INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

SINAIS E SISTEMAS LINEARES

DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA

TRANSFORMADA Z

6 Introdução

- Na análise de sistemas contínuos por vezes é mais vantajoso o uso da frequência complexa ‘s’ – Transformada de Laplace;

- No caso de sistemas discretos, uma ferramenta bastante comum usada para passar um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência é a Transformada z;

- A Transformada z também faz o uso de uma frequência complexa que neste caso é ‘z’, e portanto, ela é uma espécie de Transformadas de Laplace para sistemas discretos.

6.1 Definição

Conforme visto em anteriormente:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\quad h[n] \quad} \longrightarrow y[n] \quad \Rightarrow \quad y[n] = h[n] * x[n]$$

Definiremos a transformada Z para uma dada sequência x[n], como sendo:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

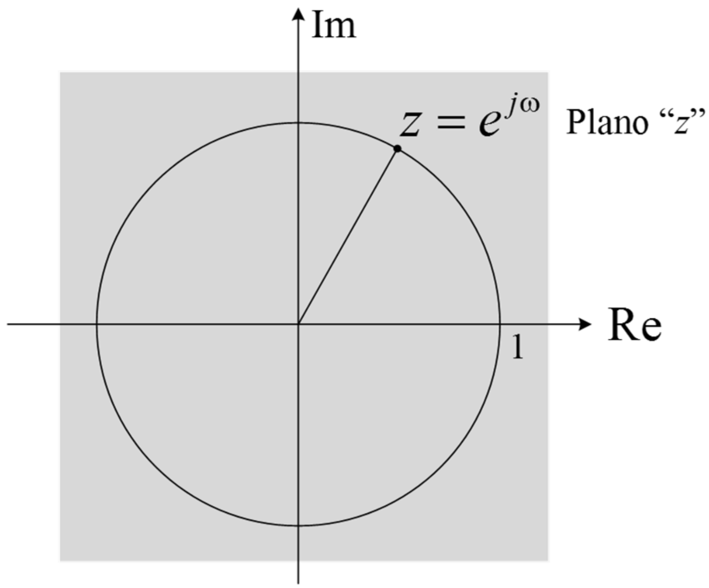
$onde:$

$z \longrightarrow$ é uma variável complexa

$z = re^{j\omega}$

- Para o casa particular, fazendo: $r = 1 \longrightarrow |z| = 1$

- Podemos escrever que:



- Observamos que, para a convergência da transformada Z convirja, ou seja

$$Z\{x[n]\} < \infty$$

- Para qualquer sequência x[n], a convergência é possível somente para alguns valores de "r" e não converge para outros;

- A transformada Z de uma sequência tem associada a ela uma faixa de valores para os quais X(z) converge;

- Essa faixa de valores é conhecida como "*Região de Convergência*" ou RDC;

- Se a RDC incluir a circunferência unitária a transformada de Fourier também converge.

- A RDC é o intervalo de valores de "z" para os quais $\left|x[n]z^{-n}\right| < 1$

se $X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ for uma série geométrica.

Exemplos - Encontrar a transformada Z de:

$$(1) \qquad x[n] = a^n u[n] \ (\text{sequência unilateral à direita})$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^n$$

Para convergência exigimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a z^{-1}\right|^n < \infty$$

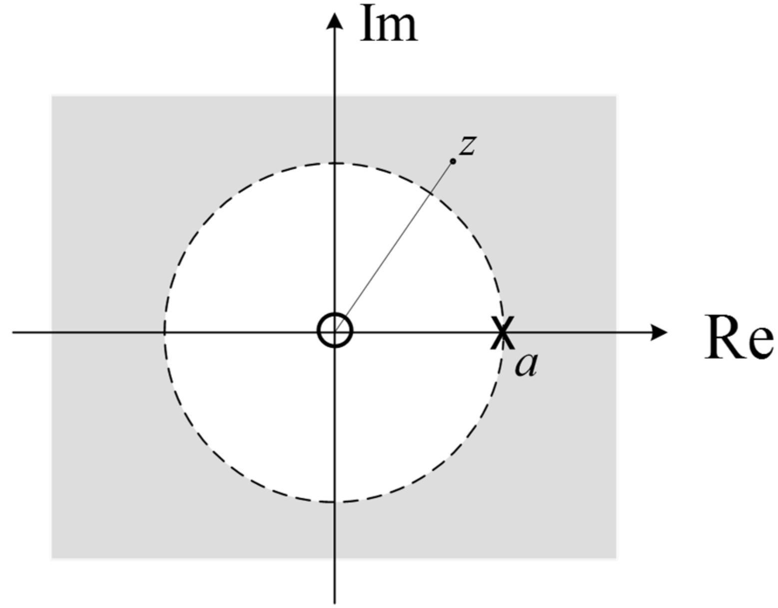
A sequência acima é um série geométrica, assim para ela ser convergente, a razão, *q*, da PG:

$$q = \left|a z^{-1}\right| < 1 \longrightarrow |z| > |a|$$

A transformada Z para o sinal é:

$$X(z)=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}},\ |z|>|a|$$



- ❖ A transformada Z é uma função racional, ou seja, possui um polinômio no numerador e um polinômio no denominador;

