# Controle de Sistemas Contínuos I


DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA

Prof. Dr. Walterley A. ***Moura***

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

# MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DINÂMICOS

# Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos

- Introdução
- Função de Transferência e de Resposta Impulsiva
- Modelo Matemático
- Diagrama de Blocos
- Diagrama de Fluxo de Sinais

# Introdução

- Modelagem e Análise de Características Dinâmicas de Sistemas
  - Conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema.
  - Vários modelos podem ser construídos para um determinado sistema.
  - A dinâmica de muitos sistemas é representada por meio de equações diferenciais obtidas através de leis físicas (Newton, Kirchhoff, Hooke, entre outras leis).
- Sistemas Lineares Invariantes no Tempo
- Sistemas Lineares Variante no Tempo
- Sistema não Lineares e Variante no tempo

# Função de Transferência
# Transformada da Laplace

**Função de transferência** de um sistema representado por equações diferenciais lineares invariantes no tempo é definida como a relação entre a transformada de Laplace do sinal da saída e a transformada de Laplace do sinal de entrada, *na hipótese de que todas as condições iniciais são nulas* (estado nulo).

Considere um sistema Linear Invariante no Tempo:

$$a_n y(t) + a_{n-1} y'(t) + a_{n-2} y''(t) + \ldots + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_0 y^{(n)}(t) =$$

$$b_m x(t) + b_{m-1} x'(t) + b_{m-2} x''(t) + \ldots + b_1 x^{(m-1)}(t) + b_0 x^{(m)}(t), \;\; n \geq m$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \;\; e \;\; b_1, b_2, \ldots, b_m$ são constantes

$x \rightarrow$ representa a entrada

$y \rightarrow$ representa a saída

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (\text{estado nulo})$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros, temos:

$$\text{Função de Transferência} = G(s) = \left.\frac{\mathcal{L}[saída]}{\mathcal{L}[entrada]}\right|_{\text{estado nulo}}$$

$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}, \quad n > m$$

$n \rightarrow$ ordem do sistema

- A função de transferência é uma relação de entrada-saída;
- A relação de entrada-saída de um sistema é uma descrição externa do sistema;
- A função de transferência é uma função racional, ou seja, é uma fração composta por dois polinômios B(s) e A(s), onde B(s) é o numerador e A(s) é o denominador.

- Se G(s) = 0 , temos as seguintes definições:

i) As raízes de **B(s)** são denominadas de: **zeros** da função de transferência;

ii) As raízes de **A(s)** são denominadas de: **polos** da função de transferência;

- Usando-se o conceito de função de transferência, é possível representar a dinâmica do sistema por equações algébricas em ***s***;

- **Ordem do sistema**: é a mais alta potência de ***s*** no dominador da função de transferência.

$G(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$, se $G(s)=0$, temos

$B(s)=0 \Rightarrow$ raízes de $B(s)$ são denominados *zeros* da função de transferência.

ou

$A(s)=0 \Rightarrow$ raízes de $A(s)$ são denominados *polos* da função de transferência.

$\text{grau}\{A(s)\}=n \Rightarrow$ ordem da função de transferência.

$A(s) \Rightarrow$ polinômio característico

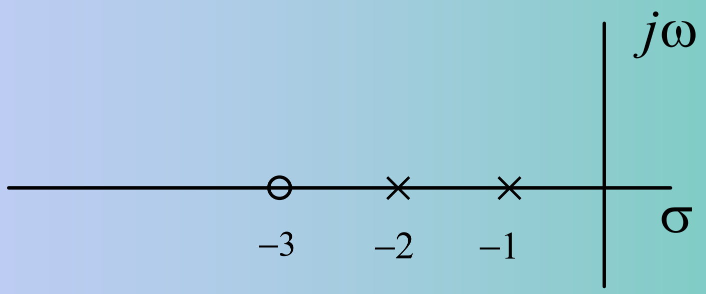
as raízes dessa equação determina o caráter da resposta temporal

# Transformada da Laplace

- **Exemplo 1**: Seja a função de transferência dada abaixo:

$$\frac{Y(s)}{C(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

  - Diagrama de polos e zeros no plano "s":




$\times \rightarrow$ polo

$\text{o} \rightarrow$ zero

**a)** Encontrando a resposta para entrada em **degrau unitário**:

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Aplicando o método de Heaviside, temos:

$$A = \left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$B = \left.\frac{s+3}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -2$$

$$C = \left.\frac{s+3}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$A,\ B,\ C \rightarrow$ são denominados de "resíduos"

- Resposta no tempo a entrada degrau unitário:

$$Y(s) = \frac{3/2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$
$$y(t) = \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Trabalho: Fazer gráfico $y(t) \times t,\ t > 0.$

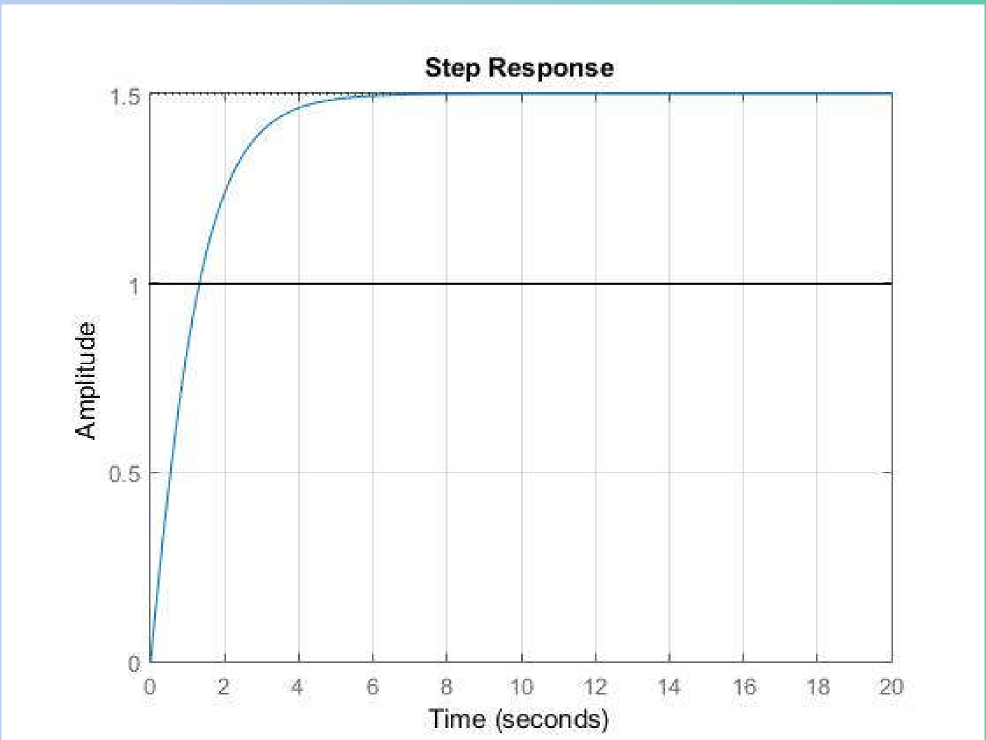
- Cálculo do valor final da saída:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right) = \frac{3}{2}$$
$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{s+3}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} = \frac{3}{2}$$

- Cálculo do valor inicial da saída:

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s)$$
$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right) = 0$$
$$\lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\frac{s+3}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} = 0$$

$$y(t)=\frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$



**b)** Encontrando a resposta para entrada em **rampa unitária**:

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

Aplicando o método de Heaviside, temos:

$$A = \frac{d}{ds}\left[ s^2 \frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} = -\frac{7}{4}$$

$$B = \left. \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$C = \left. \frac{s+3}{s^2(s+2)} \right|_{s=-1} = 2$$

$$D = \left. \frac{s+3}{s^2(s+1)} \right|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$A,\ B,\ C,\ D \ \rightarrow$ "resíduos"

$$Y(s) = -\frac{7}{4}\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{3}{2}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Trabalho: Fazer gráfico $y(t) \times t,\ t > 0.$

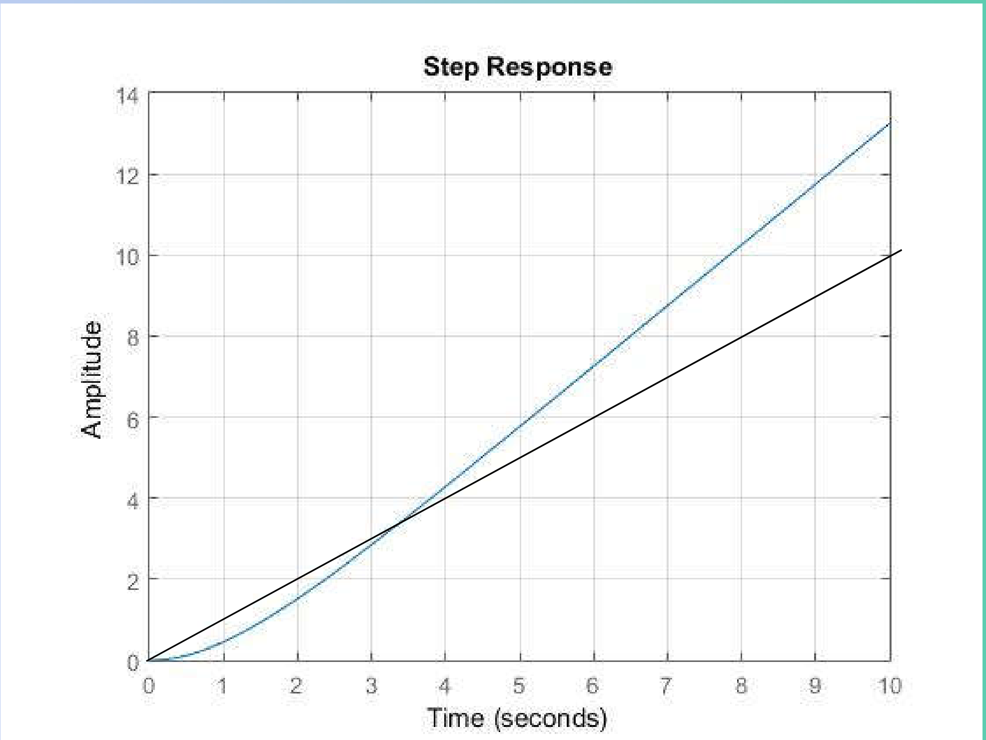
$\mapsto$ Cálculo do valor final da saída:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to 0} \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \infty$$

$\mapsto$ Cálculo do valor inicial da saída

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{3}{2}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$



- Exemplo 2: Seja a função de transferência dada abaixo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+13}$$

- Cálculo dos polos e zeros:

$$\mapsto Zeros:$$

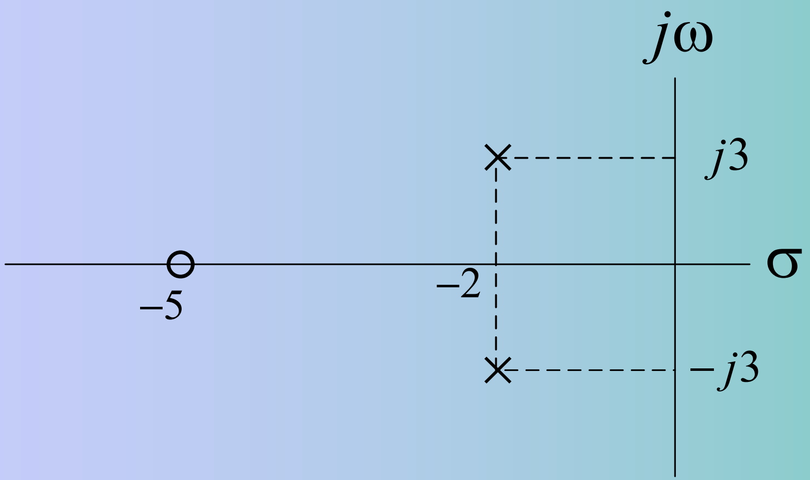
$$s+5=0 \;\rightarrow\; s=-5$$

$$\mapsto Polos:$$

$$s^2+4s+13=0$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm j3$$

- Diagrama de polos e zeros no plano “s”:




× → polo
o → zero

a) Encontrando a resposta para entrada em degrau unitário.

