



#### DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

# Controle de Sistemas Contínuos I

Prof. Walterley A. Moura

contato: walterley.moura@cba.ifmt.edu.br



# Análise da Resposta no Domínio do Tempo (transitória e estacionária)



## Análise da Resposta no Domínio do Tempo

#### 3.1 Resposta Transitória e Resposta Estacionária

A resposta temporal de um sistema de controle é constituída de duas partes:

- a) Resposta Tansitória: é aquela que vai do estado inicial ao estado final.
- b) Resposta Estacionária: é aquela que avalia o comportamento a medida que o tempo tende ao infinito.

$$c\left(t\right) = c_{tr}\left(t\right) + c_{ss}\left(t\right) = \begin{bmatrix} c_{tr}\left(t\right) \rightarrow & \text{Regime transit\'orio} \\ c_{ss}\left(t\right) \rightarrow & \text{Regime estacion\'ario} \end{bmatrix}$$



#### c) Sinais de testes típicos:

- O sinal de entrada real do Sistema é geralmente desconhecido, assim um sinal de teste padrão é normalmente escolhido. Esta abordagem é muito útil uma vez que existe uma relação razoável entre a resposta de um sistema a uma entrada de teste padrão e a capacidade do sistema funcionar em condições normais de operação
- Os sinais de entrada para testes usados são as funções degrau, rampa, aceleração, impulso e senoidal.
- Estes sinais são funções temporais muito simples.
- Quando as excitações de um Sistema de controle são representadas por funções que variam gradualmente, utiliza-se uma **função degrau**, r(t) = A, t>0;
- Para sistemas sujeitos a pertubações transitórias e brusca, utiliza-se uma função rampa, r(t) = At, t>0, ou função aceleração, r(t) = At², t>0;
- Para sistemas submetidos a excitações do tipo surto, utiliza-se uma **função impulso**,  $r(t) = \delta(t)$ .



# Estabilidade Absoluta, Estabilidade Relativa e Erro Estacionário

Característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle



Estabilidade Absoluta (O sistema é estável ou instável)

Um sistema de controle está em equilíbrio quando



Na ausência de qualquer distúrbio ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado



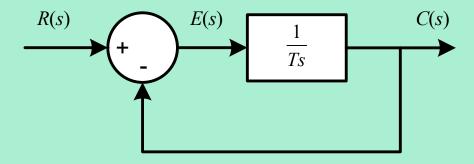
A saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a condição inicial

Se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua.

Se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial.



#### 3.2 Análise de Sistemas de Primeira Ordem

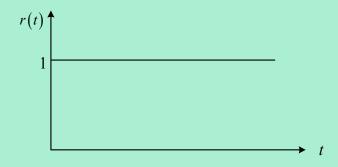


- (a) Diagrama de blocos de um sitema de primeira ordem
- Considere o sistema de primeira ordem acima, que pode ser um circuito RC. A relação entre a entrada e a saída é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$



#### a) Resposta ao degrau unitário do sistema de 1ª ordem

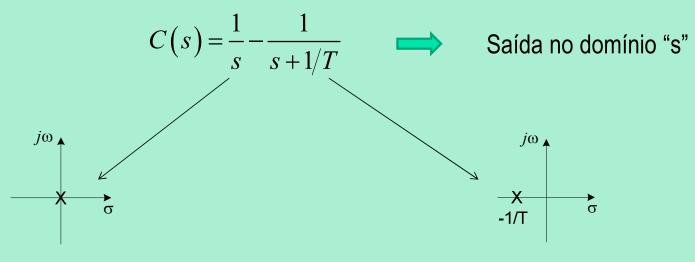


- A transformada de Laplace do degrau unitário:  $R(s) = \frac{1}{s}$
- A resposta é dada por:  $C(s) = R(s) \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s} \frac{1}{Ts+1}$
- Expandindo em frações parciais, obtemos:  $C(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s+1/T}$
- Encontrando a transformada inversa de Laplace:  $c(t) = 1 e^{-\frac{t}{T}}$ , para  $t \ge 0$



b) Conclusões que podem ser estabelecidas.

$$c(t) = \underbrace{1}_{\text{Resposta forçada}} - \underbrace{e^{-\frac{t}{T}}}_{\text{Resposta natural}} \longrightarrow \text{Saída no domínio do "tempo"}$$



Polo da entrada Polo do sistema



- 1) Um polo da função de entrada gera a resposta forçada (isto é, o polo na origem gerou uma função degrau na saída);
- 2) Um polo da função de transferência gera a forma da resposta natural (isto é, o polo em **–1/T** gerou a função **e**-t/T);
- 3) Um polo sobre o eixo real gera uma resposta exponencial da forma **e**-αt, onde "- α" é a localização do polo sobre o eixo real. Assim, quanto mais à esquerda, no eixo real negativo, estiver o polo, mais rápido o decaimento da resposta transiente exponencial par zero.
- 4) Os zeros e os polos geram as amplitudes tanto para a resposta forçada quanto para a resposta natural.





#### c) Interpretação gráfica da equação

$$c(0) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = \lim_{t \to \infty} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = 1$$

Uma característica importante de uma curva de resposta exponencial é no ponto em que t = T, denominada constante de tempo

$$c(T) = 1 - e^{-\frac{T}{T}} = 1 - e^{-1} = 0,632$$

Sendo assim, a resposta c(t) alcança 63,2% de sua variação total.

- ➤ Note que, quanto menor a constante de tempo, mais rapidamente o sistema responde.
- A inclinação da tangente em t = 0 é 1/T.



Derivando c(t), otemos:

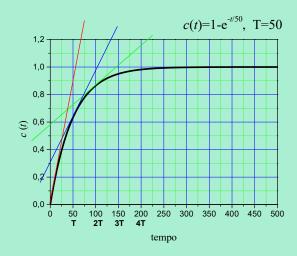
$$\frac{d}{dt}c(t) = c'(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow c'(0) = \frac{1}{T}$$

Observa-se que, se a constante de tempo T diminui, a inclinação da reta aumenta.

> A curva exponencial é ilustrada abaixo. Fazendo t=4T, obtemos:

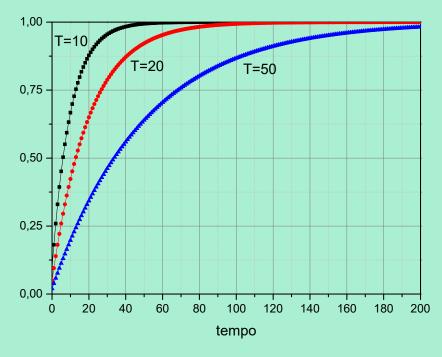
$$c(4T) = 1 - e^{-\frac{4T}{T}} = 0,9817$$

➤ Assim, para t > 4T, a resposta se mantém a 2% do valor final





$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$



Portanto, quanto maior for "T" maior o tempo de subida.

#### d) Cálculo do tempo de subida (T<sub>r</sub>)

Tempo de Subida: é o tempo necessário para a resposta sair de 10% e alcançar 90% do seu valor final.

Para 10%

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}}$$
  $c(t) = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}}$ 

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}}$$

$$0,1 = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \qquad \qquad 0,9 = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}}$$

$$0,9=1-e^{-\frac{t_2}{7}}$$

$$e^{-\frac{t_1}{T}}=0,9$$

$$e^{-\frac{t_1}{T}} = 0.9$$
  $e^{-\frac{t_2}{T}} = 0.1$ 

$$-\frac{t_1}{T} = \ln 0.9$$

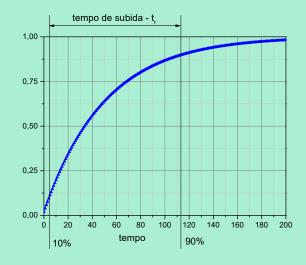
$$-\frac{t_1}{T} = \ln 0.9 \qquad -\frac{t_2}{T} = \ln 0.1$$

$$-\frac{t_1}{T} = -0.10$$

$$-\frac{t_1}{T} = -0,105 \qquad -\frac{t_2}{T} = -2,302$$

$$t_1 = 0.109T$$

$$t_2 = 2,302T$$



$$T_r = t_2 - t_1 = 2,302T - 0,109T$$

$$T_r = 2,2T$$

#### e) Cálculo do tempo de assentamento ou acomodação (T<sub>s</sub>)

**Tempo de Assentamento**: é o tempo necessário para a curva alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno de 2% do seu valor final.

Considerando c(t) = 0.98, obtemos:

$$c(t_s) = 1 - e^{-\frac{t_s}{T}}$$

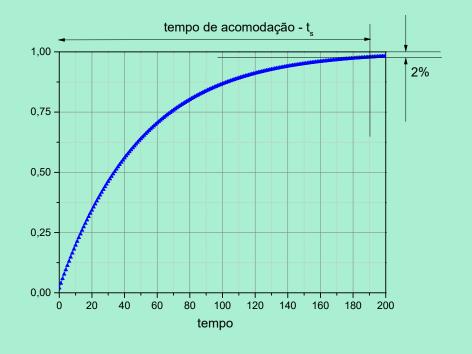
$$0.98 = 1 - e^{-\frac{t_s}{T}}$$

$$e^{-\frac{t_s}{T}} = 0.02$$

$$-\frac{t_s}{T} = \ln 0.02$$

$$-\frac{t_s}{T} = -3.91$$

$$t_s = 4T$$





Pode-se observar que o estado permanente é alcançado matematicamente somente em um tempo infinito. Na prática, entretanto, é razoável que o tempo estimado de resposta seja o intervalo de tempo necessário para a curva alcançar e permanecer a 2% da linha do valor final, que é quatro vezes a constantes de tempo.

#### **Exercícios:**

- 1) Resposta à rampa unitária do sistema de primeira ordem.
- 2) Resposta ao impulso unitário do sistema de primeira ordem.



#### 3.3 Sistemas de 2<sup>a</sup> Ordem

➤ Um sistema de segunda ordem pode ser dado seguinte função de tranferência, chamada de forma padrão:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- $\omega_n$ : é frequência de oscilação do sistema sem amortecimento.
- ξ: é o coeficiente de amortecimento do sistema.
- $\triangleright$  O comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros  $\xi$  e  $\omega$ n. Assim, podemos ter as seguintes tipos de respostas:
- 1) Se  $0 < \xi < 1$ , a resposta é denominada subamortecido;
- 2) Se  $\xi$  = 0, a resposta transitória **não decai**;
- 3) Se  $\xi$  = 1, o sistema é denominado **criticamente amortecido**;
- 4) Se  $\xi$  > 1, o sistema é denominado superamortecido.

