ELETROMAGNETISMO

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Motivação e introdução.

- **Aplicação das leis vistas anteriormente a alguns materiais que os engenheiros precisam trabalh**ar.

- **Definição de corrente e densidade de corrente**;

- **Equação fundamental da continuidade**;

- **Condutores, lei de Ohm. Cálculo de resistência. Condições de contorno em superfícies condutoras**;

- **Semicondutores, permisssividade relativa ou constante dielétrica.**

- **O agrupamento de condutores e semicondutores para formar capacitores**

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

5.1 Corrente e densidade de corrente

$I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow$ **corrente elétrica** (movimento de cargas positivas = corrente convencional) [A]

Na teoria dos campos estamos mais interessados, em geral, **em acontecimentos que ocorrem em um ponto em vez de uma grande região**, e devemos achar o conceito de **densidade de corrente**, medida em ampères por metro quadrado **(A/m²)**.

A densidade de Corrente é um vetor representado por **J**.

O incremento de corrente ΔI que atravessa a superfície incremental ΔS normal à densidade de corrente é:

$$\Delta I = \vec{J}_N \Delta S$$

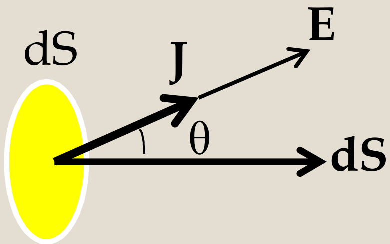
E no caso que a densidade de corrente não é perpendicular à superfície:

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta S$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA6

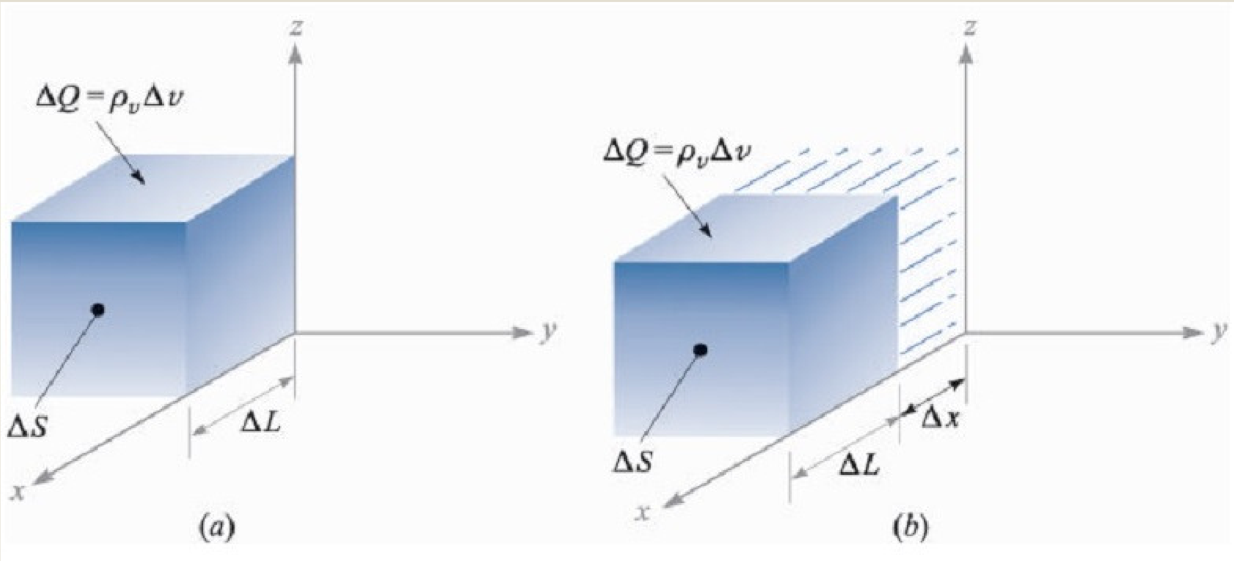
A corrente total é obtida pela integração:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \rightarrow \text{Relação entre a corrente e a densidade de corrente}$$



A densidade de corrente pode ser relacionada à velocidade da densidade volumética de carga em um ponto.

