INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Controle de Sistemas Contínuos I

Prof. Walterley A. Moura

contato: walterley.moura@cba.ifmt.edu.br

Representação de Modelos de Sistemas Dinâmicos:

Espaço de Estados

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Departamento de Eletroeletrônica

Prof. Dr. Walterley A. Moura

Resultados Desejados

- Entender variáveis de estado, equação diferencial de estado e equação de saída;
- Saber que modelos em variável de estado pode descrever a dinâmica do comportamento sistemas físicos e podem ser representados por diagramas de blocos e diagrama de fluxo de sinais;
- Saber como obter o modelo da função de transferência a partir do modelo da equação de estado e vice-versa;
- Estar ciente do método de solução para os modelos de variável de estado e a regra da matriz de transição de estado para obter a resposta;
- Entender as regras importantes da modelagem em variável de estados no projeto de sistemas de controle.

1. Análise de sistemas no espaço de estados.

- A tendência moderna nos sistemas de engenharia é aumentar a sua complexidade, principalmente em virtude da necessidade de realizar tarefas complexas e de alta precisão.

- Sistemas complexos podem ter entradas e saídas múltiplas e ser variantes no tempo.

- A teoria de controle moderno é uma nova abordagem para a análise de sistemas de controle complexos (a partir de 1960).

- Essa teria tem como base o conceito de estados.

1.1 - Introdução

O modelo matemático de um sistema dinâmico é obtido a partir da aplicação de Leis Físicas e de Equações Constitutivas dos elementos que compõem o sistema, o que conduz, normalmente, a um sistema de equações diferenciais e/ou equações algébricas. Tal sistema de equações, usualmente, é representado de três maneiras:

- Representação no Espaço de Estados
- Representação por Equação I/O (Input/Output = Entrada/Saída)

1.2 Representação no Espaço de Estados

É um enfoque mais moderno, que repousa sobre o conceito de Variáveis de Estado. Nesta representação, um modelo matemático descrito por uma equação diferencial de ordem *n* é substituído por um sistema de *n* equações diferenciais, todas de 1ª ordem. Se o modelo matemático for descrito por *m* equações diferenciais de ordem *n*, então ele será substituído por um sistema de *m* x *n* equações diferenciais de 1ª ordem. A representação no espaço de estados é particularmente útil na análise e no projeto de sistemas de controle.

$$\boxed{\begin{gathered} my''(t)+cy'(t)+ky(t)=u(t) \\ (\text{Modelo matemático do sistema físico}) \end{gathered}} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

(Representação no Espaço de Estados)

$$\downarrow$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

(Representação em Função de Transferência)

1.3 Características da Representação no Espaço de Estados

- Usa domínio do tempo
- Quaisquer condições iniciais
- Aplicabilidade mais ampla
  - Sistemas lineares e não-lineares
  - Sistemas invariantes no tempo
  - Sistemas variantes no tempo
  - Sistemas SISO (Single Input, Single Output)
  - Sistemas MIMO (Multiple Input, Multiple Output)

1.4 Definições importantes

Estado:

O estado de um sistema é um conjunto de variáveis cujos valores, junto com o sinal de entrada e as equações que descrevem a dinâmica do sistema, fornecerá o estado futuro e a saída do sistema.

Variáveis de estado:

As variáveis de estado descrevem a configuração presente de um sistema e pode ser usado para determinar a resposta futura , dada a excitação de entrada e as equações que descrevem a dinâmica do sistema.

Vetor de estado:

Se forem necessárias “n” variáveis de estado para descrever completamente o comportamento de um sistema, então essas “n” variáveis poderão ser consideradas os “n” componentes de um vetor “x”. Esse vetor é chamado vetor de estado. O vetor de estado determina univocamente o estado do sistema “x(t)” para qualquer instante “$t \geq t_0$”.

Exemplo 1:

Representação de um sistema mecânico de 2ª ordem com um grau de liberdade (unidimensional), sendo a entrada $u(t)$, a força externa aplicada sobre a massa m, e a saída $y(t)$, o deslocamento medido a partir da posição de equilíbrio estático.

Modelo matemático dado pela EDO:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = u(t)$$

Questões

1) Quantas variáveis de estado são necessárias?

2) Quais são as variáveis de estado do problema?

Respostas

1) A quantidade de variáveis de estado é igual à quantidade de condições iniciais. Como o sistema é de 2ª ordem, ele possui duas condições iniciais, logo necessita de duas variáveis de estado para descrever completamente a dinâmica do sistema.

2) São as correspondentes às condições iniciais do problema. No caso, as variáveis de estado são, o deslocamento y(t) e a velocidade y'(t).

Resolvendo o problema

$\mapsto$ As variáveis de estados são: x_1 e x_2

$\mapsto$ Condições iniciais do problema: y e y'

$$\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{matrix} \quad \xrightarrow{\quad \frac{d}{dt} \quad} \quad \begin{matrix} x_1' = y' \\ x_2' = y'' \end{matrix}$$

Reescrevendo o sistema de equações acima, obtemos:

$$x_1' = y' = x_2$$

$$y'' = x_2'$$

$$y = x_1$$

$$y'' = \frac{1}{m}\left(-k\,y - c\,y'\right) + \frac{1}{m}u \quad \rightarrow \quad x_2' = y'' = \frac{1}{m}\left(-k\,x_1 - c\,x_2\right) + \frac{1}{m}u$$

- Podemos observar que a primeira equação não depende da dinâmica do sistema, enquanto que a segunda depende. Em termos de variáveis de estado:

$$x_1' = \quad 0x_1 + \quad 1x_2 + 0u$$
$$x_2' = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

- As equações de estado, sob forma matricial, será dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$[y] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Essas duas últimas equações matriciais são, respectivamente, a equação de estado e a equação de saída. Em forma padrão:

$$x' = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$A \rightarrow$ matriz de estado
$B \rightarrow$ matriz de entrada
$C \rightarrow$ matriz de saída
$D \rightarrow$ matriz de transmissão direta

1.5 A equação diferencial de estado

A resposta de um sistema é descrito por um conjunto equações diferenciais de primeira ordem:

1) Variáveis de estados: $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_n$

2) Entradas: $u_1,\ u_2,\ u_3, \cdots,\ u_m$

$$
\begin{aligned}
&x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_n \\
&x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_n \\
&\vdots \\
&x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_n \\
&\text{onde } \ x' = \frac{dx}{dt}
\end{aligned}
$$

- Assim, esse sistema de equações diferenciais simultâneas pode ser escrito de forma matricial:

$\mapsto$ A equação diferencial de estado :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n \text{ x } n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{n \text{ x } 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}}_{n \text{ x } m} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{n \text{ x } 1}$$

$\mapsto$ Vetor de estado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ $\rightarrow$ notação compacta da *equação diferencial de estado*

$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$ $\rightarrow$ notação compacta equação de saída

1.6 Representação da equação de sistemas LIT no espaço de estados por diagrama de blocos

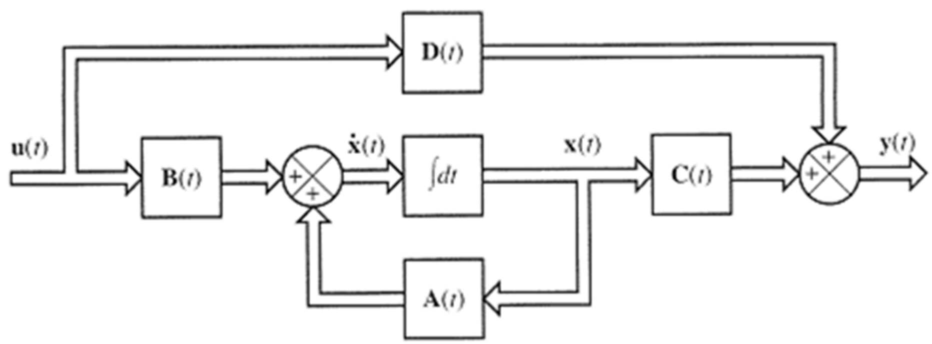
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

A : matriz de estado

B : matriz de entrada

C : matriz de saída

D : matriz de transmissão direta



1.7 Representação da equação de sistemas LIT no espaço de estados por diagrama de fluxo de sinais no domínio do tempo e de Laplace

1.8 Cálculo da função de transferência

- A função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- Aplicando a transformada de Laplace em ambas as equações, resulta em:

$$x' = Ax + Bu$$
$$\mathcal{L}[x'] = \mathcal{L}[Ax] + \mathcal{L}[Bu]$$
$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$x(0) = 0$$
$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$
$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$y = Cx + Du$$
$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[Cx] + \mathcal{L}[Du]$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$
$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

- Obtendo,

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right] U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

1.9 Solução da <u>equação diferencial de estado</u>

↦ A solução da *equação diferencial de estado* pode ser resolvida semelhante a abordagem para resolver uma EDO de primeira ordem, aplicando transformada de Laplace na *equação diferencial de estado*, temos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(ax + bu) \\
&sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \\
&X(s)(s-a) = x(0) + bU(s)
\end{aligned}$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s)$$

$\mapsto$ Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau$$

$\mapsto$ Espera-se que a solução da *equação diferencial de estado* na forma matricial seja semelhante a solução dada acima.

