# ELETROMAGNETISMO

# Energia e Pontencial

## Energia para mover uma carga pontual através de um campo

**Motivação:**

Vamos supor que se queira dar um deslocamento d**L** a uma carga Q situada no campo **E**. A força sobre Q devido ao campo elétrico é:

- Força sobre Q devido ao campo elétrico.

$$\vec{F}_E = Q\vec{E} \qquad (1)$$

A componente desta força na direção d**L** que devemos vencer é .

$$F_{EL} = \vec{F}_E \cdot \vec{a}_L = Q\vec{E} \cdot \vec{a}_L$$

Onde $\mathbf{a}_L$ =um vetor unitário na direção d**L**.

A força que devemos aplicar é igual e oposta à força associada ao campo,

$$\vec{F}_{apl.} = -Q\vec{E} \cdot \vec{a}_L$$

# Energia e Pontencial

- O trabalho diferencial  feito por uma fonte externa para mover Q é:

$$dW = -Q\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}_L d\vec{\boldsymbol{L}}$$

$$dW = -Q\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}} \qquad (2)$$

- Lembrando que o nosso gasto de energia é o produto da força pela distância.

- Trabalho requerido para mover uma carga por uma distância finita.

$$W = -Q\int_{inicio}^{final} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}} \qquad (3)$$

# Energia e Pontencial

## Integral de Linha

A expressão integral para o trabalho realizado por uma carga Q que se move de uma posição para outra é exemplo de integral de linha que na notação de Análise Vetorial sempre toma a forma de uma integral do produto escalar de um campo vetorial por um vetor deslocamento diferencial d**L**.

$$W = -Q \int_{inicio}^{final} \vec{E}_L \cdot d\vec{\mathbf{L}}$$

Onde $E_L$ = componente de **E** ao longo de d**L**.

$$d\mathbf{L} = dx\boldsymbol{a}_x + dy\boldsymbol{a}_y + dz\boldsymbol{a}_z \qquad (cartesiana)$$

$$d\mathbf{L} = d\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho d\phi\boldsymbol{a}_\phi + dz\boldsymbol{a}_z \qquad (cilíndrica)$$

$$d\mathbf{L} = dr\boldsymbol{a}_r + rd\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\boldsymbol{a}_\phi \qquad \text{(esférica)}$$

# Energia e Pontencial

A integral de linha nos diz para:

- Escolher o caminho;
- dividi-lo em um grande número de pequenos segmentos, multiplicar a componente do campo ao longo de cada seguimento pelo tamanho do seguimento
- Somar os resultados para todos os segmentos.
- Obtém-se o resultado com exatidão quando o número de segmentos torna-se infinito.

Vamos tomar por exemplo, 06 segmentos, $\Delta\mathbf{L}_1$ , $\Delta\mathbf{L}_2$ , $\Delta\mathbf{L}_3$ ,..., $\Delta\mathbf{L}_6$ e as componentes de **E** ao longo de cada segmento são denotadas como $E_{L1}$ , $E_{L2}$ , $E_{L3}$ , ..., $E_{L6}$ .

O trabalho envolvido na movimentação de uma carga Q de **B a A** é, aproximadamente:

$$W = -Q\left(E_{L1}\Delta L_1 + E_{L2}\Delta L_2 + \cdots + E_{L6}\Delta L_6\right)$$

Ou,em notação vetorial.

$$W = -Q\left(\vec{\mathbf{E}}_1\Delta\vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2\Delta\vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{E}}_6\Delta\vec{\mathbf{L}}_6\right)$$

# Energia e Pontencial

Para um campo uniforme:

**$E_1$** = **$E_2$** = **$E_3$** =... **=$E_6$**

$$W = -Q\vec{\mathbf{E}}\left(\Delta\vec{\mathbf{L}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \Delta\vec{\mathbf{L}}_6\right)$$

O somatório representa os vetores somados pela regra do paralelogramo, cuja soma é exatamente o vetor dirigido do ponto inicial B para o ponto final A, $\mathbf{L}_{BA}$.

$$W = -Q\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{L}}_{BA} \qquad (4)$$

Tínhamos que:

$$W = -Q\int_B^A \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{L}}$$

Quando aplicada a um campo uniforme resulta:

$$W = -Q\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\int_B^A d\vec{\boldsymbol{L}} \quad = -Q\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{L}}_{BA}$$

Depende somente de Q, **E** e do $\mathbf{L}_{BA}$.

