dado pela equação (4.31) ao se derivar a equação de saída e substituir o modelo cinemático já se obtém a relação direta entrada-saída

$$\dot{\mathbf{y}}_c = \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\nu}_{cin}) \quad (4.42)$$

A relação acima (4.42) pode ser reescrita como um modelo desacoplado dos movimentos de translação e rotação

$$\dot{\mathbf{p}} = {}^T\mathbf{R}_B(\mathbf{v}_{cin} + \mathbf{v}_c), \quad (4.43a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{R}_2(\mathbf{q})\boldsymbol{w}_{cin}. \quad (4.43b)$$

A partir do modelo dado pelas equações (4.43a) e (4.43b), é possível ver que o problema de controle de posição e de orientação do veículo pode ser resolvido separadamente, o que será feito a seguir. Isso é vantajoso porque os quaternions apresentam peculiaridades na representação do erro de orientação, como já falado anteriormente.

No controle de orientação, procura-se qual a velocidade angular  $\boldsymbol{w}_{cin}$  que faz com que a orientação desejada seja seguida. Para isto, considere que, a trajetória de orientação e suas duas primeiras derivadas sejam conhecidas, contínuas e limitadas

$$\mathbf{q}_d, \quad \dot{\mathbf{q}}_d, \quad \ddot{\mathbf{q}}_d. \quad (4.44)$$

A trajetória de orientação pode ser vista como um sistema referencial  $\mathcal{D}$  com a orientação desejada  $\mathbf{q}_d$  em relação ao referencial inercial  $\mathcal{I}$  e o veículo com orientação  $\mathbf{q}$  do seu referencial local  $\mathcal{B}$ , como pode ser visto na figura 4.3.

O erro de orientação é definido como

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q}_d. \quad (4.45)$$

A equação (4.45) pode ser reescrita como

$$\mathbf{q} \otimes \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d. \quad (4.46)$$

Note que quando o veículo está com a mesma orientação do referencial desejado, isto é, quando os referenciais  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$  são coincidentes, o quaternion erro fica

$$\tilde{\mathbf{q}} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top.$$

A dinâmica do erro de orientação é dada a partir da derivada da equação (4.46), ou seja,

$$\dot{\mathbf{q}} \otimes \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \otimes \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d. \quad (4.47)$$

Ao se substituir a relação cinemática do veículo e da trajetória desejada na equação (4.47), chega-se à equação

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{q}} \otimes \bar{\mathbf{w}}_d - \bar{\mathbf{w}}_{cin} \otimes \tilde{\mathbf{q}}], \quad (4.48)$$

na qual os quaternions referentes às velocidades angulares atuais e desejadas possuem parte real nula e parte imaginária valendo  $\mathbf{w}_{cin}$  e  $\mathbf{w}_d$  respectivamente.

Quando a orientação do veículo está próxima da referência, o quaternion erro fica aproximadamente com a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{q}} \approx [1 \ \delta_x \ \delta_y \ \delta_w]^\top, \quad (4.49)$$

tal que os valores  $\delta_i$  da parte vetorial do quaternion são diretamente afetados pela própria velocidade angular, como se mostra no Apêndice A. Como fez Bacon (2012) para o caso de sistemas

de primeira ordem, pode-se considerar que a derivada do erro seja parametrizada como dependente do erro de orientação. Esta parametrização pode ser vista como uma forma de controlar a rapidez da convergência do rastreamento

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{K}_q \delta_{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad (4.50)$$

na qual  $\mathbf{K}_q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  é a matriz de ganhos do controle cinemático de orientação e  $\delta_{\tilde{\mathbf{q}}}$  é dado por

$$\delta_{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}_I - \tilde{\mathbf{q}}, \quad (4.51)$$

de forma que o quaternion de erro nulo de alinhamento foi definido como  $\mathbf{q}_I = [1, 0, 0, 0]^\top$ . Ao se escolher a matriz de ganhos como diagonal e com termos positivos, a derivada do erro converge para zero quando o erro de orientação vai à zero. Esta é uma forma de fazer com que quando os referenciais estão alinhados, o erro é nulo e, portanto, sua derivada também o será. Esta aproximação será tanto melhor quanto mais próximo estiver o veículo da orientação de referência.

A velocidade angular da trajetória de referência pode ser obtida a partir da seguinte relação cinemática:

$$\mathbf{w}_d = 2\mathbf{R}_2^\top(\mathbf{q}_d)\dot{\mathbf{q}}_d \quad (4.52)$$

Sendo assim, a velocidade angular necessária para fazer com que o veículo siga a trajetória de orientação de referência pode ser obtida ao se associar as equações (4.48), (4.50) e (4.52), podendo ser representada na forma matricial das multiplicações entre quaternions

$$\mathbf{w}_{cin} = [\otimes \tilde{\mathbf{q}}]^\top \{[\tilde{\mathbf{q}} \otimes] \mathbf{w}_d - 2\mathbf{K}_q \delta_{\tilde{\mathbf{q}}}\}. \quad (4.53)$$

Já para o controle cinemático de posição, considere que a trajetória de referência de posição e suas duas primeiras derivadas sejam contínuas e limitadas

$$\mathbf{p}_d, \quad \dot{\mathbf{p}}_d. \quad (4.54)$$

De volta à figura 4.3, o problema de rastreamento da trajetória de posição consiste em fazer com que a origem do referencial do veículo  $\mathcal{B}$  converja para a origem do referencial desejado  $\mathcal{D}$ . O

erro de posição é definido como

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d. \quad (4.55)$$

Uma lei de controle cinemático que faz com que o modelo cinemático de posição em (4.31) siga a trajetória de posição pode ser dada por

$$\mathbf{v}_{cin} = {}^T\mathbf{R}_{\mathcal{B}}^\top (\dot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \mathbf{v}_c, \quad (4.56)$$

na qual  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^3$  é uma matriz de ganhos. Isso porque ao se fechar a malha com a equação (4.43a), chega-se na equação diferencial de primeira ordem do erro de posição, dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{p}} = 0. \quad (4.57)$$

sendo que ao se escolher  $\mathbf{K}_p$  positiva definida, a dinâmica do erro será estável e então a trajetória de posição será rastreada pelo veículo.

A lei cinemática que faz com que o veículo rastreie a trajetória desejada é dada por

$$\boldsymbol{\nu}_{cin} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{cin} \\ \mathbf{w}_{cin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{R}_{\mathcal{B}}^\top (\dot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \mathbf{v}_c \\ [{}^T\mathbf{q}]^\top \{[\tilde{\mathbf{q}}]^\otimes \mathbf{w}_d - 2\mathbf{K}_q \delta_{\tilde{\mathbf{q}}}\} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

A seguir, a malha de controle de velocidade é apresentada, que possui como entrada a velocidade necessária  $\boldsymbol{\nu}_{cin}$ , dada pelo controle de rastreamento cinemático, que fará com que o veículo siga a trajetória desejada.

#### 4.2.3.2 Rastreador do controlador de velocidade

A trajetória desejada para o problema do rastreador de velocidade é a saída do controlador cinemático, calculado na seção 4.2.3.1

$$\boldsymbol{\nu}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{cin} \\ \mathbf{w}_{cin} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

O erro de velocidade é definido como

$$\tilde{\nu} = \nu - \nu_d \quad (4.60)$$

Assim, a lei de controle mais simples que faz com que a trajetória de velocidade seja rastreada é dada por

$$\xi = \dot{\nu}_d + K_\nu \tilde{\nu}, \quad (4.61)$$

na qual a matriz de ganhos  $K_\nu$  é escolhida de forma que a malha fechada seja estável. Ao substituir a equação (4.61) na equação (4.41) do modelo dinâmico linearizado, chega-se à

$$\dot{\tilde{\nu}} + K_\nu \tilde{\nu} = 0 \quad (4.62)$$

Note que na lei de controle de velocidade (4.61) é preciso conhecer a derivada das velocidades desejadas, o que é possível de se obter, pois todas as variáveis que compõem estas velocidades são contínuas, suaves e limitadas.

#### 4.2.4 Controlador completo

O procedimento para calcular o sinal de controle pode ser dado no Algoritmo 4.1. Assumindo que os parâmetros  $K_p, K_w$  e  $K_\nu$  sejam definidos e que também são conhecidas as seguintes trajetórias

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_d, \quad \dot{\mathbf{q}}_d, \quad \ddot{\mathbf{q}}_d \\ \mathbf{p}_d, \quad \dot{\mathbf{p}}_d, \quad \ddot{\mathbf{p}}_d. \end{aligned}$$

---

**Algoritmo 4.1** Cálculo do sinal de controle do rastreador

1. Calcular a velocidade desejada e sua derivada:

$$\boldsymbol{\nu}_d = \begin{bmatrix} {}^\tau \mathbf{R}_{\mathcal{B}}^\top (\dot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \mathbf{v}_c \\ [{}^\otimes \tilde{\mathbf{q}}]^\top \{ [\tilde{\mathbf{q}} {}^\otimes] \mathbf{w}_d - 2 \mathbf{K}_q \delta_{\tilde{\mathbf{q}}} \} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_d = \frac{d\boldsymbol{\nu}_d}{dt}.$$

2. Calcular o sinal de controle da malha de velocidade

$$\boldsymbol{\xi} = \dot{\boldsymbol{\nu}}_d + \mathbf{K}_\nu \tilde{\boldsymbol{\nu}}.$$

3. Por fim, o esforço de controle

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta})[\boldsymbol{\xi} - \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}_r)],$$

na qual

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}_r) = -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}_r)\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})],$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}.$$


---

## 5 RESULTADOS

Todos os algoritmos de filtragem e de controle desenvolvidos nos capítulos 3 e 4 foram testados e avaliados no modelo do veículo submarino apresentado no capítulo 2. Os parâmetros utilizados no modelo foram recuperados a partir da publicação de Vega (VEGA, 2014), no qual é apresentado o modelo do robô autônomo submarino RSM (figura 5.1) em desenvolvimento pela Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest da França(ENIB-FR), em cooperação com o Laboratório de Mobilidade Autônoma da Unicamp (LMA-Unicamp).

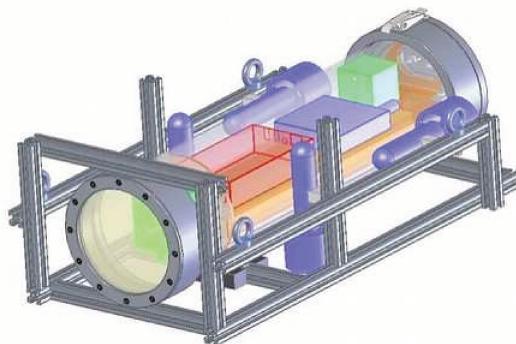


Figura 5.1 - Estrutura do RSM desenvolvido em parceria entre UNICAMP e ENIB. Figura adaptada de (VEGA, 2014).

O que se altera na estrutura do modelo aqui utilizado é o acréscimo de dois propulsores na direção de sway RSM.

Os testes aqui executados consideram diversas situações ou **casos** de estudo, escolhidos apropriadamente para avaliar o desempenho de cada um dos sistemas desenvolvidos ou da eventual combinação entre eles. As situações consideradas poder ser subdivididas em:

- **Caso 1:** Realimentação de estados (com adição de ruído)
  1. desempenho do estimador de correntes.
  2. controlador sem estimador de correntes
  3. controlador com estimativa de correntes
- **Caso 2:** Estados estimados com EKF
  1. funcionamento do EKF
  2. desempenho do estimador de correntes
  3. controlador com estados estimados e correntes

## 5.1 Parâmetros da Simulação

Nesta seção são apresentados os parâmetros comuns à todas as simulações efetuadas. Por exemplo, todos os algoritmos foram implementados em ambiente Matlab com tempo de integração de  $10^{-3}$  segundos para o modelo dinâmico do veículo (desenvolvido no capítulo 2) e frequência de atualização dos algoritmos de filtragem e de controle de  $f_a = 100Hz$ . Quando for o caso, a taxa de amostragem dos sensores também foi escolhida como de  $f_a$ . Por fim, o método de integração utilizado foi o algoritmo de Euler tanto para o modelo quanto para os algoritmos implementados. Os dados podem ser resumidos na Tabela 5.1.

Parâmetro	Valor	Tabela 5.1 - Parâmetros da simulação
		Descrição
$T$	$20s$	tempo total da simulação
$T_s$	$10^{-3}s$	passo de integração do modelo
$T_a$	$10^{-2}s$	passo de integração dos algoritmos
$f_a$	$100Hz$	frequência de atualização dos algoritmos

### 5.1.1 Parâmetros do veículo

Alguns parâmetros do RSM estão apresentados na tabela 5.2. A partir destes parâmetros e com o auxílio das formulações encontradas em (FOSSEN, 2011), (ABKOWITZ, 1980) e (LAMB, 1932), é possível descrever os demais parâmetros que compõem o modelo matemático do veículo.

O robô RSM é considerado como um objeto cilíndrico e por isso a influência da estrutura metálica ao redor do veículo é desconsiderada.

A partir dos parâmetros dados na tabela 5.2, é possível obter os demais parâmetros presentes no modelo desenvolvido no capítulo 2. Os cálculos destes parâmetros encontram-se no apêndice D, bem como os valores das matrizes do modelo completo do veículo.

Parâmetro	Valor	Descrição
r	0.1(m)	raio de seção transversal
L	0.6(m)	comprimento
m	18.71(kg)	massa seca
V	18.85(dm <sup>3</sup> )	Volume
$\rho$	998( $\frac{kg}{m^3}$ )	densidade água
g	9.81( $\frac{m}{s^2}$ )	aceleração gravidade
$c_d$	0.8	coeficiente de arrasto axial (cilindro)
$c_{dc}$	1.2	coeficiente de arrasto longitudinal(cilindro)
$\gamma$	1.005%	flutuação(em relação ao peso)
$\mathbf{p}_{cq}$	$[0 \ 0 \ 1/80]^T$ (m)	posição CG
$\mathbf{p}_{cb}$	$[0 \ 0 \ 0]^T$ (m)	posição CB

### 5.1.2 Parâmetros dos filtros

Para o filtro de correntes, os seguintes ganhos foram adotados

$$\mathbf{K}_1 = 20\mathbf{I}_3, \quad \mathbf{K}_2 = 100\mathbf{I}_3.$$

Isso porque o sistema é de segunda ordem e foi escolhido que as resposta em malha fechada do filtro tenha amortecimento crítico ( $\xi = 1$ , sem sobressinal) e frequência natural de 10 rad/s.

Para o filtro de Kalman estendido, os valores das matrizes de covariância <sup>1</sup> de processo associadas à dinâmica de posição, orientação, velocidade linear e velocidade angular são, respectivamente

$$Q_p = 0.1\mathbf{I}_3, \quad Q_q = 0.1\mathbf{I}_4, \quad Q_v = 0.1\mathbf{I}_3, \quad Q_w = 0.1\mathbf{I}_3,$$

sendo que a matriz de covariância completa é simplesmente a matriz composta pelos blocos diagonais como segue

$$\mathbf{Q} = \text{blkdiag}(Q_p, Q_p, Q_q, Q_v, Q_w).$$

Para as medidas, foi considerado que a unidade inercial (acelerômetro, magnetômetro e giroscópio) possui as seguintes covariâncias

$$R_a = 10^{-4}\mathbf{I}_3, \quad R_m = 10^{-4}\mathbf{I}_3, \quad R_w = 10^{-1}\mathbf{I}_3.$$

---

<sup>1</sup>as unidades não foram escritas por brevidade (é a unidade da equação ao quadrado).

Já para o sensor de pressão, a variância é dada por

$$R_b = 0.1.$$

### 5.1.3 Trajetória de Referência

Para padronizar a avaliação dos estudos de caso, a mesma trajetória foi adotada para todos os casos. A trajetória de referência escolhida é uma helicoidal com eixo principal na direção  $z_i$ , centrada na origem, que pode ser construída pelas equações parametrizadas no tempo

$$\begin{aligned}x_d &= R \sin(w_r t), \\y_d &= -R \cos(w_r t), \\z_d &= v_r t,\end{aligned}$$

na qual foram escolhidos  $R = 3\text{m}$ ,  $w_r = 1/2\text{rad/s}$  e  $v_r = 0.1\text{m/s}$ . O vetor das trajetórias de posição desejada é dada por

$${^T}\boldsymbol{p}_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix}.$$

Em relação à orientação, a situação em que uma das laterais do veículo esteja sempre apontada para o interior da trajetória foi considerada, o que significa que os ângulos de Euler roll e pitch foram considerados como nulos e o ângulo de yaw considerado variante no tempo ( $\psi = w_r t$ ). Reescrevendo a trajetória de orientação em termos de quaternions<sup>2</sup>, tem-se

---

<sup>2</sup>Ver apêndice A.

$$\mathbf{q}_d(t) = \mathbf{q}_\phi \otimes \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{q}_\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos(w_r t/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(w_r t/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(w_r t/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(w_r t/2) \end{bmatrix}$$

Outras trajetórias poderiam ser escolhidas para a avaliação do sistema de controle, porém, a trajetória helicoidal dada por  ${}^T\mathbf{p}_d$  e  $\mathbf{q}_d$  é muito utilizada em missões de inspeção de estruturas marinhas. Uma aplicação dessa trajetória acontece em plataformas de petróleo, principalmente para a inspeção de *risers*<sup>3</sup>, em busca de vazamentos e defeitos na estrutura. Uma proposta para a inspeção seria fazer a captura de imagens por meio de uma câmera fixa ao veículo, enquanto o veículo percorre a trajetória, e posterior análise dos dados adquiridos.

## 5.2 Caso 1

A primeira avaliação para este caso foi o desempenho do estimador de correntes, quando são considerados como medidas as entradas de posição do veículo e de velocidade relativa. Depois de feitos vários testes, verificou-se que a convergência do estimador de correntes era rápida (em relação ao tempo padrão de estimação). Para este teste, a janela de simulação considerada foi de 20s.

Para o filtro de correntes, a condição inicial de corrente marinha nula e de posição do veículo foram consideradas. Apesar de ser simulação com realimentação de estados, ruídos gaussianos aditivos nas medidas de posição e velocidade relativa do veículo foram considerados.

