INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

SINAIS E SISTEMAS LINEARES

DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA

Prof. Dr. Walterley A. Moura

contato: walterley@gmail.com

Representação de sinais de tempo discreto em

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

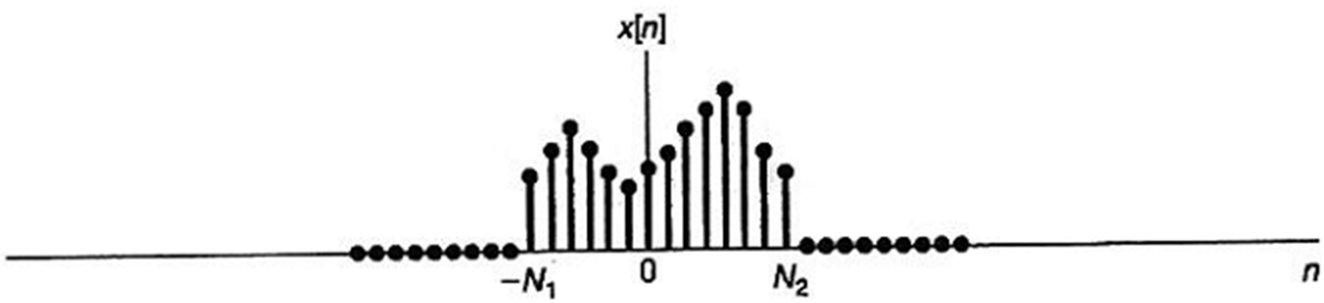
REPRESENTAÇÃO DE SINAIS APERIÓDICOS: A TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO

Dedução da transformada de Fourier de tempo discreto

- Considere a sequencia qualquer dada abaixo

$$x[n] = \begin{cases} \text{qualquer valor finito, } -N_1 \le n \le N_2 \\ 0, \text{ fora do intervalo } -N_1 < n < N_2 \end{cases}$$

dado pela figura abaixo

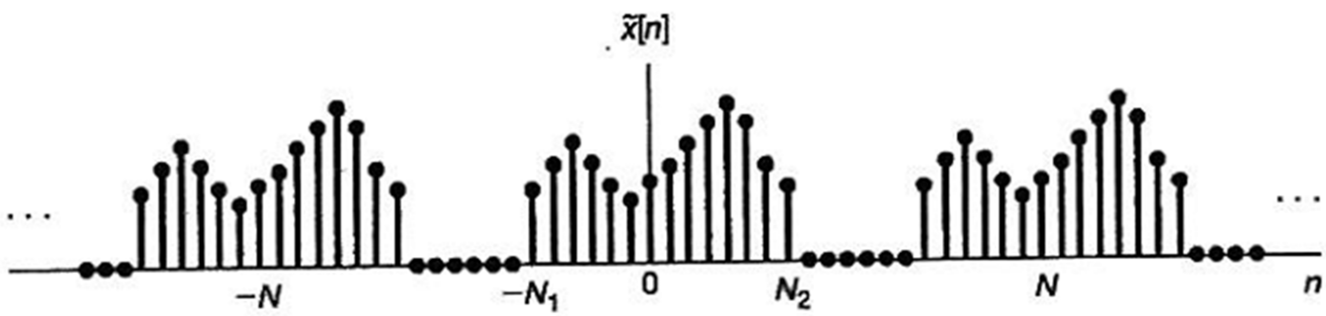


- A partir desse sinal podemos construir uma sequência periódica

$$\tilde{x}[n],$$

onde

$x[n]$ é o período, conforme mostra a figura abaixo



❑ Representação em série de Fourier de $\tilde{x}[n]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{n=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n},$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$\mapsto$ $x[n] = \tilde{x}[n]$ para um período que inclui o intervalo $-N_1 < n < N_2$

$\mapsto$ É coveniente escolher um intervalo do somatório acima que inclua $-N_1$ e N_2 desde que $\tilde{x}[n]$ posa se substituido por $x[n]$

$\mapsto$ Assim, temos:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$\mapsto$ Sendo que a segunda igualdade usamos o fato de $x[n]$ ser nulo fora do intervalo $-N_1 < n < N_2$