**1º Método:**

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{s+5}{s^2+4s+13}$$

$$Y(s)=\frac{s+5}{s\left(s^2+4s+13\right)}=\frac{A}{s}-\frac{Bs+C}{s^2+4s+13}$$

$$A=\left.\frac{s+5}{s^2+4s+13}\right|_{s=0}=\frac{5}{13}$$

$$B=-\frac{5}{13}$$

$$C=-\frac{7}{13}$$

$$Y(s)=\frac{5}{13}\frac{1}{s}+\frac{-s\frac{5}{13}-\frac{7}{13}}{s^2+4s+13}=\frac{1}{13}\left(\frac{5}{s}-\frac{5s+7}{s^2+4s+13}\right)$$

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{s+5}{s^2+4s+13}$$

$$Y(s)=\frac{1}{13}\left(\frac{5}{s}-\frac{5s+7}{s^2+4s+13}\right)$$

$$s^2+4s+13=(s+2)^2+9$$

$$\frac{5s+7}{(s+2)^2+9}=5\frac{s+\frac{7}{5}}{(s+2)^2+9}=5\frac{s+2+\frac{7}{5}-2}{(s+2)^2+9}=5\frac{(s+2)-\frac{3}{5}}{(s+2)^2+9}$$

$$=5\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+5\left(-\frac{3}{5}\right)\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$=5\frac{s+2}{(s+2)^2+9}-\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$Y(s)=\frac{1}{13}\left(\frac{5}{s}-5\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+\frac{3}{(s+2)^2+9}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{13}\left(5-5e^{-2t}\cos 3t+3e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t\right)$$

Valor final da saída

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\frac{5}{13}$$

Valor inicial da saída

$$\lim_{t\to 0} y(t)=0$$

**Trabalho:** Encontrar a resposta com entrada em rampa unitária, fazer o gráfico da resposta e calcular os valores inicial e final da saída.

b) Encontrando a resposta para entrada em degrau unitário.

**2º Método:**

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{s+5}{s^2+4s+13}$$

$$Y(s)=\frac{s+5}{s\left(s^2+4s+13\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-s_1}+\frac{C}{s_2},\quad s_1 \text{ e } s_2 \text{ são os polos}$$

$$s^2+4s+13=(s-s_1)(s-s_2)$$

$$s_1=-2+j3$$

$$s_2=-2-j3$$

$$s_1=s_2^*$$

$$A=\left.\frac{s+5}{s^2+4s+13}\right|_{s=0}=\frac{5}{13}$$

$$B=\left[\left(s-s_1\right)\frac{s+5}{s\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right)}\right]_{s=s_1}=\left[\frac{s+5}{s\left(s-s_2\right)}\right]_{s=s_1}=\frac{s_1+5}{s_1\left(s_1-s_2\right)}$$

$$=\frac{-2+j3+5}{(-2+j3)(-2+j3+2+j3)}=\frac{3+j3}{(2-j3)\,j6}$$

$$C=\left[\left(s-s_2\right)\frac{s+5}{s\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right)}\right]_{s=s_2}=\left[\frac{s+5}{s\left(s-s_1\right)}\right]_{s=s_2}=\frac{s_2+5}{s_2\left(s_2-s_1\right)}$$

$$=\frac{-2-j3+5}{(-2-j3)(-2-j3+2-j3)}=-\frac{3-j3}{(2+j3)(-j6)}$$

Podemos observar que: $C=B^*$

$$Y(s)=\frac{5/13}{s}+\frac{0{,}1923\ +\ 0{,}0385j}{s+2-j3}+\frac{0{,}1923-0{,}0385j}{s+2+j3}$$

## Característica da função de transferência:

i) A função de transferência de um sistema é um modelo matemático no sentido de que se constitui um método operacional de expressar a equação diferencial que relaciona a variável de saída à variável de entrada;

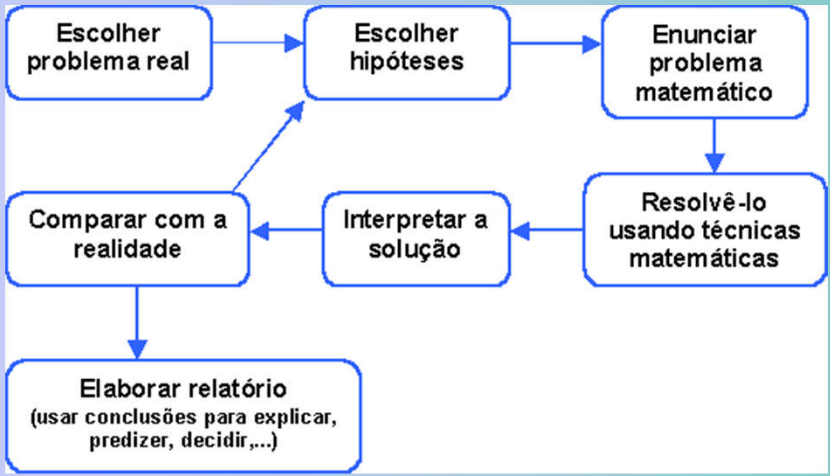
ii) A função de transferência é uma propriedade intrínseca do sistema, independe da magnitude e da natureza do sinal ou da função de excitação;

iii) A função de transferência inclui as unidades necessárias para relacionar o sinal de entrada ao sinal de saída; no entanto ela não fornece qualquer informação concernente a estrutura física do sistema;

iv) Se a função de transferência for conhecida, a saída ou resposta pode ser estudada para várias formas de entrada com vistas ao entendimento da natureza física do sistema;

v) A função de transferência não indica qual é o fenômeno que está sendo analisado.

# Passos para construir o modelo matemático e função de transferência




**Ciclo de Modelação**

1. Escrever a equação diferencial do sistema;
2. Aplicar a Transformada de Laplace na equação diferencial, supondo nulas as condições iniciais;
3. Estabelecer a relação entre a entrada e saída em função de "s". Essa relação é a Função de Transferência do sistema.

# Simplicidade *versus* Precisão

- Deve-se conciliar a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados da análise.
- Para a obtenção de um modelo matemático linear, as vezes torna-se necessário desprezar certas não linearidades e parâmetros distribuídos (desde que isto não cause impactos na precisão dos resultados).
- Geralmente, constrói-se um modelo simplificado que leva à uma percepção geral do sistema e, em seguida, são introduzidas sofisticações na modelagem.

# Tipos de sistema abordados

**Serão tratados exclusivamente os sistemas que mais interessam à engenharia:**

- sistemas mecânicos
- sistemas elétricos
- sistemas fluídicos
- sistemas térmicos
- sistemas híbridos

## Sistemas Mecânicos

São sistemas que possuem massas e/ou inércias, as quais armazenam energia cinética e potencial gravitacional, assim como elementos armazenadores de energia potencial elástica (molas) e dissipadores de energia mecânica (amortecedores).

## Sistemas Elétrico

São sistemas que constituídos por circuitos elétricos, que possuem componentes passivos (resistores, capacitores e indutores) e/ou elementos ativos (transistores, amplificadores operacionais, etc.).

## Sistemas Fluídicos

Estes sistemas são classificados em hidráulicos (quando o fluído de trabalho é um líquido) e pneumáticos (quando o fluído de trabalho é um gás). São constituídos por orifícios, restrições, válvulas (dissipadores de energia), reservatórios (armazenadores de energia) e tubulações e atuadores.

## Sistemas Térmicos

São sistemas que possuem resistência térmica para a transferência de calor (por condução, por convecção e por radiação).

## Sistemas Híbridos

São sistemas que combinam dois ou mais sistemas descritos anteriormente.

Exemplos:

1) Sistemas eletromecânicos - autofalantes
2) Sistemas fluidomecânicos - prensa hidráulica;
3) Sistemas termomecânicos - motor de combustão interna;
4) Sistemas eletrotérmicos - aquecedor elétrico de água.

# Classificação dos sistemas dinâmicos

Os sistemas dinâmicos serão classificados de acordo com vários critérios.

1) **Sistemas com parâmetros <u>concentrados</u> e com parâmetros <u>distribuídos</u>**

**Sistemas concentrados:** são sistemas cujos parâmetros não dependem das coordenadas espaciais, são sistemas que dependem apenas do tempo e são descritos por equações diferencias ordinárias (EDOs).

**Sistemas distribuídos:** são sistemas cujos parâmetros dependem das coordenadas espaciais, são sistemas que dependem das coordenadas espaciais e do tempo e são descritos por equações diferenciais parciais (EDPs).

## 2) Sistemas variantes e invariantes no tempo

Nas equações diferenciais os parâmetros do sistemas aparecem como coeficientes. Se os coeficientes forem constantes o sistema é invariante no tempo; se não, o sistema é denominado variante no tempo.

## 3) Sistema lineares e não lineares

Um sistema é linear se admite o princípio da superposição de efeitos. Considere o sistema abaixo:

$$r_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow c_1(t)$$

$$r_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow c_2(t)$$

$$r_3(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow c_3(t)$$

Seja $r_3(t) = a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t)$

$\mapsto$ Se o sistema for linear

$$c_3(t) = a_1 c_1(t) + a_2 c_2(t)$$

$\mapsto$ Se o sistema for não linear

$$c_3(t) \neq a_1 c_1(t) + a_2 c_2(t)$$

Para um sistema linear, respostas a diferentes excitações podem ser obtidas separadamente e depois combinadas, o que constitui o Princípio da Superposição.

## 4) Sistema ativos e passivos

Um sistema físico com fonte interna de energia é denominado ativo, caso contrário e passivo.

Exemplo: Circuito RLC sem fonte de tensão ou de corrente.

## 5) Sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto

- Se o sistema é submetido a uma entrada contínua no tempo, r(t), apresenta também uma saída contínua no tempo, c(t), e é denominado de sistema de tempo contínuo e a equação que representa o sistema é uma equação diferencial;

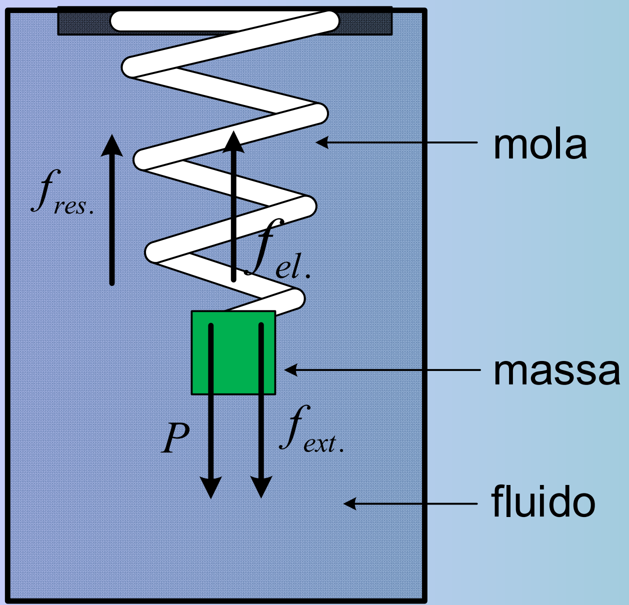
- Se o sistema é submetido a uma entrada discreta no tempo, $\{r_k\}$, apresenta uma saída discreta no tempo, $\{c_k\}$, e é denominada de sistema de tempo discreto e a equação que representa o sistema será constituído por equações diferenças finitas.