Apesar de se assumir que as correntes marinhas são constantes, na simulação foi considerado que o valor da correnteza mudou abruptamente, para testar a capacidade do filtro frente às variações, como o que acontece em águas próximas à costa na qual a direção das correntes muda abruptamente devido à presença de obstáculos. No referencial inercial, as correntes marinhas

---

<sup>3</sup>Risers são tubulações que servem de interligação entre o poço de petróleo

foram definidas da seguinte forma em m/s

$$V_{cx} = 0.2(t \leq 10) - 0.5(t > 10),$$

$$V_{cy} = 0.5(t \leq 10) + 0.2(t > 10),$$

$$V_{cz} = 0.$$

Como se pode observar na figura 5.2 o estimador de correntes convergiu para o entorno do valor verdadeiro das correntezas o que era esperado. Vale ressaltar que como foram adotadas medidas corrompidas por ruído, a convergência sempre fica no entorno do valor verdadeiro, diferentemente da convergência exponencial visto quando a realimentação de estados sem ruídos é considerada.

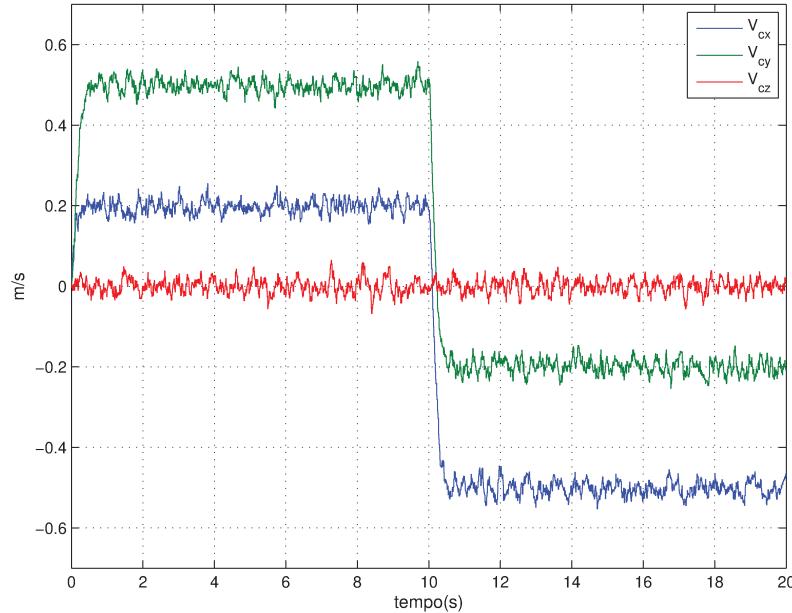


Figura 5.2 - Correntes estimadas para o caso de realimentação de estados ruidosos.

Quanto ao controlador, para a mesma condição de realimentação de estados ruidosos anterior e com valores verdadeiros das correntezas, a partir das figuras a seguir nota-se que a trajetória foi seguida.

Na figura 5.3 é possível ver as trajetórias desejadas e seguidas pelo veículo, além dos vetores representando as correntezas. Ainda, apesar de o controlador ser discreto e da presença das correntes marinhas, a trajetória é ainda seguida. Nota-se que, ocorre um desvio da referência quando o valor da correnteza se altera. Como se pode observar o pico de aumento do erro em  $t = 10s$  na figura 5.4. Além do mais, na figura dos erros de posição, nota-se que antes e depois de ocorrer a mudança das correntezas em  $t = 10s$ , a tendência do erro de seguimento

de trajetória é de oscilar no entorno do zero. Esta pequena oscilação deve-se principalmente ao pequeno avanço de fase associado ao loop de controle cinemático, que age como um gerador de velocidade de referências, ou um controle feedforward. Como na direção vertical  $z_i$  o movimento é linear, o erro de trajetória neste caso oscila próximo à zero.

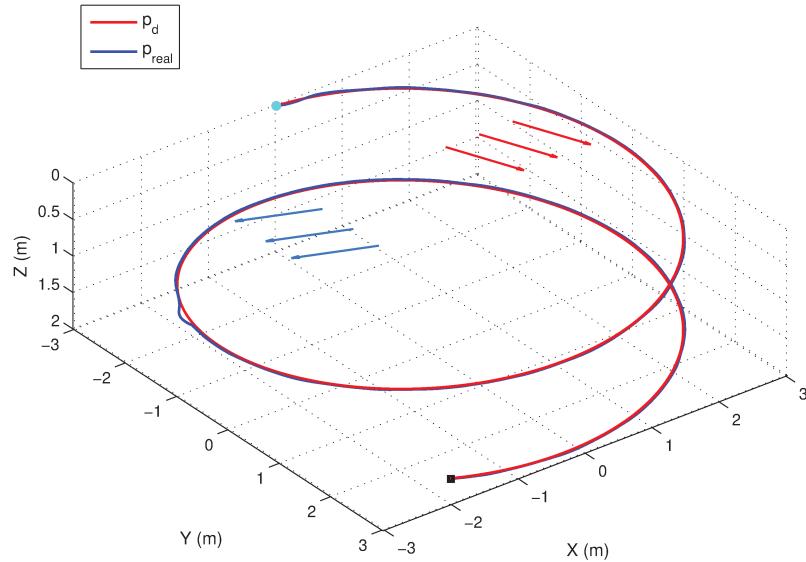


Figura 5.3 - Trajeto percorrido pelo veículo.

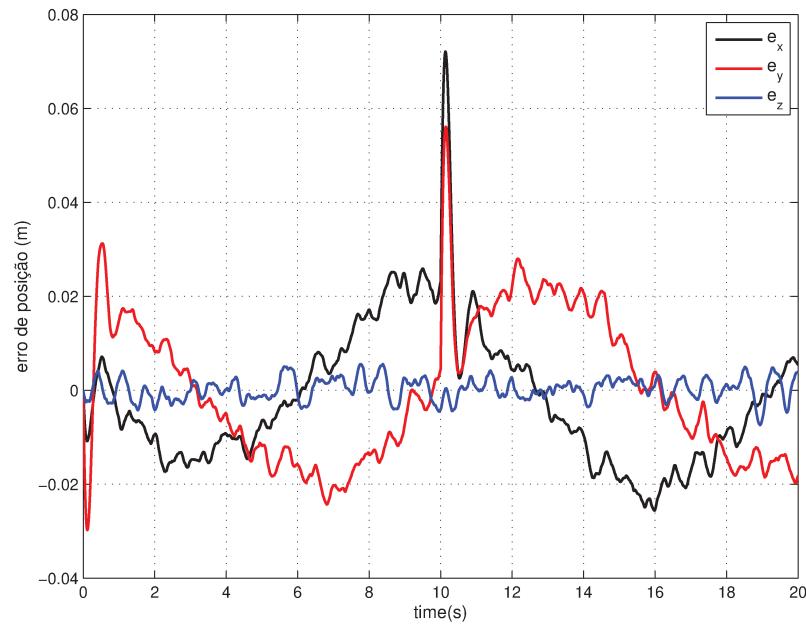


Figura 5.4 - Erro de posição.

Como feito no apêndice A, o quaternion que representa o erro de orientação dado pela relação entre o quaternion de referência e o que codifica a orientação do veículo é escrito como:

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}_d.$$

Este quaternion representa a rotação necessária que o veículo deveria fazer para que se alinhe à orientação desejada. O ângulo de erro associado à esta rotação pode ser extraído da parte escalar do quaternion erro, isto é,

$$\theta_e = 2 \arccos(\mathbf{q}_e(0)).$$

Calculando o valor deste ângulo de erro para cada instante da simulação, chega-se à figura 5.5 na qual o erro está em graus. A rápida variação inicial do erro deve-se ao efeito transiente causado pelas condições iniciais da simulação. Já a variação senoidal de amplitude de aproximadamente  $0.02^\circ$  está associado ao pequeno avanço de fase causado pelo loop de controle cinemático (que age como um gerador de velocidades de referência). A componente DC do erro de orientação é de aproximadamente  $0.01^\circ$ , e pode ser atribuída à distorção causada pelo método de integração de Euler sobre os quaternions (isto é, pode ser vista como ruído vindo do processo de integração).

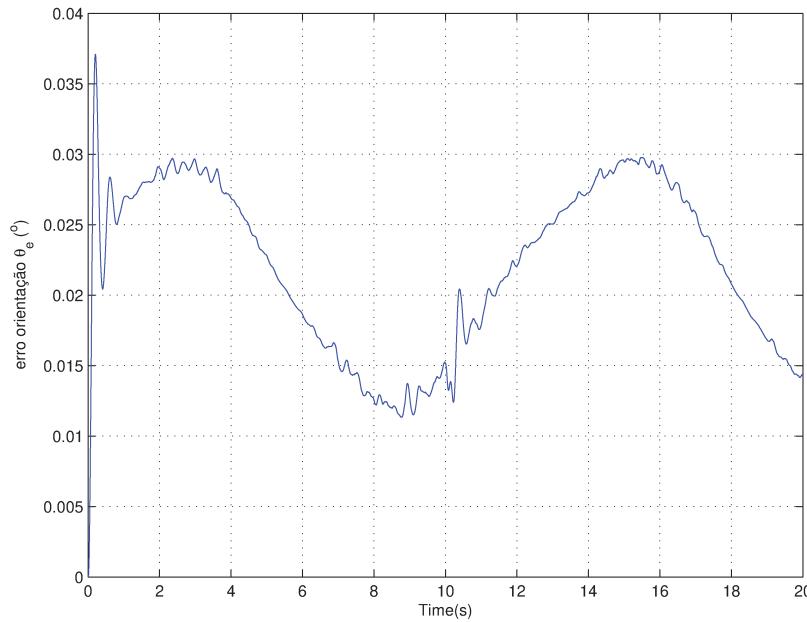


Figura 5.5 - Erro de orientação.

Os esforços dos atuadores podem ser vistos na figura 5.6. Como os atuadores comerciais tem saturação à 15N, percebe-se que para a tarefa dada, os atuadores não saturariam. Os atuadores mais acionados são o  $p1$  e  $p2$ , justamente os que estão orientados para o movimento linear em *surge* e angular em *yaw*, ou seja, são os atuadores mais utilizados para que a trajetória em hélice seja executada, como era de se esperar.

Foi ainda considerado para os testes com realimentação de estados ruidosos a situação

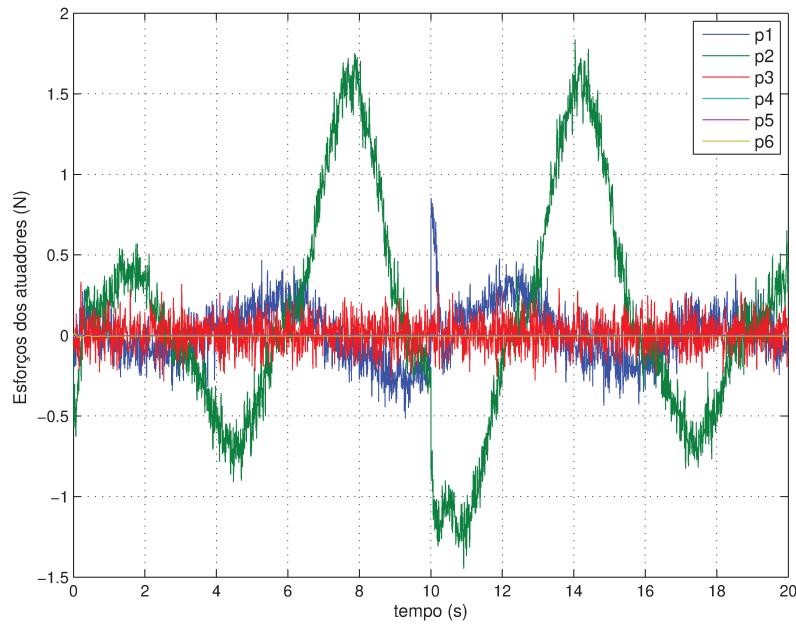


Figura 5.6 - Esforço dos atuadores

em que o controlador utiliza a estimativa da correnteza fornecida pelo filtro de correntes. Os resultados podem ser encontrados a seguir

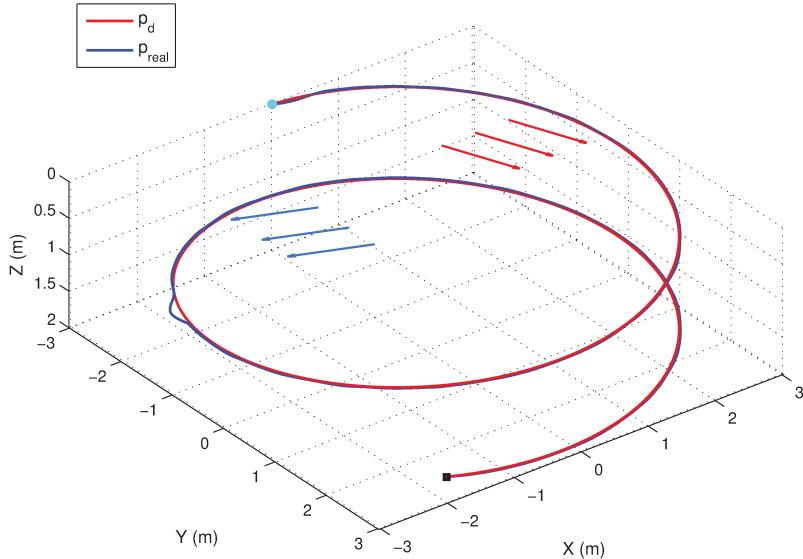


Figura 5.7 - Trajeto percorrido pelo veículo.

Pelas figuras 5.7, 5.8 e 5.9 é possível notar que o desempenho foi parecido comparado a quando se considerou o valor real da correnteza. Como o filtro de correntes possui constante de tempo relativamente baixa convergindo rapidamente para o valor real das correntes marinhas, do lado do rastreamento de trajetórias, nota-se um pequeno aumento nos erros de posição, com a maior saliência também ocorrendo em 10s.

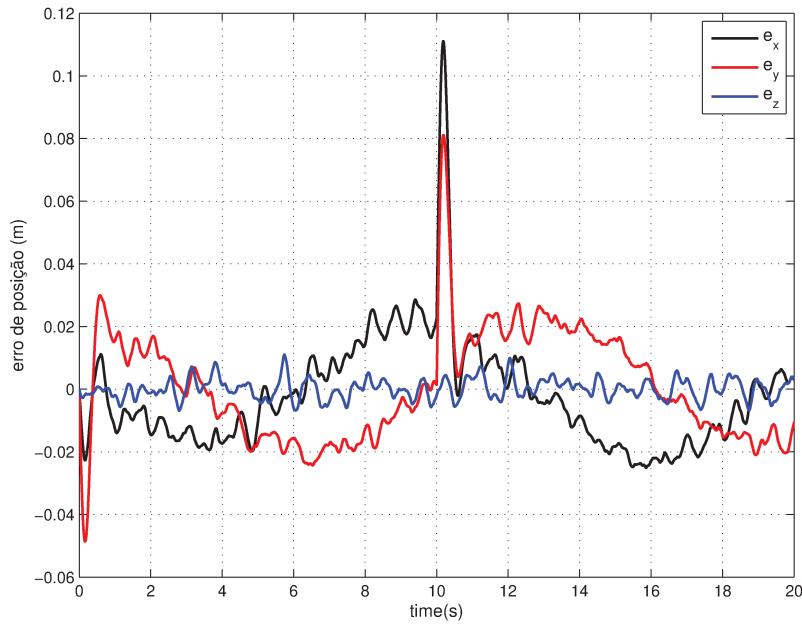


Figura 5.8 -

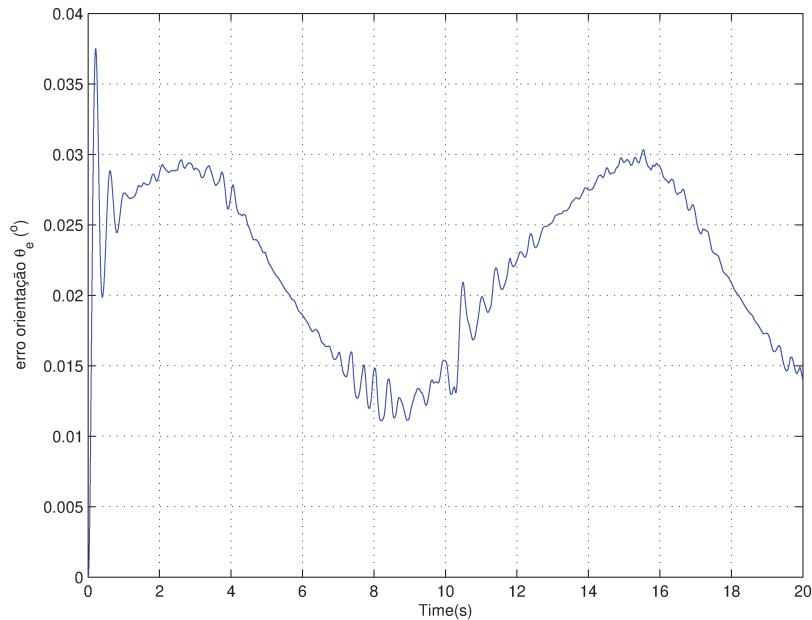


Figura 5.9 - Erro de orientação.

### 5.3 Caso 2

Nesta parte da simulação foi considerado o filtro de Kalman estendido. Em um primeiro momento da simulação, foi considerado somente o desempenho do EKF, ou seja, sem a influência das correntes marinhas e do estimador de correntes.