Sendo assim, escrevendo a solução da *equação diferencial de estado* na forma matricial, temos :

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\exp(\mathbf{A}t)\,\mathbf{x}(0)}_{\text{Resposta a entrada nula}} + \underbrace{\int_0^t \exp\left[\mathbf{A}(t-\tau)\right]\mathbf{Bu}(\tau)\,d\tau}_{\text{Resposta de estado nulo}}$$

Obs.: Letras em negrito representam vetores.

$\mapsto$ Aplicando-se a transformada de Laplace na equação acima, obtemos:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s)$$

Onde:

$\mathbf{\Phi}(t) \rightarrow$ matriz fundamental ou matriz de transição de estados

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}(0) + \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{BU}(s)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Exemplo 2: Dada a equação de estado abaixo, determine a função de transferência.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{k}{m} & s + \dfrac{c}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{ms + c}{ms^2 + cs + k} & \dfrac{1}{m\left(ms^2 + cs + k\right)} \\ -\dfrac{k}{ms^2 + cs + k} & \dfrac{s}{m\left(ms^2 + cs + k\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

1.10 Representação no Espaço de Estados de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem “n” cuja entrada não possui derivadas.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = bu \qquad \text{eq.}(1)$$

$y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)}$ são as variáveis de estado

$$\begin{aligned}
x_1 &= y & &\rightarrow & x_1' &= y' = x_2 \\
x_2 &= y' & &\rightarrow & x_2' &= y'' = x_3 \\
x_3 &= y'' & &\rightarrow & x_3' &= y''' = x_4 \\
&\vdots & & & &\vdots \\
x_{n-1} &= y^{(n-2)} & &\rightarrow & x_{n-1}' &= y^{(n-1)} = x_n \\
x_n &= y^{(n-1)} & &\rightarrow & x_n' &= y^{(n)}
\end{aligned}$$

$i)$ Isolando $y(n)$ na eq.(1), temos:

$$y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} - \ldots - a_{n-1} y' - a_n y + bu$$
$$x_n' = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \ldots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + bu \qquad \text{eq.}(2)$$

$ii)$ Rearranjando a eq.(2), temos:

$$x_n' = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + bu$$

$iii)$ Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
x_1' &= 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_{n-1} + 0x_n + 0u \\
x_2' &= 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + \ldots + 0x_{n-1} + 0x_n + 0u \\
&\vdots \\
x_n' &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + bu
\end{aligned}$$

$iii)$ Escrevendo a eq.(3) na forma matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-1} & -a_{n-3} & . & . & . & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ b \end{pmatrix}}_{B} u$$

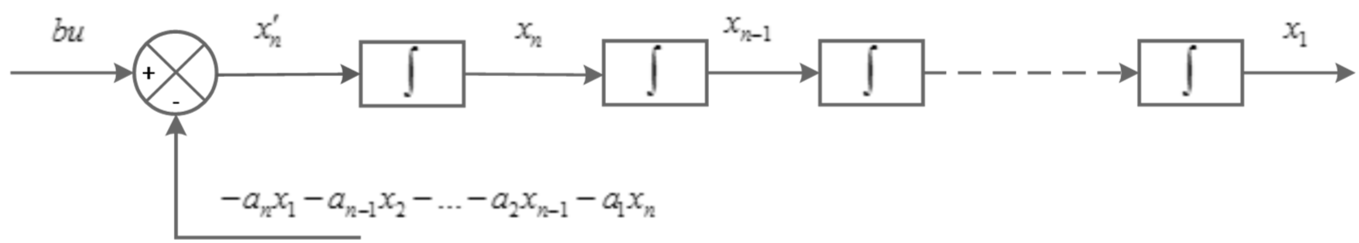
$y = x_1$

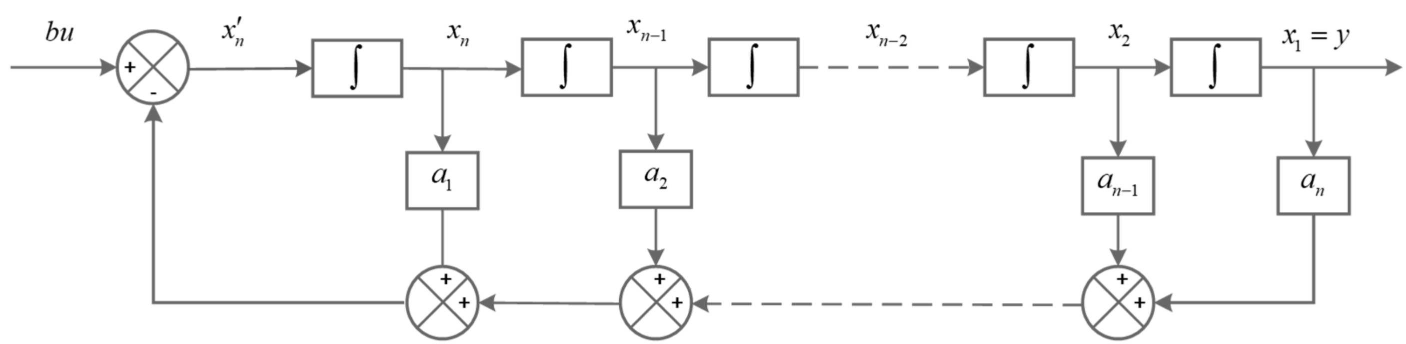
$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}}_{D} u$$

A: matriz de estado
B: matriz de entrada
C: matriz de saída
D: matriz de transmissão direta

1.10.1 Representação por diagrama de blocos de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem “n” sem derivadas de excitação.

$$x'_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + bu$$





1.10.2 Representação por diagrama de fluxo de sinais de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem “n” sem derivadas de excitação.

1.11 Representação no Espaço de Estados de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem “3” cuja entrada possui “3” derivadas.

Exemplo 3: Representar o sistema abaixo usando as variáveis de estado.

