INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

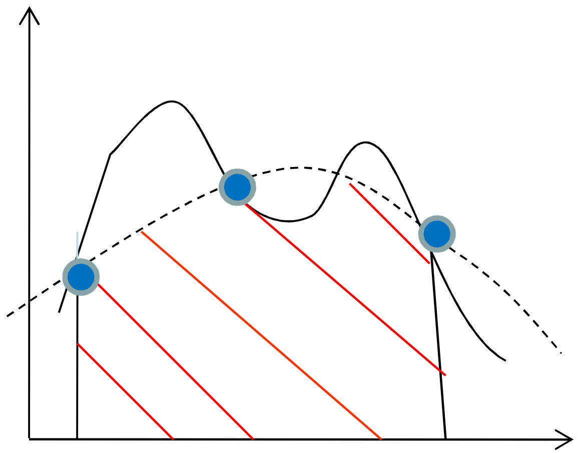
A regras de Simpson

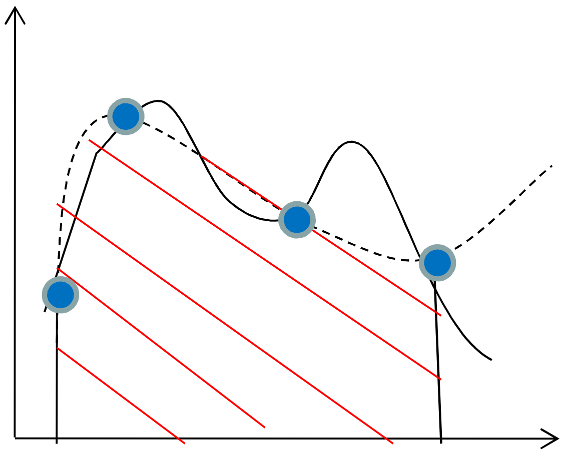
Motivação: Além de aplicar a regra do trapézio com segmentos menores, outra forma de obter uma estimativa mais acurada de uma integral é usar polinômios de grau mais alto para ligar os pontos.

Se existir um ponto extra no ponto médio entre f(a) e f(b), os três pontos podem ser ligados por uma parábola. Se existirem dois pontos igualmente espaçados entre f(a) e f(b), os quatro pontos podem ser ligados por um polinômio de terceiro grau.

- **São baseadas na estratégia de substituir uma função complicada ou dados tabulados por uma função aproximadora simples que seja fácil de integrar:**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA





(a) **Descrição gráfica da regra de 1/3 de Simpson** (**Consiste em tomar área da parábola ligando 3** pontos).

(b) **Descrição gráfica da regra de 3/8 de Simpson (Consiste em tomar a área sob uma equação cúbica ligando 4 pontos).**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A regra de 1/3 de Simpson

A regra de 1/3 de Simpson é obtida quando um polinômio interpolador de segundo grau é substituído na equação (1) do slide anterior.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx \qquad (1)$$

Se a e b forem designados por x_0 e x_2 e se $f_2(x)$ for representado por um polinômio de lagrange de segundo grau, a integral se torna:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x_0 - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A regra de 1/3 de Simpson

Depois da integração e de manipulações algébricas, obtém-se a seguinte fórmula:

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \qquad (2)$$

Em que, para esse caso, h=(b-a)/2. Essa equação é conhecida como regra de 1/3 de Simpson. Ela é a segunda fórmula de integração fechada de Newton-Cotes.

A designação " 1/3 " vem do fato que h está dividido por 3 em (2).

A regra de Simpson tabém pode ser expressa:

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \qquad (3)$$

Em que a = x_0 , b = x_2 e x é o ponto médio entre a e b, o qual é dado por (b+a)/2.

Observe que de acordo com (3), o ponto médio tem peso de dois terços, e os dois pontos extremos, de um sexto.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A regra de 1/3 de Simpson

É possível mostrar que a aplicação da regra de 1/3 de simpson para um único seguimento tem um erro de truncamento:

$$E_t = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

ou, como h=(b-a)/2.

