ELETROMAGNETISMO

Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

Motivação:

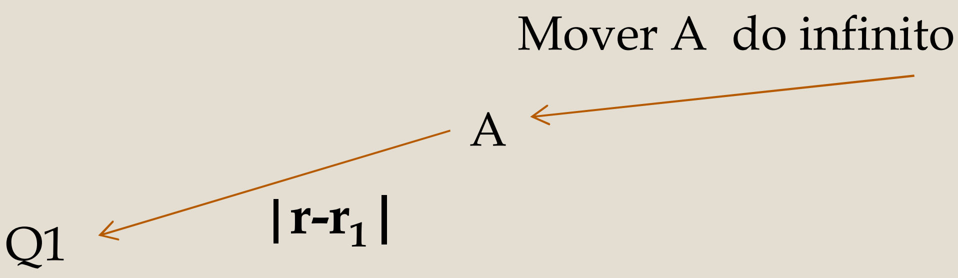
Vimos até agora, que o que torna o conceito útil é que: O potencial é independente do caminho tomado.

- O potencial de um sistema de cargas tem um valor num ponto qualquer independentemente do caminho tomado para levar a carga de teste até este ponto.

- Assim, o campo potencial de uma carga única, que identificaremos como Q_1 , e está localizada em $\mathbf{r_1}$, envolve somente a distância $|\mathbf{r} - \mathbf{r_1}|$ de Q_1 ao ponto definido por $\mathbf{r}$, no qual estamos estabelecendo o valor potencial.

- Para uma referência zero no infinito, temos:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r_1}|}$$

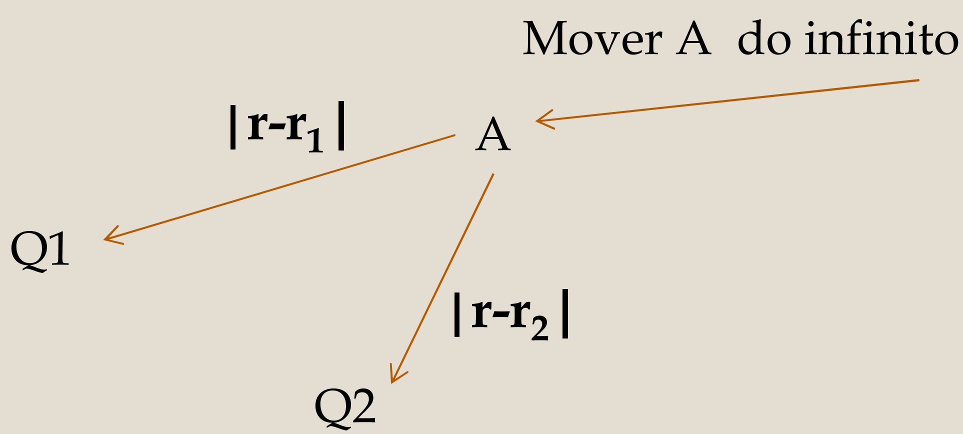


Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

➢ O potencial de duas cargas Q_1 em $\mathbf{r_1}$ e Q_2 em $\mathbf{r_2}$, é uma função somente de | $\mathbf{r}$- $\mathbf{r_1}$ | e | $\mathbf{r}$- $\mathbf{r_2}$| que são as distâncias de Q_1 e Q_2 ao ponto, respectivamente.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$



Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

➢ Continuando a adicionar cargas, encontraremos o potencial devido a n cargas pontuais.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

Ou,

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \qquad (1)$$

Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

Se cada carga for representada como um pequeno elemento de distribuição contínua de cargas volumétricas ρΔv , então:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r_1})\Delta\,\mathrm{v}_1}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r} - \mathbf{r_1}\right|} + \frac{\rho(\mathbf{r}_2)\Delta\,\mathrm{v}_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\right|} + \cdots + \frac{\rho(\mathbf{r}_n)\Delta\,\mathrm{v}_n}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\right|}$$

Tornando o número de elementos infinitos, obtemos a expressão integral:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{vol} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{dv}'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} \qquad (2)$$

V(**r**) é determinado em relação a uma referência zero de pontencial situada no infinito, e é a medida exata do trabalho realizado em trazer uma carga unitária do infinito ao ponto definido por (**r**) em que estamos determinando o potencial.

