EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Métodos de Runge-Kutta

Motivação: Nos dedicamos à solução de equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Valor novo = valor antigo + inclinação x tamanho do passo.

Ou em termos matemáticos:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \qquad (1)$$

De acordo com essa equação, a estimativa da inclinação ϕ é usada para extrapolar de um valor antigo y para um valor novo y em uma distância h.

Essa fórmula pode ser aplicada passo a passo para cálculos no futuro e, portanto, para percorrer a trajetória da solução.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

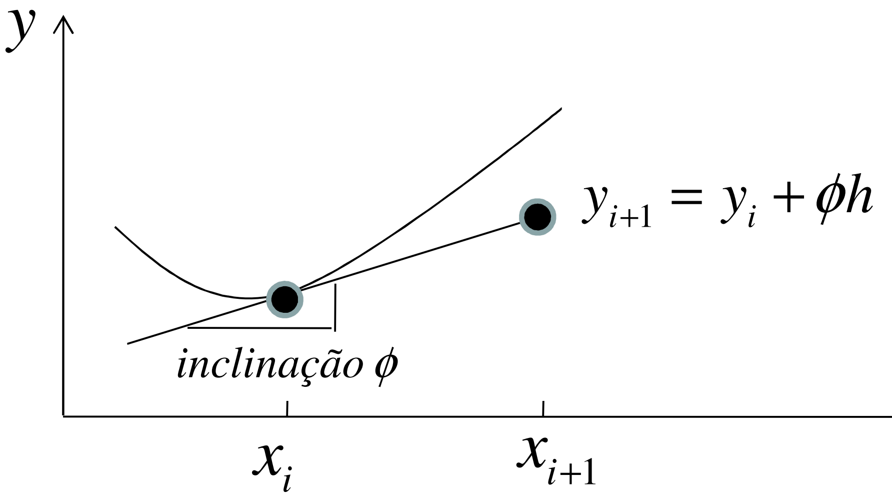
Métodos de Runge-Kutta

Todos os métodos de passo único podem ser expressos nessa forma geral, sendo que a única diferença á maneira como é feita a estimativa da inclinação.

- **Uma inclinação no início do intervalo é tomado como uma aproximação da inclinação média em todo o intervalo. Essa abordagem é chamada de método de Euler.**

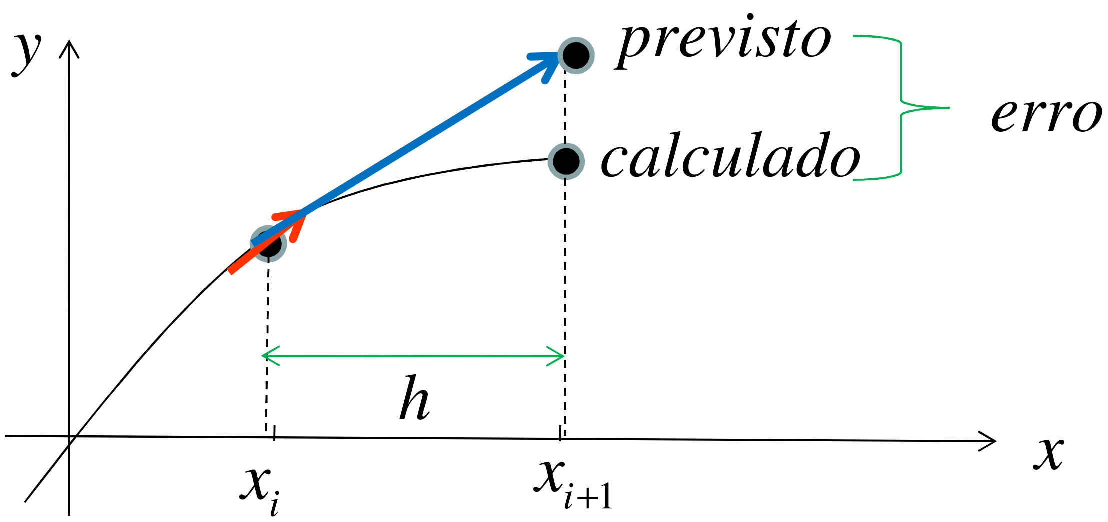
- **Outros métodos de passo único que usam estimativas alternativas da inclinação resultam em previsões mais acuradas.**

- **Todas essas técnicas são chamadas de Ruge-Kutta.**



Descrição gráfica de um método de passo

Métodos de Runge-Kutta



Método de Euler

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Método de Euler

A primeira derivada fornece uma estimativa direta da inclinação em x_i .