- ❖ Consequentemente, como a transformada de Laplace, ela pode ser caracterizada por:

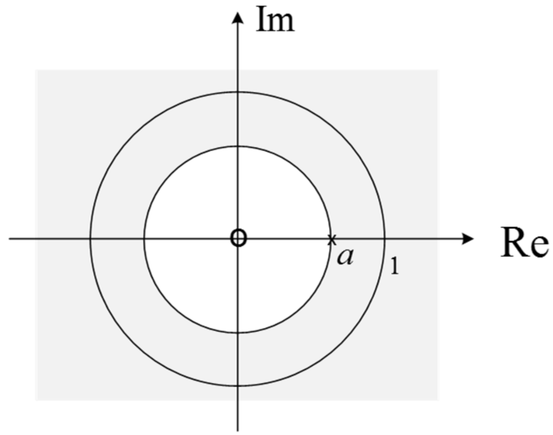
  a. Zeros, são as raízes do numerador;
  b. Polos, são as raízes do denominador.

❖ Para o exemplo, temos:

$$\text{Zeros} \longrightarrow z = 0 \ (\text{representado no plano complexo por "}\circ\text{"})$$

$$\text{Polos} \longrightarrow p = a \ (\text{representado no plano complexo por "}\times\text{"})$$

❖ Diagrama de polos, zeros e a RDC:



❖ Se $a < 1$, a TFTD de x[n]=a^nu[n] converge para: $X\left(e^{j\omega}\right) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

❖ Contudo, Se $a \geq 1$, a TFTD de x[n]=a^nu[n] não converge.

$$(2) \qquad x[n] = -a^n u[-n-1] \ \text{(sequência unilateral à esquerda)}$$

$$x[n] = \begin{cases} -a^n, & n \le -1 \\ 0, & n \ge -1 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -a^n u[-n-1] = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^n$$

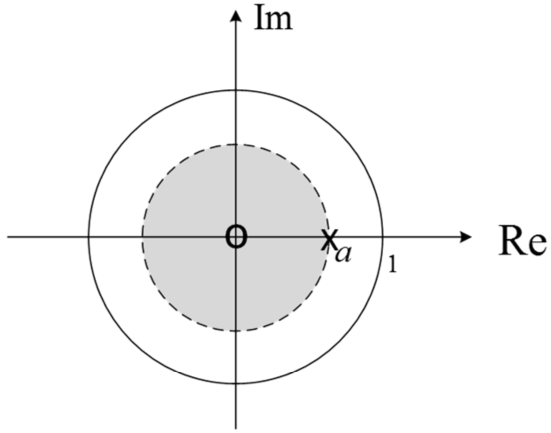
$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = 1 - \frac{a}{a - z} = -\frac{z}{a - z}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

❖ Para a convergência devemos exigir que:

$$\left|a^{-1} z\right| < 1 \longrightarrow |z| < |a|$$

❖ Diagrama de polos, zeros e a RDC:



(3) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ (soma de duas sequências unilaterais à direita)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

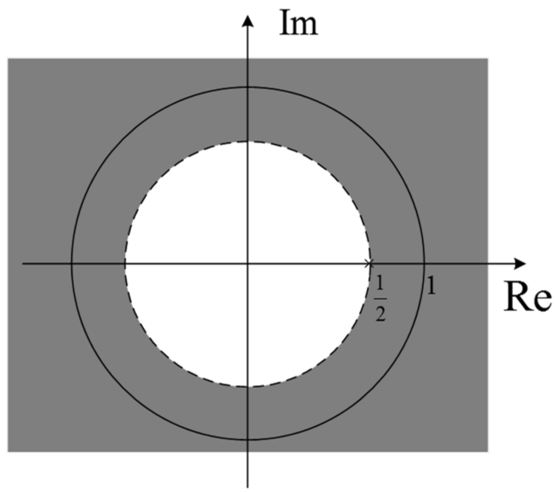
❖ Para a convergência de X(z) ambos os termos do somatório tem que convergir, isso exige que:

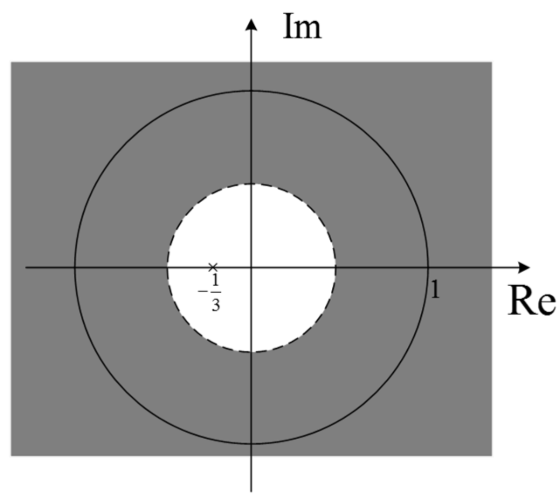
$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1$$

