INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

SINAIS E SISTEMAS LINEARES

Prof. Walterley A. Moura
contato: walterley@gmail.com

1. REVISÃO

1.1 ÁLGEBRA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos (a,b) ou a+jb podem ser representados por um ponto cujas coordenadas cartesianas são (a,b) em um plano complexo. Assim, podemos considerar:

$$z = a + jb$$

Onde:

$$\operatorname{Re} z = a \quad (\text{parte real do complexo } z)$$
$$\operatorname{Im} z = b \quad (\text{parte imaginária do complexo } z)$$

Os números complexos podem ser representados em termos de coordenadas polares:

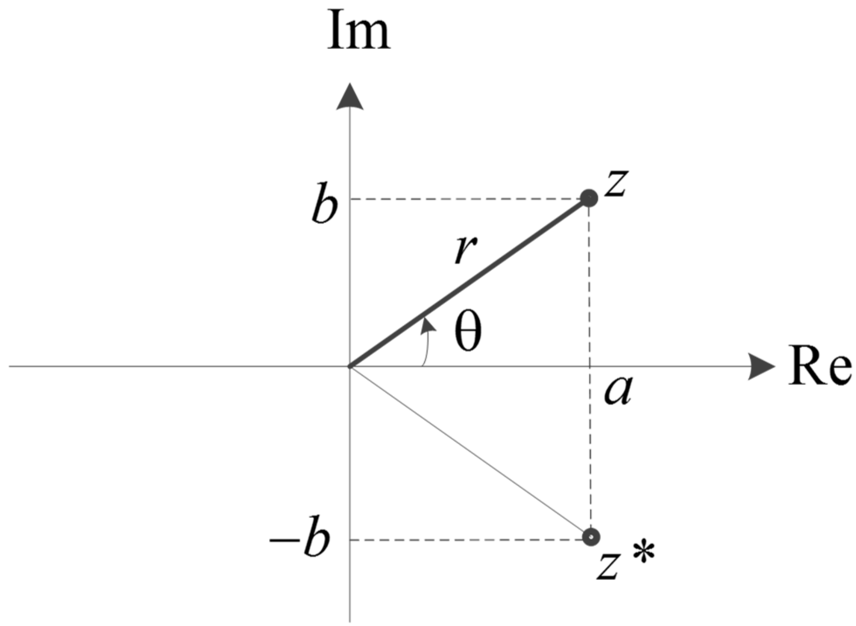

Figura 1. Representação de um número no plano complexo.

$$z = a + jb \quad (\text{complexo})$$
$$z^* = a - jb \quad (\text{conjugado})$$

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$z = a + jb = r\cos\theta + jr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$z = r\left(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$\theta = \arctan\frac{b}{a}$$

$$r = \left|z\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\theta \;\rightarrow$ argumento

$r \;\rightarrow$ módulo

Séries de Taylor e Maclaurin

Consideremos a função f(x) definida pela série de potências em (x – a)

$$f\left(x\right)=\sum a_n\left(x-a\right)^n$$

com raio de convergência $r > 0$. A função $f(x)$ tem todas as derivadas em $(a - r,\ a+r)$. Assim, obtemos:

$$f(x)=\sum_{0} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots \Rightarrow \boxed{f(a)=a_0}$$

$$f'(x)=\sum_{1} na_n\left(x-a\right)^{n-1} = a_1+2a_2\left(x-a\right)+3a_3\left(x-a\right)^2 \ldots \Rightarrow f'\left(a\right)=1a_1 \Rightarrow \boxed{a_1=f'\left(a\right)}$$

$$f''(x)=\sum_{2} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} = 2a_2+3.2a_3(x-a)+\ldots \Rightarrow f''(a)=2.1.a_2 \Rightarrow \boxed{a_2=\frac{f''(a)}{2!}}$$

$$f'''(x)=\sum_{3} n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} = 3.2a_3+4.3.2a_4.(x-a)\ldots \Rightarrow f'''(a)=3.2.1.a_3 \Rightarrow \boxed{a_3=\frac{f'''(a)}{3!}}$$

Continuando com esse processo obtemos:

$$f^{(n)}(a) = n!a_n \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$$

Desta maneira a série de potências de f(x) pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \sum_{0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad f^{(0)}(a) = f(a) = a_0$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(x) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

Esta série é chamada de **série de Taylor** da função "f" no ponto "a".