# Exemplos de modelagem matemáticas de sistemas lineares dinâmicos

1) Um objeto suspenso por uma mola e imerso em um fluído;

2) Circuito RLC;

# 1) Um objeto suspenso por uma mola e imerso em um fluído




Aplicando a lei de Hooke, temos:

i. Condição de equilíbrio: a mola está completamente alongada com a colocação do peso em sua extremidade

$$P = f_{elást.(\text{máx})}$$

$$mg = kL$$

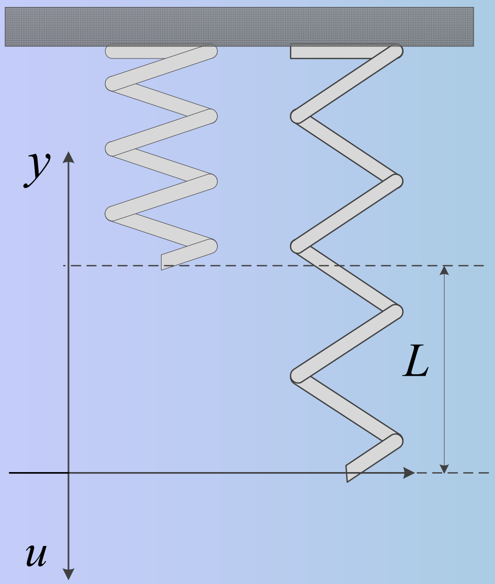
$k \Rightarrow$ constante elástica da mola

$L \Rightarrow$ máxima alongação da mola

$f_{rest.} = \gamma v \rightarrow$ força restauradora (fluído)

$f_{elást.} = kx \rightarrow$ força elástica (mola)

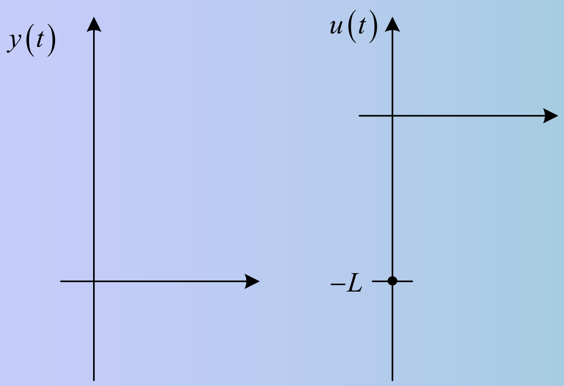
$f_{ext.} \rightarrow$ força externa




Seja y(t) o alongamento da mola em qualquer instante. Definimos uma nova função:

$$u(t) = y(t) - L$$
$$y(0) = 0$$
$$u(0) = -L$$

Aplicando a segunda lei de Newton, temos:




$$F_R = P + f_{ext.} + f_{elást.} + f_{rest.}$$
$$ma = mg + f_{ext.} - ky - \gamma v$$
$$my'' = mg - ky - \gamma y' + f_{ext.}$$

Escrevendo em função da variável u(t):

$$u = y - L$$

$$u' = y'$$

$$u'' = y''$$

$$my'' = mg - ky - \gamma y' + f_{ext.}$$

$$mu'' = mg - k\left(u + L\right) - \gamma u' + f_{ext.}$$

$$mu'' = mg - ku - kL - \gamma u' + f_{ext}$$

$$mu'' = \cancel{mg} - ku - \cancel{kL} - \gamma u' + f_{ext.}, \qquad mg = kL$$

$$mu'' = -ku - \gamma u' + f_{ext.}$$

Finalmente obtemos:

$$\boxed{m\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \gamma\frac{du(t)}{dt} + ku(t) = f_{ext.}(t)}$$

Entretanto, não é possível calcular a relação entre a entrada e a saída, ou seja:

$$\frac{saída(t)}{entrada(t)} = \frac{u(t)}{f_{ext.}(t)} = ???$$

**Observamos um sistema mesmo sendo linear e invariante no tempo não há possibilidade de encontrar uma relação de entrada-saída no domínio do tempo.**

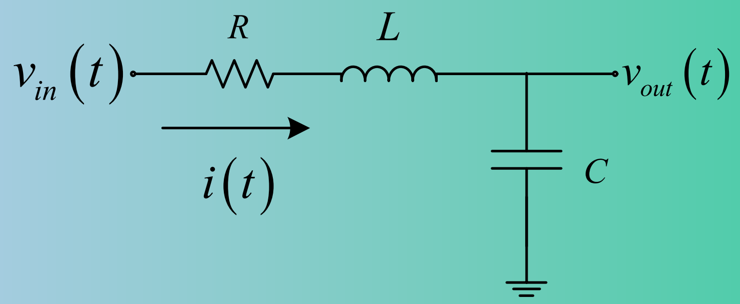
Aplicando a transformada de Laplace, em estado nulo, obtemos:

$$ms^2U(s)+\gamma sU(s)+kU(s)=F_{ext.}(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{U(s)}{F_{ext.}(s)}=\frac{1}{ms^2+\gamma s+k}}$$

$G(s) \Rightarrow$ função de transferência do sistema

## 2) Circuito RLC




$v_{in}(t) \rightarrow$ sinal de entrada

$v_{out}(t) \rightarrow$ sinal de saída

- Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões no domínio do tempo, temos:

$$v_{in}(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$$v_{out}(t) = v_C(t), \qquad v_R(t) = Ri(t), \qquad v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \qquad v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

$$\left.\begin{aligned} v_{in}(t) &= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \\ v_{out}(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{v_{out}(t)}{v_{in}(t)} = ??$$

**Observamos um sistema mesmo sendo linear e invariante no tempo não há possibilidade de encontrar uma relação entrada-saída no domínio do tempo.**

Aplicando a transformada de Laplace, em estado nulo, obtemos:

$$V_{in}(s) = V_R(s) + V_L(s) + V_C(s)$$

$$V_{out}(s) = V_C(s)$$

$$V_R(s) = RI(s), \;\; V_L(s) = LsI(s), \;\; V_C(t) = \frac{I(s)}{sC}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}}$$

# Integral de convolução

- A função de transferência G(s) de um sistema linear invariante no tempo é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- O sinal de saída é pode se r escrito como

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

- A transformada inversa de Laplace é dada pela ***integral de convolução***:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$\text{com } \; x(t) = 0 \; \text{ e } \; g(t) = 0 \; \text{ para } \; t < 0$$

# Resposta impulsional

- Considere a resposta de um sistema excitado por um impulso unitário, quando as condições iniciais são nulas:

- A transformada de Laplace do impulso unitário é igual a 1, ou seja, $X(s) = 1$

- Assim, temos: $Y(s) = G(s)$

- Daí obtemos: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(t)\right]$

- A reposta impulsional g(t) é a resposta de um sistema linear a um impulso unitário quando as condições iniciais são nulas;

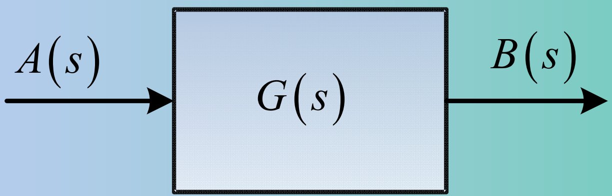
- Na prática, um pulso de duração extremamente curto, em comparação com as constantes de tempo do sistema, pode ser considerado um impulso.

# Diagrama de Blocos


- Sabemos que um sistema de controle tem vários componentes;
- Para mostrar as funções que são executadas por esses componentes normalmente utilizamos um diagrama chamado de ***diagrama de blocos****;*
- Mostraremos um método para a obtenção do diagrama de blocos para um sistema físico;
- Serão discutidas técnicas para a simplificação desses diagramas.

# Conceito de blocos

**Em Sistemas de Controle, para mostrar as funções desempehadas pelos componente do sistema utilizam-se os diagramas de blocos, que representa uma relação entre a entrada e saída.**




$A(s)$ é a entrada (excitação) e $B(s)$ é a saída

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \text{Função de Transferência}$$

Características do diagrama de blocos:

*i)* *É a representação ilustrada das funções desempenhadas pelos componentes e o fluxo de sinais;*

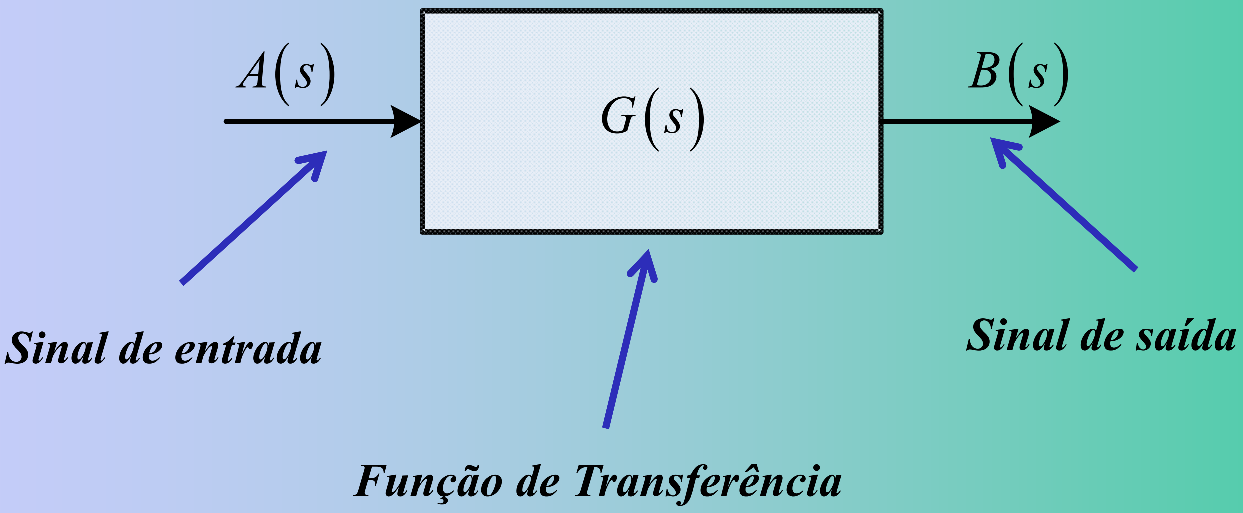
*ii)* *Todas a variáveis do sistema são conectadas uma às outras através dos blocos;*

*iii)* *O bloco representa uma operação matemática sobre o sinal de entrada;*

*iv)* *O diagrama de blocos mostra explicitamente uma propriedade unilateral;*

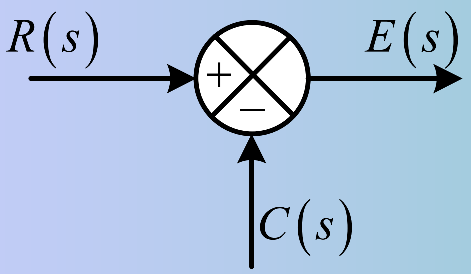
*v)* *As **funções de transferência** dos componentes são introduzidas nos blocos correspondentes.*