# Energia e Pontencial

Exemplo: Considere o campo não uniforme:

$$\mathbf{E_1} = y\mathbf{a_x} + x\mathbf{a_y} + 2\mathbf{a_z}$$

Determinar o trabalho ao deslocar-se 2 C (carga) de B (1,0,1) para A(0,8;0,6;1) ao longo do arco de círculo mais curto:

$x^2 + y^2 = 1 \quad z=1$

**Solução:**

Trabalhando em coordenadas cartesianas:

# Energia e Pontencial

$$W = -Q\int_B^A \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}}$$

$$= -2\int_B^A \left( y\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{x}} + x\vec{\boldsymbol{a}}_y + 2\vec{\boldsymbol{a}}_z \right) \cdot \left( dx\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{x}} + dy\vec{\boldsymbol{a}}_y + dz\vec{\boldsymbol{a}}_z \right)$$

$$= -2\int_1^{0,8} y dx - 2\int_0^{0,6} x dy - 4\int_1^1 dz$$

$$W = -2\int_1^{0,8} \sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_0^{0,6} \sqrt{1-y^2}\,dy - 0$$

$$= -\left[ x\sqrt{1-x^2} + sen^{-1}x \right]_1^{0,8} - \left[ y\sqrt{1-y^2} + sen^{-1}y \right]_0^{0,6}$$

$$= -(0,48 + 0,927 - 0 - 1,571) - (0,48 + 0,644 - 0 - 0)$$

$$= -0,96J$$

# Energia e Pontencial

Exemplo: Determine agora novamente o trabalho requerido para mover a carga de 2 C de B para A, agora, considerando o caminho reto de B até A.

Duas quaisquer das seguintes equações são suficientes para definir a linha:

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}\left(x - x_B\right)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}\left(y - y_B\right)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}\left(z - z_B\right)$$

$$Da\ \ primeira\ equação\ temos:$$

$$y = -3(\mathrm{x} - 1)$$

$$\mathrm{x} = (1 - \frac{y}{3})$$

$$\mathrm{z} = 1$$

# Energia e Pontencial

$$W = -2\int_{1}^{0,8} y\,dx - 2\int_{0}^{0,6} x\,dy - 4\int_{1}^{1} dz$$

$$W = 6\int_{1}^{0,8} (\mathrm{x}-1)\,dx - 2\int_{0}^{0,6} (1-\frac{y}{3})\,dy - 0$$

$$= -0,96J$$

É a mesma resposta que encontramos ao usar o caminho circular.

**O Trabalho realizado é independente do caminho escolhido em qualquer campo eletrostático.**

## Exercício

Cálcule o trabalho realizado ao deslocar uma carga de 4C de B(1,0,0) para A(0,2,0) ao longo do caminho $y=2-2x$ , $z=0$ no campo **E**:

**a)** $\mathbf{E} = 5\mathbf{a}_x$ V/m;
**b)** $\mathbf{E} = 5x\mathbf{a}_x$ V/m;
**c)** $\mathbf{E} = 5x\mathbf{a}_x + 5y\mathbf{a}_y$ V/m;

Resp: a) 20 J; b) 10J e c) -30 J.

# Energia e Pontencial

## Definição de Diferença de Potencial e Potencial

Vimos que o trabalho realizado por uma fonte externa para mover a carga Q de um ponto a outro em um campo elétrico.

$$W = -Q \int_{inicio}^{final} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}}$$

Anteriormente definimos a intensidade de campo elétrico como uma força sobre uma carga unitária de prova.

