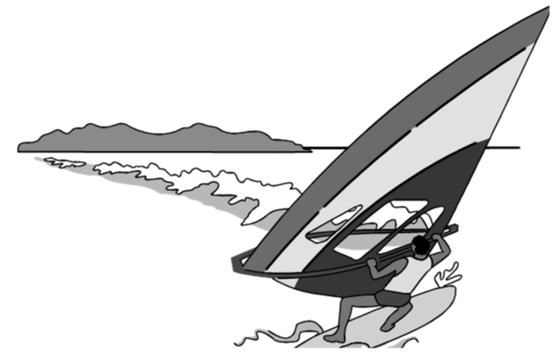
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Mato Grosso
Campus Cuiabá - Octayde Jorge da Silva

DEPARTAMENTO DE ELETROELETRÔNICA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Controle de Sistemas Contínuos I

Prof. Walterley A. Moura

contato: walterley.moura@cba.ifmt.edu.br



Estabilidade

Estabilidade

- Introdução
- Conceito de estabilidade
- Análise da estabilidade via função de transferência
- Análise da estabilidade via função de espaço de estado

Introdução

- Assegurar a estabilidade é o principal objetivo de um sistema de controle malha fechada;

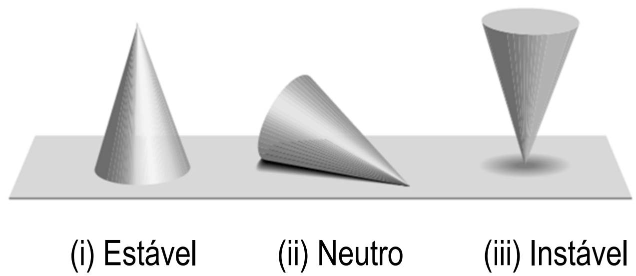
- A estabilidade de um sistema está relacionada com a posição dos polos da função de transferência malha fechada;

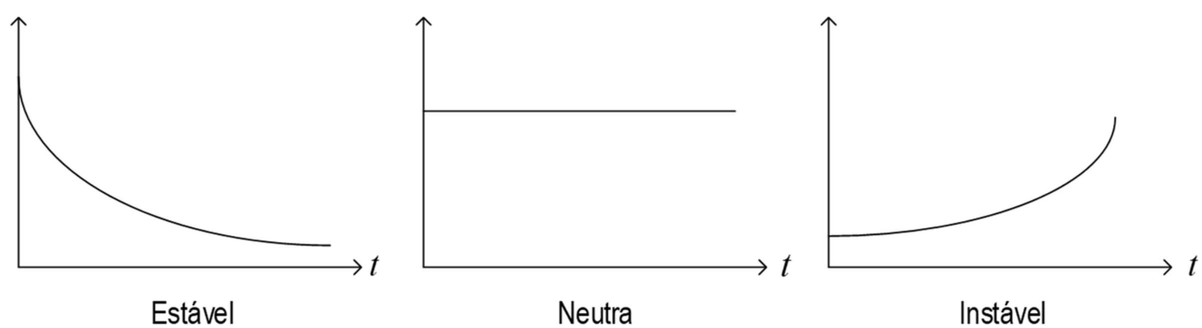
- O método de Routh-Hwrwitz é introduzido como ferramenta útil na determinação de estabilidade de sistemas.

Conceito de estabilidade

- ✓ Do ponto de vista prático, sistema instáveis não tem utilidade;
- ✓ Algumas plantas são instáveis em malha aberta, entretanto pode-se utilizar a realimentação para estabilizar essas plantas;
- ✓ Sistemas realimentados podem ser instáveis ou estáveis e, nesse caso, denominamos de **estabilidade absoluta**;
- ✓ Para um sistema estável podemos adicionar um grau de estabilidade e denominamos essa situação de **estabilidade relativa**;

- ✓ O conceito de estabilidade pode ser ilustrado considerando-se um cone de seção reta circular colocado em uma superfície horizontal plana:





Exemplo de estabilidade e instabilidade

Estável

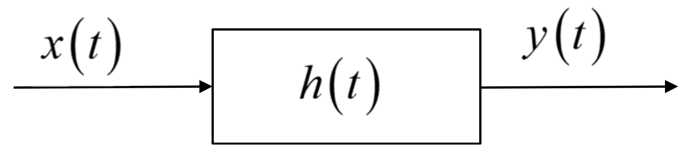
Instável (ação do vento)

Estabilidade BIBO
(Bounded Input Bounded Output)

- ✓ Um sistema dinâmico é estável se, para toda **entrada delimitada** (confinada), a **saída permanece delimitada** com o passar do tempo;
- ✓ Esta estabilidade somente é definida para resposta ao estado nulo e é aplicável somente se o sistema está inicialmente relaxado.