## ➤ Equação Diferencial de um sistema de 2ª ordem

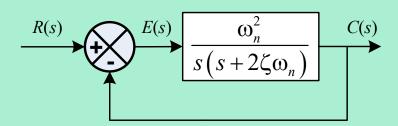
$$\mapsto$$
 EDO:  $c''(t) + 2\zeta\omega_n c'(t) + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t)$ 

$$\mapsto \text{FT: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \text{Função de Transferência a malha fechada}$$

$$\mapsto$$
 Cálculo dos polos:  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 

$$s = -\zeta \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad \rightarrow \boxed{s = -\zeta \omega_n \pm j\omega_d}$$

> Diagrama de bloco de um sistema de segunda ordem



$$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$
  $\rightarrow$  Função de transferência a malha aberta

### 1º Caso: Sistema não amortecido, $\xi=0$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 9} \qquad R(s) = \frac{1}{s} \quad (entrada) \qquad C(s) = \frac{1}{s} \underbrace{\frac{9}{s^2 + 9}}_{R(s)} \quad (saida)$$

$$\frac{9}{s(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9} \implies 9 = A(s^2+9) + (Bs+C)s$$

$$9 = As^2 + 9A + Bs^2 + Cs$$

$$9 = (A+B)s^2 + Cs + 9A$$

Fazendo equivalência dos polinômios do lado direito e do lado esquerdo, temos:

$$9A = 9 \implies A = 1$$

$$C = 0$$
,

$$A + B = 0 \implies B = -A \implies B = -1$$

Portanto,

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 9}$$

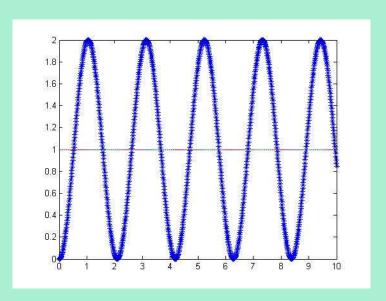
$$c(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 9}\right)$$

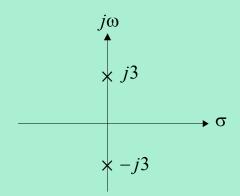
$$c(t) = 1 - \cos 3t$$



#### <u>Gráfico</u>

#### Representação no plano "s"





$$G(s)$$

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{9}{s^2 + 9}$$

$$R(s)$$

Sistema não amortecido

#### 2º Caso: Sistema criticamente amortecido, $\xi=1$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 6s + 9}, \qquad R(s) = \frac{1}{s} \text{ (entrada)}, \qquad C(s) = \frac{1}{\underbrace{s}} \underbrace{\frac{9}{s^2 + 6s + 9}} \text{ (saida)}$$

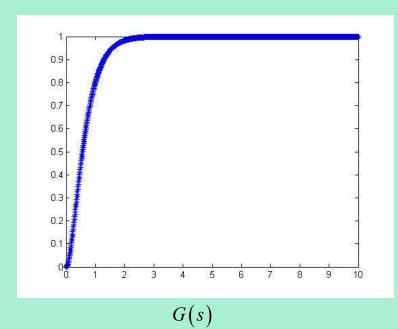
$$\frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)} = \frac{9}{s(s + 3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 3} + \frac{C}{(s + 3)^2}$$

$$A = 1, \quad B = -1 \quad e \quad C = -3$$

$$\frac{9}{s(s + 3)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 3} - \frac{3}{(s + 3)^2}$$

 $c(t) = L\left(\frac{1}{s}\right) - L\left(\frac{1}{s+3}\right) - L\left(\frac{3}{(s+3)^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c(t) = 1 - e^{-3t} - 3te^{-3t}}$ 

#### <u>Gráfico</u>



$$C(s) = \frac{1}{s}$$

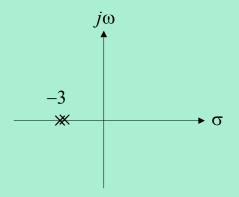
$$g$$

$$s^2 + 6s + 9$$

$$R(s)$$

Sistema criticamente amortecido

#### Representação no plano "s"



#### 3º Caso: Sistema sobreamortecido, $\xi > 1$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{7}{s^2 + 8s + 7}, \qquad R(s) = \frac{1}{s} \text{ (entrada)}, \qquad C(s) = \frac{1}{\underbrace{s}} \frac{7}{\underbrace{s^2 + 8s + 7}} \text{ (saída)}$$

$$\frac{7}{s(s^2 + 8s + 7)} = \frac{7}{s(s+1)(s+7)}$$

$$\frac{9}{s(s+1)(s+7)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+7}$$

$$A=1$$

$$B = -7/6$$

$$C = 1/6$$

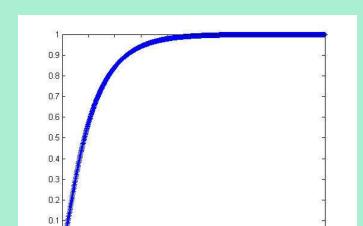
$$\frac{9}{s(s+1)(s+7)} = \frac{1}{s} - \frac{7/6}{s+1} + \frac{1/6}{s+7}$$

$$c(t) = L\left(\frac{1}{s}\right) - L\left(\frac{7/6}{s+1}\right) + L\left(\frac{1/6}{s+7}\right)$$

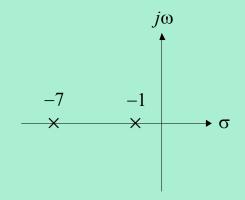
$$c(t) = 1 - \frac{7}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-7t}$$



#### <u>Gráfico</u>



#### Representação no plano "s"



$$G(s)$$

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{9}{s^2 + 6s + 9}$$

$$R(s)$$

Sistema sobreamortecido

#### 4º Caso: Sistema subamortecido, ξ<1

 $c(t) = 1 - e^{-t} \cos \sqrt{8} t - \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-t} \sin \sqrt{8} t$ 

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 2s + 9}, \qquad R(s) = \frac{1}{s} \text{ (entrada)}, \qquad C(s) = \frac{1}{\frac{s}{s}} \frac{9}{\frac{s^2 + 2s + 9}{G(s)}} \text{ (saida)}$$

$$\frac{9}{s(s^2 + 2s + 9)} = \frac{9}{s[(s+1)^2 + 8]} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{[(s+1)^2 + 8]}$$

$$A = 1$$

$$B = -1$$

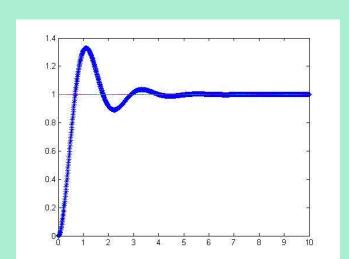
$$C = -2$$

$$\frac{9}{s[(s+1)^2 + 8]} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2}{[(s+1)^2 + 8]} = \frac{1}{s} - \frac{(s+1) + 1}{[(s+1)^2 + 8]} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{[(s+1)^2 + 8]} - \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{8}}{[(s+1)^2 + 8]}$$

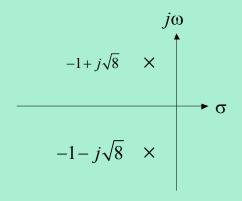
$$c(t) = L(\frac{1}{s}) - L(\frac{s + 1}{[(s+1)^2 + 8]}) - \frac{1}{\sqrt{8}} L(\frac{\sqrt{8}}{[(s+1)^2 + 8]})$$



#### <u>Gráfico</u>



#### Representação no plano "s"



$$G(s)$$

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

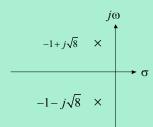
$$\frac{9}{s^2 + 2s + 9}$$

$$R(s)$$

Sistema subamortecido

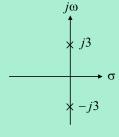


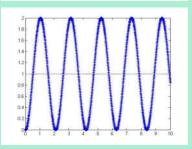
Se 0<ξ<1, o sistema é denominado subamortecido</li>



08-04-02-02-05-12-3-4-5-6-7-9-10

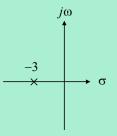
Se ξ=0, a resposta transitória não decai

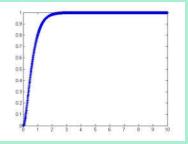




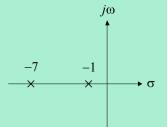
**RESUMO** 

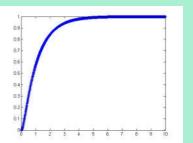
 Se ξ=1, o sistema é denominado criticamente amortecido





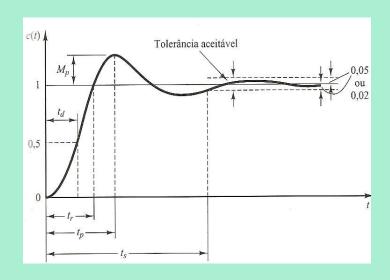
• Se ξ>1, o sistema é denominado sobreamortecido







# 3.3.1 Especificação das características da resposta transitória de um sistema de controle a uma excitação em degrau unitário



t<sub>d</sub>: tempo de atraso

t<sub>r</sub>: tempo de subida

t<sub>p</sub>: tempo de pico

 $t_s$ : tempo de acomodação

ou de estabilização

M<sub>p</sub>: máximo do sobressinal

Máximo sobre-sinal = 
$$\frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100$$

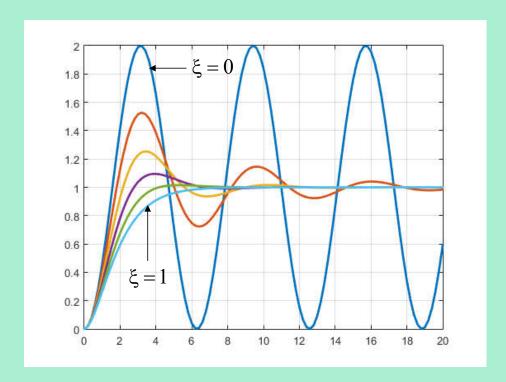
- Tempo de Subida: tempo para a resposta variar de 10% até 90% do seu valor final;
- Tempo de Estabilização: tempo necessário para que a resposta ao degrau alcance 98% do valor de estado estacionário.
- Tempo de Pico: tempo necessário para que a resposta alcance seu valor máximo;
- Ultrapassagem Percentual (Sobrenível Percentual): O quanto o valor da resposta (em Percentual) ultrapassa no tempo de pico o valor de estado estacionário da resposta.



