МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра вычислительной математики

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Курсовой проект

Бобовоза Владислава
Сергеевича
студента 3 курса,
специальность «прикладная
математика»

Научный руководитель:
магистр физ.-мат. наук,
старший преподаватель
Е.А. Левчук

Минск, 2023

РЕФЕРАТ

Курсовой проект, 18 с., 3 источников, 5 рис., 1 прил.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ, СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, АППРОКСИМАЦИЯ, МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА

Объект исследования – стационарное распределение тепла в неоднородной среде.

Цель работы – смоделировать стационарное распределение тепла в неоднородной среде.

Методы исследования – метод конечных разностей.

Результаты работы: написана программа, реализующая метод конечных разностей для моделирования стационарного распределения тепла, проведён сравнительный анализ влияния шага сетки на точность результата.

РЭФЕРАТ

Курсавы праект, 18 с., 3 крыніц, 5 мал., 1 дадаткі.

СТАЦЫЯНАРНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ ЦЯПЛА У НЕАДНАСТАЙНЫМ АСЯРОДДЗІ, СТАЦЫЯНАРНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ ЦЯПЛА У НЕАДНАСТАЙНЫМ АСЯРОДДЗІ У СФЕРЫЧНА СІМЕТРЫЧНЫМ ВЫПАДКУ, МЕТАД КАНЧАТКОВЫХ РОЗНАСЦЯЎ, АПРАКСІМАЦЫЯ, МЕТАД ФУНКЦЫІ ГРЫНА

Аб'ект даследавання – стацыянарнае размеркаванне цяпла ў неаднастайным асяроддзі.

Мэта работы – змадэляваць стацыянарнае размеркаванне цяпла ў неаднастайным асяроддзі.

Метады даследавання – метад канчатковых рознасцяў.

Вынікі работы: напісана праграма, што рэалізуе метад канчатковых рознасцяў для мадэлявання стацыянарнага размеркавання цяпла, праведзены параўнальны аналіз уплыву кроку сеткі на дакладнасць выніку.

SUMMARY

Course project, 18 p., 3 sources, 5 fig., 1 applications.

STATIONARY HEAT DISTRIBUTION IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM, STATIONARY HEAT DISTRIBUTION IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM IN A SPHERICALLY SYMMETRIC CASE, FINITE DIFFERENCE METHOD, APPROXIMATION, GREEN'S FUNCTION METHOD

Object of research – stationary heat distribution in an inhomogeneous medium.

Purpose of the work – simulate the stationary distribution of heat in an inhomogeneous medium.

Methods of research – the finite difference method.

Results of the work: A program has been written that implements the finite difference method for modeling stationary heat distribution, and a comparative analysis of the effect of the grid step on the accuracy of the result has been carried out.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы теплопроводности в неоднородных средах представляют собой важную область исследования в физике и инженерии. Понимание распределения температуры в сложных системах является ключевым для оптимизации процессов и принятия информированных решений в различных областях.

Цель данного исследования – моделирование стационарного распределения тепла в неоднородной среде с использованием метода конечных разностей. Мы рассмотрим сферически симметричный случай, представляя область как шар радиуса R, и исследуем влияние различных факторов на результаты моделирования.

Структура исследования:

- Разбор физической постановки задачи теплопроводности и ее неоднородностей.
- Описание метода конечных разностей как эффективного численного метода решения дифференциальных уравнений.
- Программная реализация численной модели и графическое представление результатов с помощью языка Python.
- Исследование влияния шага сетки на точность результатов.

Это исследование не только позволит глубже понять процессы теплопередачи в неоднородных средах, но и сравнить эффективность двух различных методов численного моделирование. Полученные результаты помогут развить новые подходы к решению подобных задач и оптимизации технических процессов.

1 Физическая постановка задачи теплопроводности

1.1 Вывод стационарного уравнения теплопроводности в неоднородной среде

Выведем уравнение теплопроводности в неоднородной среде [1].

Пусть $u(M,t)$ – температура тела в точке M в момент времени t. При выводе уравнения будем использовать закон Фурье для плотности потока тепла w в направлении n в единицу времени:

$$w = -k\frac{\partial u}{\partial n}$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности. Он может быть функцией температуры, точки и времени: $k = k(u, M, t)$.