Agora vamos definir diferença de pontencial como um trabalho realizado para mover uma carga unitária positiva de um ponto a outro em um campo elétrico.

$$Diferença\ de\ pontencial = \frac{W}{Q} = V = -\int_{inicio}^{final} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{L}$$

# Energia e Pontencial

Escolhemos uma direção estabelecendo que $V_{AB}$ significa a diferença de potencial entre os pontos A e B , sendo o trabalho realizado para movimentar uma carga unitária de B até A, então:

- Em $V_{AB}$ B é o ponto inicial e A é o ponto final;
- B é frequentemente tomado no infinito;
- O ponto A é inerentemente mais significativo

A diferença de potencial é medida em Joules/ coulomb, comumente defindida por volt, representado pelo **símbolo V**.

Por isso a diferença de potencial entre dois pontos A e B.

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{L}}$$

$V_{AB}$ é positivo se realiza trabalho ao deslocar a carga positiva de B Até A.

# Energia e Pontencial

O campo elétrico é conservativo (na eletrostática).

Se o potencial em um ponto A é $V_A$ e em um ponto B é $V_B$ , então:

$V_{AB} = V_A - V_B$.

Onde $V_A$ e $V_B$. Devem ter a mesma referência zero, por exemplo $V_c = 0$.

# Energia e Pontencial

## Potencial de uma carga pontual

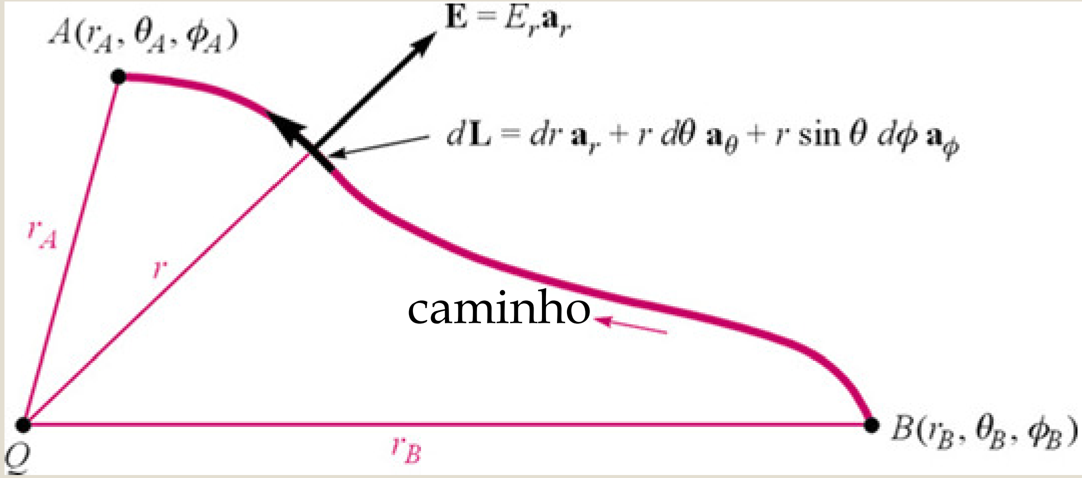
Supondo-se a carga na origem, tem-se, aplicando a fórmula geral:

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r \cdot d\vec{L} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = V_A - V_B$$

$$\vec{E} = E_r \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

$$d\vec{L} = dr\vec{a}_r$$




Somente depende da posição final e inicial.

# Energia e Pontencial

## Potencial de uma carga pontual

$$Se\ B \rightarrow \infty\ V_B \rightarrow 0 \Rightarrow V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

Sendo r a distãncia da carga Pontual Q ao ponto desejado.

# Energia e Pontencial

## Exercício

Uma carga de 1,6 nC está localizada na origem no vácuo. Determine o potencial em r=0,7m se:

a) Referência zero está no infinito;
b) Referência zero está em r=0,5m;

Resp: a) 20,5 V ; b) -8,22 V.