**Exemplo:** Considere o sistema malha fechada definido pelo função de transferência.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

Traçar as curvas de resposta ao degrau unitário quando  $\xi$  assumir os seguintes valores: **0.0**, **0.2**, **0.4**, **0.6**, **0.8**, **1.0**.





```
clear all
t=0:0.2:20;
chi=[0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
for i=1:6
    num=1;
    den=[1 2*chi(i) 1];
    y(:,i)=step(num,den,t);
    %figure;
    % plot(t,y(:,i))
    % title(sprintf('chi = %d', chi(i)));
    %grid
end

plot(t,y,'LineWidth',[2])
grid
```



#### 3.4 Análise detalhada de Sistemas de 2ª Ordem

#### 1) Sistemas Subamortecido – Caracterização analítica (0<ξ<1)

> Considere a resposta ao degrau de um sistema genérico, dado por:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)}$$

 $\triangleright$  Como (0 <  $\xi$  < 1), em frações parciais, C(s) pode ser dado por:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi \omega_n) + \xi \omega_n}{(s + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi \omega_n}{(s + \xi \omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \xi \omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

> Aplicando-se a transformada inversa de Laplace:

$$L^{-1}\left[\frac{s+\xi\omega_n}{\left(s+\xi\omega_n\right)^2+\omega_d^2}\right] = e^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_d t \quad L^{-1}\left[\frac{\omega_d}{\left(s+\xi\omega_n\right)^2+\omega_d^2}\right] = e^{-\xi\omega_n t}sen\,\omega_d t$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left( \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$$

$$= 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left[ \cos \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t \right]$$

$$= 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left( \cos \theta + A \sin \theta \right)$$

onde: 
$$\theta = \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\right) t$$
 e  $A = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$ 

- $\mapsto$  Podemos escrever que:  $\cos \theta + A \sin \theta = B \sin (\theta + \phi)$
- $\mapsto$  sen  $\theta + A$  sen  $\theta = B$  cos  $\phi$  sen  $\theta + B$  sen  $\phi$  cos  $\theta$
- → Comparando as equações acima, temos:
- $\mapsto$  (i)  $B\cos\phi = 1$  e (ii)  $B\sin\phi = A$
- $\mapsto$  Dividindo equação (ii) pela equação (i), temos:

$$\frac{B \operatorname{sen} \phi}{B \operatorname{cos} \phi} = \frac{A}{1} \implies \tan \phi = A \implies \phi = \arctan\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

 $\mapsto$ Somando o quadrado da equação (i) com o quadrado da equação (ii), temos:

$$B^2 \cos^2 \phi + B^2 \sin^2 \phi = A^2 + 1 \rightarrow B = \sqrt{A^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$



 $\mapsto$  Portanto, se:

$$c(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left[ \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\right) t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\right) t \right]$$

 $\mapsto$  Então c(t) também pode ser escrito como:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \left[ \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t + \phi \right]$$

> O sinal erro para este sistema é a diferença entre a entrada e a saída, ou seja:

erro 
$$(t) = r(t) - c(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right)$$



#### 2) Sistemas Criticamente Amortecido – Caracterização analítica $(\xi = 1)$

• Como  $\xi = 1$ , C(s) é dado por:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

$$c(t) = L^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \right]$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$



#### 3) Sistemas não amortecido — Caracterização analítica $(\xi = 0)$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$
$$c(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right\}$$
$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$



#### 4) Sistemas Superamortecido – Caracterização analítica $(\xi > 1)$

➤ Neste caso os dois polos da função de transferência são reais, negativos e desiguais. Assim, para entrada em degrau unitário, temos que C(s) é dado por:

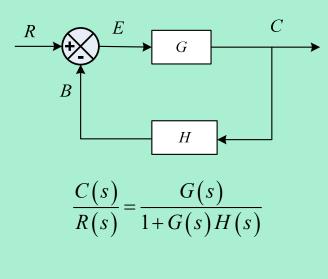
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \left(s + \xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right) s}$$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{\left[2\left(\zeta^{2} + \zeta\sqrt{\zeta^{2} - 1} - 1\right)\right]}e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^{2} - 1}\right)\omega_{n}t} + \frac{1}{\left[2\left(\zeta^{2} - \zeta\sqrt{\zeta^{2} - 1} - 1\right)\right]}e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^{2} - 1}\right)\omega_{n}t}$$



#### 3.5 Erro de Estado/Regime Estacionário

➤ Em um sistema de controle de malha fechada conforme mostrado abaixo, o erro de regime estacionário consiste na diferença entre o valor estacionário da referência aplicada ao sistema, R(s), e o valor estacionário do sinal de saída realimentado, B(s).



$$E(s) = R(s) - B(s)$$



> Para calcular o erro de regime estacionário, faz-se:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$= R(s) - C(s)H(s)$$

$$E = R - EGH$$

$$E + EGH = R$$

$$E(1 + GH) = R$$

$$E = \frac{R}{1 + GH}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

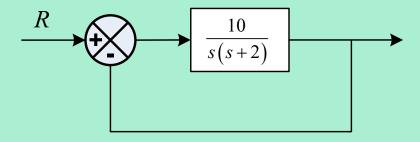
→ Aplicando o teoreme da valor final, temos:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

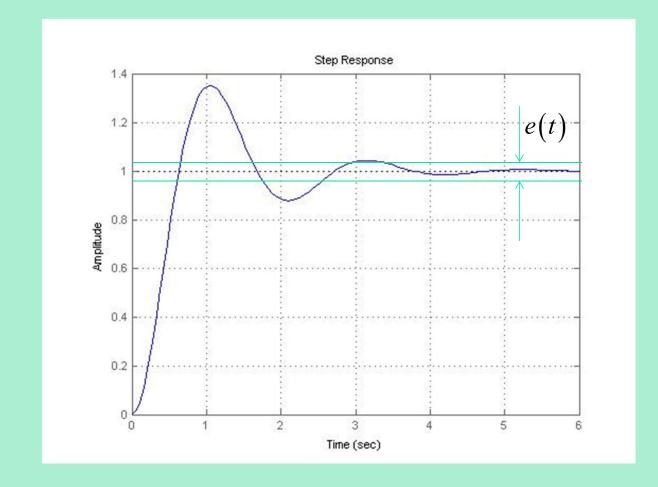


#### **Exercícios:**

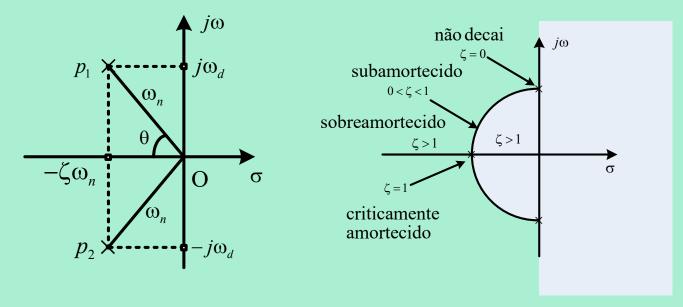
Determine o erro de regime estacionário do sistema abaixo para as seguintes entradas:



- a) r(t) = u(t)
- b) r(t) = tu(t)
- c)  $r(t) = t^2u(t)$
- d)  $r(t) = t^3 u(t)$



## 3.6) Análise dos parâmetros do sistema de 2ª ordem no plano complexo



$$\begin{split} s_{1,2} &= \sigma \pm j\omega_d \\ p_1 &= -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \qquad p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ \overline{Op_1} &= \sqrt{\left(\zeta\omega_n\right)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2} = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2\left(1-\zeta^2\right)} = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2\zeta^2} = \omega_n \\ \cos\theta &= \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \end{split}$$

#### 3.6.1 Especificação da resposta transitória (sistemas de 2ª ordem)

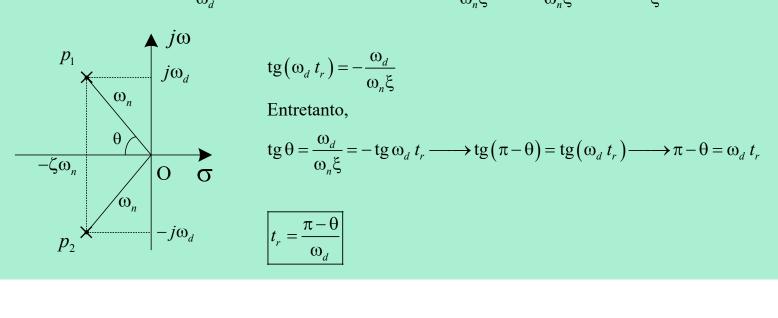
### 1 - Tempo de subida: $c(t_r) = 1$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t_r} \left( \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t_r + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t_r \right) = 1, \qquad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$e^{-\xi \omega_n t} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \sin \omega_d t_r \right) = 0$$

$$e^{-\xi \omega_n t} \neq 0$$

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \sin \omega_d t_r = 0 \longrightarrow \operatorname{tg} \omega_d t_r = -\frac{\omega_d}{\omega_n \xi} = -\frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{\omega_n \xi} = -\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$



$$tg(\omega_d t_r) = -\frac{\omega_d}{\omega_n \xi}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega_d}{\omega_n \xi} = -\operatorname{tg} \omega_d t_r \longrightarrow \operatorname{tg} (\pi - \theta) = \operatorname{tg} (\omega_d t_r) \longrightarrow \pi - \theta = \omega_d t_r$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

### 2 - Tempo de pico: $c'(t_p) = 0$

$$\begin{split} c\left(t\right) &= 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t\right) \\ c'(t) &= \omega_n \xi e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t\right) - e^{-\xi \omega_n t} \left(-\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + \omega_n \xi \cos \omega_d t\right), \quad e^{-\xi \omega_n t} \neq 0 \\ c'(t) \Big|_{t=t_p} &= 0 \longrightarrow \omega_n \xi \left(\cos \omega_d t_p + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t_p\right) = -\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t_p + \omega_n \xi \cos \omega_d t_p \\ \omega_p \xi \cos \omega_d t_p + \frac{\omega_n^2 \xi^2}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t_p = \omega_p \xi \cos \omega_d t_p - \omega_d \operatorname{sen} \omega_d t_p \\ \omega_n^2 \xi^2 \operatorname{sen} \omega_d t_p = -\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t_p \longrightarrow \omega_n^2 \xi^2 \operatorname{sen} \omega_d t_p = -\omega_d^2 \operatorname{sen} \omega_d t_p \\ \omega_n^2 \xi^2 \operatorname{sen} \omega_d t_p = -\omega_n^2 \left(1 - \xi^2\right) \operatorname{sen} \omega_d t_p \longrightarrow \xi^2 \operatorname{sen} \omega_d t_p = -\operatorname{sen} \omega_d t_p + \xi^2 \operatorname{sen} \omega_d t_p \\ \operatorname{sen} \omega_d t_p = 0 \\ \omega_d t_p = k\pi \longrightarrow \omega_d t_p = \pi \longrightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \end{split}$$

#### 3 - Máximo de sobressinal: $\,M_{p}\,$

$$M_p = c(t_p) - 1$$

Substituindo 
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$
 em  $M_p = -e^{-\xi \omega_n t_p} \left( \cos \omega_d t_p + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \sin \omega_d t_p \right)$ , temos:

$$M_{p} = -e^{-\xi\omega_{n}\frac{\pi}{\omega_{d}}} \left( \cos \omega_{d} \frac{\pi}{\omega_{d}} + \frac{\omega_{n}\xi}{\omega_{d}} \sin \omega_{d} \frac{\pi}{\omega_{d}} \right)$$

$$M_{p} = -e^{-\xi\omega_{n}\frac{\pi}{\omega_{d}}} \left( \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + \frac{\omega_{n}\xi}{\omega_{d}} \underbrace{\sin\pi}_{=0} \right)$$