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

Em que f (x_i , y_i) **é equação diferencial calculada em x_i e y_i** . **Essa estimativa pode ser substituída na equação** (1).

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad (2)$$

Essa fórmula é conhecida como *método de Euler* (**ou Euler-Cauchy ou ponto inclinação**).

Um novo valor de y é previsto usando a inclinação (igual à primeira derivada no valor original de x) para extrapolar linearmente sobre um tamanho de passo h.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Método de Euler

Use o método de Euler para integrar numericamente a equação:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5$$

De x=0 a x = 4 com um tamanho de passo de 0,5. A condição inicial em x=0 é y=1. Lembre-se de que a solução exata é dada pela equação:

Aplicando a regra da integração:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq 1$$

$$y = \int (-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5)dx$$

$$y = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + 1 \qquad para\ a \quad condição \quad inicial$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Método de Euler

Solução: A equação (2) é usada para implementar o método de Euler.

$$y(0,5) = y(0) + f(0,1) \times 0,5$$

Em que y(0)=1 e a estimativa da inclinação em x=0 é:

$$f(0,1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8,5 = 8,5$$

Portanto,

$$y(0,5) = 1,0 + 8,5 \times 0,5 = 5,25$$

A solução verdadeira em x=0,5 é:

$$y = -0,5(0,5)^4 + 4(0,5)^3 - 10(0,5)^2 + 8,5(0,5) + 1 = 3,21875$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Método de Euler

Logo o erro é:

$$E_t = verdadeiro - aproximado = 3,21875 - 5,25 = -2,03125$$

Ou como um erro relativo percentual:

$$\varepsilon_t = -63,1\%$$

Para o segundo passo:

$$y(1) = y(0,5) + f(0,5 \;\; , \;\; 5,25) \times 0,5$$

$$y(1) = 5,25 + \left[-2(0,5)^3 + 12(0,5)^2 - 20(0,5) + 8,5 \right] \times 0,5 = 5,875$$

A solução verdadeira em x=1,0 é 3, e portanto o erro relativo percentual é 95,8%. Embora os cálculos capturem a tendência geral da solução verdadeira, o erro é considerável.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Método de Euler

x	$Y_{verdadeiro}$	Y_{Euler}	erro
0,0	1	1	
0,5	3,21875	5,25000	-63,1%
1,0	3,00000	5,25000	-95,8%
1,5	2,21875	5,125	131%
2,0	2,00000	4,5000	125%
2,5	2,71875	4,75000	-74,7%
3,0	4,00000	5,87500	46,9%
3,5	4,71875	7,12500	-51,0%
4,0	3,00000	7,00000	-53,0%

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Mehoria no método de Euler

Uma fonte fundamental de erro no método de Euler é que supomos que a derivada no início do intervalo pode ser usada no intervalo todo.

Método de Heun

Um método para melhorar a estimativa da inclinação envolve a determinação de duas derivadas para o intervalo – uma para o ponto inicial e outra no ponto final.