Рассмотрим часть дела D, ограниченную поверхностью S. Обозначим через $f(M,t)$ плотность источников тепла. Подсчитаем баланс тепла для D за малое время Δt:

$Q_1 = \iiint_D f(M,t)d\tau\Delta t$ – приход за счет источников;

$Q_2 = -\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\Delta t$ – расход за счет выходящего из D потока;

здесь производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ берется по направлению внешней нормали к S;

$Q_3 = \iiint_D cpu_t\, d\tau\Delta t$ – изменение количества тепла в области D за время Δt, где с – коэффициент теплоемкости, p – плотность вещества.

Закон сохранения энергии требует, чтобы $Q_3 = Q_1 - Q_2$ или

$$\iiint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma + \iiint\limits_S f(M,t)d\tau = \iiint\limits_D cpu_t\, d\tau.$$

Применяя к первому интегралу формулу Остроградского, получаем

$$\iiint\limits_D [div(k\nabla u) + f(M,t)]d\tau = \iiint_D cpu_t\, d\tau,$$

откуда ввиду произвольности области D, следует искомое уравнение теплопроводности:

$$div(k\nabla u) + f(M,t) = cpu_t.$$

Так как нас интересует именно стационарное уравнение теплопроводности, то $u_t = 0$, $f(M,t) = f(r)$, $k = k(r)$. Тогда нужное уравнение будет иметь вид:

$$div(k(r)\nabla u) + f(r) = 0. \qquad (1)$$

1.2 Постановка задачи для стационарного распределения тепла в неоднородной среде в сферически симметричном случае, когда область представляет собой шар радиуса *R*

Приведем стационарное уравнение теплопроводности (1) к сферическим координатам путем замены [2].

Для постановки задачи в сферически симметричном случае для начала определим дивергенцию и градиент в сферических координатах, а после подставим в полученное уравнение теплопроводности и упросим его.

Сферические координаты

$$x_1 = r, \qquad x_2 = \theta, \qquad x_3 = \varphi$$

связаны с прямоугольными координатами формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta.$$

Координатные поверхности: концентрические сферы $r = const$, плоскости $\varphi = const$, конусы $\theta = const$.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r\sin\theta,$$

так что

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial r} i_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} i_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} i_3,$$

$$div\ A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi}.$$

Ввиду рассмотрения задачи в сферически симметричном случае можно сделать вывод, что от θ ничего не зависит, тогда замена примет следующий вид:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$div\ A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1).$$

Воспользуемся этой заменой и получим уравнение распределения тепла в неоднородной среде в сферически симметричном случае, когда область представляет собой шар радиуса R. Такое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right) = f(r). \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать следующие граничные условия: $|\,u|_{r=0}| < \infty$ и $u|_{r=R} = g = const$. Заменим первое граничное условие на эквивалентное ему и получим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \qquad u|_{r=R} = g = const. \tag{3}$$

2 Метод конечных разностей

2.1 Основные понятия

При численном решении той или иной математической мы, очевидно, не можем воспроизводить решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства. Естественно поэтому можно выбрать в этой области некоторое конечное подмножество точек и приближенное решение искать только в этих точках. Такое множество точек мы в дальнейшем будем называть сеткой. Отдельные точки этого множества будем называть узлами. Функцию, определенную в узлах сетки, будем называть сеточной функций. Таким образом, мы заменили область непрерывного изменения аргумента сеткой, т.е. областью дискретного изменения аргумента. Иными словами, мы осуществили аппроксимацию пространства решений исходной дифференциальной задачи пространством сеточных функций.

Метод конечных разностей (МКР) является мощным инструментом для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Он основан на идее дискретизации производных в уравнениях, что позволяет заменить дифференциальные уравнения разностными уравнениями. Простейший пример можно рассмотреть на уравнении первого порядка $\frac{\partial y}{\partial t} = f(t, y)$.

Представим, что временной интервал t разбит на равные отрезки длиной Δt, и пространственная переменная y разбита на узлы с шагом Δx. Тогда значение функции в узлах можно обозначить как y_i^n, где i – индекс по пространству, n – индекс по времени.

Производные в исходном уравнении заменяются разностными отношениями. Существует два основных типа методов: явные и неявные. Явные методы выражают значение переменной на следующем временном шаге явно через значение на предыдущих шагах. Неявные методы требуют решения уравнения, включающего значения на новом и предыдущих временных шагах.

После дискретизации уравнений получается система разностных уравнений, которую можно решить численно, используя различные методы, одним из которых может быть метод простых итераций.

