INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

SINAIS E SISTEMAS LINEARES

DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA

Prof. Dr. Walterley A. Moura

contato: walterley@gmail.com

Representação de Sinais Periódicos de tempo discreto em

Séries de Fourier de Tempo Discreto

3.7 Representação de sinais periódicos de tempo discreto em série de Fourier

- A representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto é uma **série finita**, ao contrário da representação em **série infinita** exigida para sinais periódicos em tempo contínuo.

- Como consequência, não existe questões matemáticas de convergência.

3.7.1 Combinações lineares de exponenciais harmonicamente relacionadas.

- Um sinal em tempo discreto x[n] é periódico com período N se:

$$x[n] = x[n+N] \qquad (1)$$

- O período fundamenta é o menor inteiro positivo N para qual a equação (1) é válida.

- A frequência fundamental é dada por:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- Propriedade que devemos considerar diz respeito a periodicidade do sinal exponencial complexo de tempo discreto.

- Para que sinal $e^{j\omega_0 n}$ seja periódico com período N > 0,

devemos ter

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}\underbrace{e^{j\omega_0 N}}_{=1} = e^{j\omega_0 n}$$

- Para satisfazer a condição: $e^{j\omega_0 N} = 1 = e^{j2\pi} = e^{j2\pi m}$

$\omega_0 N \longrightarrow$ deve ser múltiplo inteiro de 2π

Assim, temos: $\omega_0 N = 2\pi m \longrightarrow \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$

- O conjunto de todos os sinais exponenciais complexos relacionados harmonicamente de tempo discreto é dado por:

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2)$$

- Todos esses sinais tem frequências fundamentais que são múltiplas de:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- Existem apenas N sinais distintos no conjunto dado pela equação (2). Especificamente:

$$\phi_0[n] = \phi_N[n], \quad \phi_1[n] = \phi_{N+1}[n],$$

Em geral, temos:

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \qquad (3)$$

- Isso é uma consequência do fato de que as exponenciais complexas de tempo discreto, que diferem em frequência por um múltiplo de 2π são idênticas.

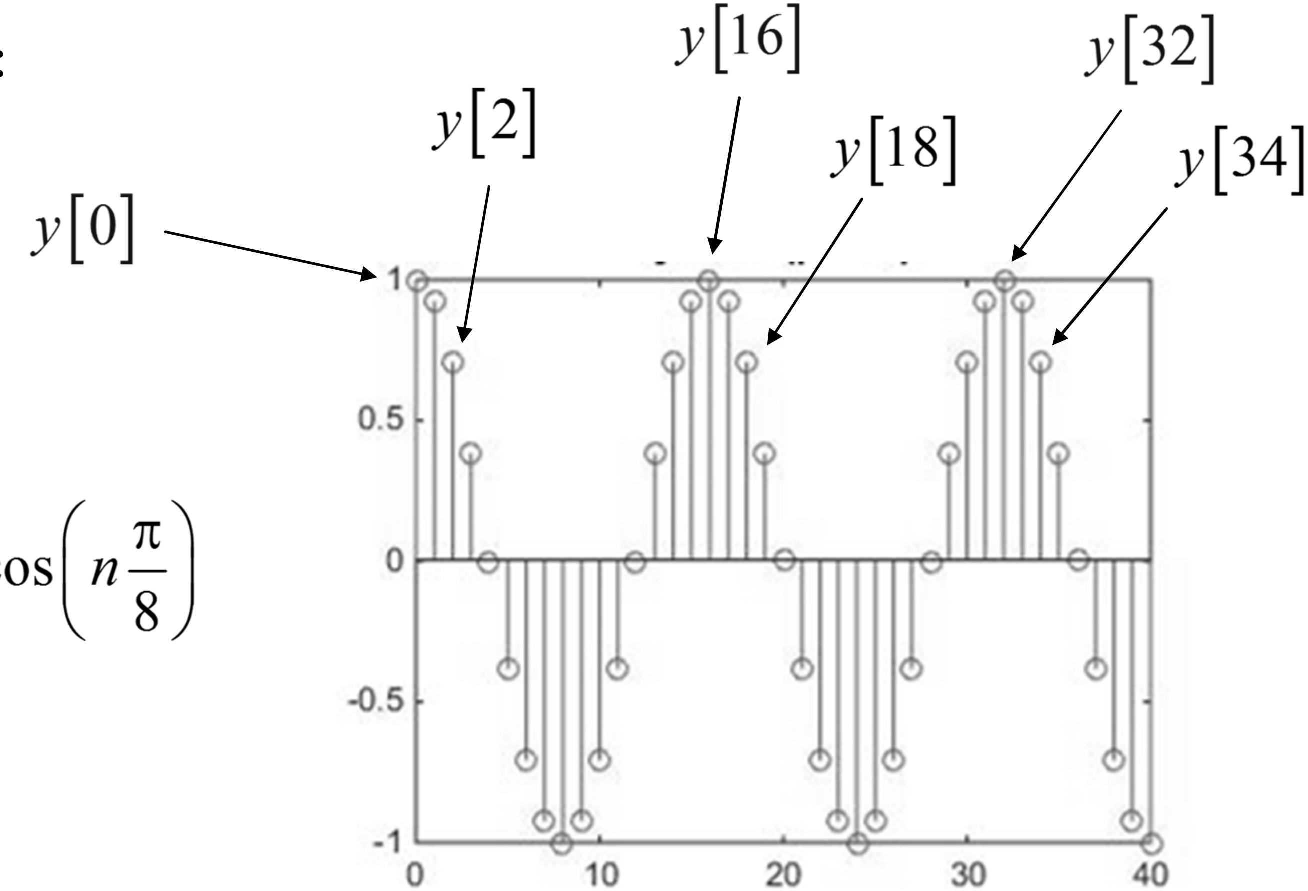
$$\phi_0[n] = \phi_N[n], \quad \phi_1[n] = \phi_{N+1}[n] \longrightarrow \phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n]$$