No caso particular em que $a = 0$, ou seja: $f(x) = \sum_{0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

a série é chamada de **série de Maclaurin**

OBS.: As séries de Taylor e Maclaurin são importantes pois servem para aproximar funções por polinômios numa vizinhança do ponto ***"a"***.

FÓRMULA DE EULER: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$

Demonstração da Fórmula de Euler:

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Fazendo $x = j\theta$, obtemos:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \ldots$$

$$= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos\theta = \sum_{0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \sum_{0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

Assim, temos:

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Representação do número complexo na forma cartesiana ou retangular:

$$z = a + jb$$

Representação do número complexo na forma exponencial e polar:

$$z = re^{j\theta} = r\underline{|\theta}$$

Representação do número complexo na forma trigonométrica:

$$z = r\left(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Conjugado do número complexo:

Seja o complexo $z = a + jb$

O complexo conjugado é:

(1) Forma retangular: $z* = a - jb$

(2) Forma trigonométrica: $z* = r\left(\cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$

(3) Forma exponencial: $z* = re^{-j\theta}$

PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS:

$$i)\quad z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$$

$$ii)\quad zz^* = re^{j\theta}re^{-j\theta} = r^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|^2$$

$$iii)\quad e^{\pm jk\pi} = -1, \qquad k \text{ inteiro ímpar}$$

$$iv)\quad e^{\pm j2k\pi} = 1, \qquad k \text{ inteiro}$$

$$v)\quad e^{\pm j(\theta + 2k\pi)} = e^{\pm j\theta}e^{\pm j2k\pi} = e^{\pm j\theta}, \qquad k \text{ inteiro}$$

$$vi)\quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$vii)\quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$viii)\quad e^{jk\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 1, & n = 0,4,8,12,\ldots \\ j, & n = 1,5,9,13,\ldots \\ -1, & n = 2,6,10,14,\ldots \\ -j, & n = 3,7,1,15,\ldots \end{cases}$$

OPERAÇÕES ARITMÉTICAS, POTENCIAÇÃO, RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

1) Para executara a adição e subtração, os números complexos deverão estar expressos na forma **retangular:**

2) Para executara a multiplicação os números complexos podem estar expressos na forma **retangula**r ou **polar**. Entretanto a forma **pola**r é mais conveniente

Exemplo:

Seja $X(\omega)$ uma função complexa de uma variável real ω, dada por:

$$X(\omega) = \frac{2 + j\omega}{3 + j\omega}$$

a) Determine parte real e imaginária $X(\omega)$;

b) Determine o módulo de $X(\omega)$;

c) Determine $X(\omega)$ na forma polar;

c) Fazer gráfico:

$$1)\ \left|X(\omega)\right| \times \omega$$

$$2)\ \mathrm{Re}\{X(\omega)\} \times \omega$$

$$3)\ \mathrm{Im}\{X(\omega)\} \times \omega$$

$$4)\ \mathrm{Im}\{X(\omega)\} \times \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$$

LOGARÍTMO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Temos que:

$$z = re^{j\theta} = re^{j(\theta \pm 2k\pi)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Então:

$$\ln z = \ln re^{j(\theta \pm 2k\pi)} = \ln r + j(\theta \pm 2k\pi)$$

Para k=0, o valor de ln z é chamado de valor principal de ln z, sendo representado por: **Ln z**.

