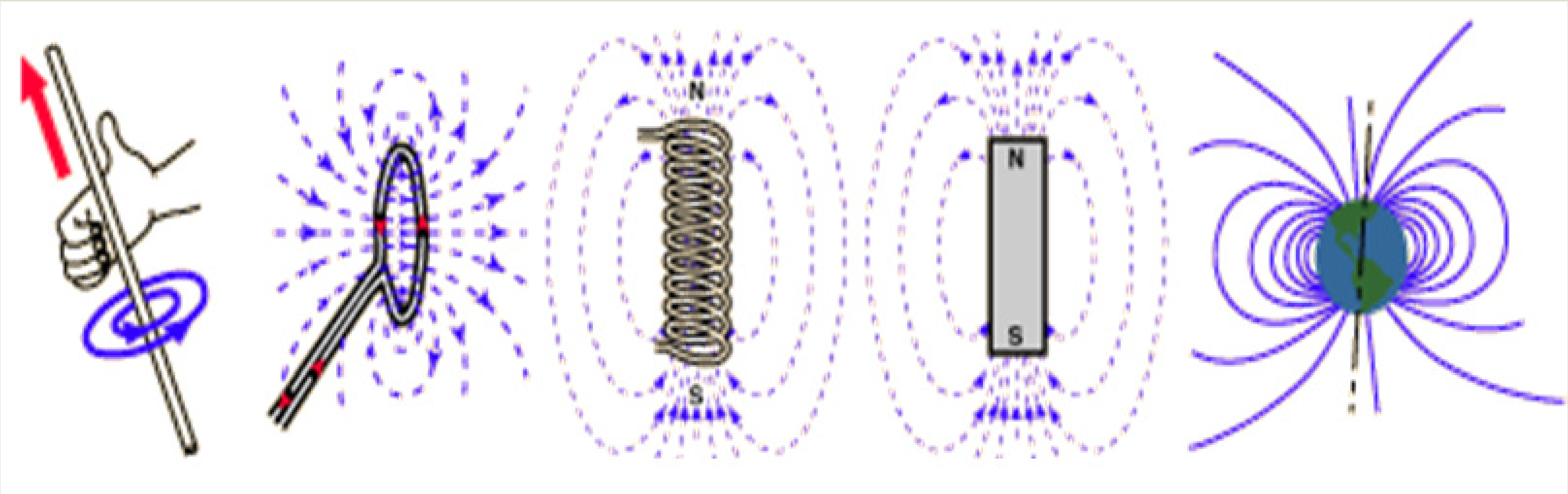
ELETROMAGNETISMO

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Fontes de Campo Magnético



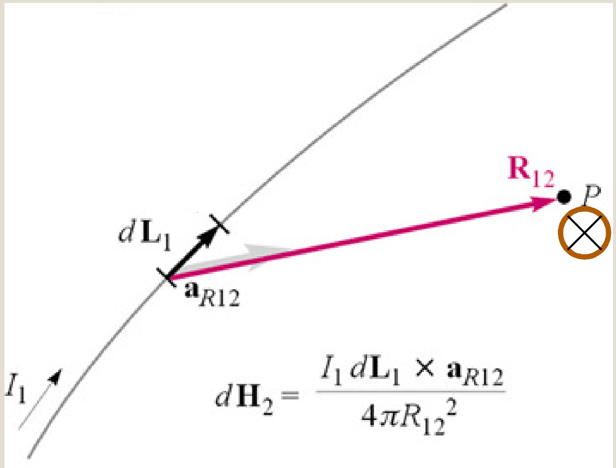
Corrente em um fio | Loop de fio | Solenóide | Barra Magnética | Planeta Terra

- Vamos ignorar o imã permanente e o campo elétrico variável para o futuro;
- Focaremos agora na campo magnético produzido por uma corrente contínua.