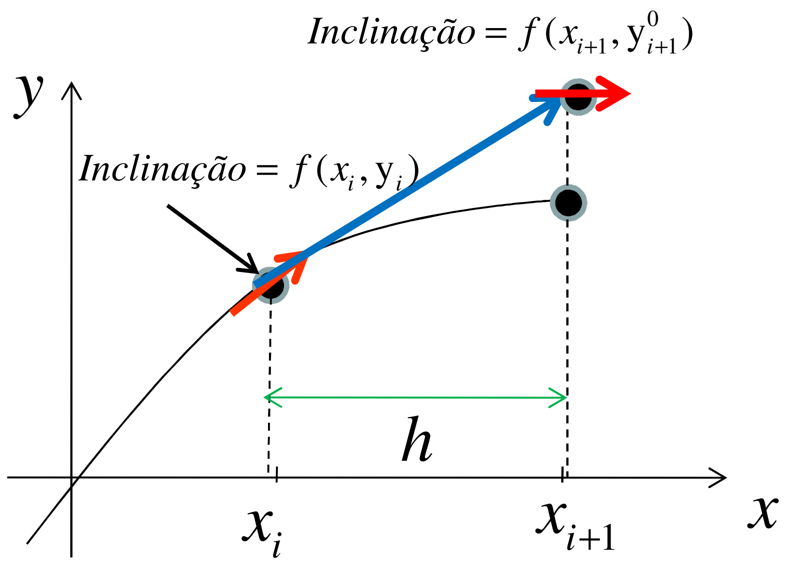
Então, é feita a média das duas derivadas para obter uma estimativa melhorada da inclinação no intervalo todo.

Essa abordagem, chamada de método de Heun, é descrita graficamente a seguir.

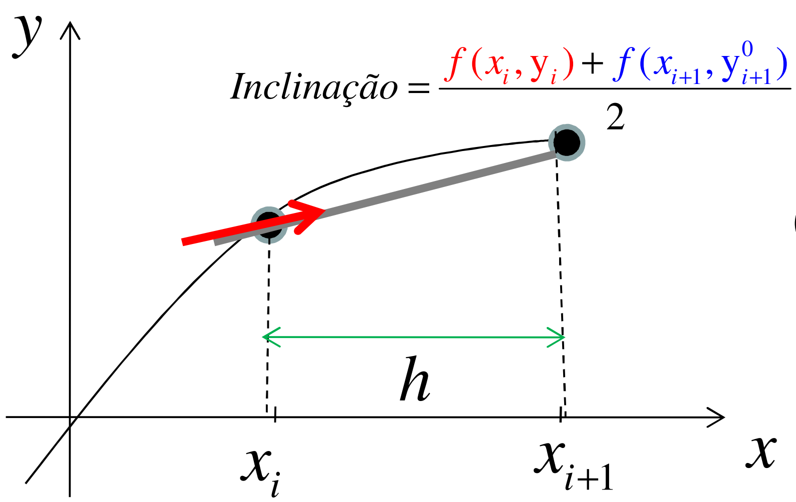
Lembre-se que, no método de Euler, a inclinação no início de um intervalo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS



(a)



(b)

Descrição Gráfica do método de Heun.
(a) Preditor
(b) Corretor

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3)$$

é usada para extrapolar linearmente para y_{i+1} :

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x, y)\,\mathrm{h} \qquad (4)$$

No método de Euler padrão, pararíamos nesse ponto. No entanto, no método de Heun, o y_{i+1}^{0} calculado na equação (4) não é a resposta final, mas uma previsão intermediária.

É por isso que o distinguimos com o sobrescrito 0.

A equação (4) é chamada de equação preditora.

Ela fornece uma estimativa de y_{+1} que permite o cálculo de uma estimativa da inclinação na extremidade final do intervalo:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0}) \qquad (5)$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Assim as duas inclinações [equações (3) e (5)] podem ser combinadas para obter uma inclinação média no intervalo:

$$\bar{y}'_{i+1} = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}$$

Essa inclinação média é então usada para extrapolar linearmente de y_i a y_{i+1} usando o método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} h$$

Que é chamada *equação corretora*.

A abordagem de Heun é uma abordagem do tipo preditor-corretor.

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{y^j_{i+1} - y^{i-1}_{i+1}}{y^j_{i+1}} \right| 100\% \quad \textit{critério de parada de métodos iterativos}$$

resultados da iteração anterior e presente

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta (RK) alcançam a precisão de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior.