- Agora, definiremos a seguinte função:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = Na_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad \omega = k\frac{2\pi}{N}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$\mapsto$ Assim, vemos que a_k é proporcional às amostras de $X\left(e^{j\omega}\right)$, ou seja:

$$a_k = \frac{1}{N}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$\mapsto$ Combinando as equações de $\tilde{x}[n]$ com a_k, temos:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{n=\langle N\rangle} \frac{1}{N}X\left(e^{j\omega}\right)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=\langle N\rangle} X\left(e^{j\omega}\right)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\omega_0$$

Quando N aumenta ω_0 diminui e quando $N \to \infty$, $\omega_0 \to d\omega$ e a equação acima torna-se uma integral, ou seja:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

$\mapsto$ Podemos observar que $X\left(e^{j\omega}\right)$ é periódico com período igual a 2π

$\mapsto$ O intervalo de integração será em 2π

- Assim, temos o seguinte par de equações:

$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega} \longrightarrow$ transformada inversa de Fourier de tempo discreto

$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}} \longrightarrow$ transformada de Fourier de tempo discreto

❑ Exemplo: 1) Considere o sinal: $x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n \longrightarrow \text{Progressão Geométrica com razão } q = ae^{-j\omega}$$

Soma de uma P.G. infinita: $S = \dfrac{1}{1-q}$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$$

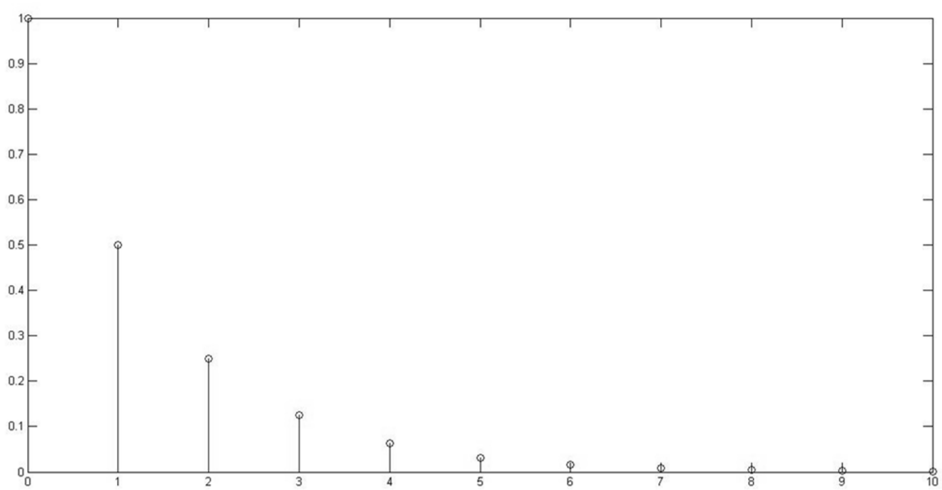
- Gráficos:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{\left(1-a\cos\omega\right)+ja\,\mathrm{sen}\,\omega}$$

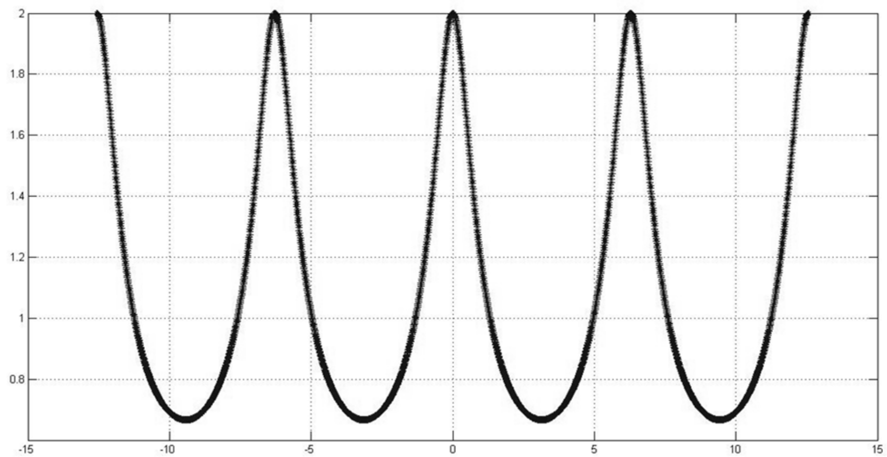
$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-a\cos\omega\right)^2+\left(a\,\mathrm{sen}\,\omega\right)^2}}$$