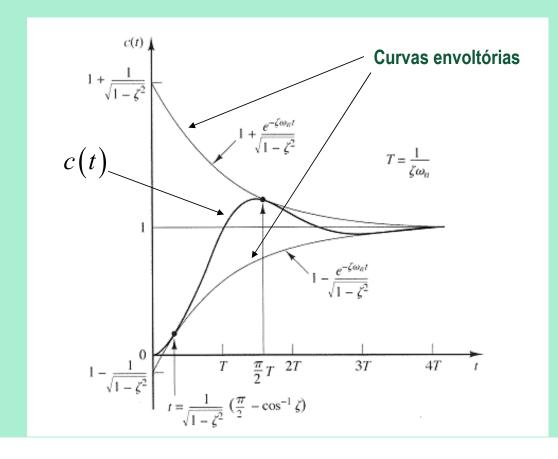
$$M_p = e^{-\xi \omega_n \frac{\pi}{\omega_d}} = e^{-\xi \mathscr{A}_n \frac{\pi}{\mathscr{A}_n \sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



#### 4 - Tempo de acomodação: $t_s$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi\right) \to \operatorname{envolt\'oria} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t}$$





➤ Para o critério de 2%, podemos calcular o tempo em que a envoltória inferior atinge 98% da entrada. Além disso, a constante de tempo dessa envoltória é dado por:

$$T = \frac{1}{\xi \omega_n}$$

- ightharpoonup Para o critério de 2%, o sistema atinge a estabilidade em:  $t_s = 4T$
- > Assim, o tempo de acomodação é dado por:

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$



#### Revisão:

i) Desempenho de um sistema de segunda ordem

$$C(s) = R(s) \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

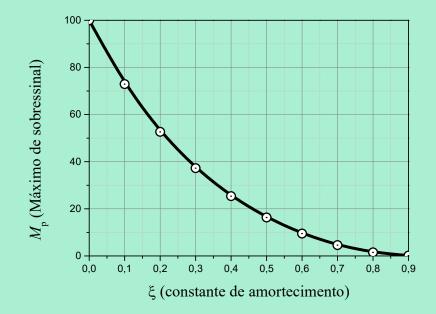
Para 
$$r(t) = u(t) \longrightarrow c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} sen(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$$

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}, \quad M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \quad e \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}}$$



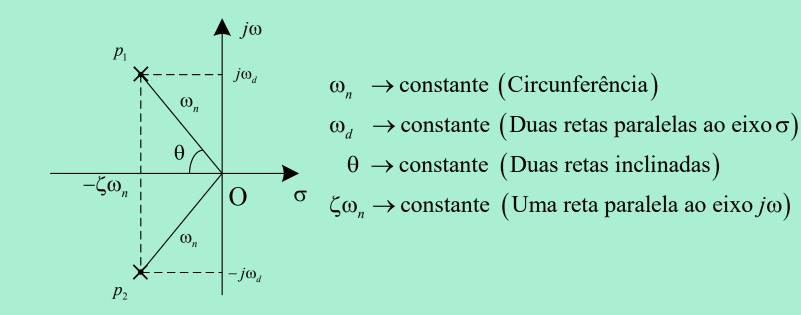
ii) Tabela: Máximo valor de ultrapassagem (Mp) versus fator de amortecimento  $(\xi)$  para entrada degrau unitário.

ξ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
M <sub>p</sub> (%)	25,38	16,30	9,47	4,60	1,52	0,15

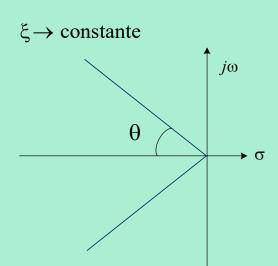


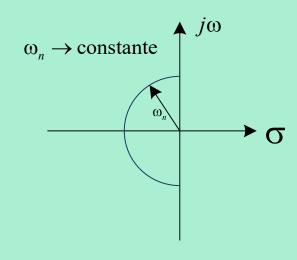


iii) Lugar geométrico dos polos que correspondem a determinadas especificações



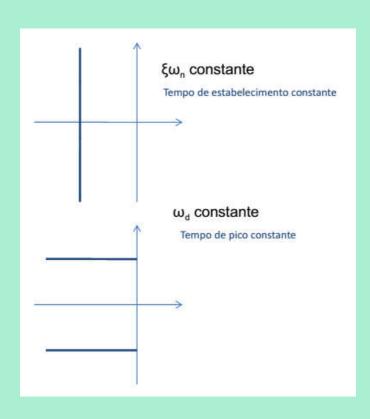
Para 
$$r(t) = 1 \longrightarrow c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} sen(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi)$$





$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad e \quad M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$





$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad e \quad M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$



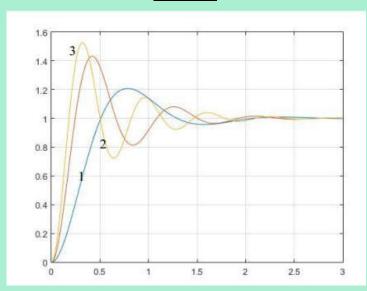
iv) Respostas ao degrau de sistemas de segunda ordem subamortecidos à medida que os polos se movem

- a. com parte real constante;
- **b.** com parte imaginária constante;
- c. com amortecimento constante.

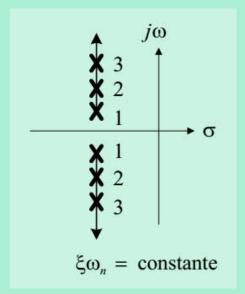
#### a. com parte real constante.



#### <u>Gráfico</u>



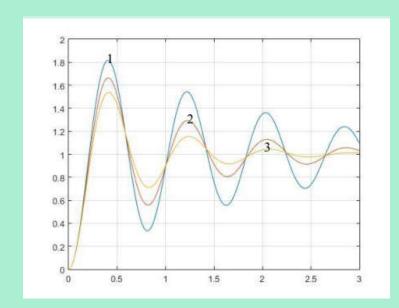
#### Representação no plano "s"



$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad e \quad M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}}$$

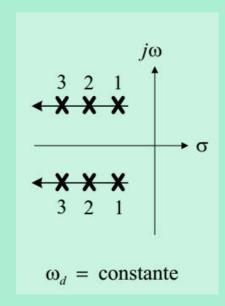
#### b) com parte imaginária constante

#### **Gráfico**



$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad e \quad M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}}$$

#### Representação no plano "s"

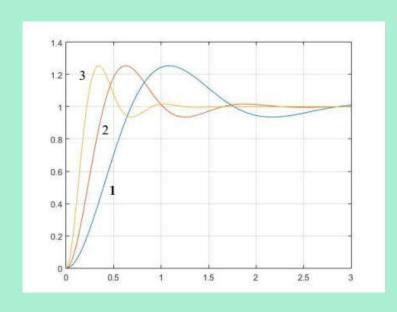


$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}$$

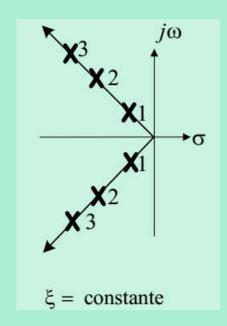
# -

#### c) Com amortecimento constante

#### **Gráfico**



#### Representação no plano "s"



$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad e \quad M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}}$$



## 3.6.2) Efeito de um terceiro polo na resposta do sistema de 2ª ordem

Nesse caso a função de transferência é de terceira ordem, ou seja

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2\right)\left(\gamma s + 1\right)}$$

 A resposta de um sistema de terceira ordem pode ser aproximada pelas raízes dominantes do sistema de segunda ordem desde que a parte real das raízes dominantes seja menor que um décimo da parte real da terceira raiz, ou seja,

$$s^{2} + 2\omega_{n} \xi s + \omega_{n}^{2} \longrightarrow s = -\xi \omega_{n} \pm j\omega_{n} \sqrt{1 - \xi^{2}} \longrightarrow \left| \Re(s) \right| = \xi \omega_{n}$$

$$\gamma s + 1 = 0 \longrightarrow s = -\frac{1}{\gamma}, \qquad \left| \frac{1}{\gamma} \right| \ge 10 \xi \omega_{n}$$

 A resposta do sistema de terceira ordem, se esse fato ocorre, podemos desconsiderar o efeito do terceiro polo e tratar o sistema como se fosse de segunda ordem. Nesse caso, o sistema é aproximado pelos polos dominantes do sistema de segunda ordem.



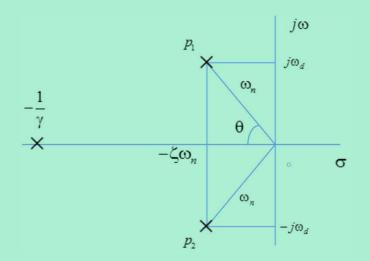


Diagrama no plano "s" de um sistema de terceira ordem.

 Esta abordagem, apesar de ser uma aproximação, evita a avaliação da transformada inversa de Laplace para determinar, por exemplo, o máximo sobressinal de ultrapassagem e outras medidas de desempenho.

$$C(s) = R(s) \frac{\omega_{n}^{2}}{(s^{2} + 2\xi\omega_{n}s + \omega_{n}^{2})(\gamma s + 1)}, \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{\omega_{n}^{2}}{s(s^{2} + 2\xi\omega_{n}s + \omega_{n}^{2})(\gamma s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\gamma s + 1} + \frac{Cs + D}{s^{2} + 2\xi\omega_{n}s + \omega_{n}^{2}}$$

$$\omega_{n}^{2} = A(\gamma s + 1)(s^{2} + 2\omega_{n}\xi s + \omega_{n}^{2}) + Bs(s^{2} + 2\xi\omega_{n}s + \omega_{n}^{2}) + (Cs + D)s(\gamma s + 1)$$

$$s = 0 \longrightarrow A = 1$$

$$s = -\frac{1}{\gamma} \longrightarrow \omega_{n}^{2} = -B\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma^{2}} - 2\frac{\xi\omega_{n}}{\gamma} + \omega_{n}^{2}\right) \longrightarrow B = \frac{\gamma^{3}\omega_{n}^{2}}{-1 + 2\xi\omega_{n}\gamma - \gamma^{2}\omega_{n}^{2}}$$
Fazendo,  $\frac{1}{\gamma} = 10\xi\omega_{n} \longrightarrow \gamma = \frac{1}{10\xi\omega_{n}}, \text{ temos:}$ 

$$B = \frac{1}{1000\xi^{3}\omega_{n}^{3}} \frac{\omega_{n}^{2}}{-1 + 2\frac{1}{10\xi\omega_{n}}} = \frac{1}{100\xi^{2}\omega_{n}^{2}} = \frac{1}{-1 + \frac{1}{5\xi}} - \frac{1}{100\xi^{2}} = \frac{1}{\omega_{n}} \left(\frac{1}{-100\xi^{2} + 20\xi - 1}\right)$$

$$0 < \xi < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \omega_{n} < \infty \longrightarrow |B| < < 1$$