Propriedades:

$$i)\ \ \ln 1 = \ln\left(1e^{\pm j2k\pi}\right) = \pm j2k\pi,\ \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$ii)\ \ \ln(-1) = \ln 1 + j(\pi \pm 2k\pi) = j(\pm 2k + 1)\pi,\ \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$iii)\ \ln j = \ln 1 + j\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right) = j\frac{4k+1}{2}\pi,\ \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$iv)\ \ j^j = e^{j\ln j} = e^{j \times j\frac{4k+1}{2}\pi} = e^{-\frac{4k+1}{2}\pi},\ \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Funções seno e cosseno podem ser expressas em termos de exponenciais utilizando a fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}$$

2. Expansão em Frações Parciais

2.1 Funções racionais

Durante a análise de sistemas lineares invariantes no tempo encontramos funções que são razões entre dois polinômios de uma certa variável. Estas funções são denominadas de **funções racionais**, que pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} = \frac{B(x)}{A(x)}$$

A função f(x) é **imprópria** se m ≥ n e **própria** se m < n. uma função imprópria pode ser sempre separada na soma de um polinômio em "x" e uma função própria.

Exemplo:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 11x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

$$f(x) = \underbrace{2x+1}_{\text{polinômio em x}} + \underbrace{\frac{x-1}{x^2+4x+3}}_{\text{função própria}}$$

2.2 Método de expansão de funções racionais próprias em frações parciais.

a) Método de Heaviside $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

a.1) Denominador Q(x) possui tem raízes distintas

Considere a função própria abaixo

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_n)}$$

Então f(x) pode ser escrita como uma soma de frações parciais

$$f(x) = \frac{k_1}{(x-p_1)} + \frac{k_2}{(x-p_2)} + \ldots \frac{k_i}{(x-p_i)} + \ldots + \frac{k_n}{(x-p_n)}$$

Para determinar o coeficiente k_i qualquer, fazemos:

$$(x-p_i)f(x) = k_1\frac{(x-p_i)}{(x-p_1)} + \frac{k_2(x-p_i)}{(x-p_2)} + \ldots \frac{k_i\cancel{(x-p_i)}}{\cancel{(x-p_i)}} + \ldots + \frac{k_3(x-p_i)}{(x-p_n)}$$

Fazendo x = p_i, temos:

$$(x-p_i)\frac{P(x)}{(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_i)\ldots(x-p_n)}\bigg|_{x=p_i} =$$

$$\frac{k_1(x-p_i)}{(x-p_1)} + \frac{k_2(x-p_i)}{(x-p_2)} + \ldots + k_i + \ldots + \frac{k_3(x-p_i)}{(x-p_n)}\bigg|_{x=p_i}$$

Assim o termo k_i é dado por:

$$k_i = (x - p_i)\, f(x)\Big|_{x=k_i} \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

a.2) Denominador Q(x) possui raízes complexas

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 18}{(x+1)(x^2 + 4x + 13)}$$

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4*13 = -36 < 0$$

$$x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 3^2$$

$$f(x) = \frac{k_1}{x+1} + \frac{k_2 x + k_1}{x^2 + 4x + 13}$$

a.3) Denominador Q(x) raízes múltiplas

$$f(x)=\frac{P(x)}{(x-\lambda)^r(x-p_1)(x-p_2)\dots(x-p_n)}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{(x-\lambda)^r}+\frac{a_1}{(x-\lambda)^{r-1}}+\dots+\frac{a_{r-1}}{x-\lambda}+\frac{k_1}{x-p_1}+\frac{k_2}{x-p_2}+\dots+\frac{k_n}{x-p_n}$$

- **Os coeficiente k_1, k_2,...,k_n são determinados pelo método de Heaviside.**

- **Para determinar o coeficiente a_o fazemos:**

$$(x-\lambda)^r f(x) = a_0 + a_1(x-\lambda) + \ldots + a_{r-1}(x-\lambda)^{r-1} +$$

$$+ \frac{k_1(x-\lambda)^r}{x-p_1} + \frac{k_2(x-\lambda)^r}{x-p_2} + \ldots + \frac{k_n(x-\lambda)^r}{x-p_n}$$

