INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Controle de Sistemas Contínuos I

Prof. Walterley A. Moura

contato: walterley.moura@cba.ifmt.edu.br

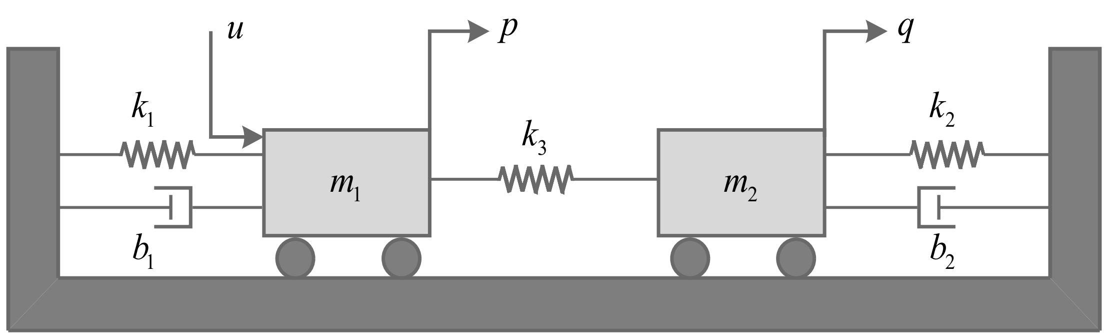
Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Considere o sistema mostrado na figura:

a) Desenvolver as Equações Diferenciais da dinâmica do sistema;

b) Descrever as equações no Espaço de Estados;

c) Representar o sistema em Diagrama de Blocos.

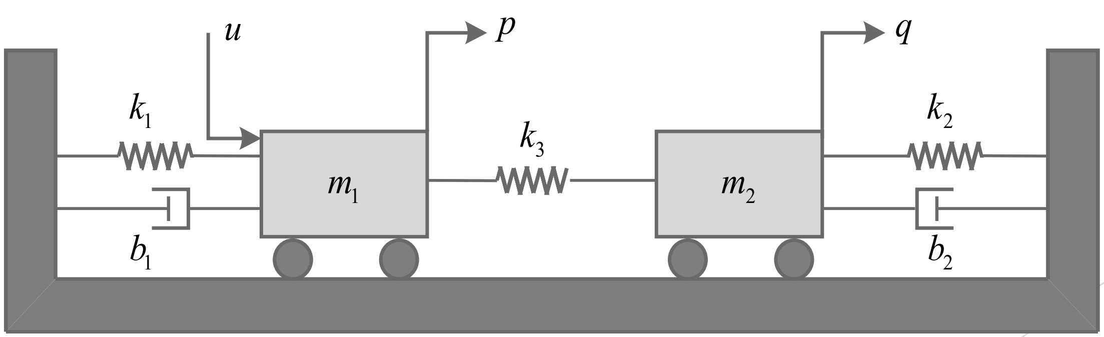


Resolução

- No sistema temos:
- m_1 e m_2 são as massas dos carrinhos;
- k_1 , k_2 e k_3 são as constante elásticas das molas;
- b_1 e b_2 são os coeficientes de atrito viscoso dos amortecedores;

p e q são os deslocamentos de cada carrinho;

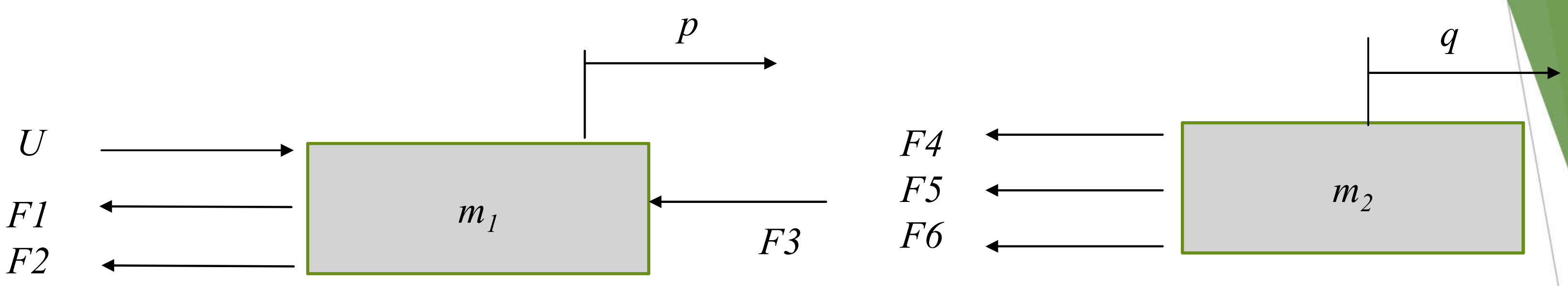
u é a força externa aplicada.