Nota-se que como os valores da posição  $x_i$  e  $y_i$  não são medidos, eles são suaves como mostrado nas figuras 5.11 e 5.12, pois são resultados do processo de integração do filtro (são

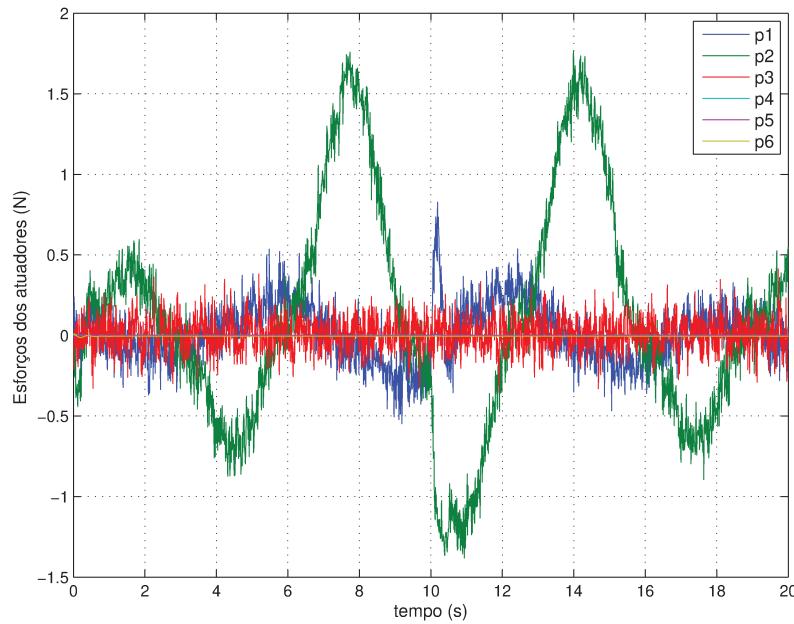


Figura 5.10 - Esforço dos atuadores

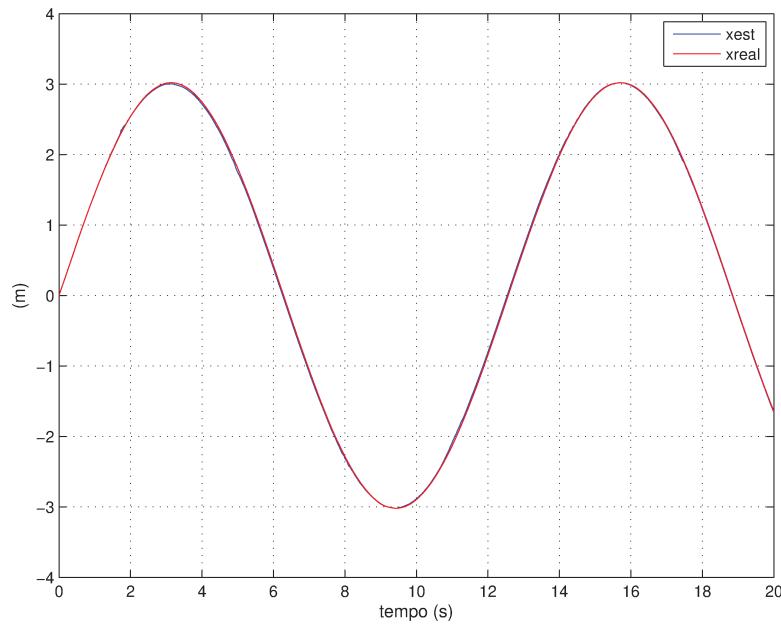


Figura 5.11 - Estimativa da posição do veículo. Componente x.

variáveis integradas e não medidas diretamente). Já para a profundidade  $z_i$ , um sensor de pressão é utilizado para medi-la, o que faz com que sua estimativa dependa diretamente da medição ruidosa do sensor, por isso a forma que ela apresenta na figura 5.13.

O ângulo de erro dado na figura 5.14 foi calculado como no caso 1 para o erro de orientação do sistema de controle. Como era de se esperar, dado que a medida do magnetômetro possui baixo nível de ruído, o erro não passa de  $0.15^\circ$ .

Analogamente às estimativas de posição, as figuras 5.15 e 5.16 mostram a estimativa de velocidade em surge e sway do submarino. Como se pode ver, elas são estimativas suavizadas,

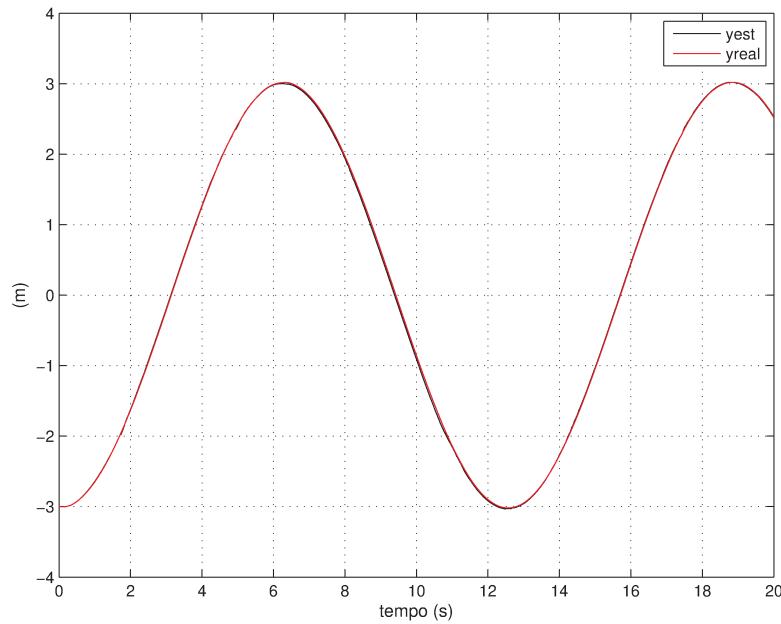


Figura 5.12 - Estimativa da posição do veículo. Componente y.

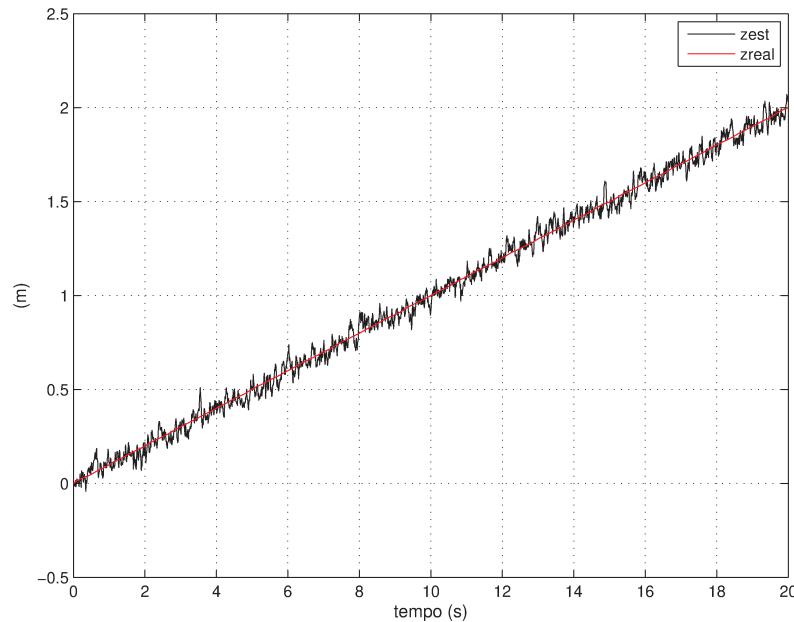


Figura 5.13 - Estimativa da posição do veículo. Componente z.

pois são obtidas a partir da medida do acelerômetro. O processo do EKF para obter estas estimativas é equivalente a integrar, o que reduz o efeito do ruído na estimativa. Já para a velocidade de heave na figura 5.17 acontece o mesmo, porém como a amplitude do sinal é muito baixa e é da mesma ordem de amplitude do ruído medido, não há como o filtro extraír informação mais precisa.

Como as velocidades angulares são medidas, é de se esperar que a estimativa não seja suave, porém elas estarão corretas e no entorno da medida verdadeira. Pelas figuras também é possível notar que o nível de ruído das medições foi reduzido, como se pode observar pelas

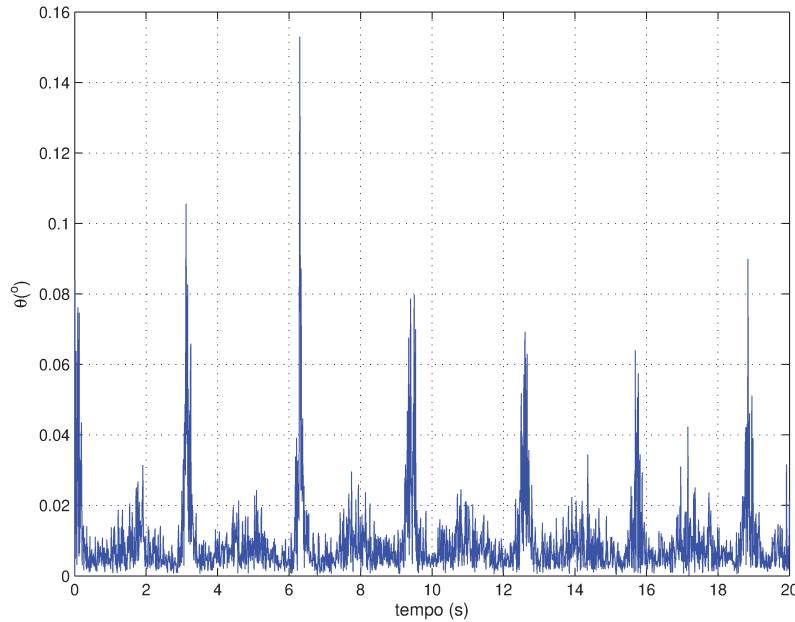


Figura 5.14 - Estimativa da orientação do veículo. Ângulo de erro.

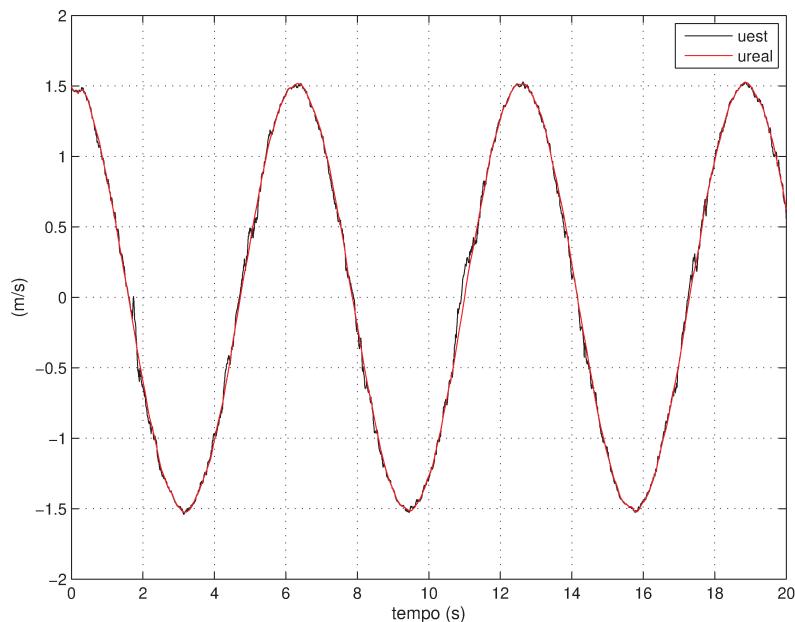


Figura 5.15 - Estimativa da velocidade em surge.

covariâncias dadas na equação (A.1) e a variação do sinal apresentada nas figuras 5.18, 5.19 e 5.20.

Depois desta simulação em que se verificou que o estimador de estados funcionava razoavelmente, o sistema de controle em conjunto com o EKF e com o estimador de correntes foi testado, sendo ainda alimentado pelos estados ruidosos do caso 1.

Como se pode notar nas figuras 5.21 e 5.22, o veículo conseguiu seguir a trajetória com erro relativamente pequeno. Observe que, com a introdução do EKF a resposta do sistema foi pior, o que era de se esperar, dado que além de conter medidas ruidosas, alguns estados neces-

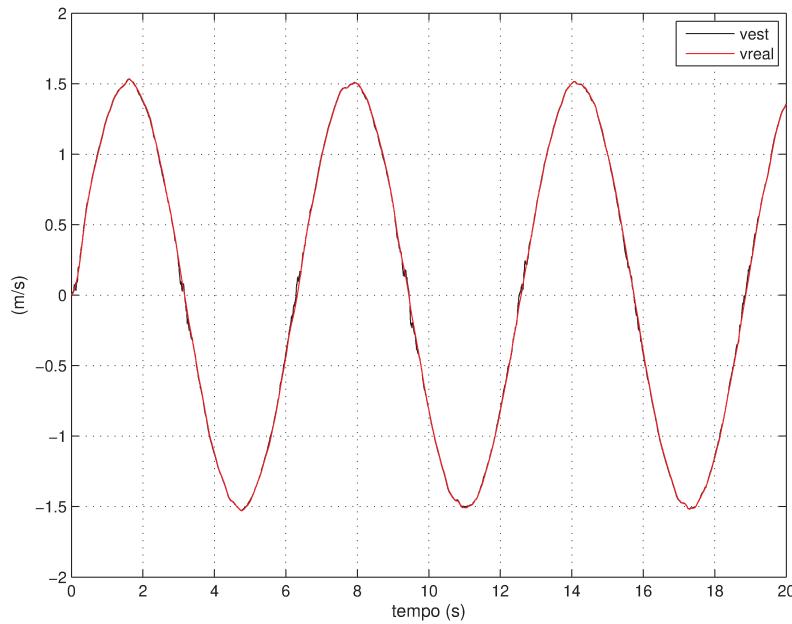


Figura 5.16 - Estimativa da velocidade em sway.

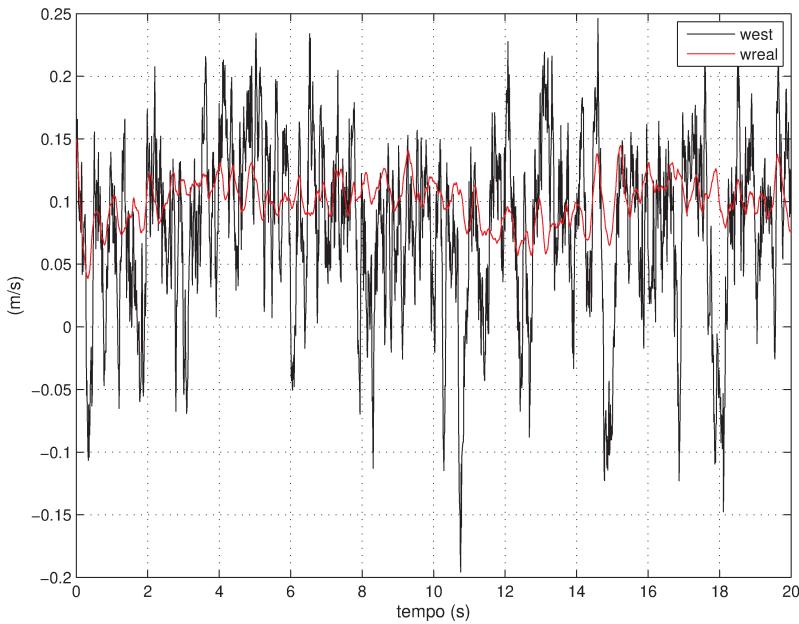


Figura 5.17 - Estimativa da velocidade em heave.

sários para computar a lei de controle não eram medidos.

Observe que o nível de ruído nos sinais dos atuadores foi aumentado em virtude da re-alimentação de saída. Na figura 5.24 nota-se, no entanto que o sinal dos atuadores ficou bem abaixo da saturação, o que é bom, caso esta lei seja implementada no veículo real.

Por fim, considera-se o teste completo, em que as entradas do controlador e do filtro de correntes são fornecidas pelo EKF. Os resultados a seguir mostram que o veículo não seguiu a trajetória, como é possível observar na figura 5.26. Analisando mais atentamente a figura 5.27 dos erros de posição, nota-se que, os erros das trajetórias em  $x$  e em  $y$  não são pequenos e ainda

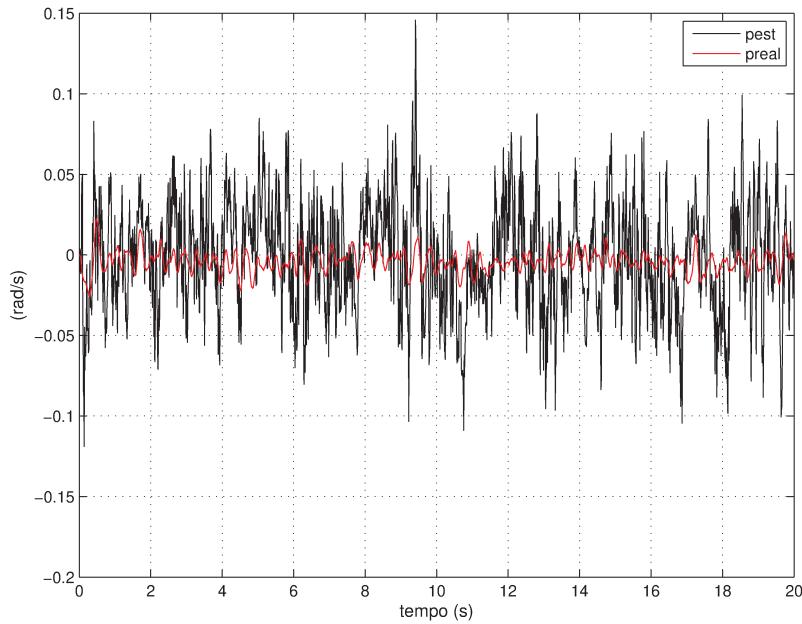


Figura 5.18 - Estimativa da velocidade em roll.

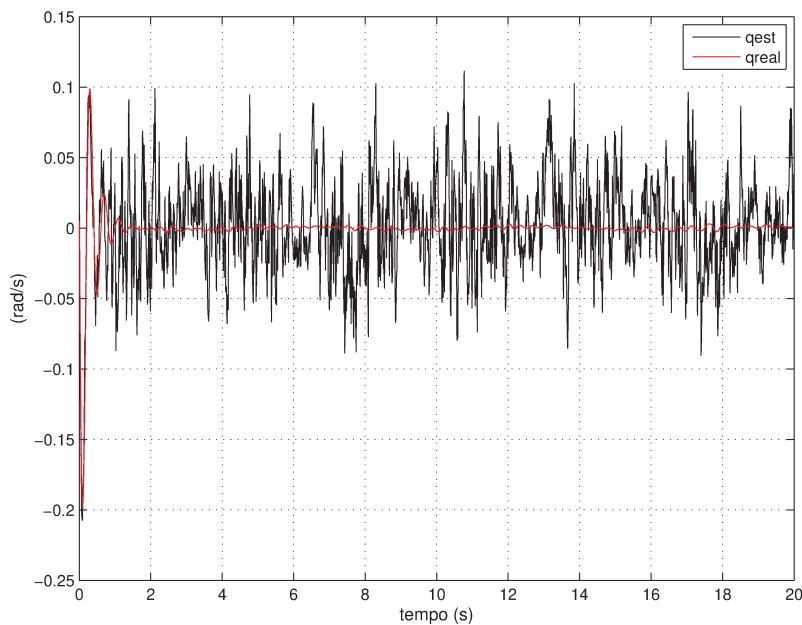


Figura 5.19 - Estimativa da velocidade em pitch.

acompanharam o sentido das correntes marinhas. É importante salientar que as correntezas foram aplicadas no plano  $xy$ . Isso é um indicativo de que o estimador de correntes marinhas não funcionou corretamente. E foi o que de fato aconteceu, como mostra a figura 5.25, na qual se vê que a estimativa das correntezas não foi consistente.