Также одним из важных аспектов МКР является анализ устойчивости и сходимости метода. Устойчивость означает, что численное решение не разойдется при увеличении числа шагов. Сходимость означает что численное решение стремится к точному решению при уменьшении шага.

2.2 Разностная схема для уравнения теплопроводности

Рассмотрим разностную схему для уравнения теплопроводности [3].

Приведем уравнение (2) к виду $\left(k(x)u'(x)\right)' = -f(x), 0 < x < 1$:

Домножим (2) на r^2, и после сокращений получим:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -f(x), \tag{4}$$

где

$$k(x) = r^2 k(r), \qquad r^2 f(r) = -f(x). \tag{5}$$

Таким образом мы получили уравнение в нужном виде.

Разностная схема для уравнения (4) будет иметь вид:

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = -\varphi_i, \qquad i = \overline{1, N-1}, \tag{6}$$

где

$$a_i = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}, \qquad i = \overline{1, N}, \qquad \varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Теперь получим разностную аппроксимацию граничных условий (3):

$$y_N = g = const, \qquad y_0 = y_1. \tag{8}$$

3 Программная реализация метода конечных разностей для поставленной задачи на Python

3.1 Написание программы

Для написания программы будем использовать язык программирования Python, который известен своей простотой и легкочитаемостью, что в разы упростит разработку. В связке с Python выберем две библиотеки: NumPy и Matplotlib для удобной работы с массивами и графиками соответственно. Текст программы приведен в приложении А.

Алгоритм метода:

1. Определяем функции $k(x)$ и $f(x)$;
2. Задаем параметры и множество значений x;
3. Вычисляем a_i, φ_i по формулам (7). Для интегрирования используем метод trapz из библиотеки NumPy, который вычисляет интегралы с помощью формулы трапеций;
4. Задаем матрицу коэффициентов и вектор правой части. Заполняем их с учётом граничных условий (8);
5. Решаем полученное матричное уравнение $Ay = b$;
6. Визуализируем полученные результаты путем построения графика.

3.2 Проверка правильности работы программы

Правильность работы программы проверим на известном аналитическом решении, которое сейчас и получим.

Пусть $k(r) = r$. Выберем $u(r)$ удовлетворяющую граничным условиям (3), тогда положим $u(r) = \frac{gr^2}{R^2}$. Подставим $k(r) = r,\ u(r) = \frac{gr^2}{R^2}$ в уравнение (2) и получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{2gr}{R^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{8gr^3}{R^2} = \frac{8gr}{R^2} = f(r).$$

Исходя из замены (5) следует:

$$f(x) = -\frac{8gx^3}{R^2}, \qquad k(x) = x^3.$$

Запустим программу с данными параметрами $f(x)$ и $k(x)$, учитывая, что $R = 1$, а также построим график абсолютной погрешности точного и полученного решения.

Результат выполнения программы представлен на рисунках 3.1, 3.2.

