INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

SINAIS E SISTEMAS LINEARES

DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA

AMOSTRAGEM

1) Cálculo numérico da transformada de Fourier

- Um computador digital pode trabalhar somente com valores discretos;
- O cálculo da transformada de Fourier de x(t) necessita dos valores amostrados de x(t);
- Um computador pode calcular $X(\omega)$ apenas para alguns valores discretos de ω;
- Seja um sinal limitado no tempo, Figura (a) e seu espectro $X(\omega)$, Figura (b);
- x(t) é limitado no **tempo**, $X(\omega)$ não é limitado em **faixa**;
- o espectro de $\bar{X}(\omega)$ do sinal amostrado $\bar{x}(t)$ é constituído de $X(\omega)$ repetidos a cada frequência de amostragem, fs=1/T, como na Figura (d);
- O sinal amostrado da Figura (c) é repetido periodicamente a cada T_0 segundos, como ilustrado na Figura (e);
- A operação resulta na amostragem do espectro a uma taxa de T_0 amostras/Hz

Cálculo Numérico da transformada de Fourier

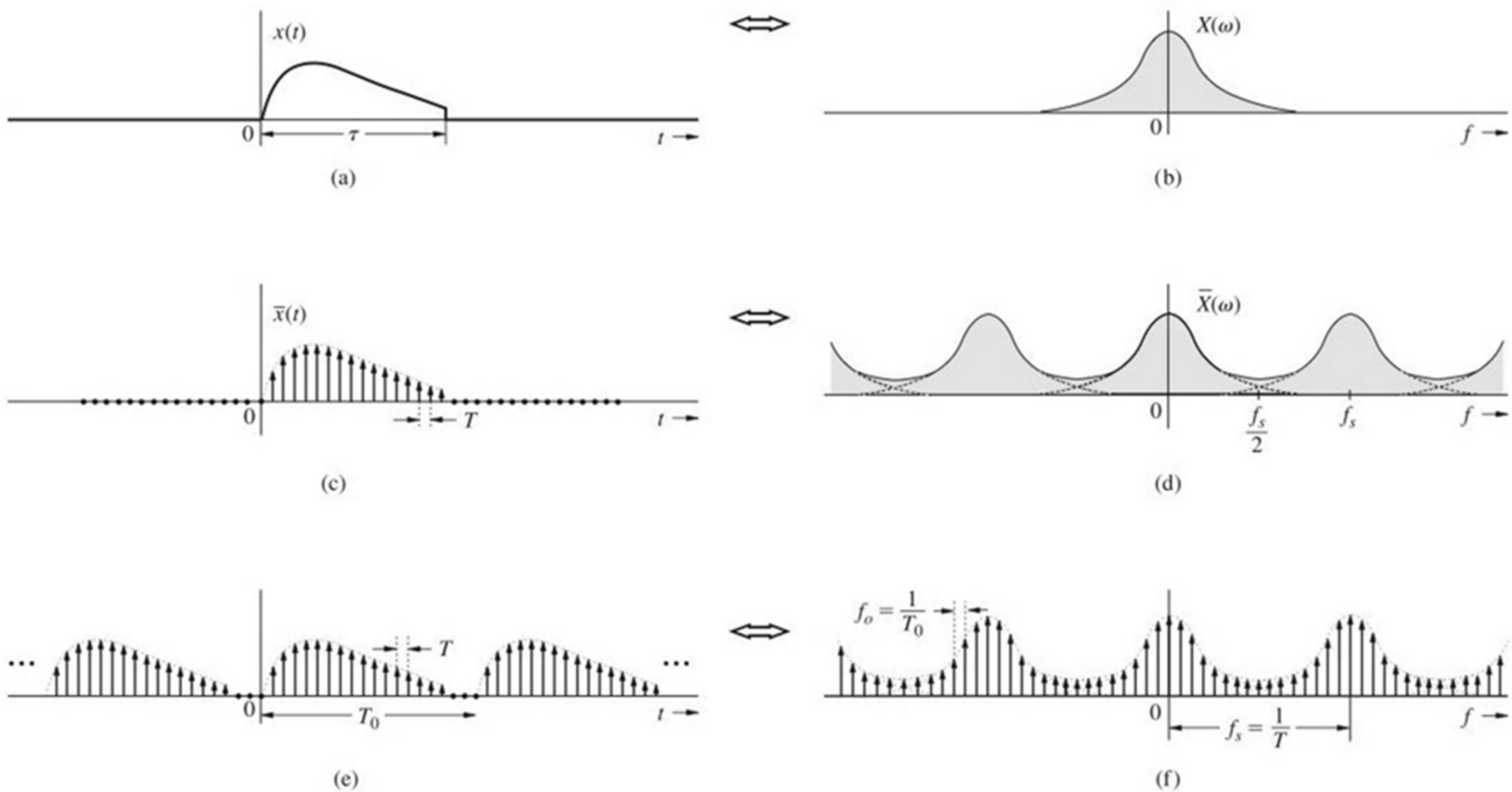


Figura 8.16 Relação entre as amostras de $x(t)$ e $X(\omega)$.

2) Número de Amostra s

- O número N_0 de amostras da Figura (e) em um período T_0 é idêntico ao número N'_0, o número de amostras da Figura (f) em um período fs;

- Sendo assim, podemos escrever:

$$N_0 = \frac{T_0}{T}, \quad N'_0 = \frac{f_s}{f_0}$$

3) Determinação da Transformada Discreta de Fourier

$\mapsto$ Sejam $x(nT)$ e $X(r\omega)$ a n-ésima e a r-ésima amostra de $x(t)$ e $X(\omega)$:

$$x_n = Tx(nT) = \frac{T_0}{N_0} x(nT)$$

$$X_r = X(r\omega_0)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$\mapsto$ Mostraremos que x_n e X_r estão relacionados pelas equações:

$$X_r = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} \qquad \text{e} \qquad x_n = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{jr\frac{2\pi}{N_0}n}$$

4) Revisando

Considere o sinal exponencial complexo de tempo discreto:

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n}\underbrace{\left(e^{j2\pi}\right)^n}_{=1} = e^{j\omega_0 n}$$

- O sinal exponencial na frequência $\omega_0+2\pi$ é o mesmo na frequência ω_0.
- O sinal na frequência ω_0 é idêntico aos sinais de frequência $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$ e assim por diante.
- Quando aumentamos ω_0 a partir de zero, obtemos sinais que oscilam cada vez mais rápido até alcançar $\omega_0 = \pi$.
- Aumentando ω_0, diminuímos a taxa de oscilação até chegar em $\omega_0 = 2\pi$, o que gera a mesma sequência constante para que $\omega_0 = 0$.

- Outra propriedade que devemos considerar diz respeito a periodicidade do sinal exponencial complexo de tempo discreto.

- Para o sinal: $e^{j\omega_0 N}$ seja periódico com período N > 0,

devemos ter

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}\underbrace{e^{j\omega_0 N}}_{=1} = e^{j\omega_0 n}$$

Para satisfazer a condição: $e^{j\omega_0 N} = 1$

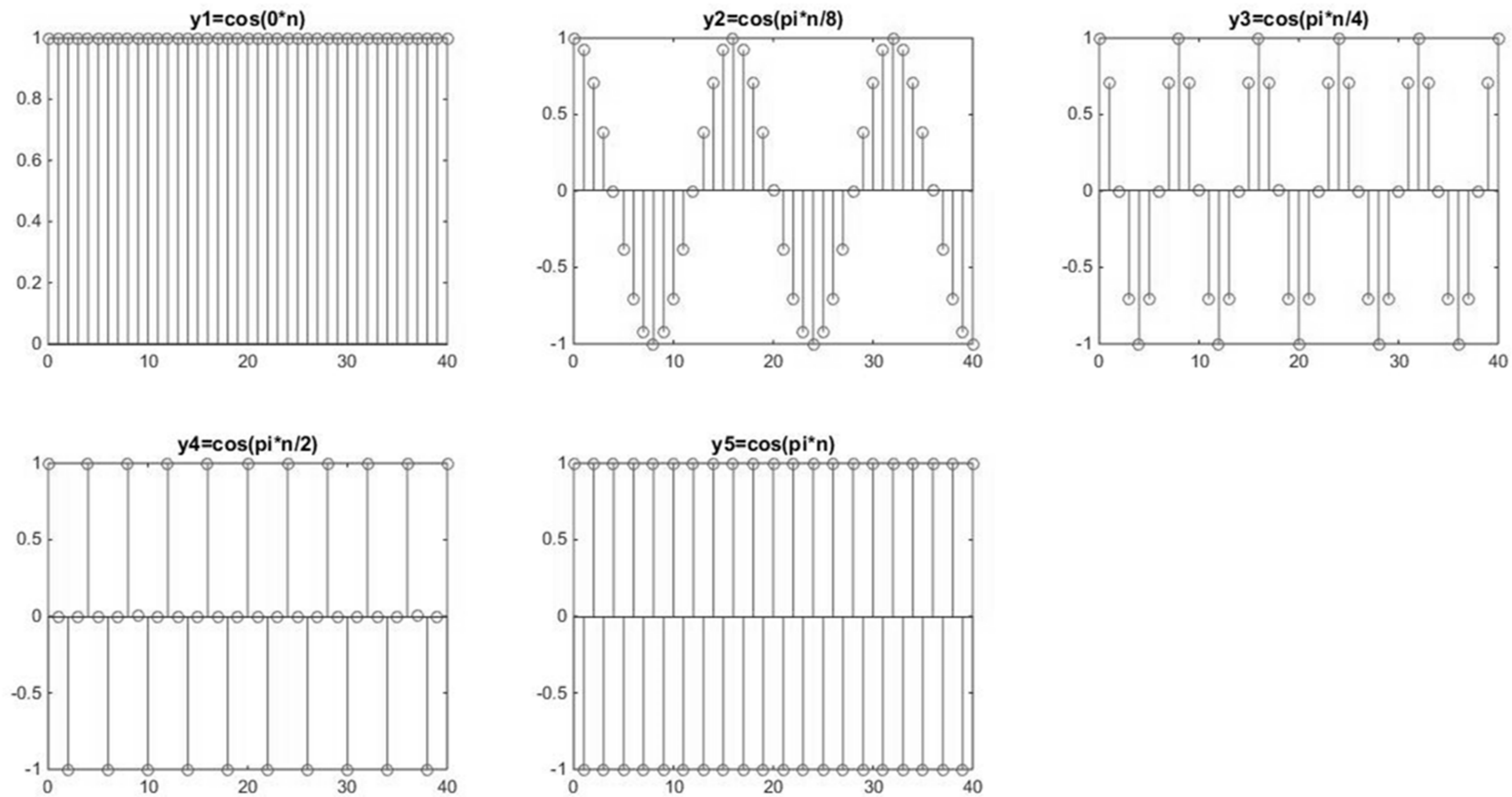
$\omega_0 N \longrightarrow$ deve ser múltiplo inteiro de 2π