A densidade volumétrica de carga **ρ(r´)** e o elemento diferencial de volume **dv´** se combinam para representar uma quantidade diferencial de de carga **ρ(r´)dv´,** localizada em **r´.**

Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

A distância **| r- r´|** é a distância do ponto da fonte (carga) ao ponto do campo . A integral é uma integral múltipla de volume.

O pontencial devido a uma linha de cargas, é:

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\,\mathbf{L}'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} \qquad (3)$$

O potencial devido a uma superfície de cargas, é:

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}S'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} \qquad (4)$$

Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

As equações (1), (2) , (3) e (4) devem ser comparadas com expressões similares para intensidade de campo elétrico.

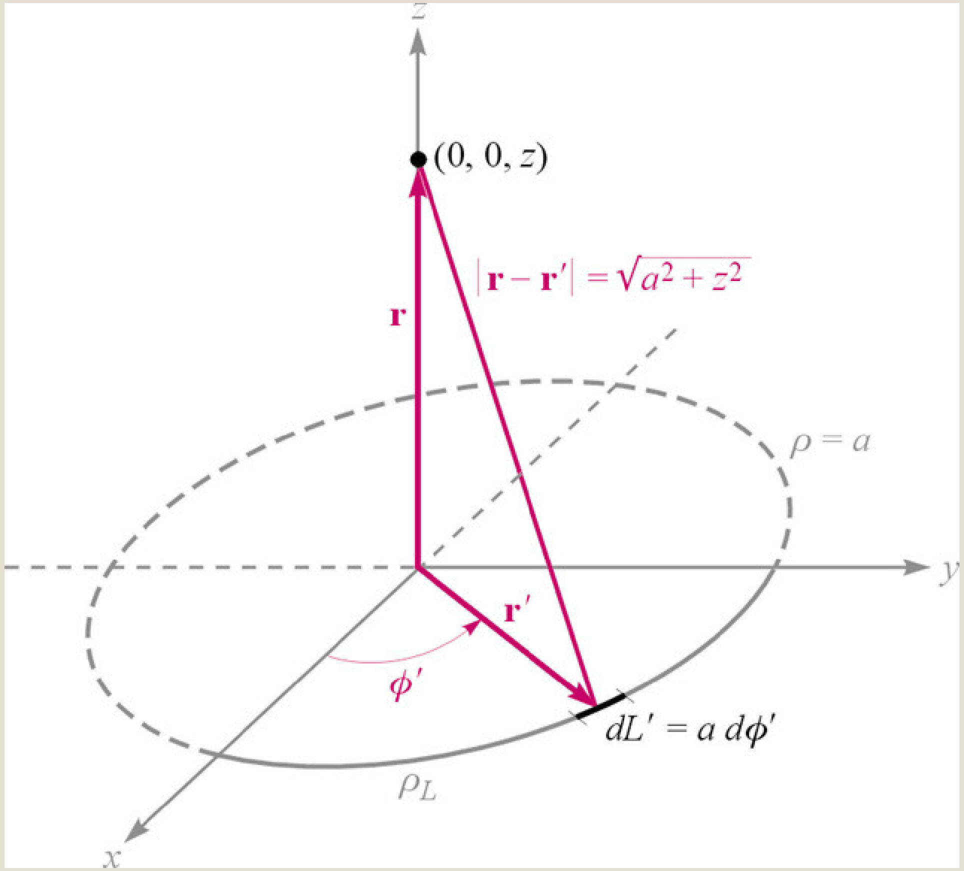
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{vol} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}$$

O potencial é mais uma vez inversamente proporcional a distância, e o campo elétrico inversamente proporcional ao quadrado da distância. Sendo que o último é um campo vetorial.

Para ilustrar o uso de uma dessas integrais do potencial , calcular V ao longo de do eixo z para uma linha uniforme de cargas ρ_L em forma de um anel, **ρ=a no plano z=0**.

Vamos aplicar (3):
Temos que: **$dL' = ad\Phi$** , **$\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$**, **$\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$**, **$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$** =raiz quadrada($a^2 + z^2$), e

Energia e Potencial



$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\phi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

Resumo:

1- O pontencial de uma carga é o trabalho para levar uma carga positiva do infinito ao ponto em que desejamos o potencial, sendo independente do caminho escolhido entres estes dois pontos.

2 – O potencial de um certo número de cargas pontuais é a soma dos potenciais de cada carga.

3 – O potencial devido a um certo número de cargas pontuais ou quaisquer distribuições contínuas de cargas pode ser, portanto, encontrado levando-se uma carga unitária do infinito ao ponto em questão, ao longo de qualquer caminho.

Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

Em outras palavras, a expressão para o potencial (referência zero no infinito):

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}}$$

Ou diferença de pontencial:

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_{B}^{A} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}}$$

Não é dependente do caminho escolhido para a integral de linha, não importando a fonde do campo elétrico **E**.

- **Não existe trabalho em levar uma carga unitária ao longo de qualquer percurso fecnado , isto é:**

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}} = 0 \qquad (5)$$

Aplicação Circuito c.c. Lei das tensões de Kirchhoff.

Energia e Potencial

O potencial de um sistema de carga: Campo Conservativo

A equação (5) é verdadeira para campos estáticos.

Faraday demonstrou que ela é incompleta quando campos magnéticos variáveis no tempo estiverem presentes.

*No futuro vamos ver que (5) não é correta quando **E** ou **H** variarem no tempo.*

Energia e Potencial

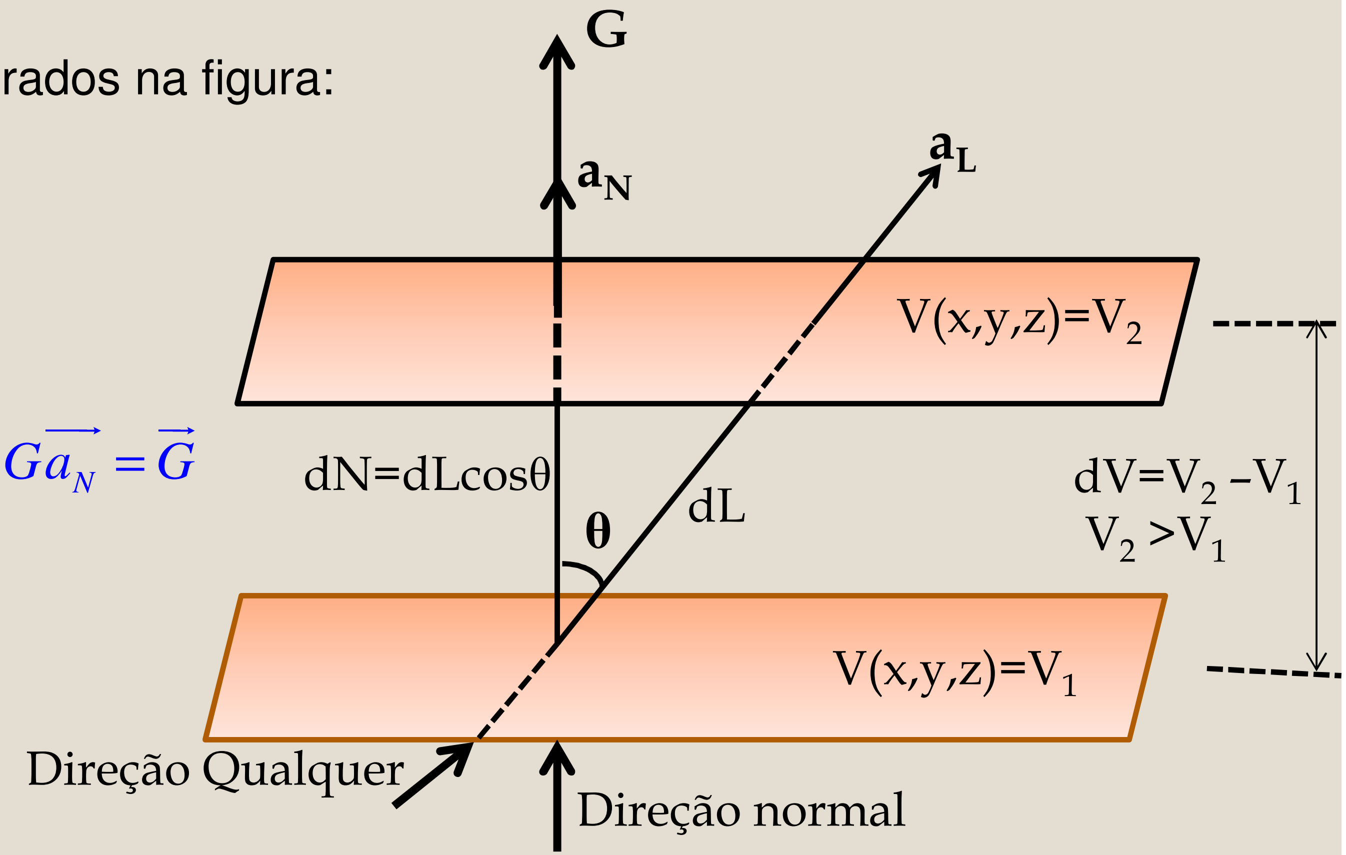
Gradiente do Potencial.