# Elementos de um diagrama de blocos



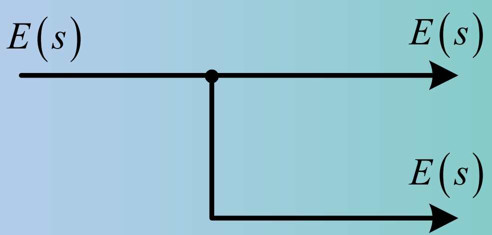

$$B(s) = G(s)\,A(s)$$

**Ponto de soma:** *símbolo que indica uma operação de soma*

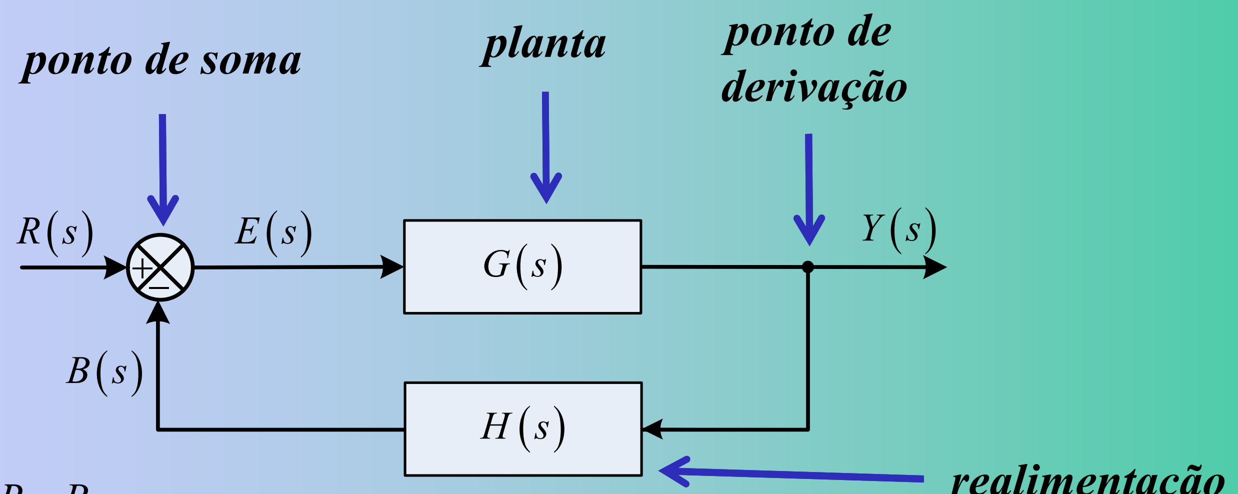



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

**Ponto de derivação:** *é o ponto a partir do qual o sinal proveniente de um bloco vai simultaneamente para outros blocos ou ponto de soma*



## Diagrama de blocos de um sistema malha fechada




$$E = R - B,$$

$$U = GE,$$

$$B = UH$$

$$U = G(R - HU) \;\rightarrow\; U = GR - GHU \rightarrow U + GHU = GR \;\rightarrow\; U(1 + GH) = GR$$

$$\boxed{FT = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}} \;\rightarrow\; \text{função de tranferência a malha fechada}$$

$$\boxed{GH} \;\rightarrow\; \text{função de tranferência malha aberta}$$

Onde:

$R(s) \rightarrow$ sinal de referência $(set\,\text{point})$

$Y(s) \rightarrow$ sinal de saída

$E(s) \rightarrow$ sinal de erro

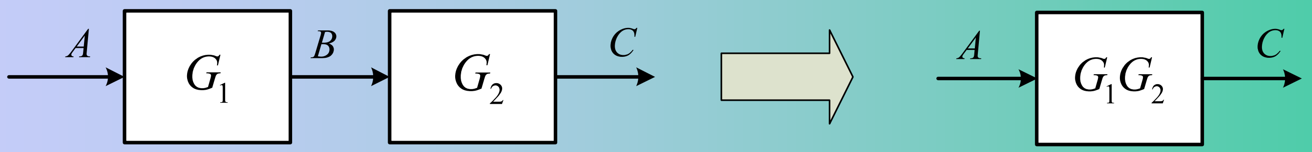
$G(s)H(s) \rightarrow$ função de transferência a malha aberta

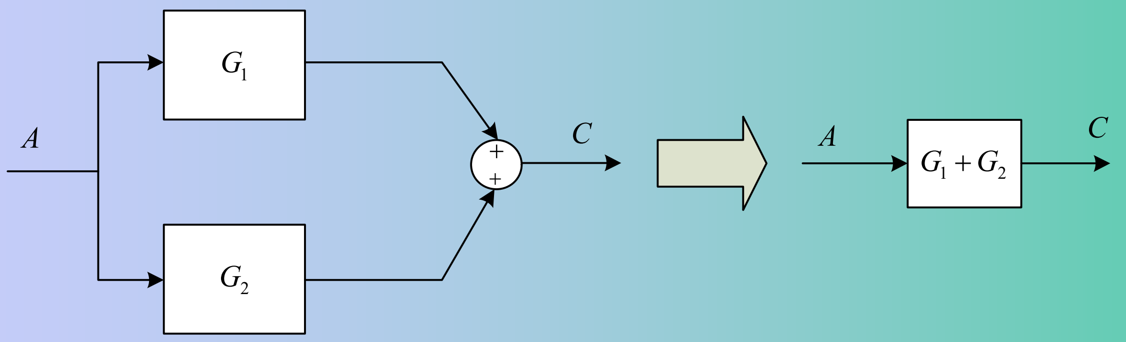
$\dfrac{Y(s)}{R(s)} \rightarrow$ função de transferência a malha fechada

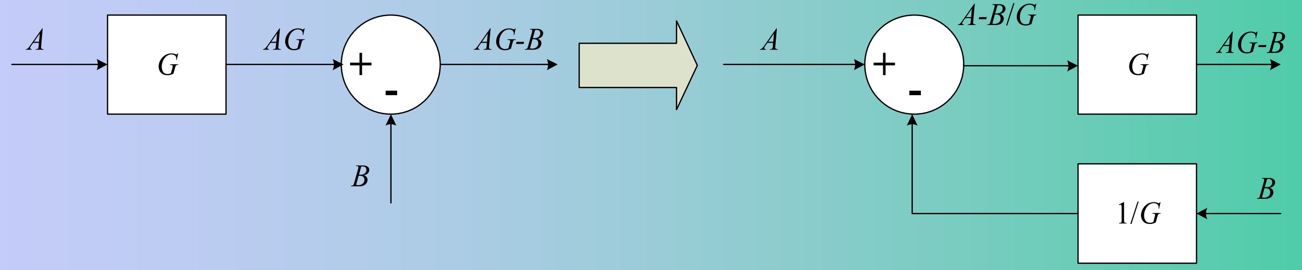
$H(s) \rightarrow$ função de transferência da realimentação

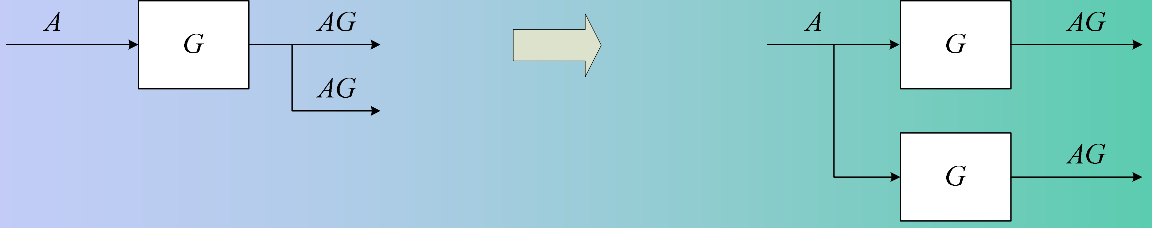
$G(s) \rightarrow$ função de transferência da planta