Assim, temos: $\omega_0 N = 2\pi m \longrightarrow \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$

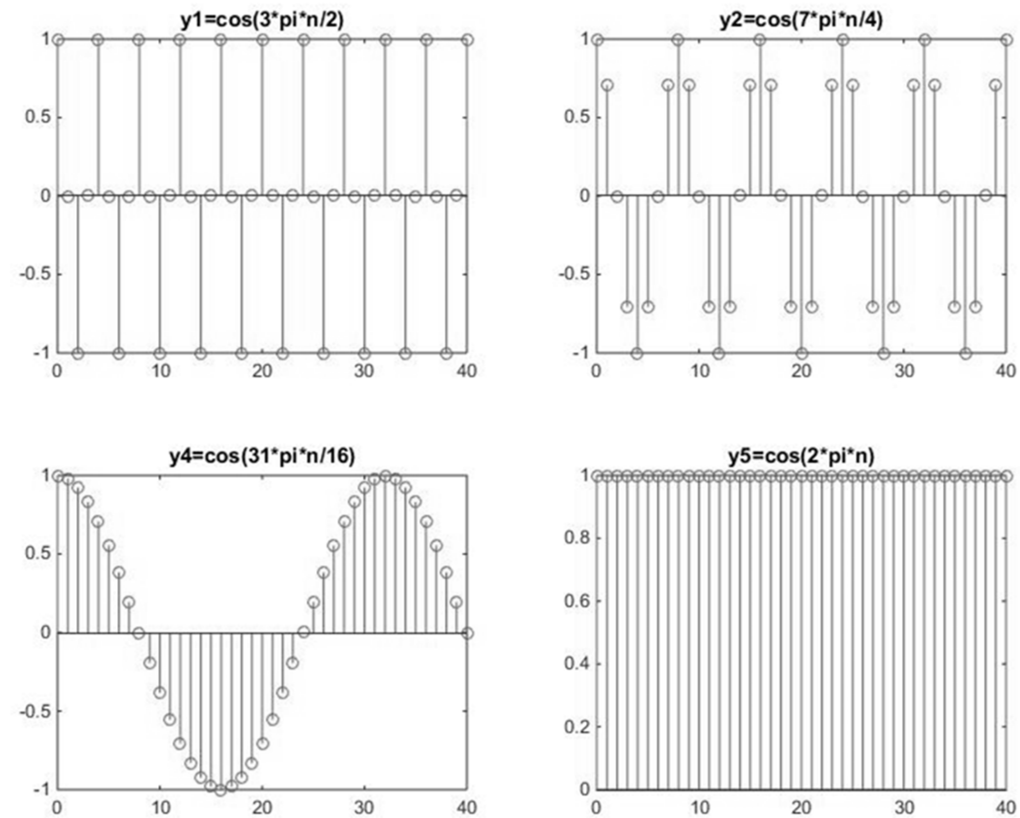
(1) O sinal $e^{j\omega_0 n}$ não tem taxa de oscilação crescente com o aumento de ω_0;

(2) O sinal $e^{j\omega_0 n}$ é periódico somente se $\omega_0/2\pi$ for um número racional, caso contrário ele é não periódico

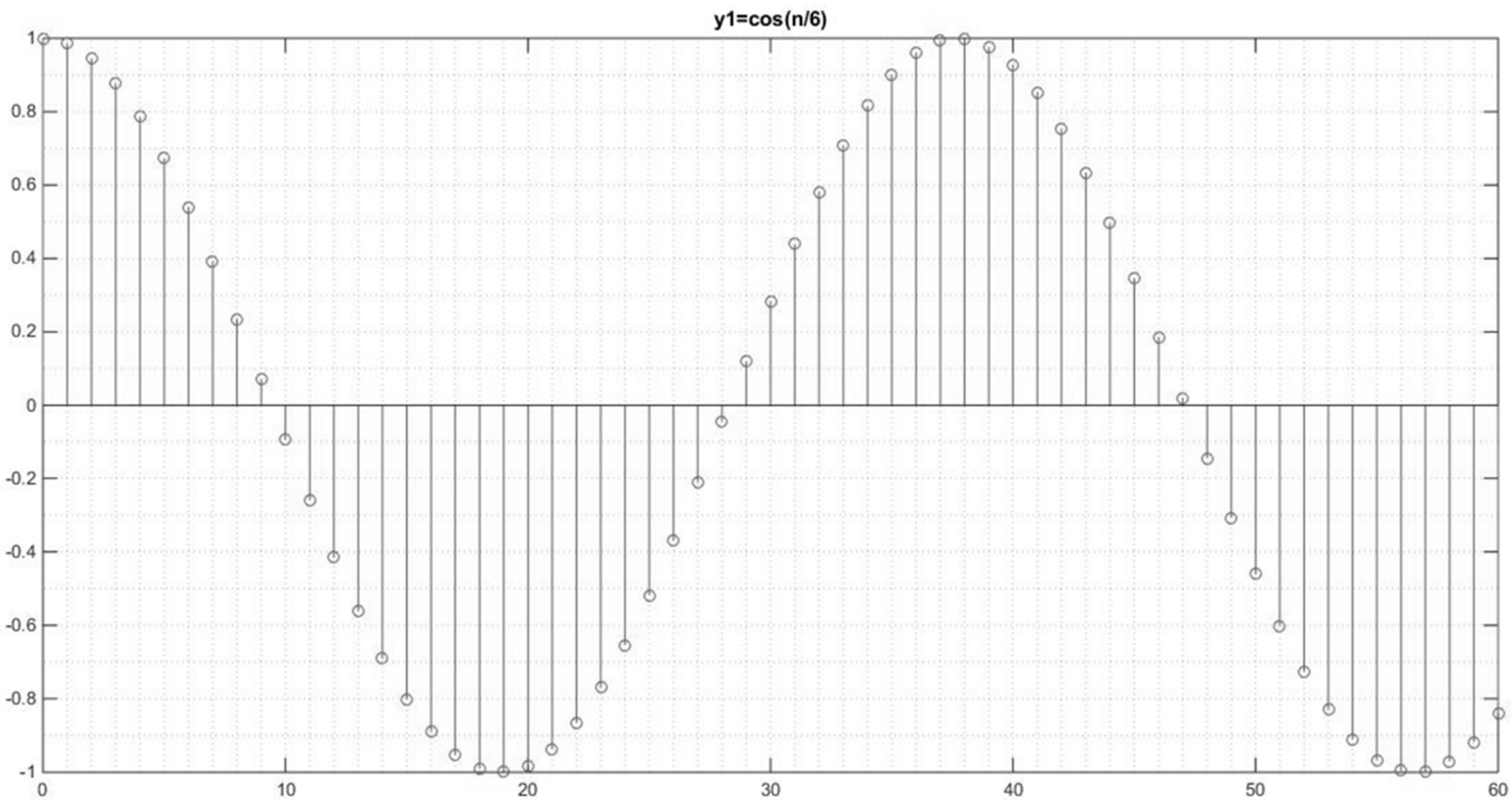
Aumenta a oscilação $0 < \omega_0 < \pi$



Diminui a oscilação $\pi < \omega_0 < 2\pi$



Sinal aperiódico



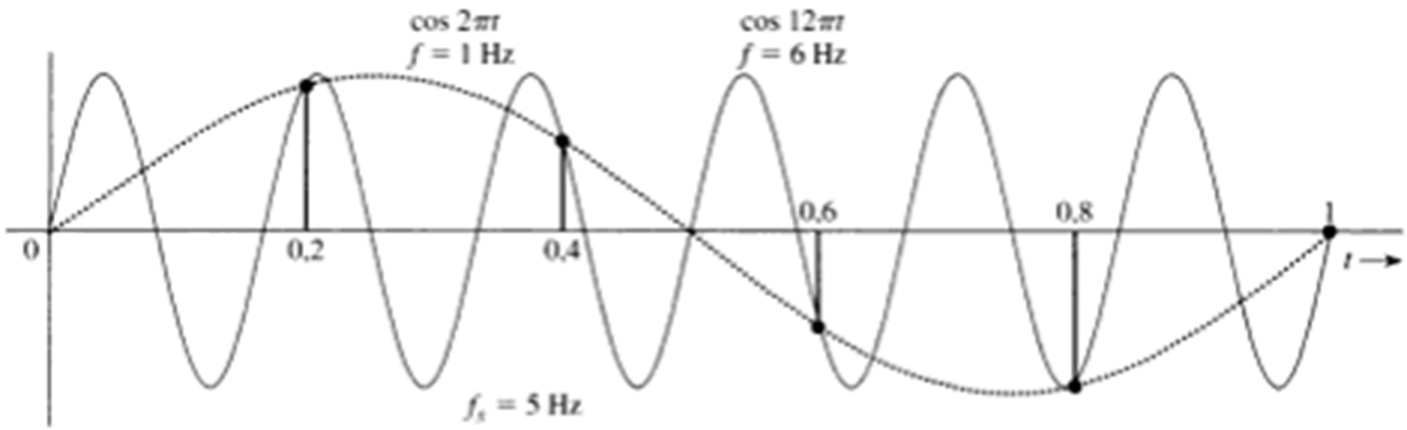
Comparação entre os sinais $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{j\omega_0 n}$

Tempo Contínuo: $e^{j\omega_0 t}$	Tempo Discreto: $e^{j\omega_0 n}$
Sinais diferentes para valores diferentes de ω_0	Sinais idênticos para valores de ω_0 espaçados por múltiplos de 2π
Periódico para qualquer valor de ω_0	Periódico somente se $\omega_0 = 2\pi m/N$, para valores inteiros de N e m
Frequência fundamental ω_0	Frequência fundamental ω_0 /m
Período fundamental $2\pi/\omega_0$	Período fundamental $2\pi m/\omega_0$