- Quanto menor a Constante de Tempo do polo menor sua influência na resposta;
- Quanto mais a esquerda do plano "s" estiver o pólo, menor será o resíduo associado a este polo (ver exemplo a seguir)

$$C(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} \longrightarrow \xi \omega_n = 1$$

$$C_1(s) = \frac{0,4}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 0,2)} \longrightarrow c(t) = -1,2195e^{-0,2t} + \cdots$$

$$\gamma = 1/0, 2 = 5$$

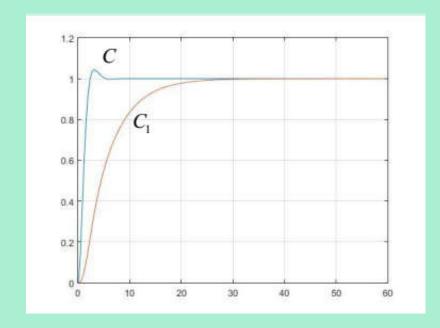
$$C_2(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 5)} \longrightarrow c(t) = -0,1176e^{-5t} + \cdots$$

$$\gamma = 1/5 = 0,2$$

$$C_3(s) = \frac{20}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 10)} \longrightarrow c(t) = -0,0244e^{-10t} + \cdots$$

$$\gamma = 1/10 = 0,1$$

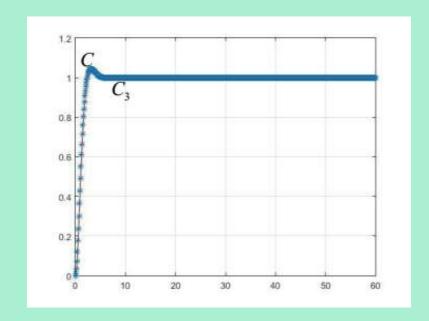
$$e^{-0,2} = 0,82 \quad , \quad e^{-5} = 0,0067 \quad , \quad e^{-10} = 0,000045$$



$$C(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} \longrightarrow \xi \omega_n = 1$$

$$C_1(s) = \frac{0,4}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 0,2)} \longrightarrow c(t) = -1,2195e^{-0,2t} + \cdots$$

$$\gamma = 1/0, 2 = 5$$



$$C(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} \longrightarrow \xi \omega_n = 1$$

$$C_3(s) = \frac{20}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 10)} \longrightarrow c(t) = -0,0244e^{-10t} + \cdots$$

$$\gamma = 1/10 = 0,1$$



#### 3.6.3 Efeito de um zero na resposta do sistema de 2ª ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

 A resposta transitória de um sistema de segunda ordem com um zero pode ser afetada pela posição do zero. Se

$$a \gg \omega_n$$

terá um efeito muito pequeno na resposta ao degrau.

- A resposta transitória é determinada pelos polos de malha fechada;
- Os polos de entrada resulta em termos da resposta em regime permanente, enquanto que os polos de malha fechada introduzem os termos da resposta transitória exponencial e/ou os termos da resposta transitória senoidal amortecida;
- Os zeros de malha fechada n\u00e3o afetam os expoente dos termos exponeciais e a frequência dos termos senoidais, mas afetam os valores e os sinais dos resíduos.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{s^2 + 2\omega_n \xi_s + \omega_n^2}, \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{a} \frac{1}{s^2 + 2\omega_n \xi_s + \omega_n^2} + \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n \xi_s + \omega_n^2)}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left[(s+\omega_n \xi)^2 + \omega_d^2\right]} + \frac{\omega_n^2}{a} \frac{1}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s+\omega_n \xi)^2 + \omega_d^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\omega_n^2}{a\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t)\right]$$

$$= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\omega_n \xi}{\omega_d} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\omega_n^2}{a\omega_d} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t)\right]$$

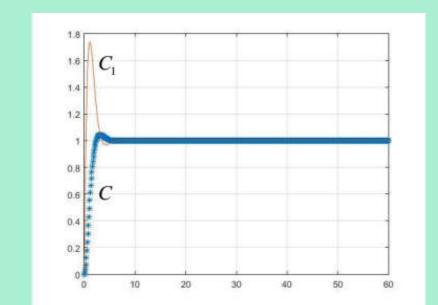
$$= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t) + \left(\frac{\omega_n \xi}{\omega_d} + \frac{\omega_n^2}{a\omega_d}\right) \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t)\right]$$

$$c_{depois}(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} (\cos\theta + D \sin\theta) \longrightarrow \text{com um zero}$$

$$c_{antes}(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} (\cos\theta + A \sin\theta) \longrightarrow \text{sem zero}$$

se  $a >> \omega_n \longrightarrow A = D \longrightarrow c_{denois}(t) = c_{antes}(t)$ 

→ Zeros de malha fechada não modificam o expoente da exponencial e da frequência da senóide.



$$C(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

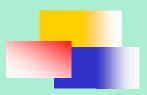
$$C_1(s) = \frac{\frac{2}{0.5}(s + 0.5)}{s(s^2 + 2s + 2)}, \quad a = 0.5 \text{ e } \omega_n = \sqrt{2}$$



$$C(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$C_1(s) = \frac{\frac{2}{5}(s+5)}{s(s^2 + 2s + 2)},$$
 $a = 5 \text{ e } \omega_n = \sqrt{2}$ 

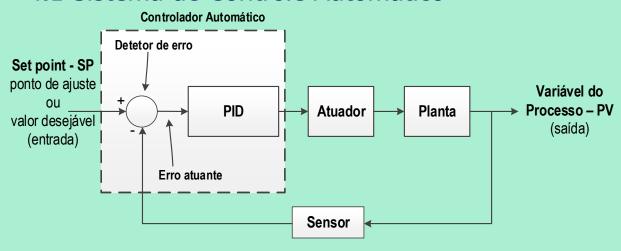
$$a = 5$$
 e  $\omega_n = \sqrt{2}$ 



# Análise da resposta dos controladores industriais inseridos na planta

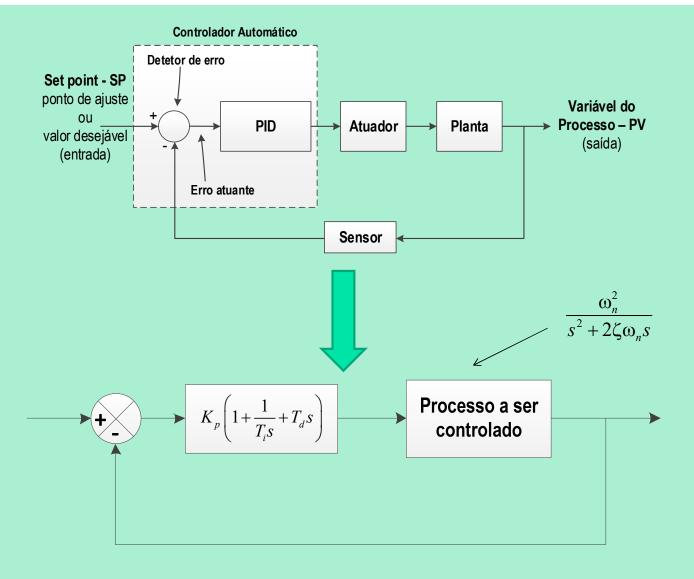


#### 4.1 Sistema de Controle Automático



- Um controlador automático compara o valor real de saída da planta com a entrada de referência (valor desejado), determina o desvio (erro atuante) e produz um sinal de controle que vai reduzir o erro a zero ou a um valor pequeno. A maneira pela qual o controlador automático produz o sinal de controle é chamada de Ação de Controle.
- O controlador detecta o sinal de erro atuante, de baixa potência, e o amplifica em um nível suficientemente alto. A saída de um controlador automático alimenta um atuador (motor elétrico).
- O **sensor**, ou elemento de medição, é um dispositivo que converte a variável de saída em outra variável conveniente, que pode ser utilizada para comparar a saída ao sinal de entrada.







#### 4.2 - Classificação dos Controladores

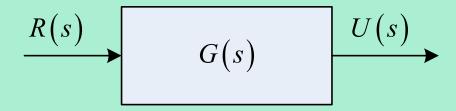
- i) Controladores de duas posições on-off;
- ii) Controladores Proporcionais;
- iii) Controladores Integrais;
- iv) Controladores Proporcional-Integrais;
- v) Controladores Proporcional-Derivativos;
- vi) Controladores Proporcional-Integral-Derivativos.

#### Características dos Controladores

P	CORREÇÃO PROPORCIONAL AO ERRO	A correção a ser aplicada ao processo deve crescer na proporção que cresce o erro entre o valor real e o desejado.
I	CORREÇÃO PROPORCIONAL AO PRODUTO ERRO x TEMPO	Erros pequenos mas que existem há muito tempo requerem correção mais intensa.
D	CORREÇÃO PROPORCIONAL À TAXA DE VARIAÇÃO DO ERRO	Se o erro está variando muito rápido, esta taxa de variação deve ser reduzida para evitar oscilações.

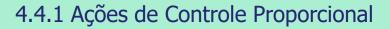


#### 4.4 - Ações de Controle - Diagrama de Blocos



$$G(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$$

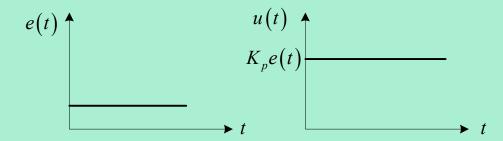
$$G(s) \longrightarrow$$
 Função de Transferência



$$u(t) = K_p e(t)$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

$$K_p \longrightarrow$$
 Ganho proporcional

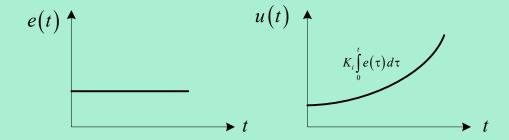


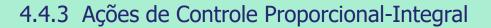


$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$
$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Constante integrativa

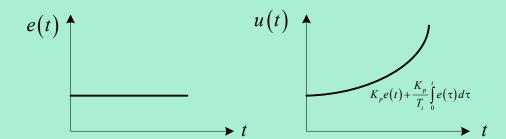




$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

 $T_i$  Tempo integrativo

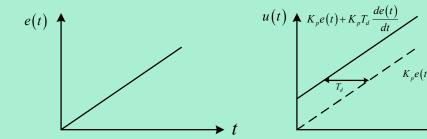




$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$
$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + sT_d)$$

Tempo derivativo





# 4.4.5 Ações de Controle Proporcional-Integral-Derivativo paralelo ideal

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$
$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[ 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right]$$

# 4.4.6 Ações de Controle Proporcional-Integral-Derivativo interativo (variante do PID)

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \right] \left[ 1 + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$
$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$



#### 4.4.7 Os três termos de um controlador PID

A função de transferência de um controlador PID é dado por:

(1) 
$$K_P + \frac{K_I}{S} + K_D S = \frac{K_D S^2 + K_P S + K_I}{S}$$

(1) 
$$K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$
  
(2)  $K_P + \frac{K_P}{sT_I} + K_P T_D s = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + T_D s \right)$ 

#### Onde:

 $K_p$  = ganho proporcional

K<sub>1</sub> = ganho integral

K<sub>D</sub> = ganho derivativo

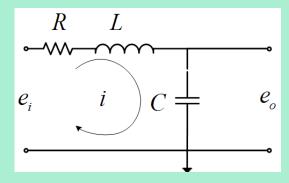
 $T_1$  = tempo integrativo

 $T_D$  = tempo derivativo



### Exemplo:

Suponha um simples circuito RLC apresentado na figura abaixo.