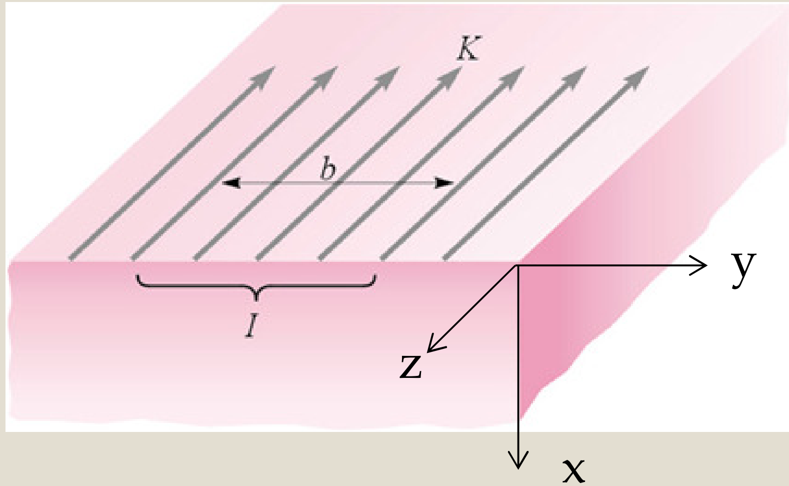
CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Lei de Biot-Savart

O campo magnético d**H** produzido pelo elemento de corrente contínua Id**L** no ponto P.



$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{L}\times\vec{a}_R}{4\pi R^2} \Rightarrow \quad \vec{H} = \oint \frac{Id\vec{L}\times\vec{a}_R}{4\pi R^2} \quad (A/m)$$



onde,

$$Id\vec{L} = \vec{K}dS = \vec{J}dv$$

$$K = \frac{dI}{dL} = densidade\ superficial\ de\ corrente\ (\mathrm{A/m})$$

$$J = \frac{dI}{dS} = densidade\ (volumétrica)\ de\ corrente\ (\mathrm{A/m^2})$$

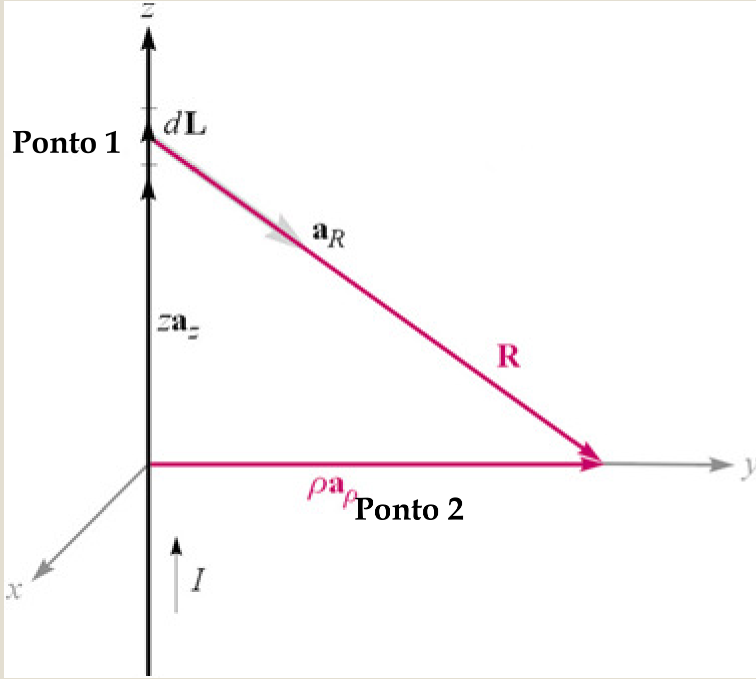
$$Id\vec{L} = \vec{K}dS = \vec{J}dv$$

$$I = Kdy = Jdxdy$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Exemplo: Calcular o campo magnético H num ponto P devido a um filamento retilíneo infinito com corrente **I.**

Por simetria, não existe variação de z ou φ. O campo é determinado no Ponto 2, onde z=0.



$$r_2 = \rho \vec{a}_\rho$$

$$r_2 = z \vec{a}_z$$

$$R_{12} = r_2 - r_1 = \rho \vec{a}_\rho - z\vec{a}_z$$

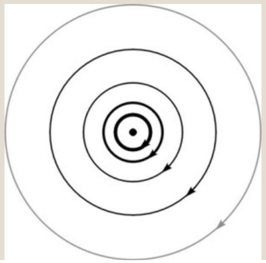
$$a_{R12} = \frac{\rho \vec{a}_\rho - z\vec{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{Idz \times (\rho \vec{a}_\rho - z\vec{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Idz\rho\vec{a}_\phi}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{H} = \frac{I\rho}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\vec{a}_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I\rho}{4\pi}\left[\frac{z\vec{a}_\phi}{\rho^2(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$

A magnitude do campo não é função de z or φ. **Varia de forma inversamente proporcional a distância** do filamento.



A direção do vetor intensidade magnético é circurferencial.