Aliasing e Taxa de amostragem

- Uma senóide cos(ωt) em tempo contínuo, amostrada a cada T segundos, ou seja, t = nT, n=0,1,2,..., resulta em uma senóide cos(ωnT);
- Em tempo discreto, podemos escrever cos(Ωn), com $\Omega = \omega T$;
- As senóides cos(Ωn) em tempo discreto possuem uma única forma de onda apenas para valores de frequência $\Omega < \pi$ ou $\omega T < \pi$;
- Portanto, amostras de senóide em tempo contínuo de duas ou mais frequências diferentes podem gerar o mesmo sinal em tempo discreto;
- Esse fenômeno de ambiguidade dos sinais e chamado de "*aliasing*";
- Em função da amostragem duas senóides analógicas diferentes assumem a mesma entidade em tempo discreto;
- O fenômeno "*aliasing*" causa ambiguidade no processamento digital de sinais, tornando impossível determinar a verdadeira frequência do sinal amostrado;

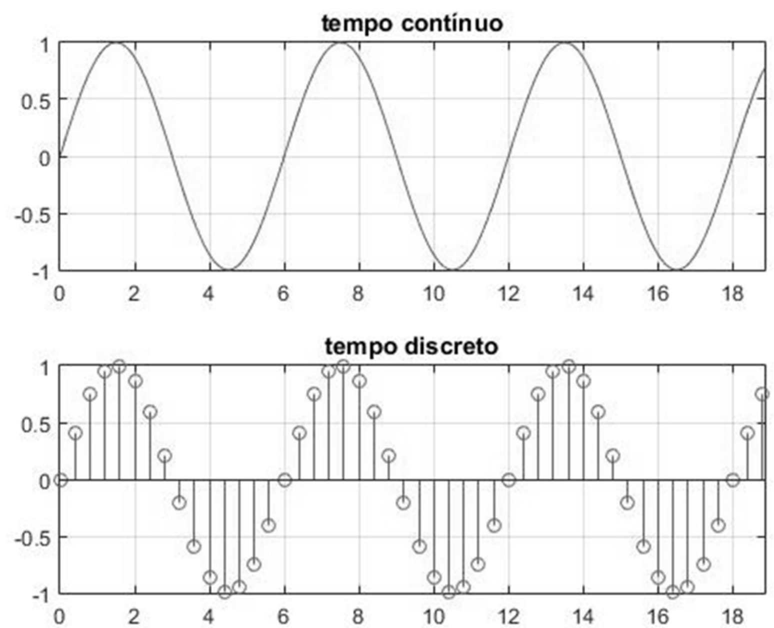
Demonstração do efeito de aliasing (eliesin)



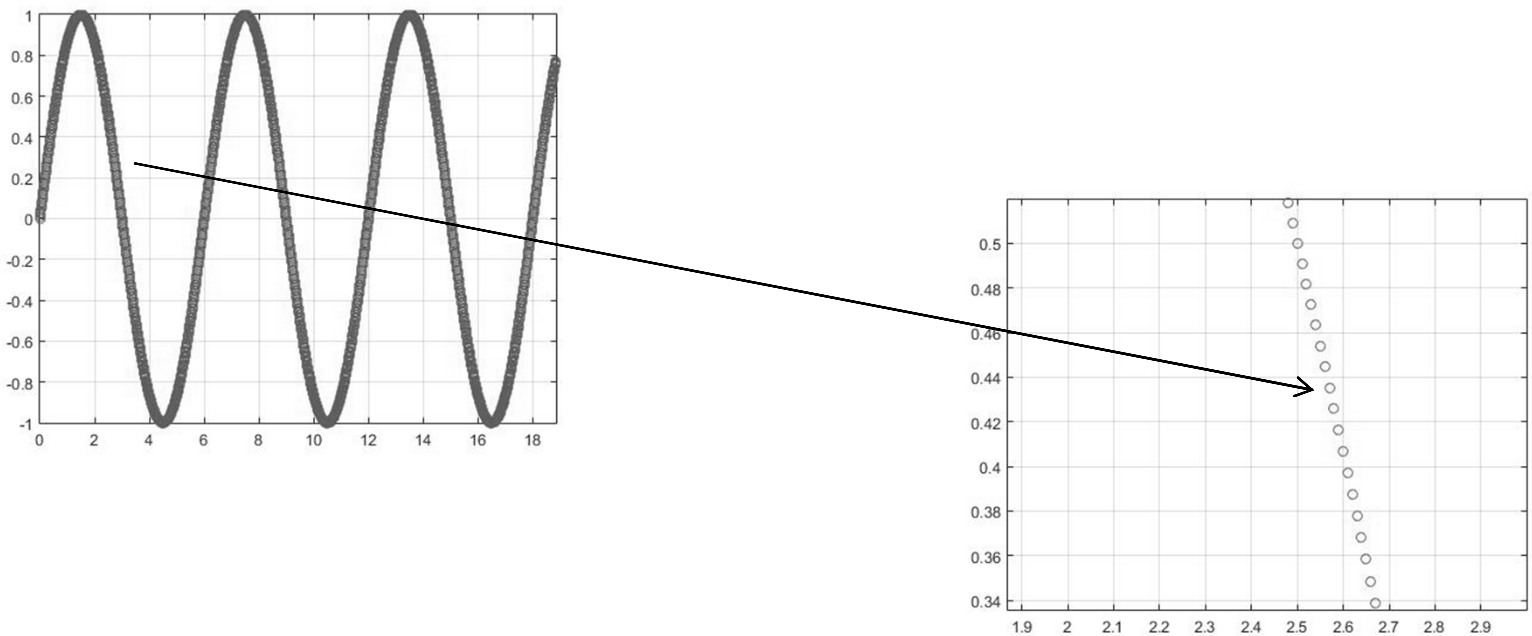
AMOSTRAGEM

Introdução:

- Um sinal em tempo contínuo pode ser completamente representado por seus valores ou "amostras" uniformemente espaçadas no tempo;
- Esse resultado é conhecido como "**Teorema da Amostragem**";
- O teorema da amostragem é uma ponte entre o contínuo e o discreto.



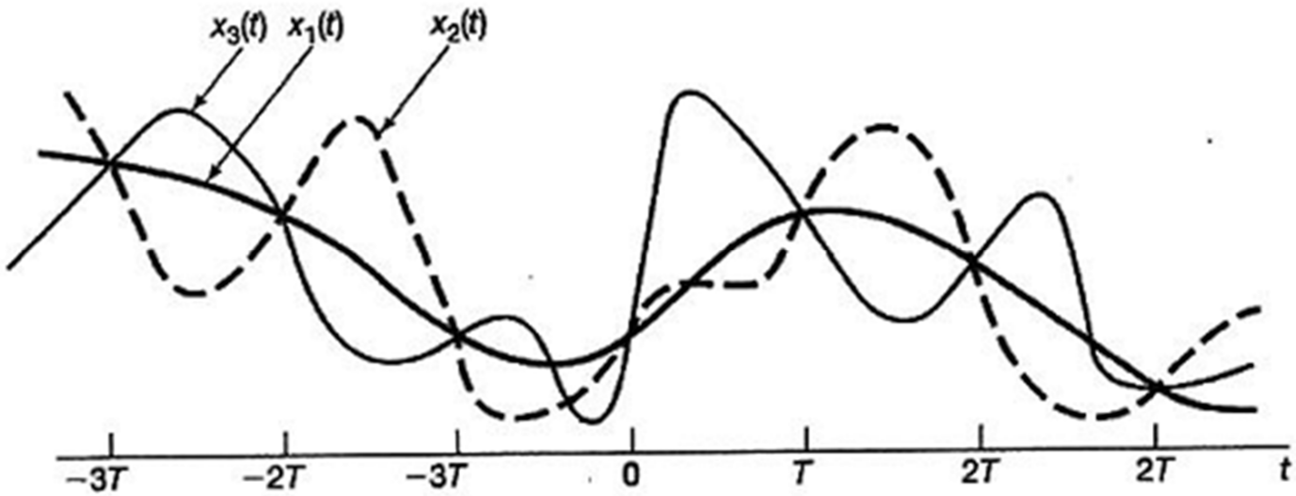
- Se as amostra estiverem suficientemente próximas, a imagem parece ser espacialmente contínua;
- Mas, sob uma lente de aumento, sua representação em termos de amostras se torna evidente.



- Um sinal em tempo contínuo pode ser completamente recuperado a partir de uma sequência de suas amostras;
- Em muitos contexto, o processamento de sinais em tempo discreto é mais flexível e normalmente preferível ao processamento de sinais de tempo contínuo;
- O fato acima se deve, em grande parte, ao desenvolvimento significativo da tecnologia digital;
- O conceito de amostragem sugere um método extremamente atraente e amplamente empregado para usar o ferramental de sistemas de tempo discreto para implementar sistemas de tempo contínuo e processar sinais de tempo contínuo;
- Exploramos o conceito de amostragem para converter um sinal de tempo contínuo em sinais de tempo discreto.

Representação de um sinal de tempo contínuo por suas amostras: o teorema da amostragem

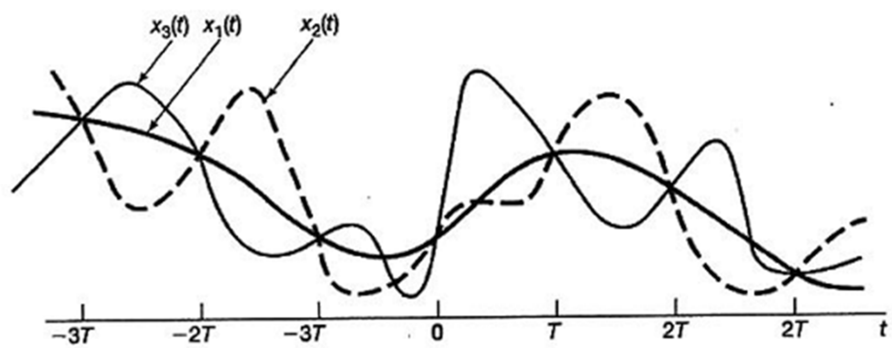
Considere os sinais apresentados na figura abaixo ao quais são três sinais de tempo contínuo com valores idênticos em múltiplos de "***T***"



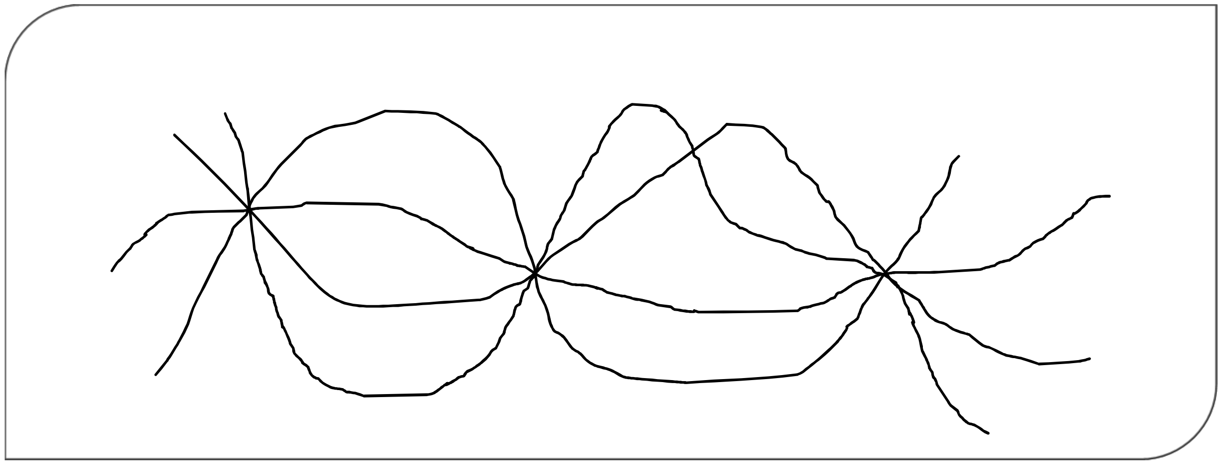
- Observa-se que os sinais x1(t), x2(t) e x3(t) são diferentes;

- Podemos observar que os três sinais tem valores idênticos em múltiplos inteiro de "T", ou seja,

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$



- Claramente, existe um número infinito de sinais que podem gerar determinado conjunto de amostras.