• O modelo matemático para o sistema apresentado é dado por

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t) = e_i(t)$$
$$e_0(t) = \frac{1}{C}\int i(t)$$

> Tomando a transformada de Laplace do modelo, obtemos:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = E_i(s)LsI(s) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = E_i(s)$$

$$E_0(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

$$E_0(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$



Fazendo,

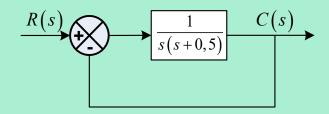
$$LC = 1H$$
$$RC = 0,5s$$

Substituindo estes valores na função de transferência, obtemos

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 1}$$



Seja o processo dado abaixo

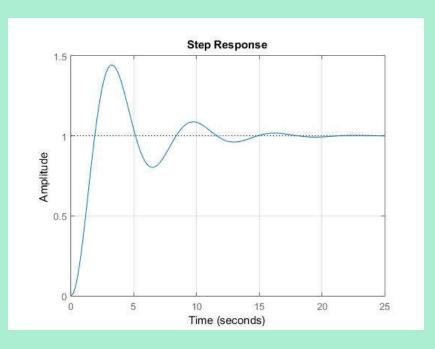


$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$
  

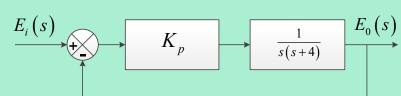
$$\xi \omega_n = 0.25 \quad \text{e} \quad \omega_n = 1 \quad \rightarrow \quad \xi = 0.25$$

Usando o Matlab:

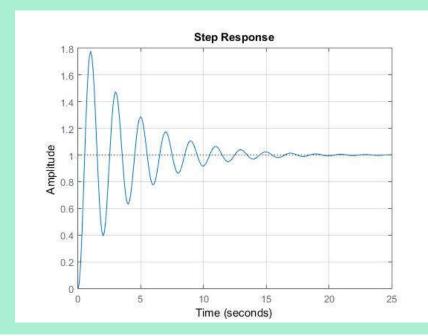
num=1;
den=[1 0.5 0];
sys=tf(num,den);
U=feedback(sys,1)
step (U)



#### Caso 1: Controlador Proporcional



$$\begin{split} &K_{p}{=}10;\\ &num{=}[K_{p}];\\ &den{=}[1\ 0.5\ 1{+}K_{p}];\\ &t{=}0{:}0.01{:}25;\\ &\underbrace{step}(num,den,t) \end{split}$$



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{K_p}{s^2 + 4s}}{1 + \frac{K_p}{s^2 + 4s}} = \frac{K_p}{s^2 + 4s + K_p}$$

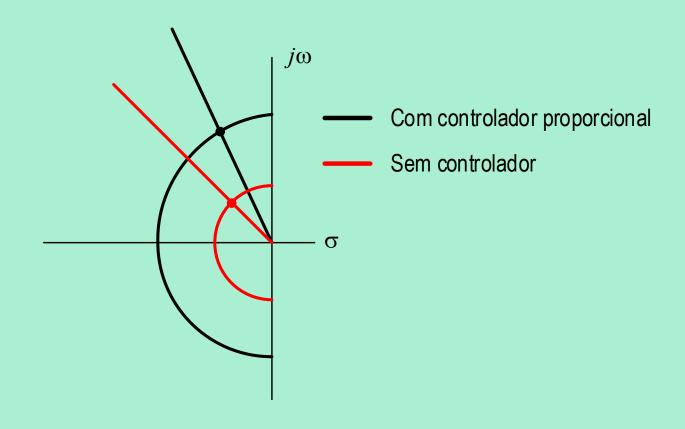
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{10}{s^2 + 0.5s + 10} \rightarrow K_P = 10$$

$$\xi \omega_n = 0,5$$

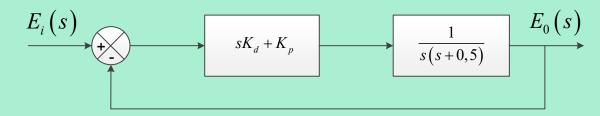
$$\omega_n = \sqrt{10}$$
 e  $\xi = 0.158$ 



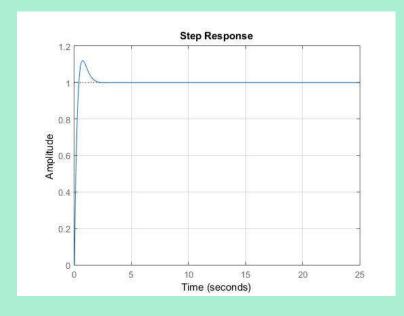
 $\mapsto$  Configuração dos sistemas no plano "s"



#### Caso 2: Controlador Proporcional-Derivativo



$$\begin{split} & K_p{=}10; \, K_d{=}5; \\ & num{=}[K_d \ K_p]; \\ & den{=}[1 \ 0.5{+}K_d \ Kp]; \\ & t{=}0{:}0.01{:}25; \\ & step(num,den,t); \end{split}$$



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{K_p + sK_d}{s^2 + 0.5s}}{1 + \frac{K_p + sK_d}{s^2 + 0.5s}} = \frac{K_p + sK_d}{s^2 + 0.5s + K_p + sK_d}$$

$$E_0(s) \qquad sK_d + K_p \qquad 5s + 10$$

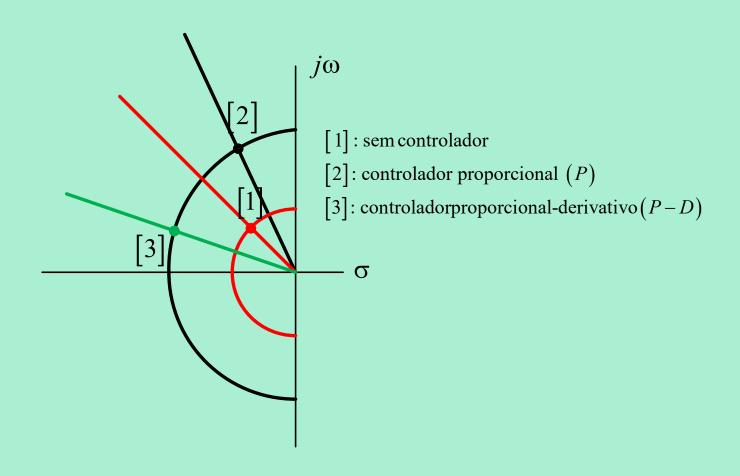
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{sK_d + K_p}{s^2 + (0,5 + K_d)s + K_p} = \frac{5s + 10}{s^2 + 5,5s + 10}$$

$$\xi \omega_n = 2,75$$

$$\omega_n = 3.16$$
 e  $\xi = 0.86$ 

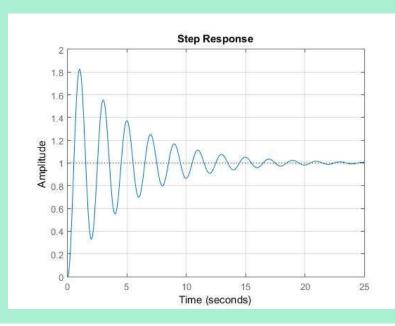


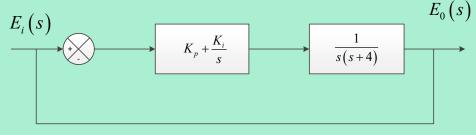
 $\mapsto$  Configuração dos sistemas no plano "s"



## • Caso

#### Caso 3: Controlador Proporcional-Integral





$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{K_p + K_i/s}{s^2 + 0.5s}}{1 + \frac{K_p + K_i/s}{s^2 + 0.5s}}$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{sK_p + K_i}{s^3 + 0.5s^2 + sK_p + K_i} = \frac{10s + 1}{s^3 + 0.5s^2 + 10s + 1}$$

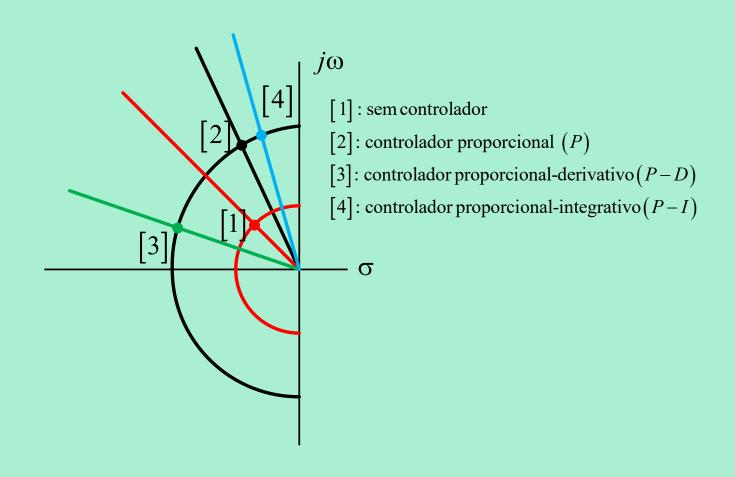
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{10s + 1}{(s + 0.1998 - j3.1496)(s + 0.1998 + j3.1496)(s + 0.1)}$$

$$\xi \omega_n = 0.1998 \quad \text{e} \quad \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 3.1496$$

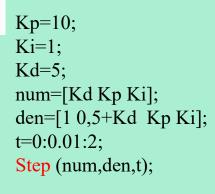
$$\omega_n = 3{,}16$$
 e  $\xi = 0{,}0633$ 

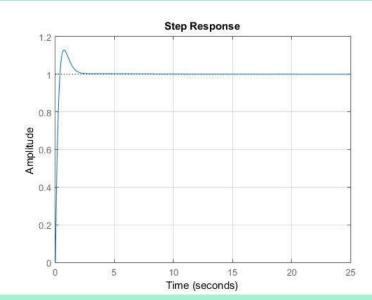


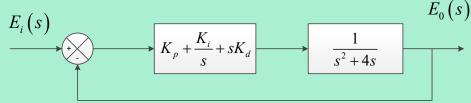
 $\mapsto$  Configuração dos sistemas no plano "s"











$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{K_p + sK_d + K_i/s}{s^2 + 0.5s}}{1 + \frac{K_p + sK_d + K_i/s}{s^2 + 0.5s}} =$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s^3 + (0, 5 + K_d) s^2 + s K_p + K_i} = \frac{5s^2 + 10s + 1}{s^3 + 5, 5s^2 + 10s + 1}$$