Prova

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{k+rN}[n] &= e^{j(k+rN)\omega_0 n} \\
&= e^{jk\omega_0 n} e^{jrN\frac{2\pi}{N}n} \\
&= e^{jk\omega_0 n} e^{jr2\pi n} \\
&= e^{jk\omega_0 n} \underbrace{\left(e^{j2\pi}\right)}_{=1}^{rn} \\
&= e^{jk\omega_0 n} \\
&= \phi_k[n]
\end{aligned}$$

Exemplo:



$$y[n] = \cos\left(n\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\omega_0 = \pi/8 \;\Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{n}{N} \;\Rightarrow\; N = \frac{2\pi n}{\omega_0} = \frac{2\pi n}{\pi/8} = 16n$$

$$N = 16 \;\; (\text{menor inteiro positivo})$$

- A representação de sequências periódicas em termos de combinações lineares da equação (2):

$$x[n] = \sum_{k} a_k \phi_k[n] = \sum_{k} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad (4)$$

Conclusão:

i) $\phi_k(n)$ são distintas apenas para uma faixa de N valores sucessivos de k;

ii) o somatório na equação (4) só precisa incluir termos nesse intervalo, começando em qualquer valor de k;

iii) indicaremos esse fato no somatório da seguinte maneira $k = \langle N \rangle$, ou seja:

k poderia assumir os valores:

$k = 0, 1, \ldots, N-1$ ou

$k = 1, 2, 3, \ldots, N$ ou

$k = 2, 3, 4, \ldots, N+1$, e assim por diante

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad (5)$$

$x[n] \rightarrow$ Série de Fourier de tempo discreto

$a_k \rightarrow$ coeficientes da série de Fourier

$\langle N \rangle = r, r+1, r+2, \ldots, r+N-1$

3.7.2 Representação de um sinal periódico de tempo discreto em série de Fourier.

- Se calcularmos a equação (5) em N valores sucessivos de n correspondentes x[n], obteremos:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\left.\begin{aligned}
x[0] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k, \\
x[1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}}, \\
&\dots \\
x[N-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}(N-1)}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

- A equação (6) representa um conjunto de equações lineares para os N coeficientes desconhecidos a_k, onde k varia sobre um conjunto de N inteiros sucessivos

- O conjunto de equações (6) é linearmente independente.