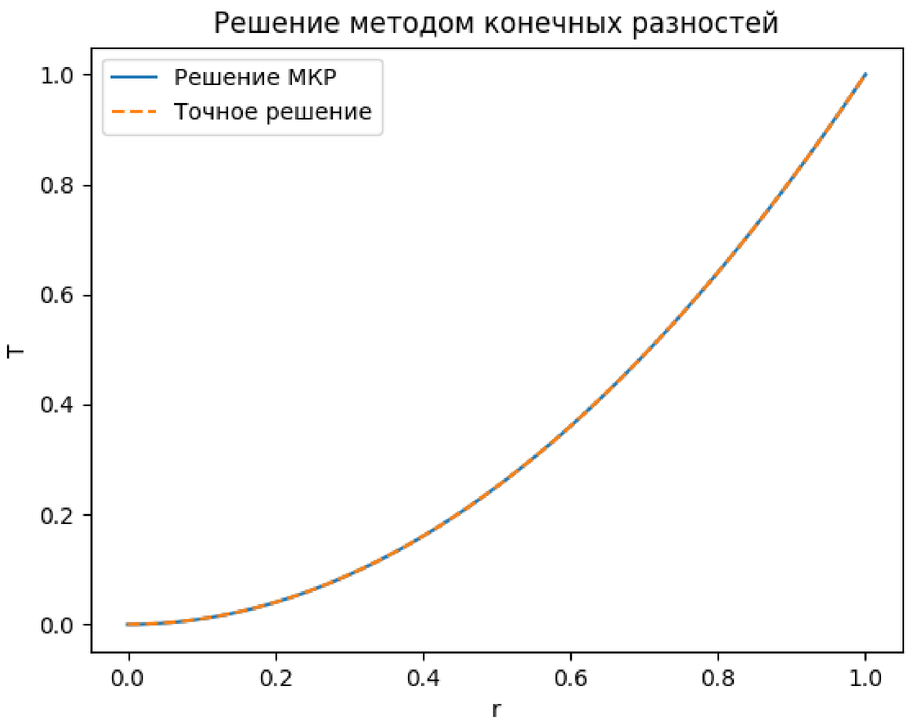

Рисунок 3.1 – Графики точного и МКР решений задачи (4) с параметрами $f(x) = -8x^3,\ k(x) = x^3$

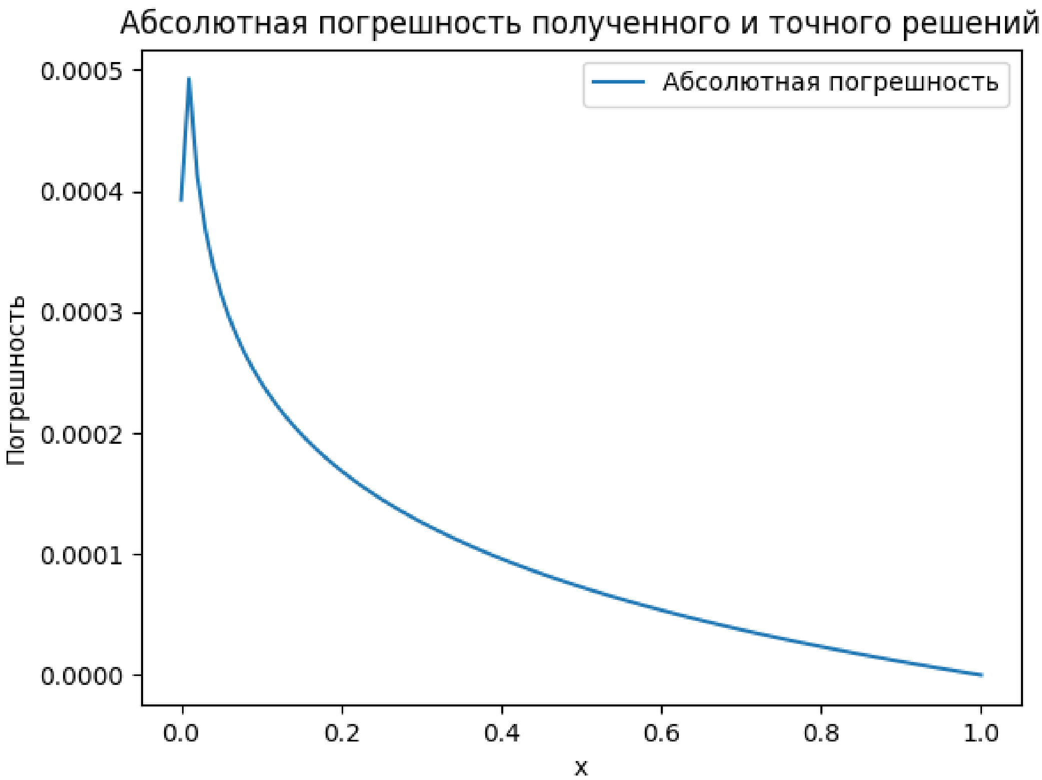

Рисунок 3.2 – Графики абсолютной погрешности точного и МКР решений задачи (4) с параметрами $f(x) = -8x^3,\ k(x) = x^3$

Исходя из графиков можем считать, что написанный текст программы на Python выполняется корректно, а его результат является истинным.

4 Анализ полученных результатов

4.1 Построение графиков распределения температуры для различных значений параметров

Используя текст программы, приведенной в приложении А, построим графики решения методом конечных разностей при разных значениях параметра.

Пусть $f(x) = \sin \pi x$, $k(x) = 1 + x$. График решения МКР представлен на рисунке 4.1.