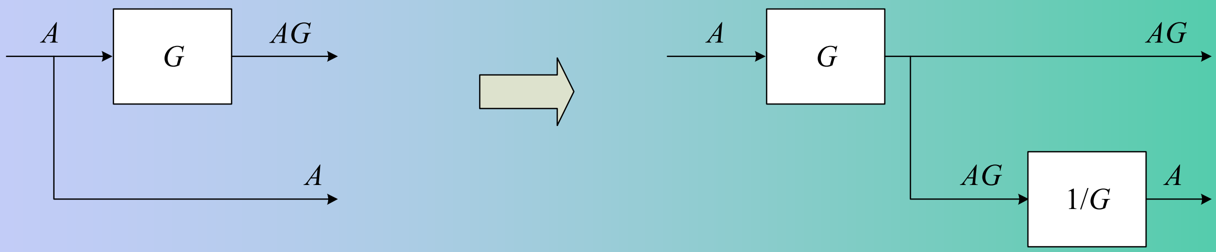
# Regras da Álgebra de Blocos

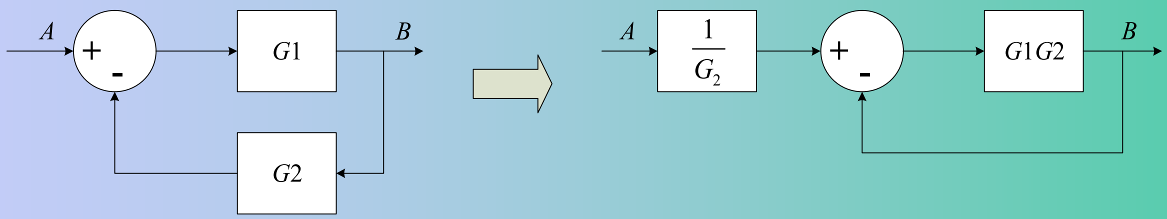


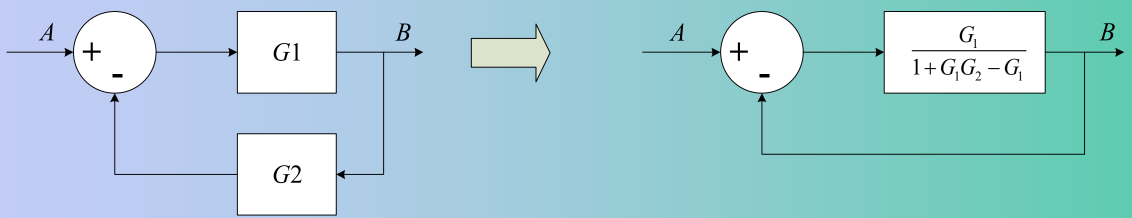



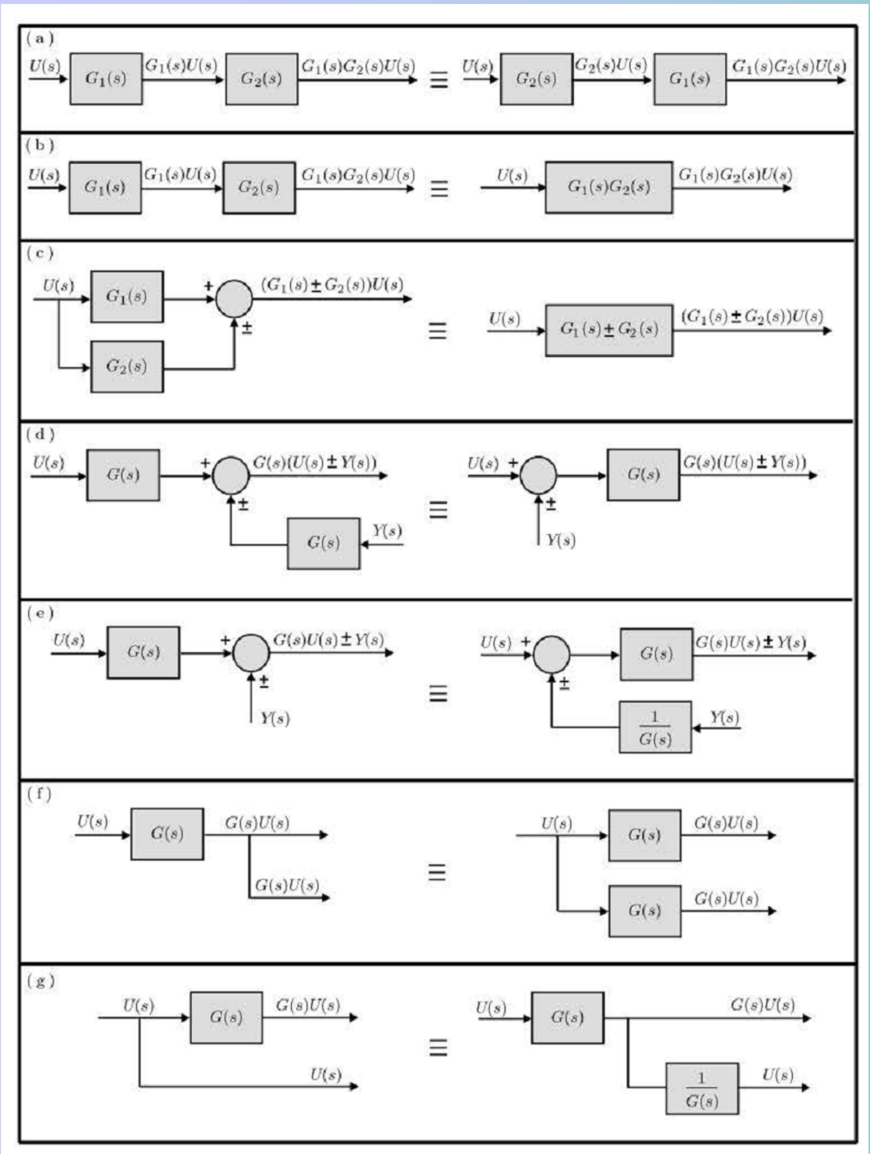



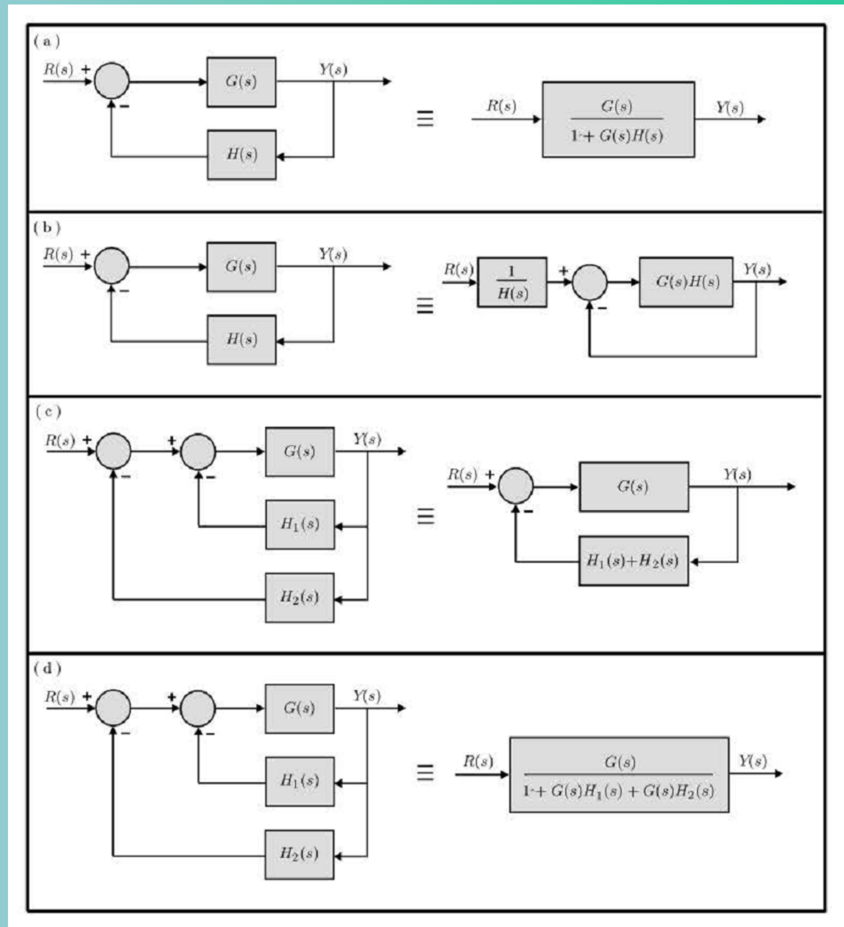

A
G
AG
AG
A
G
AG
G
AG


A
G
AG
A
A
G
AG
AG
1/G
A


A
+
-
G1
B
G2
A
1/G2
+
-
G1G2
B

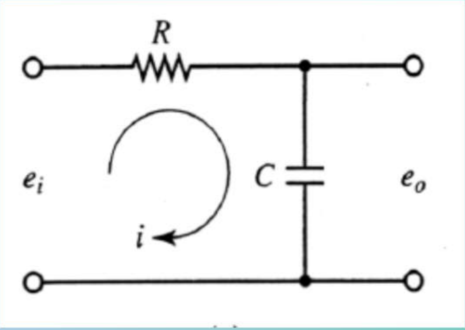

A
+
-
G1
B
G2
A
+
-
G1/(1+G1G2−G1)
B


(a)
U(s)
G1(s)
G1(s)U(s)
G2(s)
G1(s)G2(s)U(s)
≡
U(s)
G2(s)
G2(s)U(s)
G1(s)
G1(s)G2(s)U(s)
(b)
U(s)
G1(s)
G1(s)U(s)
G2(s)
G1(s)G2(s)U(s)
≡
U(s)
G1(s)G2(s)
G1(s)G2(s)U(s)
(c)
U(s)
G1(s)
G2(s)
(G1(s) ± G2(s))U(s)
≡
U(s)
G1(s) ± G2(s)
(G1(s) ± G2(s))U(s)
(d)
U(s)
G(s)
G(s)(U(s) ± Y(s))
G(s)
Y(s)
≡
U(s)
G(s)
G(s)(U(s) ± Y(s))
Y(s)
(e)
U(s)
G(s)
G(s)U(s) ± Y(s)
Y(s)
≡
U(s)
G(s)
G(s)U(s) ± Y(s)
1/G(s)
Y(s)
(f)
U(s)
G(s)
G(s)U(s)
G(s)U(s)
≡
U(s)
G(s)
G(s)U(s)
G(s)
G(s)U(s)
(g)
U(s)
G(s)
G(s)U(s)
U(s)
≡
U(s)
G(s)
G(s)U(s)
1/G(s)
U(s)


(a)
R(s)
G(s)
Y(s)
H(s)
≡
R(s)
G(s) / 1 + G(s)H(s)
Y(s)
(b)
R(s)
G(s)
Y(s)
H(s)
≡
R(s)
1/H(s)
G(s)H(s)
Y(s)
(c)
R(s)
G(s)
Y(s)
H1(s)
H2(s)
≡
R(s)
G(s)
Y(s)
H1(s)+H2(s)
(d)
R(s)
G(s)
Y(s)
H1(s)
H2(s)
≡
R(s)
G(s) / 1 + G(s)H1(s) + G(s)H2(s)
Y(s)

# Passos para construir o diagrama de blocos a partir do modelo matemático

## Seja o circuito elétrico abaixo




1º Escrever as equações que descrevem o comportamento de cada componente:

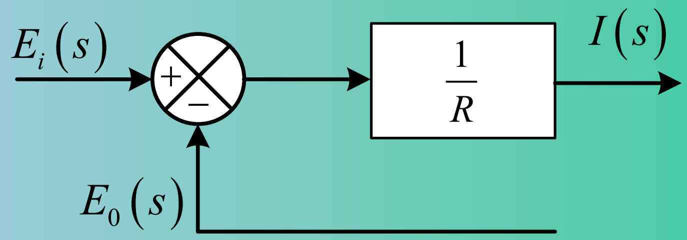
$$i(t) = \frac{e_i - e_o}{R}, \qquad e_0 = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

**2º Obter a transformada de Laplace dessas equações:**

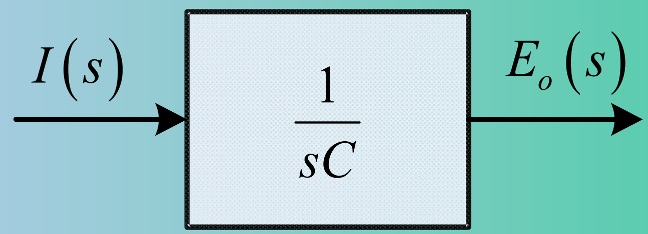
$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}, \qquad E_0(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

**3º Representar individualmente, em forma de bloco, a transformada de Laplace de cada equação:**

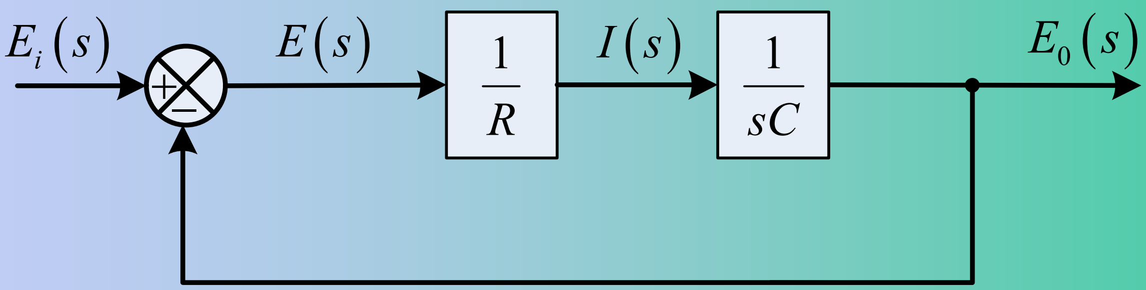
$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \quad \Rightarrow$$



$$E_0(s) = \frac{I(s)}{sC} \quad \Rightarrow$$




**4º Agrupar os blocos anteriores em um único sistema de blocos**

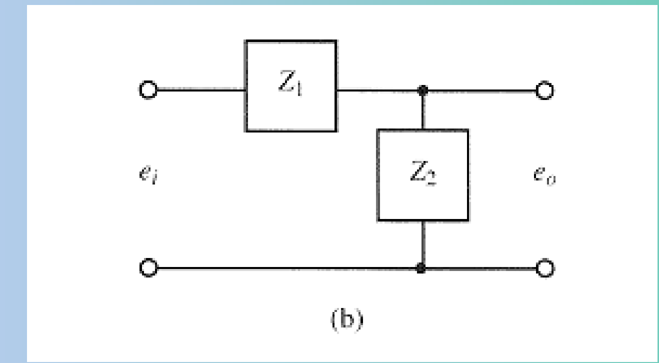


# Equações diferenciais e Função de Transferência de elementos de circuitos

## Impedância no domínio do de Laplace

- Indutor: $v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \longrightarrow V_L(s) = sLI(s) \longrightarrow \boxed{Z_L = sL}$
- Capacitor: $v_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)\,dt \longrightarrow V_C(s) = \dfrac{I(s)}{sC} \longrightarrow \boxed{Z_C = \dfrac{1}{sC}}$
- Resistor: $v_R(t) = Ri(t) \longrightarrow V_R(s) = RI(s) \longrightarrow \boxed{Z_R = R}$

