ELETROMAGNETISMO

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

A natureza dos materiais dielétricos.

- **A característica que todos dielétricos (líquidos, sólidos ou gasosos) tem em comum *é a capacidade armazenar energia elétrica*.**

- **Este armazenamento faz-se por um deslocamento nas posições relativas das cargas negativas e positivas contra as forças normais do átomo.**

- **Este deslocamento contra as forças de restauração é análogo ao levantamento de um peso ou compressão de uma mola e representa energia potencial.**

- ***A fonte de energia é o campo externo*.**

Podemos ter:

- **moléculas polares : o par de cargas (negativa e positiva) age como um dipólo. Os dipolos estão alinhados de maneira aleatória. O campo externo alinha estas moléculas numa certa direção.**

- **moléculas não polares: Não possui o arranjo de dipólo antes de o campo ser aplicado. O dipolo surge e é alinhado com o campo externo.**

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Qualquer dipolo pode ser descrito por seu momento dipolo p. onde:

p=Q**d, onde:**

Q é a carga positiva do dipolo e **d é a forma vetorial da distância entre a carga** n**egativa** e a **carga positiva**;

Existem n diplos idênticos por unidade de volume, considerando um volume Δ*v*. O momento dipolo total é uma soma vetorial dada por:

$$\vec{P}_{total} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \vec{p}_i$$

Onde cada $\mathbf{p_i}$ pode ser diferente.

Definimos a polarização P como o momento de dipolo por unidade de volume:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \vec{p}_i \left(C/m^2 : \textit{mesma unidade de } \vec{D} \right)$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

A lei de Gauss relaciona a densidade de fluxo elétrico D com a carga livre, Q, **por**:

$$Q = \oint\!\!\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} \qquad (1) \qquad (\vec{D}\ \textit{sai ou diverge da carga livre positiva})$$

Por analogia , o campo P também pode ser relacionado com uma carga, Q_P , que produz este campo, **sendo chamada de carga de polarização**:

$$Q_p = -\oint\!\!\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} \qquad (2) \qquad (\vec{\mathrm{P}}\ \textit{sai ou diverge da carga de polarização negativa})$$

A lei de Gauss em termos de carga total, **Q_T** , **(lei de Gauss generalizada**) **é expressa por:**

$$Q_T = \oint\!\!\oint \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (3)$$

Onde $Q_T = Q + Q_P$ = soma da carga livre com a carga de polarização.
ε_0 = permissividade elétrica no vácuo (F/m)

$$Q = Q_T - Q_p = \oint\!\!\oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S}$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Substituindo as cargas pelas suas expressões com integrais, **obtemos a seguinte expressão geral que relaciona os 3 campos E , D** e **P** , **para qualquer tipo de meio**:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (\text{No vácuo } \vec{\mathrm{P}} = 0)$$

Para um material linear, homogêneo e isotrópico (mesma propriedade em todas as direções) tem-se:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \qquad (\mathrm{C/\,m^2})$$

Onde χ_e **é a suscetibilidade elétrica do material** (**constante adimensional**, **lê-se "csi"**). **Esta constante é relacionada com** a **permissividade elétrica relativa** (ou constante dielétrica) **do material, por**:

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1$$

Combinando as três últimas equações, obtém-se:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad onde: \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Onde ε é a permissividade elétrica absoluta do material, dada em F/m.

Relações usando as densidades de cargas volumétricas , temos:

$$Q = \int_v \rho_v dv$$

$$Q_p = \int_v \rho_P dv$$

$$Q_T = \int_v \rho_T dv$$

Com o auxílio do teorema da divergência, aplicado as equações (1) – (3) tem-se:

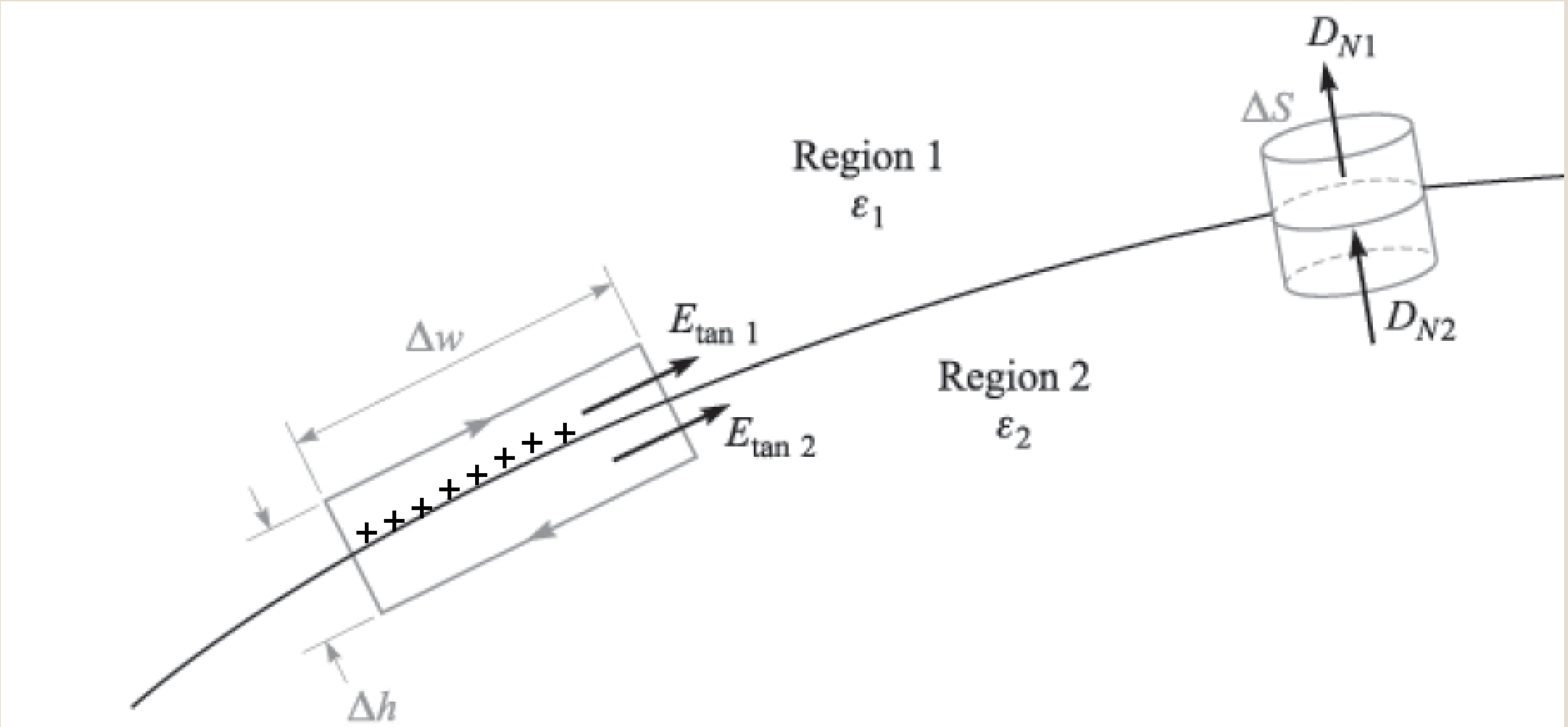
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_P$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_T$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Condições de contorno para materiais dielétricos perfeitos:



CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Condições de contorno para materiais dielétricos perfeitos:

Relações de contorno entre 2 meios com permissividades elétricas ε_1 e ε_2 (fronteira sem carga):

Para componentes tangenciais: $E_{t1} = E_{t2}$

Para componentes normais : $D_{n1} = D_{n2}$

Se na superfície de separação entre os 2 meios existir uma carga distribuída (fronteira com carga) com densidade superficial ρ_S , a condição de contorno para as componentes normais muda para:

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$$

Relação de contorno se o meio 2 for um condutor perfeito ($\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow E_2 = D_2 = 0$)

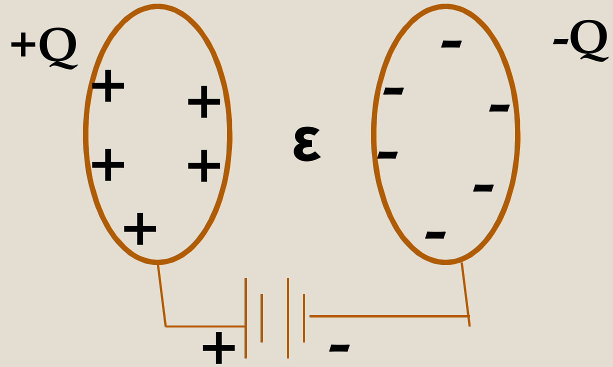
$$D_{n1} = \rho_S \quad \Rightarrow \quad E_{n1} = \rho_S / \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad D_{t1} = E_{t1} = 0$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Capacitância

Qualquer dispositivo formado por 2 superfícies condutoras separadas por um dielétrico forma um capacitor cuja capacitância é definida como:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\oint_s \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}}{-\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot dL} \, (\mathrm{C} > 0)$$



