INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Fórmulas de Integração Newton-Cotes

Motivação: As fórmulas de Newton-Cotes são os esquemas mais comuns de integração numérica.

• São baseadas na estratégia de substituir uma função complicada ou dados tabulados por uma função aproximadora simples que seja fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx \qquad (1)$$

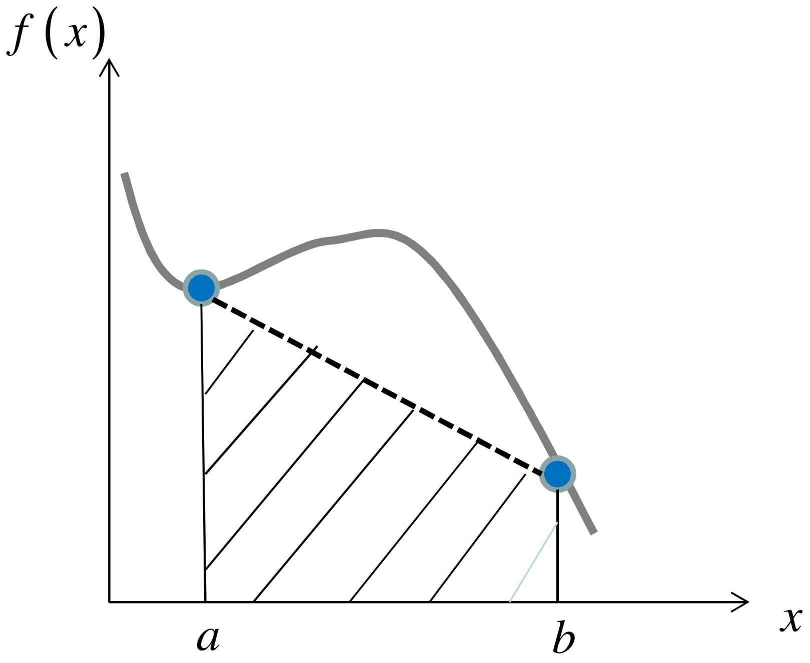
Em que f_n (x) é **um polinômio da forma:**

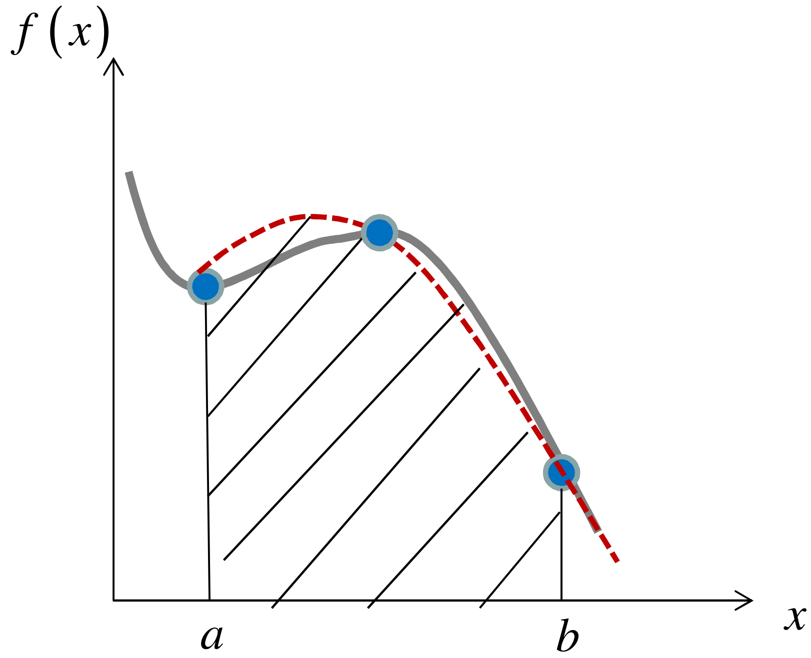
$$f_n(x) = a_0 + a_0 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

Onde n é o grau do polinômio.