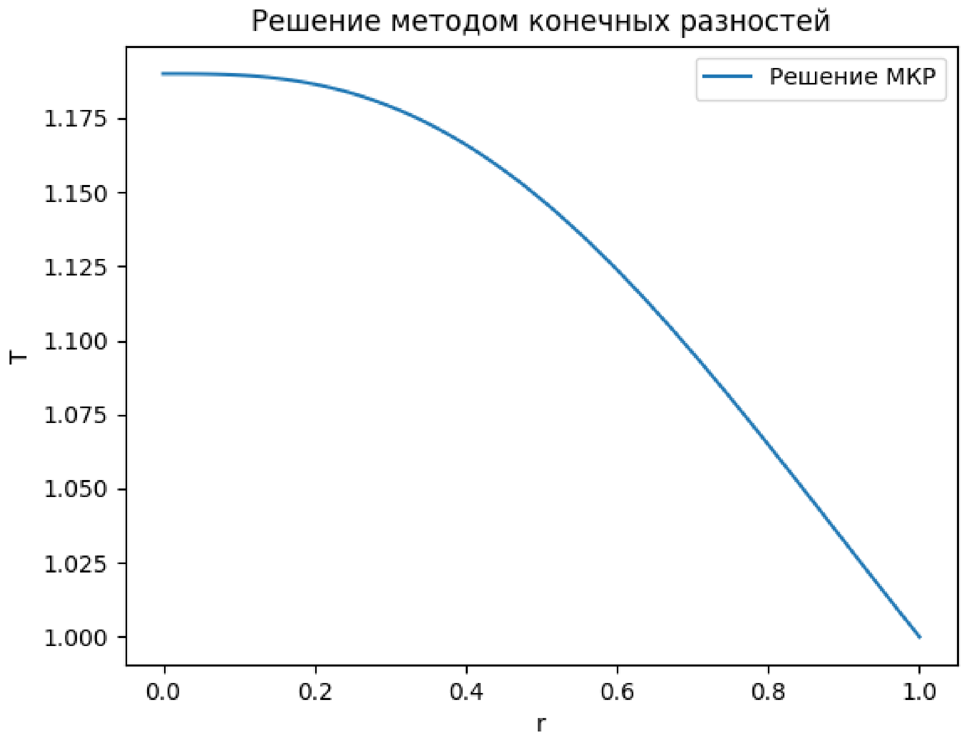

Рисунок 4.1 – График решения задачи (4) МКР с параметрами

$$f(x) = \sin \pi x, \qquad k(x) = 1 + x$$

Пусть $f(x) = \tan 5x$, $k(x) = 0.01 + x$. График решения МКР представлен на рисунке 4.2.