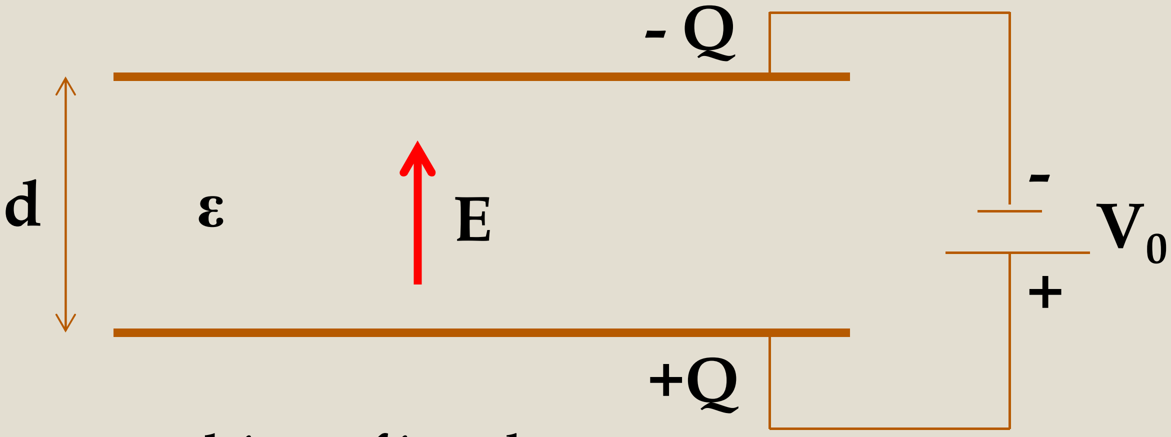
CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

V_0

Exemplos de Cálculo de Capacitância

Análise do capacitor de placas planas paralelas:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\int_0^S \varepsilon E\vec{a}_z \cdot dS\vec{a}_z}{-\int_d^0 E\vec{a}_z \cdot dz\vec{a}_z} = \frac{\varepsilon ES}{-E(0-\mathrm{d})} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon S}{d}$$



Observe também as fórmulas

$$V_0 = Ed$$

$$D = \varepsilon E = \frac{Q}{S} = \rho_S$$

Onde os campos **E** e **D** são considerados constantes
No dielétrico do capacitor ideal.

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA6

Exemplos de Cálculo de Capacitância

Ex. 2) Determinar C de um capacitor coaxial de raios a e b (a<b) usando a lei de Gauss.

Para uma gaussiana cilíndrica de raio a<ρ<b

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{interna}$$

$$D 2\pi\rho L = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{2\pi\rho L}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\vec{a}_\rho$$

$$V_0 = V_{ab} = -\int_{\rho=b}^{a} \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\vec{a}_\rho \cdot d\rho\vec{a}_\rho$$

$$V_0 = \left[\frac{-Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\rho\right]_b^a \Rightarrow V_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(\mathrm{b}/\mathrm{a})}$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Exemplos de Cálculo de Capacitância

Ex. 3) Determinar C de um capacitor de raios a e b (a<b) **usando a lei de Gauss.**

Para uma gaussiana esférica de raio a<r<b (dentro do dielétrico

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{interna}$$

$$D4\pi r^2 = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{a}_r$$

$$V_0 = V_{ab} = -\int_{\rho=b}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{a}_r \cdot dr\vec{a}_r$$

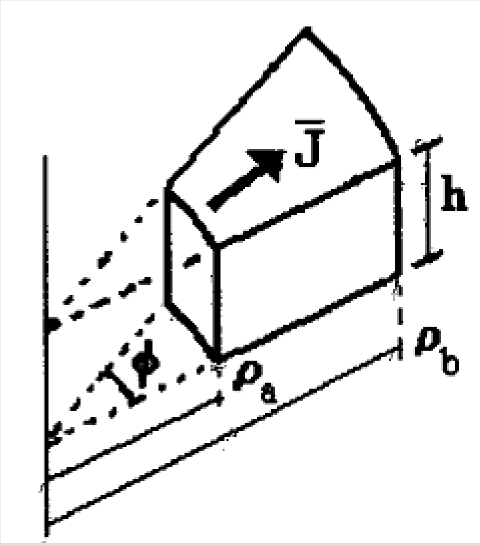
$$V_0 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-1}{r}\right]_b^a \Rightarrow V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

Exercício) Calcular R para o condutor em forma de cunha da figura abaixo, para J (ou I) no sentido radial.

Obs: Conteúdo presente no slide 1.



$$\mathrm{Re}\,sposta:$$

$$R = \frac{\ln\left(\frac{\rho_b}{\rho_a}\right)}{\sigma\phi h}$$