INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A regra de 3/8 de Simpson

De maneira parecida com a dedução da regra do Trapézio da regra de 1/3 de Simpson, um polinômio de lagrange de terceiro grau pode ser ajustado a quatro pontos e integrado:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

para resultar:

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$

Em que, para esse caso, h=(b-a)/3. Essa equação é conhecida como regra de 3/8 de Simpson. Ela é a terceira fórmula de integração fechada de Newton-Cotes.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A regra de 3/8 pode também ser expressa na forma:

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{largura}} \underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura média}} \qquad (8)$$

Assim, os dois pontos interiores têm pesos de três oitavos , enquanto as extemidades têm peso de um oitavo. A regra de 3/8 tem um erro de:

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

ou, como h=(b-a)/3.

$$E_t = -\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^5}{6.480} f^{(4)}(\xi) \qquad (9)$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

- **A regra de 3/8 é um pouco mais precisa que a regra de 1/3;**

- **A regra de 1/3 é usualmente o método preferido, pois alcança uma precisão de terceira ordem com 3 pontos ao invés dos 4 pontos necessários para a versão de 3/8;**

- **Entretanto, a regra de 3/8 tem utilidade quando o número de segmentos é impar.**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Use a regra de 3/8 de Simpson para integrar:

$$(a) \quad f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

De a=0 a b=0,8.

(b) Use-a em conjunto com a regra de 1/3 para integrar a mesma função usando 5 segmentos.

Solução:

(a) Uma única aplicação da regra de 3/8 exige 4 pontos igualmente espaçados:

f(0)=0,2 **f(0,2667)=1,432724**

f(0,5333)= 3,487177 **f(0,8)=0,232**

Usando a equação (8)

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8} \qquad (8)$$

$$I \cong 0,8\frac{0,2+3(1,432724+3,487177)+0,232}{8}=1,519170$$

$$E_t = 1,640533-1,519170=0,1213630 \qquad \varepsilon_t = 7,4\%$$

$$E_a = -\frac{(0,8)^5}{6480}(-2400)=0,1213630$$

(b) Os dados necessários para uma aplicação com cinco segmetos (h=0,16) são:

Solução:

f(0)=0,2 **f(0,16)=1,296919**

f(0,32)= 1,743393 **f(0,48)=3,186015**

f(0,64)=3,181929 **f(0,8)=0,232**

A integral para os primeiros dois segmentos é obtida usando-se a regra de 1/3 de Simpson:

$$I \cong (0,32)\frac{0,2+4(1,296919)+1,743393}{6} = 0,3803237$$

Para os três últimos segmentos, a regra de 3/8 pode ser usada para obter:

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8} \qquad (8)$$

$$I \cong 0,48\frac{1,743393+3(3,186015+3,181929)+0,232}{8}=1,264754$$

A integral total é calculada pela soma destes dois resultados:

$$\mathrm{I}=0,3803237+1,264754=1,645077$$

$$E_t=1,640533-1,645077=-0,00454383 \qquad \varepsilon_t=-0,28\%$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Exercício 1 – Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^4 \left(1 - e^{-2x}\right) dx$$

(a) Uma única aplicação da regra de 3/8 de Simpson;

(b) Aplicação múltipla da regra de Simpson, com n=5.