ou

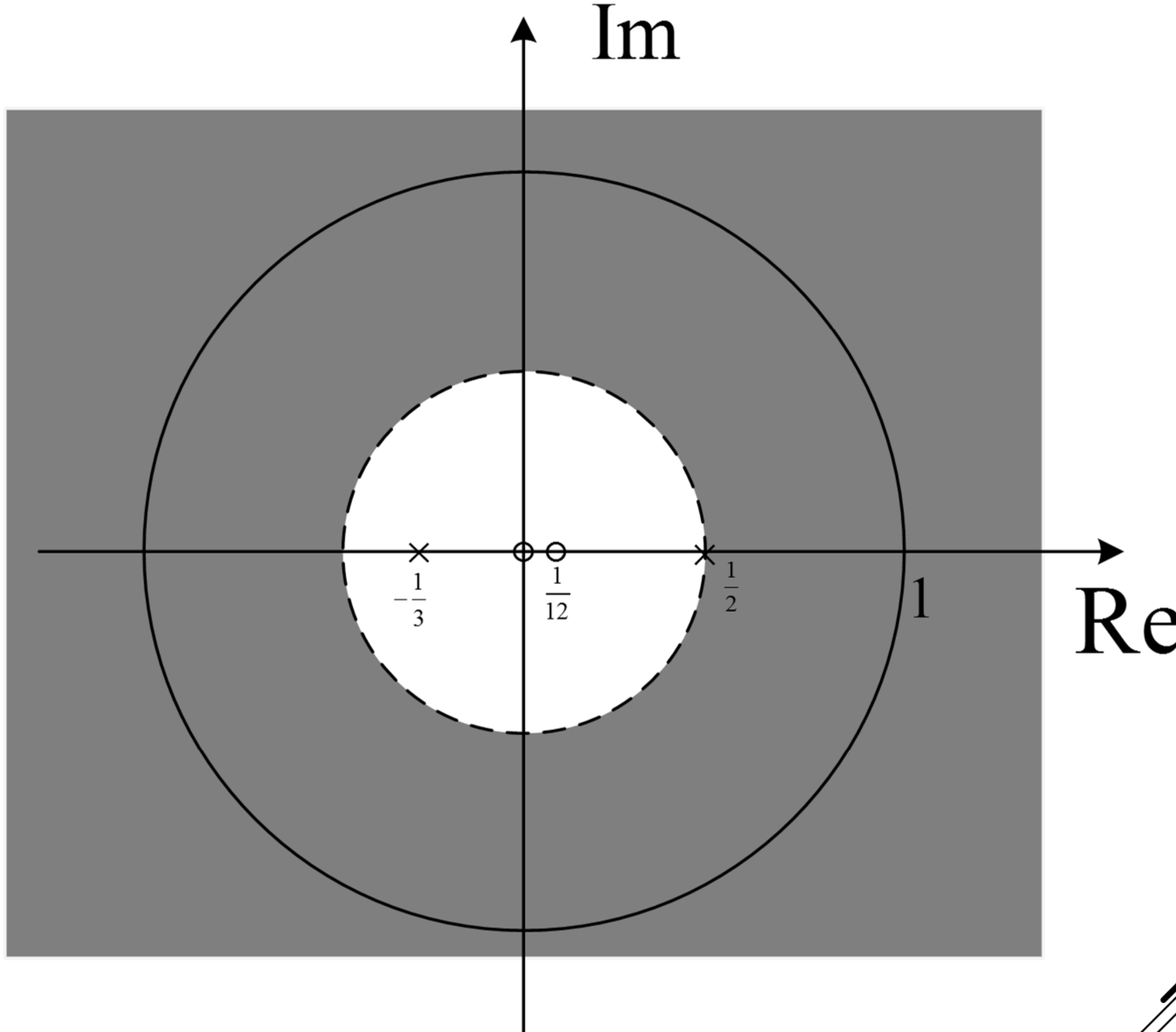
$$|z|>\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |z|>\frac{1}{3}$$

❖ Diagrama de polos, zeros e a RDC:





$$|z| > \frac{1}{2}$$



$$(4) \qquad x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \ \ (\text{sequência bilateral})$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{3}$$