O gradiente de uma função escalar (Ex: V) é definido matematicamente por:

$$\vec{\nabla}V = \frac{dV}{dN}\overrightarrow{a_N} \quad \text{(resultado é um vetor)}$$

Onde dV, dN e a são mostrados na figura:

$$\vec{\nabla}V = \frac{dV}{dN}\overrightarrow{a_N} = \frac{dV}{dL\cos\theta} = G\overrightarrow{a_N} = \vec{G}$$



Energia e Potencial

Gradiente do Potencial.

Daí,

$$\vec{\nabla}V = \frac{dV}{dN}\overrightarrow{a_N} = \frac{dV}{dL\cos\theta} = G\overrightarrow{a_N} = \vec{G}$$

$$\vec{G}dL\cos\theta = dV \Rightarrow \vec{G}\cdot d\vec{L} = dV$$

$$onde,$$

$$\vec{G} = G_x\overrightarrow{a_x} + G_y\overrightarrow{a_y} + G_z\overrightarrow{a_z}$$

$$d\vec{L} = d_x\overrightarrow{a_x} + d_y\overrightarrow{a_y} + d_z\overrightarrow{a_z}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}d_x + \frac{\partial V}{\partial y}d_y + \frac{\partial V}{\partial z}d_z$$

$$sendo:$$

$$d\vec{L} = vetor\ comprimento\ diferencial\ medido\ numa\ direção\ qualquer.$$

$$dN = dL\cos\theta = menor\ distância\ entre\ 2\ \sup erfícies\ equipotenciais\ V_1\ e\ V_2.$$

Energia e Potencial

Gradiente do Potencial.

Assim obtemos a expressão do gradiente em coordenadas cartesianas:

$$\vec{G} = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a_z}$$

Propriedades do gradiente de uma função escalar V:

a) $\vec{\nabla} V$ *é normal a* V;

b) $\vec{\nabla} V$ *aponta o sentido de crescimento de* V.

Logo $\vec{\nabla} V$ *é um vetor que dá a máxima variação no espaço de uma quantidade escalar* (módulo do vetor) e a direção em que este máximo ocorre (sentido do vetor).

Se V = função potencial elétrico, então:

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ ($\vec{E}$ *está apontado no sentido decrescente de* V).

O sentido de **E** é oposto ao sentido no qual o potencial está aumentando mais rapidamente.

Energia e Potencial

Gradiente do Potencial.

Em coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{grad} V = \frac{\delta V}{\delta \rho} \cdot a_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta V}{\delta \phi} \cdot a_\phi + \frac{\delta V}{\delta z} \cdot a_z$$

Em coordenadas esféricas:

$$\operatorname{grad} V = \frac{\delta V}{\delta r} \cdot a_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta V}{\delta \theta} \cdot a_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\delta V}{\delta \phi} \cdot a_\phi$$

Energia e Potencial

Gradiente do Potencial.

Dado o campo potencial, $V=2x^2y-5z$, e um ponto P (-4,3,6), encontre o seguinte:
a) Potencial V;
b) Intensidade do campo elétrico **E**.
Respostas:
a) Potencial
$V=2\,(-4)^2\,3 - 5.6 = 66$ V
b) $\mathbf{E} = -4xy\mathbf{a_x} - 2x^2\,\mathbf{a_y} + 5\mathbf{a_z}$
$\mathbf{E_P} = 48\mathbf{a_x} - 32\,\mathbf{a_y} + 5\mathbf{a_z}$ V/m

$$\left|\vec{E}_P\right| = \sqrt{(48)^2 + (-32)^2 + (5)^2} = 57,9 \quad V/m$$

$$\vec{a}_{EP} = (48\,\vec{\mathrm{a}}_x - 32\,\vec{\mathrm{a}}_y + 5\,\vec{\mathrm{a}}_z)/57,9 = 0,829\,\vec{\mathrm{a}}_x - 0,553\,\vec{\mathrm{a}}_y + 0,086\,\vec{\mathrm{a}}_z$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = -35,4xy\,\vec{\mathrm{a}}_x - 17,71x^2\,\vec{\mathrm{a}}_y + 44,3\,\vec{\mathrm{a}}_z \quad pC/m^3$$