Consideremos **$\Delta Q = \rho_V \, \Delta S \, \Delta L$**. Vamos considerar na fig. abaixo que somente temos a **componente x de velocidade**



CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA6

Portanto, nós deslocamos uma carga $\Delta Q = \rho_V \, \Delta S \, \Delta x$ através de um plano de referência, perpendicular à direção do movimento, em um intervalo de Δt.

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Se for tomado o limite em relação ao tempo, temos:

$$\Delta I = \rho \Delta S v_x$$

Onde $\mathbf{v_x}$ representa a componente **x** da velocidade **v**.

E, em geral:

$\vec{J} = \rho \vec{v}$ **É a densidade de corrente de convecção** [A/m^2]

Este resultado mostra claramente que a carga em movimento constitui uma corrente.

Este tipo de corrente é chamada de corrente de convecção e $\rho \vec{v}$ é a densidade de corrente de convecção.

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ **É a densidade de corrente de condução** [A/m^2]
(**Forma pontual da lei de Ohm**.)

σ (S/m) - siemens/metro)

5.2 Continuidade da corrente

A corrente através da superfície fechada é:

$$I = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

A corrente através de uma superfície fechada (fluxo de cargas positivas da superfície) **é igual a razão do decréscimo de cargas positivas** (ou acréscimo de cargas negativas) no interior da região.

Dentro da superfície fechada, a carga denominada Q_i decresce, então, numa razão, (- dQ_i/dt), e o princípio da conservação de cargas requer:

$$I = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ_i}{dt}$$ (forma integral da equação de continuidade)

OBS: $+\frac{dQ_i}{dt}$ = razão (taxa) de acréscimo (incremento) de cargas no tempo dentro da superfície.

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

5.2 Continuidade da corrente

Aplicando o teorema da divergência à expressão acima (da continuidade), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \text{ (Forma pontual da equação da continuidade)}$$

"A corrente ou carga por segundo que sai de um pequeno volume é igual a razão de decréscimo de carga por unidade de volume em cada ponto".

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Como exemplo, vamos considerar a densidade de corrente que é direcionada radialmente para fora e diminui exponencialmente com o tempo,

$$\vec{J} = \frac{1}{r} e^{-t} \vec{a}_r \quad A/m^2$$

Considerando um instante de tempo **t=1s**, nós podemos calcular o total de corrente que sai em **r=5m**.

$$I = J_r S = \left(\frac{1}{5} e^{-1} \right) \left(4\pi 5^2 \right) = 23{,}1\ A$$

No mesmo instante, entretanto, para um raio levemente maior, **r=6m**, nós temos:

$$I = J_r S = \left(\frac{1}{6} e^{-1} \right) \left(4\pi 6^2 \right) = 27{,}7\ A$$

Assim a **corrente total**, **é maior** em um **r=6m** do **que em r=5m**.

Para entender por que isso acontece, **precisamos verificar a densidade de carga volumétrica e a velocidade**. Nós vamos utilizar a **primeira equação de continuidade**.

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r} e^{-t} \vec{a}_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r} e^{-t} \right) = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

Agora procuramos a densidade volumétrica de carga pela integração em relação a t.

Desde que ρ_v é dado por uma derivada parcial em relação ao tempo, a "constante" de integração pode ser uma função de r:

$$\rho_v = -\int \frac{1}{r^2} e^{-t} dt + K(r) = \frac{1}{r^2} e^{-t} + K(r)$$

Se assumirmos que $\rho_v \to 0 \; com \; t \to \infty, \; então \; K(r) \to 0,$

$$\rho_v = \frac{1}{r^2} e^{-t} \;\; C/m^3$$

$Nós \; agora \; podemos \; usar \; \vec{J} = \rho_v \vec{v} \; e \; encontrar \; a \; velorciade \; \vec{v},$

$$v_r = \frac{J_r}{\rho_v} = \frac{\frac{1}{r} e^{-t}}{\frac{1}{r^2} e^{-t}} = r \;\; (m/s)$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

- **A velocidade é maior em r=6 do que em r=5, e vemos que alguma força está acelerando a densidade de carga na direção para fora;**

- **Nós vemos que a densidade de corrente é inversamente proporcional a** r;

- **A densidade de carga é inversamente proporcional a r^2 , e a velocidade e a corrente total são proporcionais a r.**

