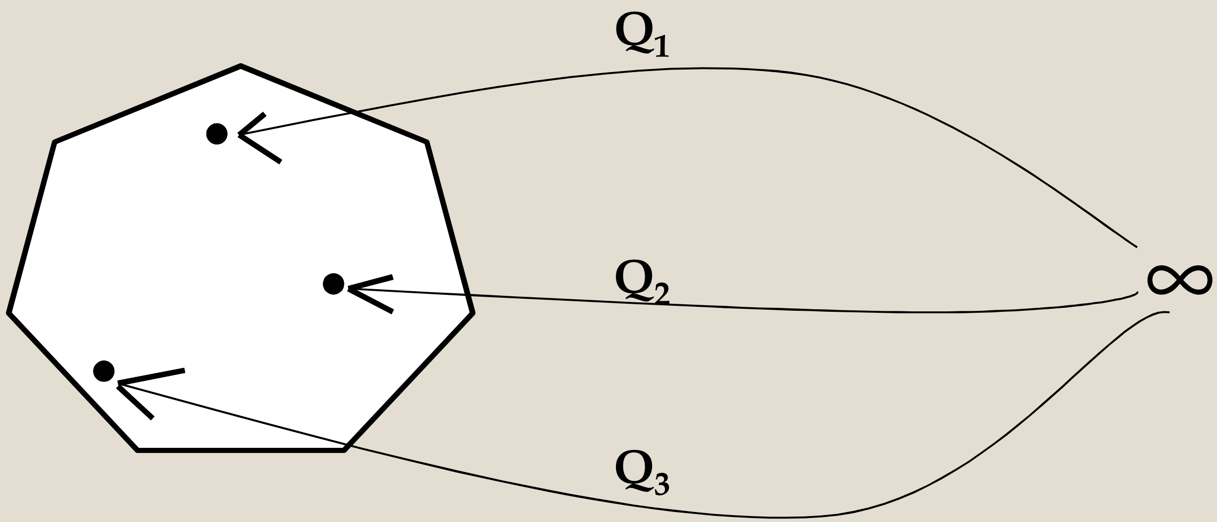
ELETROMAGNETISMO

Energia e Potencial

ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

1 – Energia (trabalho) para uma distribuição discreta de cargas



Região inicialmente sem cargas (E=0)

Nosso Problema

Para encontrar a energia potencial presente em um sistema de cargas, devemos encontrar o trabalho realizado pela fonte externa ao posicionar as cargas.

Imagine o universo vazio.

Trazer uma carga Q_1 do infinito para qualquer posição não requer trabalho, pois não há campo presente.

Energia e Potencial

ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

1 – Energia (trabalho) para uma distribuição discrete de cargas

O posicionamento de Q_2 em um ponto do campo Q_1 *requer uma quantidade de trabalho dada pelo produto da carga Q_2 pelo potencial devido a Q_1* .

Neste caso representamos o potencial por $V_{2,1}$, onde o primeiro índice indica a localização e o segundo a fonte.

Isto é: O potencial na posição de Q_2 devido a Q_1 ($V_{2,1}$).

Trabalho para posicionar $Q_2 = Q_2\, V_{2,1}$

De modo similar, podemos expressar o trabalho necessário para colocar cada carga adicional no campo de todas aquelas já presentes.

Trabalho para posicionar $Q_3 = Q_3\, V_{3,1} + Q_3\, V_{3,2}$

e assim por diante. O trabalho total é obtido pela adição de cada contribuição:
O trabalho total de posicionamento = Energia potencial do campo =

$$W_E = Q_2\, V_{2,1} + Q_3\, V_{3,1} + Q_3\, V_{3,2}$$

Energia e Potencial

ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

1 – Energia (trabalho) para uma distribuição discreta de cargas

Notando a forma de um termo representativo da equação acima, por exemplo:

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \vec{R}_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 \vec{R}_{31}}$$

Vemos que, de modo equivalente, podíamos ter escrito Q_1 $V_{1,3}$.