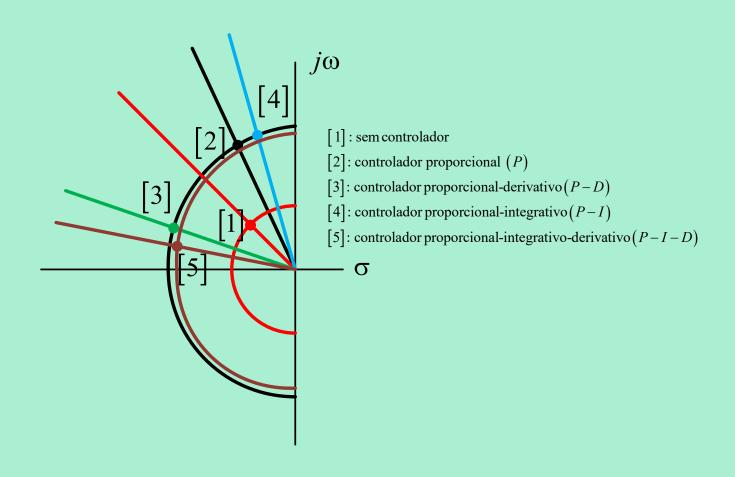
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{5s^2 + 10s + 1}{(s + 2,6970 - j1,4677)(s + 2,6970 + j1,4677)(s + 0.1061)}$$

$$\xi \omega_n = 2,697$$
 e  $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 1,4677$ 

$$\omega_n = 3,072$$
 e  $\xi = 0,878$ 



#### $\mapsto$ Configuração dos sistemas no plano "s"





#### **Resposta Proporcional**

A componente proporcional depende apenas da diferença entre o ponto de ajuste e a variável de processo. Esta diferença é referida como o termo de erro. O ganho proporcional (Kp) determina a taxa de resposta de saída para o sinal de erro. Por exemplo, se o termo de erro tem uma magnitude de 10, um ganho proporcional de 5 produziria uma resposta proporcional de 50. Em geral, aumentando o ganho proporcional irá aumentar a velocidade da resposta do sistema de controle. No entanto, se o ganho proporcional é muito grande, a variável de processo começará a oscilar. Se Kp é aumentado ainda mais, as oscilações ficarão maior e o sistema ficará instável e poderá oscilar até mesmo ficar fora de controle.



#### **Resposta Derivativa**

A componente derivada faz com que a saída diminua se a saída do processo (variável do processo) está aumentando rapidamente. A derivada de resposta é proporcional à taxa de variação da variável de processo. Aumentar o parâmetro do tempo derivativo (Td) fará com que o sistema de controle reaja mais fortemente à mudanças no parâmetro de erro aumentando a velocidade da resposta global de controle do sistema. Na prática, a maioria dos sistemas de controle utilizam o tempo derivativo (Td) muito pequeno, pois a derivada de resposta é muito sensível ao ruído no sinal da variável de processo. Se o sinal de feedback do sensor é ruidoso ou se a taxa de malha de controle é muito lenta, a derivada de resposta pode tornar o sistema de controle instável.



#### **Resposta Integral**

A componente integral soma o termo de erro ao longo do tempo. O resultado é que mesmo um pequeno erro fará com que a componente integral aumente lentamente. A resposta integral irá aumentando ao longo do tempo a menos que o erro seja zero, portanto, o efeito é o de conduzir o erro de estado estacionário para zero. O de erro de estado estacionário é a diferença final entre as variáveis do processo (saída) e do set point.

$$P \begin{cases} \frac{E_0(s)}{E_i(s)} \frac{K_p}{s^2 + 4s + K_p} \\ K_p = 200 \\ e_0(t) = 1 - e^{-2t} \left(\cos 14t + 0,143 \sin 14t\right) \end{cases}$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{sK_d + K_p}{s^2 + (4 + K_d)s + K_p}$$

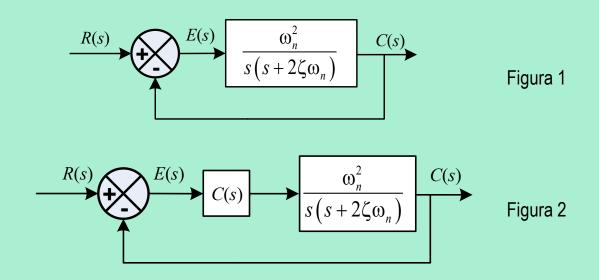
$$P-D \begin{cases} \frac{E_{i}(s)}{E_{i}(s)} = \frac{s^{2} + (4 + K_{d})s + K_{p}}{s^{2} + (4 + K_{d})s + K_{p}} \\ K_{d} = 5, \quad K_{p} = 200 \\ \frac{E_{0}(s)}{E_{i}(s)} = \frac{5s + 200}{s^{2} + 9s + 200} \longrightarrow e_{0}(t) = 1 - e^{-4.5t} \left[\cos 13.4t - 0.037 \sin 13.4t\right] \\ K_{d} = 20, \quad K_{p} = 200 \\ \frac{E_{0}(s)}{E_{i}(s)} = \frac{20s + 200}{s^{2} + 24s + 200} \longrightarrow e_{0}(t) = 1 - e^{-12t} \left[\cos 7.48t - 1.07 \sin 7.48t\right] \end{cases}$$

$$P-I \begin{cases} \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{sK_p + K_i}{s^3 + 4s^2 + sK_p + K_i} \\ K_i = 5, & K_p = 200 \\ \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{200s + 5}{s^3 + 4s^2 + 200s + 5} \longrightarrow e_0(t) = 1 + 0e^{-0.025t} - e^{-2t} \left[\cos 14t - 0.57 \sin 17t\right] \end{cases}$$



#### Exercício:

- 1) Obtenha a representação no espaço de estadods da equação padrão da função de transferência de um sistema de segunda ordem. Utilizar a Figura 1.
- 2) Escrever as equações no espaço de estados das 4 (quatro) ações de controle estudadas. Utilizar a Figura 2, e substitua o compensador C(s) pela ação de controle.





#### 5 Análise Transitória com o Matlab

1) Considere o sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 25}{s^2 + 4s + 25}$$

Coeficientes dos polinômios:  $num = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 25 \end{bmatrix}$  $den = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 25 \end{bmatrix}$ 

Resposta ao degraun unitário: step(num, den, t)

t = tempo especificado pelo usuário



2) Considere o sistema abaixo na forma do espaço de estados, encontrar a função de tranferência

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

O sistema é definido como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



A matriz de transferência G(s) para o sistema é dado por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 6,5 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + s + 6,5} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ s+7,5 & 6,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2 + s + 6,5} & \frac{s}{s^2 + s + 6,5} \\ \frac{s+7,5}{s^2 + s + 6,5} & \frac{6,5}{s^2 + s + 6,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$



- Este sistema tem duas entradas e duas saídas, podendo definir quatro funções de tranferências, dependendo de quais sinais forem considerados entrada e saída;
- 2) Quando consideramos o sinal u<sub>1</sub> como entrada, estamos supondo Que o sinal u<sub>2</sub> seja zero e vice-versa.

Assim temos: 
$$\frac{\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}}{\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}} = \frac{s-1}{s^2+s+6,5}, \qquad \frac{\frac{Y_1(s)}{U_2(s)}}{\frac{Y_2(s)}{U_2(s)}} = \frac{s}{s^2+s+6,5}$$

$$\frac{\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}}{\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}} = \frac{s+7,5}{s^2+s+6,5}, \qquad \frac{\frac{Y_2(s)}{U_2(s)}}{\frac{Y_2(s)}{U_2(s)}} = \frac{6,5}{s^2+s+6,5}$$

$$A = [-1 \quad -1; 6.5 \quad 0];$$

$$B = [1 \ 1;1 \ 0];$$

No Matlab, temos o seguinte script: C =

$$C = [1 \ 0; 0 \ 1];$$

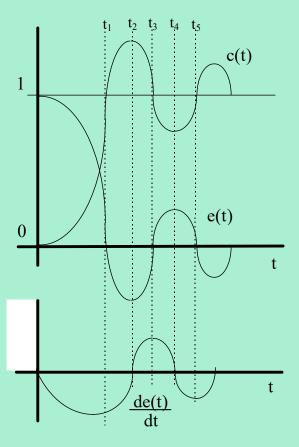
$$D = [0 \ 0; 0 \ 0];$$



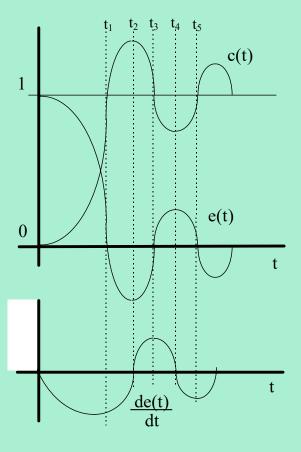
# 6 Efeitos das ações de controle no sistema sobre o desempenho do sistema

#### 1- Proporcional-Derivativo

Considere um sistema de segunda ordem subamortecido. A resposta ao degrau unitário está mostrado na figura abaixo, bem como o sinal erro atuante e a derivada no tempo do sinal erro. Note que há um pico da resposta relativamente grande e esta é bem oscilatória, e isto pode ser inconveniente em muitas aplicações. Para um sistema movido por um motor de algum tipo, este comportamento é devido a um excessivo torque desenvolvido pelo motor е а falta amortecimento no intervalo de 0 < t < t1, durante o qual o erro atuante é positivo, e há um sobressinal, c(t) > 1.

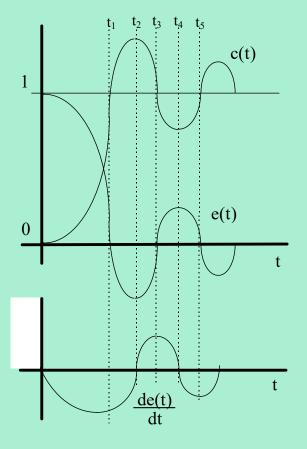


Para o intervalo de t1 a t3, o erro atuante é negativo, e o correspondente torque do motor é negativo. Este torque negativo tende a diminuir a aceleração de saída e causa uma reversão da saída, c(t) < 1, causando um sub-sinal da resposta.





- O controle derivativo mantém em níveis adequados a quantidade de torque positivo ou negativo quando corretamente definido.
- Como mostrado na figura, para 0 < t < t<sub>1</sub>, a derivada de e(t) é negativa, que irá reduzir o torque original desenvolvido por e(t).
- Para t1 < t < t2, tanto e(t) como sua derivada são negativos, o que significa que o torque negativo de desaceleração será maior que o do controle proporcional isolado. Portanto, o efeito final será um o sobressinal menor do que no caso do controle proporcional sozinho.
- No intervalo de tempo de t2 a t3, o sinal e(t) e sua derivada tem sinal opostos, e portanto, o torque negativo que conduz para um sub-sinal a partir de t3 será reduzido com a adição do controle derivativo.



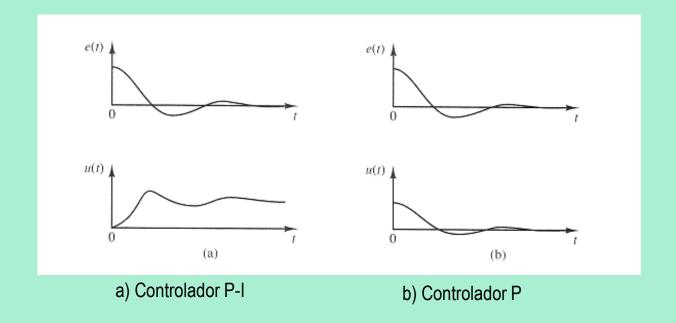


■ Conclusão: Uma vez que a derivada de e(t) representa a inclinação da função e(t), o controle derivativo é essencialmente um tipo que antecipa a tendência do sinal e(t) predizendo um sobre ou sub-sinal a frente no tempo, e fazendo as apropriadas correções antes do sobre ou sub-sinal ocorrerem.