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

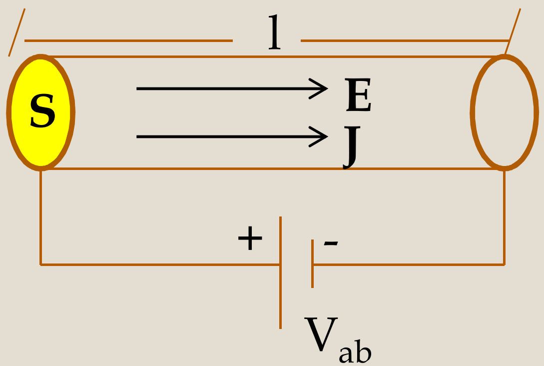
5.3 Condutores metálicos – Resistência (R)

Definição de resistência de um contutor qualquer:

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L}}{\int_s \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad [\Omega]$$

Para um condutor que possui seção reta uniforme (condutor cilíndrico, com área S e comprimento l)

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_l^0 \vec{E} \cdot d\vec{L}}{\int_s \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \frac{El}{\sigma ES} \Rightarrow R = \frac{l}{\sigma S} \quad [\Omega]$$



5.3 Condutores metálicos – Resistência (R)

Princípios que se aplicam a condutores em campos eletrostáticos:

1 – **A intensidade de campo elétrico dentro de um condutor é zero.**

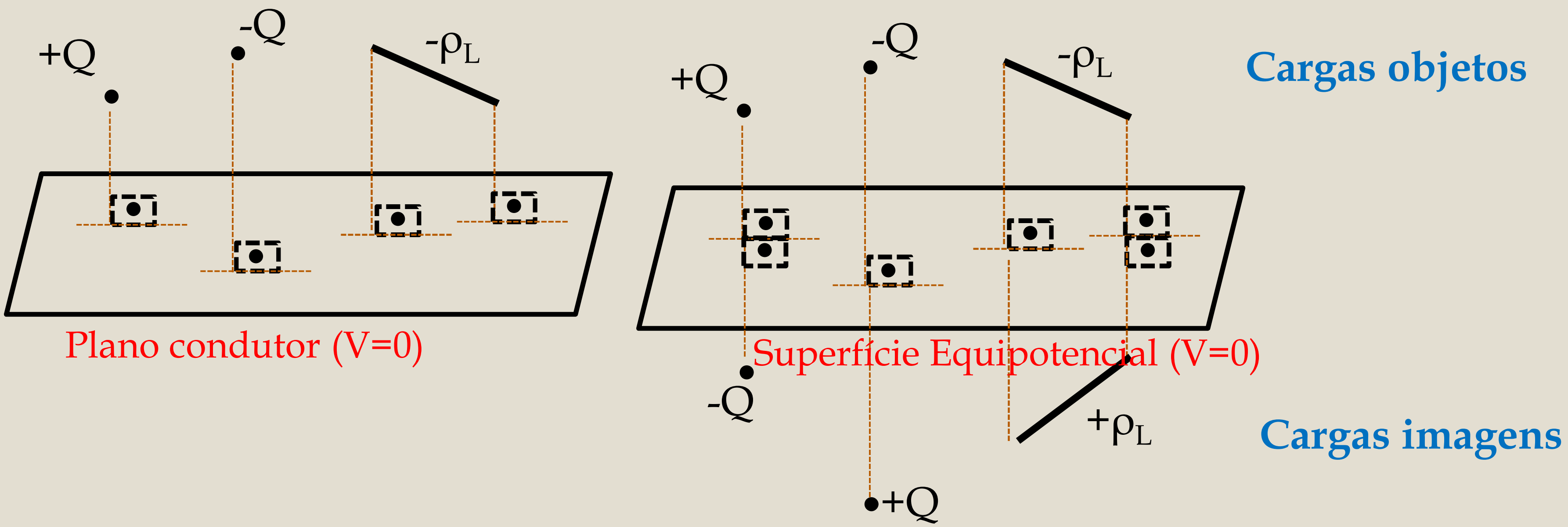
2- **A intensidade de campo eletrostático na superfície de um condutor, é em qualquer ponto, normal à superfície.**

3 – **A superfície condutora é equipotencial.**

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

5.3 o método das imagens

Na solução de problemas envolvendo um plano condutor aterrado pela substituição deste por uma superfície equipotencial mais as cargas imagens, como ilustrado abaixo.