$$\phi=\arctan\left(-\frac{a\,\mathrm{sen}\,\omega}{1-a\cos\omega}\right)$$

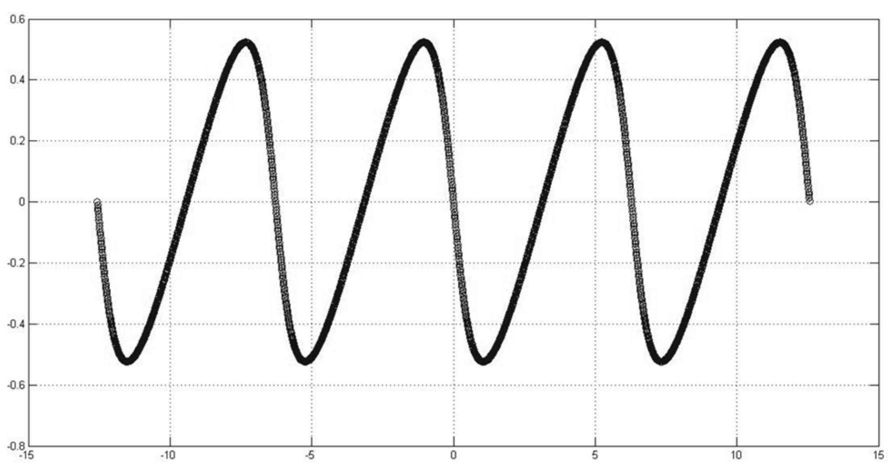
$$x[n]\times n$$



$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \times \ \omega$$



$$\arctan X\left(e^{j\omega}\right) \times \ \omega$$



❑ Exemplo: 2) Considere o sinal: $x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(a^{-1} e^{-j\omega}\right)^{n}}_{=A} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^{n}$$

Para o somatório "A" fazemos a seguinte mudança de variável: $n = -m$

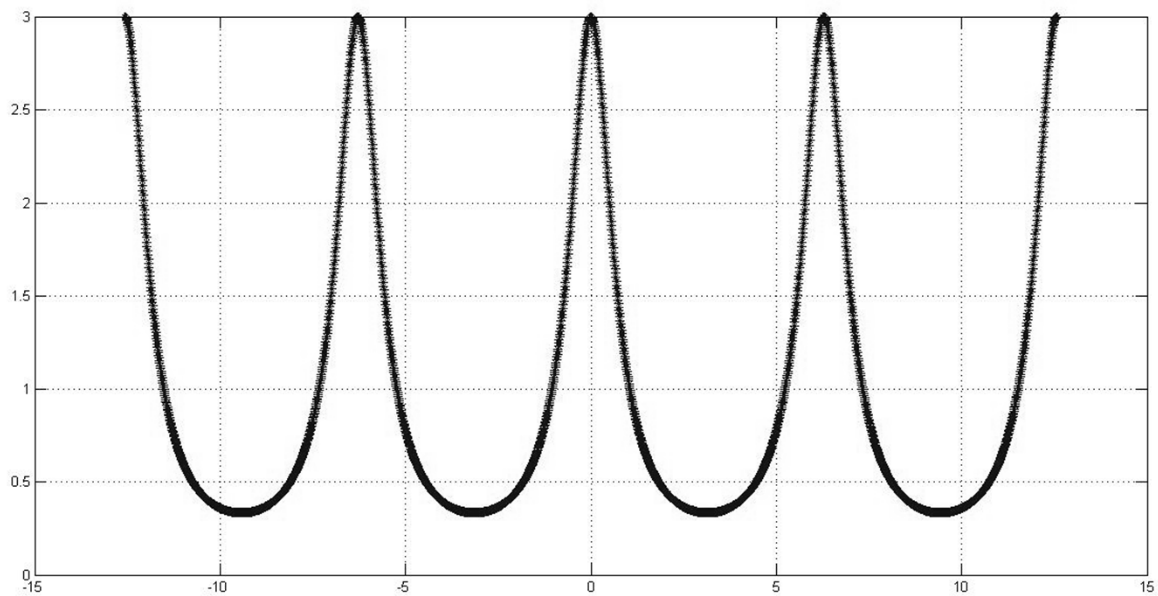
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a e^{j\omega}\right)^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^{n}$$

$$= \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - a^{2}}{1 - 2a\cos\omega + a^{2}}}$$

❑ Gráficos:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \times \ \omega$$



TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO PARA SINAIS PERIÓDICOS

Considere a transformada de Fourier de tempo discreto

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0\right)$$

Assim, a transformada inversa será;

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega-\omega_0\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

$$e^{j\omega_0 n} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad 2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$$

Generalizando, temos:

$\mapsto$ a TFTD é periódica com período igual a 2π;

$\mapsto$ isso sugere que a TFTD de $e^{j\omega_0 n}$ deverá ter impulsos em ω_0, $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$ e assim por diante.