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = -35,4y \quad pC/m^3$$

$$em \quad P:$$

$$\rho_v = -106,2 \quad pC/m^3$$

Energia e Potencial

Dado o campo potencial em coordenadas cilíndricas,

$$V = \frac{100}{z^2+1}\rho\cos\phi \; V$$

$$e \; o \; ponto \; P \; , \; \rho = 3m, \; \phi = 60^0, \mathrm{z} = 2\,\mathrm{m}$$

Encontre valores em P para:

a) Potencial V;
b) Intensidade do campo elétrico **E**.

Respostas:

a) Potencial 30 V
b) $\mathbf{E_P} = -10\mathbf{a}_\rho + 8{,}66\,\mathbf{a}_\Phi + 24\mathbf{a}_z$ V/m

Energia e Potencial

Gradiente do Potencial.

Exemplo: Determinar, pelo gradiente de **V**, a expressão de **E** para uma carga pontual na origem.

Solução: O potencial de uma carga pontual na origem é:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

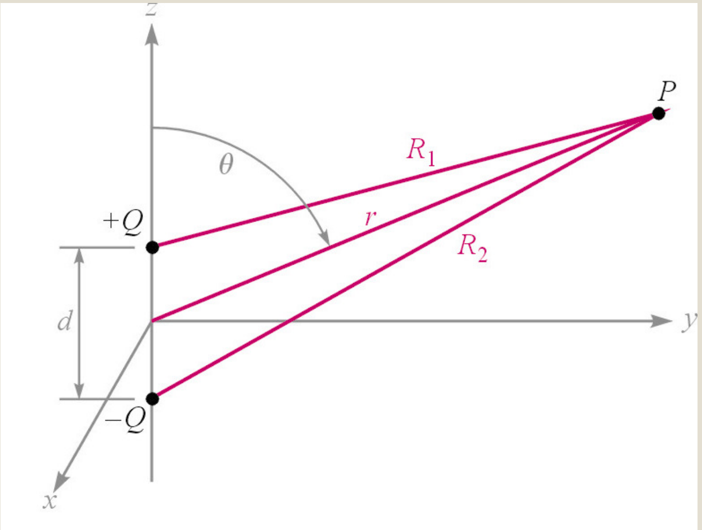
Tomando o gradiente de V, em coordenadas esféricas, **sabendo-se que V=f(r):**

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a_r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{a_r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{a_r}$$

Energia e Potencial

Dipolo Elétrico

É o conjunto de duas cargas pontuais de igual magnitude e sinais opostos, separados por uma distância pequena se comparada com a distância ao ponto P em que queremos conhecer o campo potencial e o campo elétrico.