A estabilidade ou não de um ***Sistema Linear Invariante no Tempo – SLIT*** é uma propriedade do próprio sistema, não dependendo da entrada externa. Obviamente, estamos supondo que a “energia injetada ou extraída do sistema pela entrada” é finita, o que vai sempre ocorrer na prática.

Para um sistema LIT:



$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|\,d\tau$$

$\mapsto$ Supondo que $x(t)$ é limitado, temos:

$|x(t-\tau)| < K_1 < \infty,$ logo

$$|y(t)| \leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau$$

$\mapsto$ Para a estabilidade BIBO

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty \quad \Rightarrow$ a funçaõ $h(t)$ é denominada absolutamente integrável

Portanto, para um sistema LIT, se sua resposta ao impulso $h(t)$ for absolutamente integrável, o sistema BIBO é estável. Caso contrário, o sistema é instável.

Sistema **SISO**

(**S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput)

Teorema 1: Um sistema SISO é BIBO estável se e somente se $h(t)$ for absolutamente integrável em $[0,\infty)$, ou

$$\int_0^\infty h(t)\,dt \le M < \infty,$$

sendo M uma constante.

Teorema 2: Um sistema SISO com função de transferência, $G(s)$, é BIBO estável se e somente se todos os pólos de $G(s)$ tem parte real negativa ou equivalentemente pertença ao semiplano "s" esquerdo

- Em geral, para analisar a estabilidade em sistemas descritos na forma de função de transferência temos que encontrar as raízes do polinômio característico;
- No critério de estabilidade de Routh-Hurwitz não é necessário calcular as raízes do polinômio característico no processo de análise de estabilidade em sistemas dinâmicos.

Métodos para estudar a estabilidade

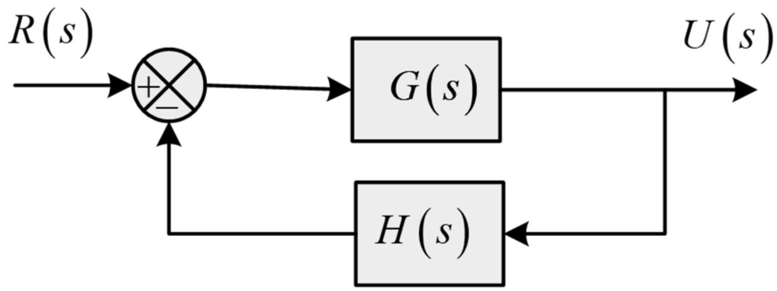
1. Routh-Hurwitz (no plano-s)

2. Nyquist (domínio da frequência)

3. Análise temporal – espaço de estados

Os métodos acima não calculam as raízes da Equação Característica (EC), isto é, os polos da Função de Transferência de malha fechada (MF).

Análise da estabilidade a partir da função de transferência



$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}, \text{ onde } m < n$$

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \longrightarrow \text{ equação característica}$$

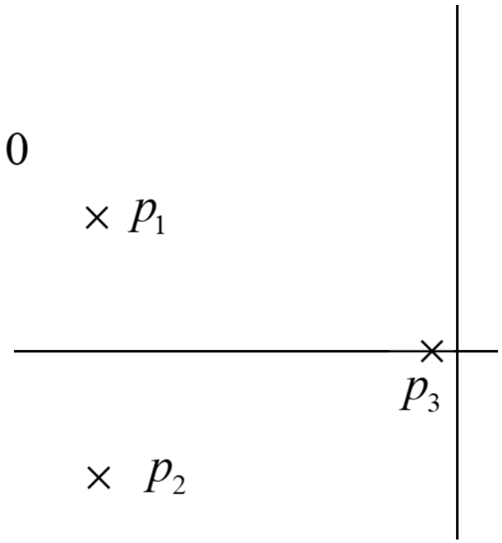
Exemplo

$$FT(s) = \frac{10s^2 + 200s + 50}{s^3 + 14s^2 + 200s + 50}$$

$$E.C.: \quad s^3 + 14s^2 + 200s + 50 = 0$$

Polos:

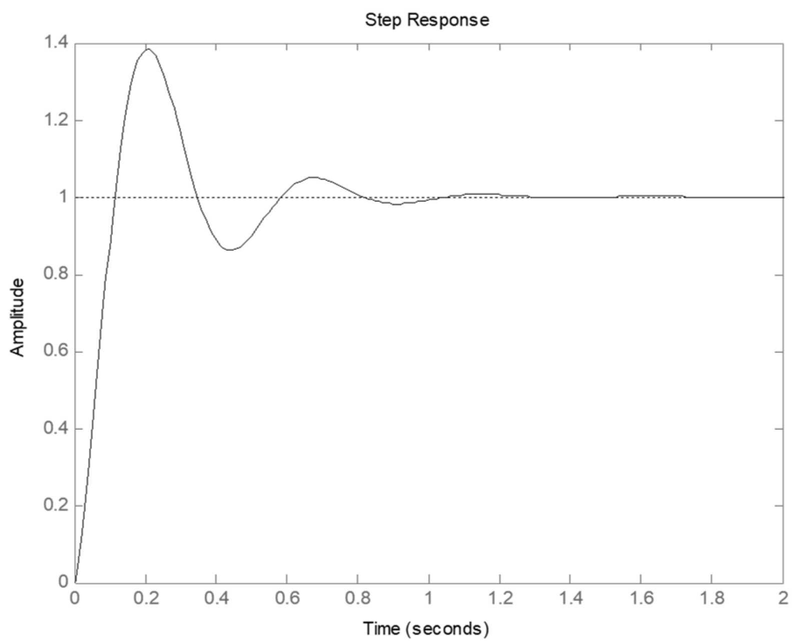
$$p_1 = -4,3736 + j13,3664$$
$$p_2 = -4,3736 - j13,3664$$
$$p_3 = -0,2528$$



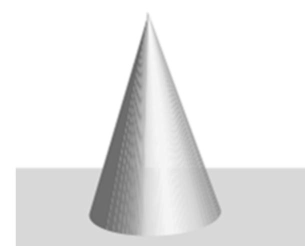
- ✓ Um sistema estável as partes reais dos polos da função de transferência malha fechada forem negativas, ou seja, se os polos estiverem no semi-plano esquerdo do plano-s.

Gráfico $f(t)$ x t

Sistema Estável



$\rightleftarrows$



Conclusões

- Um Sistema é dito instável se todos os polos da fução de transferência estiverem no semi-plano esquerdo (SPE) do plano "s";

- Para testar a estabilidade de um sistema LIT necessitamos examinar apenas os polos do sistema, isto é, as raízes da equação característica;

- São disponíveis métodos para testar a **estabilidade** de um sistema **malha fechada** baseando-se somente nas características da função de tranferência da malha.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

É um método rápido para testar a estabilidade de um sistema BIBO;

- O critério examina se existem raízes instáveis em uma equação polinomial, sem que seja necessário resolvê-la;

- O polinômio característico é

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$$

- Para everiguar a estabilidade do sistema, é necessário se alguma das raízes de $A(s)$ se situa no semi plano direito do plano-s.

- O polinômio característico pode ser escrito na forma fatorada

$$A(s) = a_0(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)$$

onde

$$p_i \longrightarrow i - \text{ésima raiz da equação característica}$$

$$(\text{polos da função de transferência})$$

- Multiplicando os fatores, constata-se que

$$\begin{aligned} A(s) = a_0 s^n - a_0(p_1 + p_2 + ... + p_n)s^{n-1} \\ + a_0(p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3 + ...)s^{n-2} \\ - a_0(p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + ...)s^{n-3} + ... \\ + a_0(-1)^n p_1 p_2 p_3 ... p_n = 0 \end{aligned}$$

- Da equação anterior, observa-se que todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal se todas as raízes estiverem no semiplano esquerdo;

- Para que o Sistema seja estável é necesário que todos os coeficientes sejam diferentes de zero;

- Esses requisitos são necessários, mas não suficientes;

- Ou seja, sabe-se imediatamente que o sistema é instável se eles não forem satisfeitos;

- Se forem satisfeitos, deve-se proseguir para verificar a estabilidade do Sistema.