a) Modelagem do Sistema - Equações Diferenciais

Para desenvolver as equações diferenciais do sistema, é necessária a aplicação das seguintes leis físicas:

1. Segunda Lei de Newton: $F_R = m\vec{a}$
2. Lei de Hooke (Força Elástica Restauradora): $F = -Kx$
3. Força de atrito viscoso: $F = -b\dot{x}$



F_1 -> Força elástica restauradora da mola k_1,

F_2 -> Força de atrito viscoso b_1,

F_3 -> Força elástica restauradora da mola k_3,

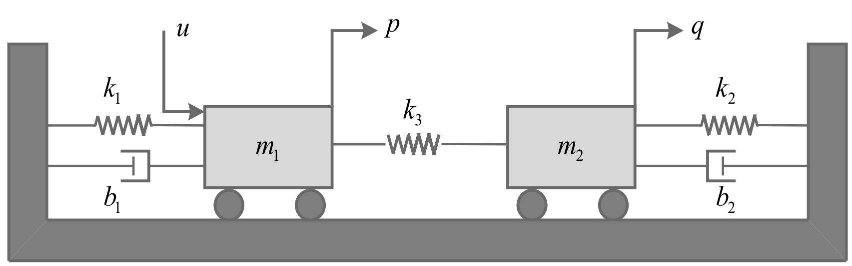
p -> deslocamento do carrinho de massa m_1,

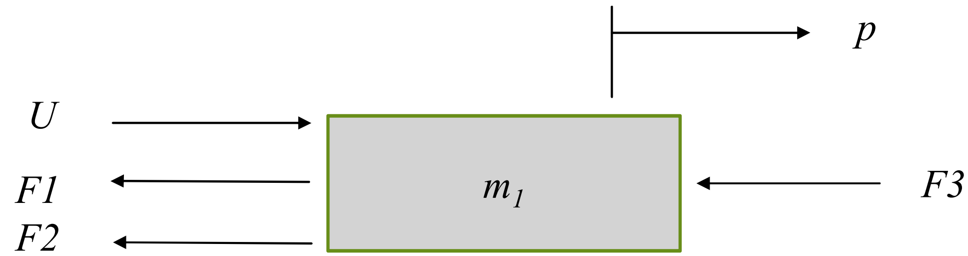
F_4 -> Força elástica restauradora da mola k_3,

F_5 -> Força de atrito de viscoso b_2,

F_6 -> Força elástica restauradora da mola k_2,

q -> Descolamento do carrinho de massa m_2





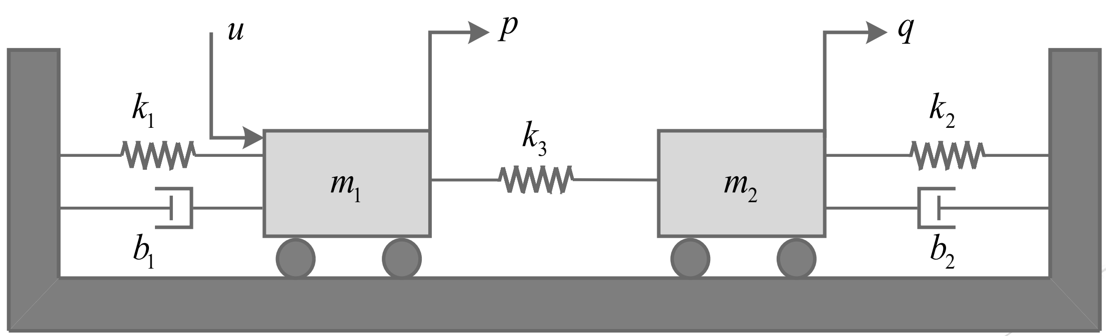
$u(t)$ -> entrada do sistema,

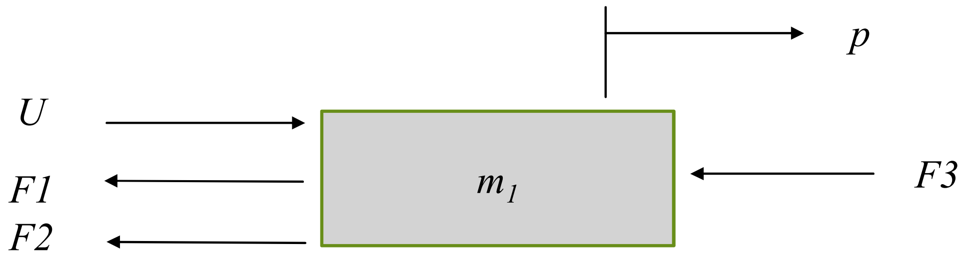
$F_1 = k_1 p,$

$F_2 = b_1 \dot{p},$

$F_3 = k_3(p - q)$

p -> deslocamento do carrinho 1





- Partindo da Segunda Lei de Newton:

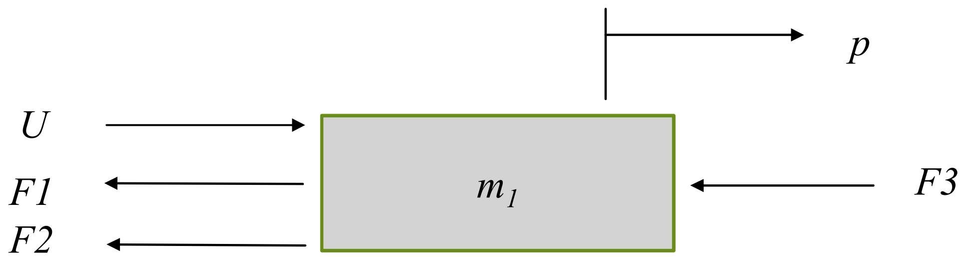
$$Fr = ma$$

- E assumindo que o sentido direito é positivo para forças:

$$-F_1 - F_2 + \mathrm{u} - F_3 = m_1 a$$

- Partindo das definições das forças: F_1, F_2 e F_3. E também, considerando que a aceleração a seja a segunda derivada do deslocamento p, temos que:

$$-k_1 p - b_1 \dot{p} + \mathrm{u} - k_3(p - \mathrm{q}) = m_1 \ddot{p}$$



$$-k_1p - b_1\dot{p} + \mathrm{u} - k_3(p - \mathrm{q}) = m_1\ddot{p}$$

- Organizando a equação acima:

$$m_1\ddot{p} + b_1\dot{p} + (k_1 + k_3)p - k_3\mathrm{q} = \mathrm{u} \quad (1)$$

- A $eq.(1)$ representa o sistema do carrinho com massa m_1

$$F_4 = k_3(q - p),$$

$$F_5 = b_2\dot{q},$$

$$F_3 = k_2 q,$$

q-> saída do sistema

- Partindo da Segunda Lei de Newton:

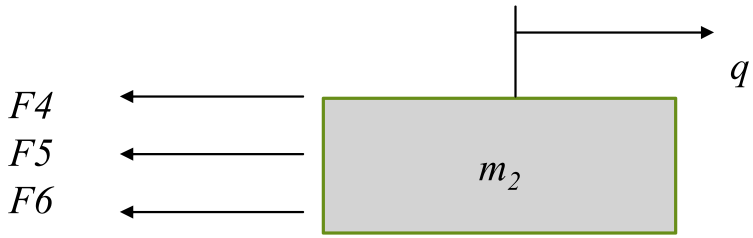
$$Fr = ma$$

- E assumindo que o sentido direito é positivo para as forças:

$$-F_4 - F_5 - F_6 = m_2 a$$

- Partindo das definições das forças: $F_4,\ F_5$ e $F_6.$ E também, considerando que a aceleração a seja a segunda derivada do deslocamento $q,$ temos que:

$$-k_3(q - p) - b_2\dot{q} - k_2\mathrm{q} = m_2\ddot{q}$$



$$-k_3(q-p) - b_2\dot{q} - k_2\mathrm{q} = m_2\ddot{q}$$

- Organizando a equação acima:

$$m_2\ddot{q} + b_2\dot{q} + (k_2 + k_3)q - k_3\mathrm{p} = 0 \quad (2)$$

- A $eq.(2)$ representa o sistema do carrinho com massa m_2.

b) Representação no Espaço de Estado

- Sendo as $eq.(1)\ e\ (2)$:

$$m_1\ddot{p} + b_1\dot{p} + (k_1 + k_3)p - k_3\mathrm{q} = \mathrm{u} \quad (1)$$
$$m_2\ddot{q} + b_2\dot{q} + (k_2 + k_3)q - k_3\mathrm{p} = 0 \quad (2)$$

- Define-se as variáveis de estado:

$$x_1 = p \qquad x_3 = \dot{p}$$
$$x_2 = q \qquad x_4 = \dot{q}$$

- Derivando-se todas as variáveis de estado:

$$\dot{x_1} = \dot{p} = x_3 \qquad \dot{x_3} = \ddot{p}$$
$$\dot{x_2} = \dot{q} = x_4 \qquad \dot{x_4} = \ddot{q}$$

- Obtemos as seguintes relações:

$$x_1 = p \qquad \dot{x_1} = x_3 \qquad x_3 = \dot{p} \qquad \dot{x_3} = \ddot{p}$$
$$x_2 = q \qquad \dot{x_2} = x_4 \qquad x_4 = \dot{q} \qquad \dot{x_4} = \ddot{q}$$