Por outro lado, analogamente ao caso anterior, a trajetória de orientação foi seguida, como se vê na figura 5.28. Isso reforça a ideia de que é o estimador de correntes marinhas que está com problemas.

De fato, observando melhor o que aconteceu, é possível se chegar à algumas conclusões.

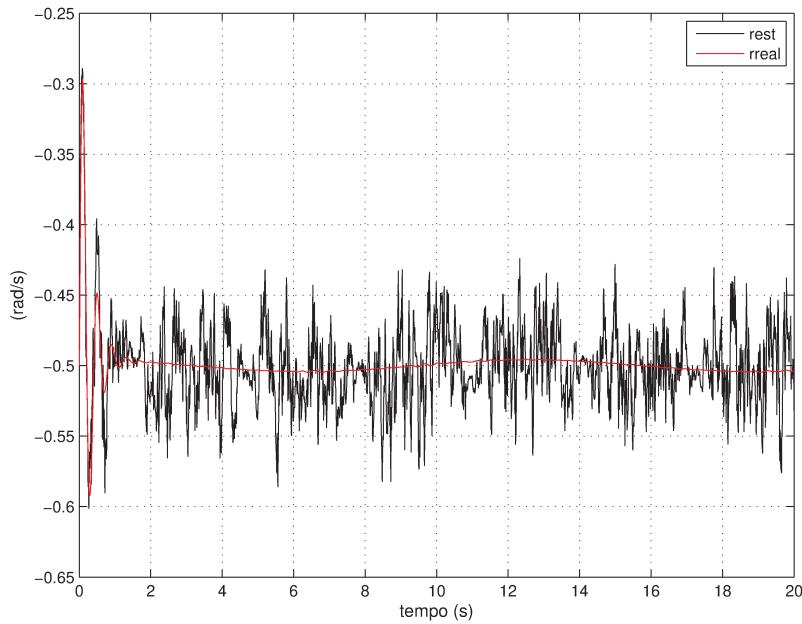


Figura 5.20 - Estimativa da velocidade em yaw.

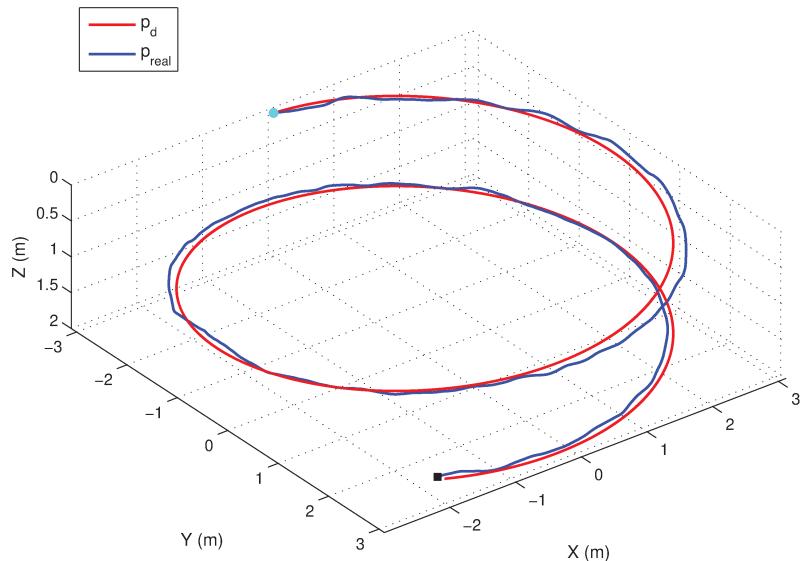


Figura 5.21 - Trajeto percorrido pelo veículo.

No Capítulo 2 referente à modelagem do veículo submarino, foi assumida a hipótese de que as correntes marinhas são constantes e por isso se pode definir um referencial auxiliar inercial fixo às correntes marinhas. Neste referencial, as equações dinâmicas foram reescritas em termos da velocidade relativa.

Além disso, no capítulo 2 foi apresentado que a medida do acelerômetro é a aceleração inercial do veículo. Assim, como as correntes marinhas são um referencial inercial e o acelerômetro é instrumento de medida de aceleração inercial, e também foi assumido que a corrente marinha é desconhecida, fica impossível de se determinar qual o valor da corrente marinha, pois ao integrar os dados do acelerômetro, o que se obtém é o valor da velocidade relativa.

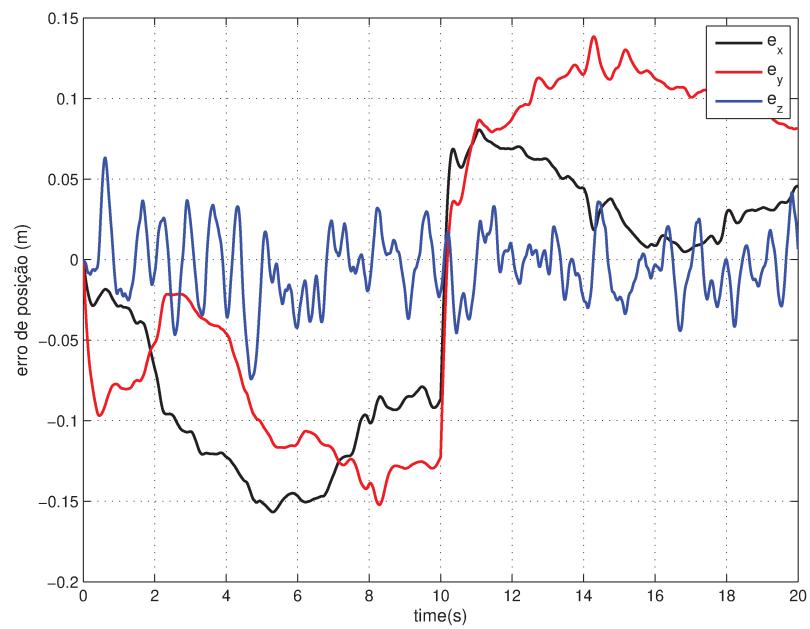


Figura 5.22 - Erro de posição

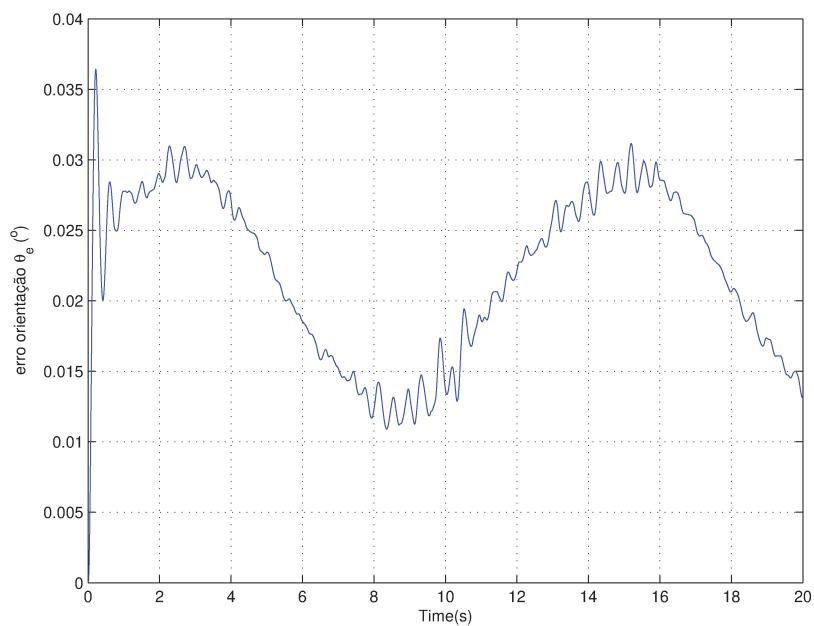


Figura 5.23 - Erro de orientação.

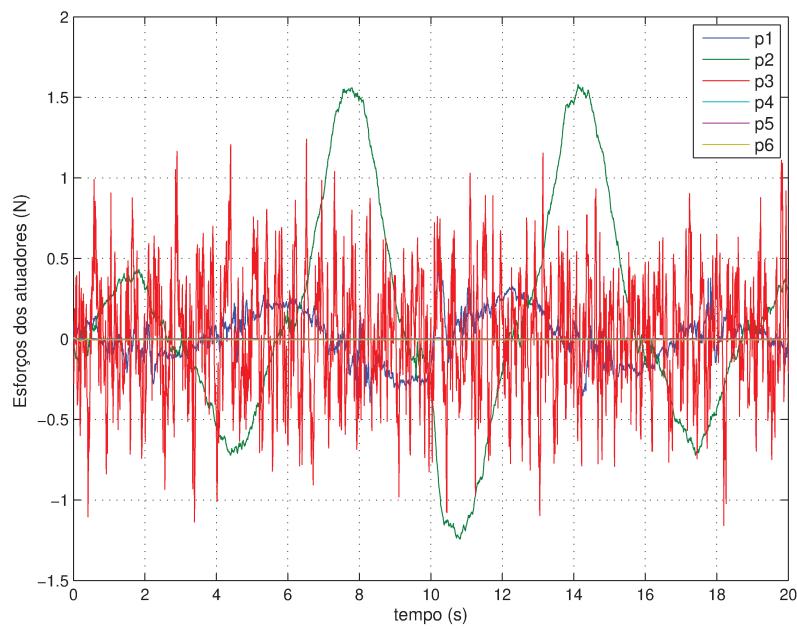


Figura 5.24 - Esforço dos atuadores

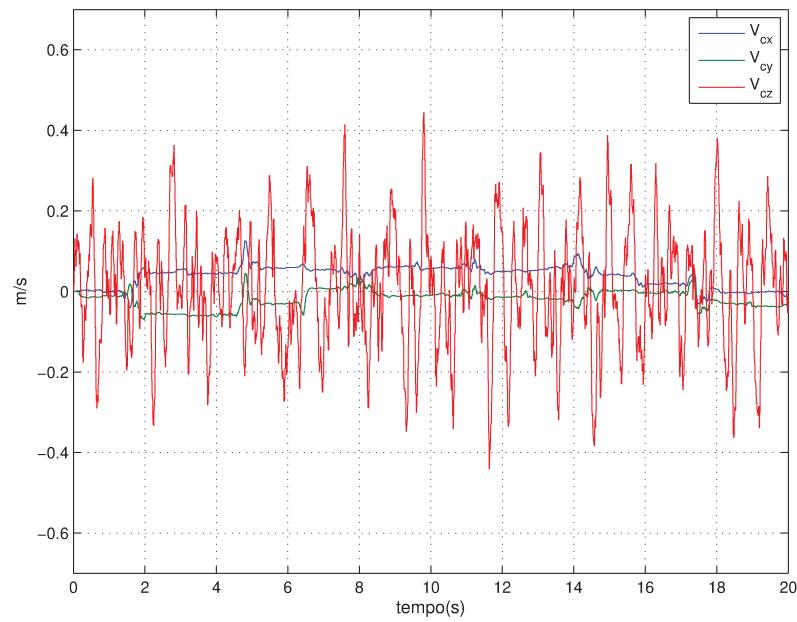


Figura 5.25 - Correntes estimadas para com EKF.

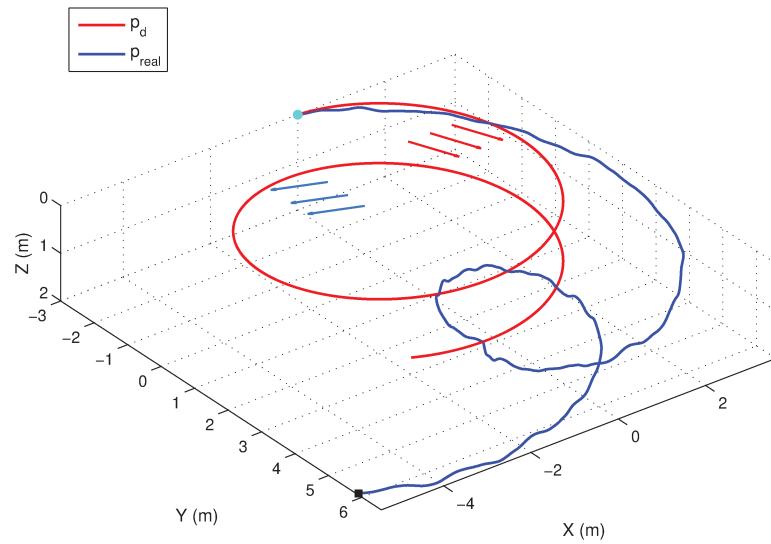


Figura 5.26 - Trajeto percorrido pelo veículo.

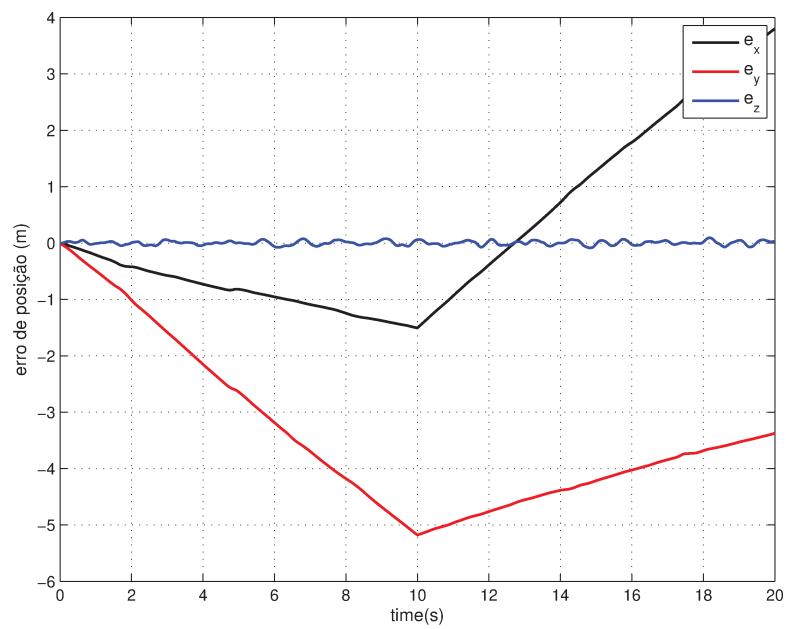


Figura 5.27 - Erro de posição

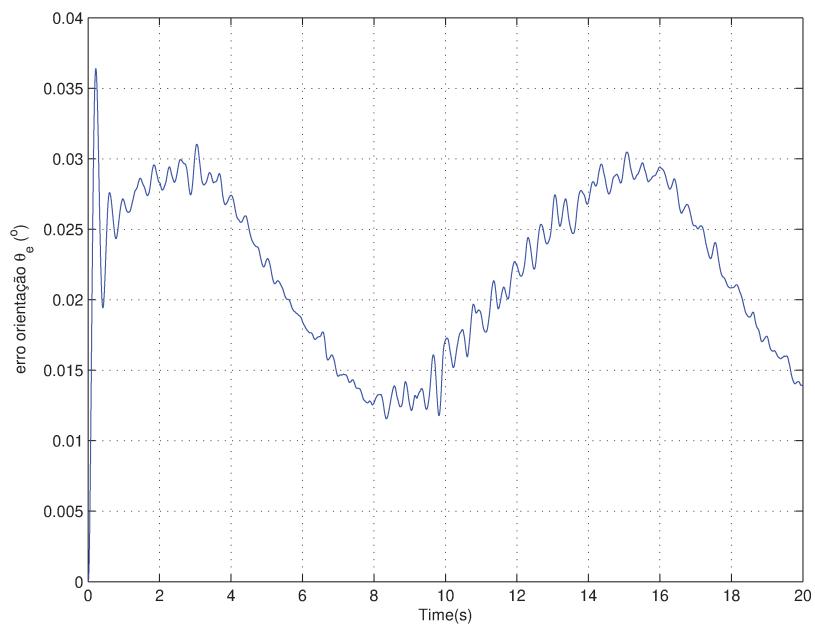


Figura 5.28 - Erro de orientação.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o problema de controle de trajetórias de um veículo submarino autônomo, foi abordado. O objetivo do trabalho foi de desenvolver algoritmos associados ao sistema de controle do AUV, aplicados ao rastreamento de trajetórias, que consideram o problema de filtragem de estados e a estimativa de correntes marinhas.

Primeiramente, a partir dos objetivos definidos, foi identificada a necessidade de se desenvolver um modelo matemático para um veículo submarino e que seja representativo para o problema de controle de trajetórias. Sendo assim, no Capítulo 2, um modelo do veículo, composto pela dinâmica de corpo rígido (cinemática e equações de Newton- Euler), e que detalha os efeitos da massa adicionada, do arrasto hidrodinâmico, das forças restaurativas, dos atuadores e da influência de correntes marinhas, é considerado. Além disso, o modelo completo do veículo, que considera todos os efeitos, é apresentado na forma matricial. O modelo genérico dos sensores, presentes no submarino bem como os modelos de acelerômetro, bússola, giroscópio, barômetro e sonar utilizados são apresentados.

Vale ressaltar que os quaternions foram utilizados no modelo do veículo para representar as rotações do AUV. Os quaternions, muito empregados em aplicações de *video games* e na indústria aeroespacial, são pouco utilizados na modelagem de sistemas mecânicos. Nos sistemas mecânicos, os ângulos de Euler e as matrizes de rotação são as representações do movimento de rotação mais frequentemente utilizadas. Ainda no Capítulo 2, discute-se a superioridade dos quaternions, para representar o movimento de rotação, em relação aos ângulos de Euler e as matrizes de rotação. Embora menos intuitivos do que os ângulos de Euler, os quaternions não possuem singularidades na representação da orientação, como o fenômeno de *Gimbal Lock* que acontece com os parâmetros de Euler. Comparados às matrizes de rotação, os quaternions são mais compactos, pois possuem somente quatro parâmetros frente aos nove parâmetros das matrizes de rotação. Por fim, os cálculos com rotações que empregam quaternions são mais eficientes, dado que somente utilizam operações de multiplicação e adição, diferentemente dos ângulos de Euler, que utilizam as mais dispendiosas funções trigonométricas e as caras operações de normalização das matrizes de rotação.