- O processo pode ser estendido a qualquer distribuição de cargas próximas a um plano condutor aterrado (V=0), até abranger todas as cargas da distribuição;

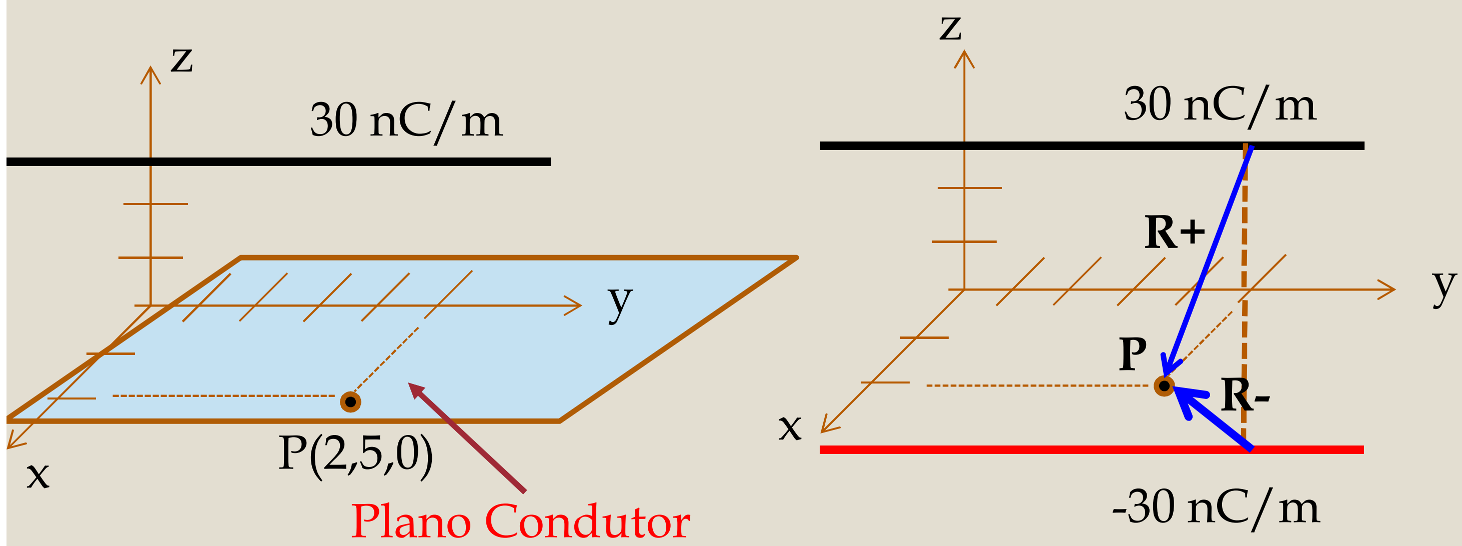
- A distribuição original é substituída e pela própria distribuição e sua imagem, sem plano condutor;

- Na maioria das vezes, o campo potencial do novo sistema é muito mais fácil de ser determinado.

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Determinar a densidade superficial de carga no ponto P(2,5,0) do plano condutor z=0, estando presente uma linha de cargas de 30 nC/m em x=0, z=3.

- **Removemos o plano condutor e acrescentamos a imagem,**



O vetor radial que une a linha positiva ao ponto P é $\mathbf{R}_+ = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z$, enquanto $\mathbf{R}_- = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$, os campos individuais são:

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 R_+}\vec{a}_{R+} = \frac{30\times10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{a}_x - 3\vec{a}_z}{\sqrt{13}}$$

e

$$\vec{E}_- = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 R_-}\vec{a}_{R-} = \frac{-30\times10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{a}_x + 3\vec{a}_z}{\sqrt{13}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -249\vec{a}_z \ (V/m)$$

Este é o campo no ponto P.

É importante notar que o campo é normal ao plano, como era de se esperar.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = -2,20\vec{a}_z \ \mathrm{nC/m^2}$$

E, como ele aponta para o plano condutor, ρ_S é negativo tendo por valor -2,20 nC/m² em **P**.

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Exercício – **Um plano condutor está localizado** em x=4, **e uma linha infinita de cargas de 40 nC/m situa-se ao longo da linha x=6, y=3**. **V=0 no plano condutor**. **Em P (7,-1,5)** encontre.

a) V;
b) **E**.

Respostas:
a) -316 V
b) - 45,4 $\mathbf{a}_x$ V/m