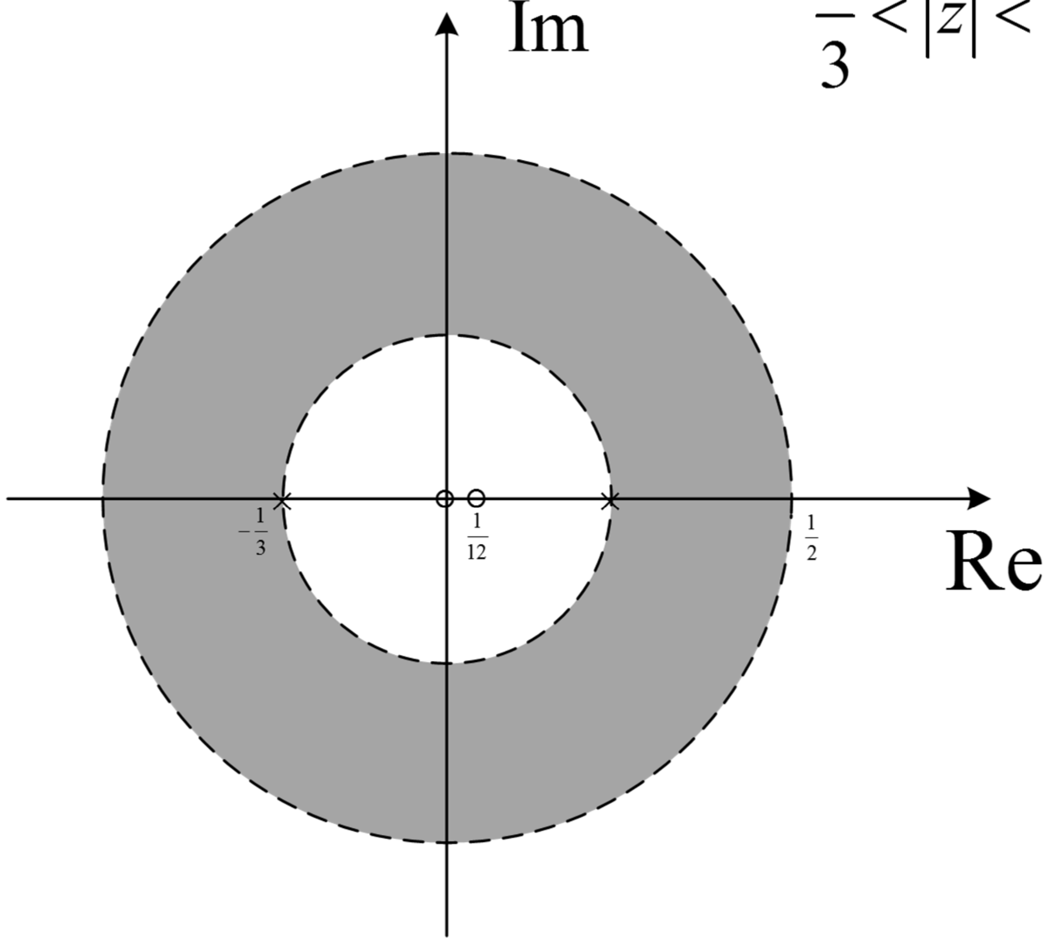
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

❖ Diagrama de polos, zeros e a RDC:

$$\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$



$$(4) \qquad x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{sequência truncada de comprimento finito})$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1-\left(az^{-1}\right)^n}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}$$

$$\left|az^{-1}\right| < 1 \longrightarrow |z| < |a|$$

A RDC inclui todo o plano "z", com exceção da origem $(z=0)$

$$(5) \qquad x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad (\text{sequência com RDC sem superposição})$$

$$X(z)=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}}_{|z|<\frac{1}{3}}$$

- ❖ Podemos observar que não existe superposição entre

$$|z|>\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |z|<\frac{1}{3}$$

- ❖ concluímos que x[n] não tem representação da transformada Z e nem transformada de Fourier.

❖ Alguns pares de transformada Z

Tabela 5.2 Pares da transformada z (unilateral)

Nº	$x[n]$	$X[z]$
1	$\delta[n-n]$	z^{-k}
2	$u[n]$	$\dfrac{z}{z-1}$
3	$nu[n]$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
4	$n^2u[n]$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	$n^3u[n]$	$\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
6	$\gamma^n u[n]$	$\dfrac{z}{z-\gamma}$
7	$\gamma^{n-1}u[n-1]$	$\dfrac{1}{z-\gamma}$
8	$n\gamma^n u[n]$	$\dfrac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}$
9	$n^2\gamma^n u[n]$	$\dfrac{\gamma z(z+\gamma)}{(z-\gamma)^3}$
10	$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{\gamma^m m!}\gamma^n u[n]$	$\dfrac{z}{(z-\gamma)^{m+1}}$
11a	$\|\gamma\|^n \cos \beta n\, u[n]$	$\dfrac{z(z-\|\gamma\|\cos\beta)}{z^2-(2\|\gamma\|\cos\beta)z+\|\gamma\|^2}$
11b	$\|\gamma\|^n \operatorname{sen} \beta n\, u[n]$	$\dfrac{z\|\gamma\|\operatorname{sen}\beta}{z^2-(2\|\gamma\|\cos\beta)z+\|\gamma\|^2}$

6.3 Propriedades da transformada Z

1) A RDC é um anel centrado na origem;

2) A RDC não pode incluir nenhum polo;

3) Se x[n] for uma sequência de duração finita então a RDC é todo o plano "z" exceto possivelmente em $z = 0$ e $z = \infty$;