Parte do problema principal deste trabalho, que é o rastreamento de trajetórias, consiste na estimativa dos estados do veículo a partir do conjunto de sensores apresentados no Capítulo 2 de modelagem do veículo. No Capítulo 3 é discutido que dada a natureza não linear do mo-

do veículo submarino, as soluções que utilizam filtros lineares, como o clássico filtro de Kalman linear, não podem ser empregadas. De forma a contornar esta limitação, o variante para sistemas não lineares do filtro de Kalman, conhecido como filtro de Kalman estendido (EKF), é apresentado. O equacionamento do EKF, bem como as considerações de discretização do modelo completo do submarino para aplicação no algoritmo do EKF são apresentados. Neste trabalho, o modelo dinâmico completo para o veículo, incluindo a dinâmica de translação e de rotação, foi considerado para a fase de predição do EKF. Note que, na literatura de EKF para a estimativa de estados para veículos robóticos, usualmente os modelos da cinemática de translação e rotação são empregados. Para o problema de filtragem foi considerado que os sensores já estavam calibrados, o que simplificou muito a derivação das equações do filtro.

Outro subproblema que aparece associado ao problema de controle de trajetórias é a presença de correntes marinhas. Para que o sistema de controle seja capaz de compensar a presença de correntes marinhas, foi necessário implementar estimador para tal. Sendo assim, no Capítulo 3, a teoria de filtros complementares foi introduzida para servir como base no desenvolvimento do algoritmo de estimativa de correntes marinhas. O filtro implementado é análogo ao filtro complementar com compensação da polarização na medida, onde as correntes marinhas são equivalentes à polarização na medida dos sensores. O algoritmo implementado buscou ser o mais simples possível, sendo independente de parâmetros do sistema e baseado somente na cinemática do submarino.

No Capítulo 4, a técnica não linear de controle de linearização por realimentação associada a um rastreador linear é empregada para resolver o problema de rastreamento de trajetórias. Neste capítulo, os requisitos de desempenho desejados para o sistema de controle são apresentados. A partir dos requisitos de desempenho, a abordagem de controle em cascata foi considerada, sendo que um controlador de posição, baseado nas leis cinemáticas, gera os perfis de velocidade desejados para o rastreador de velocidade, onde é implementado o controlador de linearização por realimentação. Na implementação do algoritmo de controle, foi considerado que todos os estados e as correntes marinhas eram conhecidos, o que justifica o desenvolvimento dos filtros EKF e o estimador de correntes. Para o problema de controle foi considerado o caso de atuação completa, o que simplificou bastante os cálculos da lei de linearização por realimentação. Vale notar que a lei de controle de rastreamento de velocidades é dependente dos parâmetros do veículo, o que pode comprometer a robustez do sistema de controle.

A estrutura do controlador em cascata, desenvolvida neste trabalho, é conhecida pelo nome de controle em dois graus de liberdade. Esta estrutura genérica trata separadamente o

problema de controle de posição do controle de velocidades. Uma das grandes vantagens desta estrutura é a liberdade em projetar cada um dos controladores de forma independente. A técnica de backstepping também apresenta esta estrutura separada do controle, com funções de Lyapunov em cascata para os erros de posição e de velocidade, a partir das quais a lei de controle é extraída.

No Capítulo 5 foram apresentadas as simulações computacionais para avaliar os algoritmos e os modelos desenvolvidos. Os parâmetros do RSM, veículo autônomo submarino desenvolvido em cooperação entre o LMA-Unicamp e a ENIB-Fr, foram utilizados na simulação. Os desempenhos dos algoritmos desenvolvidos foram avaliados considerando-se a mesma trajetória em hélice, com uma variação abrupta nas correntes marinhas e as situações de realimentação de estados e de realimentação de saída.

No Caso 1, apresentado na seção 5.2, é possível avaliar o desempenho do estimador de correntes e do controlador para a situação hipotética em que todos os estados estão disponíveis. Nesta situação, foi possível verificar que o estimador de correntes, com ganhos escolhidos para uma resposta criticamente amortecida, converge rapidamente e sem sobressinal, e que quando são adicionados ruídos nas medidas, a estimativa fica no entorno do valor verdadeiro, como era de se esperar, pois o filtro é linear e os ruídos são gaussianos, e a resposta é, portanto, uma gaussiana com o valor verdadeiro das correntes como média. Ainda na seção 5.2, é possível observar o desempenho do controlador para o caso de realimentação de estados. Nesta situação, o controlador consegue fazer com que o submarino siga a trajetória com erro pequeno, apesar da implementação discreta do sistema de controle e da presença das correntes marinhas.

No Caso 2, apresentado na seção 5.3, é possível avaliar o desempenho do filtro de Kalman estendido com e sem a presença do estimador de correntes e o desempenho de todo o sistema de controle. Na primeira parte, nota-se que o EKF apresenta um bom desempenho, estimando bem os estados não medidos, e reduzindo os ruídos nos estados medidos. Na segunda parte do Caso 2, onde se considera o sistema completo sob a influência de correntes marinhas desconhecidas, nota-se que não é possível fazer o rastreamento de trajetórias com os estados estimados, pois os sensores utilizados não permitem obter a informação necessária para se estimar as correntes marinhas corretamente. Uma forma de se contornar esta limitação é de adicionar medidas da posição absoluta do veículo, como as fornecidas por um sonar, ao sistema de sensores do veículo.

## 6.1 Trabalhos futuros

Algumas perspectivas futuras para continuar com este trabalho de pesquisa são apresentadas a seguir:

- **Para a modelagem do veículo:**
  - Incluir efeitos de superfície no modelo, como a influência das ondas no modelo.
  - Implementar o efeito de correntezas variantes no tempo e com componentes rotacionais.
  - Estudar os efeitos de polarização e de ruídos não gaussianos nos modelos de sensores.
- **Para a filtragem de estados:**
  - Fazer um estudo comparativo do desempenho e da robustez do EKF implementado neste trabalho em relação ao EKF com o modelo cinemático somente.
  - Estudar os efeitos no desempenho do EKF, ao se considerar hipóteses de ruído não gaussianos nas medidas.
  - Implementar outros filtros não lineares, como o filtro de partículas ou o filtro baseado em modos deslizantes, e comparar o desempenho em relação ao EKF.
  - Estudar técnicas de robustez aplicadas ao EKF, como regras de adaptação do filtro, por exemplo.
- **Para o estimador de correntes:**
  - Integrar o estimador de correntes ao filtro de estimação de estados e comparar o desempenho com a estrutura avaliada neste trabalho.
  - Estender o filtro para o caso em que as correntes marinhas possuem componentes rotacionais.
  - Implementar o estimador não linear de correntes desenvolvido em (LEKKAS; FOSSEN, 2014), feito para o caso do movimento no plano, e estender o resultado para o movimento tridimensional.
- **Para o sistema de controle:**
  - Considerar o problema de controle de trajetórias do AUV com subatua-

ção.

- Estudar a factibilidade da existência de controladores ao se considerar o modelo não linear e a subatuação. Este é ainda um problema em aberto, com resultados preliminares apresentados no livro de (ISIDORI, 1995).
- Implementar outros controladores não lineares para comparar o desempenho, como o controle por modos deslizantes e o controle feito pela técnica de backstepping.
- Avaliar a robustez do sistema de controle ao se considerar a variação dos parâmetros do modelo do veículo, como a massa, coeficiente de arrasto e o volume do veículo, por exemplo.
- Implementar os métodos empregados em (SIEBERLING et al., 2010) para aumentar a robustez do controlador frente à variação dos parâmetros do veículo.
- Implementar os algoritmos desenvolvidos neste trabalho em linguagem *C ++* para ter o desempenho avaliado ao serem aplicados no protótipo do veículo, ainda em desenvolvimento.

## REFERÊNCIAS

ABKOWITZ, M. A. MEASUREMENT OF HYDRODYNAMIC CHARACTERISTICS FROM SHIP MANEUVERING TRIALS BY SYSTEM IDENTIFICATION. 1980. Disponível em: <<http://trid.trb.org/view.aspx?id=157366>>.

AGUIAR, A.; HESPANHA, J. Trajectory-Tracking and Path-Following of Underactuated Autonomous Vehicles With Parametric Modeling Uncertainty. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 52, n. 8, p. 1362–1379, ago. 2007. ISSN 0018-9286.

ALONGE, F.; D'IPPOLITO, F. A navigation and control algorithm for the position tracking of underwater vehicles. In: **2014 22nd Mediterranean Conference of Control and Automation (MED)**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 646–651.

ALONGE, F.; D'IPPOLITO, F.; RAIMONDI, F. M. Trajectory tracking of underactuated underwater vehicles. In: **Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 5, p. 4421–4426 vol.5.

ARULAMPALAM, M. S.; MASKELL, S.; GORDON, N.; CLAPP, T. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. **Ieee Transactions on Signal Processing**, v. 50, n. 2, p. 174–188, fev. 2002. ISSN 1053-587X. WOS:000173412600002.

AZINHEIRA, J. R.; MOUTINHO, A.; PAIVA, E. C. D. Airship Hover Stabilization Using a Backstepping Control Approach. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 29, n. 4, p. 903–914, 2006. ISSN 0731-5090. Disponível em:  
[<http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.17334>](http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.17334).

BACON, B. Quaternion-Based Control Architecture for Determining Controllability/Maneuverability Limits. In: **AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012. Disponível em:  
[<http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2012-5028>](http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2012-5028).

BAR-SHALOM, Y. **Tracking and Data Fusion: A Handbook of Algorithms**. Storrs, Conn.: Yaakov Bar-Shalom, 2011. ISBN 978-0-9648312-7-8.

BROWN, R. G. Integrated Navigation Systems and Kalman Filtering: A Perspective. **Navigation**, v. 19, n. 4, p. 355–362, dez. 1972. ISSN 2161-4296. Disponível em: <<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.2161-4296.1972.tb01706.x/abstract>>.

BUENO, J. R. A. S. S. Project AURORA: Towards an autonomous robotic airship. 2002.

CRISTI, R.; PAPOULIAS, F.; HEALEY, A. Adaptive sliding mode control of autonomous underwater vehicles in the dive plane. **IEEE Journal of Oceanic Engineering**, v. 15, n. 3, p. 152–160, jul. 1990. ISSN 0364-9059.

ELKAIM, G. H.; LIE, F. A. P.; GEBRE-EGZIABHER, D. Principles of Guidance, Navigation, and Control of UAVs. In: VALAVANIS, K. P.; VACHTSEVANOS, G. J. (Ed.). **Handbook of Unmanned Aerial Vehicles**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2015. p. 347–380. ISBN 978-90-481-9706-4 978-90-481-9707-1. Disponível em: <[http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9707-1\\_56](http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9707-1_56)>.

FALTINSEN, O. **Sea Loads on Ships and Offshore Structures**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. ISBN 978-0-521-45870-2.

FISCHER, N.; HUGHES, D.; WALTERS, P.; SCHWARTZ, E.; DIXON, W. Nonlinear RISE-Based Control of an Autonomous Underwater Vehicle. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 30, n. 4, p. 845–852, ago. 2014. ISSN 1552-3098.

FOSSEN, T. I. **Guidance and control of ocean vehicles**. [S.l.]: Wiley, 1994. ISBN 978-0-471-94113-2.

\_\_\_\_\_. **Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control: Fossen/Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2011. ISBN 978-1-119-99413-8 978-1-119-99149-6. Disponível em:

<<http://doi.wiley.com/10.1002/9781119994138>>.

HAUG, A. J. A Tutorial on Bayesian Estimation and Tracking Techniques Applicable to Nonlinear and Non-Gaussian Processes. **The MITRE Corporation**, 2005. Disponível em: <<http://www.mitre.org/publications/technical-papers/a-tutorial-on-bayesian-estimation-and-tracking-techniques-applicable-to-nonlinear-and-non-gaussian-processes>>.

HAWARY, F. E. **The Ocean Engineering Handbook**. [S.l.]: CRC Press, 2000. ISBN 978-1-4200-3673-2.

ISIDORI, A. **Nonlinear Control Systems**. 3rd. ed. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1995. ISBN 3-540-19916-0.

KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, mar. 1960. ISSN 0098-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.3662552>>.

KAMINER, I.; PASCOAL, A. M.; SILVESTRE, C. J.; KHARGONEKAR, P. P. Control of an underwater vehicle using H infin; synthesis. In: , **Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 1991**. [S.l.: s.n.], 1991. p. 2350–2355 vol.3.

KOHL, A. M.; PETTERSEN, K. Y.; KELASIDI, E.; GRAVDAHL, J. T. Planar Path Following of Underwater Snake Robots in the Presence of Ocean Currents. **IEEE Robotics and Automation Letters**, v. 1, n. 1, p. 383–390, jan. 2016. ISSN 2377-3766.

LAM, B. **A Mini Sub Made From Cheap Parts Could Change Underwater Exploration**. 2012. Disponível em: <<http://bits.blogs.nytimes.com/2012/05/28/a-mini-sub-made-from-cheap-parts-could-change-underwater-exploration/>>.

LAMB, H. **Hydrodynamics**. Cambridge [Eng.] : University Press, 1932. Disponível em: <<http://archive.org/details/hydrodynamics00horarich>>.

LEE, D.; KIM, H. J.; SASTRY, S. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for

a quadrotor helicopter. **International Journal of Control, Automation and Systems**, v. 7, n. 3, p. 419–428, maio 2009. ISSN 1598-6446. Disponível em:  
<http://link.springer.com/article/10.1007/s12555-009-0311-8>.

LEKKAS, A.; FOSSEN, T. Trajectory tracking and ocean current estimation for marine underactuated vehicles. In: **2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 905–910.

LÉVINE, J. On necessary and sufficient conditions for differential flatness. **Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing**, v. 22, n. 1, p. 47–90, dez. 2010. ISSN 0938-1279, 1432-0622. Disponível em:  
<http://link.springer.com/article/10.1007/s00200-010-0137-x>.

LÉVINE, J.; NGUYEN, D. V. Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices. **Systems & Control Letters**, v. 48, n. 1, p. 69–75, jan. 2003. ISSN 0167-6911. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691102002578>.

MADGWICK, S. O. H.; HARRISON, A. J. L.; VAIDYANATHAN, R. Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm. In: **2011 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1–7.

MAHONY, R.; HAMEL, T.; MORIN, P.; MALIS, E. Nonlinear complementary filters on the special linear group. **International Journal of Control**, v. 85, n. 10, p. 1557–1573, out. 2012. ISSN 0020-7179. Disponível em:  
<http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2012.693951>.

MCGOOKIN, E. W. Reconfigurable sliding mode control for submarine manoeuvring. In: **MTS/IEEE Conference and Exhibition OCEANS, 2001**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 3, p. 1775–1782 vol.3.

MINORSKY, N. Directional stability of automatically steered bodies. **Journal of the American Society for Naval Engineers**, Blackwell Publishing Ltd, v. 34, n. 2, p. 280–309,

1922. ISSN 1559-3584. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.1111/j.1559-3584.1922.tb04958.x>>.

MIRANDA, C. S.; FERREIRA, J. V. Greedy Calibration of the Rotation Between Sensor and Body Frame Without External References. In: ABCM. **International Congress of Mechanical Engineering**. [S.l.], 2013.

MIRANDA, J. V. F. C. S. Sensor and Body Frames Rotation Calibration Through Attitude Restriction. **IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)**, v. 19, 2014.

MOORMAN, M.; BULLOCK, T. Mathematical analysis of bias in the extended Kalman filter. In: , **Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 1991**. [S.l.: s.n.], 1991. p. 2733–2737 vol.3.

MOUTINHO, A.; AZINHEIRA, J. Stability and Robustness Analysis of the AURORA Airship Control System using Dynamic Inversion. In: **Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005**. [S.l.: s.n.], 2005. p. 2265–2270.

NAG, A.; PATEL, S. S.; KISHORE, K.; AKBAR, S. A. A robust H-infinity based depth control of an autonomous underwater vehicle. In: **2013 International Conference on Advanced Electronic Systems (ICAES)**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 68–73.

NETO, A. d. M. **Embedded visual perception system applied to safe navigation of vehicles**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Barão Geraldo, 2011.

PASCOAL, A.; KAMMINER, I.; OLIVEIRA, P. Navigation system design using time-varying complementary filters. In: . IEEE, 1998. v. 2, p. 1099–1104. ISBN 0-7803-4104-X. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=721627>>.

QUATERNIONS and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 2002. ISBN

978-0-691-10298-6.

RHIF, A.; KARDOUS, Z.; BRAIEK, N. B. H. A High Order PID-Sliding Mode Control: Simulation on a Torpedo. In: LIU, L.; ZHU, Q.; CHENG, L.; WANG, Y.; ZHAO, D. (Ed.). **Applied Methods and Techniques for Mechatronic Systems**. Springer Berlin Heidelberg, 2014, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, 452). p. 145–158. ISBN 978-3-642-36384-9 978-3-642-36385-6. DOI: 10.1007/978-3-642-36385-6\_7. Disponível em: <[http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-36385-6\\_7](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-36385-6_7)>.

RODRIGUES, L.; TAVARES, P.; PRADO, M. G. d. S. Sliding mode control of an AUV in the diving and steering planes. In: **OCEANS '96. MTS/IEEE. Prospects for the 21st Century. Conference Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1996. v. 2, p. 576–583 vol.2.

SABATINI, A. M. Quaternion-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 53, n. 7, p. 1346–1356, jul. 2006. ISSN 0018-9294.

**SANTHAKUMAR, M.; ASOKAN, T. A Self-Tuning Proportional-Integral-Derivative Controller for an Autonomous Underwater Vehicle, Based On Taguchi Method.** 2010.

SIEBERLING, S.; CHU, Q.; MULDER, J. Robust flight control using incremental nonlinear dynamic inversion and angular acceleration prediction. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 33, n. 6, p. 1732–1742, 2010.

SIRA-RAMÍREZ, H. **Control de sistemas no lineales: linealización aproximada, extendida, exacta.** [S.l.]: Pearson Educación, 2005. ISBN 978-84-205-4449-6.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **Applied Nonlinear Control.** [S.l.]: Prentice Hall, 1991. ISBN 978-0-13-040890-7.

SOUZA, E. C. d. **Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados.** Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

TAYEBI, A.; MCGILVRAY, S. Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot. In: **43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004. CDC.** [S.l.: s.n.], 2004. v. 2, p. 1216–1221 Vol.2.

THRUN, S.; BURGARD, W.; FOX, D. **Probabilistic Robotics (Intelligent Robotics and Autonomous Agents)**. [S.l.]: The MIT Press, 2005. ISBN 0262201623.