Há muitas variações, mas todas podem ser postas na forma geral equação (1).

$$y_{i+1} = y_i + \phi(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i, \mathrm{h})h \qquad (6)$$

Em que $\phi(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i, \mathrm{h})$ **é chamada de função incremento, a qual pode ser interpretada como representativa da inclinação em um intervalo.**

A função incremento pode ser escrita na forma geral como:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \qquad (7)$$

Em que os a´s são constantes e os k´s são:

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Métodos de Runge-Kutta

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{6a}$$

$$k_2 = f(x_i + \mathrm{p}_1 \mathrm{h}\,,\, y_i + q_{11} k_1 \,\mathrm{h}) \tag{6b}$$

$$k_3 = f(x_i + \mathrm{p}_2 \mathrm{h}\,,\, y_i + q_{21} k_1 \,\mathrm{h} + q_{22} k_2 \,\mathrm{h}) \tag{6c}$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + \mathrm{p}_{n-1} \mathrm{h}\,,\, y_i + q_{n-1} k_1 \,\mathrm{h} + q_{n-1,2} k_2 \,\mathrm{h} + \cdots + q_{n-1,\mathrm{n}-1} k_{n-1} \,\mathrm{h}) \tag{6d}$$

Em que os p´s e os q´s são constantes. Observe que os k´s são relações de recorrência. Isto é, k_1 aparece na equação para k_2 , o qual aparece na equação para k_3 , e assim por diante.

Como cada k é um cálculo da função, essa recorrência torna os métodos RK eficientes para cálculos computacionais.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Métodos de Runge-Kutta

Vários métdos de RK podem ser deduzidos usando-se um número diferente de termos na função incremento, conforme especificado por n.

O método RK de primeira ordem n=1 , é, na realidade, o método de Euler.

Uma vez que n seja escolhido, os valores para os a´s, os p´s e os q´s são calculados igualando-se a equação (6) a termos da expansão em série de Taylor.

Por exemplo, os métodos RK de segunda ordem usam uma função incremento com dois termos (n=2).

Tais métodos serão exatos se a solução da equação diferencial ordinária for quadrática.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

A versão de segunda ordem da equação (6) é

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \qquad (7)$$

Em que

$$k_1 = f(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) \qquad (7a)$$

$$k_2 = f(\mathrm{x}_i + p_1 \mathrm{h}, \mathrm{y}_i + q_{11} \mathrm{k}_1 \mathrm{h}) \qquad (7b)$$

Os valores de a_1 , a_2 , p_1 , e q_{11} são calculados igualando-se a Equação (7) à expansão da série de Taylor até os termos de segundo grau. Fazendo isso, são deduzidas três equações para calcular as quatro constantes conhecidas:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad (8a)$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad (8b)$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \qquad (8c)$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Como temos três equações com quatro incógnitas devemos escolher um valor para uma das incógnitas para determinar as outras três. Suponha que especifiquemos um valor para a_2 . As equações de (8a) a (8c) podem ser resolvidas por:

$$a_1 = 1 - a_2 \qquad (8d)$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \qquad (8e)$$

Como podemos escolher um número infinito de valores para a_2 , existe um número infinito de métodos RK de segunda ordem.

Cada versão forneceria exatamente o mesmo resultado se a solução EDO fosse quadrática, linear ou constante.

Entretanto, elas apresentam resultados diferentes quando a solução é mais complicada.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Método Heun com um único corretor (a_2 =1/2). Se for suposto que a_2 é 1/2 , as equações (8d) e (8e) podem ser resolvidas por a_1 =1/2 e p_1 = q_{11} =1. Esses parâmetros substituídos na equação (7), fornecem:

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h \qquad (9)$$

Em que

$$k_1 = f(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i) \qquad (9a)$$

$$k_2 = f(\mathrm{x}_i + \mathrm{h}, \mathrm{y}_i + \mathrm{k}_1\mathrm{h}) \qquad (9b)$$

Observe que k_1 é a inclinação no inínico do intervalo e k_2 é a inclinação no final do intervalo. Consequentemente, esse método de segunda ordem de RK é, na realidade, a técnica de Heun sem iteração.