## Circuitos divisores de tensão




$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

# Equações diferenciais de elementos mecânicos

- Atrito ou amortecimento translacional : $f(t) = bv(t) = b\dfrac{dx(t)}{dt}$

$b$ : coeficiente de atrtito translacional

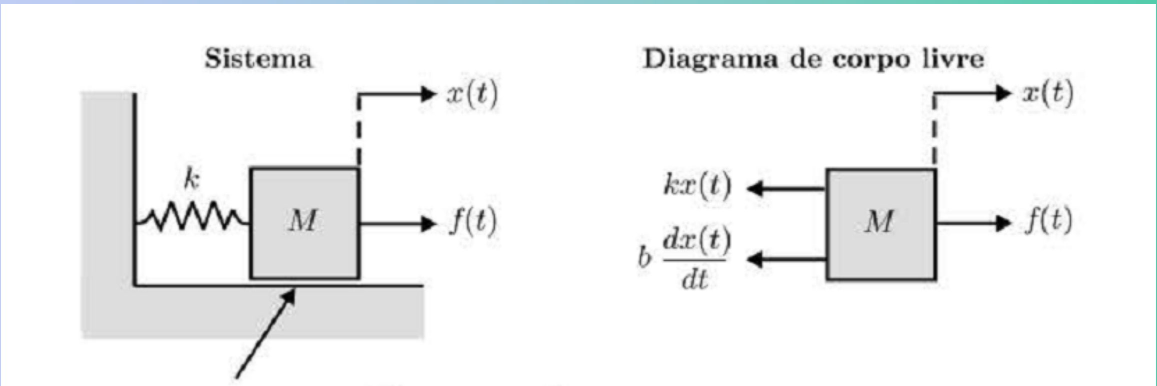
- Lei de Hooke : $f(t) = kx(t)$

$k$ : constante elática da mola

- Atrito ou amortecimento em rotação: $f(t) = B\omega(t) = B\dfrac{d\theta(t)}{dt}$

$B$ : coeficiente de atrtito viscoso rotacional

## Sistema mecânico: massa-mola.




- Aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

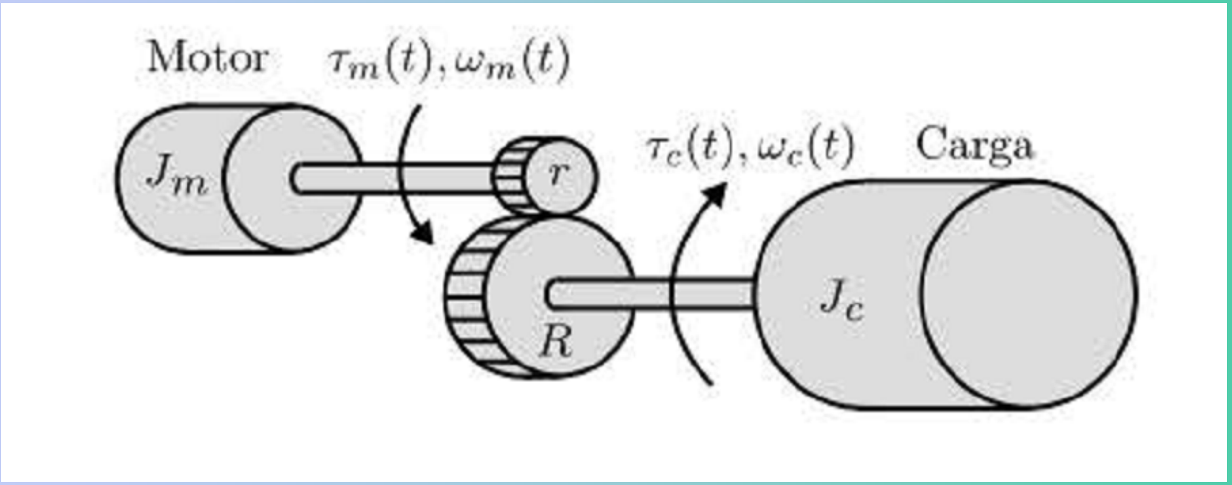
$$F_R = f(t) - kx(t) - b\frac{dx(t)}{dt}$$

$$ma = f(t) - kx(t) - b\frac{dx(t)}{dt}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) - kx(t) - b\frac{dx(t)}{dt}$$

Portanto, $m\dfrac{d^2x(t)}{dt} + kx(t) + b\dfrac{dx(t)}{dt} = f(t)$

## Sistema mecânico: acoplamento entre motor e carga através de engrenagens.




- Torque de elementos girantes: $\tau(t) = f(t)r = J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$

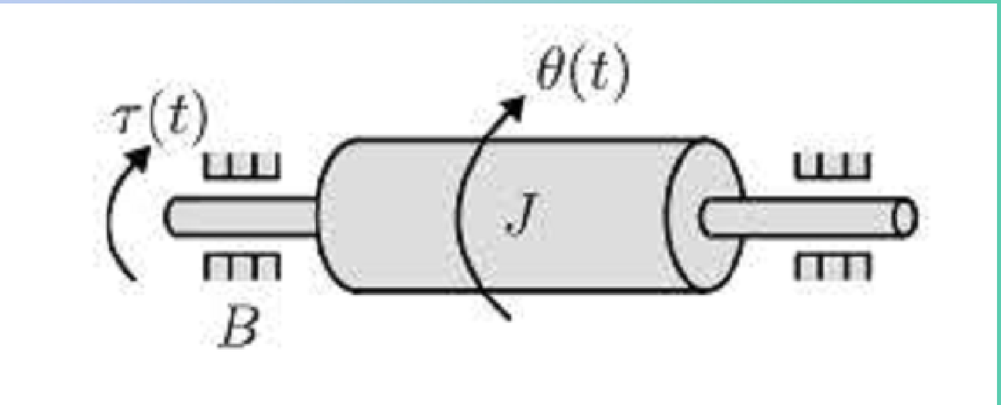
$J$ : momento de inércia de elemento girante;

$r$ : raio do elemento girante.

- Momento de inércia: $J = \int_C r^2 dm,$

onde $C$ correponde que a integração é realizada em todo o corpo de massa $m$.

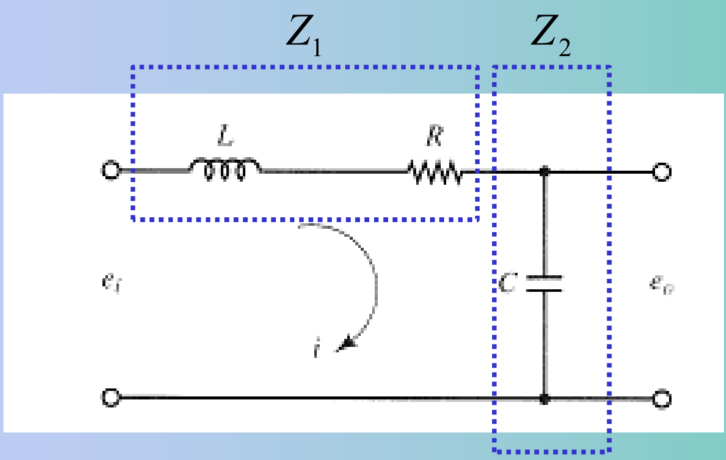
## Sistema mecânico com inércia e atrito rotacional




- Torque de elementos girantes : $\tau(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$

$$= J\frac{d^2\theta(t)}{dt} + B\frac{d\theta(t)}{dt}$$

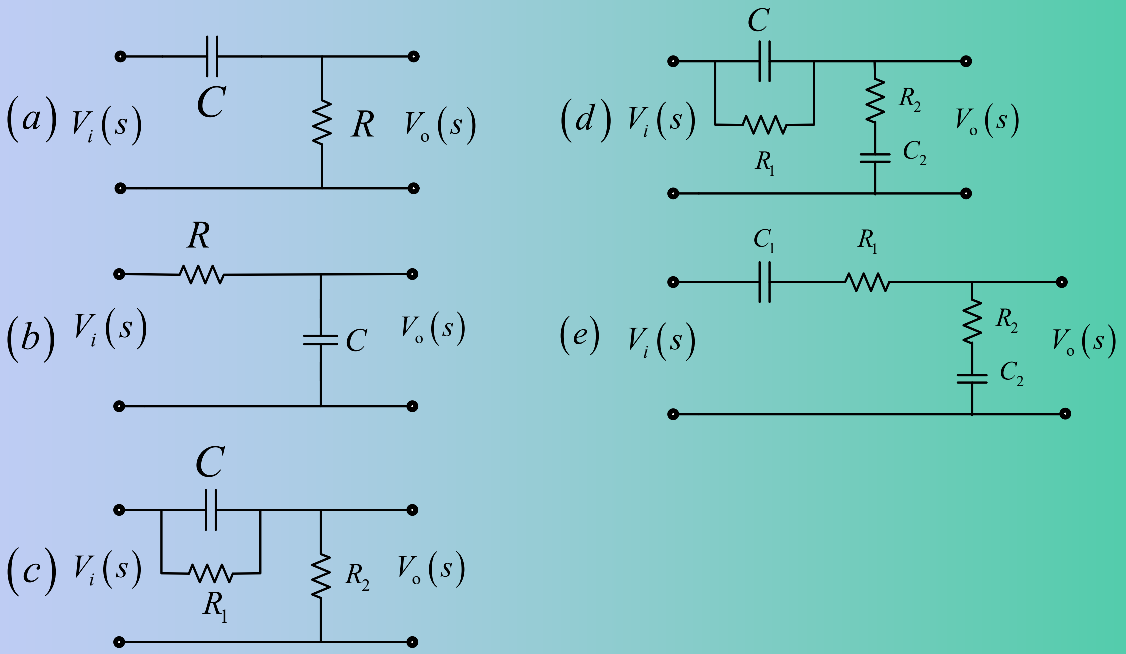
**Exercícios 1:** Determinar $\dfrac{E_0(s)}{E_i(s)}$




$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{\dfrac{1}{sC}}{R+sL+\dfrac{1}{sC}} = \frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

**Exercício 2:** Dados os circuitos abaixo:

a) Determinar a função de transferência $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$



b) Fazer a substituição: $s = j\omega$ e $\dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = H(j\omega)$

c) Encontrar a parte real e a parte imaginária da função de transferência:

Fazer:

$$X = \mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$$

$$Y = \mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$$

d) Encontrar uma equação entre X e Y que não envolva o parâmetro $\omega$

e) Fazer os gráficos (atribuir valores arbitrários para as resistências e capacitâncias ):

$$(a)\quad Y \times X$$

$$(b)\quad 20\log\left|H(j\omega)\right| \times \omega$$

# Diagrama de Fluxo de Sinais

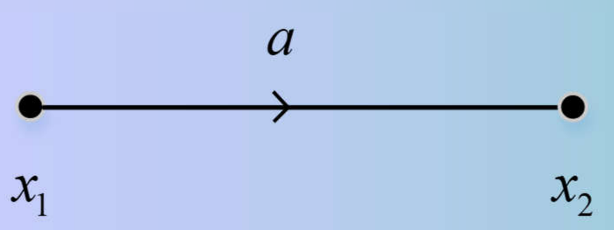
## Diagrama de Fluxo de Sinais

- ❑ É um gráfico formado por nós conectados através de arcos orientados e constitui uma representação gráfica de um conjunto de relações lineares;

- ❑ Essa representação é formada por dois <u>conjuntos</u>:
  - um conjunto chamado **vértices**;
  - outro conjunto chamado **arcos**.