VEGA, O. C. E. P. AUV Propulsion Systems Modeling Analysis. **International Review on Modelling and Simulations**, v. 7, n. 5, p. 827–837, 2014. ISSN 1974-983X.

WAN, E.; MERWE, R. V. D. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: **Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000.** [S.l.: s.n.], 2000. p. 153–158.

WANG, Z. D.; YANG, F. W.; HO, D. W. C.; LIU, X. H. Robust H-infinity filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements. **Ieee Transactions on Signal Processing**, v. 54, n. 7, p. 2579–2587, jul. 2006. ISSN 1053-587X. WOS:000238707900010.

WEINBLUM, G.; DENIS, M. S. **On the motions of ships at sea.** [S.l.]: SNAME, 1950.

## APÊNDICE A

### A.1 Quaternions

Esta seção apresenta o que são quaternions e algumas de suas propriedades utilizadas neste trabalho. Para o leitor interessado existe uma bibliografia extensa sobre o tema de quaternions e suas aplicações, que pode ser encontrada em (QUATERNIONS..., 2002) para contextualização e aplicações em realidade virtual e indústria aeroespacial e para a aplicação de quaternions em sistemas de controle boas introduções seriam (BACON, 2012) e (MAHONY et al., 2012) e (TAYEBI; MCGILVRAY, 2004).

Os quaternions podem ser definidos como números hipercomplexos compostos de quatro parâmetros, com uma parte real e três imaginárias

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_0 \\ \mathbf{a}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T \\ &= a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde  $a_0 \in \mathbb{R}$  é a parte real ou escalar do quaternion, e  $\mathbf{a}_v \in \mathbb{R}^3$  é a parte vetorial associada ao quaternion  $\mathbf{a}$ , com  $i, j$  e  $k$  versores unitários que compõem uma base ortonormal para o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ .

Os números imaginários com norma unitária podem ser utilizados para representar rotações de vetores em  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo, suponha o número imaginário de norma unitária representado na forma polar  $Z$  e decomposto na forma de par ordenado utilizando a identidade de Euler, e um vetor  $\mathbf{v} = [x,y]^T$  que pode ser associado à um número imaginário  $V$  com parte real associada à abscissa e parte imaginária associada à ordenada

$$\begin{aligned} Z &= e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \\ \mathbf{v} &= [x,y]^T \Rightarrow V = x + jy \end{aligned}$$

Ao se multiplicar<sup>1</sup> os dois números imaginários,

$$Z \otimes V = V' = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta)) + j(x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$$

e ao representar o resultado da multiplicação na forma vetorial, pode-se observar abaixo que o novo vetor  $v'$  nada mais é do que o vetor original  $v$  rotacionado de um ângulo  $\theta$ .

$$\begin{aligned} v' &= \begin{bmatrix} x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, a multiplicação de um vetor em  $\mathbb{R}^2$  por um número imaginário unitário equivale a rotacionar o vetor por um ângulo igual ao argumento ou fase do número imaginário. Sendo assim, pode-se mostrar que dada uma matriz de rotação em  $\mathbb{R}^2$  é possível encontrar um número imaginário associado à matriz que represente a mesma rotação.

Foi a partir dessa propriedade de números imaginários representarem rotações no plano, que Hamilton, após anos tentando resolver o problema de encontrar números complexos de maior dimensão e que representassem a rotação para o espaço  $\mathbb{R}^3$ , descobriu os quaternions e sua álgebra não comutativa.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

A multiplicação entre dois quaternions  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , denotada por  $\otimes$  pode ser dada por

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) \quad (\text{A.2})$$

$$+ i(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) \quad (\text{A.3})$$

$$+ j(a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1) \quad (\text{A.4})$$

$$+ k(a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0) \quad (\text{A.5})$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 b_0 - \langle \mathbf{a}_v, \mathbf{b}_v \rangle \\ a_0 \mathbf{b}_v + b_0 \mathbf{a}_v + \mathbf{a}_v \times \mathbf{b}_v \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

onde, na forma compacta acima,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno e  $\times$  é o produto vetorial.

Escrever o produto entre quaternions da forma acima, como produtos internos e vetoriais

---

<sup>1</sup>Onde a multiplicação entre números imaginários é dada pelo símbolo  $\otimes$

não é muito conveniente, mesmo para implementação computacional. Pensando nisso, a multiplicação entre quaternions foi escrita de forma que um dos quaternions é representado como matriz e a multiplicação matricial pode ser feita. Considerando o quaternion da esquerda como matriz

$$[\mathbf{a} \otimes] = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Ou o quaternion da direita como matriz

$$[\otimes \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

sendo que a multiplicação dessas matrizes ocorre à direita do quaternion não matricial:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [\mathbf{a} \otimes]b = [\otimes \mathbf{b}]a$$

Observe que para os quaternions unitários estas duas matrizes são ortonormais, visto que suas colunas são as componentes do quaternion e também são independentes entre si pois são combinações diferentes das componentes do quaternion. Sendo assim, é possível escrever as seguintes relações de ortogonalidade entre as matrizes, que serão úteis na síntese das leis de controle:

$$[\mathbf{a} \otimes]^T [\mathbf{a} \otimes] = [\mathbf{a} \otimes] [\mathbf{a} \otimes]^T = I_4 \quad (\text{A.9})$$

$$[\otimes \mathbf{b}]^T [\otimes \mathbf{b}] = [\otimes \mathbf{b}] [\otimes \mathbf{b}]^T = I_4 \quad (\text{A.10})$$

Analogamente aos números complexos, o conjugado de um quaternion  $a$  pode ser dado por:

$$\mathbf{a}^* = a_0 - ia_1 - ja_2 - ka_3$$

A norma do quaternion é similar à norma euclidiana de vetores:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\Re(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^*)} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}}$$

onde  $\Re(\cdot)$  é o operador que toma somente a parte real do quaternion operado.

O recíproco é o quaternion tal que  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^{-1} = 1$ , o que resulta na forma abaixo:

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}^*}{\|\mathbf{a}\|}$$

## A.2 Quaternions e Rotações no Espaço

Os quaternions de interesse para este trabalho são os que possuem norma unitária, pois são úteis na representação de rotações no espaço tridimensional. A seguir, apresentam-se algumas definições sobre rotações no espaço e a relação entre elas e os quaternions. Um resultado importante sobre rotações no espaço é o teorema da rotação de Euler.

**Teorema A.1.** *Quando uma esfera é movida ao redor de seu centro, é sempre possível de encontrar um diâmetro o qual a direção na posição movida é o mesmo que na posição inicial.*

O que significa que qualquer mudança na orientação de um corpo, mesmo que com rotações sucessivas, pode ser representada por uma única rotação sobre um eixo, conhecido como polo de Euler. Como apresentado por (FOSSEN, 2011), considere a rotação com ângulo  $\theta^2$  de um vetor  ${}^T\mathbf{c}$  representado no referencial  $\mathcal{I}$  e dado o vetor unitário  ${}^T\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$  paralelo ao eixo de rotação, o vetor rotacionado  ${}^T\mathbf{c}'$  fica

$${}^T\mathbf{c}' = \cos(\theta){}^T\mathbf{c} + \sin(\theta)({}^T\boldsymbol{\gamma} \times {}^T\mathbf{c}) + (1 - \cos(\theta))\langle {}^T\boldsymbol{\gamma}, {}^T\mathbf{c} \rangle {}^T\boldsymbol{\gamma} \quad (\text{A.11})$$

Analogamente aos números complexos, pode-se encontrar um quaternion  $\mathbf{q}$  unitário associado à operação de rotação de um ângulo  $\theta$  ao redor do eixo de rotação  ${}^T\boldsymbol{\gamma}$  apresentada na equação A.11:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ {}^T\boldsymbol{\gamma} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Reescrevendo o vetor  ${}^T\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T$  na forma de quaternion  $\mathbf{c} = [0, c_1, c_2, c_3]^T$ , a mesma

---

<sup>2</sup>Sempre seguindo a regra da mão direita!

rotação descrita em A.11 pode ser dada em termos do produto entre quaternions

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' &= \mathbf{q} \otimes {}^{\tau}\mathbf{c} \otimes \mathbf{q}^{-1} \\ &= \mathbf{q} \otimes {}^{\tau}\mathbf{c} \otimes \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$= (-\mathbf{q}) \otimes {}^{\tau}\mathbf{c} \otimes (-\mathbf{q}^*) \quad (\text{A.14})$$

em que  $\mathbf{c}'$  é o quaternion associado ao vetor rotacionado  ${}^{\tau}\mathbf{c}'$ . Observe que, a partir das equações A.13-A.14 é possível notar a ambiguidade na representação de rotações por meio de quaternions, dado que  $\mathbf{q}$  e  $-\mathbf{q}$  representam a mesma rotação. Outra forma de ver essa propriedade é, por exemplo, que uma rotação de  $\frac{\theta+2\pi}{2}$  ao redor do eixo  ${}^{\tau}\boldsymbol{\gamma}$  é o mesmo que uma rotação de  $\frac{\theta}{2}$  no mesmo eixo, e substituindo na equação A.12

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta+2\pi}{2}) \\ {}^{\tau}\boldsymbol{\gamma} \sin(\frac{\theta+2\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\frac{\theta}{2}) \\ -{}^{\tau}\boldsymbol{\gamma} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} = -\mathbf{q}$$

O que novamente chega à mesma conclusão que anteriormente, de que os quaternions  $\mathbf{q}$  e  $-\mathbf{q}$  representam a mesma rotação.

Observe que apesar de representarem a mesma orientação, o quaternion que possuir parte real positiva será sempre o quaternion que representará o menor movimento de rotação para um objeto. Esta propriedade é muito importante ao se considerar a equação do erro para o problema de controle, dado que sempre é preferível escolher a menor rotação possível para fazer com que o veículo siga a trajetória desejada.

### A.3 Representação de Orientação entre Referenciais

Os quaternions de norma unitária são úteis para representar transformações de rotação entre dois referenciais. Uma notação que se pode adotar é de que o quaternion  ${}^{\tau}\mathbf{q}_B$  representa a orientação do referencial  $B$  em relação ao referencial  $I$

$${}^{\tau}\mathbf{q}_B = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ {}^{\tau}\boldsymbol{\lambda} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}$$

onde o referencial  $\mathcal{I}$  sofre uma rotação ao redor do vetor  ${}^T\boldsymbol{\lambda}$  de um ângulo  $\theta$  até alinhar-se com o referencial  $\mathcal{B}$ . Uma consequência interessante é que o versor no qual a rotação é feita ao redor possui coordenadas idênticas nos dois referenciais, visto que ele é invariante no processo de rotação.

O recíproco do quaternion unitário acima pode ser escrito como  ${}^T\mathbf{q}_{\mathcal{B}}^{-1} = {}^T\mathbf{q}_{\mathcal{B}}^*$  e representa a orientação do referencial  $\mathcal{I}$  em relação ao referencial  $\mathcal{B}$ , sendo dado por  ${}^B\mathbf{q}_{\mathcal{I}}$ . Assim, quando estes dois quaternions são multiplicados, o que se obtém é o quaternion que representa a orientação de  $\mathcal{I}$  com relação à ele mesmo ou de  $\mathcal{B}$  com relação à ele mesmo, dado nas equações respectivamente

$$\begin{aligned} {}^T\mathbf{q}_{\mathcal{B}} \otimes {}^B\mathbf{q}_{\mathcal{I}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \text{Orientação de } \mathcal{I} \text{ com } \mathcal{I} \\ {}^B\mathbf{q}_{\mathcal{I}} \otimes {}^T\mathbf{q}_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \text{Orientação de } \mathcal{B} \text{ com } \mathcal{B} \end{aligned}$$

A partir de agora, e em todo o texto, o quaternion que representa a orientação entre os referenciais local  $\mathcal{B}$  e o inercial  $\mathcal{I}$  será denotado por

$$\mathbf{q} = {}^T\mathbf{q}_{\mathcal{B}} \quad (\text{A.15})$$

#### A.4 Erro de Orientação entre Quaternions

Em sistemas retroalimentados, em especial os que têm como objetivo o seguimento de trajetória, a medida do erro é essencial para que o controlador saiba tomar a decisão correta sobre qual ação tomar para fazer com que o sistema controlado siga a trajetória o mais próximo possível. Quando se utiliza ângulos de Euler para representar a orientação, o erro de orientação pode ser dado pela diferença entre os ângulos da orientação desejada e da orientação atual. Para os quaternions a forma de obter o erro de orientação é bem menos intuitiva, visto que as componentes do quaternion não possuem nenhum significado imediato por si só, e a saída é recorrer à álgebra de quaternions para extrair a informação do erro que se deseja.

Suponha que  $\mathbf{q}$  represente a orientação real do veículo e que  $\mathbf{q}_d$  represente a orientação

desejada. O quaternion que representa a diferença de orientação entre a real e a desejada é dado por:

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q}_d \quad (\text{A.16})$$

sendo que o erro de orientação é nulo quando  $\mathbf{q}_e = [1,0,0,0]^T$ . Por fim, vale ressaltar que o menor ângulo de rotação entre os quaternions que representam a orientação atual e a desejada pode ser dado por

$$\theta_e = 2 \arccos(|q_e(0)|) \quad (\text{A.17})$$

Onde emprega-se a função módulo notando que a mesma rotação pode ser representada por dois quaternions, como falado anteriormente, e a menor diferença angular é sempre dada pelo quaternion que possua a parte real positiva.

## A.5 Equação Cinemática dos Quaternions

Para deduzir a equação da cinemática, considere o quaternion unitário  $\mathbf{q}$  que associa os referenciais local  $\mathcal{B}$  e inercial  $\mathcal{I}$  e um vetor genérico  $\mathbf{a}$  que é representado nos dois referenciais. A relação entre sua representação nos dois referenciais é dada pela transformação de rotação dada pelo produto entre quaternions:

$${}^{\mathcal{T}}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{q} \otimes {}^{\mathcal{B}}\bar{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{q}^* \quad (\text{A.18})$$

onde  ${}^{\mathcal{T}}\bar{\mathbf{a}}$  e  ${}^{\mathcal{B}}\bar{\mathbf{a}}$  são as representações em quaternion do vetores  ${}^{\mathcal{T}}\mathbf{a}$  e  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{a}$ , respectivamente. Ao se diferenciar no tempo a equação acima:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{T}}\dot{\bar{\mathbf{a}}} &= \dot{\mathbf{q}} \otimes {}^{\mathcal{B}}\bar{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{q} \otimes {}^{\mathcal{B}}\bar{\mathbf{a}} \otimes \dot{\mathbf{q}}^* \\ &= \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* \otimes {}^{\mathcal{T}}\bar{\mathbf{a}} + {}^{\mathcal{T}}\bar{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}^* \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Como o quaternion é unitário,  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = 1$ , tem-se:

$$\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}^* = 0 \quad (\text{A.20})$$

e ao substituir esse resultado em (A.19):

$${}^T \dot{\bar{a}} = \dot{q} \otimes q^* \otimes {}^T \bar{a} - {}^T \bar{a} \otimes \dot{q} \otimes q^* \quad (\text{A.21})$$

A partir da definição da multiplicação entre quaternions dada pela equação (A.2), escreve-se:

$$\dot{q} \otimes q^* = \begin{bmatrix} \langle \dot{q}, q \rangle \\ -\dot{q}_0 q_v + q_0 \dot{q}_v - \dot{q}_v \times q_v \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Note que se  $\|q\| = 1$ , então sua derivada no tempo será sempre ortogonal ao quaternion e por tanto o produto interno é nulo,  $\langle \dot{q}, q \rangle = 0$ , o que significa que a parte escalar do quaternion é nula. Reescrevendo a equação acima, onde  $\alpha$  está claramente definido:

$$\dot{q} \otimes q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo a relação acima na equação (A.21), lembrando que a parte real de  $\bar{a}$  é nula, pode-se escrever:

$${}^T \dot{\bar{a}} = \begin{bmatrix} -\langle \alpha, {}^T a \rangle \\ \alpha \times {}^T a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\langle {}^T a, \alpha \rangle \\ {}^T a \times \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \times {}^T a \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Sendo assim, a derivada do vetor  ${}^T a$  pode ser escrita como:

$${}^T \dot{a} = 2\alpha \times {}^T a \quad (\text{A.26})$$

A mesma derivada do vetor, considerando que ele sofre somente rotação pura e que o vetor velocidade angular é constante e vale  ${}^T w$ :

$${}^T \dot{a} = {}^T w \times {}^T a \quad (\text{A.27})$$

Comparando as equações (A.26) e (A.27) :

$${}^T\mathbf{w} = 2\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{A.28})$$

escrevendo o resultado acima no formato de quaternion:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^T\mathbf{w} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$${}^T\overline{\mathbf{w}} = 2\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* \quad (\text{A.30})$$

A partir da equação acima a equação diferencial de evolução temporal do quaternion de orientação  $\mathbf{q}$  pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} {}^T\overline{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{q} \quad (\text{A.31})$$

Uma forma mais conveniente da equação acima é escrevê-la em termos do vetor de velocidade angular representado no referencial local  $\mathcal{B}$ , dado que em sistemas reais este vetor é medido no referencial local. Logo:

$${}^T\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{q} \otimes {}^B\overline{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{q}^* \quad (\text{A.32})$$

Substituindo a relação acima na equação de cimemática entre o quaternion e a velocidade angular (A.33)

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes {}^B\overline{\mathbf{w}} \quad (\text{A.33})$$

Lembre de que a equação acima pode ser escrita matricialmente:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} [\mathbf{q} \otimes]^{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{w}} \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathcal{B}}\mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} {}^{\mathcal{B}}\mathbf{w} \quad (\text{A.36})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{R}_2(\mathbf{q}) {}^{\mathcal{B}}\mathbf{w} \quad (\text{A.37})$$

O que resulta na conhecida fórmula da evolução temporal do quaternion de orientação com a velocidade angular do corpo:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_2(\mathbf{q}) {}^{\mathcal{B}}\mathbf{w} \quad (\text{A.38})$$

## A.6 Ortogonalidade das Matrizes da Cinemática

Uma propriedade importante da matriz da cinemática de quaternions é a sua ortogonalidade, principalmente no desenvolvimento das leis de controle. Na equação(A.9) foi mostrado que as matrizes de multiplicação à direita e à esquerda são ortogonais, então é possível dizer que a matriz  $\mathbf{R}_2(\mathbf{q})$  possui a seguinte propriedade:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{q})^\top \mathbf{R}_2(\mathbf{q}) = I_3 \quad (\text{A.39})$$

dado que  $I_3$  é a matriz identidade de ordem 3.