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = b_0 u''' + b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u \qquad \text{eq.}(1)$$

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = y' - \beta_0 u' - \beta_1 u = x_1' - \beta_1 u$$

$$x_3 = y'' - \beta_0 u'' - \beta_1 u' - \beta_2 u = x_2' - \beta_2 u \qquad \text{eq.}(2)$$

Mas, isolando y’’’ na eq.(1), temos:

$$y''' = -a_1 y'' - a_2 y' - a_3 y + b_0 u''' + b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u \qquad \text{eq.}(3)$$

Derivando a eq.(2), temos

$$x_3' = y''' - \beta_0 u''' - \beta_1 u'' - \beta_2 u' \qquad \text{eq.}(4)$$

- Substituindo a eq.(3) na eq.(4), e arranjando os termos adequadamente, temos:

$$x_3' = -a_1 y'' - a_2 y' - a_3 y + b_0 u''' + b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u - \beta_0 u''' - \beta_1 u'' - \beta_2 u'$$

$$x_3' = -a_1\left(x_3 + \beta_0 u'' + \beta_1 u' + \beta_2 u\right) - a_2\left(x_2 + \beta_0 u' + \beta_1 u\right) - a_3\left(x_1 + \beta_0 u\right) +$$
$$b_0 u''' + b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u - \beta_0 u''' - \beta_1 u'' - \beta_2 u'$$

$$x_3' = -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + u'''\underbrace{\left(b_0 - \beta_0\right)}_{=0} + u''\underbrace{\left(b_1 - \beta_1 - a_1\beta_0\right)}_{=0} +$$
$$+u'\underbrace{\left(b_2 - \beta_2 - a_2\beta_0 - a_1\beta_1\right)}_{=0} + u\underbrace{\left(b_3 - a_3\beta_0 - a_2\beta_1 - a_1\beta_2\right)}_{=\beta_3}$$

- Assim, obtemos:

$$\beta_0 = b_0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1\beta_1$$
$$\beta_3 = b_3 - a_3\beta_0 - a_2\beta_1 - a_1\beta_2$$

- Escrevendo a equação acima na forma matricial, temos:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_2 + \beta_1 u \\
x_2' &= x_3 + \beta_2 u \\
x_3' &= -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} u
$$

$$
y = x_1 + \beta_0 u \quad \rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta_0 u
$$

1.12 Representação no Espaço de Estados de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem “n” cuja entrada possui “n” derivadas.

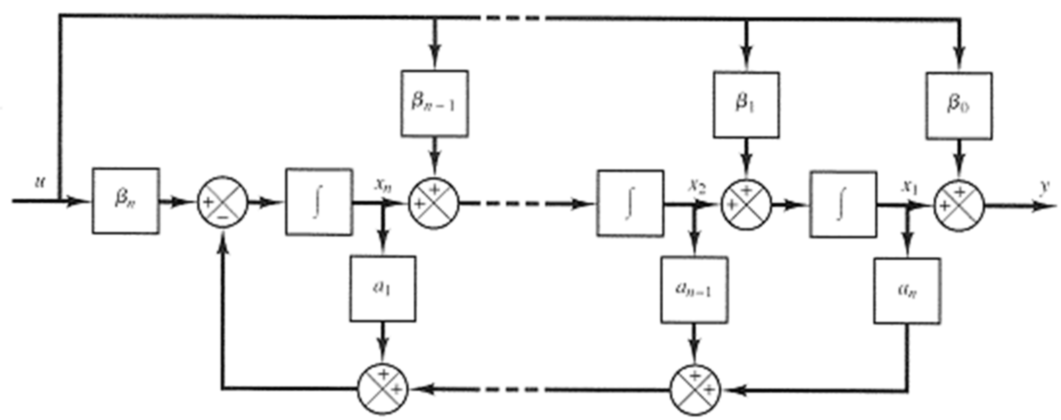
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$y = x_1 + \beta_0 u \quad \rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta_0 u$$

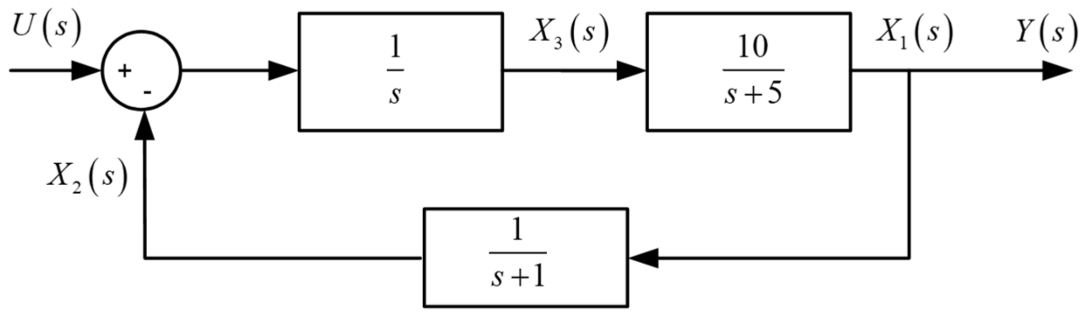
1.12.1 Representação por diagramas de blocos de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem "n" cuja entrada possui "n" derivadas.



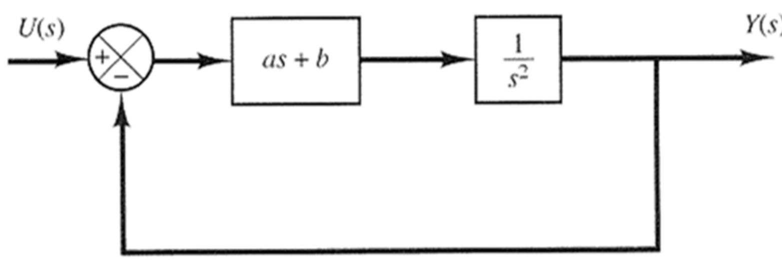
1.12.2 Representação por diagrama de fluxo de sinais de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem “n” cuja entrada possui “n” derivadas.

Exemplo 4: Obtenha o modelo no espaço de estados do sistema mostrado abaixo.

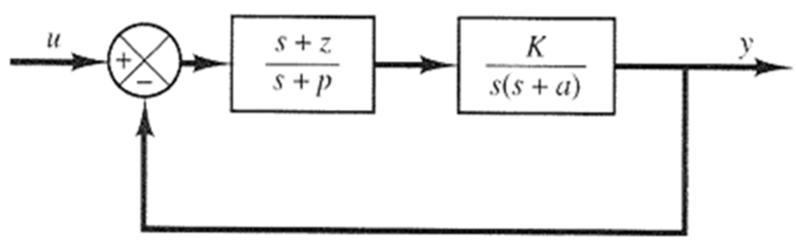
a)



b)



c)



Exemplo 5: Dado o sistema: $y''' + 6y'' + 11y' + 7y = 9u \ (\text{Entrada não possui derivadas})$

Obter uma representação do sistema no espaço de estado, a função de transferência desenhar o diagrama de blocos e o diagrama de fluxo de sinais.

Representação no espaço de estados

Escolhendo as variáveis de estados:

$x_1 = y$

$x_2 = y'$

$x_3 = y'$

Assim, podemos escrever

$x_1' = y' = x_2$

$x_2' = y'' = x_3$

$y''' = x_3' = -7x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 9u$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Função de transferência

$$y''' + 6y'' + 11y' + 7y = 9u$$

$$s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 11sY(s) + 7Y(s) = 9U(s)$$

$$Y(s)\left(s^3 + 6s^2 + 11s + 7\right) = 9U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{9}{s^3 + 6s^2 + 11s + 7}, \quad m = 0$$

Diagrama de Blocos

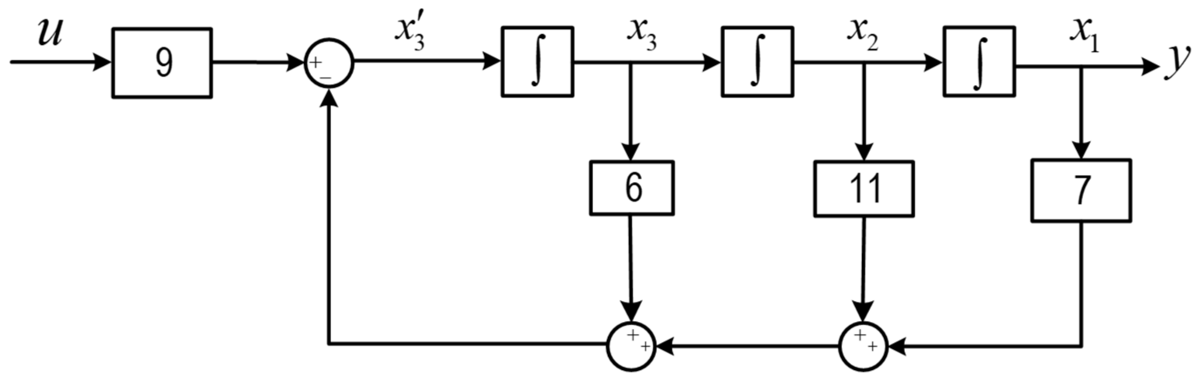
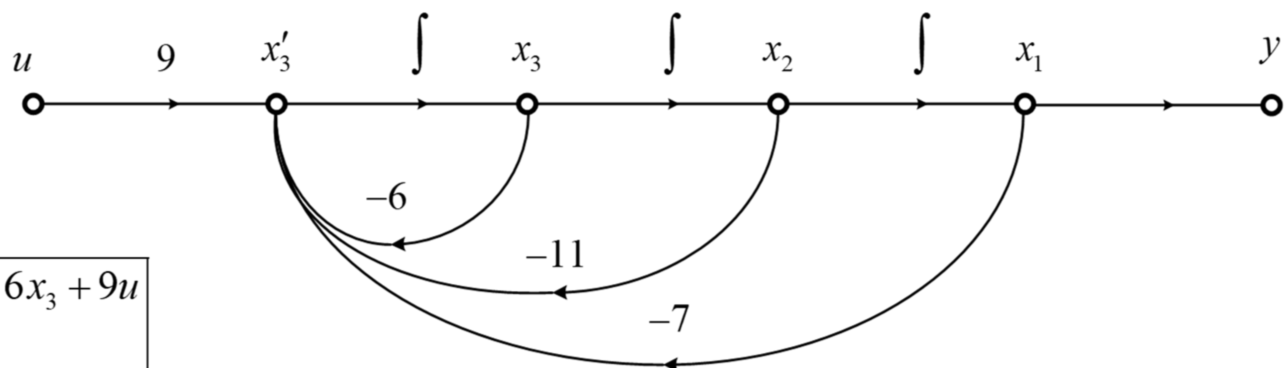