Fazendo x = λ, obtemos:

$$a_0 = (x-\lambda)^r f(x)\Big|_{x=\lambda}$$

- **Para determinar os coeficiente a_1, calculamos a derivada primeira da equação anterior de a fazemos x = λ**

$$a_1 = \frac{d}{dx}\left[(x-\lambda)^r f(x)\right]_{x=\lambda}$$

- **Se continuarmos desta maneira iremos obter:**

$$a_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}\left[(x-\lambda)^r f(x)\right]_{x=\lambda}$$

- **EXEMPLO: Expanda em frações parciais.**

$$f(x) = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+1)^3 (x+2)}$$

a.4) Frações parciais modificado

Na determinação da transformada Z inversa é necessário determinar as frações parciais na forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

as frações parciais serão obtidas expandido

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{P(x)}{xQ(x)}$$

Inicialmente, temos que transformar $f(x)$ em **função racional própria.**

4. Vetores e Matrizes

4.1 Definição

Uma entidade especificada por n números em uma certa ordem é um vetor n dimensional.

- Um vetor pode ser representado por uma linha, denominado vetor linha:

$$\vec{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

- Um vetor pode ser representado por uma coluna, denominado vetor coluna:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.2 Equações lineares simultâneas

Podem ser vistas como transformação de um vetor em outro. Sejam as "n" equações linear simultâneas:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \quad\quad\quad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

Definiremos dois vetores **x** e **y**:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

- As equações (3.1) podem ser entendidas como uma relação que transforma o vetor **x** no vetor **y**;
- Esta transformação é chamada de transformação linear de vetores;
- Para executar esta transformação temos que definir um arranjo de coeficiente a_{ij};
- Este arranjo é chamado de matriz, representada por **A** por conveniência:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

As equações (3.1) podem ser agora ser escritas na forma:

$$\vec{y} = A\vec{x} \qquad (3.4)$$

ou

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

4.3 Propriedades

i) Matriz identidade:

é uma matriz quadrada cujos elementos são zeros em todas as posições menos na diagonal principal.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & se \;\; i \neq j \\ 1, & se \;\; i = j \end{cases}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

ii) Matriz Simétrica:

é uma matriz quadrada em que $a_{ij}=a_{ji}$.

iii) Duas matrizes A e B de mesma ordem são iguais se $a_{ij}=b_{ij}$ para todo i e j.

iv) Matriz transposta A^T:

$$\text{Se } A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

$$\text{Então } A^T=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$$

$$\text{Observe que } \left(A^T\right)^T=A$$

4.4 Álgebra matricial

i) Soma de duas matrizes A e B ambas de mesma ordem:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$$

$$B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$$

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m \times n}$$

ii) Multiplicação de uma matriz por um escalar:

$$k\,A = k\left(a_{ij}\right)_{m \times n} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} k$$

iii) Multiplicação matricial:

$$C = AB$$

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} \qquad e \qquad B = \left(b_{ij}\right)_{n \times p}$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

iv) Inversão de matrizes:

Considere a equação (3.4) $\vec{y} = A\vec{x}$

Definiremos A^{-1} a inversa e uma matriz quadrada A com a seguinte propriedade:

$$A^{-1}A = I \qquad (3.7)$$

Pré multiplicando os dois lados da equação (3.4), temos:

$$A^{-1}\vec{y} = A^{-1}A\vec{x}$$

$$A^{-1}\vec{y} = I\vec{x} = \vec{x}$$

Assim, obtemos:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

4.5 Derivadas e integrais de matrizes

Seja a matriz $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m \times n}$

Então:

$$\frac{d}{dt}\left[A(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[a_{ij}(t)\right]_{m \times n}$$

ou

$$\dot{A}(t) = \left[\dot{a}_{ij}(t)\right]_{m \times n}$$

De maneira equivalente: $\int A(t)\,dt = \left[\int a_{ij}(t)\,dt\right]_{m\times n}$