i) Considere a função

$$A[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

calcularemos o valor dessa expressão fazendo:

$$k = pN, \quad p = 0,1,2,...$$

$$A[pN] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jpN\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi}\right)^{pn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, ...$$

Para os outros valores de k não múltiplo inteiro de N, obtemos:

$$A[k]=\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=1+e^{jk\frac{2\pi}{N}}+e^{jk\frac{4\pi}{N}}+\ldots+e^{jk\frac{2(N-1)\pi}{N}}$$

Soma de uma PG de razão q : $\quad S=a_1\dfrac{1-q^N}{1-q}$

$$A[k]=1\frac{1-\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)^N}{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-e^{j2\pi k}}{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-1}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}n}}=0$$

Assim, podemos resumir em:

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{outros valores de } k \end{cases} \qquad (7)$$

A equação (7) estabelece que a soma dos valores de uma exponencial complexa periódica é zero sobre um período.

ii) Cálculo dos coeficientes a_k

A equação (5) é dada por

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

i) Multiplicar ambos os membros da equação (4) por:

$$\sum_{r=\langle N\rangle} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$$

ii) Obtemos a expressão

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$$

iii) Trocar a ordem do somatório do lado esquerdo

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \underbrace{\left(\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}\right)}_{=A[k]}$$

$$A[k] = \begin{cases} N, & \text{se } k = r \text{ ou múltiplo inteiro de } N \Rightarrow a_k = a_r \\ 0, & \text{se } k \neq r \end{cases}$$

Assim, obtemos as expressão:

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = Na_r$$

- **Coeficientes da série de Fourier para tempo discreto;**

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad (8)$$

- **Série de Fourier em tempo discreto**

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad (9)$$

- Levando em conta a equação (5), observamos que, se tomarmos k na faixa de 0 até N-1, teremos:

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \ldots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] \qquad (10)$$

- De modo semelhante, se tomarmos k na faixa de 1 até N, teremos:

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + \ldots + a_N\phi_N[n] \qquad (11)$$

- Da equação (3), obtemos que: $\phi_0[n] = \phi_1[n]$

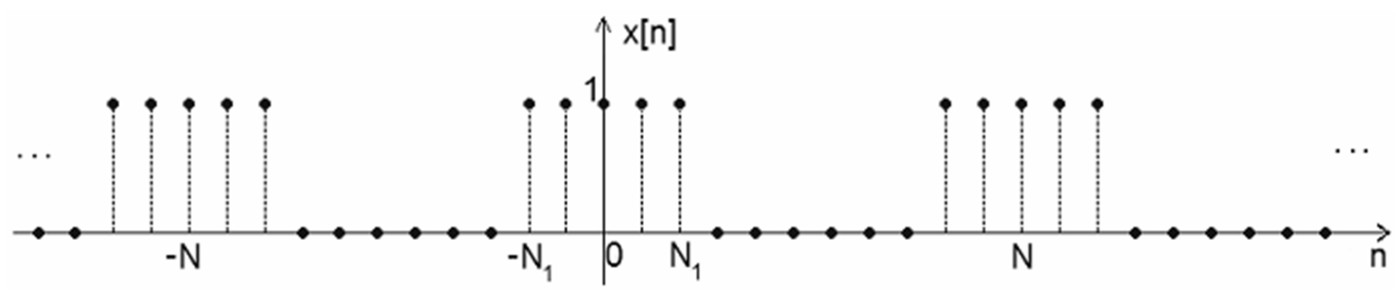
- Comparando equação (10) com a equação (11): $a_0 = a_N$

- De modo análogo, temos: $a_k = a_{k+N}$

Exemplo: Considere a onda quadrada periódica em tempo discreto,

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$x[n+N] = x[n]$$



Os coeficientes da série de Fourier de tempo discreto é dado por:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Fazendo e $m=n+N_1$, temos:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)}$$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \underbrace{\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}}_{PG}$$

Soma de uma PG de razão q: $\quad S = a_1 \dfrac{1-q^m}{1-q},$

m é o número de termos da PG

$$\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} = 1 + e^{-jk\frac{2\pi}{N}} + e^{-jk\frac{2\pi}{N}} + \ldots + e^{-jk\frac{4N_1\pi}{N}} = \frac{1-e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{N}}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