Diagrama de Fluxo de Sinais



$$x_3' = -7x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 9u$$
$$x_2 = x_1'$$
$$x_3 = x_2'$$

Exemplo 6: Dado o sistema abaixo, obter uma representação do sistema no espaço de estado, escrever a equação diferencial do sistema e desenhar o diagrama de blocos e o diagrama de fluxo de sinais.

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6}, \quad m < n$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0$$

Resolvendo:

$\mapsto$ Inicialmente escreveremos a equação diferencial

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6}$$

$$s^3 Y(s) + 4s^2 Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = s^2 U(s) + 2sU(s) + 3U(s)$$

Aplicando a trnformada inversa de Laplace, obtemos:

$$y''' + 4y'' + 5y' + 6y = u'' + 2u' + u$$

$\mapsto$ Separando a função de transferência em duas funções de transferência:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\left(\frac{1}{s^3+4s^2+5s+6}\right)\left(s^2+2s+3\right)$$

$$\xrightarrow{U(s)}\underbrace{\boxed{\frac{1}{s^3+4s^2+5s+6}}}_{\text{Variáveis internas } X_2(s) \text{ e } X_3(s)}\xrightarrow{X_1(s)}\boxed{s^2+2s+3}\xrightarrow{Y(s)}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_1' &= x_2 \\ x_1'' &= x_3 \\ x_1''' &= x_3' \end{aligned}$$

$\mapsto$ $Y(s)=\left(s^2+2s+3\right)X_1(s)$

$$Y(s)=s^2X_1(s)+2sX_1(s)+3X_1(s)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y=x_1''+2x_1'+3x_1=x_3+2x_2+x_1$$

$$y=x_1+2x_2+x_3$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$\mapsto$ $X_1(s)=\dfrac{1}{s^3+4s^2+5s+6}U(s)$

$$\mapsto X_1(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} U(s)$$

$$x_1 = x_1$$
$$x_1' = x_2$$
$$x_1'' = x_3$$
$$x_1''' = x_3'$$

$$s^3 X_1(s) + 4s^2 X_1(s) + 5sX_1(s) + 6X_1(s) = U(s)$$
$$x_1''' + 4x_1'' + 5x_1' + 6x_1 = u$$
$$x_3' = -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 + u$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_1' = x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Diagrama de Blocos

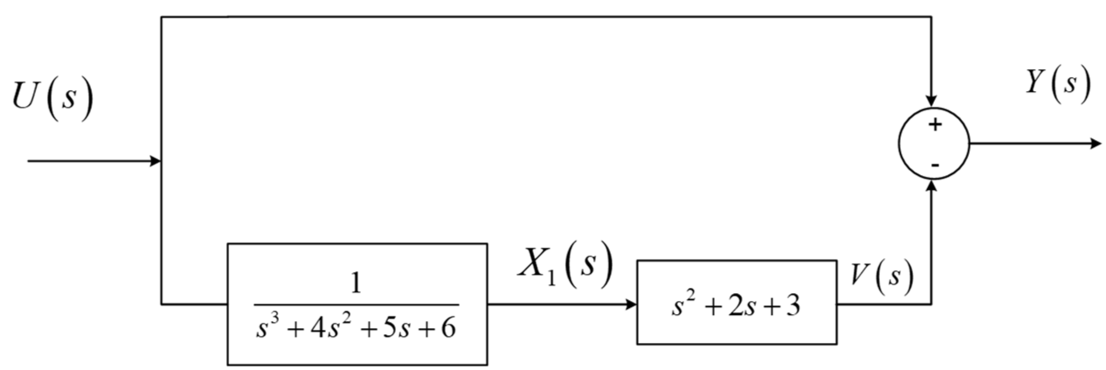
Diagrama de Fluxo de Sinais

Exemplo 7: Dado o sistema abaixo, obter uma representação do sistema no espaço de estado, escrever a equação diferencial do sistema e desenhar o diagrama de blocos e o diagrama de fluxo de sinais.

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6}, \quad m = n$$

Resolvendo:

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} = 1 - \frac{2s^2 + 2s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6}$$



$$G(s)=\frac{s^3+2s^2+3s+3}{s^3+4s^2+5s+6}$$

$$x_1 = x_1$$
$$x_1' = x_2$$
$$x_1'' = x_3$$
$$x_1''' = x_3'$$

Resolvendo:

$$\frac{s^3+2s^2+3s+4}{s^3+4s^2+5s+6}=1-\frac{2s^2+2s+3}{s^3+4s^2+5s+6}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+4s^2+5s+6}\Rightarrow s^3X_1(s)+4s^2X_1(s)+5sX_1(s)+6X_1(s)=U(s)$$

$$L^{-1}\left\{s^3X_1(s)+4s^2X_1(s)+5sX_1(s)+6X_1(s)\right\}=L^{-1}\left\{U(s)\right\}$$

$$x_1'''+4x_1''+5x_1'+6x_1=u\Rightarrow x_1'''=-6x_1-5x_1'-4x_1''+u \quad\Rightarrow \boxed{x_3'=-6x_1-5x_2-4x_3+u}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$$

$$Y(s) = U(s) - X_1(s)\left(2s^2 + 2s + 3\right)$$

$$Y(s) = U(s) - \left\{2s^2 X_1(s) + 2sX_1(s) + 3X_1(s)\right\}$$

$$L^{-1}\left\{Y(s)\right\} = L^{-1}\left\{U(s)\right\} - L^{-1}\left\{2s^2 X_1(s) + 2sX_1(s) + 3X_1(s)\right\}$$

$$y = u - 2x_1'' - 2x_1' - 3x_1 \Rightarrow y = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + u$$

$$y = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + u$$

Diagrama de Blocos

Diagrama de Fluxo de Sinais

Exemplo 8: Considere o sistema $y''' + 9y'' + 26y' + 24y = u' + 4u$

a) Fazer a representação no espaço de estados;
b) Desenhar o diagrama de blocos;
c) Desenhar o diagrama de fluxo de sinais;
d) Encontrar a função de transferência.