Energia e Potencial

ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

1 – Energia (trabalho) para uma distribuição discrete de cargas de cargas

W_E = trabalho realizado para trazer 3 cargas Q_1, Q_2, Q_3 do ∞ e de fixa-las nos pontos 1, 2 e 3, *nesta ordem*:

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W_E = 0 + Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} \qquad (1)$$

Se as 3 cargas forem fixadas na ordem inversa Q_3, Q_2, Q_1 nos pontos 3, 2 e 1, têm-se:

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1$$

$$W_E = 0 + Q_2V_{2,3} + Q_1V_{1,2} + Q_1V_{1,3} \qquad (2)$$ **(também podemos considerar como os termos equivales de (1))**

Energia e Potencial

ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

1 – Energia (trabalho) para uma distribuição discrete de cargas de cargas

Somando-se (1) e (2):

$$
\begin{aligned}
2\,W_E = {} & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3}) \\
& + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3}) \\
& + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2}) \\
& + \ldots
\end{aligned}
$$

Cada soma do pontencial entre parênteses é o potencial devido a todas as cargas, exceto, a carga do ponto onde este potencial estiver sendo calculado. Em outras, palavras,

$$(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \ldots) = V_1$$

O potencial de Q_1 devido a Q_2 e Q_3 , de onde temos:

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3)$$

para N cargas :

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_iV_i \quad [J]$$

Energia e Potencial

ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

1 – Energia (trabalho) para uma distribuição continua de carga

Para uma região com distribuição contínua de cargas, substituímos Q_i da fórmula acima pela carga diferencial **$dQ=\rho_V\, dv$** e a somatória se transforma numa integral em todo volume de cargas.

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho_V V dv$$

O trabalho também pode ser obtido em função de **E** e **D** .

Obs: São apresentados apenas os principais passos.

1- Usando-se a primeira equação de Maxwell, substitui-se ρ por seu equivalente:

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D}$$

Usando-se a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \cdot \left(V\vec{D} \right) \equiv V \left(\nabla \cdot \vec{D} \right) + \vec{D} \cdot \left(\nabla V \right)$$

Energia e Potencial

ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

1 – Energia (trabalho) para uma distribuição continua de carga

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho_V V dv = \frac{1}{2}\int_{vol}\left[\nabla\cdot\left(V\vec{D}\right) - \vec{D}\cdot\left(\nabla V\right)\right]dv$$

Usando-se o teorema da divergência. Considerando que não pode haver cargas fora do volume:

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_{S}\left(V\vec{D}\right)\cdot d\vec{S} - \frac{1}{2}\int_{vol}\left[\vec{D}\cdot\left(\nabla V\right)\right]dv$$

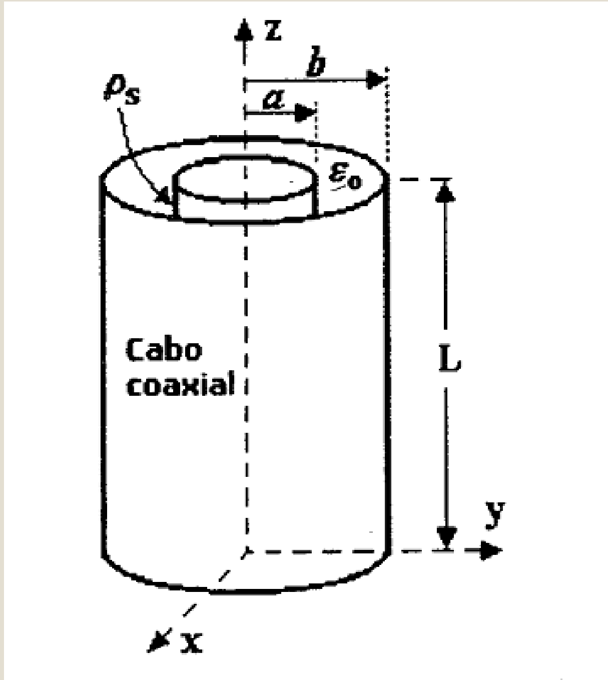
A primeira integral é zero. Sabemos que:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol}\vec{D}\cdot\vec{E}dv = \frac{1}{2}\int_{vol}\varepsilon_0 E^2 dv = \frac{1}{2}\int_{vol}\frac{D^2}{\varepsilon_0}dv$$

Energia e Potencial

Exemplo 1) Calcular a energia armazenada W_E em um pedaço de cabo coaxial de comprimento L e condutores interno e externo de raios a e b, respectivamente, supondo que a densidade superficial de carga uniforme no condutor interno é ρ_S .



Energia e Potencial

Exemplo 2) Calcular a energia armazenada W_E armazenada num capacitor de placas paralelas no vácuo, sendo V a diferença de potencial entre as placas iguais de área S e separadas por uma distância d. Supor o campo elétrico entre as placas uniforme desprezando os efeitos de borda.