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Lei Circuital de Ampère

- Quando resolvemos **alguns problemas de eletroestática** com a lei de Coulomb, **vimos que estes problemas poderiam ser mais facilmente resolvidos** utilizando a **lei de Gauss que houvesse um alto grau de simetria**.

- **Existe um procedimento análogo com campos magnético**.

- A lei que nos ajuda a resolver problemas mais facilmente é a **Lei Circuital de Ampére,**

- **O seu uso necessita de consideração cuidadosa da simetria do problema** para **determinar quais variáveis e componentes estão presentes**.

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Lei Circuital de Ampère

"A integral de linha de **H** ao longo de qualquer percurso fechado é exatamente igual à corrente enlaçada pelo percurso".

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I \quad (\textit{corrente total enlaçada, sentido convencional})$$

Amperiana (def.):

É um percurso (caminho) especial com as seguintes propriedades:

i) **É um percurso fechado;**
ii) Em cada um de seus pontos **H** é tangencial ou **H** é normal. Assim:

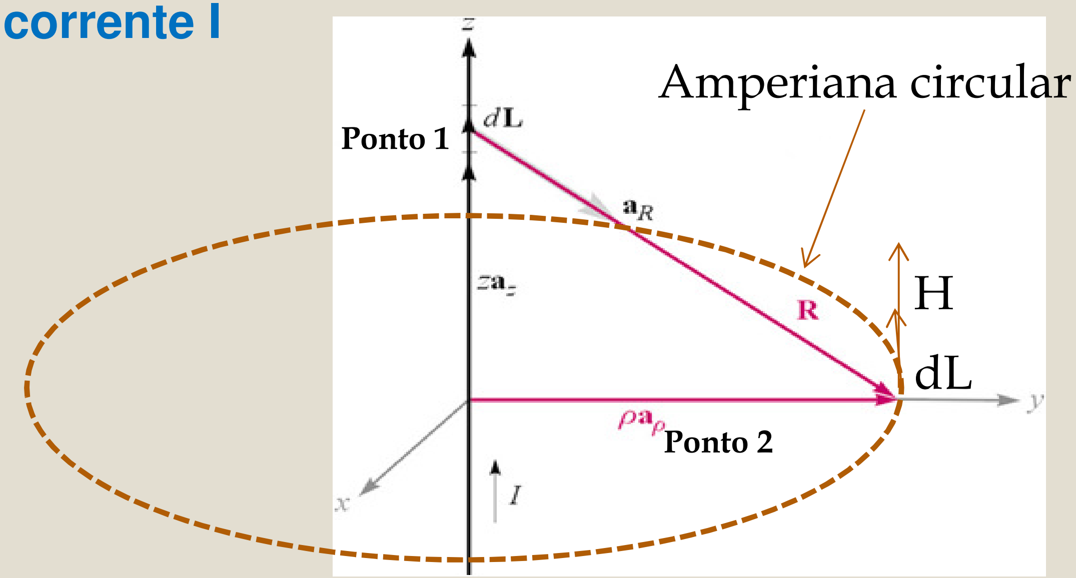
Se **H** for perpendicular a dL → H·dL=0
Se **H** for paralelo a **dL** → H·dL=**HdL**

i) Em todos os pontos onde **H // dL**, a magnitude de **H** é constante.

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Cálculo de H, aplicando a lei circuital de Ampère (e amperiana), para alguns casos especiais:

a) Condutor retilíneo ∞ com corrente I



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{enlaçada}$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} H_{\phi} \vec{a}_{\phi} \cdot \rho d\phi \vec{a}_{\phi} = I \Rightarrow H_{\phi} \rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = I$$

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{a}_{\phi}$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Cálculo de H, aplicando a lei circuital de Ampère (e amperiana), para alguns casos especiais:

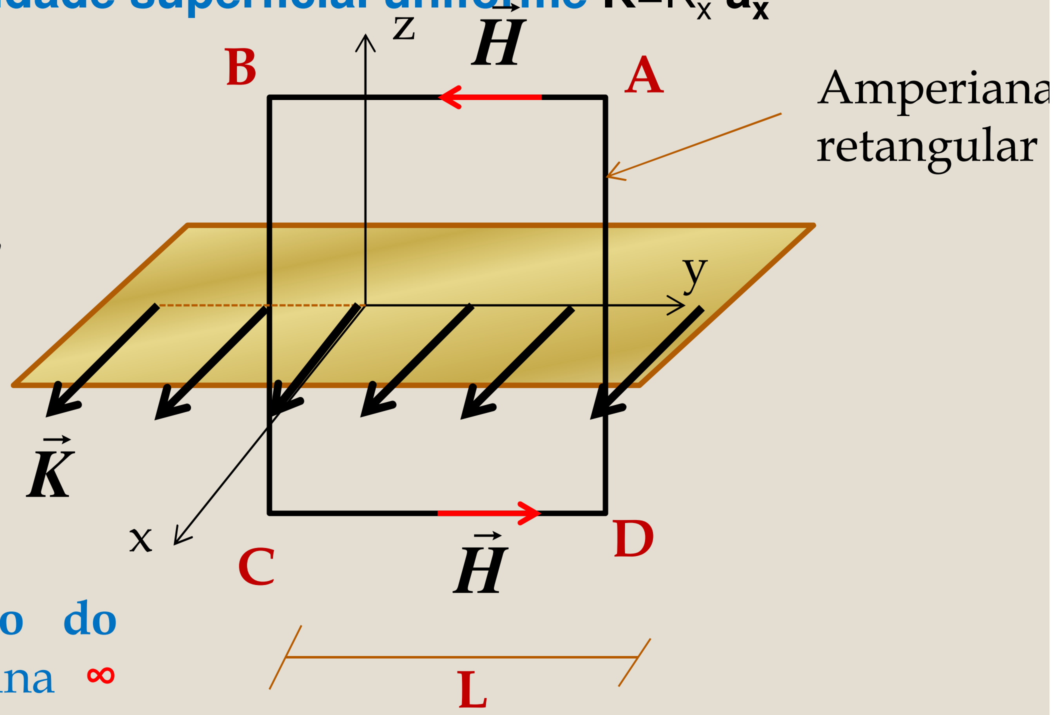
b) Película ∞ com corrente com densidade superficial uniforme K=K$_x$ a$_x$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{L} = I_{enlaçada}$$

$$\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \vec{H}\cdot d\vec{L} = \int_0^L K_x dy$$

$$H_y L + 0 + H_y L + 0 = K_x L$$

$$H_y = \frac{K_x}{2}$$



Nota: **A forma geral para obtenção do campo H devido a uma película plana ∞ com corrente**

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{K}\times\vec{a}_n \quad (\vec{\mathrm{H}}\text{ independe da distância})$$

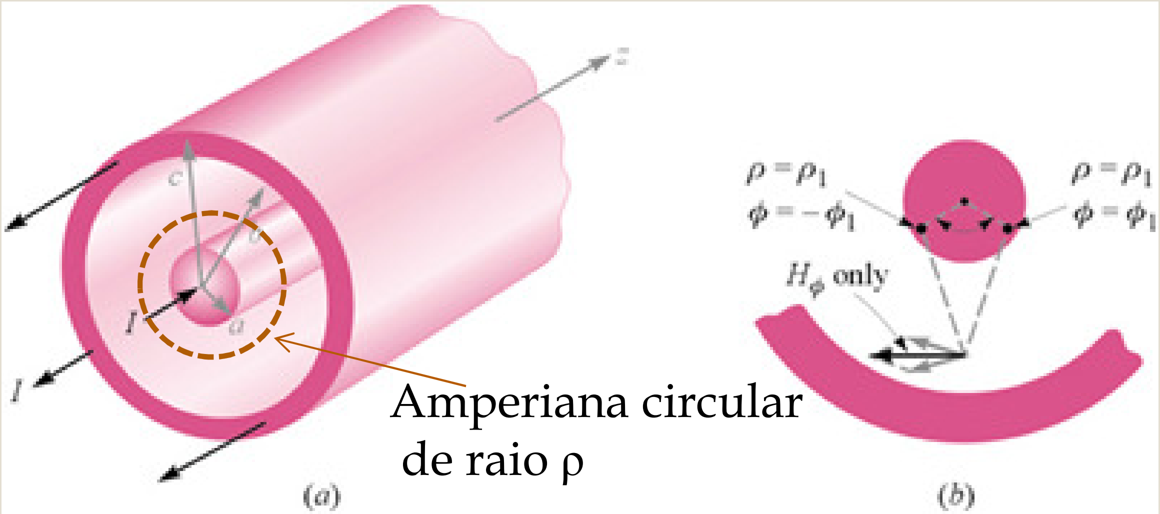
$\vec{a}_n$ *é oversor normal ao plano orientado*

$$\text{Acima do plano da figura } \vec{H} = \frac{1}{2}K_x\vec{a}_x\times\vec{a}_z = \frac{1}{2}K_x(-\vec{a}_y) = -\frac{1}{2}K_x\vec{a}_y = \vec{H}_y$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Cálculo de H, aplicando a lei circuital de Ampère (e amperiana), para alguns casos especiais:

c) Linha de transmissão coaxial com corrente total **+ I** uniformemente distribuída no condutor central e **– I** no condutor externor