Critério de estabilidade de Routh - Tabela de Routh

- O critério da estabilidade de Routh é baseado na ordenação dos coeficientes da equação característica

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$$

em uma tabela dada abaixo

$$\begin{array}{c|ccccc|}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^2 & k_1 & k_3 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_5}{b_1}$$

Critério de estabilidade de Routh
A tabela de Routh

- De maneira semelhante, os elementos da 4ª linha, c_1, c_3 , … são calculados baseados nas linhas anteriores.

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_5}{b_1}$$

- Os elementos em todas as linhas subsequentes são calculados da mesma maneira.

Exemplo: Determine a estabilidade do sistema que possui o polinômio característico dado abaixo

$$A(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

- Repare que o polinômio atende à condição necessária;
- No entanto, usando Octave, vamos calcular os polos

$$\begin{aligned}
p_1 &= -3,26435744369664 \\
p_2 &= -0,60459632811670 + j0,99353502889359 \\
p_3 &= -0,60459632811670 - j0,99353502889359 \\
p_4 &= \;\;\, 0,67967616788490 + j0,74881380872851 \\
p_5 &= \;\;\, 0,67967616788490 - j0,74881380872851 \\
p_6 &= -0,88580223583976
\end{aligned}$$

- Portanto, observamos que o sistema é instável pela presença de polos no semi-plano direito.

Critério da estabilidade de Routh

Condições necessária e suficiente:

- Se todos os elementos na primeira coluna da tabela de Routh tem o mesmo sinal, então todas as raízes da equação característica tem parte real negativa;

- Se existe mudanças de sinal destes elementos, então o número de raízes com parte real não negativa é igual ao número de mudanças de sinal;

- Elementos na primeira coluna que são zero define um *caso especial*.

Critério de estabilidade de Routh
Exemplo 1:

$$A(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$
$$p_1 = 0,7555 \; + \; j1,4444$$
$$p_2 = 0,7555 - j1,4444$$
$$p_3 = -1,0055 \; + j0,9331$$
$$p_4 = -1,0055 - j0,9331$$

$$A(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

$$\begin{array}{c|cccc|}
s^4 & 2 & 3 & 10 & 0 \\
s^3 & 1 & 5 & 0 & 0 \\
s^2 & b_1 & b_3 & 0 & \\
s^1 & c_1 & 0 & & \\
s^0 & d_1 & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{3 - 10}{1} = -7 \qquad b_3 = \frac{10 - 0}{1} = 10$$

$$c_1 = \frac{-35 - 10}{-7} = 6,43$$

$$d_1 = \frac{10(6,43) - 0}{6,43} = 10$$

- A equação característica tem duas raízes com parte real positiva, pois os elementos da primeira coluna tem duas mudanças de sinal (2, 1, -7, 6,43, 10)

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
Caso especial 1:

- Um zero na primeira coluna:
- Solução: substituir por ε > 0 (número pequeno) o elemento zero, complete a tabela de Routh, e então faça $\varepsilon \rightarrow 0$

$$A(s) = s^3 - 3s + 2$$

$$p_1 = -2{,}0000$$

$$p_2 = 1{,}0000$$

$$p_3 = 1{,}0000$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
s^2 & 0(\varepsilon) & 2 & 0 & \\
s^1 & b_1 & 0 & & \\
s^0 & c_1 & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{-3\varepsilon - 2}{\varepsilon} \quad \rightarrow \frac{-2}{\varepsilon} \quad \text{(negativo)}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot 2}{b_1} = 2$$

Existe duas raízes com parte real positiva (1, ε, -2/ε , 2)

Exemplo 1: Dado o polinômio característico abaixo, determinar o ganho K que resulta em um sistema estável.

$$A(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K$$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 1 & K \\ s^3 & 1 & 1 & 0 \\ s^2 & 0(\varepsilon) & K & 0 \\ s^1 & \dfrac{\varepsilon - K}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ s^0 & K & 0 & 0 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon - K}{\varepsilon} = -\frac{K}{\varepsilon}$$

- Para qualquer valor positivo de ***K*** o sistema é instável;
- O último termo da primeira coluna é igual a ***K***, e um valor negativo de ***K*** resultará em um sistema instável;
- O sistema é instável par todos os valores de ganho ***K***.