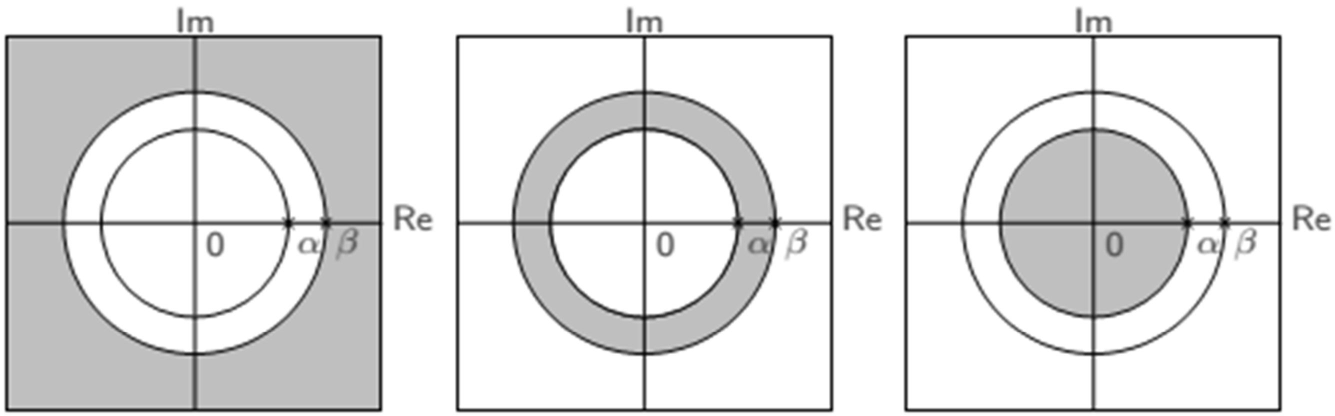
4) Se x[n] for uma sequência lateral à direita a RDC estende-se para fora do polo mais afastado da origem;

5) Se x[n] for uma sequência lateral à esquerda a RDC estende-se para o interior do polo mais próximo da origem;

6) Se x[n] for uma sequência bilateral a RDC será um anel no plano "z", limitado no interior e exterior por um polo e não contendo polos no seu interior.

Resumindo

❖ Seja uma transformada Z com polos em $z = \alpha$ e $z = \beta$. As RDC's possíveis são:



a) sequência de lado direito

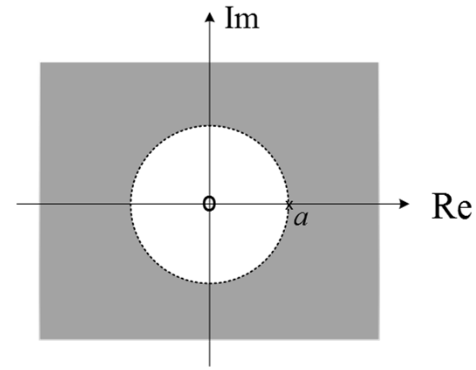
b) sequência bilateral

c) sequência de lado esquerdo

$x[n] = a^n u[n]$ (sequência unilateral à direita ao causal)

$$\boxed{a^n u[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{z-a}, \; |z| > |a|}$$

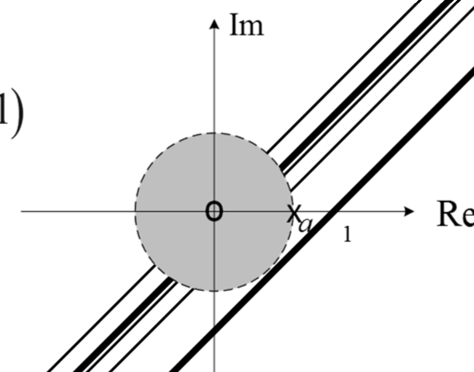
$|z| > |a|$



$x[n] = -a^n u[-n-1]$ (sequência unilateral à esquerda ou anticausal)

$$\boxed{-a^n u[-n-1] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|}$$

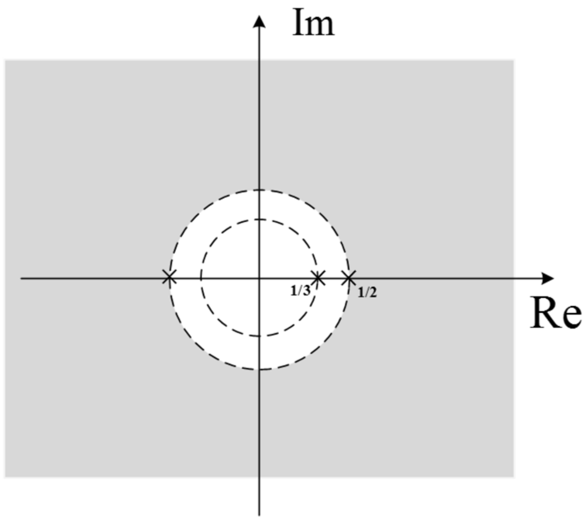
$|z| < |a|$



- Sinais diferentes podem ter a mesma expressão algébrica da transformada z
- Uma transformada z somente é completamente definida se especificarmos
    I. A expressão algébrica
    II. A região de convergência - RDC

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\ (\text{soma de duas sequências unilaterais à direita ou causais})$$

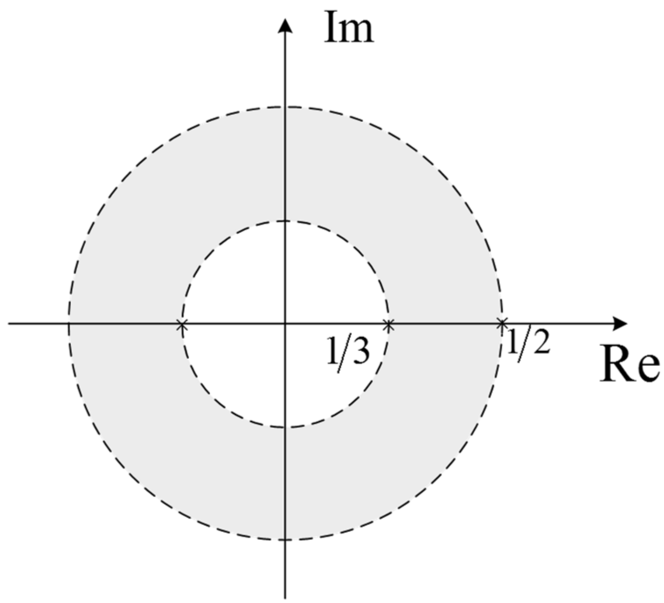
$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z+\frac{1}{3}}=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)},\quad |z|>\frac{1}{2}\quad \text{e}\quad |z|>\frac{1}{3}$$



$$|z|>\frac{1}{2}$$

$$x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \ \ \text{(sequência bilateral)}$$