1.14 Caráter não único das variáveis de estado

- O conjunto de variáveis de estado não é único.
- Dado um conjunto de variáveis de estado: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- É possível definir um novo conjunto de variáveis de estado: $z_1, z_2, \ldots, z_n$

  através de um conjunto de funções: $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_n}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z_1} &= \mathbf{X_1}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\
\mathbf{Z_2} &= \mathbf{X_2}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\
&\vdots \\
\mathbf{Z_n} &= \mathbf{X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)
\end{aligned}
$$

- Define-se então uma transformação linear entre dois vetores de estados:

$$x = Pz \quad \rightarrow \quad x' = Pz'$$

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Pz' = APz + Bu \\ y = CPz + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} Pz' = APz + Bu \quad \rightarrow \quad z' = P^{-1}APz + P^{-1}Bu & (1) \\ y = CPz + Du & (2) \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace na eq.(1) e na eq.(2), temos:

$$\mapsto \quad L(z') = L\left(P^{-1}APz\right) + L\left(P^{-1}Bu\right)$$

$$sZ(s) = P^{-1}APZ(s) + P^{-1}BU(s)$$

$$\left(sI - P^{-1}AP\right)Z(s) = P^{-1}BU(s)$$

$$Z(s) = \left(sI - P^{-1}AP\right)^{-1} P^{-1}BU(s) \qquad (3)$$

$$\mapsto \quad L(y) = L(CPz) + L(Du)$$

$$Y(s) = CPZ(s) + DU(s) \qquad (4)$$

- Substituindo a eq.(3) na eq.(4), temos:

$$Y(s) = CP\left(sI - P^{-1}AP\right)^{-1} P^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = \left[CP\left(sI - P^{-1}AP\right)^{-1} P^{-1}B + D\right]U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = CP\left(sI - P^{-1}AP\right)^{-1} P^{-1}B + D$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Exemplo 9: Para o sistema apresentado abaixo, define-se um novo vetor de estados **z** através da transformação dada. Encontrar a equação de estado para as novas variáveis de estado.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}}_{B} u, \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}$$

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

- Simplificando, obtemos:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

- A equação de saída fica:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} = \mathbf{CPz}$$

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

1.15 Autovalores da matriz A

- Os autovalores de uma matriz **A** são os escalares λ que resolvem a equação:

$$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}, \quad \text{para } \mathbf{x} \neq 0$$

- Portanto, os autovalores de A devem satisfazer

$$\begin{aligned}
&(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0 \\
&\det\left[(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}\right] = 0 \\
&\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\det\mathbf{x} = 0, \quad \det\mathbf{x} \neq 0 \\
&\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0
\end{aligned}$$

- Para o novo vetor de estados **z**, temos

$$\mathbf{z}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} = \xi z, \quad \text{para} \quad z \neq 0$$

$$\det\left(\xi\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right) = 0$$

$$\det\left(\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right) = \det\mathbf{P}^{-1}\det\left(\xi\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\det\mathbf{P}$$

$$= \det\mathbf{P}^{-1}\det P\det\left(\xi\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$$

$$\det\mathbf{P}^{-1}\det\mathbf{P} \neq 0$$

Temos,

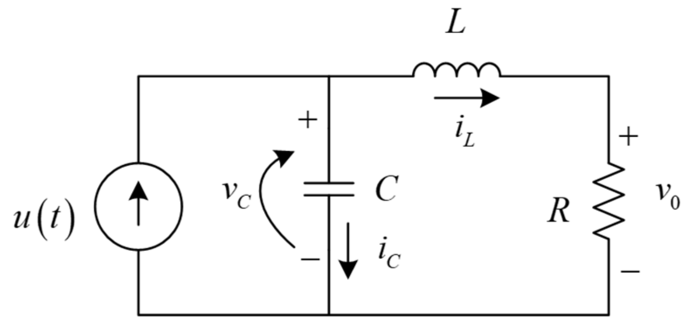
$$\det\left(\xi\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$$

1.13 Procedimento sistemático para determinação das equações de estado de um circuito elétrico

1. Escolha todas as tensões independentes de capacitores e correntes independentes de indutores como variáveis de estado;

2. Escolha um conjunto de corrente de malha e expresse as variáveis de estado e suas derivadas primeiras em termos destas correntes de malha;

3. Escreva as equações de tensões de malha e elimine todas as variáveis que não sejam as variáveis de estado.



$$v_C = \frac{1}{C}\int i_C dt \;\rightarrow\; Cv_C' = i_C \qquad x_1 = v_C \;\rightarrow\; x_1' = v_C'$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \;\rightarrow\; v_L = Li_L' \qquad x_2 = i_L \;\rightarrow\; x_2' = i_L'$$

$$u = i_C + i_L \qquad v_L = v_C - v_R \qquad y = v_0 = Rx_2$$

$$u = Cv_C' + i_L \qquad Li_L' = v_C - Ri_L$$

$$v_C' = -\frac{1}{C}i_L + \frac{1}{C}u \qquad i_L' = \frac{1}{L}v_C - Ri_L$$

$$\boxed{x_1' = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u} \qquad \boxed{x_2' = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2}$$

Equação de estado

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

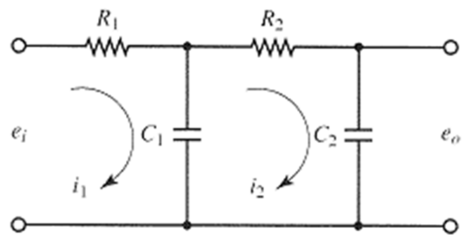
Equação de saída

$$y = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

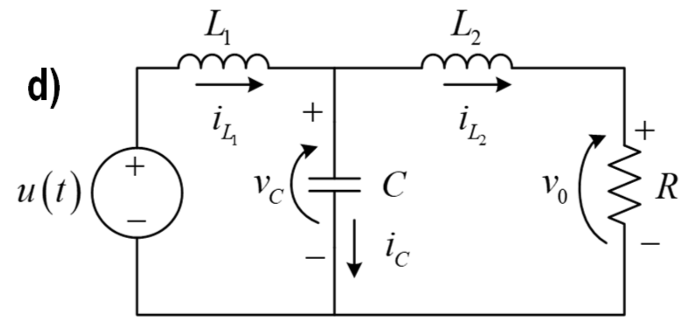
Exemplo 4:

Escreva as equações de estado para os circuitos mostrados abaixo.

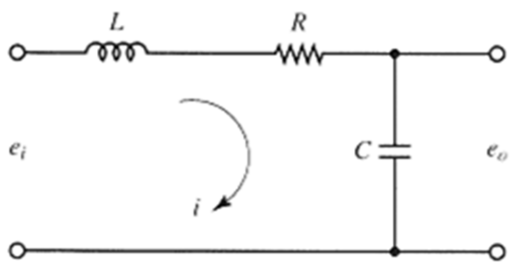
a)



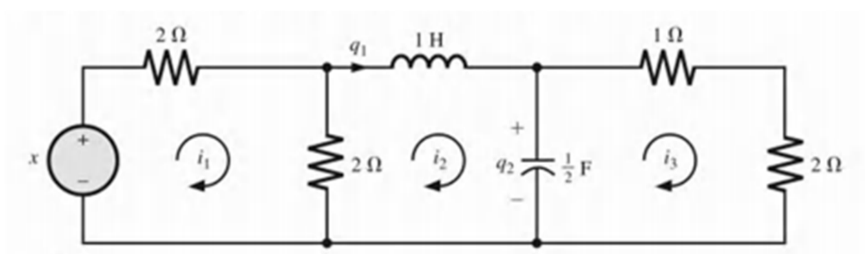
d)



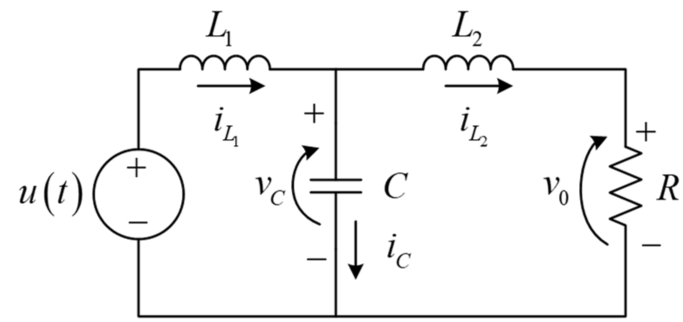
b)



c)



Resolvendo item (d):



$i_{L_1} = x_3$

$i_{L_2} = x_2$

$v_C = x_1$

Aplicando Lei de Kirchhoff:

(1)

$u = v_{L_1} + v_C$

$$u = L_1 i'_{L_1} + v_C \quad \rightarrow \quad u = L x'_3 + x_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{x'_3 = -\frac{1}{L_1} x_1 + u}$$

(2)