Como aproximação podemos usar, por exemplo, **um polinômio de primeiro grau (reta)** ou **de segundo grau uma parábola.**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA



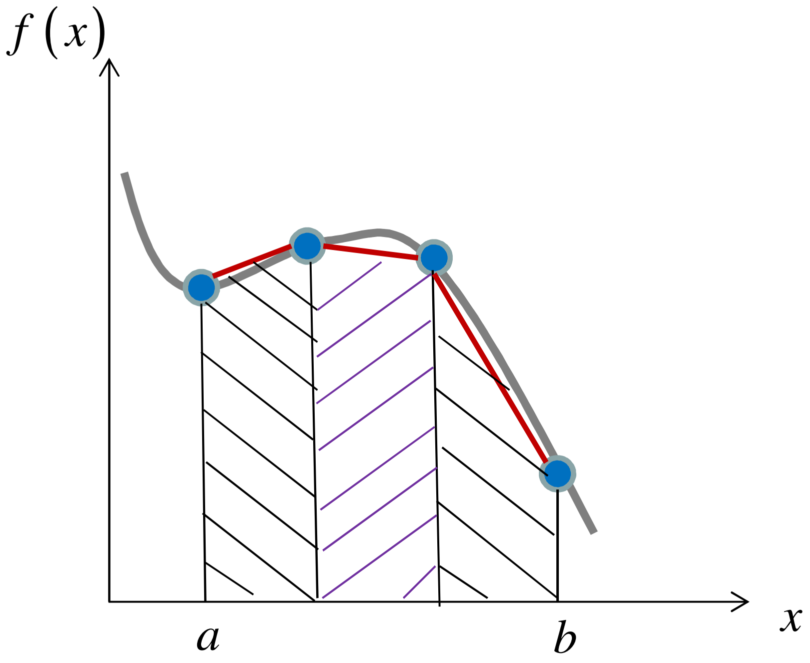


Aproximação de uma integral pela área sob:

a) **Uma única reta;**

b) **Uma única parábola.**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA



Aproximação de uma integral pela área sob três segmentos de reta.

A integral também pode ser aproximada usando uma série de polinômios aplicados por partes à função ou dados em segmentos de comprimento constante.

Tratareremos das formas fechadas das fórmulas de Newton-Cotes. As fórmulas fechadas são aquelas nas quais os dados nos extremos inicial e final de integração são conhecidos.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A Regra do Trapézio

A regra do trapézio é a primeira fórmula de integração fechada de Newton-Cotes. Ela corresponde ao caso no qual o polinômio da equação (1) é de primeiro grau.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

Lembre-se, que uma reta pode ser representada por:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (2)$$

A área sob essa reta é uma estimativa da integral f(x) entre os extremos a e b:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A Regra do Trapézio

O resultado da integração é:

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3)$$

Que é chamada de regra do trapézio.

Dedução:

Antes da integração (2) pode ser expressa como:

$$f_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - \frac{af(b)-af(a)}{b-a}$$

Agrupando os dois termos, obtemos:

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b-a}$$

Ou,

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

Que pode ser integrada entre x = a e x = b para fornecer:

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}x\Bigg|_{\grave{a}}^{b}$$

Esse resultado pode ser calculado por:

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}(b-a)$$

Agora, como:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$

$$I = \left[f(b) - f(a) \right]\frac{b+a}{2} + bf(a) - af(b)$$

Fazendo a multiplicação e agrupando os termos, obtemos;

$$I = (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Que é a fórmula dos trapézios

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

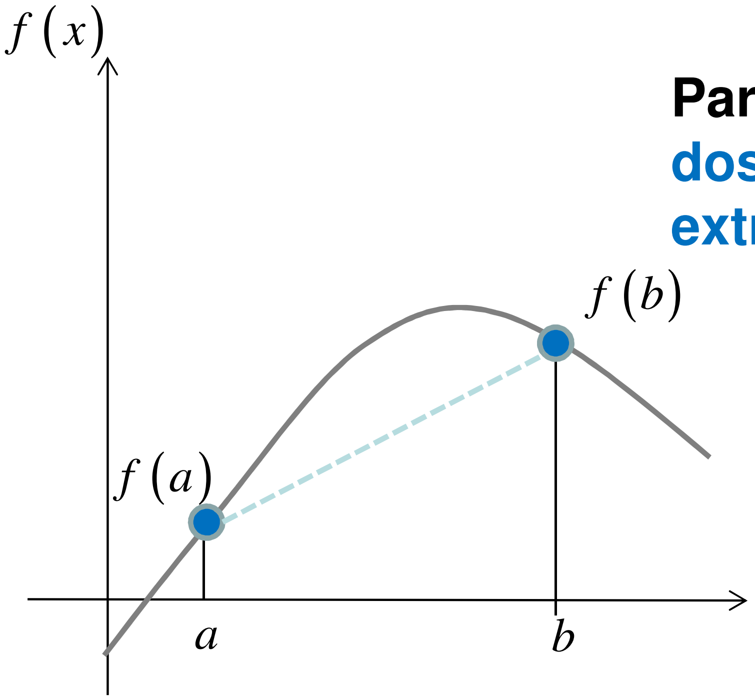
Da geometria, a área do trapézio é a altura vezes a média das bases.