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z+\frac{1}{3}}+\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}, \qquad \frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$



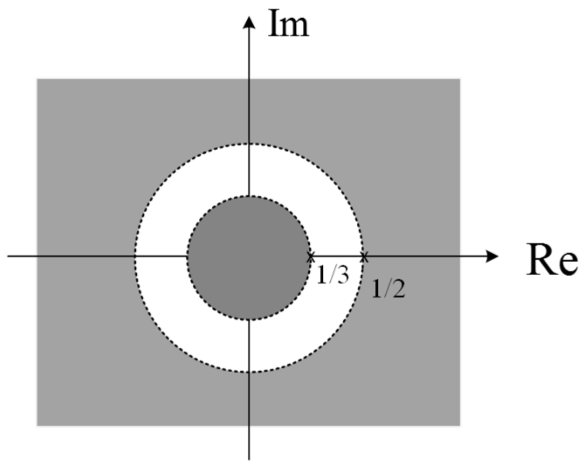
$$\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$ (sequência com RDC sem superposição)

$$X(z)=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}}_{|z|<\frac{1}{3}}$$

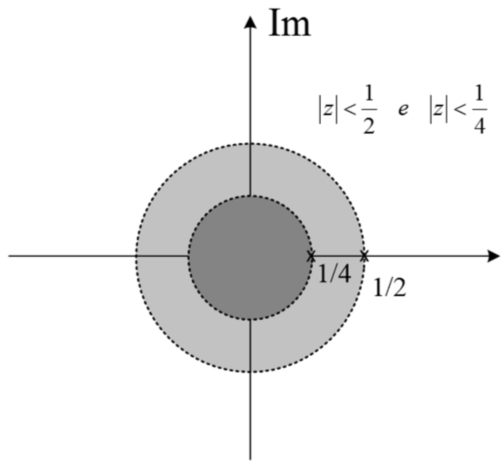
$$\boxed{a^n u[-n-1] \Leftrightarrow -\frac{z}{z-a}, \quad |z|<a}$$

Podemos observar que não existe superposição entre $|z|>1/2$ e $|z|<1/3$ concluímos que $x[n]$ não tem representação da transformada Z.



$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[-n-1] \quad \text{(sequência unilateral à esquerda ou anticausal)}$$

$$X(z)=-\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z|<\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{|z|<\frac{1}{4}}=-\frac{z}{z-0,5}+\frac{z}{z-0,25}$$



$$|z|<\frac{1}{4}$$

- Exemplo 1: Determine a transformada z de

$$x[n] = 0,9^n u[n] + 1,2^n u[-n-1]$$

$$\begin{aligned} x[n] &= 0,9^n u[n] + 1,2^n u[-n-1] \\ &= x_1[n] + x_2[n] \end{aligned}$$

$$X_1(z) = \frac{z}{z-0,9}, \quad |z| > 0,9$$

$$X_2(z) = \frac{-z}{z-1,2}, \quad |z| < 1,2$$

$$\begin{aligned} X(z) &= X_1(z) + X_2(z) \\ &= \frac{z}{z-0,9} - \frac{z}{z-1,2} \\ &= \frac{-0,3z}{(z-0,9)(z-1,2)}, \qquad 0,9 < |z| < 1,2 \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada z

1) Deslocamento à direita (atraso)

$$x[n] \Leftrightarrow X(z)$$

(1) $\boxed{y[n] = x[n-m]u[n-m]}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m]u[n-m]z^{-n}$$

Fazendo $p = n - m$

$$Y(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]u[p]z^{-m-p}$$

$$Y(z) = z^{-m}\sum_{p=0}^{\infty} x[p]z^{-p}$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{1}{z^m}X(z)}$$

(2) $\boxed{y[n] = x[n-m]u[n]}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m]u[n]z^{-n}$$

Fazendo $r = n - m$

$$Y(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]u[m+r]z^{-m-r}$$

$$Y(z) = z^{-m}\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]u[m+r]z^{-r}$$

$$Y(z) = z^{-m}\sum_{r=-m}^{\infty} x[r]z^{-r}$$

$$Y(z) = z^{-m}\sum_{r=-m}^{-1} x[r]z^{-r} + z^{-m}\sum_{r=0}^{\infty} x[r]z^{-r}$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{1}{z^m}\sum_{r=1}^{m} x[-r]z^{r} + \frac{1}{z^m}X(z)}$$

$$(3)\ \ y[n] = x[n-1]u[n]$$

$$Y(z) = \frac{1}{z}X(z) + x[-1]$$

$$(4)\ \ y[n] = x[n-2]u[n]$$

$$Y(z) = \frac{1}{z^2}X(z) + \frac{1}{z}x[-1] + x[-2]$$

$$(5)\ \ y[n] = x[n-3]u[n]$$

$$Y(z) = \frac{1}{z^3}X(z) + \frac{1}{z^2}x[-1] + \frac{1}{z}x[-2] + x[-3]$$

2) Deslocamento à esquerda (adianto)