Cada arco está associado a dois vértices: o primeiro é a ponta inicial do arco e o segundo é a ponta final.

**Exemplo:**

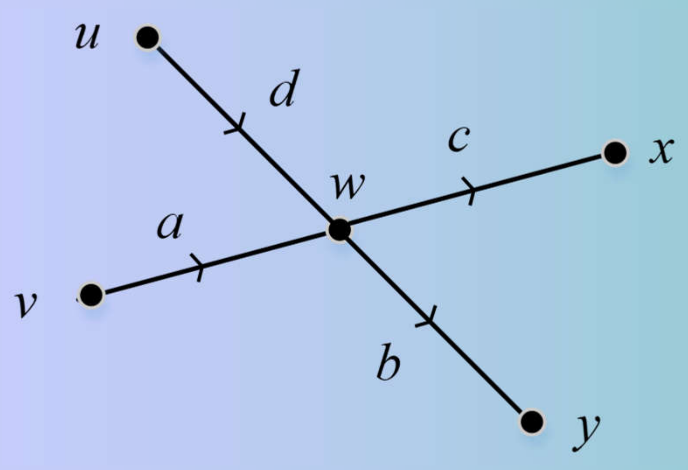



$$x_2 = a x_1$$

$x_2$, $x_1$ $\rightarrow$ nós

$a$ $\rightarrow$ função de transferência

- Cada nó num diagrama de fluxo de sinal, soma todos os sinais provenientes dos ramos de entrada, e disponibiliza a soma em todos os ramos de saída.




$$w = ud + va$$

$$x = cw$$

$$y = bw$$

## Elementos básicos de um Diagrama de Fluxo de Sinais

- **Ramo**: segmento de percurso unidirecional, que relaciona a dependência entre a variável de entrada com uma de saída;
- **Nós**: pontos de entrada, de saída ou junções;
- **Percurso ou Caminho**: sequência contínua de ramos ligados, entre um nó origem e um nó destino, percorrida no sentido das setas;
- **Laço**: é um caminho fechado que se origina e termina no mesmo nó de modo que ao longo do caminho nenhum nó é encontrado duas vezes.

## Tipos de Laços:

**Laço disjuntos**: dois laços são disjuntos quando não possuírem um nó comum; assim, dois laços que se tocam são ditos não-disjuntos e compartilham um ou mais nós comuns.

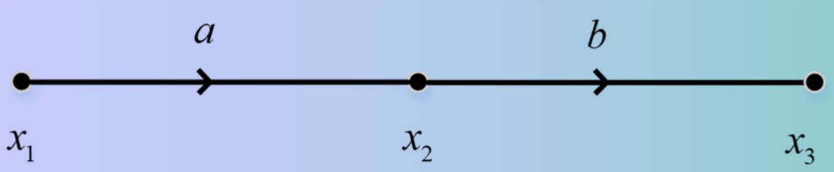
- **Ganho do caminho:** produto das transmitâncias dos ramos que formam o caminho.

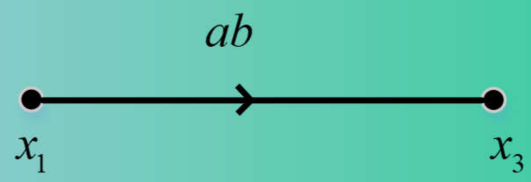
## Análise de um diagrama (gráfico) de fluxo de sinal

- Simplificação
- Fórmula de Mason

- Versão simplificada de um diagrama de blocos
- Proposto por MASON, (1956), Feedback Theory - Some properties of Signal Flow Graphs
- O GFS é regido por regras matemáticas bem específicas
- O GFS é definido como sendo uma forma de representação gráfica, de relações de entrada e saída de variáveis de um sistema algébrico de equações lineares.

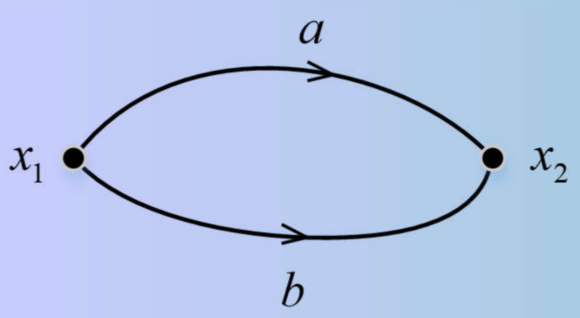
**Série:**

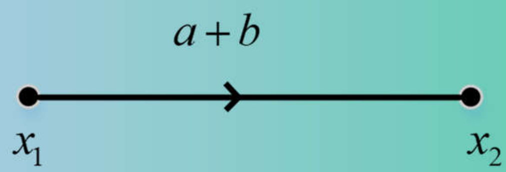



$$x_2 = ax_1$$
$$x_3 = bx_2$$
$$x_3 = abx_1$$

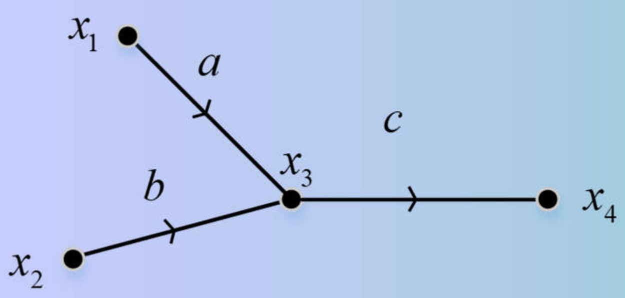
**Paralelo:**

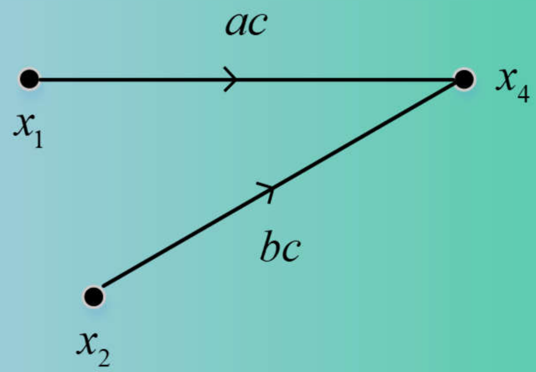



$$x_2 = (a+b)\,x_1$$

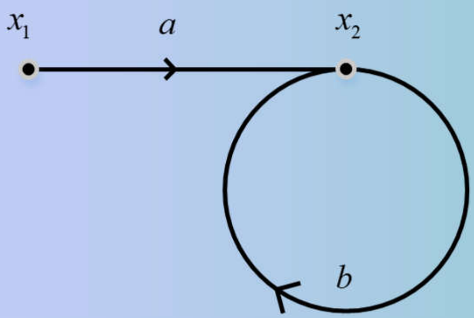
**Misto:**

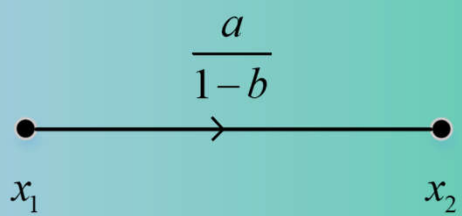



$$x_3 = ax_1 + bx_2$$
$$x_4 = cx_3 = acx_1 + bcx_2$$

**Laço:**



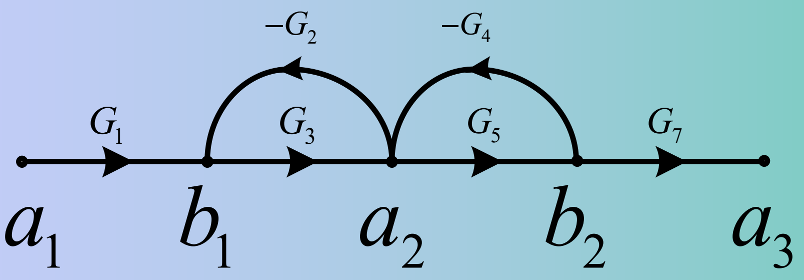




$$ax_1 + bx_2 = x_2$$
$$ax_1 = (1-b)x_2$$
$$x_2 = \frac{a}{1-b}x_2$$

**Exemplo:**

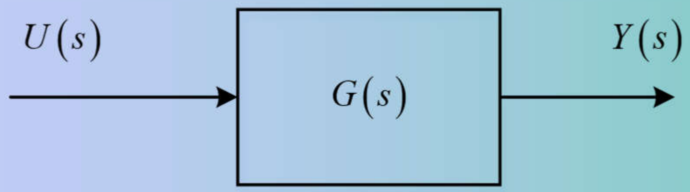
Determine a função de transferência do sistema representado pelo fluxo de sinais dado abaixo

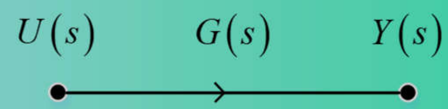
$$FT = \frac{a_3}{a_1}$$



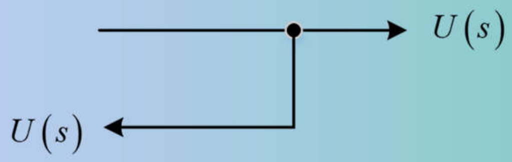
## Diagrama de Fluxo de Sinal a Partir do Diagrama de Blocos