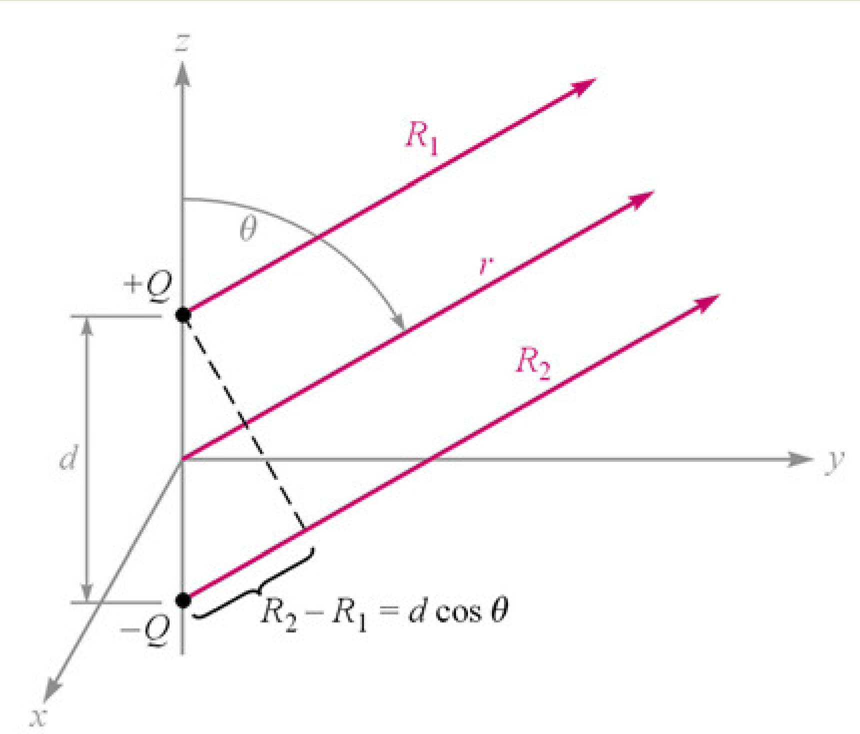


Energia e Potencial

Dipolo Elétrico

Para um ponto distante P, R_1 é essencialmente paralelo a R_2 e encontramos que $R_1 - R_2 = d\cos\theta$.

Obs: a figura apresenta coordenadas esféricas



Energia e Potencial

Dipolo Elétrico

A determinação de **V** primeiro, que é uma grandeza escalar, não vetorial, e que tem uma expressão um pouco mais simples no caso de uma carga pontual, seguido por uma operação gradiente para encontrar **E**, parece ser um problema muito mais fácil.

Escolhendo esta metodologia mais simples, tomamos a distância de Q e de –Q a P como sendo R_1 e R_2 , escrevendo o potencial total como:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Para um ponto distante $R_1 \approx R_2$, e o produto R_1R_2 no denominador pode ser substituído. por $\mathbf{r^2}$

Se R_1 - R_2 forem considerados paralelos:

$\mathbf{R_2 - R_1 \approx d\cos\theta}$

Energia e Potencial

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Utilizando-se o gradiente em coordenadas esféricas,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a}_\phi\right)$$

$$\vec{E} = -\left(-\frac{Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_r - \frac{Qdsen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_\theta\right)$$

$$\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\vec{a}_r - sen\theta\vec{a}_\theta\right)$$

Energia e Potencial

Dipolo Elétrico

Definindo momento de dipolo elétrico como **p**=Q**d**, onde **d** é o vetor cuja magnitude é a distância entre as cargas do dipolo e cuja direção (e sentido) é de **–Q** para **+Q**:

$$V_P = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Obs:

1) Com o aumento da distância, o potencial e o campo elétrico caem mais rápidos para o dipolo elétrico do que para a carga pontual.
2) Para o dipolo elétrico for a da origem, o potencial é dado por:

$$V_P = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

onde:

a_R = vetor orientado do centro do dipolo ao ponto desejado;

R = distância do centro do dipolo ao ponto desejando.

Energia e Potencial

Dipolo Elétrico

Este resultado pode ser generalizado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r' \right|^2} \vec{p} \cdot \frac{r - r'}{\left| r - r' \right|}$$

Energia e Potencial

Dipolo Elétrico

Um dipolo elétrico localizado na origem no espaço livre tem um momento **p**=3***a**$_x$ -2***a**$_y$ + **a**$_z$ nC.m . , Encontre V nos pontos:

a) P (2,3,4);

b) P (2,5;30°;40°)

Energia e Potencial

Dipolo Elétrico

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3\times10^{-9} \\ -2\times10^{-9} \\ 1\times10^{-9} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_0 = 8,854\times10^{-12}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow V = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0(|P_1|)^2}\cdot\frac{P_1}{|P_1|} \rightarrow V = 0,23V$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 30\times\frac{\pi}{180} \\ 40\times\frac{\pi}{180} \end{pmatrix} \rightarrow transforme\ em\ coordenadas\ re\tan gulares$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2,5\sin(30\frac{\pi}{180})\cos(40\frac{\pi}{180}) \\ 2,5\sin(30\frac{\pi}{180})\sin(40\frac{\pi}{180}) \\ 2,5\cos(30\frac{\pi}{180}) \end{pmatrix} \rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 0,958 \\ 0,803 \\ 2,165 \end{pmatrix} \rightarrow V = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0(|P_2|)^2}\cdot\frac{P_2}{|P_2|} \rightarrow V = 1,973V$$

Energia e Potencial

Exercício) Um de momento **p**= 6$\mathbf{a_z}$ nC.m está localizado na origem

a) Encontre V em P (r=4,θ=20^0,Φ=0^0);

b) Encontre **E** em P.:

Respostas

$$a)\ 3{,}17\ V$$

$$b)\ \vec{E} = \left(1{,}584\vec{a}_r + 0{,}288\vec{a}_\theta\right) \quad V/m$$