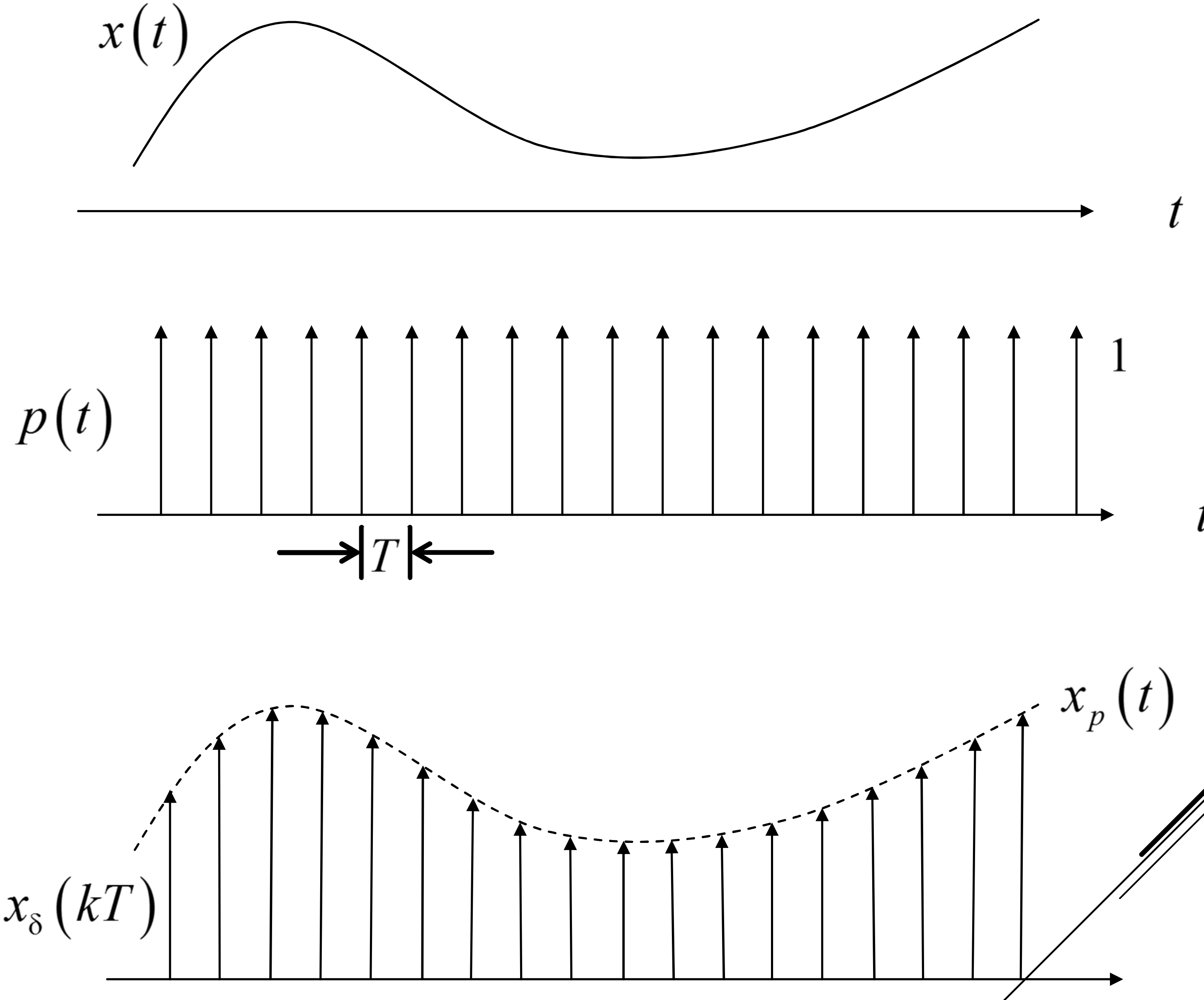


- **Teorema da Amostragem:**

" Porém, se as amostras for limitada em banda, ou seja, se a sua transformada de Fourier for nula fora de um intervalo finito de frequências (tipo filtro passa-baixas) e se as amostras forem tomadas suficiente mente próximas em relação à frequência mais alta presente no sinal, então as amostra especificam unicamente tal sinal e podemos reconstruí-lo perfeitamente."

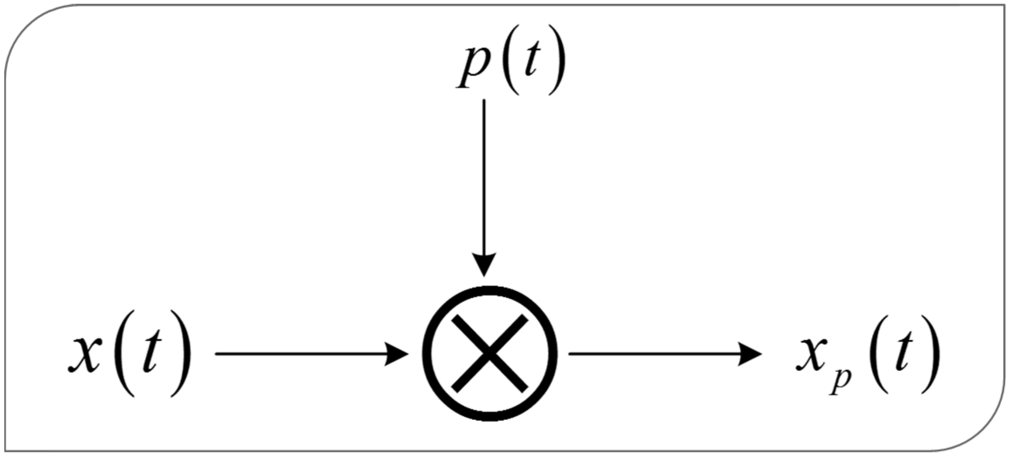
- *Um sinal é de banda limitada se existe uma frequência* Ω *tal que* $X(j\Omega)$ *é nula para* $|\Omega| > \Omega_0$. *A frequência* $F_0 = \Omega_0/2\pi$ é *chamada de largura de banda do sinal em Hz.*

Amostragem com trem de impulsos



$x(t)$
t
$p(t)$
1
t
T
$x_p(t)$
$x_\delta(kT)$
t

- Na amostragem com trem de impulsos, temos o seguinte esquema:



$p(t) \longrightarrow$ trem de impulsos periódicos ou função de amostragem.

$T \longrightarrow$ período de amostragem

$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T} \longrightarrow$ frequência de amostragem

- No domínio do tempo, temos:

$$x_p(t) = x(t)\,p(t) \qquad (1)$$

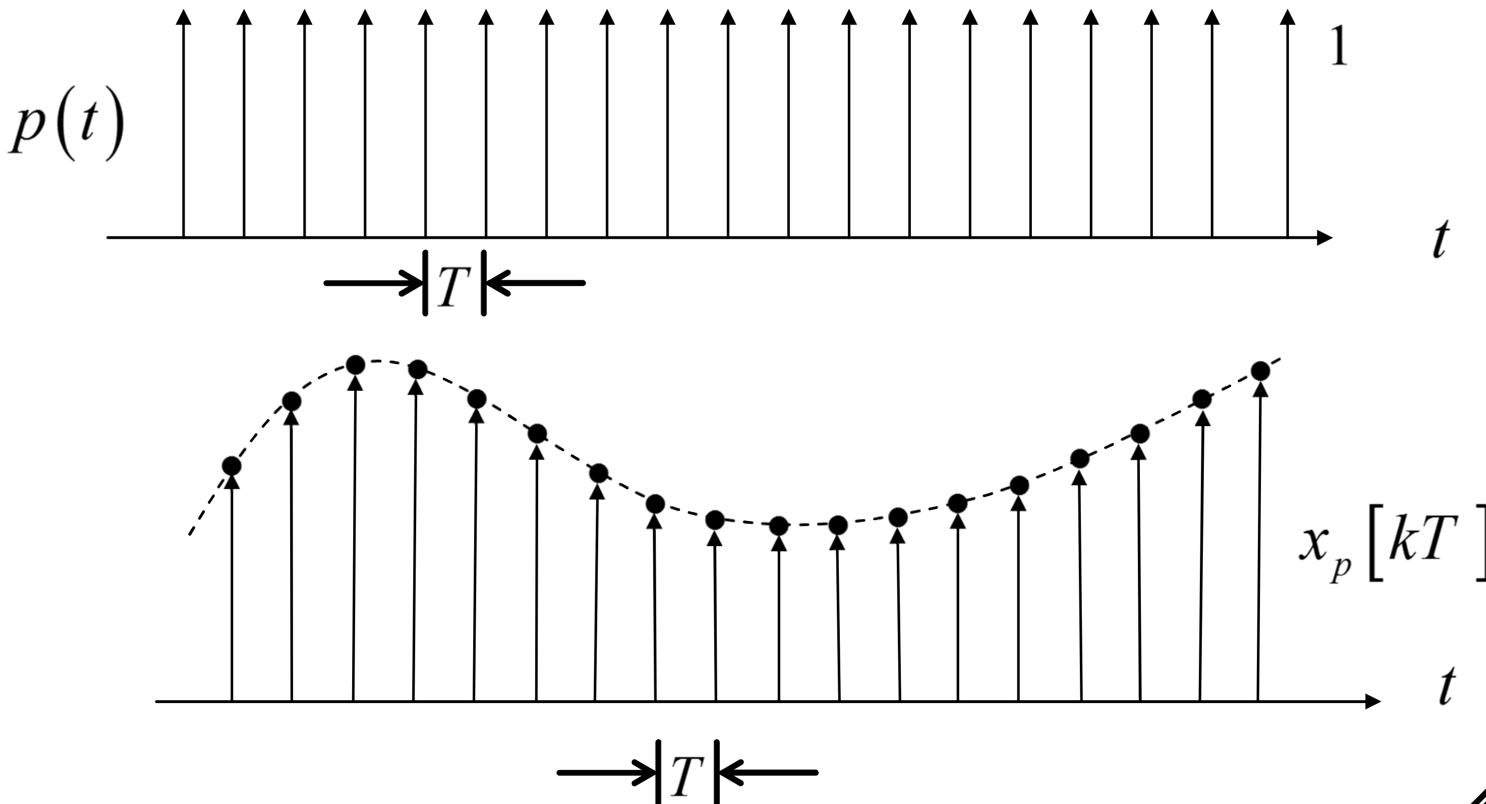
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad (2)$$