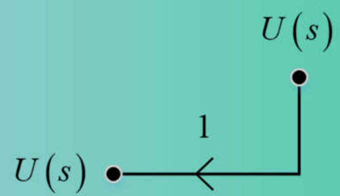
**Bloco**



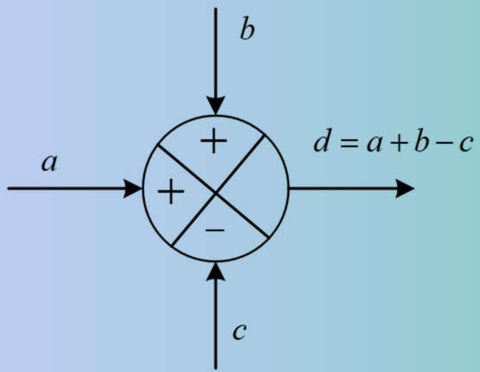



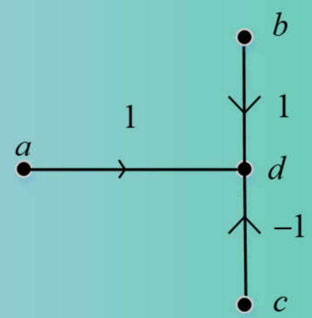

**Ponto de derivação**



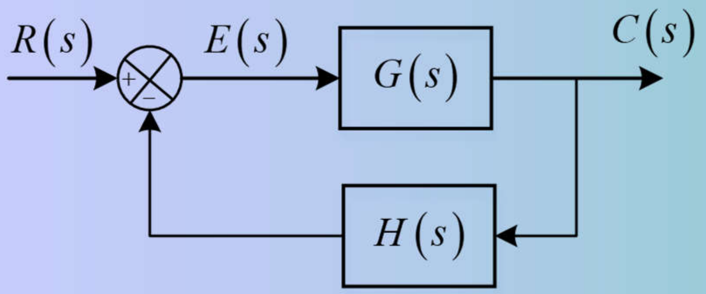



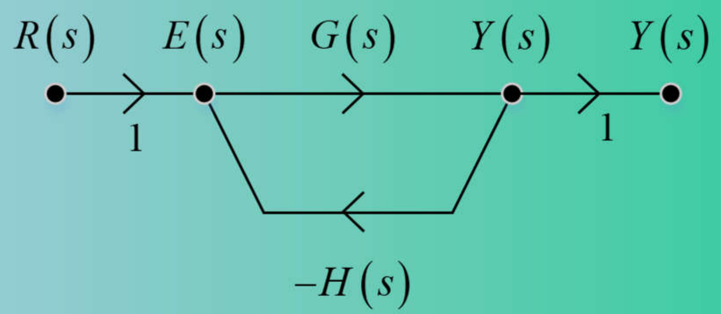

**Ponto de soma**



## Sistema de Controle de Malha Fechada



## Sumário das relações básicas do GFS

1. GFS só se aplica a sistemas lineares.

2. As equações para os quais o GFS é desenhado, devem ser uma série de equações algébricas na forma de causa e efeito.

3. Os nós são usados para representar variáveis (sinais). Normalmente os nós são arranjados da esquerda para a direita das entradas para as saídas, seguindo uma sucessão de relações de causa e efeito através do sistema.

4. Sinais atravessam os ramos somente nas direções definidas pela setas.

# Fórmula de Ganho de Mason

$$M = \frac{y_{\text{out}}}{y_{\text{in}}} = \frac{\sum T_{ijk}\Delta_{ijk}}{\Delta}$$

$y_{in}$ = variável do nó de entrada;

$y_{out}$ = variável do nó de saída;

M = ganho entre $y_{in}$ e $y_{out}$;

$\Delta_{ijk}$ = cofator do percurso $T_{ijk}$

$\Delta$ = determinante do percurso

$T_{ijk}$ = k-ésimo percurso entre a variável $x_i$ e a variável $x_j$

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^{N} L_n + \sum_{m=1,q=1}^{M,Q} L_m L_q - \sum L_r L_s L_q + \ldots,$$

$L_q$ = valor da transmitância do q-ésimo laço

## Regra para calcular Δ em termos dos lação $L_1$, $L_2$, $L_3$,..., $L_n$

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &- (\text{soma de todos os ganhos de malha distintas}) \\ &+ (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as combinações de malhas disjuntas 2 a 2}) \\ &- (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as combinações de malhas disjuntas 3a 3}) \\ &+ \end{aligned}$$

# Fórmula simplificada de Ganho de Mason

$$M = \frac{y_{\text{out}}}{y_{\text{in}}} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$P_k \longrightarrow$ Ganho do caminho direto atravessado no sentido das setas, uma sucessão contínua de ramos, onde nenhum dos nós são encontrados mais de uma vez.

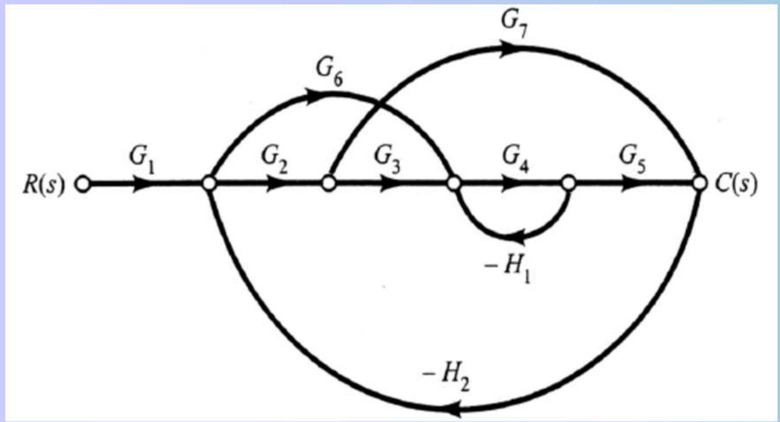
$\Delta_k \longrightarrow$ Cofator do percurso caminho direto $P_k$.

$\Delta \longrightarrow$ Determinante do diagrama.

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &- (\text{soma de todos os ganhos de laços distintos}) \\ &+ (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as combinações de laços disjuntos 2 a 2}) \\ &- (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as combinações de laços disjuntos 3a 3}) + \ldots\end{aligned}$$

Obs.: O cofator, $\Delta_k$, do determinante ao longo de um determinado percurso, k, é calculado a partir do determinante, $\Delta$, removendo os laços que tocam o percurso k. E, nesse caso, fazer cada laço que toca o percurso k igual a zero.

**Exemplo 1**: Calcular a função de transferência do diagrama de fluxo de sinais.




c) Determinante do diagrama: $L_1$ e $L_2$ não se tocam

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

d) Cofator:

$\Delta_1 = 1$ (removendo os laços que tocam o percurso 1)

$\Delta_2 = 1$ (removendo os laços que tocam o percurso 2)

$\Delta_3 = 1 - L_1$ (removendo os laços que tocam o percurso 3)

a) Percurso:

$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$

$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$

$P_3 = G_1 G_2 G_7$

b) Laços:

$L_1 = -G_4 H_1$

$L_2 = -G_2 G_7 H_2$

$L_3 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$

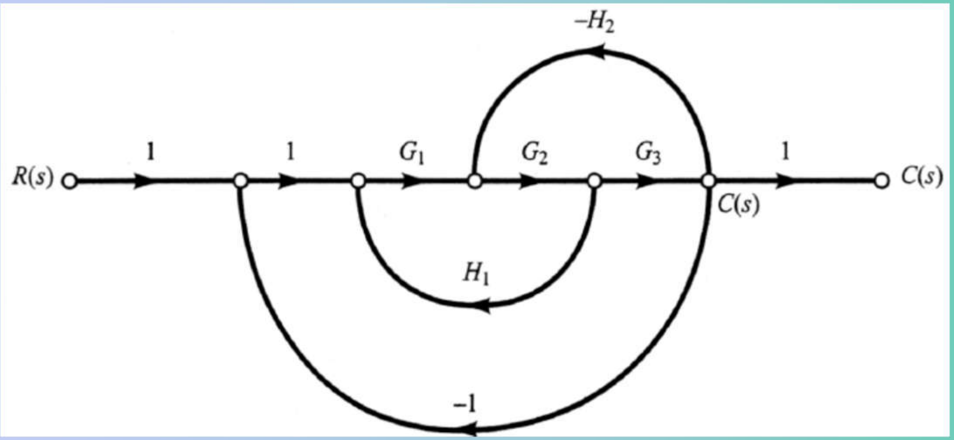
$L_4 = -G_6 G_4 G_5 H_2$

e) Cálculo da Função de Transferência:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_7 G_4 H_1 H_2}$$

**Exemplo 2**: Para o diagrama de fluxo de sinais do exercício anterior construir o respectivo diagrama de blocos.

**Exemplo 3:** Calcular a função de transferência do diagrama de fluxo de sinais e desenhar o respectivo diagrama de blocos




a) Percurso:

$P_1 =$

$P_2 =$

$P_3 =$

b) Laços:

$L_1 =$

$L_2 =$

$L_3 =$

$L_4 =$

c) Determinante do diagrama:

$$\Delta = 1 - \left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4\right) + L_1 L_2$$

d) Cofator:

$\Delta_1 =$ $\quad$ (removendo os laços que tocam o percurso 1)

$\Delta_2 =$ $\quad$ (removendo os laços que tocam o percurso 2)

$\Delta_3 =$ $\quad$ (removendo os laços que tocam o percurso 3)

# Linearização de modelos matemáticos

$(a)$ Série de Taylor para uma dimensão

$$y = f(x)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$

Se "$x$" for pequeno podemos desprezar os termos de ordens mais elevadas:

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) \longrightarrow \quad y = \bar{y} + K(x-\bar{x}), \quad \bar{x} = a$$

$$K = f'(a)$$

$(b)$ Série de Taylor para duas dimensões

$$z = f\left(x_1, x_2\right)$$

$$f\left(x_1, x_2\right) = f\left(a, b\right) + \left[\left(x_1 - a\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \left(x_2 - b\right)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] +$$

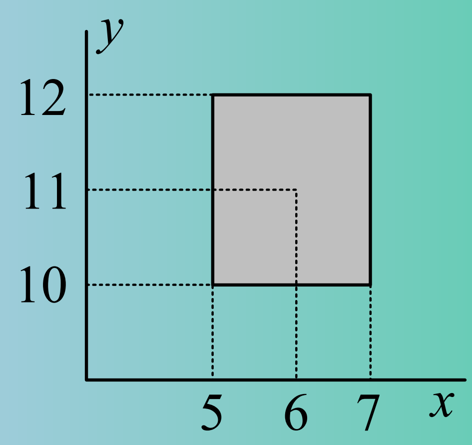
$$+\frac{1}{2}\left[\left(x_2 - a\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\left(x_1 - a\right)\left(x_2 - b\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(x_2 - b\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right] + \cdots$$

$$z = \overline{z} + K_1\left(x_1 - \overline{x}_1\right) + K_2\left(x_2 - \overline{x}_2\right), \qquad \overline{x}_1 = a \quad \text{e} \quad \overline{x}_2 = b$$

$$K_1 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=\overline{x},\, y=\overline{y}}$$

$$K_2 = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\overline{x},\, y=\overline{y}}$$

1) Linearize a função não linear: $z = xy$ na região $5 \le x \le 7$ e $10 \le y \le 12$.




Escolhemos:

$\bar{x}_1 = 6$

$\bar{y}_1 = 11$

$\bar{z} = \bar{x}_1 \bar{y}_1 = 6 \times 11 = 66$

Vamos linearizar nas proximidades do ponto $\bar{x}_1 = 6$ e $\bar{y}_1 = 11$

$$z_{lin.} - \bar{z} = K_1\left(x - \bar{x}\right) + K_2\left(y - \bar{y}\right)$$

$$K_1 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},\ y=\bar{y}} = \left. y\right|_{y=\bar{y}} = 11$$

$$K_2 = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\bar{x},\ y=\bar{y}} = \left. x\right|_{x=\bar{x}} = 6$$

$$z_{lin.} - 66 = 11\left(x - 6\right) + 6\left(y - 11\right) \longrightarrow z = 11x + 6y - 66$$

Cálculo do erro percentual para $x = 5$ e $= 10$

$$z_{linearizado} = 11x + 6y - 66$$
$$= 11 \times 5 + 6 \times 10 - 66 = 49$$

$$z_{verdadeiro} = xy$$
$$= 5 \times 10 = 50$$

$$erro\% = \frac{z_{verdadeiro} - z_{linearizado}}{z_{verdadeiro}} \times 100$$
$$= \frac{50 - 49}{50} \times 100 = 2\%$$

2) Linearize a função não linear: $z = x^2 + 8xy + 3y^2$ na região $2 \le x \le 4$ e $10 \le y \le 12$ e calcule o erro para $\overline{x} = 2,5$ e $\overline{y} = 8,5$.