Em nosso caso, o conceito é o mesmo:

$$I \cong largura \times altura\ média$$

$$ou$$

$$I \cong (b-a) \times altura\ média$$



Para a regra dos trapézios, a altura média dos valores da função nas extremidades nas extremidades, ou [f(a) +f(b)]/2

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Erro na Regra do Trapézio

Quando empregamos a integral sob um segmento de reta para aproximar a integral sob a curva, obviamente incorremos em um erro que pode ser substancial. Uma estimativa para o erro de truncamento local de uma única aplicação da regra do trapézio é:

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3 \qquad (4)$$

em que ξ está em alguma ponto no intervalo entre a e b. A equação em (4) indica que, se a função que está sendo integrada for linear, a regra dos trapézios será exata.

Caso contrário, para funções com derivadas de segunda e de ordem superior não –nulas, pode ocorrer algum erro.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Erro na Regra do Trapézio

Use a equação (3) para integrar numericamente.

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

De a=0 a b=0,8. O valor exato determinado analiticamente é 1,640533.

Solução: Os valores da função:

f(0) = 0,2 e **f(0,8)= 0,232**

São substituídos na equação (3) para fornecer

$$I = (0,8 - 0)\frac{0,2 + 0,232}{2} = 0,1728$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

que representa um erro de:

$$E_t = 1,640533 - 0,1728 = 1,467733$$

que corresponde a um erro relativo percentual de 89,5%. Em casos reais não teríamos o conhecimento prévio do valor verdadeiro. Portanto, é necessária uma estimativa de erro aproximada.

Para se obter essa estimativa, a segunda derivada é obtida derivando-se duas vezes a função original:

$$f''(x) = -400 + 4.050x - 10.800x^2 + 8000x^3$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

o valor médio da segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{\int_0^{0,8} (-400 + 4.050x - 10.800x^2 + 8000x^3)\,dx}{0,8 - 0} = -60$$

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3 \qquad (4)$$

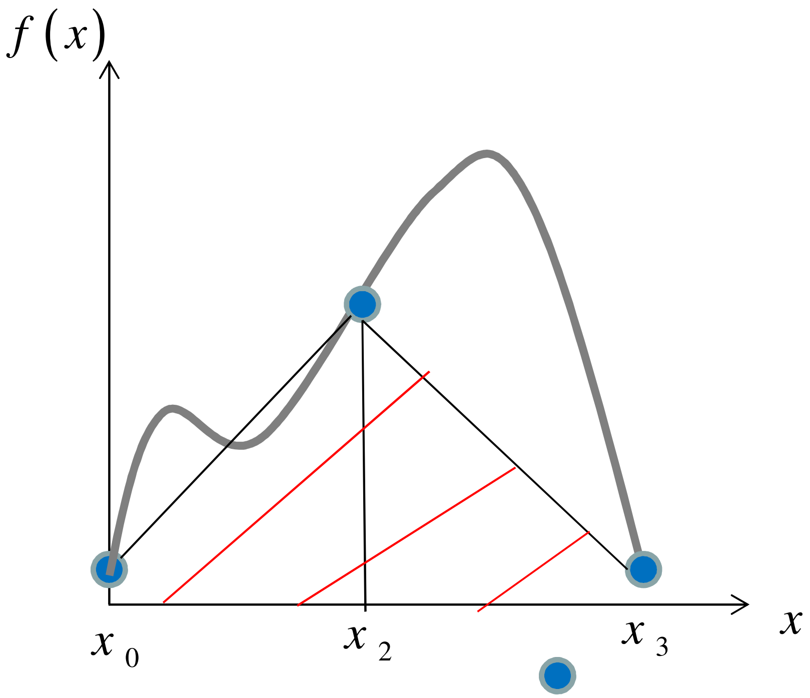
$$E_t = -\frac{1}{12}(-60)(0,8)^3 = 2,56$$