Nota:

$$1-e^{-j\alpha} = e^{-j\frac{\alpha}{2}}\left(e^{j\frac{\alpha}{2}} - e^{-j\frac{\alpha}{2}}\right) = e^{-j\frac{\alpha}{2}} j2 \left(\frac{e^{j\frac{\alpha}{2}} - e^{-j\frac{\alpha}{2}}}{j2}\right) = e^{-j\frac{\alpha}{2}} j2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{1-e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{N}}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{A}{B}$$

$$A = 1-e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{N}} = e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{2N}}\left(e^{jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{2N}}\right)$$

$$= e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{2N}} j2\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi k}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$B = 1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}} = e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\right) = e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} j2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{2N}} j2\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi k}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} j2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{2N}}}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}} \frac{j2\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{j2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$$

$$\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{2N}}}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}N_1 - \frac{2\pi}{N}N_1 - \frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{N}\right)} = 1$$

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi k}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}, \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, \qquad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

➢ Para o caso particular: $N = 9 \quad e \quad N_1 = 2$

➢ Temos que : $2N_1 + 1 = 5$

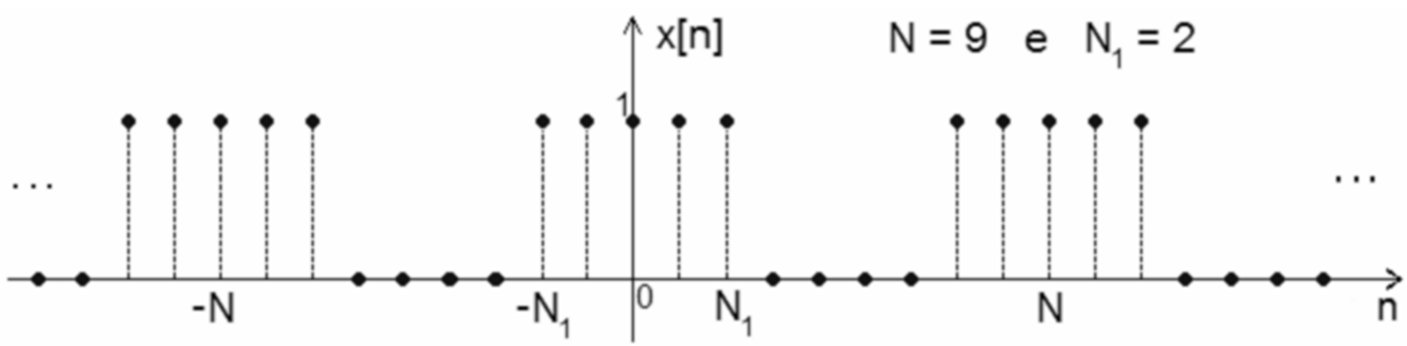
que representa o número de pontos que assumem o valor 1 em cada período.

➢ Consequentemente,

$$N - (2N_1 + 1) = 9 - 5 = 4$$

representa o número de pontos iguais a 0 (zero) em cada período.

➢ O gráfico de x[n] é representado abaixo.



$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\text{sen}\left[\frac{2\pi k}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}, \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, \qquad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

Cálculo dos coeficientes de Fourier, N=9 e N1=2		
a_{-4} = 0,0725	a_4 = 0,0725	a_{12} = -0,1111
a_{-3} = -0,111	**a5 = 0,0725**	a_{13} = 0,0725
a_{-2} = -0,0591	a_6 = -0,11111	**a14 = 0,0725**
a_{-1} = 0,3199	**a_7 =-0,0591**	a_{15} =
a_0 = 0,5555	a_8 = 0,3199	**a_{16} =-0,0591**
a_1 = 0,3199	a_9 = 0,5555	a_{17} =
a_2 =- 0,0591	a_{10} = 0,3199	a_{18} =
a_3 = -0,1111	a_{11} = -0,0591	

Observe que a cada N coeficientes eles se repetem. Ou seja, a cada 9, os a_k tem os mesmos valores.