## A.7 Quaternions e ângulos de Euler

É possível relacionar os ângulos de Euler e quaternions em termos de multiplicação de quaternions.

Inicialmente, considere rotações simples e isoladas nos eixos  $X, Y, Z$  com ângulos  $\phi, \theta$  e  $\psi$ , respectivamente. Os quaternions referentes a cada uma destas rotações podem ser dados por:

$$\mathbf{q}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Ao se compor a três rotações em sequência, por exemplo,  $XYZ$ , se obtém os ângulos de Euler e as rotações recebem os nomes de roll  $\phi$ , pitch  $\theta$  e yaw  $\psi$ . O quaternion resultante desta rotação sequencial é dado pela multiplicação sucessiva entre os quaternions de cada rotação

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\phi\theta\psi} = \mathbf{q}_\phi \otimes \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{q}_\psi \quad (\text{A.41})$$

Para a situação em que os ângulos de Euler estão próximos de zero é possível escrever que a seguinte aproximação de primeira ordem

$$\mathbf{q}_\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \delta_\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_\psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

O quaternion resultante da composição destas rotações, ao se considerar somente os termos lineares, fica

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_\phi \\ \delta_\theta \\ \delta_\psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Note ainda que nesta situação de alinhamento, a componente da velocidade angular de

cada eixo influencia diretamente no valor angular do próprio eixo, ou seja  $\delta_i$  é influenciada por  $w_j$ , com  $(i,j) = \{(\phi,x), (\theta,y), (\psi,z)\}$ .

Portanto, pode-se concluir que cada componente vetorial do quaternion é influenciada principalmente pela própria velocidade angular:  $\mathbf{q}_v$  é influenciada por  $w_i$ , com  $i = x, y, z$ .

## APÊNDICE B

### B.1 Ferramentas

#### B.1.1 Cálculo vetorial: Gradiente e Matriz Jacobiana

**Definição B.1.** Se  $f(x)$  é suave, então as derivadas existem e são contínuas. A  $i$ -ésima derivada da função pode ser dada por  $f^{(i)}(x)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . O conceito de suave significa que a  $f(x)$  e suas derivadas são funções contínuas.

**Definição B.2.** Dada uma função suave  $h(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , seu gradiente é o vetor dado por

$$\nabla h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\nabla h(\mathbf{x})]_i = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

**Definição B.3.** Da mesma, é possível definir a matriz Jacobiana ou o Jacobiano associado ao campo vetorial suave  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})]_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

**Definição B.4.** Um operador é um mapeamento de um espaço vetorial em um outro espaço vetorial. Os operadores podem possuir diversas propriedades. Alguns operadores de interesse para a álgebra linear e sistemas dinâmicos são os operadores lineares.

A derivada de uma função ou campo vetorial pode ser vista como um operador linear sobre a função que mapeia a função em sua derivada correspondente.

## B.1.2 Álgebra de Lie

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos derivados da álgebra de Lie e que são de importância para o estudo de linearização por realimentação.

### B.1.2.1 Derivada direcional de Lie

**Definição B.5.** A derivada direcional ou derivada de Lie de uma função escalar  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  suave<sup>1</sup> sobre o campo vetorial suave  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função escalar dada por

$$L_{\mathbf{f}} h = \nabla h^\top(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Derivadas de Lie de ordens mais altas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}^0 h &= h \\ L_{\mathbf{f}}^i h &= L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}}^{i-1} h \quad , \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

### B.1.2.2 Produto de Lie

**Definição B.6.** Dados dois campos vetoriais suaves  $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é possível definir o colchete de Lie (Lie bracket, em inglês) ou o produto de Lie entre eles

$$ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Note que o colchete de Lie é opera sobre dois campos vetoriais e gera outro campo vetorial. O emprego recursivo dos colchetes de Lie mantendo-se o primeiro elemento na constante

---

<sup>1</sup>Neste contexto, suave significa uma função continuamente diferenciável.

pode ser escrito como

$$\begin{aligned} ad_f^0 \mathbf{g} &= \mathbf{g} \\ ad_f^i \mathbf{g} &= [\mathbf{f}, ad_f^{i-1} \mathbf{g}] \quad , \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Algumas propriedades dos colchetes de Lie, dadas em (ISIDORI, 1995), são

(i) Bilinearidade sobre o  $\mathbb{R}$ : sejam os campos suaves  $f_1, f_2, g_1$  e  $g_2$  e os escalares  $r_1$  e  $r_2$  então

$$\begin{aligned} [r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1] \\ [f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] &= r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2] \end{aligned}$$

(ii) Anti-comutatividade

$$[f, g] = -[g, f]$$

(iii) Identidade de Jacobi com a derivada de Lie: sejam os campos vetoriais  $f, g$  e a função escalar  $h(\mathbf{x})$  suaves, então

$$L_{ad_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h$$

### B.1.2.3 Transformações de coordenadas: Difeomorfismos

Outro conceito muito comum em situações de aplicação de controle não linear, em especial o controle de linearização por feedback é o de transformações genéricas de coordenadas ou de difeomorfismos.

**Definição B.7.** Uma função  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é chamada de difeomorfismo se ela é suave e se sua inversa  $\phi^{-1}$  existe e também é suave.

O caso global acontece quando o domínio  $\Omega$  consiste de todo o  $\mathbb{R}^n$ , e portanto é chamado de difeomorfismo global. Como tais transformações globais são raras, a busca para encontrar difeomorfismos locais é mais sensata, ou seja, verificar se uma dada função representa um difeomorfismo em uma região vizinha de um ponto de interesse. O seguinte resultado, uma

consequência do teorema da função implícita, permite verificar facilmente se uma função é um difeomorfismo na vizinhança de um ponto  $x_0$ .

**Lema B.1.** *Seja a função suave  $\phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida em uma região  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$ . Se a matriz Jacobiana  $\nabla\phi(\mathbf{x})$  for não singular em algum ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  da região  $\Omega$ , então  $\phi(\mathbf{x})$  é um difeomorfismo local em uma sub-região de  $\Omega$ .*

O conceito de difeomorfismo pode ser utilizado para fazer transformação de sistemas não lineares, analogamente à transformação de estados de sistemas lineares. Observe que a linearização por realimentação procura encontrar o difeomorfismo que transforma o sistema não linear em um linear.

#### B.1.2.4 Involutividade

Este é outro conceito, que não aparece na teoria de sistemas lineares, mas que é de importância no estudo de sistemas não lineares quando se aplicam técnicas de linearização por realimentação.

**Definição B.8.** *Um conjunto linearmente independente de campos vetoriais suaves  $\Delta := [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m]$  definidos em  $\mathbb{R}^n$  é dito ser **involutivo** se, e somente se, existem funções escalares  $\alpha_{ijk} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j](\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} \mathbf{f}_k \quad , \forall i, j$$

A partir da definição acima é possível ver que involutividade significa que o campo vetorial resultante do produto de Lie entre quaisquer dois campos vetoriais do conjunto  $\Delta$  pode ser representado como uma combinação linear dos campos vetoriais do próprio conjunto.

Observe que para campos vetoriais constantes, a condição da involutividade sempre é atendida. Como o produto de Lie para campos constantes é sempre nulo e escolhendo-se os  $\alpha_{ijk}$  como valores nulos a condição de involutividade é atendida

Para mais informações sobre sistemas não lineares e ferramentas de análise e síntese de problemas de controle, os seguintes livros são ótimas referências sobre o assunto: Isidori (ISIDORI, 1995) para a técnica de linearização por realimentação e Slotine (SLOTINE; LI, 1991) para uma visão geral sobre controle não linear.

## APÊNDICE C

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento da lei de controle de LR por via entrada-saída onde se utilizou o modelo não linear do veículo representado somente no referencial inercial.

O modelo não linear adotado para o problema de controle é:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}\boldsymbol{\nu} \quad (\text{C.1})$$

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -\mathbf{M}^{*-1}(\boldsymbol{\eta})\{\mathbf{C}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{g}^*(\boldsymbol{\eta})\} + \mathbf{M}^{*-1}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{B}^*(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta} \quad (\text{C.3})$$

onde o vetor de saídas foi escolhido a partir do problema de controle e as matrizes são:

- $\mathbf{M}^*(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^\dagger$ ,
- $\mathbf{C}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}[\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) - \mathbf{M}\mathbf{T}^\dagger\dot{\mathbf{T}}]\mathbf{T}^\dagger$ ,
- $\mathbf{D}^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\mathbf{T}^\dagger$ ,
- $\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  é o vetor de esforços restaurativos (2.31),
- $\mathbf{B}^*(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}\mathbf{B}$  é a matriz de entradas,
- $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\nu}^\top, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\top]^\top$  é o vetor de estados.

Como já apresentado em 4.1.1, a técnica para se encontrar a lei de controle basicamente consiste em derivar cada linha da equação de saída do sistema até que apareça ao menos uma entrada de controle. A partir do modelo C.1, a saída do sistema é:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta} \quad (\text{C.4})$$

Ao se derivar uma vez com relação ao tempo a equação acima, é possível obter a relação cinemática, ainda não possuindo entradas de controle:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (\text{C.5})$$

Para sistemas dinâmicos mecânicos, as entradas de controle são alcançáveis (ISIDORI, 1995) a partir da segunda derivada (Leis de Newton, segunda derivada da posição proporcional à força aplicada). A segunda derivada da saída fica:

$$\ddot{y} = \ddot{\eta} \quad (\text{C.6})$$

$$= -M^{*-1}(\boldsymbol{\eta})\{C^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\dot{\eta} + D^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\ddot{\eta} + g\eta\} + B^*(\boldsymbol{\eta})u \quad (\text{C.7})$$

$$= F(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{x})u \quad (\text{C.8})$$

onde se pode escrever:

$$F(\boldsymbol{x}) = -M^{*-1}(\boldsymbol{\eta})\{C^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\dot{\eta} + D^*(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta})\ddot{\eta} + g\eta\}$$

$$A(\boldsymbol{x}) = M^{*-1}(\boldsymbol{\eta})B^*(\boldsymbol{\eta})$$

A existência da lei de controle acima depende da invertibilidade da matriz  $A(\boldsymbol{x})$ . Assim, para o caso do veículo completamente atuado esta situação sempre ocorre, pois a matriz de transformação entre referenciais  $T$  sempre é não singular, possuindo pseudo-inversa  $T^\dagger$ , a matriz de inércias é não singular por construção e a matriz de entradas  $B$  também é não singular pois o veículo é completamente atuado. Logo, a partir do resultado dado pela equação C.6 é possível escrever a lei de controle que lineariza a dinâmica do sistema, já incluindo a variável virtual de controle a ser projetada  $v$

$$u = A^{-1}(\boldsymbol{x})[v - F(\boldsymbol{x})] \quad (\text{C.9})$$

Ao se substituir a lei de controle acima C.9 na equação da segunda derivada da saída C.6, é possível obter uma relação linear entrada-saída, com a saída virtual  $v$  a ser projetada:

$$\ddot{y} = v \quad (\text{C.10})$$

Ainda, note que ao se considerar a equação acima juntamente com a primeira derivada da equação de saída é possível redefinir o sistema em termos destas variáveis, ou seja, reescrever o sistema não linear (C.1) em um linear equivalente com os estados definidos por  $y$  e  $\dot{y}$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{y}} &= \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{v}\end{aligned}\tag{C.11}$$

Uma outra forma de se analisar o sistema é de não necessariamente linearizar o modelo por completo. Isso ocorre porque em um sistema real os estados do sistema são estimados, o que prejudica e muito o desempenho da lei de controle, normalmente dependente dos estados. Há também que se considerar a finitude computacional dos processadores que computam a lei de controle, visto que computadores embarcados, por mais avançados que sejam, são limitados tanto em velocidade de processamento quanto em memória de programa. Portanto, uma lei de controle complexa e que envolve o cálculo de muitas operações algébricas pode tanto ser imprecisa numericamente quanto ser de cálculo demorado, o que inviabiliza sua implementação.

Como se pode observar na lei de controle não-linear clássica apresentada acima, ela possui complexidade de operações matriciais com funções não-lineares dependentes da estimativa dos estados, o que por si só pode resultar em uma lei de controle imprecisa que prejudica muito o desempenho do veículo na operação de alguma missão. Há também o fato de que leis de controle que envolvam muitas operações matemáticas, são normalmente de cálculo demorado, o que dificulta em operações em tempo real.

Com intenção de simplificar o máximo possível na criação de uma lei de controle implementável do ponto de vista prático, buscou-se desenvolver uma lei de controle simples e que ainda garanta o cumprimento requisitos de desempenho do sistema.

O que se segue para finalizar a lei de controle para cumprir os requisitos é o projeto da lei de controle virtual  $\boldsymbol{v}$ . O projeto de uma lei de controle linear, análoga à desenvolvida no capítulo de controle 4, garante que as trajetórias desejadas sejam rastreadas. Por brevidade, seu desenvolvimento não será apresentado aqui.

## APÊNDICE D

Neste capítulo é apresentado o cálculo dos parâmetros numéricos do AUV RSM da ENIB no qual este trabalho se utilizou para as simulações computacionais.

A partir da tabela D de alguns parâmetros do veículo, pode-se calcular os demais.

Como é um cilindro, no seu *CG* temos que os momentos de inércias [ $kgm^2$ ] são

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{2}mr^2 \\ I_y &= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mL^2 \\ I_z &= I_y \\ I_{ik} &= 0, \quad i,j = x,y,z \end{aligned}$$

A matriz de inércias calculada no centro de gravidade fica:

$$I_{cg} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Utilizando o teorema dos eixos paralelos, a matriz de inércia recalculada em relação à origem do referencial  $\mathcal{B}$

$$I_{\mathcal{B}} = I_{cg} + m\mathbf{S}^\top(\mathbf{r}_{cg})\mathbf{S}(\mathbf{r}_{cg})$$

Os coeficientes da matriz de arrasto hidrodinâmico são dados abaixo, observe que o valor do coeficiente de arrasto dado na tabela 5.2, dependente do número de Reynolds, foi approximado como constante.

$$\begin{aligned} X_{u|u|} &= \frac{1}{2}\rho c_d \pi r^2 & K_{p|p|} &= \frac{1}{2}Y_{yy}c_{dc}r^3 = 0 \\ Y_{v|v|} &= \frac{1}{2}\rho c_{dc}Lr & M_{q|q|} &= \frac{1}{4}\rho c_{dc}rL^4 \\ Z_{w|w|} &= \frac{1}{2}\rho c_{dc}Lr & N_{r|r|} &= \frac{1}{4}\rho c_{dc}rL^4 \end{aligned}$$

onde o componente de arrasto do leme do veículo  $Y_{vv} = 0$  é nulo pois o veículo não possui tais estruturas. Os termos fora da diagonal são muito menores e por isso desconsiderados.

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) = \text{diag}([X_{u|u}|u|, Y_{v|v}|v|, Z_{w|w}|w|, K_{p|p}|p|, M_{q|q}|q|, N_{r|r}|r|]([Ns/m]))$$

onde  $\text{diag}(\mathbf{d})$  é uma matriz com os componentes do vetor  $\mathbf{d}$  na diagonal.

Já os componentes de massa adicionada [ $kg$ ] para um cilindro podem ser calculados a partir da teoria das faixas (FOSSEN, 1994):

$$\begin{aligned} X_{\dot{u}} &= 0.1m & K_{\dot{p}} &= 0 \\ Y_{\dot{v}} &= \pi \rho r^2 L & M_{\dot{q}} &= \frac{1}{12} \pi \rho L^3 \\ Z_{\dot{w}} &= \pi \rho r^2 L & N_{\dot{r}} &= \frac{1}{12} \pi \rho L^3 \end{aligned}$$

Novamente, os componentes fora da diagonal são desprezíveis e a matriz de massa adicionada fica:

$$\mathbf{M}_a = \text{diag}([X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}])$$

E o particionamento da matriz de massa adicionada para compor a matriz de efeitos de Coriolis e de centrípeta fica

$$M_{11} = \text{diag}([X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}]), \quad M_{12} = \mathbf{0}_3$$

$$M_{21} = \mathbf{0}_3, \quad M_{22} = \text{diag}([K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}])$$

Quanto aos atuadores, as posições e orientações foram consideradas a partir do modelo na figura 2.1, onde se considerou a aproximação de que o veículo é um cilindro. O versor de orientação ( $[m]$ ) ou direção da força dos atuadores é

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & \text{propulsores em surge} \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, & \text{propulsores em sway} \\ \mathbf{b}_5 &= \mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, & \text{propulsores em heave} \end{aligned}$$

A posição dos atuadores [m] em relação ao centróide do cilindro que compõe o submarino.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \end{bmatrix}^\top, & \mathbf{p}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 \end{bmatrix}^\top \\ \mathbf{p}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \end{bmatrix}^\top, & \mathbf{p}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \end{bmatrix}^\top \\ \mathbf{p}_5 &= \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & \mathbf{p}_6 &= \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top\end{aligned}$$

Se o centróide está a uma posição  $\mathbf{p}_c$  da origem do referencial local  $\mathcal{B}$ , então os vetores posição dos atuadores em relação ao referencial local podem ser recalculados como  ${}^B\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_i$ , em que  $i = 1, 2, \dots, 6$

A força peso [N], positiva em  $z_i$  por conta da orientação do referencial

$${}^x\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg \end{bmatrix}^\top \quad (\text{D.1})$$

Analogamente, o empuxo [N]:

$${}^x\mathbf{B} = -\gamma {}^x\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho V g \end{bmatrix}^\top$$

Embora o modelo calculado analiticamente forneça uma boa noção do comportamento do veículo, seria altamente aconselhado executar um procedimento de identificação dos parâmetros do submarino, dado que o desempenho dos algoritmos aqui desenvolvidos depende diretamente da qualidade do modelo.