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2.880} f^{(4)}(\xi) \qquad (4)$$

em que ξ é algum ponto no intervalo a e b. Logo a regra de 1/3 de Simpson é mais precisa que a regra do Trapézio.

Em vez de ser proporcional à terceira derivada, como na regra do Trapézio, o erro é proporcional à quarta derivada.

A regra de Simpson tem precisão de terceira ordem, mesmo sendo baseada apenas em três pontos.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Uma única aplicação da Regra de 1/3

Use a equação (2) para integrar:

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

De a=0 a b=0,8. O valor exato determinado analiticamente é 1,640533.

Solução: Os valores da função:

f(0) = 0,2   f (0,4) = 2,456   f(0,8)= 0,232

Portanto a equação (2) resulta:

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} = 0,8\frac{0,2+4(2,456)+0,232}{6} = 1,367467$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Uma única aplicação da Regra de 1/3

O que representa um erro exato de:

$$E_t = 1,6403533 - 1,367467 = 0,2730667 \qquad \varepsilon_t = 16,6\%$$

O que é 5 vezes mais acurado que uma única aplicação da regra do Trapézio.

O erro estimado é:

$$E_a = -\frac{(0,8)^5}{2.880}(-2400) = 0,2730667$$

em que -2400 é o valor médio da quarta derivada para o intervalo, obtido usando o valor médio da quarta derivada como no caso do slide anterior.

O erro é aproximado por (E_a) o valor médio da quarta derivada não é uma estimativa exata.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Aplicações Múltiplas da Regra de 1/3 de Simpson

Do mesmo modo que na regra do Trapézio, a regra de Simpson pode ser melhorada dividindo-se o intervalo de integração em diversos segmentos de mesmo comprimento:

$$h = \frac{(b-a)}{n} \qquad (5)$$

A integral total pode ser representada como:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Substituindo cada integral individual pela regra de 1/3 de Simpson, obtém-se:

$$I \cong 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6}$$

$$+\cdots+2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Aplicações Múltiplas da Regra de 1/3 de Simpson

Ou combinando os termos e usando a equação (5)

$$h = \frac{(b-a)}{n} \qquad (5)$$

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{largura}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Altura média}} \qquad (6)$$

- **Deve ser usado um número par de segmentos para se implementar o método.**

- **Os ímpares representam o termo médio para cada aplicação e, portanto,** levam o peso 4.

- **Os pontos pares são comuns a aplicações adjacentes, e então, são contados duas vezes.**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Aplicações Múltiplas da Regra de 1/3 de Simpson

Uma estimativa do erro para a aplicação da regra de Simpson é obtida somando-se os erros individuais e fazendo a média da derivada.

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}(\xi) \qquad (7)$$

Onde $\bar{f}^{(4)}$ **é o valor médio da quarta derivada no intervalo.**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Uma única aplicação da Regra de 1/3

Use a equação (6) com n= 4 pontos

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

De a=0 a b=0,8. O valor exato determinado analiticamente é 1,640533.

Solução: Os valores da função:

Para n=4 (h=0,2)

f(0) = 0,2 f(0,2) = 1,288 f (0,4) = 2,456 f(0,6)=3,464 f(0,8)= 0,232

Portanto a equação (6) resulta:

$$I = 0,8\frac{0,2 + 4(1,288 + 3,464) + 2(2,456) + 0,232}{12} = 1,623467$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Uma única aplicação da Regra de 1/3

O que representa um erro exato de:

$$E_t = 1{,}6403533 - 1{,}623467 = 0{,}017067 \qquad \varepsilon_t = 1{,}04\%$$

O erro estimado é:

$$E_a = -\frac{(0{,}8)^5}{180(4)^4}(-2400) = 0{,}017067$$

Resultado superior a Regra do Trapézio.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Exercício 1 – Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^4 \left(1 - e^{-2x}\right) dx$$

(a) Uma única aplicação da regra de 1/3 de Simpson;

(b) Aplicação múltipla da regra de 1/3 de Simpson, com n=4.