Portanto, podemos escrever:

$$\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 n}\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0 - 2\pi m\right)$$

Para verificar, basta integrar achar a transformada de Fourier inversa:

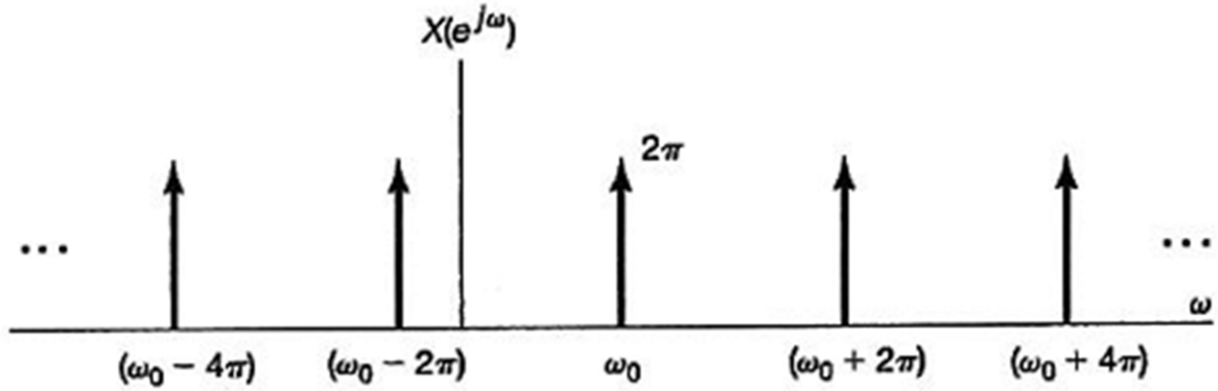
$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0 - 2\pi m\right)e^{j\omega n}d\omega$$

escolhemos qualquer intervalo de integração para incluir um impulso localizado em $\omega_0 + 2\pi r$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega = \int_{2\pi}\delta\left(\omega - \omega_0 - 2\pi r\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= e^{j\left(\omega_0 + 2\pi r\right)n} = e^{j\omega_0 n}$$

Transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 n}$



Agora consideremos a sequência periódica:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$ é uma combinação linear de $e^{j\omega_0 n}$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \ldots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n}$$

Assim, a transformada de Fourier será dada por:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$\sum_{k=\langle n \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Portanto, observamos que a TFTD de um sinal periódico pode ser construída diretamente de seus coeficientes de Fourier.

❑ Exemplo: 3) Considere o sinal: $x[n] = \cos\omega_0 n$

$$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 n\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\right\}$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 n\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 n\} = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0), \qquad -\pi < \omega < \pi$$

PROPRIEDADE DA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO

1) Linearidade: $y[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$

$$Y\left(e^{-j\omega}\right) = a_1 X_1\left(e^{-j\omega}\right) + a_2 X_2\left(e^{-j\omega}\right)$$

2) Conjugação: $y[n] = x^*[n]$

Por definição: $\mathcal{F}\left\{x^*[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\omega n} \qquad (1)$

Por definição: $X\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

$$X^*\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{j\omega n}$$

$$X^*\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\omega n} \qquad (2)$$

Logo, comparando (1) e (2): $\boxed{\mathcal{F}\left\{x^*[n]\right\} = X^*\left(e^{-j\omega}\right)}$

3) Reversão no tempo e na frequência: $y[n] = x[-n]$

Por definição: $\mathcal{F}\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n}$

fazendo $m = -n$,

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$X\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n}$, fazendo $n \to -n$, temos:

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n}$$

Portanto,

$$\boxed{\mathcal{F}\{x[-n]\} = X\left(e^{-j\omega}\right)}$$

4) Multiplicação por *n*: $y[n] = nx[n]$

Por definição: $X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

$$\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-jn)e^{-j\omega n}$$

$$\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n}$$

$$j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}\{nx[n]\} = j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}}$$