$v_C = v_{L_2} + v_R$

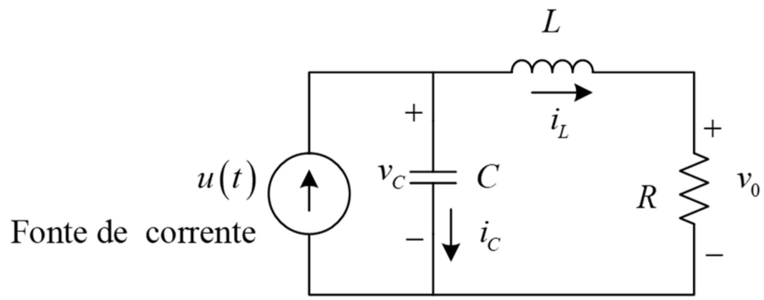
$$v_C = L_2 i'_{L_2} + R i_{L_2} \rightarrow x_1 = L_2 x'_2 + R x_2 \rightarrow \boxed{x'_2 = \frac{1}{L_2} x_1 - \frac{R}{L_2} x_2}$$

(3)

$i_{L1} = i_C + i_{L_2}$

$$i_{L1} = C v'_C + i_{L_2} \rightarrow \quad x_3 = C x'_1 + x_2 \quad \rightarrow \boxed{x'_1 = -\frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} x_3}$$

Exemplo 9: Encontrar a equação de estado, a equação de saída, o diagrama de blocos e o diagrama de fluxo de sinais do sistema dado abaixo.



$$x_1 = v_c \;\rightarrow\; x_1' = v_C'$$
$$x_2 = i_L \;\rightarrow\; x_2' = i_L'$$

$$x_1' = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$$
$$x_2' = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$
$$y = v_0 = Rx_2$$

Equação de estado

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Equação de saída

$$y = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diagrama de blocos

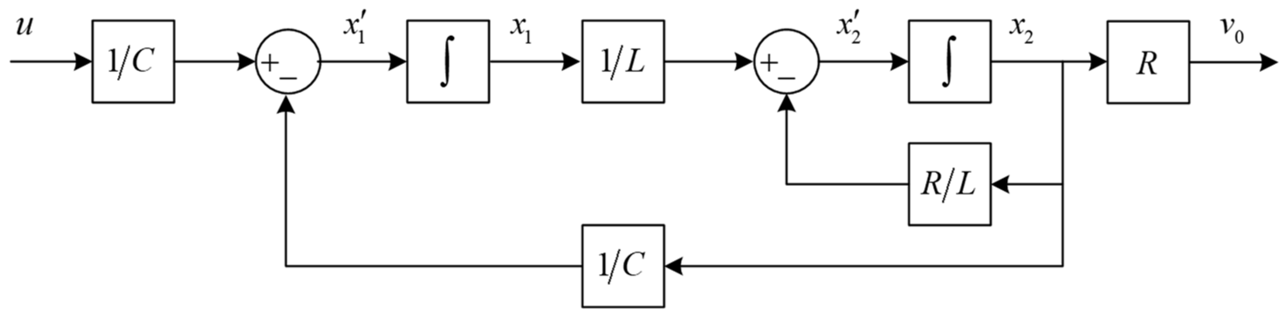


Diagrama de Fluxo de Sinais: primeira representação

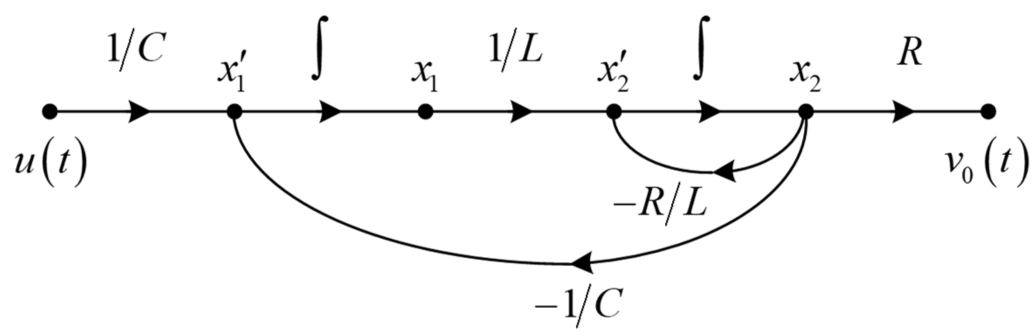


Diagrama de Fluxo de Sinais: segunda representação

$$x_1' = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace;

$$sX_1(s) - x_1(0) = -\frac{1}{C}X_2(s) + \frac{1}{C}U(s)$$

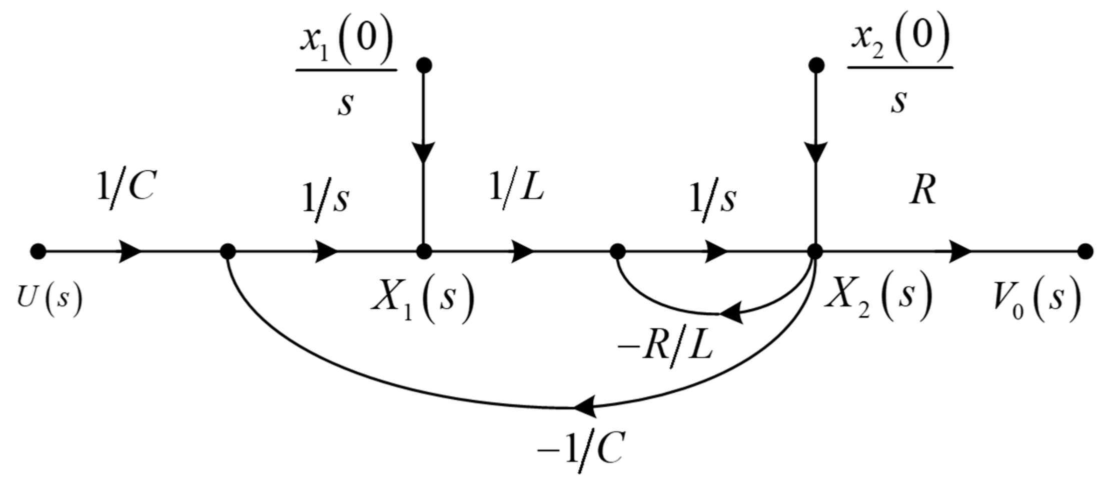
$$X_1(s) = \frac{x_1(0)}{s} - \frac{1}{sC}X_2(s) + \frac{1}{sC}U(s)$$

$$x_2' = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

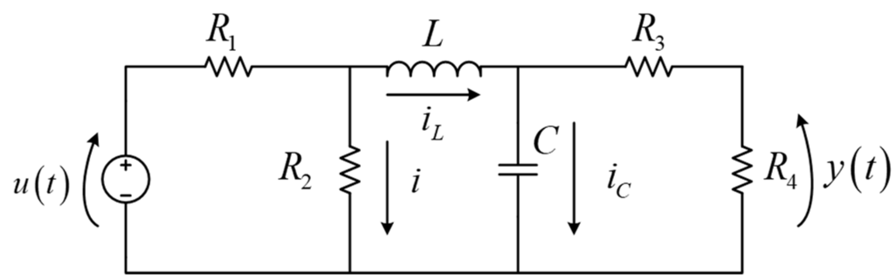
Aplicando a transformada de Laplace;

$$sX_2(s) - x_2(0) = \frac{1}{L}X_1(s) - \frac{R}{L}X_2(s)$$

$$X_2(s) = \frac{x_2(0)}{s} + \frac{1}{sL}X_1(s) - \frac{R}{sL}X_2(s)$$



Exemplo 10: Encontrar a equação de estado, a equação de saída, o diagrama de blocos e o diagrama de fluxo de sinais do sistema dado abaixo.