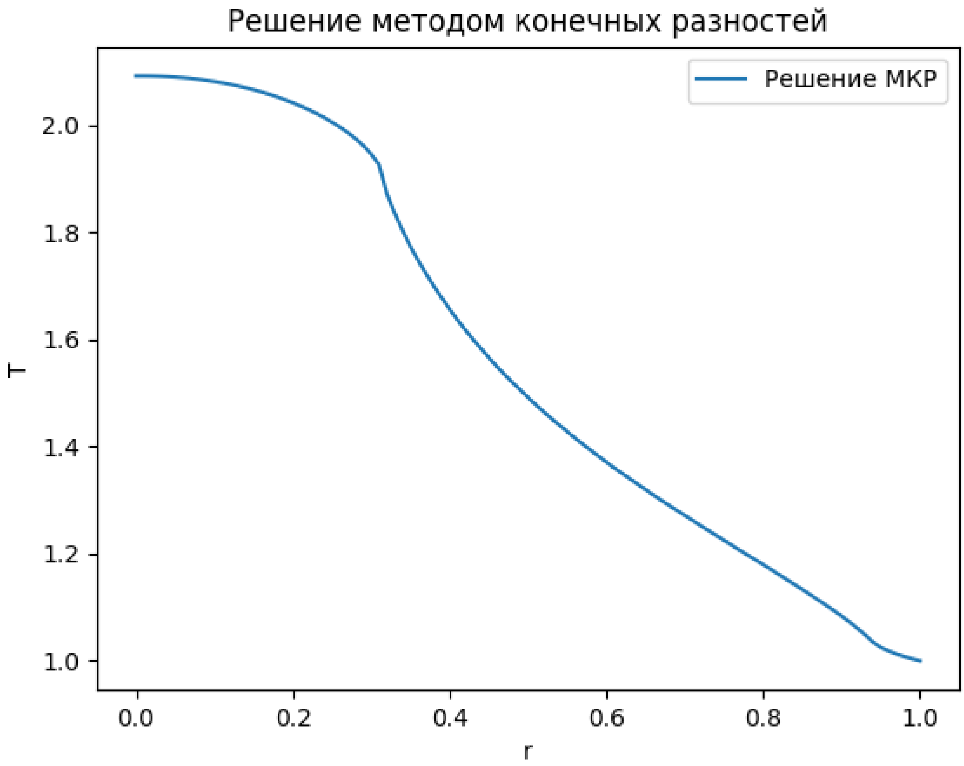

Рисунок 4.2 – График решения (4) МКР с параметрами

$$f(x) = \tan 5x\,, \qquad k(x) = 0.01 + x$$

4.2 Исследование влияния шага сетки на точность результата

Согласно теории, чем меньше шаг сетки, тем точнее решение. Проверим это на параметрах $f(x) = -\frac{8gx^3}{R^2}$, $k(x) = x^3$ из пункта 3.2.

Шаг сетки $h = \frac{L}{N-1}$, где L – длина отрезка на котором строится решение, N – количество узлов сетки.

Построим графики абсолютных погрешностей при $h = \frac{1}{101-1} = 0.01$ и $h = \frac{1}{201-1} = 0.005$ соответственно. Графики представлены на рисунке 4.3.

Также построим графики относительных погрешностей при $h = \frac{1}{101-1} = 0.01$ и $h = \frac{1}{201-1} = 0.005$ соответственно. Графики представлены на рисунке 4.4.

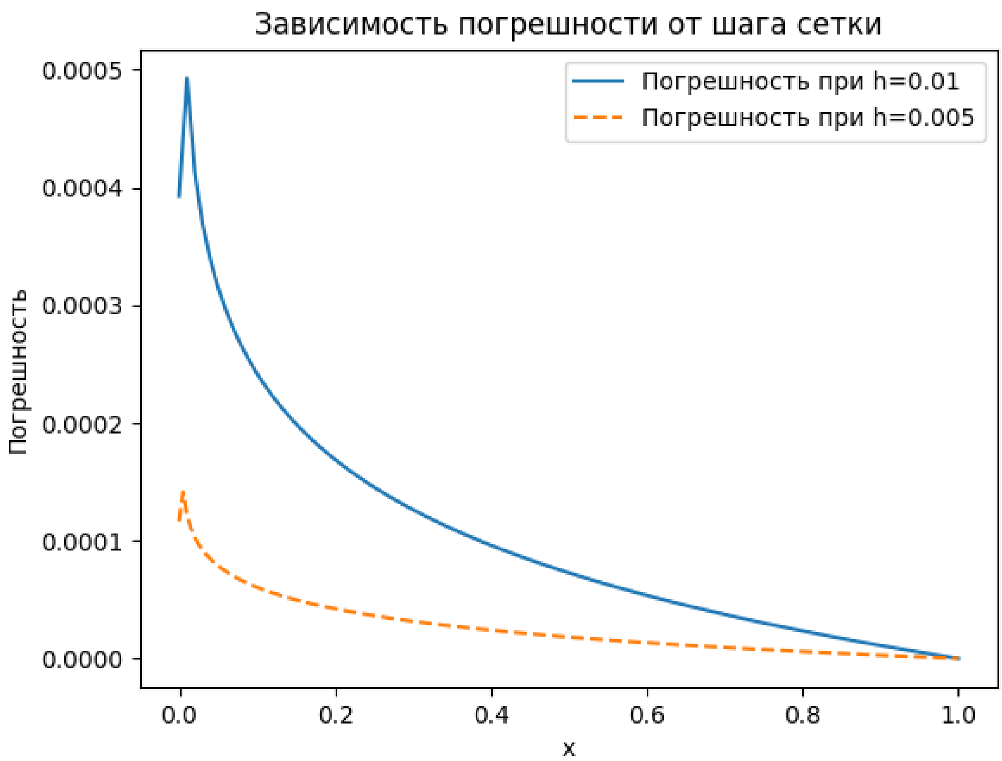

Рисунок 4.3 – График абсолютных погрешностей решения (4) МКР с параметрами $f(x) = -\frac{8gx^3}{R^2}$, $k(x) = x^3$ при разных шагах сетки

Действительно, если проанализировать графики, можно увидеть, что наша теория подтверждена. Шаг сетки напрямую влияет на точность решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данного курсового проекта были проведены обширные исследования по постановке задачи для стационарного распределения тепла в неоднородной среде, особенно в сферически симметричном случае. В процессе изучения были рассмотрены различные аспекты задачи, включая теоретические основы и методы решения.