- Sabemos que:

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \qquad (3)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \qquad (4)$$

- Da figura abaixo, como já vimos, podemos dizer que $\mathbf{x_p(t)}$ é um trem de impulsos com amplitude iguais às amostras de $\mathbf{x(t)}$ em intervalos espaçados de $\mathbf{T_s}$.



$$x_p[n] = x(nT_s)$$

- Tomando a transformada de Fourier, temos:

$$x_p(t) = x(t)\,p(t) \longrightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)\,P\big(j(\omega-\theta)\big)\,d\theta$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \longrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

- A convolução de um sinal qualquer com o impulso, faz o deslocamento do sinal.

$$X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X\big(j(\omega - \omega_0)\big)$$

Assim, encontramos que:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - k\omega_s\right)\right)$$

Concluímos que:

$X_p(j\omega)$ é uma função periódica da frequência, consistindo de sobreposição de réplicas deslocadas de ω_s e multiplicadas por $1/T_s$.

- Na Figura 1, apresenta-se o espectro de um sinal triangular contínuo e na Figura 2, o espectro do trem de impulsos.

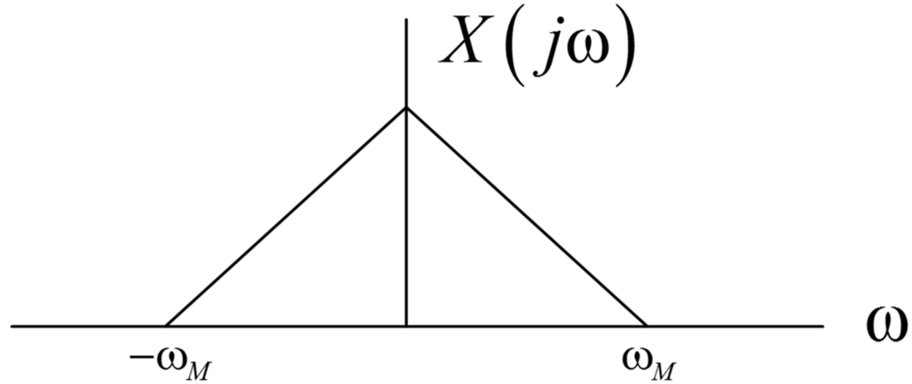


Figura 1: Espectro do sinal contínuo a ser amostrado

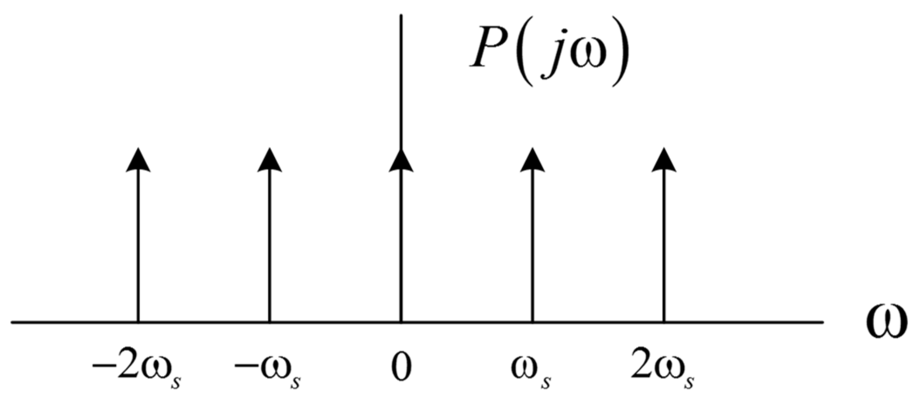


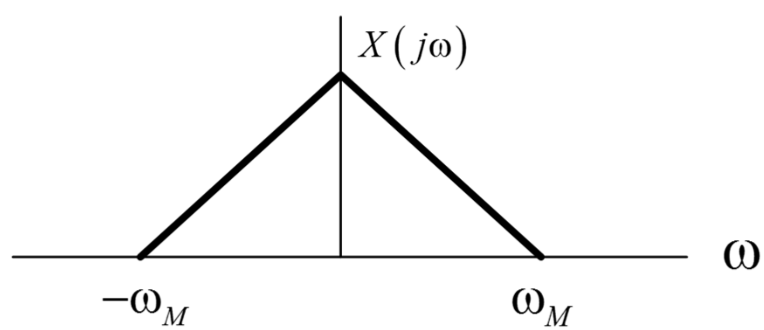
Figura 2: Espectro do sinal impulso

Deslocamento na frequência

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \longrightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

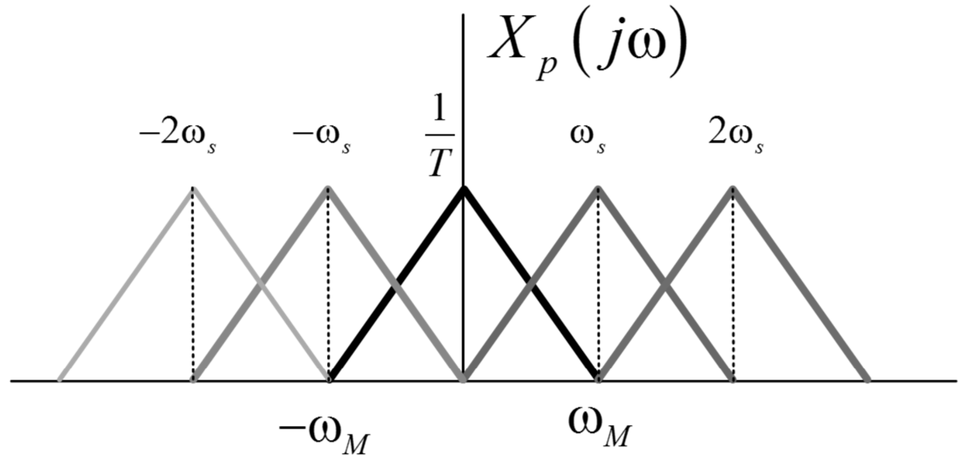
$$x_p(t)=x(t)\,p(t) \longrightarrow X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*P(j\omega)$$

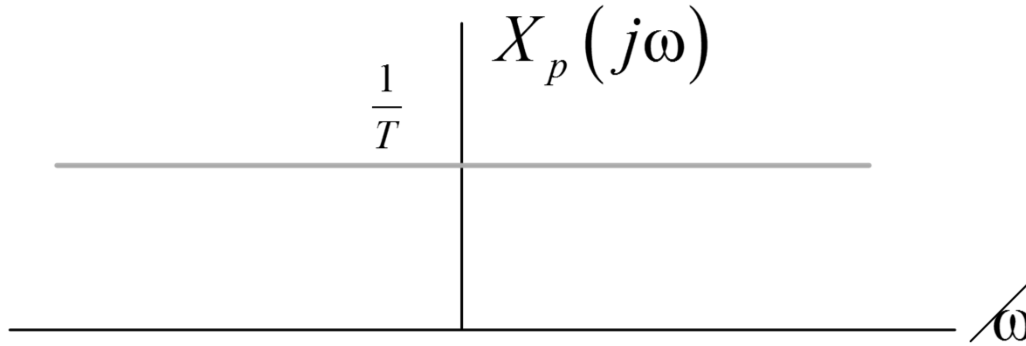
$$X_p(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\big(j(\omega-k\omega_s)\big)$$



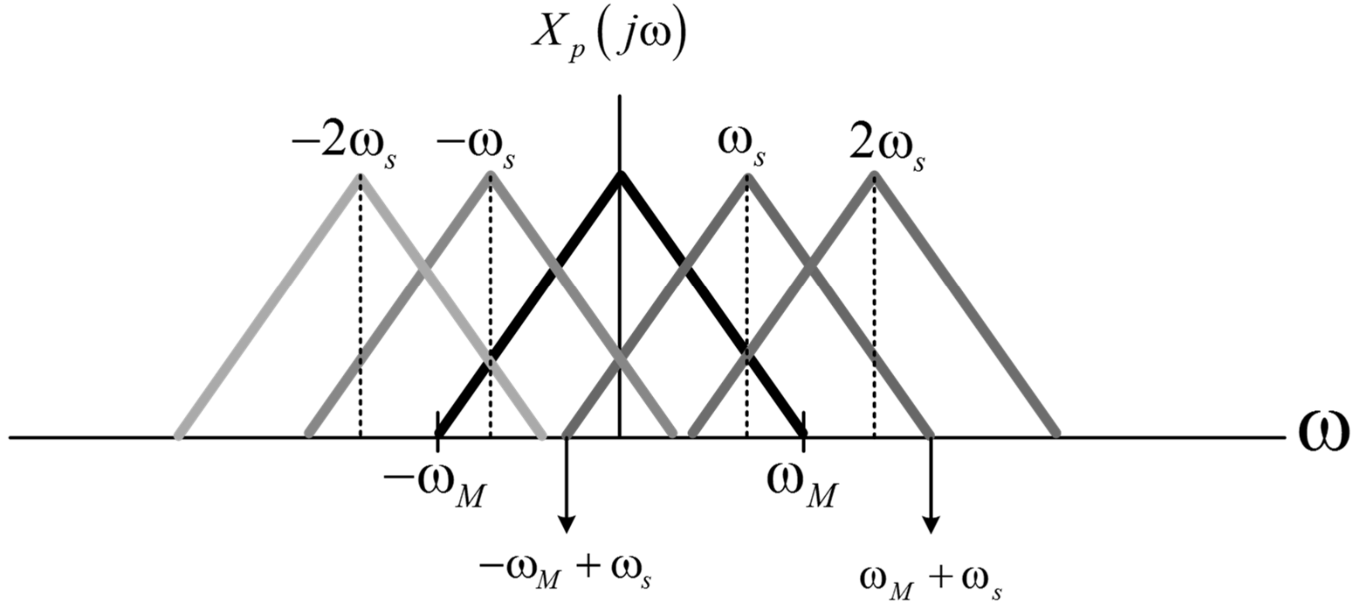
Para constuir $X_\delta(j\omega)$ temos as 4 hipóteses $\begin{cases} (i) & \omega_s = \omega_M \\ (ii) & \omega_s < \omega_M \\ (iii) & \omega_M < \omega_s < 2\omega_M \\ (iv) & \omega_s > 2\omega_M \end{cases}$