#### 2 - Proporcional-Integral

No controle integral de um processo, o sinal de controle, o sinal de saída do controlador, em qualquer instante é igual a área sob a curva do sinal erro atuante até aquele instante. O sinal de controle u(t) pode possuir um valor não nulo quando o sinal de erro atuante e(t) for nulo, como ilustra figura abaixo. Isso não acontece no controlador proporcional, uma vez que o sinal de controle não nulo necessita de um sinal de erro atuante não nulo.





- Note-se que a ação de controle integral, embora remova o erro residual ou erro em regime estacionário, pode resultar em uma resposta oscilatória com amplitude lentamente decrescente ou mesmo com amplitude crescente, ambas usualmente indesejáveis.
- Uma vez que os requisitos de desempenho foram especificados, o próximo passo é analisar o sistema e selecionar um controle adequado. Na grande maioria das aplicações, um controle PID irá fornecer os resultados exigidos.

#### 7 Função de Transferência: outras representações

#### Primeira Representação

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad n \ge m$$
  
onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $e$   $b_1, b_2, \dots, b_m$  são constantes

#### Segunda Representação

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_m)}, \quad n \ge m$$
onde  $z_1, z_2, ..., z_m$  são os zeros  $e p_1, p_2, ..., p_n$  são os polos
$$K = \frac{b_0}{a_0} \rightarrow \text{ganho estático}$$

#### Terceira Representação

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)...(1+sT_m)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)...(1+s\tau_n)}, \quad n \ge m$$
onde  $T_i = \frac{1}{z_1}, \quad \tau_i = \frac{1}{p_i}$  e  $K = T(0) \rightarrow \text{ganho estático}$ 



#### 7.1 Denominações da função de transferência

• Própria: n≥m

• Estritamente Própria: n > m

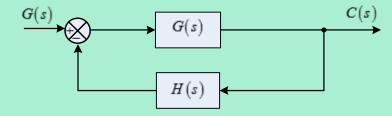
• Não Própria: n < m

Se a função de transferência não conter fatores comuns:

- Os polos do sistema são os raízes do numerador;
- Os zeros do sistema são as raízes do denominador.



# 7.2 Definições adicionais para um sistema malha fechada descrito por um diagrama de blocos



• Função de transferência do sistema em malha aberta (OL - Open Loop)

$$OL(s) = G(s)H(s)$$

• Função de transferência do sistema em malha fechada (CL - Closed Loop)

$$CL(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

• Ganho estático (Ganho DC)

$$T(0) = \lim_{t \to \infty} c(t) = \lim_{s \to 0} sC(s)$$
 (Teorema do valor final)



Erro em regime estacionário (steady-state error)

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Caso particular:

$$R(s) = \frac{1}{s}$$
 e  $H(s) = 1$  (realimentação unitária)

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)}$$



# 7.3 Erros estacionários em sistemas de controle com realimentação unitária

• Tipo do sistema - número de pólos de multiplicidade N na origem (sN=0) da função de transferência em malha aberta OL(s).

$$OL(s) = G(s) = K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^N(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)}$$

 $N = 0 \rightarrow \text{sistema tipo } 0$ 

 $N = 1 \rightarrow \text{sistema tipo} \quad 1$ 

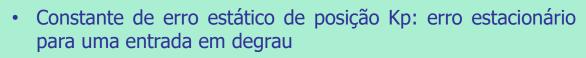
e assim por diante.

Erro em regime estacionário (steady-state error)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} =, \quad H(s) = 1 \text{ (realimentação unitária)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \longrightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G(s)}R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s)$$



$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G(0)}$$

$$r(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$K_{p} = \lim_{s \to 0} G(0)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_{p}}$$

i. Erro estático para sistema do tipo 0

$$G(s) = K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^N (1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)} = K$$

ii. Erro estático para sistema do tipo 1 e superiores

$$K_{p} = \lim_{s \to 0} K \frac{(1 + sT_{a})(1 + sT_{b})...(1 + sT_{m})}{s^{N}(1 + s\tau_{a})(1 + s\tau_{b})...(1 + s\tau_{n})} = \infty, N \ge 1$$



### **CONCLUSÃO:**

Para uma entrada em degrau unitário, o erro estacionário é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K} \longrightarrow \text{ para sistema do tipo } 0$$
  
 $e_{ss} = 0 \longrightarrow \text{ para sistemas do tipo } 1 \text{ e superiores}$ 

• Constante de erro estático de velocidade Kv: erro estacionário para uma entrada em rampa unitária

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$



#### i. Erro estático para sistema do tipo 0

$$G(s) = K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^N(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = sK \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)} = 0$$

ii. Erro estático para sistema do tipo 1

$$K_{v} = \lim_{s \to 0} sG(s) = K \frac{(1 + sT_{a})(1 + sT_{b})...(1 + sT_{m})}{(1 + s\tau_{a})(1 + s\tau_{b})...(1 + s\tau_{n})} = K$$

iii. Erro estático para sistema do tipo 2 e superiores

$$K_{v} = \lim_{s \to 0} sG(s) = K \frac{s(1 + sT_{a})(1 + sT_{b})...(1 + sT_{m})}{s^{N}(1 + s\tau_{a})(1 + s\tau_{b})...(1 + s\tau_{n})} = \infty, \quad N \ge 2$$



# **CONCLUSÃO:**

Para uma entrada em rampa unitária, o erro estacionário é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$
, para sistemas do tipo 0

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$
, para sistemas do tipo 1

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0$$
, para sistemas do tipo 2 e superiores

 Constante de erro estático de aceleração Ka: erro estacionário para uma entrada em parábola unitária

$$r(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \ge 0\\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

i. Erro estático para sistema do tipo 0

$$G(s) = K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^N(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = s^2 K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)} = 0, \quad N = 0$$



ii. Erro estático para sistema do tipo 1

$$G(s) = K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^N(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = s^2 K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^1(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)} = 0, \quad N = 1$$

iii. Erro estático para sistema do tipo 2

$$G(s) = K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^N(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = s^2 K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^2(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)} = K, \quad N = 2$$

iii. Erro estático para sistema do tipo 3 e superiores

$$G(s) = K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^N(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = s^2 K \frac{(1+sT_a)(1+sT_b)...(1+sT_m)}{s^3(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)...(1+s\tau_n)} = \infty, \quad N \ge 3$$



## **CONCLUSÃO:**

• Para uma entrada em rampa unitária, o erro estacionário é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$
, para sistemas do tipo 0 e 1

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$
, para sistemas do tipo 2

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0$$
, para sistemas do tipo 3 e superiores



Resumo dos erros estacionários para sistemas do tipo 0, tipo
 1 e tipo 2 quando sujeito a vários sinais de entrada.

Erro estacionário em função do ganho K			
	Entrada em degrau $r(t)=1$	Entrada em rampa $r(t)=t$	Entrada em aceleração $r(t)=t^2/2$
Sistema tipo 0	1/(1+ <i>K</i> )	$\infty$	$\infty$
Sistema tipo 1	0	1/ <i>K</i>	$\infty$
Sistema tipo 2	0	0	1/ <i>K</i>

- Os coeficientes de erro K<sub>p</sub>, K<sub>v</sub> e K<sub>a</sub> descrevem a habilidade de um sistema de retroação unitária em reduzir ou eliminar erros estacionários. Portanto, eles são indicativos de desempenho de em regime estacionário;
- Em geral é desejável aumentar os coeficientes de erro, enquanto se mantém a resposta transitória dentro de limites aceitáveis;
- Se houver algum conflito entre os coeficiente de erro de velocidade e o coeficiente de erro de aceleração, então o último pode ser considerado menos importante que o anterior.



# 3 Sistemas de ordem superior

- 8.1 Resposta transitória de sistemas de ordem superior
- → Função de Transferência de um sistema de controle malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_m)}, \ n > m$$

→ Para uma excitação degrau unitário e supondo que todos os polos de malha fechada sejam reais e distintos podemos escrever que:

$$C(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{s(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

→ Portanto, expandindo em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s + p_i}$$

 $a_i$  é o resíduo do polo situado em  $s = -p_i$ 



- Se todos os polos de malha fechada estiverem no semiplano esquerdo, as magnitudes relativas dos resíduos determinanm a importância relativa dos componentes na forma expandida de C(s);
- Se o polo estiver localizado muito longe da origem, o resíduo desse polo pode ser pequeno;
- Um polo de malha fechada e um zero de malha fechada estiverem perto um do outro, se cancelarão efetivamente;
- Os termos que têm resíduos muito pequeno pouco contribuem para a resposta transitória e podem ser desprezados;
- Se isso for feito, o sistema de ordem superior pode ser aproximado por um sistema de ordem inferior

 $\mapsto$  Para o caso em que os polos de C(s) consistem em polos reais e pares de polos complexos-conjugados, mportanto:

$$C(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{q} (s + p_j) \prod_{k=1}^{r} (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)}, \quad q + 2r = n \text{ e } m < n$$

 $a_i$  é o resíduo do polo situado em  $s = -p_i$ 

→ Expandindo em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^{q} \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k (s + \xi_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \xi^2}}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2}$$



→ Aplicando a tansformada inversa de laplace, obtemos:

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^{q} a_{j} e^{-p_{j}t} + \sum_{k=1}^{r} b_{k} e^{-\xi_{k}\omega_{k}t} \cos\left(\omega_{k} \sqrt{1 - \xi_{k}^{2}}\right) t + \sum_{k=1}^{r} c_{k} e^{-\xi_{k}\omega_{k}t} \sin\left(\omega_{k} \sqrt{1 - \xi_{k}^{2}}\right) t$$

- A resposta de um sistema de ordem superior é composto por exponenciais e senóides amortecidas;
- Se todos os polos de malha fechada estiverem localizados no semiplano esquerdo doplano "s", todos os termos exponenciais e todos os termos amortecidos exponencialmente tenderão a zero qundo t cresce;
- O valor de sáida em regime estacionário é c(∞) = a;
- Nesse caso o sistema é considerado estável.



#### 8.2 Polos a malha fechada dominantes

- A dominância relativa de um polo a malha fechada é determinado pela relação das partes reais dos polos a malha fechada, bem como dos valores relativos dos resíduos calculados nos polos a malha fechada;
- Se a relação entre as partes reais excedem a 5, e não havendo zeros nas vizinhaças, então os polos a malha fechada mais próximos do eixo jω dominarão no desempenho da resposta transitória;
- Os polos de malha fechada que têm efeito dominante sobre o comportamento da resposta transitória são chamados de polos dominantes:
- Os polos dominantes a malha fechada são os mais importantes entre os polos de malha fechada.