Assim, temos

$a_{-4} = a_5 = a_{14} = \ldots$

$a_{-3} = a_6 = a_{15} = \ldots$

$a_{-2} = a_7 = a_{16} = \ldots$

E assim por diante.

- Com os valores de a_k, podemos escrever a série de Fourier.
- Ao contrário do caso contínuo, em que teríamos de acrescentar mais e mais termos para obter a aproximação melhor.
- No caso discreto é possível uma aproximação exata com $N = 9$ termos consecutivos:

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{9}n}$$

- Vamos tomar **3 termos** consecutivos apenas: k = -1, 0, 1, obtemos:

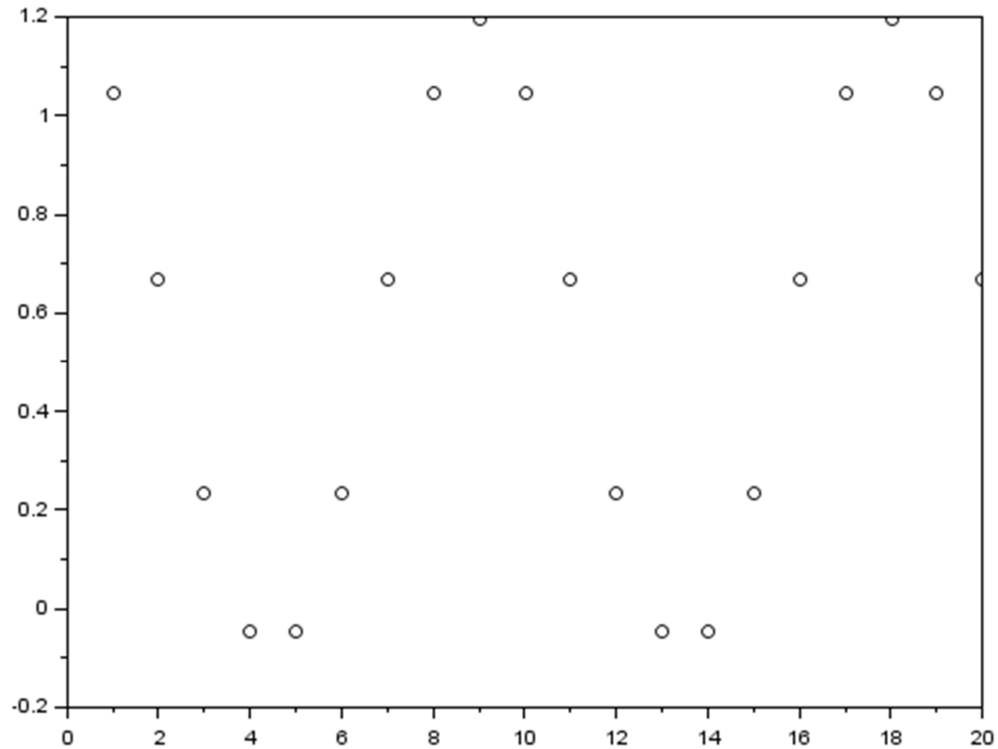
$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{9}n}$$

$$\tilde{x}_3[n]=\sum_{k=-1}^{1} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{9}n}=a_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{9}n}+a_0+a_1e^{j\frac{2\pi}{9}n}$$

$$=0,3199e^{-j\frac{2\pi}{9}n}+0,5556+0,3199e^{j\frac{2\pi}{9}n}$$

$$=0,5556+0,3199\times 2\left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{9}n}+e^{-j\frac{2\pi}{9}n}}{2}\right)$$

$$=0,5556+0,3199\times 2\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}n\right)$$



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

- Vamos tomar **5 termos** consecutivos apenas: k = -2, -1, 0, 1, 2 obtemos:

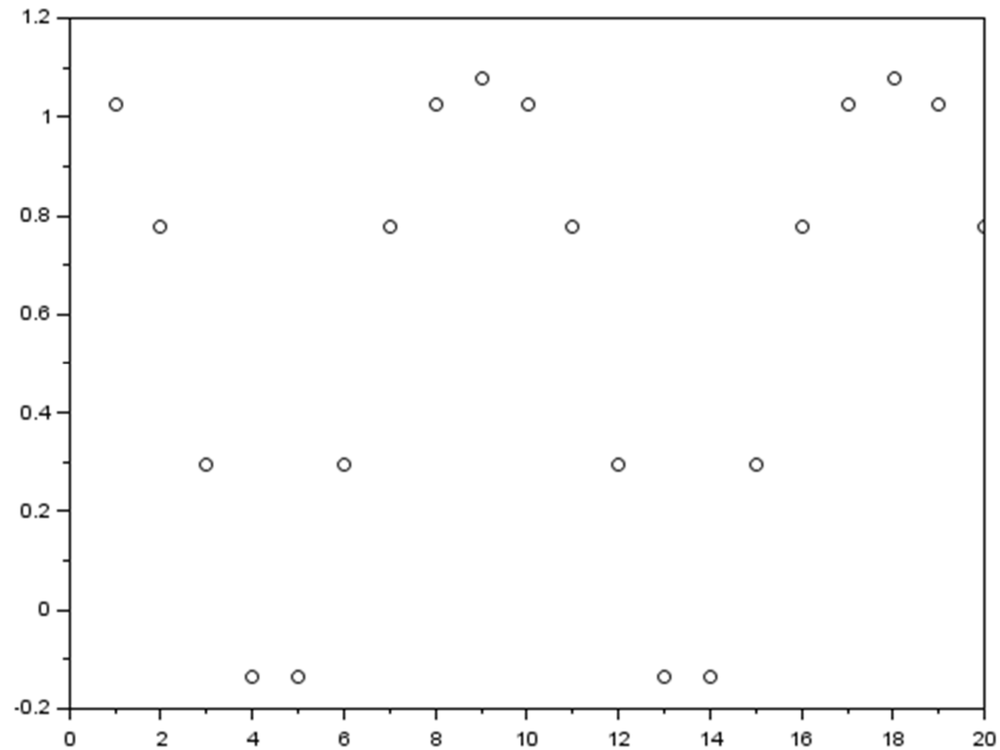
$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{9}n}$$

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{k=-2}^{2} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{9}n} = a_{-2}e^{-j\frac{4\pi}{9}n} + a_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{9}n} + a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{9}n} + a_2 e^{j\frac{4\pi}{9}n}$$

$$= -0,0591e^{-j\frac{4\pi}{9}n} + 0,3199e^{-j\frac{2\pi}{9}n} + 0,5556 + 0,3199e^{j\frac{2\pi}{9}n} - 0,0591e^{j\frac{4\pi}{9}n}$$

$$= 0,5556 + 0,3199 \times 2\left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{9}n} + e^{-j\frac{2\pi}{9}n}}{2}\right) - 0,0591 \times 2\left(\frac{e^{j\frac{4\pi}{9}n} + e^{-j\frac{4\pi}{9}n}}{2}\right)$$

$$= 0,5556 + 0,3199 \times 2 \times \cos\left(\frac{2\pi}{9}n\right) - 0,0591 \times 2 \times \cos\left(\frac{4\pi}{9}n\right)$$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

- Finalmente, **9 termos** consecutivos: k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 obtemos:

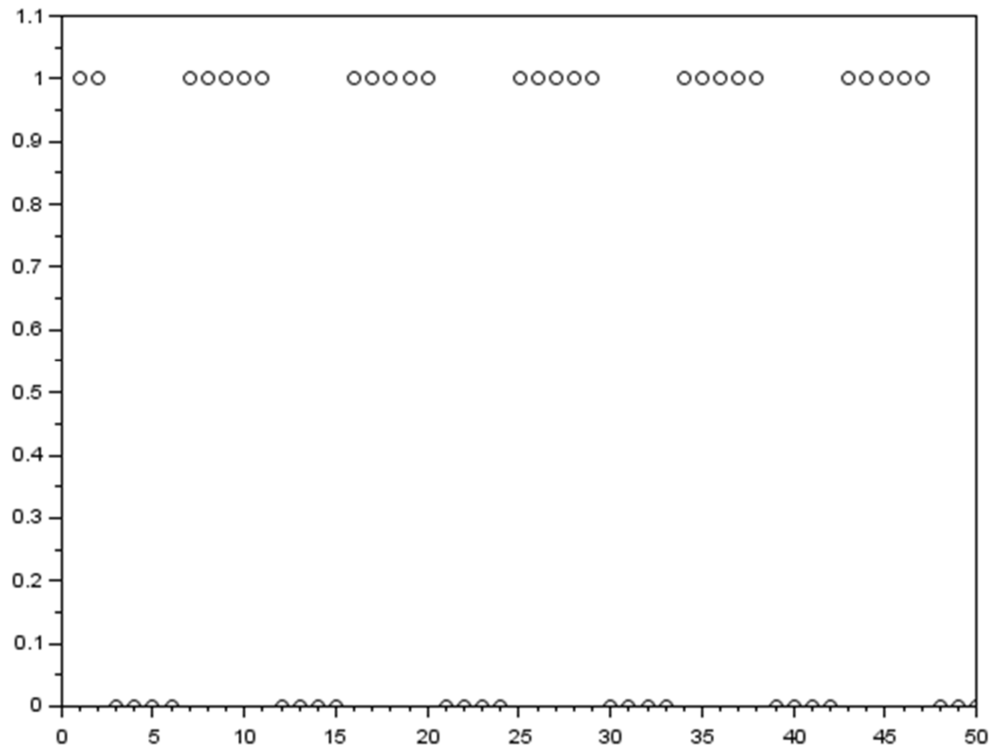
$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{9}n}$$

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{k=-4}^{4} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{9}n} = a_{-4}e^{-j\frac{8\pi}{9}n} + a_{-3}e^{-j\frac{6\pi}{9}n} + a_{-2}e^{-j\frac{4\pi}{9}n} + a_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{9}n} + a_0 +$$

$$+ a_1e^{j\frac{2\pi}{9}n} + a_2e^{j\frac{4\pi}{9}n} + a_3e^{j\frac{6\pi}{9}n} + a_4e^{j\frac{8\pi}{9}n}$$

$$= 0,5556 + 0,3199 \times 2 \times \cos\left(\frac{2\pi}{9}n\right) - 0,0591 \times 2 \times \cos\left(\frac{4\pi}{9}n\right) -$$

$$- 0,111 \times 2 \times \cos\left(\frac{6\pi}{9}n\right) + 0,0725 \times 2 \times \cos\left(\frac{8\pi}{9}n\right)$$


1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Propriedade	Sinal periódico	Coeficientes da série de Fourier
	$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ Periódicas com período N e frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/N$	$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}$ Periódico com período N
Linearidade	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Deslocamento no tempo	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Deslocamento em frequência	$e^{jM(2\pi/N)n}\, x[n]$	a_{k-M}
Conjugação	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Reflexão no tempo	$x[-n]$	a_{-k}
Mudança de escala no tempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{se } n \text{ é múltiplo de } m \\ 0, & \text{se } n \text{ não é múltiplo de } m \end{cases}$ (*periódica com período mN*)	$\frac{1}{m} a_k \begin{pmatrix} \text{vistos como periódico} \\ \text{com perído } mN \end{pmatrix}$
Convolução periódica	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplicação	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$
Primeira diferença	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
Soma acumulada	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \begin{pmatrix} \text{de valor finito e periódico apenas se} \\ a_0 = 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})}\right)a_k$
Simetria conjugada para sinais reais	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathfrak{Re}\{a_k\} = \mathfrak{Re}\{a_{-k}\} \\ \mathfrak{Im}\{a_k\} = -\mathfrak{Im}\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Sinais reais e pares	$x[n]$ real e par	a_k real e par
Sinais reais e ímpares	$x[n]$ real e ímpar	a_k puramente imaginário e ímpar
Decomposição par-ímpar de sinais reais	$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$ $x_0[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$\mathfrak{Re}\{a_k\}$ $j\mathfrak{Im}\{a_k\}$
	Relação de Parseval para sinais periódicos $\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} \lvert x[n] \rvert^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} \lvert a_k \rvert^2$	

3.8 Relação de Parseval para sinais periódicos de tempo discreto

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\left|x[n]\right|^2 = \sum_{n=<N>}\left|a_k\right|$$