(1) $\boxed{y[n] = x[n+m]u[n]}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m]u[n]z^{-n}$$

Fazendo $p = n+m$

$$Y(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]u[p-m]z^{m-p}$$

$$Y(z) = z^m \sum_{p=m}^{\infty} x[p]z^{-p}$$

$$Y(z) = z^m \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} x[p]z^{-p} - \sum_{p=0}^{m-1} x[p]z^{-p} \right\}$$

$$Y(z) = z^m \sum_{p=0}^{\infty} x[p]z^{-p} - z^m \sum_{p=0}^{m-1} x[p]z^{-p}$$

$$Y(z) = z^m X(z) - z^m \sum_{p=0}^{m-1} x[p]z^{-p}$$

(2) $\boxed{y[n] = x[n+1]u[n]}$

$$Y(z) = zX(z) - zx[0]$$

(3) $\boxed{y[n] = x[n+2]u[n]}$

$$Y(z) = z^2 X(z) - z^2 x[0] - zx[1]$$

(3) $\boxed{y[n] = x[n+3]u[n]}$

$$Y(z) = z^3 X(z) - z^3 x[0] - z^2 x[1] - zx[2]$$

3) Derivada primeira

$$Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Prova:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\left(x[n] z^{-n}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{-n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-n) z^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-nx[n]\right) z^{-n} z^{-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(nx[n]\right) z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dt} = -z^{-1} Z\{nx[n]\} \longrightarrow \boxed{Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dt}}$$

4) Derivada segunda

$$\frac{d^2X(z)}{dz^2}$$

Prova:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-n)z^{-n-1}$$

$$\frac{d^2X(z)}{dz^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-n)(-n-1)z^{-n-2}=z^{-2}(-1)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{x[n]n(n+1)\}z^{-n}$$

$$\frac{d^2X(z)}{dz^2}=z^{-2}(-1)^2 Z\{x[n]n(n+1)\} \longrightarrow \boxed{Z\{x[n]n(n+1)\}=(-1)^2 z^2\frac{d^2X(z)}{dz^2}}$$

$$n(n+1)=2C_{n+1}^{n-1}$$

$$\frac{d^{(p)}X(z)}{dz^{(p)}} = z^{-p}(-1)^p Z\left\{x[n]pC\ \right\} \longrightarrow \boxed{Z\left\{x[n]pC_{n+p-1}^{n-1}\right\} = (-1)^p z^p \frac{d^2X(z)}{dz^2}}$$

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1) = pC_{n+p-1}^{n-1}$$

Soluções de Equações Diferenças pela Transformada Z

EQUAÇÕES DIFERENÇA

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \ldots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \ldots + b_N x[n-M]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$\mapsto a_1, a_2, \ldots, a_n \;\; e \;\; b_1, b_2, \ldots, b_m$ são constantes

$\mapsto y[n]$ e a saída

$\mapsto x[n]$ é a entrada.

Sabemos que:

$$y[n] = x[n-m]u[n] \quad \Longleftrightarrow Y(z) = \frac{1}{z^m}\sum_{r=1}^{m} x[-r]z^r + \frac{1}{z^m}X(z)$$

Aplicando a transformada Z em ambos os lados da equação, temos:

$$Z\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Z\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k Z\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left\{\frac{1}{z^k}\sum_{r=1}^{k} y[-r]z^r + \frac{1}{z^k}Y(z)\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \left\{\frac{1}{z^k}\sum_{r=1}^{k} x[-r]z^r + \frac{1}{z^k}X(z)\right\}$$

6.4 A transformada Z inversa

6.4.1 Por inspeção

- ❖ Usara a tabela fazendo o reconhecimento da sequência

6.4.2 Expansão em frações parciais

- ❖ Algumas vezes H(z) não é possível ser dado explicitamente em uma tabela, mas é possível obter uma expressão alternativa para H(z) como uma soma de termos mais simples;

- ❖ Esse é o caso para qualquer função racional, desde que possamos obter uma expansão em frações parciais e facilmente identificar a correspondente sequência correspondente aos termos individuais.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}, \quad M < N$$

Exemplo. Encontrara a transformada Z inversa de:

$$(1) \qquad X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$1=A\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)+B\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)$$

$$z=\frac{1}{4}\rightarrow A=-1$$

$$z=\frac{1}{2}\rightarrow B=2$$

$$X(z)=-\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

$$(2) \qquad X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z|>1$$

Devemos fazer a divisão

$$X(z) = 2 + \frac{-1+\frac{1}{5}z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$X_1(z) = \frac{-1+5z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

$$-1+5z^{-1} = A\left(1-z^{-1}\right) + B\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$A = -9$$

$$B = 8$$

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}$$

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}$$

$$2 \xrightarrow{z} 2\delta[n]$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \xrightarrow{z} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} \xrightarrow{z} u[n]$$