- Substituindo-se as variáveis de estado nas seguintes equações:

$$m_1\ddot{p} + b_1\dot{p} + (k_1 + k_3)p - k_3\mathrm{q} = \mathrm{u} \quad (1)$$
$$m_2\ddot{q} + b_2\dot{q} + (k_2 + k_3)q - k_3\mathrm{p} = 0 \quad (2)$$

- Temos que:

$$m_1\dot{x_3} + b_1x_3 + (k_1 + k_3)x_1 - k_3x_2 = \mathrm{u} \quad (3)$$
$$m_2\dot{x_4} + b_2x_4 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_1 = 0 \quad (4)$$

- Isolando a variável $\dot{x_3}$ na $eq.(3)$ e a variável $\dot{x_4}$ na $eq.(4)$, temos:

$$\dot{x_3} = -\frac{(k_1 + k_3)}{m_1}x_1 + \frac{k_3}{m_1}x_2 - \frac{b_1}{m_1}x_3 + u$$
$$\dot{x_4} = \frac{k_3}{m_2}x_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2}x_2 - \frac{b_2}{m_2}x_4$$

- E da definição anterior das variáveis:

$$\dot{x_1} = x_3 \qquad \dot{x_2} = x_4$$

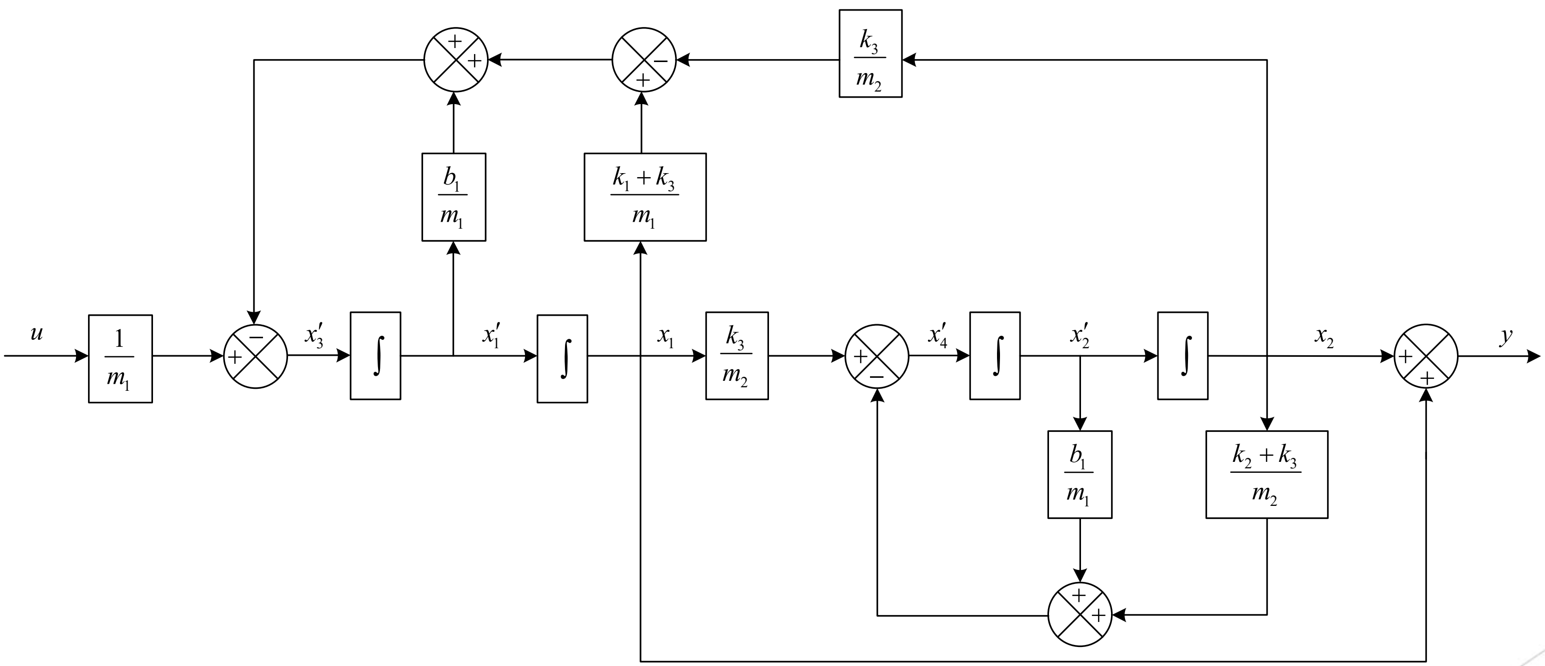
- Assim, obtemos a representação matricial do sistema no espaço de estados :

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1+k_3)}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_3}{m_2} & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & o & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

- A saída do sistema é composta pela soma de p e q, que são respectivamente x_1 e x_2, logo em representação matricial:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

c) Representação por Diagrama de Blocos



c) Representação por Diagrama de Fluxo de Sinais