$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,dt \;\rightarrow\; i_C(t) = C\,v'_C(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad \rightarrow i'_L(t) = \frac{v_L(t)}{L}$$

(1) Escolher todas as tensões independentes de capacitores e correntes independentes de indutores como variáveis de estado.

$$x_1 = v_C \;\rightarrow\; x'_1 = v'_C$$

$$x_2 = i_L \;\rightarrow\; x'_2 = i'_L$$

$$y = v_{R_4}$$

$$u = R_1\left(i_L + i\right) + R_2 i = R_1 i_L + \left(R_1 + R_2\right) i \qquad (1)$$

$$v_C = \left(R_3 + R_4\right)\left(i_L - i_C\right) \qquad (2)$$

$$R_2 i = L i_L' + v_C \;\rightarrow\; i = \frac{L}{R_2} i_L' + \frac{v_C}{R_2} \qquad (3)$$

Substituindo a eq.1 e eq.3 pelas variáveis de estado, temos:

$$i = \frac{L}{R_2} x_2' + \frac{x_1}{R_2} \qquad (4)$$

$$u = R_1 x_2 + \left(R_1 + R_2\right) i \qquad (5)$$

Substituindo a eq.4 na eq.5, temos:

$$u = R_1 x_2 + \left(R_1 + R_2\right)\left(\frac{L}{R_2} x_2' + \frac{x_1}{R_2}\right)$$

$$\frac{L}{R_2} x_2' + \frac{x_1}{R_2} = \frac{u}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2$$

$$\frac{L}{R_2} x_2' = -\frac{x_1}{R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{u}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{x_2' = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R_1 R_2}{\left(R_1 + R_2\right) L} x_2 + \frac{1}{\left(R_1 + R_2\right) L} u}$$

Substituindo as variáveis de estado na eq.2, temos:

$$x_1 = \left(R_3 + R_4\right)\left(x_2 - Cx_1'\right)$$

$$x_2 - Cx_1' = \frac{1}{R_3 + R_4}x_1$$

$$Cx_1' = -\frac{1}{R_3 + R_4}x_1 + x_2$$

$$\boxed{x_1' = -\frac{1}{\left(R_3 + R_4\right)C}x_1 + \frac{1}{C}x_2}$$

$$y = v_{R_4} = R_4\left(i_L - i_C\right) = R_4\left(x_2 - Cx_1'\right)$$

$$= R_4\left(x_2 + \frac{1}{R_3 + R_4}x_1 - x_2\right)$$

$$\boxed{y = \frac{R_4}{R_3 + R_4}x_1}$$

$$x_1' = -\frac{1}{(R_3 + R_4)C} x_1 + \frac{1}{C} x_2$$

$$x_2' = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} x_2 + \frac{1}{(R_1 + R_2)L} u$$

Equação de estado

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(R_3 + R_4)C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{1}{(R_1 + R_2)L} \end{pmatrix} u$$

Equação de saída

$$y = \begin{pmatrix} \frac{R_4}{R_3 + R_4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diagrama de blocos

Diagrama de Fluxo de Sinais: primeira representação

Exemplo 11: Cálculo da matriz de transição de estado e o vetor de estado para entrada nula, u(t) = 0.

Colocando: $R = 3,\ \ L = 1$ e $C = 1/2$, temos:

Equação de estado

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Equação de saída

$$y = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow$$

Equação de estado

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

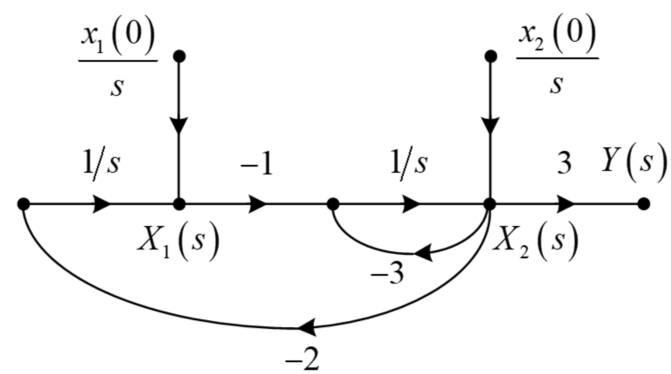
Equação de saída

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Equação de estado para $u(t) = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diagrama de fluxo de sinais para $u(t) = 0$



Solução da <u>*equação diferencial de estado*</u>:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\exp(\mathbf{A}t)\,\mathbf{x}(0)}_{\text{Resposta a entrada nula}} + \underbrace{\int_0^t \exp\left[\mathbf{A}(t-\tau)\right]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau}_{\text{Resposta de estado nulo}}$$

se $u(t) = 0$, temos:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\,\mathbf{x}(0)$$

Assim, aplicando a transformada de Laplace, obtemos:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \longrightarrow \text{Matriz de transição de estado}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \longrightarrow X(s) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Assim, para um sistema de segunda ordem, temos:

$$X_1(s) = \phi_{11}x_1(0) + \phi_{12}x_2(0)$$

$$X_2(s) = \phi_{21}x_1(0) + \phi_{22}x_2(0)$$

$\mapsto$ **Cáculo da matriz inversa :**

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{M}}}{\det(\mathbf{M})}$$

$\overline{\mathbf{M}} \longrightarrow$ matriz adjunta

$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{C}^t$

$\mathbf{C}^t \longrightarrow$ matriz transposta dos cofatores

$\mapsto$ Cálculo da matriz dos cofatores

$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{D}_{ij})$$

$\mathbf{D} \longrightarrow$ matriz menor complementar

(matriz construída a partir da eliminação da $i-$ésima linha e da $j-$ésima coluna)

Seja: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$

Então, $\mathbf{M} = s\mathbf{I} - \mathbf{A} = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$

Cálculo de $\mathbf{M}^{-1}$:

$\mapsto \det(\mathbf{M}) = s(s+3) - 2(-1) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$

$\mapsto \overline{\mathbf{M}} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{ij}\right)^t$

$\tilde{p}_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(\mathbf{D}_{ij}\right)$

$\tilde{p}_{11} = (-1)^{1+1} \det(s+3) = s+3$

$\tilde{p}_{12} = (-1)^{1+2} \det(-1) = 1$

$\tilde{p}_{21} = (-1)^{2+1} \det(2) = -2$

$\tilde{p}_{22} = (-1)^{2+2} \det(s) = s$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ij} = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{\mathbf{M}} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_{ij}\right)^t = \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{M}}}{\det(\mathbf{M})} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & -\dfrac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{\Phi}(s)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Fazendo $x_1(0) = x_2(0) = 1$, temos:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\underbrace{\mathbf{u}(t)}_{=0}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = 3e^{-2t}$$

iii) Transformação de modelo matemático com Matlab/Octave

(a) FT para ES

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{(s+10)(s^2+4s+16)}$$

$a = [1 \;\; 10];$

$b = [1 \;\; 4 \;\; 16];$

$c = conv(a,b);$

$num = [1 \;\; 0];$

$den = c;$

$[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)$

(b) ES para FT

$[num,den] = ss2tf\,(A,B,C,D)$

iv) Solução generalizada no ***domínio do tempo*** da equação de estado

$\mapsto$ Solução da $\underline{\text{equação diferencial de estado}}$:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}_{\text{Resposta a entrada nula}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau}_{\text{Resposta de estado nulo}}$$

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^nt^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

$\mapsto$ Podemos também encontrar a derivada:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^nt^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{\mathbf{A}^3t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^nt^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\mathbf{A}^{n+1}t^n}{n!}\cdots$$

$$= \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^nt}{n!} + \cdots\right)\mathbf{A}$$

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$$

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$$

$\mapsto$ Determinando $e^{\mathbf{A}t}$

A exponencial pode se calculada através da expansão dada anteriormente. Porém, essa é uma série infinita e seu cáculo é muito trabalhoso. Além disso, podemos não conseguir uma expressão fechada para a resposta. Vamos calcular a partir da técnica dada a seguir:

$$e^{\mathbf{A}t} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2 + b_3\mathbf{A}^3 + \cdots + b_{n-1}\mathbf{A}^n$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \rightarrow$ são os "n" auto valores de $\mathbf{A}$

$\mapsto$ Cálculo dos autovalores de $\mathbf{A}$

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$$

$\mapsto$ $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} b_i A^i, \quad n =$ ordem da matriz

Exemplo: Sejam $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-12 & \frac{2}{3}\\ -36 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}(t)=u(t)$