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{enlaçada}$$

$$onde\ \vec{H} = H\vec{a}_\phi \ e\ d\vec{L} = \rho d\phi \vec{a}_\phi$$

Para uma amperiana circurlar de raio ρ

$$\rho < a \Rightarrow H_\phi = I\frac{\rho}{2\pi a^2} \text{(no condutor central)}$$

$$a < \rho < b \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \text{(no } dielétrico\text{)}$$

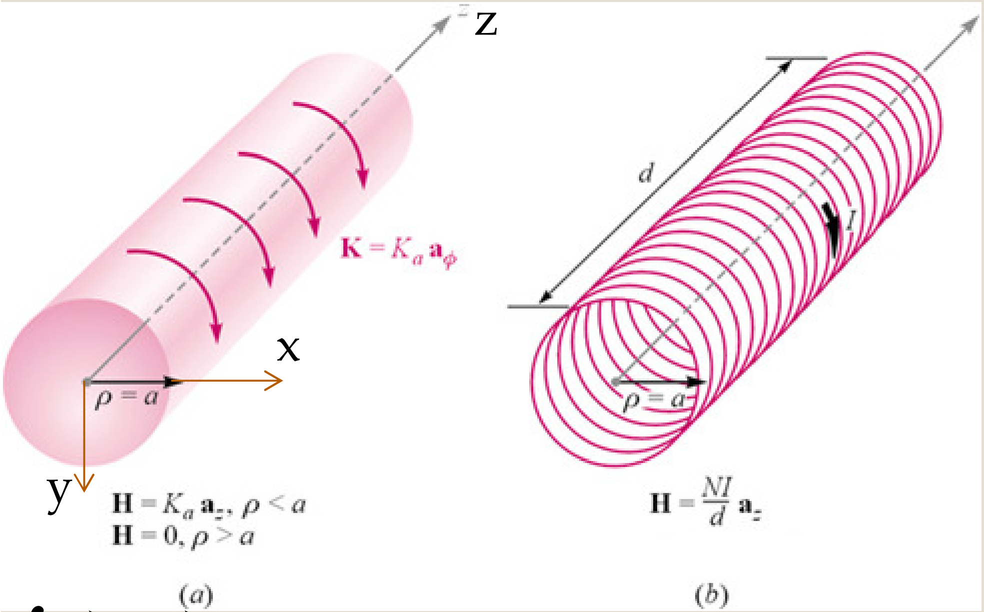
$$b < \rho < c \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \text{(no } condutor\ externo\text{)}$$

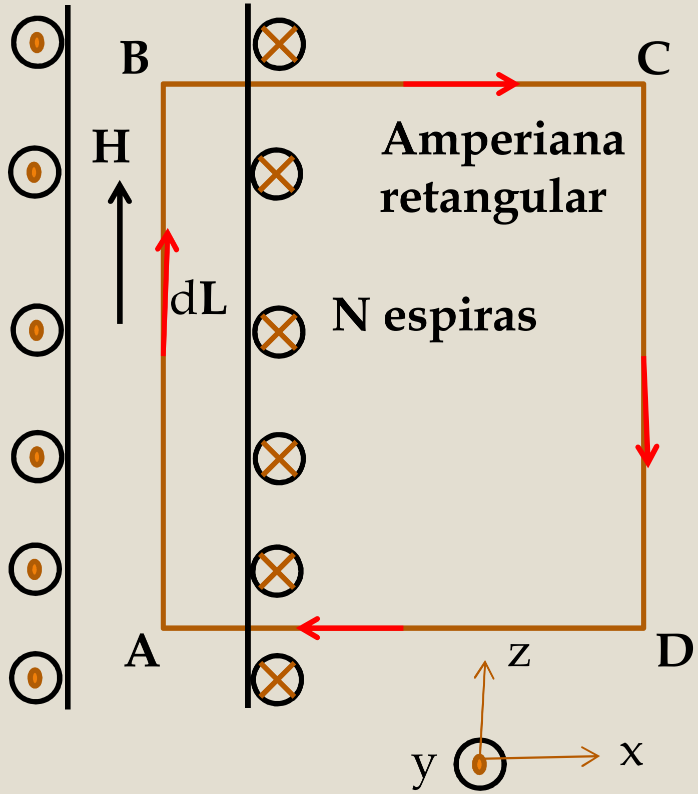
$$\rho > c \Rightarrow H_\phi = 0 \text{ (blindagem magnética)}$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Cálculo de H, aplicando a lei circuital de Ampère (e amperiana), para alguns casos especiais:

d) Solenóide de comprimento ∞ com uma distribuição superficial de corrente **K**=K_a $\mathbf{a_\Phi}$





Vista em corte de um solenóide de N espiras

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{L} = I_{enlaçada}$$

$$\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \vec{H}\cdot d\vec{L} = \int_0^L K_a dL$$

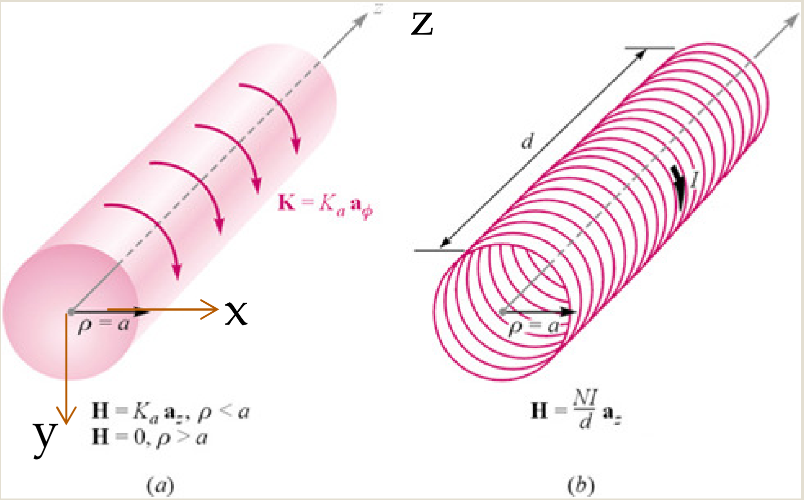
$$HL + 0 + 0 + 0 = K_a L$$

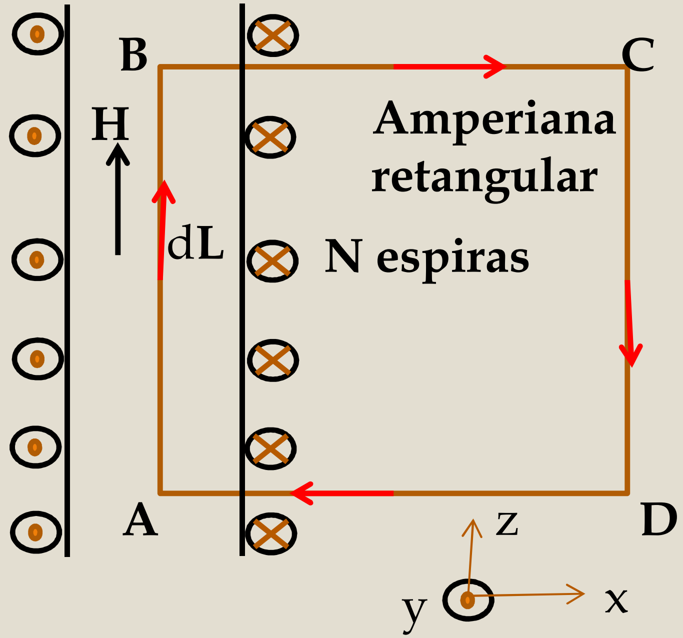
$$Por\tan to, H = K_a \Rightarrow \vec{H} = K_a \vec{a}_z$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Cálculo de H, aplicando a lei circuital de Ampère (e amperiana), para alguns casos especiais:

d) Solenóide de comprimento ∞ com uma distribuição superficial de corrente **K**=K_a $\mathbf{a_\Phi}$