$(i) \quad \omega_s = \omega_M$

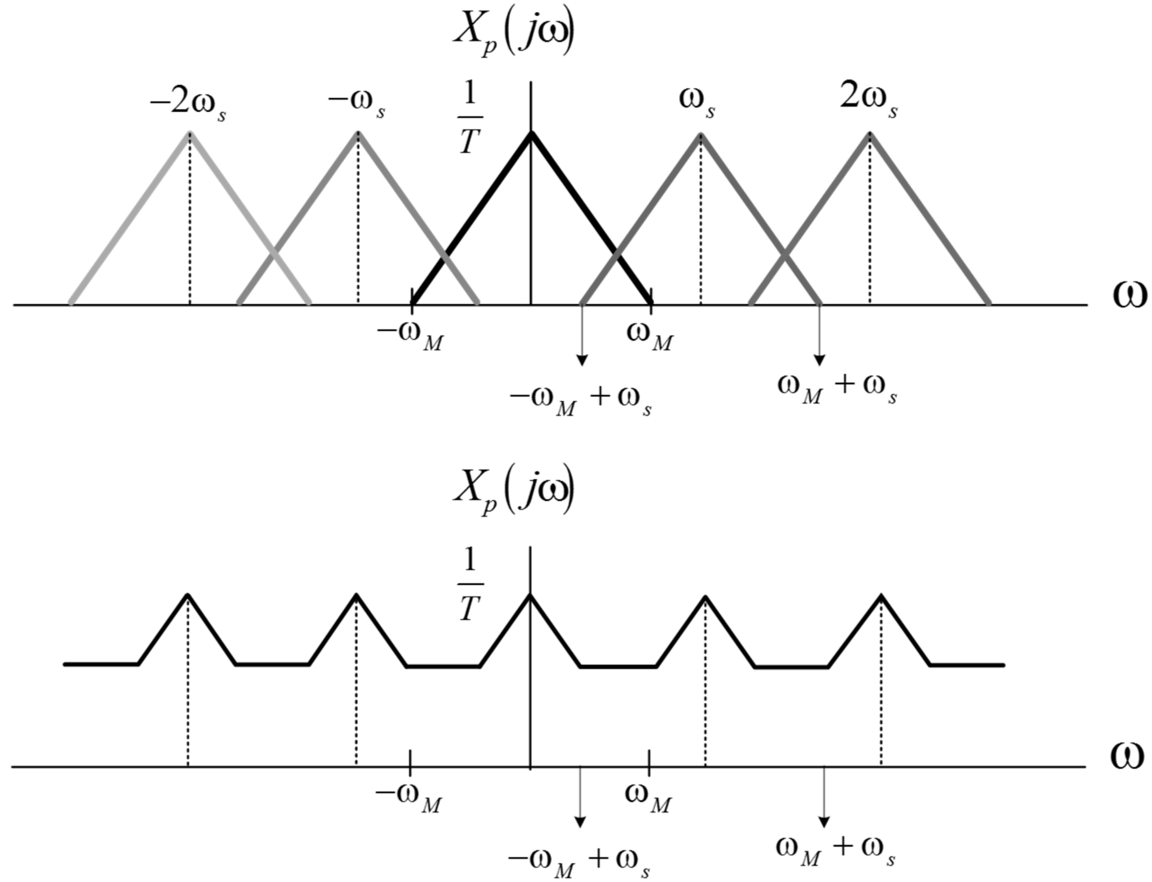




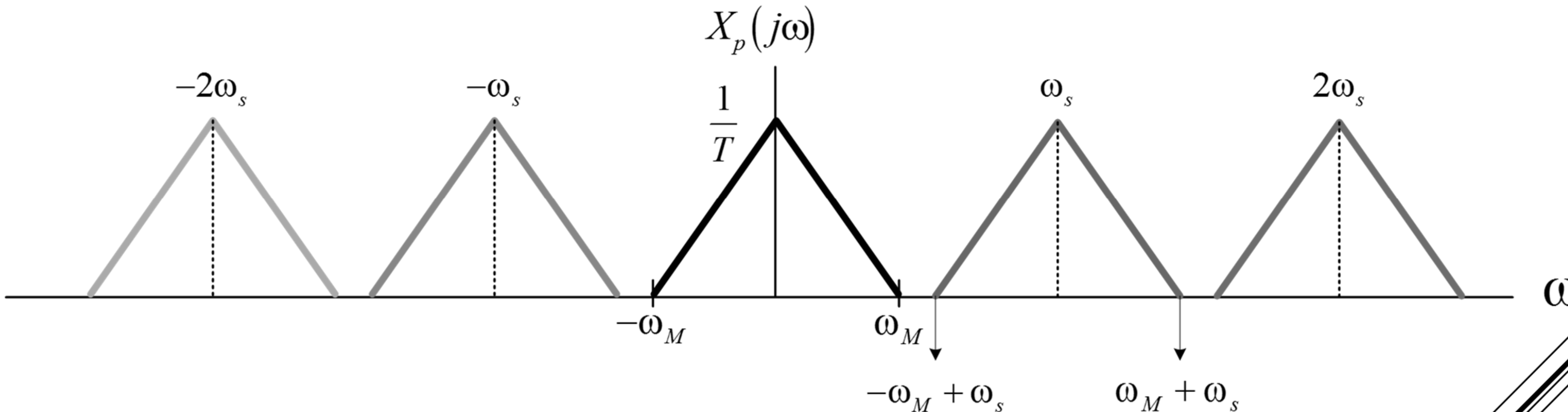
$(ii)\ \omega_s < \omega_M$



$(iii)\ \omega_M < \omega_s < 2\omega_M$



$(iv)\ \omega_s > 2\omega_M$



Teorema da amostragem

Seja x(t) um sinal de banda limitada com $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 0$. Então, $x_a(t)$ é determinado unicamente por suas amostras x(nT), com n = 0, ± 1, ± 2, ± 3,..., se

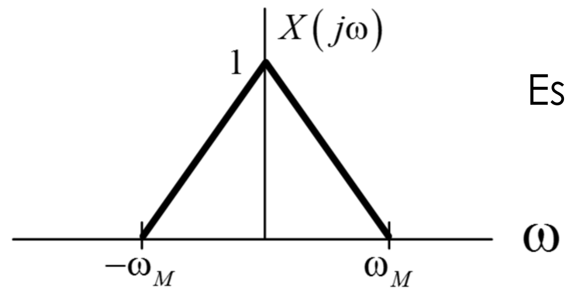
$$\omega_s > 2\omega_M \quad \text{em que} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

A frequência $2\omega_M$, deve ser menor que a frequência de amostragem, ω_s, comumente chamada de "*taxa de Nyquist*"

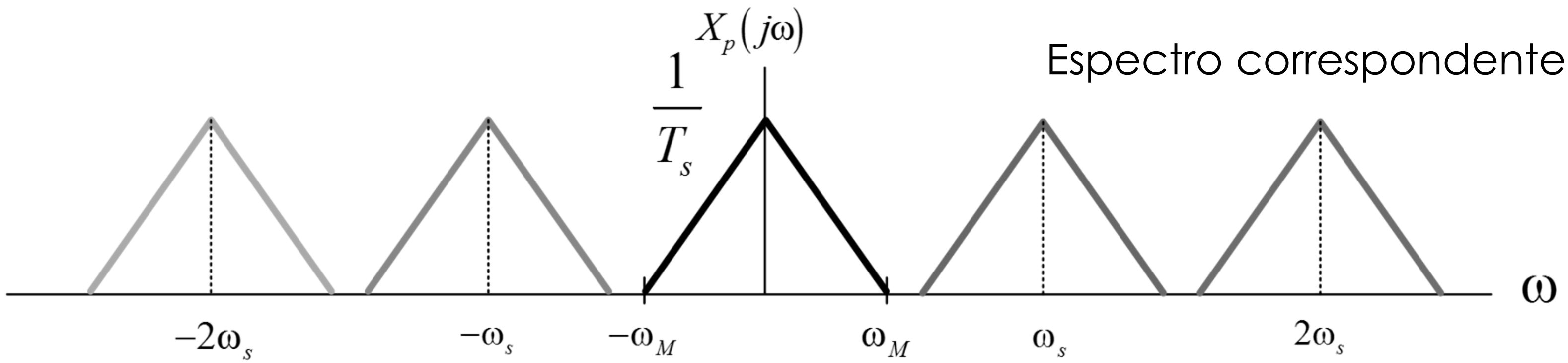
- É possível recuperar a transformada de Fourier $X_a(j\Omega)$ de $X(e^{j\omega})$ (ou, equivalentemente, o sinal $x_a(t)$ a partir de $x[n]$) se as infinitas réplicas de $X_a(j\Omega)$ não se sobrepuserem para formar $X(e^{j\omega})$.

Um sinal de banda limitada $x_a(t)$ com largura de banda F_0 pode ser reconstruído a partir de suas amostras $x[n] = x_a(nT_S)$ se a frequência de amostragem $F_S = \frac{1}{T_S}$ é maior do que duas vezes a largura de banda F_0 de $x_a(t)$. $(F_S > 2F_o)$

Caso contrário tem-se "aliasing" em $x[n]$. A taxa de amostragem $2F_0$ para um sinal de banda limitada analógico é chamada de taxa de Nyquist.