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n]$$

$$(3) \qquad X(z) = \frac{z(z+2)}{(z-0,2)(z+0,6)}$$

- Exemplo. Determine a transformada inversa z de: $X(z)=\dfrac{-z(z+0,4)}{(z-0,8)(z-2)}$

$$X(z)=\frac{-z(z+0,4)}{(z-0,8)(z-2)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-z+0,4}{(z-0,8)(z-2)}=\frac{1}{z-0,8}-\frac{2}{z-2}$$

$(a)\quad |z|>2$

$$X(z)=\frac{z}{z-0,8}-2\frac{z}{z-2}$$

Como $|z|>2$ os dois termos correspondem a sequências causais

$$\mathrm{x}[n]=\left[0,8^n-2(2)^n\right]u[n]$$

$(b) \quad |z| < 0,8$

$$X(z) = \frac{z}{z-0,8} - 2\frac{z}{z-2}$$

Como $|z| < 0,8$ os dois termos correspondem a sequências anticausais

$$x[n] = \left[-0,8^n + 2(2)^n\right] u[-n-1]$$

$(c) \quad 0,8 < |z| < 2$

$$X(z) = \frac{z}{z-0,8} - 2\frac{z}{z-2}$$

Como $0,8 < |z| < 2,$ a parte de $X(z)$ que corresponde ao polo $0,8$ é uma sequência causal, e a parte que corresponde ao polo 2 é uma sequência anticausal

$$x[n] = 0,8^n u[n] + 2(2)^n u[-n-1]$$

Exemplo. Determine a transformada inversa de:

$$(a)\quad \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

$$(b)\quad \frac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

$$(c)\quad \frac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)}$$

$$(a)\quad X(z)=\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

$$X(z)=\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}=\frac{3}{z-2}+\frac{5}{z-3}$$

$$x[n]=\left(3\times 2^{n-1}+5\times 3^{n-1}\right)u[n-1]$$

- Se expandirmos X(z) diretamente em frações parciais, sempre iremos obter uma resposta que é multiplicada por u[n-1];
- Essa forma, além de deselegante, também é inconveniente;
- Preferimos a forma que contém u[n].
- Podemos atingir esse objetivo expandindo X(z)/z, frações parciais modificada

- Determinando o item (a) utilizando dois procedimentos:

1º Procedimento:

$$X(z) = \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

$$X(z) = \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)} = \frac{3}{z-2} + \frac{5}{z-3}$$

$$x[n] = \left(3 \times 2^{n-1} + 5 \times 3^{n-1}\right) u[n-1]$$

2º Procedimento:

$$X(z) = \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)} = -\frac{19/6}{z} + \frac{3/2}{z-2} + \frac{5/3}{z-3}$$

Multiplicando ambos os lados por z, temos:

$$X(z) = -\frac{19}{6} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-2} + \frac{5}{3}\frac{z}{z-3}$$

$$x[n] = -\frac{19}{6}\delta[n] + \left(\frac{3}{2}2^{n} + \frac{5}{3}3^{n}\right)u[n]$$

Exercícios: Determine a transformada inversa, utilizando o 2º procedimento:

$$(a)\quad \frac{z(2z-1)}{(z-1)(z+0,5)}$$

$$(b)\quad \frac{1}{(z-1)(z+0,5)}$$

$$(c)\quad \frac{9}{(z+2)(z-0,5)^2}$$

$$(d)\quad \frac{5z(z-1)}{z^2-1,6z+0,8}$$

Determinação da transformada inversa pela fórmula integral

$$X(z) = F\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\text{Fazendo } \; z = re^{j\omega}$$

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n}$$

$$X\left(re^{j\omega}\right) = Z\left\{x[n] r^{-n}\right\}$$

$$\text{Fazendo } r = 1$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = Z\{x[n]\} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

- Portanto, a transformada de Fourier de tempo discreto pode ser encontrada fazendo

$$z = e^{-j\omega}$$

- O inverso nem sempre é válido

$$X\left(re^{j\omega}\right) = Z\left\{x\left[n\right]r^{-n}\right\}$$

$$\Downarrow$$

Pode fazer com que alguns sinais se tornem convergentes

Demonstração da fórmula de inversão

$$X\left(re^{j\omega}\right)=\mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$$

$$x[n]r^{-n}=\mathcal{F}^{-1}\left\{X\left(re^{j\omega}\right)\right\}$$

$$x[n]=r^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(re^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(re^{j\omega}\right)\left(re^{j\omega}\right)^{n}d\omega$$

Fazendo $z=re^{j\omega}$

$$dz=jre^{j\omega}d\omega$$

$$d\omega=\frac{1}{jre^{j\omega}}d\omega=\frac{1}{jz}dz$$

Variando ω de 0 a 2π, então z varia em uma circuferência de raio igual a r, ou seja, $|z|=r\in RDC$ de $X(z)$.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\oint X(z)z^{n}\frac{dz}{jz}$$

$$\boxed{x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz}$$

Essa equação pode ser resolvida pelo Teorema dos Resíduos

Soluções de Equações Diferenças pela Transformada Z