Se o solenóide for de comprimento finito **d** com **N** espiras nas quais flui uma corrente I, temos:

$$K_a = \frac{NI}{d} \Rightarrow \vec{H} = \frac{NI}{d}\vec{a}_z$$

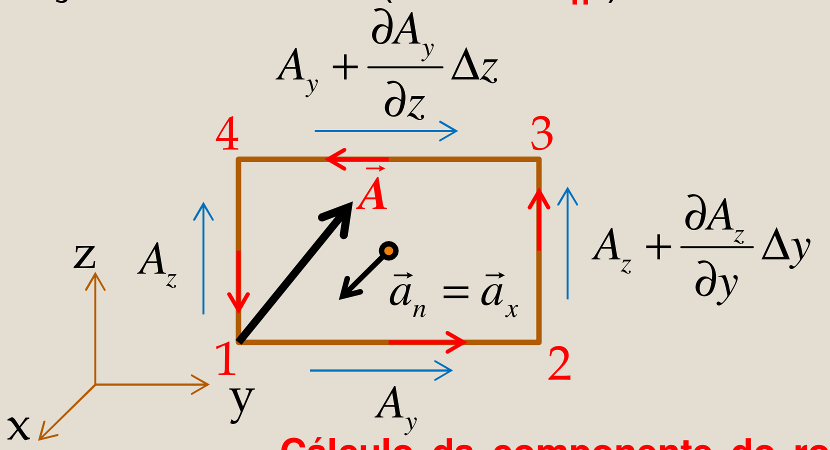
CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Rotacional

A componente do rotacional de **A** na direção da normal (versor $\mathbf{a_n}$) de uma área ΔS é dado por:

$$\left(rot.\vec{A}\right)\cdot\vec{a}_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \vec{A}\cdot d\vec{L}}{\Delta S}$$

Onde d**L** representa o vetor diferencial de comprimento integrado ao longo do perímetro de área ΔS.



Cálculo da componente do rotacional de A na direção do versor $\mathbf{a_n} = \mathbf{a_x}$

$$\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

Para determinar uma expressão matemática para o sistema em coordenadas cartesianas, seja o vetor **A** aplicado no vértice 1 de área ΔS= Δy Δz.

Pela definição

$$\left(rot.\vec{A}\right)\cdot\vec{a}_x = \lim_{\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\int_{12341}\vec{A}\cdot d\vec{L}}{\Delta y\Delta z}, \textit{desenvolvendo separadamente} \int_{12341}\vec{A}\cdot d\vec{L}$$

$$\int_{12341}\vec{A}\cdot d\vec{L} = \left\{\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^2\right\}\vec{A}\cdot d\vec{L}$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Rotacional

$$\int_{12341} \vec{A}\cdot d\vec{L} = \left\{ \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^2 \right\} \vec{A}\cdot d\vec{L}$$

$$\int_{12341} \vec{A}\cdot d\vec{L} \cong A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y \right)\Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\Delta z \right)\Delta y - A_z \Delta z$$

$$\int_{12341} \vec{A}\cdot d\vec{L} \cong \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)\Delta y \Delta z$$

Substituindo na exp*ressão acima*, no limite obtemos a componente de A na direção do eixo x.

$$\left(rot.\vec{A} \right)\cdot \vec{a}_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$$

Aplicando o mesmo raciocínio obtemos as componentes do rotacional de A , nas direções y e z.

$$\left(rot.\vec{A} \right) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)\vec{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)\vec{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\vec{a}_z$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Rotacional

Para o vetor campo magnético .

$$\vec{H} = H_x\vec{a}_x + H_y\vec{a}_y + H_z\vec{a}_z, \textit{ usando notação vetorial como vetor nabla, temos:}$$

$$rot.\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$$

Em coordenadas cartesianas, o rotacional de um vetor pode ser obtido da seguinte forma:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Rotacional

Aplicando novamente a definição do cálculo da componente do rotacional na direção do eixo x, porém agora para o vetor campo magnético H, e considerando a lei circuital de Ampère, obtemos:

$$\left(rot.\vec{\mathrm{H}}\right)\cdot\vec{a}_x = \lim_{\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\int_{12341}\vec{H}\cdot d\vec{L}}{\Delta y\Delta z} = \lim_{\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\Delta I_x}{\Delta y\Delta z} = J_x$$

Onde ΔI_x = corrente envolvida pelo percurso fechado 12341, ou **corrente que atravessa a área ΔS= Δy Δz**.
De forma análoga,

$$\left(rot.\vec{\mathrm{H}}\right)\cdot\vec{a}_y = J_y$$

$$\left(rot.\vec{\mathrm{H}}\right)\cdot\vec{a}_z = J_z$$

Daí concluímos que o rotacional do vetor campo magnético resulta (na magnetostática), no vetor densidade de corrente, ou seja:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \qquad \text{(Forma pontual da lei de Ampére)}$$

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Propriedades do Rotacional

1) A divergência do rotacional de qualquer função ou campo vetorial é sempre nula:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$$

Por exemplo, seja:

$$\vec{A}=\vec{H}.$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}, \text{então}:$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ Não existe fonte de J, pois a corrente está em caminho fechado.