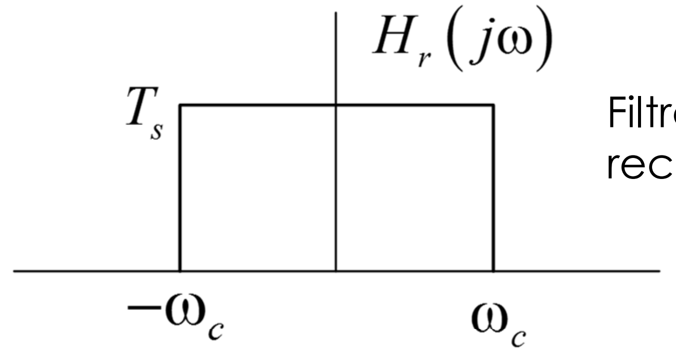


Espectro representativo para x(t)

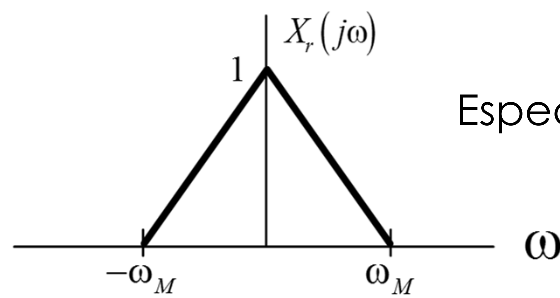


Espectro correspondente para $x_p(t)$

$$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$



Filtro passa-baixa ideal para recuperar $x_r(t)$ a partir de $x_p(t)$.



Espectro correspondente para $x_r(t)$

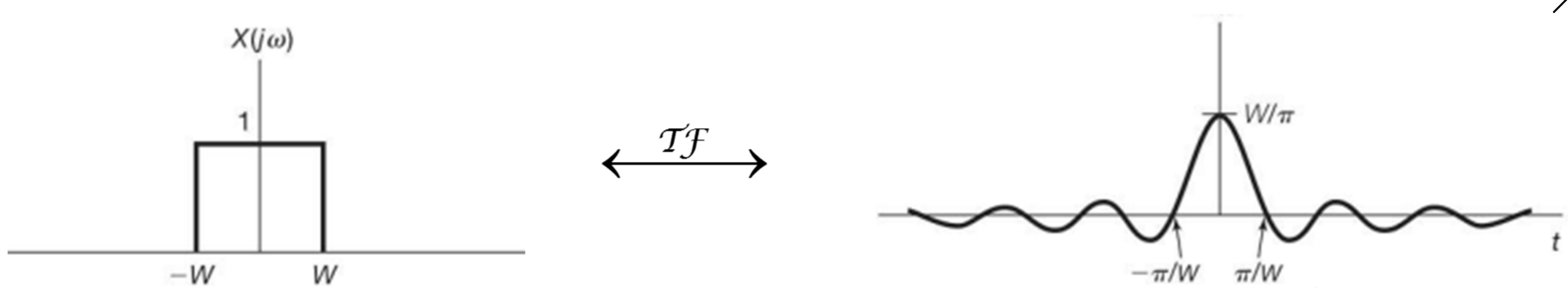
Revisando: Obtenha a transformada inversa de Fourier de $X(j\omega)=\begin{cases} A, & |\omega|<W \\ 0, & |\omega|>W \end{cases}$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega\ , \qquad X(j\omega)=A$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\bigg|_{-W}^{W}=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{jWt}-e^{jWt}}{jt}$$

$$x(t)=A\frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$$



$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)\xrightarrow{TF}X_p(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\big(j(\omega-k\omega_s)\big)$$

$$h_r(t)=T_s\frac{\operatorname{sen}(\omega_s t)}{\pi t}\xrightarrow{TF}H_r(j\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|\le\omega_s\\ 0, & |\omega|>\omega_s\end{cases}$$

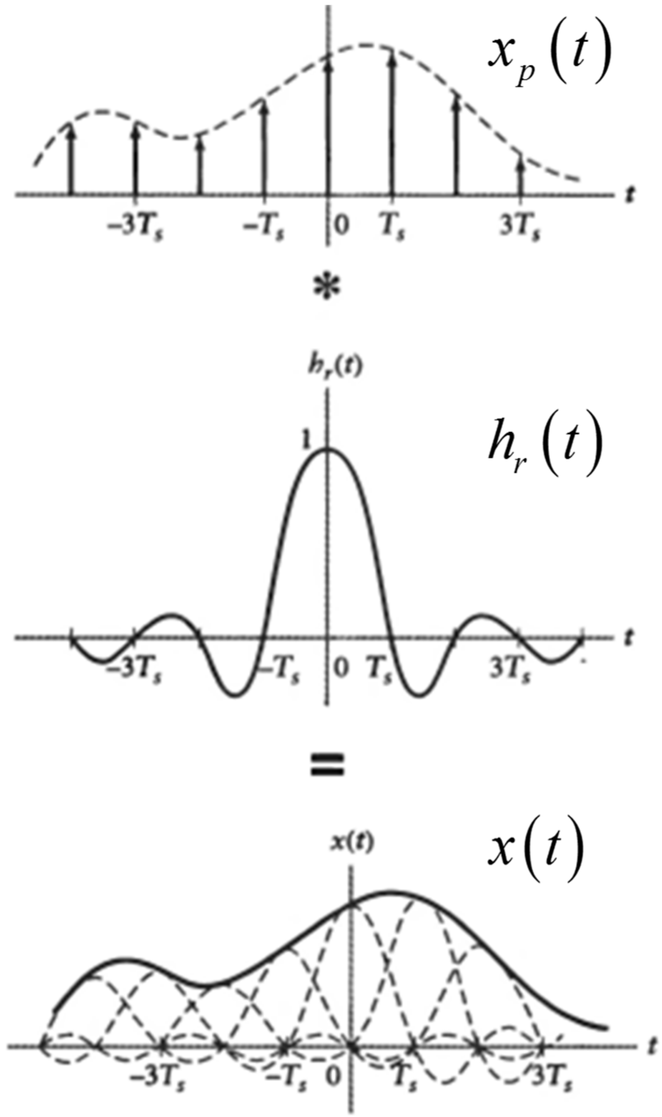
$$x(t)=h_r(t)*x_p(t)\longrightarrow X(j\omega)=H_r(j\omega)X_p(j\omega)$$

$$=h_r(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s),\quad T_s=\frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_r(t)*\left[x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)h_r(t-nT_s)$$

$$\boxed{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\;T_s\frac{\operatorname{sen}\big(\omega_s(t-nT_s)\big)}{\pi(t-nT_s)}}$$



Aproximação pela soma ponderada de funções $h_r(t)$

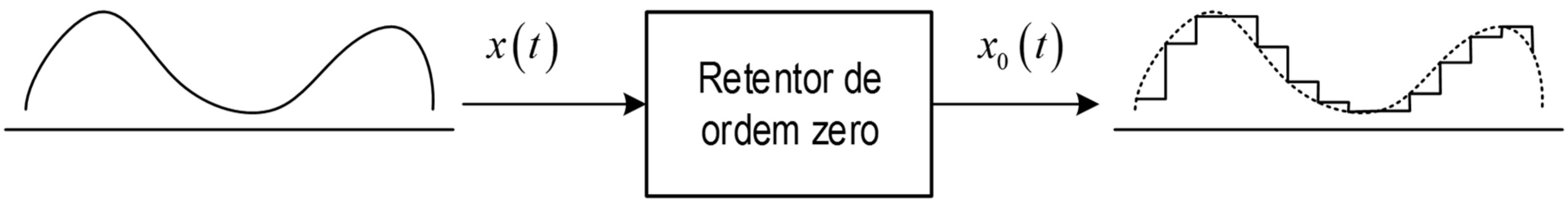
- A partir do teorema da amostragem, fica claro que se amostrarmos um sinal de banda limitada x(t) acima de sua taxa de Nyquist, podemos reconstruí-lo a partir de suas amostras x[n].

- Na prática pulsos estreito e de grande amplitude, que se aproximam de impulsos, são relativamente difíceis de gerar e transmitir.

- Na prática a equação de reconstrução do sinal não pode ser implementada por outras duas razões:
    i) ela representes um sistema não causal, a saída x(t) depende dos valores no passado e no futuro da entrada x[n];
    ii) a influência de cada amostra estende sobre uma quantidade infinita de tempo, porque $h_r(t)$ tem duração infinita;

- Comumente é mais conveniente gerar o sinal amostrado em uma forma conhecida como retentor de ordem zero (zero-order hold).

Esquema para amostragem com retentor de ordem zero



- Este sistema amostra x(t) em determinado instante e mantém esse valor até o próximo instante.

- A reconstrução de x(t) a partir da saída de um retentor de ordem zero pode ser realizada por um filtro passa baixas.

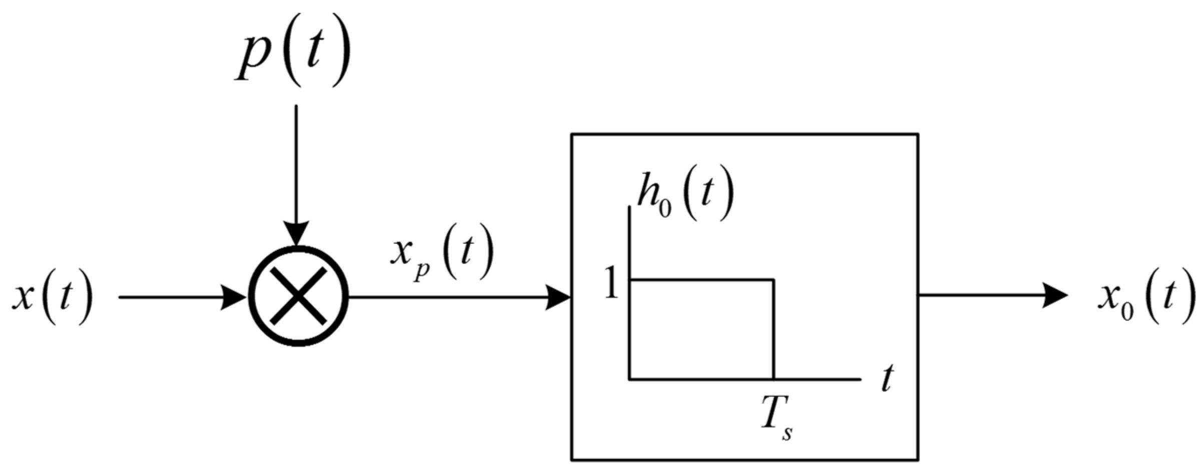
- O filtro exigido não tem ganho constante na banda de passagem.

- Sendo assim, o sinal $x_0(t)$caracteriza-se por uma aproximação em degraus do sinal de tempo contínuo x(t).