Algumas identidades:

$$(i)\quad \frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$$

$$(ii)\quad \frac{d}{dt}kA = k\frac{d}{dt}A$$

$$(iii)\quad \frac{d}{dt}AB = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$$

$$(iv)\quad C = AB$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$$\dot{c}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \dot{a}_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{b}_{jk}$$

$$(v) \quad \frac{d}{dt}\left(AA^{-1}\right) = \frac{dA}{dt}A^{-1} + A\frac{dA^{-1}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(AA^{-1}\right) = \frac{d}{dt}I = 0$$

$$\frac{dA}{dt}A^{-1} + A\frac{dA^{-1}}{dt} = 0$$

$$A\frac{dA^{-1}}{dt} = \frac{dA}{dt}A^{-1}$$

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

4.6 Equação característica de uma matriz: Teorema de Cayley-Hamilton

- Para uma matriz A quadrada (n x n), qualquer vetor que satisfaça a equação

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad (3.8)$$

é um **autovetor (**ou **vetor característico)** e λ é o autovalor correspondente (ou valor característico) da matriz A.

- A equação (3.8) pode ser escrita por:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ (A-\lambda I)\vec{x} &= 0 \qquad (3.9) \end{aligned}$$

A solução deste conjunto de equações homogêneas existe se, e somente se:

$$\det(A-\lambda I)=0 \qquad (3.10)$$

A equação (3.10) é chamada de equação característica da matriz A e pode ser escrita por:

$$Q(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\lambda^0 = 0 \quad (3.11)$$

O teorema de Cayley-Hamilton afirma que toda matriz A n x n satisfaz a sua própria equação característica, ou seja,

$$Q(A)=A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 A^0 = 0$$

Funções de uma matriz

Uso do teorema de Cayley-Hamilton para calcular funções de uma matriz quadrada.

Seja uma função f(λ) na forma de uma série infinita de potência:

$$f(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \ldots + \ldots = \sum_{i=0} b_i\lambda^i \quad (3.12)$$

- O parâmetro λ é um autovalor da matriz A, então este parâmetro satisfaz a equação (3.11);

$$Q(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\lambda^0 = 0 \quad (3.13)$$

- Podemos escrever

$$\lambda^n = -a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0\lambda^0 \qquad (3.14)$$

$$\lambda^n = -a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \ldots - a_1\lambda - a_0\lambda^0 \qquad \times(\lambda)$$

$$\lambda^{n+1} = -a_{n-1}\lambda^n - a_{n-2}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda^2 - a_0\lambda$$

- Assim, podemos observar que a série infinita (3.12) pode ser expressa em termos das potências de λ e uma constante:

$$f(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \ldots + b_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad (3.15)$$

- Se assumirmos que que existem n autovalores distintos λ_1, λ_2, ... $\lambda_{n.}$ Então , a equação (3.14) é válida par os n valores de λ. Assim temos as n equações simultâneas:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_{\tilde{n}}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_{\tilde{n}}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

- A matriz A também satisfaz a equação (3.13). Assim, temos

$$f(A) = b_0 + b_1 A + b_2 A^2 + \ldots + b_{n-1} A^{n-1} \qquad (3.16)$$

Determinação da Exponencial e Potenciação de Uma Matriz

- Determinaremos e^{At} , definida por

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

- A partir da equação (3.16), podemos escrever:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{n-1} b_i A^i$$

- Os termos b_i são dados pela equação (3.15);

- $f(\lambda_i) = e^{\lambda_i t}$

- Determinaremos A^k , definida por

$$A^k = b_0 I + b_1 A + b_2 A^2 + \ldots + b_{n-1} A^{n-1}$$

  - Os termos b_i são dados pela equação (3.15);
  - $f(\lambda_i) = \lambda_i^k$

4.7 Determinantes

Definição 1:

Seja S = {1,2,...,n} o conjunto de todos os inteiros de 1 a n, arrumados em ordem crescente. Uma outra ordem $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ dos elementos do conjunto S é chamado de **permutação** de S.