Exemplo 2: Dado o polinômio característico abaixo, determiner o ganho K que resulta em um sistema estável.

$$A(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \dfrac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Suponhamos $K = 8$, temos:

$$\begin{aligned} A(s) &= s^3 + 2s^2 + 4s + 8 \\ &= s^2(s+2) + 4(s+2) \\ &= (s+2)(s^2+4) \end{aligned}$$

$$A(s) = 0 \Rightarrow p_1 = 2,\ p_2 = j2 \text{ e } p_3 = -j2$$

- Para que o sistema seja estável os elementos b1 e c1 devem ser positivos, ou seja:

$$\begin{cases} \dfrac{8-K}{2} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < 8$$

- Conclusão: dois polos no eixo imaginário é um caso de estabilidade marginal. Assim, o caso marginal é um sistema não aceitável.

- Vamos agora substituir K=8 na tabela de Routh, obtemos:

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 4 \\
s^2 & 2 & 8 \rightarrow \text{coeficientes do polinômio auxiliar} \\
s^1 & 0 & 0 \\
s^0 & K & 0
\end{array}
$$

$\mapsto$ Construindo o polinômio auxiliar: $2s^2+8=2\left(s^2+4\right)$

$\mapsto$ O polinômio auxiliar obtido da tabela é o polinômio que aparece na fatoração de $A(s)$;

$\mapsto$ Sempre que aparece zeros em uma linha, o polinômio da linha anterior tem alguns polos do polinômio característico.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
Caso especial 2:

- Uma linha toda nula na tabela de Routh corresponde a um par de de raízes com sinais opostos.
- Solução:

  ✓ formar um polinômio auxiliar dos coeficientes da linha acima.

  ✓ Substituir os coeficientes zero pelos coeficientes da derivada do polinômio auxiliar.

  ✓ Se não existir a mudança de sinal, as raízes da equação auxiliar define as raízes do sistema no eixo imaginário.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
Caso especial 2 (exemplo):

$$A(s) = s^4 + s^3 - s - 1$$

s^4	*1*	*0*	*-1*	*0*
s^3	*1*	*-1*	*0*	*0*
s^2	$\boxed{1 \quad -1}$		*0*	
s^1	$\cancel{0}$ *2*	*0*		
s^0	d_1			

Polinômio auxiliar

$$s^2 - 1$$

então

$$\frac{d(s^2 - 1)}{ds} = 2s$$

$$d_1 = -1$$

$$A(s) = s^4 + s^3 - s - 1$$

$$p_1 = 1,0000$$

$$p_2 = -0,5000 + j0,8660$$

$$p_3 = -0,5000 - j0,8660$$

$$p_4 = -1,0000$$

- O sistema tem uma raiz com parte real positiva: (1, 1, 1, 2, -1)
- A raiz é encontrada da equação auxiliar: $s^2 - 1 = 0$, $s = \pm 1$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
Teste do intervalo do parâmetro – Estabilidade relativa

- O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz pode ser usado par encontrar o intervalo de um parâmetro para o qual o sitema é estável;

- Deixe o parâmetro como um coeficiente desconhecido, forme a tabela de Routh, verifique o intervalo do parâmetro tal que a primeira coluna não mude de sinal.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
Exemplo: intervalo do parâmetro