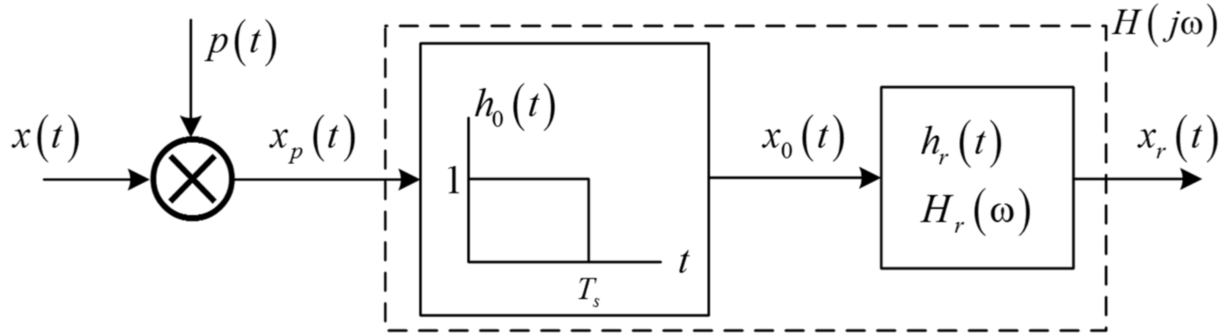
- O retentor de ordem zero é representado matematicamente como a soma ponderada de pulsos retangulares deslocados de múltiplos inteiros do intervalo de amostragem.

Construção do filtro retentor de ordem zero

- A saída do retentor de ordem zero pode ser gerada pela amostragem de um trem de impulsos seguida por um sistema LIT com uma resposta ao impulso retangular, como mostra a figura abaixo.



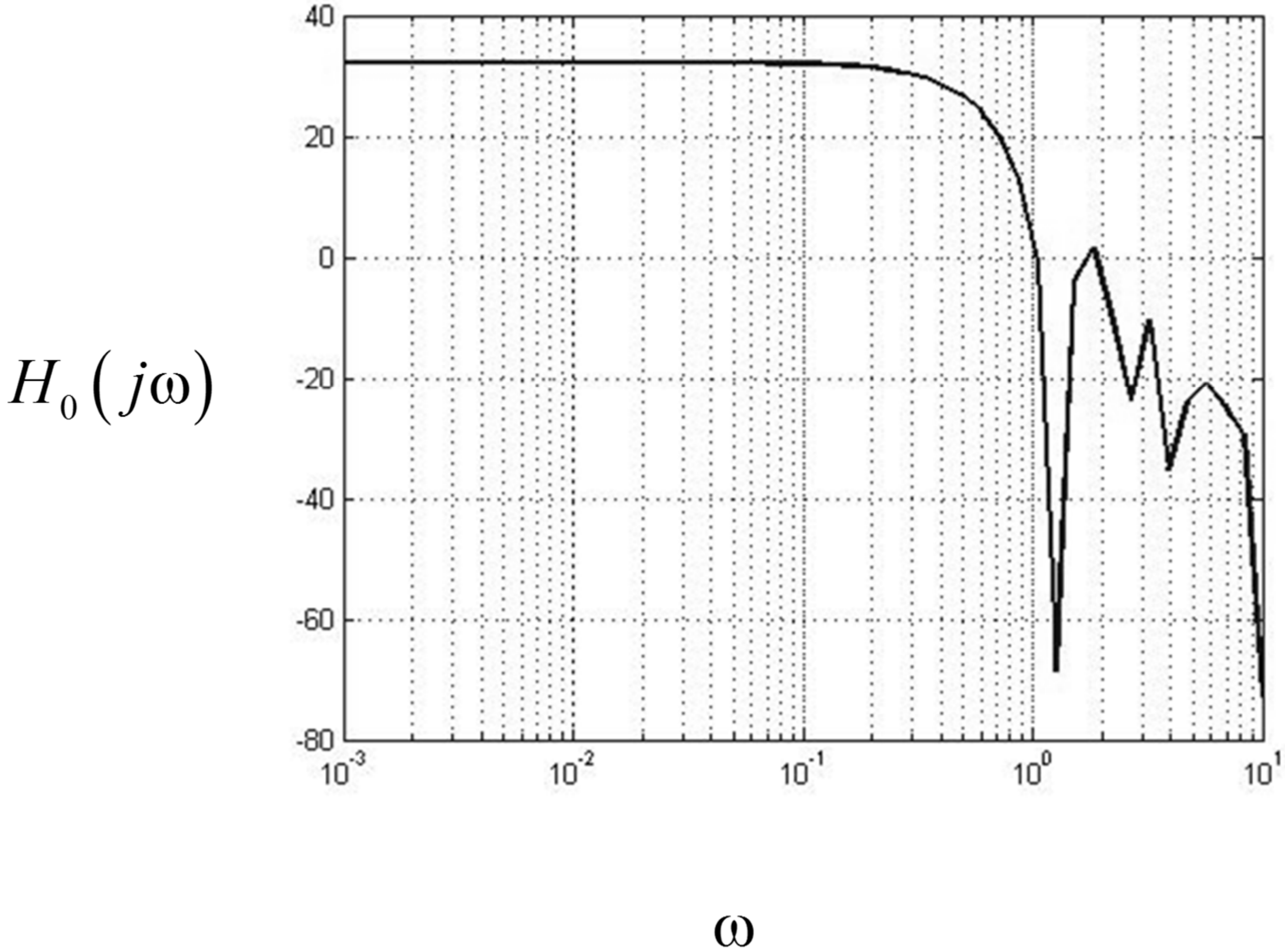
- O esquema desse sistema é mostrado na figura abaixo.



$$x_p(t) = x(t) * p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\, p(t - nT_s), \qquad p(t) = \delta(t)$$

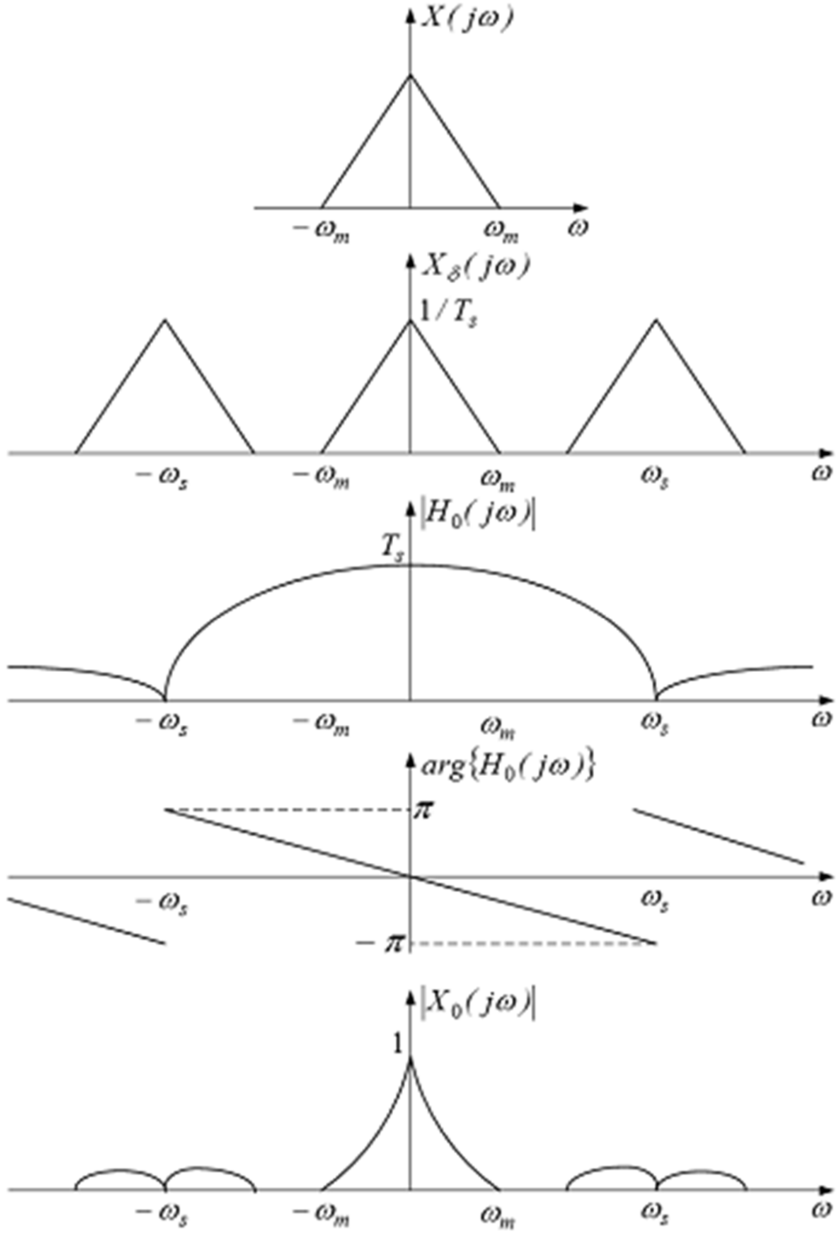
$$x_0(t) = x_p(t) * h_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT_s)\, h_0(t - nT_s) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_0(j\omega) = X_p(j\omega) H_0(j\omega)$$

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2}\left[2\frac{\operatorname{sen}\omega T/2}{\omega}\right]$$


40
20
0
-20
-40
-60
-80
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
$H_0\left(j\omega\right)$
ω

Efeitos do filtro retentor de ordem zero

- Defasamento linear correspondente ao atraso de $T_s/2$ segundos.
- A parte de $X_p(j\omega)$ entre $-\omega_M$ e ω_M é distorcida pela curvatura do lóbulo principal de $H_0(j\omega)$
- A resposta em frequência da equação $H_r(j\omega)$ não pode ser implementada exatamente, e uma aproximação adequada precisa ser projetada.
- Em muitas situações o retentor de ordem zero é considerada uma aproximação adequada para o sinal original, sem qualquer filtragem passa-baixas adicional.
- Versões distorcidas e atenuadas de $X(j\omega)$ permanecem centralizadas em múltiplos diferentes de zero e ω_s.



$X(j\omega)$
$-\omega_m$
ω_m
ω
$X_\delta(j\omega)$
$1/T_s$
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
ω
$|H_0(j\omega)|$
T_s
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
ω
$arg\{H_0(j\omega)\}$
π
$-\omega_s$
ω_s
ω
$-\pi$
$|X_0(j\omega)|$
1
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
ω