Exemplo:

Considere S = {1,3,5,6}. Então, 5361 é uma permutação de S, que corresponde a função f: S → S definida por:

$$f(1)=5,\ f(3)=3,\ f(5)=6,\ f(6)=1$$

Definição 2:

De uma forma geral para um conjunto S de n números temo n! permutações. Denotaremos de S_n as permutações de S.

Definição 3:

Uma permutação j_1, j_2,...,j_n do conjunto S tem uma inversão se um inteiro j_r precede um inteiro j_s. Uma permutação é denominada par (ímpar) se o número total de inversões é par (ímpar).

Exemplo: Seja o conjunto S = $\{1,4,9\}$. Então a permutação:

$$\begin{cases} 194 \text{ é ímpar pois o 9 está antes do 4 } (\text{uma inversão}) \\ 914 \text{ é par pois o 9 está antes do 1 e do 4} \end{cases}$$

Mostra-se que se $n \geq 2$ tem-se n!/e permutações pares e n!/2 permutações ímpares. Assim temos:

$$\text{Pares}\begin{cases} 149 \rightarrow 0 \\ 491 \rightarrow 2 \\ 914 \rightarrow 2 \end{cases} \qquad \text{Ímpares}\begin{cases} 194 \rightarrow 1 \\ 419 \rightarrow 3 \\ 914 \rightarrow 3 \end{cases}$$

Definição 4:

Seja A = a_{ij} uma matriz quadrada de ordem n X n. Definimos o determinante de A, denotado por det(A) o número dado por:

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

onde j1, j2,..., jn são todas as permutações do conjunto S = $\{1,2,\ldots,n\}$. O Sinal (+)do determinante corresponde à permutação par e o sinal (-) corresponde à permutação ímpar.

Exemplos:

1) Calcular o determinante da matriz A=a_{11}

- S={1}, tem uma única permutação, ou seja, 1!=1
- O número de inversões é zero
- O sinal do determinante é positivo
- det(A)=a_{11}

2) Calcular o determinante da matriz A 2 x 2, dada por

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- S={1,2}, tem duas permutações, ou seja, 2!=2;
- As permutações são: 12 e 21. A permutação 12 tem zero inversões é positivo a permutação 21 tem uma inversão e é negativa.
- Para calcular o det(A), escrevemos os termos da matriz na forma:

$$a_{1\_}a_{2\_} \qquad e \qquad a_{1\_}a_{2\_}$$

- Ao espaços vazios serão preenchidos por todos os elementos de de S2, que são 12 e 21. Assim,

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3) Calcular o determinante da matriz A 3 x 3, dada por

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- S={1,2,3} tem 3!=6, o conjunto S_3 é formado pelas permutações, as quais são:
- 123 → 0 inversão (par) → +
- 132 → 1 inversão (ímpar) → -
- 213 → 1 inversão (ímpar) → -
- 231 → 2 inversões (par) → +
- 312 → 2 inversões (par) → +
- 321 → 3 inversões (ímpar) → -
- S_3 = {123, 132, 213, 231, 312, 321}
- Para calcular o det(A), escrevemos os termos da matriz na forma:

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \qquad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \qquad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$$

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \qquad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \qquad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$$

- Ao espaços vazios serão preenchidos por todos os elementos de de S_3. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ & -(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

4.8 Algumas constantes úteis

$$\pi = 3,1415926$$

$$e = 2,7182818$$

$$\log 2 = 0,301$$

$$\log 3 = 0,477$$

$$\frac{1}{e} = 0,3678794$$