$$A(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K$$

s^4	1	11	K	0
s^3	6	6	0	0
s^2	10	K	0	
s^1	c_1	0		
s^0	d_1			

$$c_1 = \frac{60 - 6K}{10} \qquad d_1 = K$$

Então para a estabilidade,

$$K > 0$$

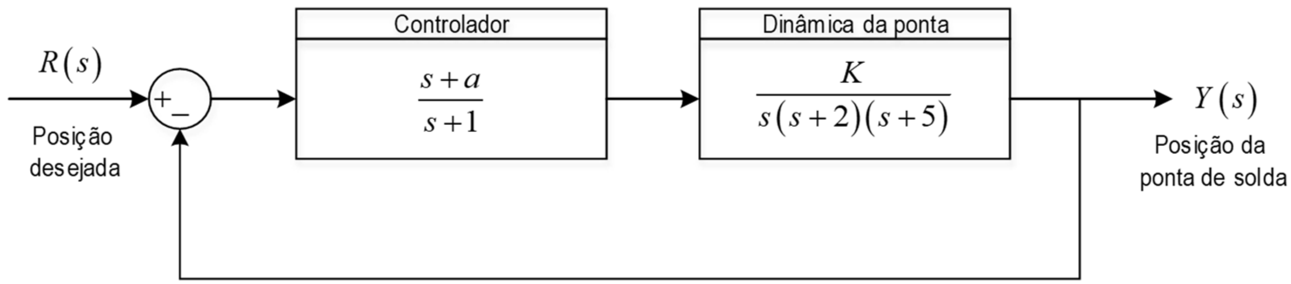
$$60 - 6K > 0 \Rightarrow K < 10$$

$$\boxed{\therefore \quad 0 < K < 10}$$

- Dado o polinômio característico, determine o interval de K para que o sistema seja estável.

$$A(s) = s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1$$

Exemplo 3: Grandes robôs soldadores são usados nas fábricas de automóveis. A ponta da solda é deslocada para diferentes posições do chassi do automóvel e uma resposta rápida e exata é requerida. Um diagrama de blocos de um sistema de posicionamento de uma ponta de solda é mostrada abaixo. Determinar os valores de K e de a para os quais o sistema é estável.



$\mapsto$ Polinômio característico

$$A(s) = s^4 + +8s^3 + 17s^2 + (K+10)s + Ka$$

$$b_3 = \frac{126-K}{8}, \qquad c_3 = \frac{b_3(K+10) - 8Ka}{b_3}$$

$\mapsto$ Tabela de Routh

s^4	1	17	Ka
s^3	8	$(K+10)$	0
s^2	b_3	Ka	0
s^1	c_3	0	0
s^0	Ka	0	0

$\mapsto$ Restrições:

(1) $$\frac{126-K}{8} > 0 \Rightarrow K < 126$$

(2) $$Ka > 0$$

(3) $$(K+10)(126-K) - 64Ka > 0$$

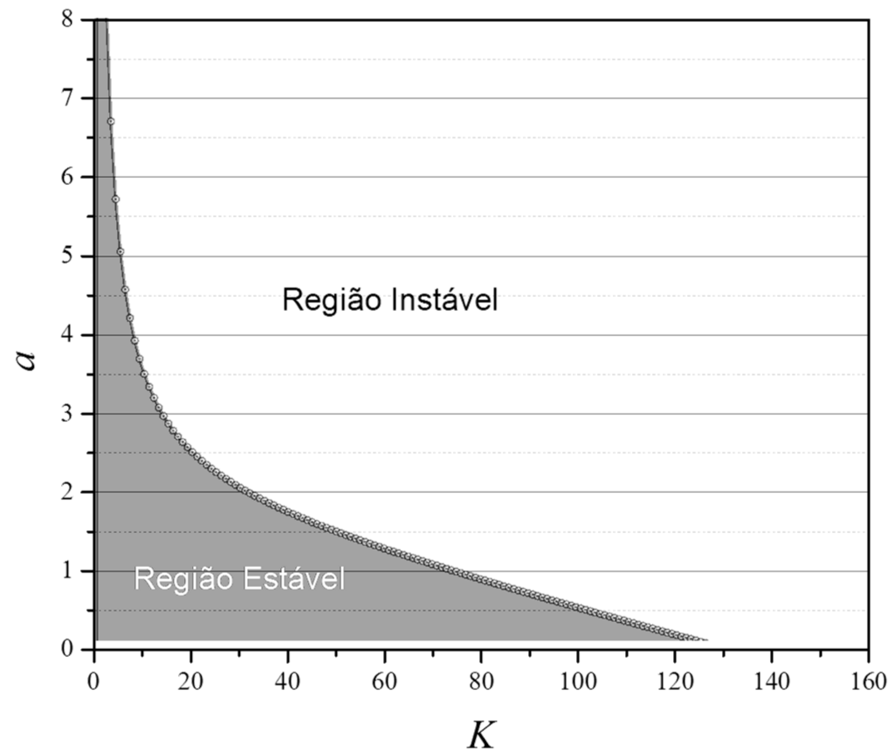
$K < 126, \qquad Ka > 0$

$$(K+10)(126-K) - 64Ka > 0 \quad \Rightarrow \quad a < \frac{(K+10)(126-K)}{64K}$$

$\mapsto$ Gráfico $a \times K$

$$a = \frac{(K+10)(126-K)}{64K}$$

K	a
0	∞
126	0
-10	0



Critério de estabilidade no espaço de estados