2) O rotacional do gradiente de qualquer função ou campo escalar é sempre nulo:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)=0$$

Por exemplo, f = **-** V. Da expressão:

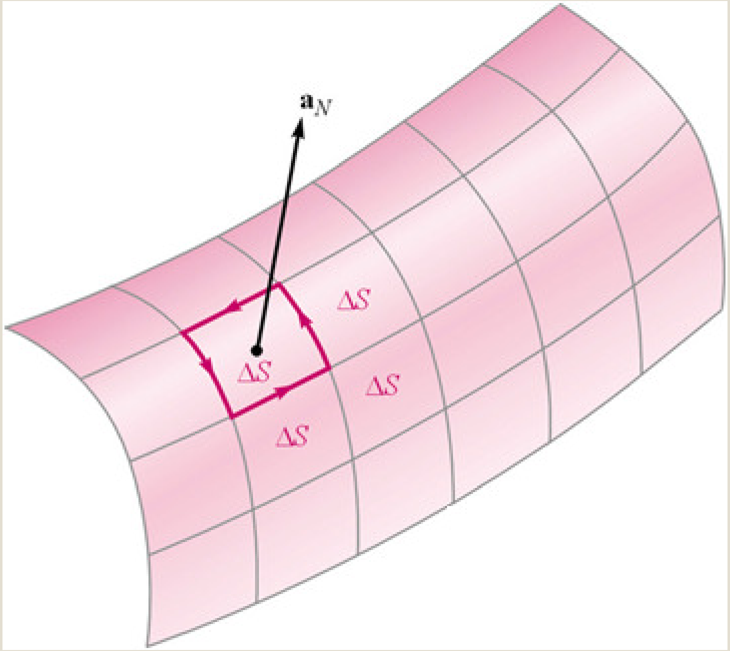
$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V, conclui-se\ que:$$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ **Não existe fonte de E, pois este não gira.**

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Teorema de Stokes

Pela definição de rotacional, temos:



$$\frac{\oint \vec{H}\cdot d\vec{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \approx \left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{a}_n$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{L}_{\Delta S} \approx \left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{a}_n\Delta S$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{L}_{\Delta S} \approx \left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{a}_n\Delta S$$

Somando-se a circulação de todos os ΔS da superfície S, chegamos à expressão matemática do teorema de Stokes:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{L} = \int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}$$

Nota: **O teorema de Stokes é válido para qualquer campo vetorial**, **e não somente para campo H**.

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Fluxo magnético (Φ) e densidade de Fluxo Magnético (B)

A densidade de Fluxo magnético B é definida para o vácuo de permeabilidade magnética μ_0 (μ_0 =4πx10^{-7} H/m) e o campo magnético H, como:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\mathrm{Unidade: Wb/\,m^2})$$

O fluxo magnético Φ que atravessa uma área S é obtido integrando B sobre a área S, isto é:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\mathrm{Unidade: Wb})$$

Exemplo: Calcular o fluxo magnético Φ entre o condutor interno (raio ρ=a) e o condutor externo (raio ρ=b) de uma linha coaxial de comprimento L

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi \ na\ região\ a < \rho < b$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi \cdot d\rho dz \vec{a}_\phi$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{IL}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \quad [Wb]$$

Eletrostática	Magnetostática
1) Densidade de Fluxo Elétrico $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$	2) Densidade de campo magnético $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
2) Fluxo Elétrico $\Psi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$	2) Fluxo magnético $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
3) Lei de Gauss da Eletrostática $\Psi_T = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{interna}$	3) Lei de Gauss da magnetostática $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
4) Divergência da densidade de Fluxo Elétrico $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V$	4) Divergência da Densidade de Fluxo Magnético $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
5) Rotacional do campo elétrico $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	5) Rotacional do Campo Magnético $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
6) Circulação do campo elétrico $\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$	6) Circulação do campo magnético $\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$