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\det\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-12 & \frac{2}{3}\\ -36 & -1\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}s+12 & -\frac{2}{3}\\ 36 & s+1\end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=s^2+13s+9=0$$

$\lambda_1=-4$ e $\lambda_1=-9$

$$\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-4t}\\ e^{-9t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{5}e^{-4t}-\frac{4}{5}e^{-9t}\\ \frac{1}{5}e^{-4t}-\frac{1}{5}e^{-9t}\end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t}=b_0\mathbf{I}+b_1\mathbf{A}$$

$$=\left(\frac{9}{5}e^{-4t}-\frac{4}{5}e^{-9t}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{5}e^{-4t}-\frac{1}{5}e^{-9t}\right)\begin{bmatrix}-12 & \frac{2}{3}\\ -36 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\left(3e^{-4t}+8e^{-9t}\right) & \frac{2}{15}\left(e^{-4t}-e^{-9t}\right)\\ -\frac{36}{5}\left(e^{-4t}+e^{-9t}\right) & \frac{1}{5}\left(8e^{-4t}-3e^{-9t}\right)\end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\left(3e^{-4t}+8e^{-9t}\right) & \frac{2}{15}\left(e^{-4t}-e^{-9t}\right) \\ -\frac{36}{5}\left(e^{-4t}+e^{-9t}\right) & \frac{1}{5}\left(8e^{-4t}-3e^{-9t}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(-\frac{15}{16}e^{-4t}+\frac{46}{15}e^{-9t}\right)u(t) \\ \left(-\frac{64}{5}e^{-4t}+\frac{69}{5}e^{-9t}\right)u(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Bu}(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}u(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{Bu}(t)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\left(3e^{-4t}+8e^{-9t}\right)u(t) & \frac{2}{15}\left(e^{-4t}-e^{-9t}\right)u(t) \\ -\frac{36}{5}\left(e^{-4t}+e^{-9t}\right)u(t) & \frac{1}{5}\left(8e^{-4t}-3e^{-9t}\right)u(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{3}u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\left(3e^{-4t} + 8e^{-9t}\right)u(t) * \frac{1}{3}u(t) + \frac{2}{15}\left(e^{-4t} - e^{-9t}\right)u(t) * u(t) \\ -\frac{36}{5}\left(e^{-4t} + e^{-9t}\right)u(t) * \frac{1}{3}u(t) + \frac{1}{5}\left(8e^{-4t} - 3e^{-9t}\right)u(t) * u(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{15}e^{-4t}u(t) * u(t) + \frac{2}{5}e^{-9t}u(t) * u(t) \\ -\frac{4}{5}u(t) * u(t) + \frac{9}{5}e^{-9t}u(t) * u(t) \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{60}e^{-4t} - \frac{2}{45}e^{-9t}\right)u(t) \\ \frac{1}{5}\left(e^{-4t} - e^{-9t}\right)u(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{36} - \frac{21}{20}e^{-4t} + \frac{136}{45}e^{-9t}\right)u(t) \\ \left(-\frac{63}{5}e^{-4t} + \frac{68}{5}e^{-9t}\right)u(t) \end{bmatrix}$$

$\mapsto$ Solução da saída

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\left[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right] + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\boldsymbol{\delta}(t) * \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) \quad e \quad e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\left[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right] + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t) * \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t) * \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t)\right] * \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \delta(t)\mathbf{I}$$

iv) Solução generalizada no ***domínio de Laplace*** da equação de estado

$\mapsto$ A entrada:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{x}'(t)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right\}$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\left[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right]$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{\Phi}(s)\left[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right]$$

$\mapsto$ A saída:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{y}(t)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\right\}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(s)\left[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right] + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s)$$

Apêndice

i) Transformação de função de transferência para espaço de estados (FT para ES)

$\mapsto$ Considere a função de transferência dada por:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

$\mapsto$ Vamos estudar três casos diferentes:

1º Caso: $m=0$;

2º Caso: $m<n$;

3º Caso: $m=n$.

1º Caso: $m = 0,\ n = 3$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Exemplo para um sistema de 3ª ordem que é facilmente estendido para sistemas de ordem superior

$$G(s) = \frac{b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$s^3 Y(s) + a_1 s^2 Y(s) + a_2 s Y(s) + a_3 Y(s) = b_0 U(s)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, temos:

$$y'''(t) + a_1 y''(t) + a_2 y'(t) + a_3 y(t) = b_0 u(t)$$

$$y'''(t) = -a_3 y(t) - a_2 y'(t) - a_1 y''(t) + b_0 u(t)$$

$$x_1 = y \xrightarrow{\frac{d}{dt}} x_1' = y'$$

$$x_2 = y' \xrightarrow{\frac{d}{dt}} x_2' = y''$$

$$x_3 = y'' \xrightarrow{\frac{d}{dt}} x_3' = y'''$$

$$y'''(t) = -a_3 y(t) - a_2 y'(t) - a_1 y''(t) + b_0 u(t)$$

$$x_3' = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + b_0 u$$

↦ Escrevendo o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, temos:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + b_0 u \end{cases}$$

↦ Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

2º Caso: $m < n$, com $m = 2$ e $n = 3$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Vamos escrever a função de transferência da seguinte forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{V(s)} \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{Y(s)}{V(s)}}{\frac{V(s)}{U(s)}}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = num(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{den(s)} \rightarrow \text{ é o caso anterior com } b_0 = 1$$

$$\begin{bmatrix} v' \\ v'' \\ v''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Agora, $\dfrac{Y(s)}{V(s)} = b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \;\rightarrow\; Y(s) = b_2 s^2 V(s) + b_1 s V(s) + b_0 V(s)$

O que implica em: $y(t) = b_2 v''(t) + b_1 v'(t) + b_0 v(t)$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

Portanto, temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = 0$$

3º Caso: $m = n$, com $m = n = 3$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Vamos escrever a função de transferência da seguinte forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + R$$

$$\frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + R = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0 + R\left(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$Rs^3 + s^2\left(\beta_2 + Ra_2\right) + s\left(\beta_1 + Ra_1\right) + \left(\beta_0 + Ra_0\right) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

Comparando os dois polinômios, temos:

$$R = b_3$$

$$\beta_2 + Ra_2 = b_2 \;\rightarrow\; \beta_2 = b_2 - Ra_2$$

$$\beta_1 + Ra_1 = b_1 \;\rightarrow\; \beta_1 = b_1 - Ra_1$$

$$\beta_0 + Ra_0 = b_0 \;\rightarrow\; \beta_0 = b_0 - Ra_0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{\underbrace{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}_{2^\circ \text{Caso}}} + R$$

Assim, temos as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = b_3$$

$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} u$$

$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$

$y = x_1 + \beta_0 u$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta_0 u$$

$\mapsto$ Estudo do 4^{o} Caso com $m > n$

Vamos analisar as ordens das matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$

Matrizes	ordem
$\mathbf{A}$	$n\times n$
$\mathbf{B}$	$n\times m$
$\mathbf{C}$	$m\times n$
$\mathbf{D}$	$m\times m$
$\mathbf{U}$	$m\times 1$
$\mathbf{y}$	$m\times 1$
$\mathbf{x}$	$n\times 1$
$\mathbf{x}'$	$n\times 1$

$x' = Ax + Bu$, $\quad y = Cx + Du$ e suponhamos o sistema com uma entrada e uma saída

$\mapsto$ Podemos verificar que se a ordem da matriz $\mathbf{C}$ é $1\times n$ e da matriz $\mathbf{x}$ é $n\times 1$, o produto $\mathbf{Cx}$ fornece uma matriz 1×1;

$\mapsto$ Logo, a matriz $\mathbf{Du}$ deverá ser também de ordem 1×1, já que a ordem de $\mathbf{u}$ é 1×1;

$\mapsto$ Portanto, a matriz $\mathbf{D}$ é um escalar;

$\mapsto$ Conclusão, $m > n$ $\left(\text{ordem dos polinômios}\right)$ não é possível pois, a divisão do numerador de grau m por um denominador de grau $n < m$, fornecerá um resto de grau maior que zero e o produto da matrizes $\mathbf{D}$ por $\mathbf{u}$ não será um escalar.