Основное внимание было уделено методу конечных разностей, который был детально исследован в контексте нашей задачи. Реализация данного метода на языке программирования Python при использовании библиотек Numpy и Matplotlib стала ключевым этапом исследования. Этот процесс включал в себя создание эффективного программного кода и его последующую проверку на корректность.

Успешные результаты экспериментов подтвердили эффективность разработанного программного решения. Программа была тщательно протестирована, и ее корректность была доказана как аналитически, так и численно.

Дополнительно, проведен анализ полученных результатов с использованием построения графиков распределения температуры для различных значений параметров. Этот этап исследования позволил выявить особенности поведения системы в различных условиях и подчеркнуть важность правильного выбора параметров.

Отдельное внимание было уделено изучению влияния шага сетки на точность результата, что существенно влияет на достоверность численного решения. Проведенные аналитические и численные эксперименты выявили влияние шага сетки на конечный результат и позволили сделать выводы о его оптимальных значениях.

Таким образом, данная работа не только подчеркивает значимость выбранного метода и его реализации, но и предоставляет ценные практические исследования, подкрепленные конкретными результатами и анализом, что делает ее важным вкладом в область исследования теплопроводности в неоднородных средах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсенин, В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 384 с.
2. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
3. Репников, В.И. Методы численного анализа / В.И. Репников. – Минск: БГУ, 2009. – 378 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы на языке Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Определяем функцию k(x)
def k(x):
    return x**3 # Задаем k(x) = ... в соответствии с задачей

# Определяем функцию f(x)
def f(x):
    return -8 * x**3 # Задаем f(x) = ... в соответствии с задачей

# Задаем параметры
N = 101
M = 10 # Количество точек на каждом подынтервале
L = 1 # Длина отрезка на котором ищем решение
h = L / (N - 1) # Определяем шаг сетки
a = np.zeros(N)
phi = np.zeros(N)

x_points = np.linspace(0, 1, N) # Задаем множество значений x

# Интегрирование для вычисления a и phi
for i in range(1, N):
    # np.trapz численно интегрирует данные с использованием формулы трапеций

    # вычисление a_i
    x_interval = np.linspace(x_points[i-1], x_points[i], M) # Задаем отрезок
интегрирования
    x_dx = x_interval[1] - x_interval[0] # Определяем dx для интеграла
    a[i] = (1.0 / h * np.trapz(1 / k(x_interval), dx=x_dx)) ** (-1) # Вычисление
a[i] по формуле

    # вычисление phi_i
    x_i_p_half, x_i_m_half = x_points[i] + h/2, x_points[i] - h/2 # Считаем
половинчатые x
    x_phi_interval = np.linspace(x_i_m_half, x_i_p_half, M) # Задаем отрезок
интегрирования
    h_dx = x_phi_interval[1] - x_phi_interval[0] # Определяем dx для интеграла
    phi[i] = 1.0 / h * np.trapz(f(x_phi_interval), dx=h_dx) # Вычисление phi[i]
по формуле

# Задаем матрицу коэффициентов и вектор правой части соответственно
A = np.zeros((N, N))
b = np.zeros(N)

# Заполнение матрицы коэффициентов и вектора правой части
for i in range(1, N - 1): # Цикл по всем узлам сетки, начиная со второго и
заканчивая предпоследним (граничные условия рассматриваются отдельно).
    A[i, i - 1] = a[i] / (h**2) # Заполняем элемент матрицы, отвечающий за y_(i-
1)
    A[i, i] = -(a[i + 1] + a[i]) / (h**2) # Заполняем элемент матрицы,
отвечающий за y_i
    A[i, i + 1] = a[i + 1] / (h**2) # Заполняем элемент матрицы, отвечающий за
y_(i+1)
    b[i] = -phi[i] # Заполняем элемент вектора, отвечающий за phi_i
```

```
# Граничные условия
A[0, 0] = 1
A[0, 1] = 1
b[0] = 0

A[-1, -1] = 1 # Значение g
b[-1] = 1  # Значение g

# Решим полученную СЛАУ
y = np.linalg.solve(A, b)

# Визуализация решения
plt.plot(x_points, y, label='Решение МКР')
plt.plot(x_points, x_points**2, label='Точное решение')
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('T')
plt.title('Решение методом конечных разностей')
plt.legend()
plt.show()
```