## APÊNDICE E

Neste anexo é apresentada a parte dos códigos utilizados para fazer a simulação. O programa principal, onde todas as funções implementadas são chamadas é apresentado a seguir.

```

1 %% Simulation and control of an autonomous underwater vehicle
2 %% Programa Principal.
3 % Loop de simulação do modelo do veículo submarino
4 %referente à dissertação
5 % de mestrado do autor.
6 % This is the start archive for the simulation: Press F5 and be happy!
7
8 % 29/07/2016
9 %Edited by Vinicius Bomfim Falchetto
10
11
12 %% Consider OS condition;
13 %=====
14 clear all; close all; clc;
15
16 delete(gcf()); %close previous figure handle
17 %=====
18
19 if isunix
20     path(path,'./libfunc')
21     %path(path,'..\\results')
22     %filename = './results/';
23 else
24     path(path,'.\libfunc')
25     %path(path,'..\results')
26     %filename = '\results\'';
27 end
28
29 %Trajectory options
30 % 1 = sigmoidal Z descent
31 % 2 = sinusoidal; bottom sea sweep
32 % 3 = helical z descent.
33 % 4 = ENIB_JCRA
34 opcao = 3;
35
36 %% Save simulation data option
37 save_result = true;
38 save_figure = true;
39 send_email = false; % email is only sent if save_result os turned ON.
40 %% Figure Plot Options
41 fig = true;           %Plot Figures
42 animation = true;
43
44 %% —— AUV System initial condition ——
45 % The variable notation used here are based on SNAME 1950 standard
46
47 % Position: inertial frame I
48 x0 = 0;
49 y0 = -3;% Given in the inertial frame
50 z0 = 0;
51 %Orientation: aligned = [1 0 0 0]'
52 e1 =1;
53 e2 =0;
54 e3 =0;
55 e4 =0;
56 %linear speed: body frame B
57 u0 = 1.5;            % Linear velocities in the body fixed frame

```

```

58 v0 = 0;
59 w0 = 0.15;
60 % angular speed: body frame B
61 p0 = 0; %angular velocities in the body fixed frame
62 q0 = 0;
63 r0 = -0.5;
64 % System states Initial conditions
65 s = [x0 y0 z0 e1 e2 e3 e4 u0 v0 w0 p0 q0 r0]';
66
67
68 %% =====
69 %%=====
70 % Controller Initial state (Tracking error dynamics)
71 s_ctr = zeros(4,1);
72 tau = 0.0*[1 1 1 1 1]'; % initial value of force
73 % Ocean Currents Estimator Initial states
74 s_curr_est = 0*ones(6,1) +[x0 y0 z0 0.2 0.5 0]';
75 %% =====
76 %%=====
77 % Kalman Filter SETUP
78 % Initial condition
79 s_e = s ; % Dead Reckoning
80 n_states = length(s);
81 opcao_sensor = 5; % (IMU and pressure)
82 % Process COVARIANCES Q = cov_mult*diag(sigma_p)
83 cov_mult = 1e2;
84 sigma_process_pos = 1e-0*eye(3);
85 sigma_process_q = 1e-0*eye(4);
86 sigma_process_vlin = 1e-0*eye(3);
87 sigma_process_vang = 1e-0*eye(3);
88 Qekf = cov_mult*blkdiag(sigma_process_pos,sigma_process_q, ...
89 sigma_process_vlin, sigma_process_vang);
90
91 % Process Error Covariance Matrix: Wild Guess
92 P = 1e-2*eye(n_states);
93
94 % Measurement COVARIANCES
95
96 % mask for the measurements % NO!!! X Y U V W
97 % [x y z e e e u v w p q r du dv dw]
98 measured_states = [0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1];
99 n_meas_total = length(measured_states); % All sensors
100 index_measured_states = find(measured_states);
101 n_meas = length(index_measured_states); % Number of sensors used
102
103 % Measurement COVARIANCE MATRIX
104 sigma_meas_pos = 1e-1*eye(3);
105 sigma_meas_q = 1e-3*eye(4);
106 sigma_meas_vlin = 1e-1*eye(3);
107 sigma_meas_vang = 1e-1*eye(3);
108 sigma_meas_acc = 1e-4*eye(3);
109 sigma_meas_mag = 1e-4*eye(3);
110
111 % All possible measurements
112 Rekf_total = blkdiag(sigma_meas_pos,sigma_meas_q, ...
113 sigma_meas_vlin,sigma_meas_vang,sigma_meas_acc);
114
115 %Assumed CALIBRATED sensors measuring directly the system states
116 % Takes only the measurements being made
117 Rekf = Rekf_total(index_measured_states, index_measured_states);
118 % quaternion does not receive noise: keep norm to unity
119
120 noise_mask =[1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1]';
121
122 %% Simulation
123

```

```

124 %% ----- Simulation Time span
125 t_start = 0; % [s]
126 t_end = 20; % [s]
127 Ts = 0.001; % [s] Sampling: Digital part sampling time
128 tspan = t_start:Ts:t_end; % Digital Time span
129 Np = 10; % Number of simulation points
130
131
132
133 %% Load AUV data value
134 data = RSM_Init();
135 % Please, include the other parameters of simulation in this way:
136 % Other parameters of the simulation
137 data.Ts = Ts;
138 data.H_mag = [sqrt(2)/2 0 sqrt(2)/2]';
139 data.Vcx_current = 0.2; % Ocean currents Values
140 data.Vcy_current = 0.5;
141 data.Vcz_current = 0;
142 V_currents = Ocean_currents_generator(data); % constant for now.
143
144
145
146 % Simulation Loop flux control variables
147 k = 0; % Counter to follow simulation status
148 kk = 0; % Counter for Kalman time-step
149 Nc = 10; % Nc*Ts == time-step for controller
150 Nk = 10; % Nk*Ts == time-step for kalman
151 Noc = 10; % Noc*Ts == time-step for ocean currents
152 % Auxiliary variables to help when mounting the states
153 cc_columns = ones(1,Nc); % controller
154 kk_columns = ones(1,Nk); % kalman
155 oc_columns = ones(1,Noc); % ocean currents estimator
156
157 % Additional parameters
158 data.n_states = n_states;
159 data.opcao_sensor = opcao_sensor;
160 data.index_measured_states = index_measured_states;
161 data.Nk = Nk;
162 data.Ts = Ts;
163 data.Qekf = Qekf;
164 data.Rekf = Rekf;
165 data.Rekf_total = Rekf_total;
166 data.n_meas_total = n_meas_total;
167 data.noise_mask = noise_mask;
168
169 %% SAVING LOOP VARIABLES
170 s_total = [s]; % system states
171 s_ctr_total =[s_ctr]; % controller states
172 s_curr_total = [s_curr_est]; % currents estimator states
173 s_e_total = [s_e]; % EKF states
174 noise_total = [zeros(n_meas_total,1)]; % noises applied
175 tau_total = [tau]; % Stores all the controller efforts
176 tic
177 for i = 1:length(tspan)-1
178
179 %% UPDATE numerical integration counters
180 kk = kk+1; % Digital control system counter
181 t = tspan(i); % Define the time step to compute the system states.
182
183 %% SYSTEM INTEGRATION =====
184
185 %%Ocean Currents Generator
186 V_currents = Ocean_currents_generator(data); % constant for now.
187
188 if t>=10

```

```

190     data.Vcx_current = -0.5; % Ocean currents Values
191     data.Vcy_current = -0.2;
192     data.Vcz_current = 0*1.0;
193 end
194 dsdt = dynamics_ENIB_AUV(t,s,tau,V_currents,data); % system diff
195 s = s + Ts*dsdt; % Integrate the result > % Update the system
196 s(4:7) = s(4:7)./sqrt(s(4:7)'*s(4:7)); % Quaternion Normalization
197 s_total = [s_total s]; % save the system states
198 Z_meas_total = [s; dsdt(8:10)]; % measurements
199
200 %% DIGITAL SYSTEM CONTROL
201 if kk == Nk
202
203 %% =====
204
205 %% Ocean Currents Estimator
206 [eta_1_estimate, curr_est, dscurdt] = ...
207     current_estimator(s_curr_est, s_e);
208 s_curr_est = s_curr_est + Ts*Noc*dscurdt; % Integrate the OCE
209 s_curr_total = [s_curr_total ...
210     kron(s_curr_est, oc_columns)]; % Save
211
212 %% =====
213 %% MEASUREMENT: SENSORS
214 [Z_meas, noise] = sensores_ENIB_AUV(Z_meas_total, data);
215 noise_total = [noise_total kron(noise, kk_columns)];
216
217 %% EKF
218 [s_e, P] = ckf_ENIB_AUV(t,s_e,tau, s_curr_est, data, P, Z_meas);
219
220 s_e_total = [s_e_total kron(s_e, kk_columns)]; % save
221 s_est = s_e;
222
223
224 %% Trajectory Generation: still need to consider derivatives
225 desired_trajectory.ref_traj = trajectory(t,opcao);
226 desired_trajectory.ref_traj_previous = trajectory(t-Ts,opcao);
227
228 %% CONTROLLER: FEED LIN and TRAKCER
229 [tau,dsdtau] = controller_q_P_ENIB_AUV(t, s_ctr, s_est, ...
230     s_curr_est(4:6), desired_trajectory, data);
231 s_ctr = s_ctr + Ts*Nc*dsdtau; % Integrate and Update
232 s_ctr_total = [s_ctr_total kron(s_ctr, cc_columns)];
233 tau_total = [tau_total tau];
234
235 %% SET DIGITAL CONTROLLER COUNTER TO ZERO
236 kk = 0;
237 end
238
239 end
240 toc
241
242 %% =====
243
244 %% POST PROCESSING: figur as e videos
245 video_animation(tspan',s_total',opcao);
246
247 if fig == true
248     plota_figuras(tspan',s_total',tau_total',...
249                     ,opcao, save_figure, data)
250 end

```

A função que carrega os dados da simulação e os parâmetros do veículo chama-se `RSM_init()` e é apresentada a seguir

```

1 function data = RSM_Init()
2 % Function that loads the RSM AUV parameters
3 %Parameters taken from PABLO VEGA PAPER on IREMOS 2014
4 % and ICRA PAPER:
5 % AUV Propulsion Systems Modeling Analysis
6 % AUV Propulsive Topology Evaluation Tool for Optimization Purposes
7
8 % function output:
9 %           data -> struct containing robot parameters
10
11
12 % EDITED on 21/05/2016
13 %By Vinicius Bomfim Falchetto
14
15 %AUV parameters
16 rho_water = 998;          % [kg/m3] Fresh water density in 20C, 1bar
17 %rho_water = 1020;         % [kg/m3] Sea water density in 20C, 1bar, 29g/l salinity
18 rho_air = 1.198;          % [kg/m3] Air density
19 g=9.81;                  % [m/s2] Gravitational constant
20 G = [ 0 ; 0 ; g];        % [m/s2] gravitational acceleration, inertial frame.
21
22 % AUV cylinder equivalent model: to calculate the hydro force coefficients
23 %(rc,Lc)=(equivalent radius, equivalent)
24 % AUV drag force initial calculus
25 % Force = 1/2.Cd.rho_eau.area.(velocity)^2
26 % Here we do not include the velocity term
27 rc = 0.1;                 %[m] equivalent volume radius
28 Lc = 0.6;                 %[m] equivalent length
29 Cd=0.8;                  %longitudinal cylinder drag coefficient
30 Cdc=1.2;                 %cross flow drag coefficient of a cylinder
31
32 k0=[-0.5*rho_water*Cd*pi*rc^2;-rho_water*Cdc*rc*Lc;-rho_water*Cdc*rc*Lc];
33 l0=[-0.388022;-rho_water*Cdc*rc*(Lc^4)/4;-rho_water*Cdc*rc*(Lc^4)/4];
34
35 %AUV Volume: cylinder
36 V = Lc * pi*rc^2;
37 %AUV mass: parameterized on the to the flotation 0.5% = +0.005
38 % mass = density_water*total_volume*1/(1+flotation)
39 %      =water_mass_displaced*flotation_ratio
40 m = 100*rho_water*V/100.5; %13.965 %<=100*rhoEau*V/100.5      % masse du robot [kg]
41
42 % Centre of the hull coordinates: Body fixed frame
43 cbx0=0;      % [m] actual=-0.0165;
44 cby0=0.0;    % [m]
45 cbz0=0.0;    % <=0 if not, instability risk: passive control: restoration moment
46 PbB = [cbx0;% Centre of hull vector coordinates
47       cby0;
48       cbz0];
49 % Centre of gravity CG coordinates: Body fixed frame
50 gbx=0;      % [m] actual= -0.0165m
51 gby=0.0;    % [m]
52 gbz=0.0125; % [m] actual= 0.0125 m. Has to be >=0 due to stability issues
53 PbG = [ gbx;% CG vector coordinates
54       gby;
55       gbz];
56
57 % Inertia tensor in the centre of mass G
58 Ix = 0.5*m*rc^2;
59 Iy = 0.25*m*rc^2 + (m*Lc^2)/12;
60 Iz = 0.25*m*rc^2 + (m*Lc^2)/12;
61 IG= [Ix 0 0 ;
62       0 Iy 0 ;
63       0 0 Iz ];
64
65 Ib=IG+m*S(PbG)'*S(PbG); % Inertia tensor transferred to the origin of the body fixed frame
%####Verify formula: PbB instead???

```

```

66
67 %AUV Rigid body mass matrix on air
68 Mrb = [ m*eye(3) -m*S(PbG);
69     m*S(PbG) -Ib ];
70 % AUV Added Mass and Inertia terms: Fossen table 2.2 pag 38
71 Xma0 = -0.1*m;      %[Kg] along x axis
72 Yma0 = 0.1*(-pi*rho_water*rc^2*Lc); %[Kg] along y axis
73 Zma0 = 0.1*(-pi*rho_water*rc^2*Lc); %[Kg] along z axis
74 Kma0 = 0;           %[Kgm2] x axis
75 Mma0 = -0.1*((pi*rho_water*rc^2*Lc^3)/12+(0.1*m*rc^3)*2/3); %[Kgm2] y axis
76 Nma0 = -0.1*((pi*rho_water*rc^2*Lc^3)/12+(0.1*m*rc^3)*2/3); %[Kgm2]z axis
77 MaX0=[Xma0;Yma0;Zma0]; % Added mass vector
78 MaK0=[Kma0;Mma0;Nma0]; % Added inertia vector
79
80 Ma0 = [-diag(MaX0) zeros(3); % 6x6 Added inertia matrix
81     zeros(3) -diag(MaK0) ];
82 % Total AUV mass 6x6 matrix
83 M = Mrb+Ma0;
84 %Ml0=inv(M0); % inverse of inertia matrix: for computation speed.
85
86 % AUV thrusters positions: relative the body fixed frame
87 PbP1 = [ -0.21 ;           % [m] Thruster 1 position vector
88         -0.12 ;
89         0.004];
90
91 PbP2 = [ -0.21 ;           % [m] Thruster 1 position vector
92         0.12;
93         0.004];
94
95 PbP3 = [ 0 ;               % [m] Thruster 1 position vector
96         -0.105;
97         0.085];
98
99 PbP4 = [ 0 ;               % [m] Thruster 1 position vector
100        0.105;
101        0.085];
102
103 % AUV input thruster configuration matrix
104 B_TMC = [1 1 0 0 0;
105     0 0 0 0 0;
106     0 0 1 1;
107     0 0 -PbP3(2) -PbP4(2);
108     PbP1(3) PbP2(3) PbP3(1) PbP4(1);
109     -PbP1(2) -PbP2(2) 0 0];
110
111
112
113 B = [1 1 0 0 0 0;
114     0 0 1 1 0 0;
115     0 0 0 0 1 1;
116     0 0 rc -rc 0 0;
117     0 0 0 0 Lc/2 -Lc/2;
118     rc -rc 0 0 0 0];
119
120
121 % Defining the saturation of the thrusters: max force
122 t_btd150 = 15; % mas of BTDI50 thruster
123 taumax= abs(B_TMC)*[ t_btd150;t_btd150;t_btd150;t_btd150];
124
125
126 % Interest point to track the trajectory
127 re = [0 0 0]';
128
129
130 data.rho_water = rho_water;
131 data.rho_air = rho_air;

```

```

132 data.G = G;
133 data.re = re;
134 data.Lc = Lc;
135 data.k0 = k0;
136 data.I0 = I0;
137 %fprintf('Volume [m3] \n');
138 data.V = V;
139 %fprintf('Masse [Kg] \n');
140 data.m = m;
141 % Centre of volume
142 data.cbx0 = cbx0;
143 data.cby0 = cby0;
144 data.cbz0 = cbz0;
145 data.PbB = PbB;
146 data.PbG = PbG;
147 data.Ib = Ib;
148 data.Mrb = Mrb;
149 data.Xma0 = Xma0;
150 data.Yma0 = Yma0;
151 data.Zma0 = Zma0;
152 data.Kma0 = Kma0;
153 data.Mma0 = Mma0;
154 data.Nma0 = Nma0;
155
156 data.taumax = taumax;
157 data.B_TMC = B_TMC;
158 data.re = re;
159 data.B = B;
160
161 end

```

Por razões de brevidade do documento, as demais funções não serão apresentadas. Se o leitor desejar obter os códigos fonte referentes à dissertação, favor entrar em contato pelo email [viniciusbafalqueto@gmail.com](mailto:viniciusbafalqueto@gmail.com). As funções utilizadas na simulação acima, são as equações dos algoritmos de filtragem e controle desenvolvidos neste trabalho e são dadas por

- `Ocean_currents_generator()`: função que gera as correntes marinhas.  
Neste trabalho foram assumidas constantes.
- `dynamics_ENIB_AUV()`: função que calcula as derivadas resultantes das equações dinâmicas do veículo submarino, desenvolvidas no Capítulo 2. Note que a integração da equação dinâmica ocorre no programa principal.
- `current_estimator()`: função do estimador de correntes marinhas apresentado no Capítulo 3.
- `sensores_ENIB_AUV()`: função que implementa as funções de medição do veículo submarino. As funções estão desenvolvidas no Capítulo 2. Note que foram somente consideradas as medidas da unidade inercial e do sensor de pressão.
- `ekf_ENIB_AUV()`: função que encapsula o algoritmo de filtro de Kalman estendido utilizado para a estimação de estados do veículo. A função já considera o modelo discretizado e as Jacobianas do filtro foram calculadas por meio de computação simbólica. As considerações desta função encontram-se no Capítulo 3.

- `trajectory()`: função que fornece as informações da trajetória helicoidal utilizada na simulação. Pode incluir outras trajetórias de referência, a serem selecionadas pelo parâmetro `opcao`.
- `controller_q_p_ENIB_AUV()`: função que consiste no algoritmo de controle de trajetórias. Este algoritmo considera tanto o controle cinimático quanto o controle de velocidades por linearização via realimentação. As linhas de código são transcrições das equações apresentadas no Capítulo 4.
- `video_animation()`: função que faz uma animação da trajetória percorrida pelo veículo RSM.
- `plota_figuras()`: função que cria e salva as figuras apresentadas nos resultados.