5) Deslocamento no tempo: $y[n] = x[n-n_0]$

Por definição: $\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j\omega n}$

fazendo $m = n - n_0$,

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega(m+n_0)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}e^{-j\omega n_0}$$

$$= e^{-j\omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = e^{-j\omega n_0} X\left(e^{-j\omega}\right)}$$

6) Deslocamento na frequência: $Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)$

Por definição: $X\left(e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n}$

$$X\left(e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n+j\omega_0 n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 n}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{X\left(e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)=\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 n}x[n]\right\}}$$

7) Convolução no tempo: $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

$$y[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_1[p]x_2[n-p]$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} x_1[p]x_2[n-p]\right)e^{-j\omega n}$$

fazendo $n - p = m$, temos:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} x_1[p]x_2[m]\, e^{-j\omega(m+p)}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]e^{-j\omega m}\sum_{p=-\infty}^{\infty} x_1[p]e^{-j\omega p}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X_1\left(e^{j\omega}\right)X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

8) Convolução na frequência: $y[n]=x_1[n]x_2[n]$

$$y[n]=x_1[n]x_2[n]$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]x_2[n]e^{-j\omega n}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1\left(e^{ju}\right)e^{jun}du\right)e^{-j\omega n}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1\left(e^{ju}\right)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]e^{-j(\omega-u)n}\right]du$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1\left(e^{ju}\right)X_2\left(e^{-j(\omega-u)}\right)du$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}X_1\left(e^{j\omega}\right)*X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

9) Teorema de Parseval: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$

Por definição: $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$ e $X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

$$X^*\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{j\omega n}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] x[n] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{j\omega n} \right\} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) X^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega}$$

TRANSMISSÃO SEM DISTORÇÃO

- Definição

a transmissão é dita ser sem distorção se a entrada e a saída satisfazerem a condição:

$$y[n] = G_0 x[n - n_0], \quad n_0 \text{ é o atraso}$$

Tomando a transformada de Fourier de tempo discreto, obtemos:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = G_0 e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\xrightarrow{X\left(e^{j\omega}\right)} \boxed{H\left(e^{j\omega}\right)} \xrightarrow{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = G_0 e^{-j\omega n_0}$$

Módulo: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = G_0$

Ângulo: $\angle H\left(e^{j\omega}\right) = -\omega n_0$

Para uma transmissão sem distorção o sistema LIT deve obedecer as condições acima, ou seja,

$\mapsto$ o módulo da função de tansferência do sistema $H\left(e^{j\omega}\right)$ é constante com a frequência;

$\mapsto$ a fase (ângulo) é uma função linear com a inclinação $-n_0$

SISTEMAS CARACTERIZADOS POR EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

- Uma equação diferencial é especificada para um sistema de tempo contínuo;
- Se a equação diferencial for ordinária, linear e invariante no tempo, podemos escrever:

$$a_0 y^n(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{m-1}(t) + b_2 x^{(m-2)}(t) + \ldots + b_{m-1} x'(t) + b_m x(t)$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_m$ são constantes e $y(t)$ e a saída e $x(t)$ é a entrada.

ou podems escrever :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(m-k)}(t)$$

- Uma equação de diferenças é especificada para um sistema de tempo discreto;

- A equação de diferenças para um sistema linear e invariante no tempo tem a forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$\mapsto a_1, a_2, ..., a_n \;\; e \;\; b_1, b_2, ..., b_m$ são constantes

$\mapsto y[n]$ e a saída

$\mapsto x[n]$ é a entrada.

- Aplicando a TFTD na equação acima, temos:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{p=0}^{M} b_p x[n-p]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{p=0}^{M} b_p e^{-j\omega p} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{p=0}^{M} b_p e^{-j\omega p}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

- **Exemplo:**

Considere um sistema LIT causal descrito pela equação de diferenças

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

a) Determine a resposta em frequência *H(ej^w)* desse sistema.
b) Qual é a resposta desse sistema às seguintes entradas?

$$(i)\quad x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$(ii)\quad x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$(iii)\quad x[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$(iv)\quad x[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

c) Encontre a resposta às entradas com as seguintes transformadas de Fourier:

$$(i)\quad X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$(ii)\quad X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$(iii)\quad X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

$$(iv)\quad X\left(e^{j\omega}\right)=1+2e^{-j3\omega}$$