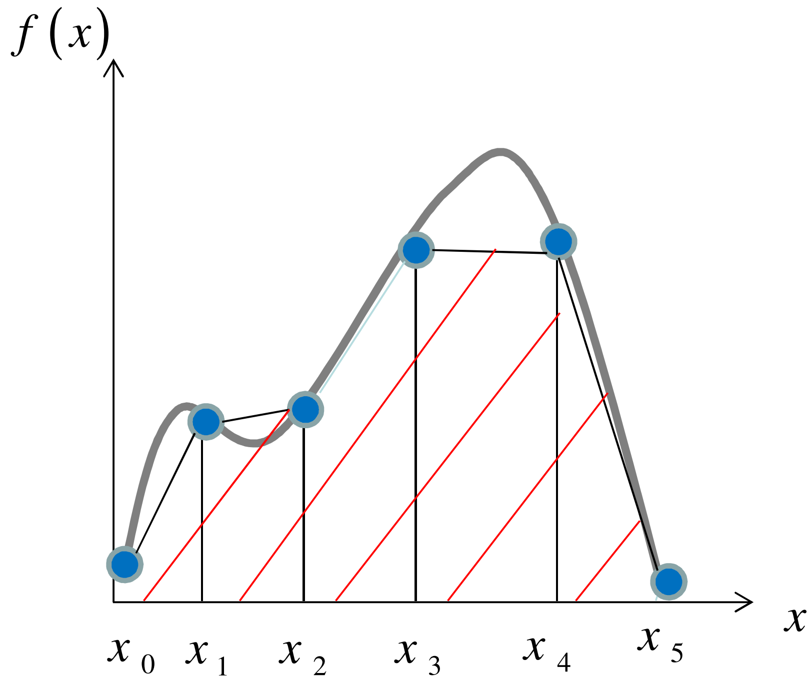
o erro estimado é da mesma ordem de grandeza e do mesmo sinal que o erro verdadeiro.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A Aplicação múltipla da Regra do Trapézio.

Uma maneira de melhorar a acurácia da Regra do trapézio é dividir o intervalo de integração de a e b em diversos segmentos e aplicar o método a cada seguimento.





INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A Aplicação múltipla da Regra do Trapézio.

As áreas correspondentes aos segmentos individuais podem então ser somadas para fornecer a integral para o intervalo inteiro.

As equações resultantes são então chamadas de fórmulas de integração por aplicações múltiplas ou compostas:

Existem <u>n+1</u> pontos base igualmente espaçados $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. **Consequentemente, existem** n **segmentos de largura igual:**

$$h = \frac{(b-a)}{n} \qquad (5)$$

Se a e b forem designados por x_0 , x_n **, respectivamente, a integral total pode ser representada como:**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Substituindo cada integral pela regra do trapézio, obtém-se:

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \qquad (6)$$

Ou agrupando os termos:

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \qquad (7)$$

ou usando (5) para expressar (7),

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{largura}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura média}} \qquad (8)$$

Como a soma dos coeficientes f(x) no numerador dividido por 2n é igual a 1, a altura média representa uma média ponderada dos valores da função.

De acordo com (8) os pontos interiores têm peso duas vezes maior do que as extremidades $f(x_0)$ e $f(x_n)$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Um erro para a aplicação múltipla da regra do trapézio pode ser obtido pela soma dos erros individuais em cada segmento, o que dá:

$$E_t = \frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{1}^{n} f''(\xi_i) \qquad (9)$$

Onde f ''(ξ_i) é a segunda derivada em um ponto (ξ_i) localizado no segmento i. Esse resultado pode ser simplificado por uma estimativa do valor médico da segunda derivada no intervalo todo como:

$$f'' = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi)}{n} \qquad (10)$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Portanto,

$$\sum f''(\xi_i) \cong nf''$$

e a equação (9) pode ser reescrita como:

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f'' \qquad (11)$$

Logo, se o número de segmentos for dobrado, o erro de truncamento será dividido por quatro.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Exercício 1 – Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^4 \left(1 - e^{-2x}\right) dx$$

(a) analiticamente;

(b) por uma única regra do trapézio;

(c) por aplicações múltiplas da regra do trapézio, com n=2 e 4.